

Gli effetti di diversi stimatori dei rendimenti  
attesi sul processo di ottimizzazione di  
Markowitz

Marco Laube

1 febbraio 2013

# Indice

<b>1</b>	<b>Gli strumenti finanziari</b>	<b>6</b>
1.1	La scelta degli strumenti finanziari . . . . .	6
1.1.1	La minimizzazione del rischio . . . . .	6
1.1.2	La diversificazione come strumento di diminuzione del rischio . . . . .	7
1.1.3	Il metodo di scelta top-down: le asset classes . . . . .	9
1.2	Il portafoglio d'analisi . . . . .	9
1.2.1	Gli strumenti e le asset classes . . . . .	9
1.2.2	La raccolta dati . . . . .	12
1.2.3	L'orizzonte temporale . . . . .	12

# Elenco dei simboli

$\mu$	valore atteso
$\bar{x}$	media aritmetica
$\rho_{x,y}$	correlazione tra x e y
$\Sigma$	matrice di covarianza
$\sigma$	deviazione standard
$\sigma_{x,y}$	covarianza tra x e y
$\vec{x}$	vettore
$E[.]$	valore atteso
p	indice relativo al portafoglio
R	variabile aleatoria relativa ai rendimenti
r	indice relativo ai rendimenti
w	peso di un titolo all'interno di un portafoglio

# Elenco delle tabelle

1.1	Asset classes e strumenti finanziari del portafoglio d'analisi . . .	10
-----	--	----

# Introduzione

## Motivazione

La capacità dei soggetti economici di prevedere il futuro, o perlomeno di stimare l'andamento di determinate grandezze, è in molti ambiti della scienza economica di estrema importanza. Tale affermazione risulta evidente se si prende in considerazione l'investimento, una delle attività maggiormente studiate e analizzate in economica. Per definizione, “ l'investimento è l'impiego attuale di denaro o risorse con l'aspettativa di trarre benefici futuri “ (Bodie, Kane e Marcus (2011), p. 29). Di conseguenza, tenendo in considerazione un comportamento razionale, un investimento viene effettuato solo nel caso in cui i benefici futuri siano maggiori del capitale impiegato , ossia i benefici attuali ottenuti dal consumo istantaneo delle risorse. Nel momento di decidere se impiegare o meno delle risorse in un progetto d'investimento, l'individuo a cui è affidato tale compito deve essere in grado di poter calcolare e confrontare questi due tipi di benefici. Da una parte i benefici attuali sono conosciuti e facilmente riconoscibili. Essi si identificano nel capitale a disposizione e nel suo potere d'acquisto di beni di consumo. L'investitore è in grado di ottenere tutte le informazioni necessarie per definire esattamente il valore dei benefici attuali, potendo lui stesso dare un giudizio ai benefici che può ottenere comprando qualcosa con il capitale a disposizione. D'altra parte i benefici futuri, proprio perché futuri, sono incerti. È infatti ovvio come la conoscenza certa di eventi futuri, e quindi anche dei benefici futuri, è confinata nel mondo delle fiabe o nella mente degli ingenui frequentatori di chiromanti. L'incertezza è una conseguenza diretta della mancanza di informazione, può essere dunque considerata come una forma di informazione incompleta, imperfetta. All'investitore manca dunque una parte delle informazioni necessarie per poter definire correttamente i benefici futuri derivanti dall'attuazione dell'investimento. La difficoltà di prendere una decisione d'inve-

stimento risiede in definitiva nel predire correttamente i suoi rendimenti futuri. La previsione è infatti da considerare come quel procedimento di elaborazione dati che permette di ottenere in modo più accurato possibile le caratteristiche di eventi futuri. Da tale riflessione emerge chiaramente l'importanza della previsione in ambito economico. Per questo lo studio e la comprensione degli strumenti necessari per svolgere una buona previsione non solo è di fondamentale importanza per l'economista, ma risulta affascinante, perché mette in stretta relazione metodi matematici e conoscenze economiche. In conclusione, il motivo principale che mi porta a scrivere tale lavoro risiede nel ruolo fondamentale della previsione in economia

## Obiettivo

L'obiettivo di questo lavoro è quello di calcolare, utilizzando diverse metodologie, i rendimenti attesi per le singole asset class incluse in un portafoglio e analizzare l'effetto sul risultato del processo di massimizzazione di Markowitz che esercita la scelta della metodologia di calcolo dei rendimenti attesi. Il primo capitolo presenta gli strumenti finanziari che verranno usati per creare il portafoglio da analizzare. Tali strumenti verranno dapprima suddivisi in asset class, per poi in seguito raccogliere e commentare i dati. In relazione alla raccolta sarà trattato il problema della scelta del periodo di separazione tra i singoli dati. Attraverso tale procedere si darà importanza al concetto di diversificazione e di minimizzazione del rischio. Il secondo capitolo introduce quale stimatore dei rendimenti attesi la media storica. Inizialmente si spiegherà la teoria alla base di tale stimatore. Successivamente si passerà al calcolo pratico e alla presentazione dei rendimenti attesi dei strumenti finanziari esposti nel primo capitolo. In chiusura del capitolo si analizzerà la consistenza di tale stimatore. Il terzo capitolo espone invece quale stimatore il rendimento a scadenza (Yield-to-Maturity, YTM) e il rapporto tra prezzo e utili (Price to earning ratio, P/E), mentre il quarto le previsioni degli analisti. Entrambi questi capitoli sono strutturati come il secondo. Il capitolo quinto presenta i risultati dell'ottimizzazione di Markowitz eseguita con i tre diversi stimatori e fa un'analisi iniziale delle differenze. Partendo dalle constatazioni fatte nel capitolo precedente, quello conclusivo analizza più a fondo i risultati, mettendoli in relazione a concetti teorici e pratici quali l'informazione, le ipotesi di efficienza dei mercati e il significato economico dello Sharpe ratio

# Capitolo 1

## Gli strumenti finanziari

### 1.1 La scelta degli strumenti finanziari

#### 1.1.1 La minimizzazione del rischio

Come evidenzia Harry Max Markowitz nel suo celebre articolo “Portfolio selection” sul Journal of Finance del 1952, la scelta dei strumenti finanziari è subordinata alla minimizzazione del rischio. Per poter far luce su questo principio si deve dapprima chiarire il concetto di rischio in relazione ai rendimenti di uno strumento finanziario. Data la caratteristica di incertezza dei rendimenti futuri, essi possono essere considerati come una variabile aleatoria. Tale incertezza è misurata dalla deviazione standard, ossia la deviazione attesa delle realizzazioni della variabile aleatoria rispetto al valore atteso. È quindi chiaro come in presenza di una deviazione standard nulla non c’è incertezza<sup>1</sup> mentre al suo aumentare vi è pure un aumento dell’incertezza. Il rischio di un singolo titolo può essere quindi misurato attraverso la deviazione standard dei suoi rendimenti, essendo esso equivalente all’incertezza di questi ultimi. Ai fini di agevolare l’analisi che si prefigge questo lavoro<sup>2</sup>, una caratteristica fondamentale è inoltre la simmetria del rischio, anche se alcuni studi empirici ne minano la validità, come per esempio quello di Peirò (2002). In altre parole, il rendimento atteso ha la stessa possibilità di deviare rispetto alla media per la stessa misura sia in positivo, sia in negativo. La variabile aleatoria che definisce i rendimenti

---

<sup>1</sup>In questo caso si è in presenza di una costante pari al valore atteso, non più di una variabile aleatoria e quindi di una grandezza certa.

<sup>2</sup>cfr. 1.1.2 l’orizzonte temporale

di un titolo e' considerata di conseguenza come distribuita normalmente:

$$R \sim N(\mu_r, \sigma_r^2) \quad (1.1)$$

Il concetto di minimizzazione del rischio e' da intendere come la ricerca della varianza minore dato un certo rendimento atteso. Davanti alla scelta tra due titoli che promettono lo stesso rendimento, l'investitore avverso al rischio sceglierà sempre il titolo con la deviazione standard minore (Markowitz (1952a), p.82)

### 1.1.2 La diversificazione come strumento di diminuzione del rischio

Il pensiero di Markowitz (1952a) non è limitato alla scelta tra due titoli. Nella pratica l'investitore e' in grado di scegliere più titoli contemporaneamente. Esso dunque non e' solo interessato al rendimento e al rischio dei vari titoli ma anche all'interazione dei rispettivi rendimenti attesi. Infatti, se empiricamente si può dimostrare uno stretto legame tra due titoli, nel senso che per esempio al rendimento positivo di uno l'altro genera un rendimento negativo e viceversa, l'investitore può comprarli entrambi ed evitare così delle perdite: il rendimento negativo di un titolo viene bilanciato dal rendimento positivo dell'altro annullando di conseguenza il rischio. Intuitivamente si può affermare che più titoli si posseggono più il rischio sopportato dall'investitore diminuisce e che di conseguenza la relazione tra strumenti finanziari e la capacità dell'investitore di possederne contemporaneamente più di uno, detta anche diversificazione, sono fattori che contribuiscono a tale diminuzione. Per poter analizzare più a fondo questa affermazione sono necessari i concetti di covarianza e portafoglio. Come detto in precedenza, essendo i rendimenti di strumenti finanziari delle variabili aleatorie, la loro interazione può essere descritta tramite la covarianza  $\sigma_{x,y}$  o, nel caso di più di due titoli, la matrice di covarianza  $\Sigma$ . Il portafoglio è l'insieme di titoli posseduti da un investitore mentre i suoi rendimenti sono la media pesata dei rendimenti dei titoli che lo compongono. Essendo tali rendimenti delle variabili aleatorie, lo è pure il rendimento di un portafoglio<sup>3</sup>:

$$R_p = \vec{w}^T \vec{R} \quad (1.2)$$

---

<sup>3</sup>la somma dei pesi, ossia la somma delle componenti di  $\vec{w}$ , è pari a uno



Come qualsiasi altro investimento, anche un portafoglio presenta le caratteristiche base quali rendimento atteso  $\mu_p$  e varianza  $\sigma_p^2$ . Utilizzando le relative proprietà matematiche si ottiene:

$$\mu_p = \vec{w}^T E \left[ \vec{R} \right] = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad (1.3)$$

$$\sigma_p^2 = \vec{w}^T \Sigma_p \vec{w} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Cov(r_i, r_j) \quad (1.4)$$

Bodie, Kane e Marcus (2011, p. 245) espongono il seguente metodo d'analisi per evidenziare la forza della diversificazione. Si assuma un portafoglio composto in egual misura da tutti i titoli, ossia  $w = \frac{1}{n}$  dove  $n$  è il numero di titoli del portafoglio. Considerando la formula algebrica della varianza del portafoglio e separando le varianze dalle covarianze<sup>4</sup> si ottiene:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_{i,j} \quad (1.5)$$

Inserendo la varianza media  $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$  e la covarianza media  $\overline{\sigma_{i,j}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}$  in (5) la varianza del nostro portafolio diventa:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n} \overline{\sigma_{i,j}} \quad (1.6)$$

Matematicamente la diversificazione non è altro che l'aumento del numero di titoli finanziari  $n$ . Con  $n \rightarrow \infty$  il fattore del primo termine tende a 0 mentre quello del secondo tende a 1. Di conseguenza la varianza del portafoglio sotto l'effetto di una forte diversificazione, è la covarianza media dei titoli. Escludendo alcune eccezioni<sup>5</sup>, la diversificazione è quindi efficace nel minimizzare il rischio solo nel momento in cui i titoli scelti presentano una bassa covarianza. Markowitz (1952a, p.82) evidenzia come un portafoglio con molti titoli legati ad

<sup>4</sup>La doppia sommatoria passa in rassegna tutti gli indici, e quindi per  $i=j$  si ottiene  $w_i w_i \sigma_{i,i} = w_i^2 \sigma_i^2$ . La varianza del portafoglio non è altro che la somma delle singole varianze dei titoli per i rispettivi pesi al quadrato più il doppio della somma delle covarianze pesate.

<sup>5</sup>per prodotti strutturati basati sul principio del worst-of come i multi-asset barrier reverse convertibles al diminuire della correlazione si ha un aumento del rischio, come evidenziato da Wallmeier e Diethelm (2008).

una stessa industria, data l'elevata correlazione<sup>6</sup> tra di essi, possono presentare un rapporto rendimento atteso/varianza peggiore rispetto un singolo strumento finanziario e conclude che "(...) in trying to make variance small it is not enough to invest in many securities. It is necessary to avoid investing in securities with high covariances among themselves." In conclusione, un investitore che vuole scegliere strumenti finanziari con il fine di creare un portafoglio efficiente, ossia un portafoglio con varianza minima dato il rendimento desiderato<sup>7</sup>, deve tener conto della relazione che i titoli scelti presentano.

### 1.1.3 Il metodo di scelta top-down: le asset classes

Sostanzialmente per costruire un portafoglio si usa un processo "Bottom-up" o uno "Top-down". Il primo consiste nello scegliere direttamente gli strumenti finanziari che sembrano attrattivi. Attraverso tale metodologia risulta però difficile scegliere tenendo in conto la relazione tra i vari titoli ed evitare così il pericolo di avere un portafoglio troppo legato ad un'industria o a titoli positivamente correlati (Bodie, Kane, Marcus (2011), p.37). Il processo "Top-down" d'altro canto è in linea con il principio di diversificazione. Gli attivi finanziari possono essere suddivisi in categorie tra di loro poco correlate, come per esempio azioni, obbligazioni, materie prime, etc. Tali categorie vengono chiamate asset class. Una volta eseguita la categorizzazione degli strumenti finanziari, l'investitore decide se e quanto investire in ciascuna classe. Solo successivamente si appresta a scegliere i singoli titoli, magari dopo aver eseguito un'ulteriore divisione delle classi in sottoclassi, per esempio per industria, paese, etc. (Bodie, Kane, Marcus (2011), p.36). Tanto più bassa è la correlazione tra le classi tanto più il processo "Top-down" porta alla costruzione di un portafoglio efficiente.

## 1.2 Il portafoglio d'analisi

### 1.2.1 Gli strumenti e le asset classes

I concetti di minimizzazione del rischio e diversificazione uniti al processo "Top-down" sono essenziali per poter costruire un portafoglio in grado di dare un significato alle analisi svolte. Ed è seguendo questi principi che si sono scelti i seguenti strumenti finanziari:

---

<sup>6</sup> per la correlazione vale  $\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$ , e quindi oltre al segno della relazione tra due variabili, rispetto alla covarianza misura anche l'intensità

<sup>7</sup> Si noti che ciò equivale a massimizzare il rendimento dato il rischio da sopportare

Asset classes	Strumenti finanziari	Valuta
Risk Free	Euro 3M	E
Short Term	Svizzera 3M	CHF
	Stati Uniti 3M	\$
Obbligazioni governative	Governativi 5 - 7 Anni Eu	E
	Governativi 5 - 7 Anni US	\$
Obbligazioni Corporate	Corporate US	\$
	Corporate Eu	E
High Yield	High Yield US	\$
	High Yield Eu	E
Mercati emergenti	Emergenti diversificati	\$
Obbligazioni convertibili	Convertibili Europa	E
Azioni	Dow Jones Euro STOXX 50	E
	Standard and Poors 500 Composite	\$

Tabella 1.1: Asset classes e strumenti finanziari del portafoglio d'analisi

La classe **short term**, così come quella risk free, presenta degli indici relativi a franchi svizzeri (Svizzera 3M), dollari americani (\$) e euro. Tali indici sono gestiti da JPMorgan e misurano il rendimento totale di un investimento in un deposito bancario a scadenza costante di tre mesi nella relativa moneta. Sono dunque un'ottima rappresentazione della moneta quale strumento d'investimento

Nella classe **obbligazioni governative**, troviamo le obbligazioni governative americane, i cosiddetti treasury bill, e l'indice pesato delle obbligazioni europee di JPMorgan, ossia un indice pesato contenente i maggiori titoli statali europei<sup>8</sup>, entrambi con scadenza tra i 5 e i 7 anni che misura i rendimenti totali. Entrando nella categoria generale delle obbligazioni, i bond governativi si differenziano da altri tipi perché rappresentano un'istituzione pubblica, che di principio ha caratteristiche diverse rispetto ad una società privata. La grandezza e l'importanza a livello sociale e legislativo, soprattutto nei paesi sviluppati, la rendono più stabile. Le obbligazioni governative dunque hanno rendimenti e volatilità minori rispetto ad altre. Inoltre, la scelta di due strumenti relativi a due istituzioni distanti, permette una diversificazione geografica.

<sup>8</sup> Per la composizione dettagliata si rimanda alla lista costituente presente in Datastream

Tale tipo di diversificazione la si ritrova anche nella classe **obbligazioni corporate**, dove vengono scelti due indici pesati, che misurano i rendimenti totali e vengono gestiti da Bank of America e Merrill Lynch, uno contenente le obbligazioni con scadenza maggiore di un anno di aziende americane, l'altro di aziende europee<sup>9</sup>. La particolarità di questa asset class sta nel tipo di azienda la cui obbligazione compare nell'indice. Considerando le valutazioni Moody's, S&P, and Fitch esse presentano un rating medio BBB o superiore, ossia sono molto stabili e con prospettive di crescita. Ciò le differenzia in termini di rendimento e volatilità rispetto ad aziende a rischio di fallimento o in crisi. Come per le obbligazioni governative quindi, si ha un effetto di diversificazione legato alla tipologia di istituzione.

Le aziende a rischio vengono rappresentate nel portafoglio d'analisi attraverso gli indici della classe **High Yield**. Tali indici, creati da Bank of America e Merrill Lynch, presentano le stesse caratteristiche degli indici corporate ma in questo caso il ranking medio è inferiore a BBB.

Le classi summenzionate hanno finora preso in considerazione obbligazioni di paesi in sviluppo. L'indice pesato presente nella classe **Mercati emergenti** e calcolato da JPMorgan, contiene una vasta gamma di obbligazioni emesse in paesi in via di sviluppo. Si è dunque di fronte ad una diversificazione geografica che, rispetto a quella tra stati uniti e europa, è più marcata. I paesi in via di sviluppo presentano infatti una situazione sociale ed economica diversa rispetto ai paesi sviluppati e ciò determina delle caratteristiche diverse in termini di rendimenti e rischio.

Infine la classe **azioni** contiene due famosi indici. Il primo, il Dow Jones Euro Stoxx 50, rappresenta le 50 aziende europee maggiormente capitalizzate. Lo Standard and Poor 500 Composite invece è un indice contenente 500 società americane scelte da un comitato attraverso criteri quali la capitalizzazione, la liquidità e il settore. Entrambi sono pesati rispetto alla capitalizzazione e considerano i rendimenti totali, inclusi i dividendi. La scelta di questi due indici segue il principio di diversificazione tra Stati Uniti e Europa, già utilizzato per le varie classi di bond. Il significato di questa asset class risiede nella diversa natura del rischio di un'azione rispetto a quello di un'obbligazione. Da un punto di vista teorico, le azioni hanno un livello di rischio più elevato rispetto alle obbligazioni. Infatti gli azionisti hanno il diritto al rendimento residuo e quindi sopportano la maggior parte del rischio dell'azienda i cui ricavi vengono prima usati per

---

<sup>9</sup>sono escluse quelle britanniche

pagare i prestiti, tra cui figurano i detentori di obbligazioni. Questo schema di retribuzione rende i debitori soggetti a un rischio legato solo alla variazione dei tassi d'interesse e a una remota possibilità di default. Azioni e obbligazioni non differiscono solo per quello che riguarda il rischio, ma anche per il tipo di rendimento. Le prime hanno un rendimento variabile che dipende dalle scelte strategiche dell'azienda, mentre le seconde hanno un rendimento fisso in forma di coupon. Si è dunque di fronte a due diverse tipologie di strumenti finanziari, che a rigor di logica vanno considerate in asset class diverse.

### **1.2.2 La raccolta dati**

### **1.2.3 L'orizzonte temporale**

Una caratteristica importante dei rendimenti attesi di uno strumento finanziario è il lasso di tempo entro il quale l'investitore si aspetta di ottenerli. Più è ampio, più i rendimenti attesi sono elevati. Infatti, se per esempio il rendimento mensile è del 1%, il rendimento annuale, considerando di reinvestire i rendimenti mensili, sarà  $(1+1)^{12}-1 = 12,68^{10}$ . Inoltre, il lasso di tempo influisce sulla varianza. Più è ampio, e più le previsioni riguardo al rendimento sono incerte e difficili da quantificare. Un rendimento atteso a base decennale può presentare sì dei rendimenti attesi maggiori rispetto ad uno a base annuale, ma sarà anche molto più rischioso.

---

<sup>10</sup>l'esempio può essere generalizzato per qualsiasi rendimento.

## Riferimenti Bibliografici

# Bibliografia

[Portofolio selection Markowitz] Bodie, Z., Kane, A. e Marcus, A. (2011).  
Investments and Portfolio Management, New  
York, McGraw-Hill/Irwin

Portofolio selection Markowitz

An analysis of variance test for normality(complete samples) Shapiro Wilk

Amado Peirò, skewness in individual stocks at different investment horizon,

Quantitative Finance,

[https://www.oppenheimerfunds.com/articles/article\\_05-17-12-123628.jsp](https://www.oppenheimerfunds.com/articles/article_05-17-12-123628.jsp) 1.2.2013

<http://research.stlouisfed.org/fred2/series/BAMLHYH0A0HYM2TRIV> 1.2.2013

<http://www.standardandpoors.com/servlet/BlobServer?blobheadername3=MDT->

Type&blobcol=urldata&blobtable=MungoBlobs&blobheadervalue2=inline%3B+filename%3Dfs-

sp-500-ltr.pdf&blobheadername2=Content-Disposition&blobheadervalue1=application%2Fpdf&blobkey=i

type&blobwhere=1244142397091&blobheadervalue3=UTF-8 1.2.2013

[http://www.stoxx.com/indices/index\\_information.html?symbol=sx5E](http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol=sx5E) 1.2.2013