Formalización del teorema de representación subdirecta

Marco Nardelli

March 13, 2024

1 Introducción

El objetivo de este proyecto es el estudio de Álgebra Universal y la formalización de algunos resultados de esta área. Para ello, este trabajo consistirá en formalizar es el teorema de representación subdirecta (Birkhoff, 1944) [1]. En las próximas secciones de este documento se detallan las definiciones y lemas auxiliares necesarios para entender y saber qué modelar a la hora de formalizar la prueba del teorema. La herramienta a utilizar para dicha formalización es el asistente de pruebas *Agda*,tomando como base la librería de Álgebra Universal de Agda, desarrollada por William DeMeo.

2 Presentación del teorema

Teorema de representación subdirecta *Toda álgebra no trivial es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles*

2.1 Descomposición y estructura de la prueba:

A continuación, presentamos un listado, con detalles de las definiciones y resultados necesarios para realizar el trabajo.

2.1.1 Definición de Álgebra:

Un álgebra es un par $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y $F = \langle f_i : i \in I\rangle$ es una familia de operaciones sobre A, indexada en un conjunto I. Llamamos a la función $\rho: I \to \omega$, la función de tipo de $\mathbf{A}$. Esta función asigna a cada $i \in I$ el rango de f_i.

Diremos que un álgebra es trivial si su universo tiene cardinalidad 1.

2.1.2 Definición de Subálgebra:

Dadas álgebras $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ del mismo tipo $\rho: I \to \omega$, diremos que $\mathbf{B}$ es subálgebra de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada $i \in I$, $\quad g_i = f_i|_{B^{\rho(i)}}$

2.1.3 Homomorfismos, isomorfismos y embeddings:

Definición de Homomorfismo: Dadas álgebras $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ del mismo tipo. Una función $h: B \to A$ se le llama homomorfismo si para cada $i \in I$ y para cada $b_1, \ldots, b_n \in B$, $h(g_i(b_1, \ldots, b_n)) = f_i(h(b_1), \ldots, h(b_n))$

Definición de embedding Llamaremos embedding a la función $h: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ si es un homomorfismo inyectivo.

Definición de isomorfismo Si $h: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo biyectivo, luego $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son llamados isomorfos.

2.1.4 Producto directo, subdirecto y álgebras subdirectamente irreducibles:

Definición de producto directo: Sea $\mathcal{S} = \langle S_i : i \in I\rangle$ una secuencia de conjuntos. El *producto directo* de S es el conjunto

$$\prod_{i\in I} S_i = \{f: I \to \bigcup_{i\in I} |(\forall i \in I) f(i) \in S_i\}$$

Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ una secuencia de álgebras del mismo tipo. El producto directo de la secuencia es el álgebra $\mathbf{B}$ con universo $B = \prod_{i\in I} A_i$ y para cada símbolo de operación g y $f_1, \ldots, f_n \in B$ tenemos

$$(g^{\mathbf{B}}(f_1, \ldots, f_n))(i) = g^{\mathbf{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)), \quad \forall i \in I$$

Definición de producto subdirecto: Un álgebra $\mathbf{B}$ es un *producto subdirecto* de $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ si $\mathbf{B}$ es un subálgebra de $\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ y para cada $i \in I$, $p_i|_B : \mathbf{B} \to \mathbf{A}_i$ es suryectiva.

Definición de subdirect embedding Dado un embedding $g: \mathbf{B} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es llamado subdirecto si $g(\mathbf{B})$ es un producto subdirecto de $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$.

Definición de álgebra subdirectamente irreducible: Un álgebra no trivial $\mathbf{A}$ es llamada subdirectamente irreducible si para todo subdirect embedding $h: \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$, hay un $j \in I$ tal que $p_j \circ h: \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$ es un isomorfismo.

2.1.5 Relaciones de equivalencias y congruencias

Definición de relación de equivalencia: Sea A un conjunto, dada una relación binaria θ, es una relación de equivalencia sobre A si para todos $x, y, z \in A$ se tiene que:

$x\theta x \quad (reflexividad)$
$x\theta y \Rightarrow y\theta x \quad (simetria)$
$x\theta y \wedge y\theta z \Rightarrow x\theta z \quad (transitividad)$

Definición de kernel Sea $f\colon A \to B$ una función cualquiera. definimos

$$kerf = \{(x,y) \in A^2 \colon f(x) = f(y)\},$$

llamada el kernel de f.

Clases de equivalencias Sea θ una relación de equivalencia sobre A. Para $a \in A$ escribimos

$$a/\theta = \{x \in A \colon a\theta x\},$$

le llamamos la clase de equivalencia de a modulo θ. Y podemos escribir el conjunto A/θ, el cociente de A por θ, que contiene todas las clases de equivalencias modulo θ.

Definición de congruencia Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y θ una relación de equivalencia sobre A, llamamos congruencia sobre $\mathbf{A}$ si θ satisface que para cada operación básica f se da:

$$x_1\theta y_1 \wedge \ldots \wedge x_n\theta y_n \Rightarrow f(x_1,\ldots,x_n)\theta f(y_1,\ldots,y_n)$$

Definición de álgebra cociente Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y θ una congruencia sobre $\mathbf{A}$. El álgebra cociente $\mathbf{A}/\theta$ es un álgebra similar a $\mathbf{A}$, con universo A/θ y con las operaciones básicas definidas con la ecuación:

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta,\ldots,a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)/\theta$$

Mas notación para entender los lemas auxiliares a formalizar: Sea $0_A = \{(x,x) \colon x \in A\}$ y $1_A = A \times A$, son clases de equivalencias sobre A.

2.1.6 Definición de Elementos meet-irreducibles

Sea $\mathbf{L}$ un reticulado completo. Un elemento a es llamado meet-irreducible si $a = b \wedge c$ implica que a=b o a=c. Un elemento es completely meet-irreducible si $a \neq 1_L$ y $a = \bigwedge_{i\in I} b_i$, hay un $j \in I$ tal que $a = b_j$.

2.1.7 Lemas auxiliares a formalizar:

Proposición sobre subdirect embeddings: Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y sea θ_i una congruencia sobre $\mathbf{A}$ para todo $i \in I$. Si $\bigcap_{i\in I}\theta_i = 0_A$, luego el mapeo natural $\mathbf{A} \to \prod_{i\in I}\mathbf{A}/\theta_i$ es un subdirect embedding. Contrariamente, si $g\colon \mathbf{A} \to \prod \mathbf{B}_i$ es un subdirect embedding, luego con $\theta_i = ker(p_i \circ g)$, tenemos que $\cap\theta_i = 0_A$ y $\mathbf{A}/\theta_i \cong \mathbf{B}$

Lema de Zorn: Sea $\mathbf{P}$ un poset no vacío. Supongamos que toda cadena en P tiene una cota superior. Luego $\mathbf{P}$ tiene un elemento maximal.

Teorema de álgebras subdirectamente irreducibles: Un álgebra **A** es subdirectamente irreducible si y solo si 0_A es completamente meet-irreducible en Con **A**. Mas generalmente, si θ es una congruencia sobre un álgebra **A**, luego $\mathbf{A}/\theta$ es subdirectamente irreducible si y solo si θ es completamente meet-irreducible en Con **A**.

Lema de elementos completely meet-irreducible Sea a un elemento de un reticulado completo **L** las siguientes son equivalentes:

1. a es completely meet-irreducible
2. Hay un elemento $c \in L$ tal que $a < c$ y para cada $x \in L$, $a < x$ implica $c \leq x$

2.2 Observaciones:

- En la librería de Algebra Universal de Agda, ya se encuentran modeladas las nociones de producto, congruencia y subálgebras. `https://github.com/ualib/agda-algebras`
- La prueba del teorema de birkhoff invoca resultados sin llamarlos

References

[1] Clifford Bergman: Universal Algebra Fundamentals and Selected Topics (2011)