



POLITECNICO  
DI TORINO

DET

Department of Electronics and Telecommunications

# Sistemi Elettronici, Tecnologie e Misure

## Organizzazione del Corso

# Esercitazioni di Laboratorio

- Per iscriversi al laboratorio:

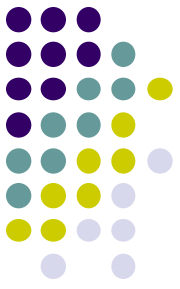


- Inviare email a: [giovanni.costanzo@polito.it](mailto:giovanni.costanzo@polito.it)
- **Subject: SETM LAB**
- Body: max 4 righe con indicazione dei componenti il gruppo nel formato **Cognome, Nome, Matricola**
- Inviare una sola mail per gruppo. I gruppi con meno di quattro studenti saranno accorpati.
- Il termine per le iscrizioni è **martedì 17 ottobre 2023** ore 23:59.

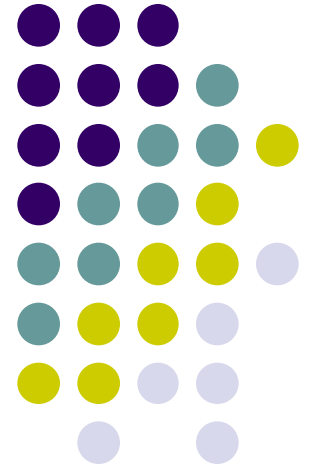
I docenti si riservano di spostare allievi e gruppi per esigenze organizzative.

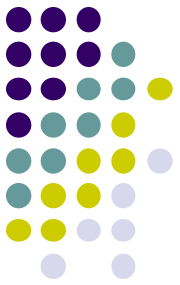


# Sistemi Elettronici Tecnologie e Misure



Misurare  
Incertezze di Misura  
Incertezze di Tipo A e Tipo B  
Espressione dell'incertezza in un voltmetro  
Esercizi





# Misurare

Da sempre l'uomo effettua misure per conoscere il mondo che lo circonda e le proprietà degli oggetti

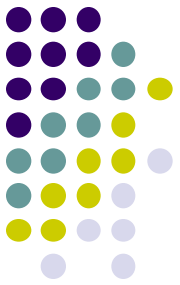
## ❑ MISURA:

### ❑ **procedimento di misurazione**

- ❑ porta all'assegnazione di un valore ad una grandezza fisica detta misurando

### ❑ **risultato della misurazione**

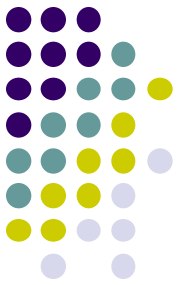
- ❑ è espresso da un valore numerico, un valore che indica l'incertezza di tale misura, infine da un'unità di misura



# Misurare

- ❑ **Determinare il valore (costo) di oggetti**
- ❑ **Determinare la qualità di beni**
  - ❑ Esempi:
    - ❑ dimensione di terreni, stoffe, ...
    - ❑ quantità di grano, sementi, acqua, ...
- ❑ **Storicamente:** “Pesi e misure”, convenzione del metro (1875)...

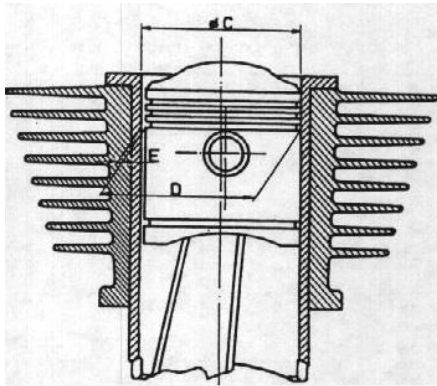
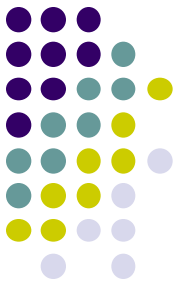
# Misurare



## ❑ Motivazioni di tipo tecnico

- ❑ prove di accettazione per i semilavorati
  - ❑ intercambiabilità fra i prodotti di più fornitori
- ❑ prove per la verifica della qualità del processo produttivo
  - ❑ compatibilità fra pezzi provenienti da processi diversi
- ❑ prove per la verifica della qualità dei prodotti finiti
  - ❑ compatibilità fra prodotto e specifiche di progetto
- ❑ confronto fra prodotti di fornitori differenti

# Esempio: tolleranze meccaniche pistone-cilindro



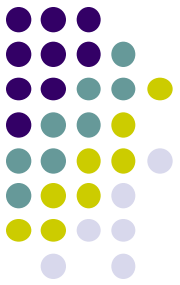
La cifra meno significativa è  
pari a 0.001mm  $\rightarrow$  1 $\mu$ m

250 MONZA - G.T. - SCRAMBLER MOTOR CYCLES

ASSEMBLY	CYLINDER C = mm.		PISTON D = mm.		Max. clearance E = mm.	Min. clearance E = mm.	Limits of wear mm.
Standard	A	74.00 $\div$ 74.01	B	73.905 $\div$ 73.895	0.115	0.095	0.16
	B	74.01 $\div$ 74.02	A	73.915 $\div$ 73.905	0.115	0.095	
1st rebores +0.4	A	74.40 $\div$ 74.41	B	74.305 $\div$ 74.295	0.115	0.095	
	B	74.41 $\div$ 74.42	A	74.315 $\div$ 74.305	0.115	0.095	
2nd rebores +0.6	A	74.60 $\div$ 74.61	B	74.505 $\div$ 74.495	0.115	0.095	
	B	74.61 $\div$ 74.62	A	74.515 $\div$ 74.505	0.115	0.095	
3rd rebores +0.8	A	74.80 $\div$ 74.81	B	74.705 $\div$ 74.695	0.115	0.095	
	B	74.81 $\div$ 74.82	A	74.715 $\div$ 74.705	0.115	0.095	
4th rebores +1	A	75.00 $\div$ 75.01	B	74.905 $\div$ 74.895	0.115	0.095	
	B	75.01 $\div$ 75.02	A	74.915 $\div$ 74.905	0.115	0.095	

PISTON D = mm.		
B	73.905 $\div$ 73.895	
A	73.915 $\div$ 73.905	
B	74.305 $\div$ 74.295	
A	74.315 $\div$ 74.305	
B	74.505 $\div$ 74.495	

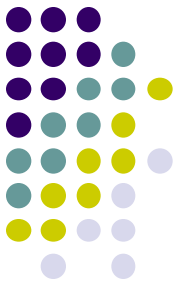
# Misurare



## ❑ Motivazioni di tipo scientifico

- ❑ conoscere un fenomeno fisico e ricavarne un modello (sperimentazione sul fenomeno fisico)
- ❑ validare i parametri del modello mediante verifica sperimentale (migliorare l'accuratezza del modello): misure su circuiti elettronici, misure meccaniche, misure termiche, etc etc...
- ❑ tenere sotto osservazione (monitorare) il fenomeno per intervenire e modificare il suo comportamento (controlli automatici)



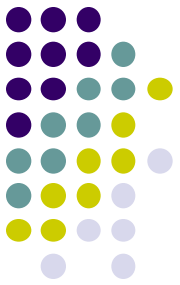


# Misurare

## ❑ Esempio di misure “semplici”:

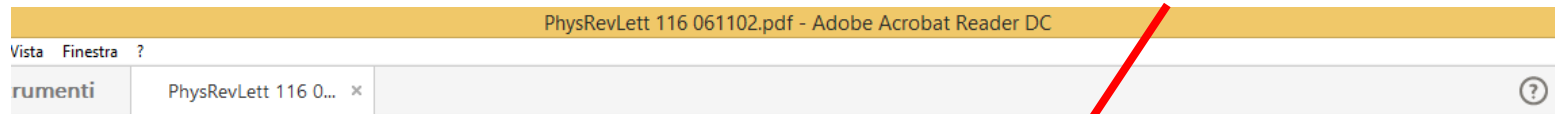
- ❑ Misurare la proprietà fisica chiamata “resistenza” di un materiale conduttore
- ❑ Metodo di misura: voltamperometrico
- ❑ Modello matematico:  $R = V / I$
- ❑ ... procedimento
- ❑  $R = (12.5 \pm 0.1) \, \Omega$

# Esempio di misura “complessa”



$$10^{-21} \times 4 \text{ km} \times 100 = 4 \times 10^{-16} \text{ m} !!!$$

Dimensione protone:  $10^{-15} \text{ m}$



PRL **116**, 061102 (2016)

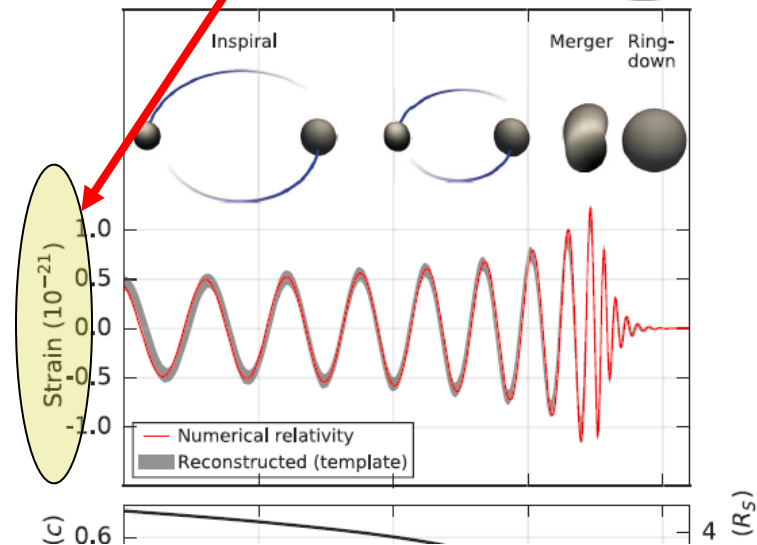
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
12 FEBRUARY 2016

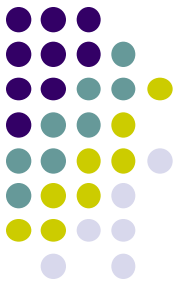
propagation time, the events have a combined signal-to-noise ratio (SNR) of 24 [45].

Only the LIGO detectors were observing at the time of GW150914. The Virgo detector was being upgraded, and GEO 600, though not sufficiently sensitive to detect this event, was operating but not in observational mode. With only two detectors the source position is primarily determined by the relative arrival time and localized to an area of approximately  $600 \text{ deg}^2$  (90% credible region) [39,46].

The basic features of GW150914 point to it being produced by the coalescence of two black holes—i.e., their orbital inspiral and merger, and subsequent final black hole ringdown. Over 0.2 s, the signal increases in frequency and amplitude in about 8 cycles from 35 to 150 Hz, where



# Misurare



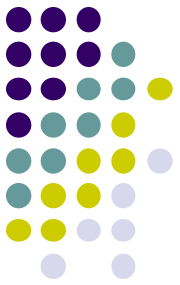
Misurare significa **acquisire** e **comunicare informazioni oggettive** sul mondo fisico

- Il risultato di una misurazione (cioè l'informazione ottenuta) si chiama **misura**

La **misura** è definita quando sono dichiarati:

- il valore numerico stimato (per es: 3.2)
- l'unità di misura associata (per es. Metri, m)
- l'intervallo di valori che può assumere il valore di misura stimato (per esempio  $\pm 0.1$  m)

Il procedimento con cui si misura si chiama **misurazione**

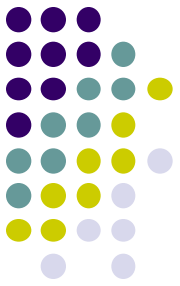


# Misurare

Occorre un **accordo**

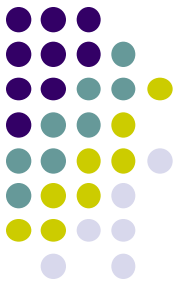
- su **un'unità di misura** e sul **campione**
  - Per es. per le lunghezze esiste accordo sul metro
- su un **metodo** di misurazione
  - Per es. confronto diretto fra la grandezza da misurare e il campione
- sulle **modalità** di **comunicare** il risultato della **misura**
  - Per es. le regole di scrittura del risultato della misurazione

# Campione antiche misure (Senigallia)



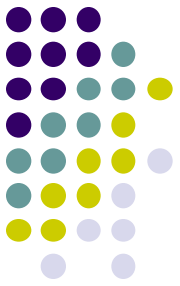


# Campione antiche misure (1860)



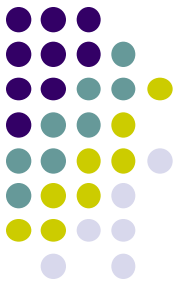
RAGGUAGLIO DEI PESI E DELLE MISURE ANTICHE CON LE NUOVE METRICHE DECIMALI					
ANTICHE		MISURE LINEARI		NUOVE	
1 BRACCIO (SOLDI 20)		METRI	DECIMETRI	CENTIMETRI	MILLIMETRI
1 SOLO (QUATTRO 5)		0	5	8	4
1 QUATTRO (DENARI 4)		0	0	2	8
1 DENARO E UGUALE A		0	0	1	0
CANNA AGRIMENSORIA O PERTICHE DI P. 5		0	0	0	2 1/2
		2	9	1	8
MISURE DI CAPACITÀ PER I LIQUIDI					
PER L'OLIO	1 BARILE DI FIASCHI 16 O LIBBRE 88	METRI	DECIMETRI	CENTIMETRI	MILLIMETRI
	1 FIASCO (BOCCALI 2)	52	6	8	6
	1 BOCCALE (MEZZETTE 2)	2	0	4	3
	1 MEZZETTA (QUARTUCCI 2)	1	0	2	1
	1 QUARTUCCIO E UGUALE A	0	5	1	1
PER IL VINO	1 BARILE (FIASCHI 20)	0	2	5	5
	1 FIASCO (BOCCALI 2)	45	5	8	4
	1 BOCCALE (MEZZETTE 2)	2	2	7	9
	1 MEZZETTA (QUARTUCCI 2)	1	1	4	0
	1 QUARTUCCIO E UGUALE A	0	5	7	0
MISURE DI CAPACITÀ PER I GRANI					
1 SACCO (STAIA 3)		LITRI	DECIMETRI	CENTIMETRI	MILLIMETRI
1 STAIO (QUARTI 4)		0	7	5	0
1 QUARTO (MEZZETTE 8)		0	2	4	5
1 MEZZETTA (QUARTUCCI 2)		0	0	6	0
1 QUARTUCCIO E UGUALE A		0	0	0	7
1 MOGGIO SACCA 8		0	0	0	5
		5	8	4	7
PESI					
1 LIBBRA (ONCE 12)		CHILLOGRAMMI	GRAMMI	DECIGRAMMI	MILLIGRAMMI
1 ONCIA (DENARI 24)		0	3	3	9
1 DENARO (GRANI 24)		0	0	2	8
1 GRANO E UGUALE A		0	0	0	1
1 TONNELLATA (LIBBRE 2000)		0	0	0	0
		679	0	8	4
<p>NETRO 1454561234567890</p> <p>BRACCIO 1 2 3 4 5 MISURA ANTICA 58 CENTIMETRI</p>					

# Organismi Nazionali per la Metrologia



- ❑ Istituti Metrologici Nazionali (nei paesi tecnologicamente più avanzati) e.g. **NIST**, **BIPM**, **NPL**, **PTB**, **NRLM** ...
  
- ❑ A Torino abbiamo la sede dell'INRiM  
(Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica)  
ottenuto dalla fusione di
  - ❑ **IEN** Istituto Elettrotecnico Nazionale (Galileo Ferraris) per le unità elettriche, fotometriche, tempo-frequenza
  - ❑ **IMGC** Istituto Metrologico Gustavo Colonnetti per le unità di massa, lunghezza, temperatura, forza

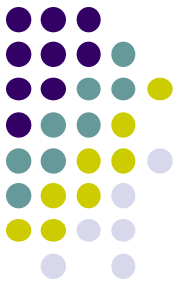
# Sistema Internazionale (SI) di unità di misura



- ❑ Adottato nel 1960 dalla 11<sup>a</sup> CGPM si basa su **7 unità fondamentali** e altre unità derivate
- ❑ Il SI nasce dal precedente MKSA e dal "Sistema MKS" del 1889 (1<sup>a</sup> CGPM)
  - ❑ **metro (m)** lunghezza
  - ❑ **chilogrammo (kg)** massa
  - ❑ **secondo (s)** intervallo di tempo
  - ❑ **ampere (A)** corrente elettrica
  - ❑ **kelvin (K)** temperatura
  - ❑ **mole (mol)** quantità di sostanza
  - ❑ **candela (cd)** intensità luminosa
- ❑ Unità derivate: Hz,  $\Omega$ , F, H, T, C, J, W, N, Pa, ...



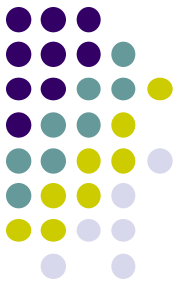
# Nuovo Sistema Internazionale (SI) di unità di misura



- ❑ Adottato dal 20 maggio 2019
- ❑ **metro (m)** lunghezza → velocità della luce  $c$
- ❑ **chilogrammo (kg)** massa → costante di Planck  $h$
- ❑ **secondo (s)** intervallo di tempo → atomo di Cesio
- ❑ **ampere (A)** corrente elettrica → carica elementare  $e$
- ❑ **kelvin (K)** temperatura → costante di Boltzmann  $k_B$
- ❑ **mole (mol)** quantità di sostanza → numero di Avogadro
- ❑ **candela (cd)** intensità luminosa → 540 THz...



Per gli interessati: <https://www.inrim.it/it/ricerca/campioni-primari>



# Proprietà del sistema SI

- Il SI è un **sistema coerente** in quanto tutte le sue unità derivate (grandezza  $G$ ) si ricavano come prodotti e rapporti delle 7 unità di base o di altre unità derivate, senza introdurre fattori moltiplicativi (come  $\pi$ ,  $e$ , *etc.*) e con esponenti interi

$$\dim(G) = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \dots\dots$$

- Le **unità di base** (o fondamentali) sono tra loro dimensionalmente indipendenti

# Unità fondamentali, derivate e convenzione per multipli e sottomultipli

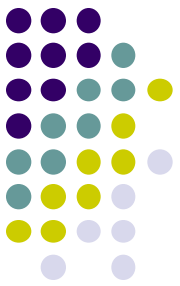


Tabella 1. Grandezze e Unità fondamentali del Sistema Internazionale (SI)			Tabella 3. Multipli e sottomultipli decimali nel Sistema Internazionale (SI)			
Grandezza	Unità	Simbolo	Prefisso	Fattore di moltiplicazione	Simbolo	
Lunghezza	metro	m	Tera	$10^{12}$	T	1 000 000 000 000
Massa	kilogrammo	kg	Giga	$10^9$	G	1 000 000 000
Tempo	secondo	s	Mega	$10^6$	M	1 000 000
Intensità di corrente elettrica	ampere	A	Kilo	$10^3$	k	1 000
Temperatura	kelvin	K	Etto	$10^2$	h	100
Quantità di sostanza	mole	mol	Deca	$10^1$	da	10
Intensità luminosa	candela	cd	Deci	$10^{-1}$	d	0.1
Angolo piano	radiante	rad	Centi	$10^{-2}$	c	0.01
Tabella 2. Alcune grandezze derivate del Sistema Internazionale (SI)			Milli	$10^{-3}$	m	0.001
Grandezza	Unità	Simbolo	Micro	$10^{-6}$	μ	0.000 001
Volume	metro cubo	$m^3$	Nano	$10^{-9}$	n	0.000 000 001
Densità	kilogrammo per metro cubo	$kg/m^3$	Pico	$10^{-12}$	p	0.000 000 000 001
Forza	newton	N	Femto	$10^{-15}$	f	.....
Pressione	pascal	Pa	Atto	$10^{-16}$	a	.....
Potenza	watt	W				
Capacità elettrica	farad	F				
Resistenza elettrica	ohm	Ω				
Lavoro, Energia e quantità di calore	joule	J				
Potenziale elettrico	volt	V				
Alcune unità di misura derivate hanno un nome proprio: pressione 1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup> , lavoro 1 J = 1 N·m etc. Altre non hanno un nome proprio: velocità in m/s, viscosità in kg/m·s, etc.						

# Unità fondamentali, derivate e convenzione per multipli e sottomultipli

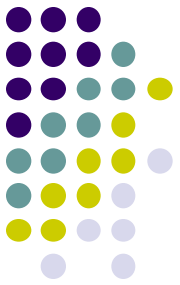


Tabella 1. Grandezze e Unità fondamentali del Sistema Internazionale (SI)			Tabella 3. Multipli e sottomultipli decimali nel Sistema Internazionale (SI)		
Grandezza	Unità	Simbolo	Prefisso	Fattore di moltiplicazione	Simbolo
Lunghezza	metro	m	Tera	$10^{12}$	T 1 000 000 000 000
Massa	kilogrammo	kg	Giga	$10^9$	G 1 000 000 000
Tempo	secondo	s	Mega	$10^6$	M 1 000 000
Intensità di corrente elettrica	ampere	A	Kilo	$10^3$	k 1 000
Temperatura	kelvin	K	Etto	$10^2$	h 100
Quantità di sostanza	mole	mol	Deca	$10^1$	da 10
Intensità luminosa	candela	cd	Deci	$10^{-1}$	d 0.1
Angolo piano	radiante	rad	Centi	$10^{-2}$	c 0.01
Tabella 2. Alcune grandezze derivate del Sistema Internazionale (SI)			Milli	$10^{-3}$	m 0.001
Grandezza	Unità	Simbolo	Micro	$10^{-6}$	μ 0.000 001
	metro cubo	m <sup>3</sup>	Nano	$10^{-9}$	n 0.000 000 001
	kilogrammo per metro cubo	kg/ m <sup>3</sup>	Pico	$10^{-12}$	p 0.000 000 000 001
	newton	N	Femto	$10^{-15}$	f
	pascal	Pa	Atto	$10^{-18}$	a
	watt	W			
	farad	F			
	ohm	Ω			
	joule	J			
	volt	V			

## Regole di scrittura

Errato → Corretto

0.001 mV → 1 μV

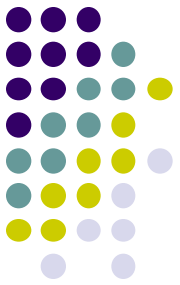
3 10<sup>-2</sup> mV → 30 μV

0.000000032 A → 32 nA

13 m μ V → 13 nV

0.013 μ n V → 13 10<sup>-18</sup> V = 13 aV (atto volt)

....

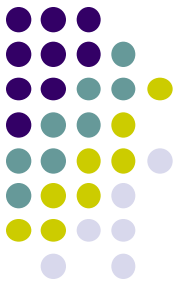


# Incertezze di misura

Qualunque misurazione porta con sé una naturale indeterminazione o **INCERTEZZA** del risultato

Le cause di incertezza sono attribuibili a:

- ❑ **Strumentazione** utilizzata per effettuare la misurazione
- ❑ **Incompleta conoscenza** del misurando e di eventuali modelli matematici del misurando
- ❑ **Incompleta conoscenza** delle condizioni ambientali e dei loro effetti sul misurando e la misurazione
- ❑ **Risoluzione** finita degli strumenti
- ❑ Valori non esatti dei **campioni** e dei materiali di riferimento
- ❑ Valori non esatti delle **costanti e dei parametri usati** per gli algoritmi di valutazione
- ❑ **Approssimazioni o semplificazioni** del metodo o del procedimento sperimentale
- ❑ **Variazioni del misurando** in condizioni apparentemente identiche
- ❑ ....



# Incertezze di misura

La “Scienza delle Misurazioni” fa riferimento a due diverse tipologie di incertezza che si differenziano per i diversi strumenti matematici utilizzati per la loro valutazione

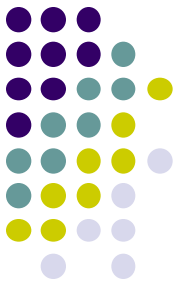
- ❑ incertezze di **tipo A**

l'incertezza si stima con una analisi statistica di una serie di osservazioni (misure ripetute)

- ❑ incertezze di **tipo B**

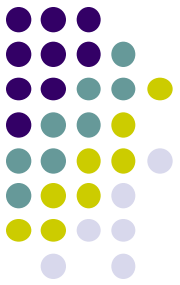
l'incertezza si stima con mezzi diversi dagli usuali strumenti statistici

# Incertezze di misura: tipo A (misure ripetute)



- ❑ **Valor medio:** data una grandezza fisica  $X$  di cui si sono effettuate  $n$  misure  $x_i$ , tutte effettuate nelle stesse condizioni di misura, la migliore stima ottenibile è data dal valor medio
- ❑ **Incertezza del valor medio:** la variabilità del risultato di misura è rappresentata da un intervallo di valori possibili entro il quale il misurando può trovarsi con una data probabilità

# Elementi di statistica e probabilità



Siano  $N$  i valori misurati  $x_i$  della grandezza fisica di interesse

- Si definisce il valor medio dell'insieme dei valori misurati  $x_i$  come:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

- Si definisce la varianza come:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}$$



# Elementi di statistica e probabilità

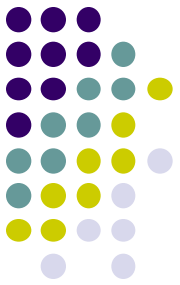


La radice quadrata (positiva) della varianza è la deviazione standard

- Indica il grado di dispersione delle singole osservazioni intorno al valor medio
- La deviazione standard si rivela molto utile per quantificare l'intervallo entro il quale si distribuiscono le  $N$  misure

# Incertezze di misura: tipo A

## “Misure ripetute”



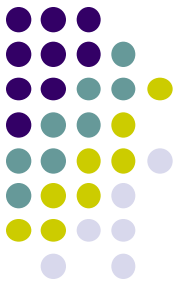
Esempio: dopo aver chiesto a 10 studenti di trascrivere su un biglietto, nello stesso istante, l'ora indicata dal proprio orologio si è ottenuto il seguente insieme  $x_i$  di dati:

$$\begin{array}{ccccc} 10^h 10^m & 10^h 12^m & 10^h 9^m & 10^h 11^m & 10^h 9^m \\ 10^h 11^m & 10^h 10^m & 10^h 8^m & 10^h 9^m & 10^h 11^m \end{array}$$

Da questa serie di dati si ottiene il valor medio:

$$10^h 10^m \pm 1^m$$

# Incertezze di misura: tipo B



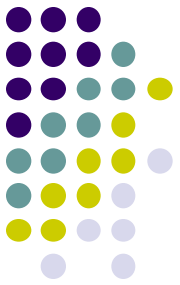
L'incertezza di tipo B è valutata analizzando il sistema di misura e tenendo conto delle conoscenze che l'operatore ha su di esso

- Tali incertezze NON si riducono con metodi statistici

La valutazione delle incertezze di tipo B avviene per mezzo

- di **specifiche tecniche** dei vari componenti del sistema (incertezze sui valori dei componenti utilizzati, ecc...)
- di dati forniti in **certificati di taratura** (che dichiarano per esempio l'incertezza del campione interno al sistema utilizzato per la misurazione ecc...)
- di dati (incertezze) di misurazioni precedenti effettuate su elementi del sistema
- dell'esperienza dell'operatore

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Esempio: multimetro palmare.

Misura di una tensione continua

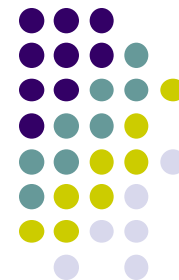
Lettura: 39.98 mV

Lo strumento effettua una lettura al secondo che è sempre la stessa e rappresenta sul display sempre lo stesso valore

Incertezza? Nulla?!? **MAI !!!**



# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Il manuale dello strumento indica le seguenti specifiche:

## Specifications

Calibration period: one year minimum. Specifications apply at  $23^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$ ,  $< 80\% \text{ RH}$

Accuracy =  $\pm(\% \text{ of reading} + \text{number of digits})$

Temperature Coefficient = Accuracy  $\times 0.1/^{\circ}\text{C}$  ( $-10^{\circ}\text{C}$  to  $18^{\circ}\text{C}$ ;  $28^{\circ}\text{C}$  to  $55^{\circ}\text{C}$ )

## General

Do not expose product to moisture or rain. Do not use product in flammable atmosphere.

Operating Temperature:  $-10^{\circ}$  to  $50^{\circ}\text{C}$ .

Humidity:  $0^{\circ}\text{C}$  to  $40^{\circ}\text{C}$  /  $80\% \text{ RH}$  max,  $40^{\circ}\text{C}$  to  $50^{\circ}\text{C}$  /  $70\% \text{ RH}$  max (no condensation).

Storage Temperature:  $-25^{\circ}$  to  $60^{\circ}\text{C}$  /  $70\% \text{ RH}$  max (no condensation).

Display reading rate:

ACV, DCV, Diode, Continuity:

Frequency

Capacitance

AC + DC

Approximately 2.3/second

Approximately 1/second

Approximately 0.03 to 2/second

Approximately 0.5 to 1/second

Bargraph reading rate:

Battery life: Approximately 600 hours

Approximately 23/second

## DC Voltage

Range	Resolution	972A	973A	Input Resistance
		Accuracy		
40 mV	10 μV	± (0.3% + 5)	± (0.3% + 5)	10 MΩ (nominal)
400 mV	100 μV	± (0.2% + 1)	± (0.1% + 1)	11 MΩ (nominal)
4 V	1 mV			10 MΩ (nominal)
40 V	10 mV			
400 V	100 mV			
1000 V	1 V		± (0.2% + 1)	

Normal Mode Rejection Ratio:  $> 60 \text{ dB @ } 50 \text{ or } 60 \text{ Hz}$

Effective Common Mode Rejection Ratio (1 k $\Omega$  imbalance):  $> 120 \text{ dB @ } 50 \text{ or } 60 \text{ Hz}$

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Il manuale dello strumento indica le seguenti specifiche:

## Specifications

Calibration period: one year minimum. Specifications apply at 23° C  $\pm$  5° C, < 80% RH

Accuracy =  $\pm$ (% of reading + number of digits)

Temperature Coefficient = Accuracy X 0.1/° C (-10° C to 18° C; 28° C to 55° C)

## General

Do not expose product to moisture or rain. Do not use product in flammable atmosphere.

Operating Temperature: -10° to 50° C.

Humidity: 0° C to 40° C / 80% RH max, 40° C to 50° C / 70% RH max (no condensation).

Storage Temperature: -25° to 60° C / 70% RH max (no condensation).

Display reading rate:

ACV, DCV, Diode, Continuity:

Frequency

Capacitance

AC + DC

Approximately 2.3/second

Approximately 1/second

Approximately 0.03 to 2/second

Approximately 0.5 to 1/second

Bargraph reading rate:

Battery life: Approximately 600 hours

Approximately 23/second

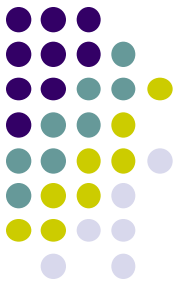
## DC Voltage

Range	Resolution	972A	973A	Input Resistance
		Accuracy		
40 mV	10 μV	± (0.3% + 5)	± (0.3% + 5)	10 MΩ (nominal)
400 mV	100 μV	± (0.2% + 1)	± (0.1% + 1)	11 MΩ (nominal)
4 V	1 mV			10 MΩ (nominal)
40 V	10 mV			
400 V	100 mV			
1000 V	1 V		± (0.2% + 1)	

Normal Mode Rejection Ratio: > 60 dB @ 50 or 60 Hz

Effective Common Mode Rejection Ratio ( 1 k $\Omega$  imbalance): > 120 dB @ 50 or 60 Hz

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Il manuale dello strumento indica le seguenti specifiche:

## Specifications

Calibration period: one year minimum. Specifications apply at  $23^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$ , < 80% RH  
Accuracy =  $\pm(\% \text{ of reading} + \text{number of digits})$   
Temperature Coefficient = Accuracy  $\times 0.1/^{\circ}\text{C}$  ( $-10^{\circ}\text{C}$  to  $18^{\circ}\text{C}$ ;  $28^{\circ}\text{C}$  to  $55^{\circ}\text{C}$ )

## General

Do not expose product to moisture or rain. Do not use product in flammable atmosphere.

Operating Temperature:  $-10^{\circ}\text{C}$  to  $50^{\circ}\text{C}$ .

Humidity:  $0^{\circ}\text{C}$  to  $40^{\circ}\text{C}$  / 80% RH max,  $40^{\circ}\text{C}$  to  $50^{\circ}\text{C}$  / 70% RH max (no condensation).

Storage Temperature:  $-25^{\circ}\text{C}$  to  $60^{\circ}\text{C}$  / 70% RH max (no condensation).

Display reading rate:

ACV, DCV, Diode, Continuity:

Frequency

Capacitance

AC + DC

Approximately 2.3/second

Approximately 1/second

Approximately 0.03 to 2/second

Approximately 0.5 to 1/second

Bargraph reading rate:

Battery life: Approximately 600 hours

Approximately 23/second

Sul fondo scala (range) di 40 mV

❑ ho una risoluzione di  $10\ \mu\text{V}$

❑ Incertezza  $\pm(0.3\% + 5 \text{ digit})$

## DC Voltage

	Range	Resolution	972A	973A	Input Resistance
			Accuracy		
	40 mV	10 μV	± (0.3% + 5)	± (0.3% + 5)	10 MΩ (nominal)
	400 mV	100 μV	± (0.2% + 1)	± (0.1% + 1)	11 MΩ (nominal)
	4 V	1 mV			10 MΩ (nominal)
	40 V	10 mV			
	400 V	100 mV			
	1000 V	1 V		± (0.2% + 1)	

Normal Mode Rejection Ratio: > 60 dB @ 50 or 60 Hz

Effective Common Mode Rejection Ratio (1 k $\Omega$  imbalance): > 120 dB @ 50 or 60 Hz

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Il manuale dello strumento indica le seguenti specifiche:  
Accuracy =  $\pm(\% \text{ of reading} + \text{number of digit}) = \pm(0.3\% + 5)$

## □ % of reading

0.3% della lettura =

$$= 39.98\text{mV} \cdot 0.3/100 = 0.12\text{mV}$$

## □ 5 volte la risoluzione

$$\square \quad 5 \cdot 10\mu\text{V} = 50\mu\text{V}$$

## □ Incertezza assoluta di lettura:

$$\delta V = \pm (0.12\text{mV} + 0.05\text{mV}) = \pm 0.17\text{mV}$$

### Specifications

Calibration period: one year minimum. Specifications apply at  $23^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$ ,  $< 80\% \text{ RH}$   
Accuracy =  $\pm(\% \text{ of reading} + \text{number of digits})$   
Temperature Coefficient = Accuracy  $\times 0.1^\circ\text{C}$  ( $-10^\circ\text{C}$  to  $18^\circ\text{C}$ ;  $28^\circ\text{C}$  to  $55^\circ\text{C}$ )

### General

Do not expose product to moisture or rain. Do not use product in flammable atmosphere.

Operating Temperature:  $-10^\circ\text{C}$  to  $50^\circ\text{C}$ .

Humidity:  $0^\circ\text{C}$  to  $40^\circ\text{C}$  /  $80\% \text{ RH}$  max,  $40^\circ\text{C}$  to  $50^\circ\text{C}$  /  $70\% \text{ RH}$  max (no condensation).

Storage Temperature:  $-25^\circ\text{C}$  to  $60^\circ\text{C}$  /  $70\% \text{ RH}$  max (no condensation).

Display reading rate:

ACV, DCV, Diode, Continuity:

Frequency

Capacitance

AC + DC

Approximately 2.3/second

Approximately 1/second

Approximately 0.03 to 2/second

Approximately 0.5 to 1/second

Bargraph reading rate:

Approximately 23/second

Battery life: Approximately 600 hours

### DC Voltage

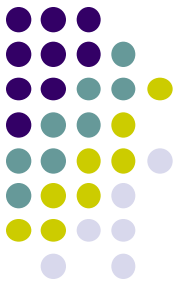
Range	Resolution	972A	973A	Input Resistance
40 mV	10 $\mu\text{V}$	$\pm (0.3\% + 5)$	$\pm (0.3\% + 5)$	10 M $\Omega$ (nominal)
400 mV	100 $\mu\text{V}$			
4 V	1 mV	$\pm (0.2\% + 1)$	$\pm (0.1\% + 1)$	11 M $\Omega$ (nominal)
40 V	10 mV			
400 V	100 mV			10 M $\Omega$ (nominal)
1000 V	1 V		$\pm (0.2\% + 1)$	

Normal Mode Rejection Ratio:  $> 60 \text{ dB}$  @ 50 or 60 Hz

Effective Common Mode Rejection Ratio (1 k $\Omega$  imbalance):  $> 120 \text{ dB}$  @ 50 or 60 Hz



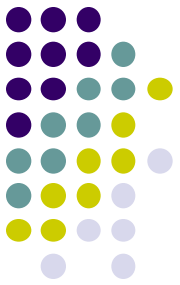
# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



- ❑ Più spesso l'incertezza strumentale è indicata con  $\pm$  (% of reading + % of full scale)
- ❑ Per esempio il multimetro 34401 che troverete su ciascun tavolo dei laboratori sperimentali per le misure di tensione riporta la seguente tabella:

■ DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm$ ( % of reading + % of range ) [ 1 ]						
Function	Range [ 3 ]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [ 2 ] 23°C $\pm$ 1°C	90 Day 23°C $\pm$ 5°C	1 Year 23°C $\pm$ 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)

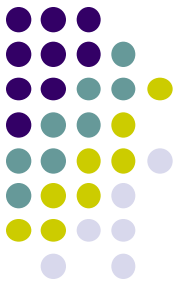


## Primo termine

- ❑ **% of reading**: rappresenta un valore espresso in percentuale della lettura effettuata  $V_L$ 
  - ❑ Esempio: lettura sul display di  $V_L = 0.522123V$
  - ❑ Il fondo scala utilizzato è di 1V
  - ❑  $0.002\% V_L$  con  $V_L = 0.522123V \rightarrow \frac{0.002}{100} \cdot 0.52 = 0.104 \mu V = 0.10 \mu V$

DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm (\% \text{ of reading} + \% \text{ of range}) [1]$						
Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] 23°C $\pm$ 1°C	90 Day 23°C $\pm$ 5°C	1 Year 23°C $\pm$ 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)

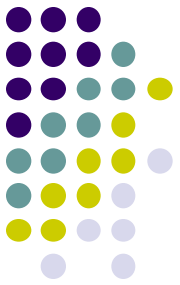


## Secondo termine

- ❑ **% of range**: rappresenta un valore espresso in percentuale del fondo scala utilizzato
  - ❑ Il datasheet del voltmetro utilizzato riporta 5 fondo scala differenti (100mV, 1V, 10V, 100V, 1kV)
  - ❑ Il costruttore, a seguito di determinate scelte progettuali, ha utilizzato differenti componenti elettronici per adattare il voltmetro digitale a determinate fasce di valori del segnale da misurare
  - ❑ A seconda della fascia di valori misurabili si ha una incertezza espressa in %

■ DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm ( \% \text{ of reading} + \% \text{ of range} ) [ 1 ]$						
Function	Range [ 3 ]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [ 2 ] 23°C $\pm$ 1°C	90 Day 23°C $\pm$ 5°C	1 Year 23°C $\pm$ 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



- ❑ **% of range**: poiché il termine di incertezza dipende dal fondo scala scelto (spesso indicato con  $V_{FS}$ ), occorre impostare il multimetro con il fondo scala più basso compatibilmente con il valore misurato

Esempio: misurando di circa 0.52...V

- ❑ 1V, 10V, 100V, 1kV sono utilizzabili per effettuare la misura
- ❑ Se avessimo impostato  $V_{FS}=100\text{mV}$  la lettura di circa mezzo volt sarebbe stata “OVERFLOW” (sarebbe stata “OVERFLOW” per tutti i valori di tensione misurati superiori al  $V_{FS}$  impostato)

■ DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm ( \% \text{ of reading} + \% \text{ of range} ) [ 1 ]$						
Function	Range [ 3 ]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [ 2 ] 23°C $\pm$ 1°C	90 Day 23°C $\pm$ 5°C	1 Year 23°C $\pm$ 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



## Secondo termine

### □ % of range

Esempio: lettura sul display  $V_L = 0.522V$

□ Sia 1V, 10V, 100V, 1kV sono utilizzabili per misurare  $V_L$

□ Il termine di incertezza dovuto al fondo scala vale:

$$V_{FS}=1V \rightarrow 0.0006\% \cdot 1V = 6 \mu V \leftarrow \text{valore più piccolo}$$

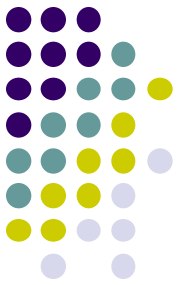
$$V_{FS}=10V \rightarrow 0.0004\% \cdot 10V = 40 \mu V$$

$$V_{FS}=100V \rightarrow 0.0006\% \cdot 100V = 0.6 \text{ mV}$$

$$V_{FS}=1kV \rightarrow 0.0006\% \cdot kV = 6 \text{ mV}$$

■ DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm ( \% \text{ of reading} + \% \text{ of range} ) [ 1 ]$						
Function	Range [ 3 ]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [ 2 ] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Risultato incertezza:

$$\begin{aligned}\delta V_x &= \pm (\% \text{ of reading} + \% \text{ of full scale}) = \\ &= \pm (0.0020\% \cdot 0.52 + 0.0006\% \cdot 1) = \\ &= \pm (10\mu\text{V} + 6\mu\text{V}) = \pm 16 \mu\text{V}\end{aligned}$$

$$16 \cdot 10^{-6} \text{ V} = 16 \mu\text{V}$$

Risultato della misura  $V_x = (0.522123 \pm 0.000016) \text{ V}$

■ DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm (\% \text{ of reading} + \% \text{ of range}) [1]$						
Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0010 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)

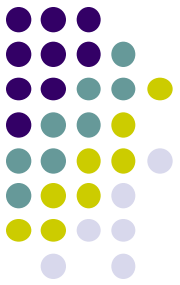


In realtà occorre aggiungere qualche altra informazione

- ❑ Quale colonna utilizzare ?????
- ❑ La scelta dipende da quanto tempo è trascorso dall'ultima calibrazione
- ❑ Per i multimetri presenti nei LED dovreste utilizzare la colonna OPPORTUNA in base al certificato di taratura dello strumento (...e la temperatura del lab deve essere tra 18°C e 28°C se usate la seconda o la terza colonna...)

■ DC Characteristics						
Accuracy Specifications $\pm$ ( % of reading + % of range ) [ 1 ]						
Function	Range [ 3 ]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [ 2 ] 23°C $\pm$ 1°C	90 Day 23°C $\pm$ 5°C	1 Year 23°C $\pm$ 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

# Incertezze di misura: tipo B (misura singola)



Rappresentazione della misura:

$$V_x = (\bar{V} \pm \sigma) \text{ mV} = (\bar{V} \pm \delta V) \text{ mV} = \bar{V} \left(1 \pm \frac{\delta V}{\bar{V}}\right) \text{ mV}$$

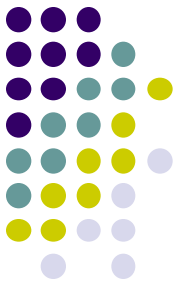
$$V_x = (39.98 \pm 0.17) \text{ mV} \text{ (incertezza assoluta)}$$

$$V_x = 39.98 \cdot (1 \pm 0.004) \text{ mV} \text{ (incertezza relativa)}$$

...ed anche: “la tensione ha un valore di 39.98mV con incertezza relativa del 4 per mille”

NB: l'incertezza indicata è di tipo B. L'incertezza di tipo A è trascurabile rispetto alla B (la lettura è “fissa”, è “sempre la stessa”)





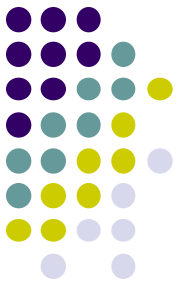
# Incertezza: tipo A + tipo B

Una volta stimati i diversi contributi di incertezza (tipo A e tipo B), l'incertezza totale " $u_{TOT}$ " è data dalla seguente formula:

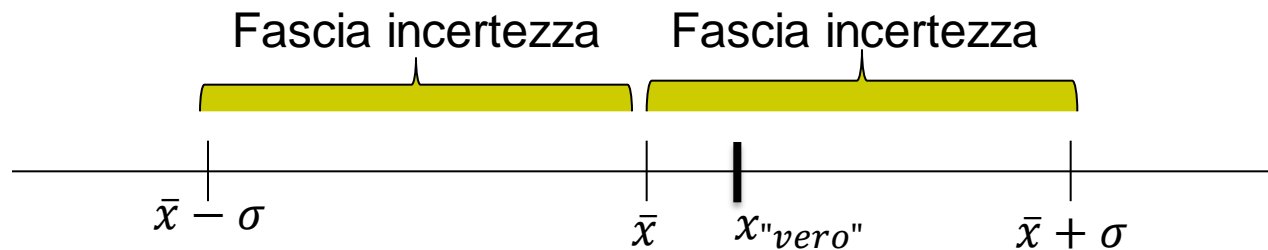
$$u_{TOT} = |u_A| + |u_B|$$

- In genere il dato rappresentativo dell'incertezza è indicato con la lettera " $u$ "

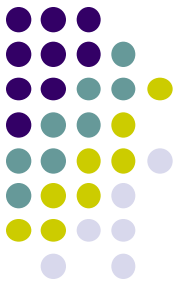
# Incertezza di misura: risultato di misura



Valor medio e deviazione standard sono due indicatori molto utili per quantificare il valore del misurando e l'intervallo entro il quale il valore "vero" del misurando si colloca



# Incertezze di misura: risultato di misura



## ❑ Esempio: tolleranze di componenti elettronici

Componenti come resistori e capacità hanno valori e tolleranze (incertezze) standard: una tipica resistenza da  $8200\Omega$  al 5% presenta una fascia di possibili valori di  $\pm 410\Omega$

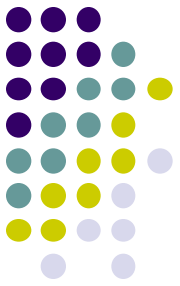
## ❑ Esempio: tensione di riferimento su circuito integrato

Il componente LT1021-5, Linear Technology, ha un'uscita nominalmente di  $5V @ 25^{\circ}C$ . Nel data sheet si legge che i valori dell'uscita sono compresi fra  $4.9975V$  e  $5.0025V$  quindi un'incertezza di  $2.5mV$

## ❑ Esempio: trasduttore di temperatura

Il componente LM35, National Semiconductor, ha un'uscita proporzionale alla temperatura con coefficiente di proporzionalità di  $10mV/^{\circ}C$ . Dal data sheet tale coefficiente può variare da un dispositivo ad un altro tra  $9.8$  e  $10.2 mV/^{\circ}C$  quindi il coefficiente ha una incertezza di  $0.2mV/^{\circ}C$ .

# Incertezza di misura: modalità di rappresentazione



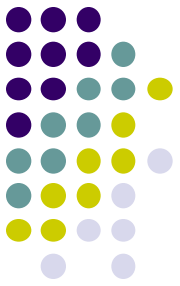
L'incertezza si rappresenta con, **al più,**  
**2 cifre significative**

Riguardo la misura le cifre rappresentate devono essere consistenti con l'incertezza

Esempi:

- ❑  $R = (4700 \pm 47)\Omega$       2 cifre significative
- ❑  $L = (1.000 \pm 0.002)m$       1 cifra significativa
- ❑  $L = 1.000m \pm 2mm$       1 cifra significativa

# Incertezza di misura: modalità di rappresentazione



Esempio:  $V_{letta} = (1.5126 \pm 0.0022)V$

*Errori comuni nella rappresentazione del risultato della misura*

$$R = (4700.12 \pm 47)\Omega$$

$$R = (1.0000 \pm 0.0236)\Omega$$

$$R = 1000\Omega \pm 3\%$$

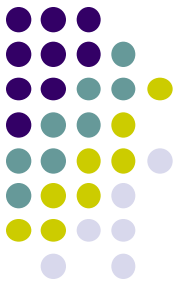
$$V = 1.5126 \pm 0.0022V$$

$$I = 2.00A \pm 0.04$$

Troppe cifre!!!

Dim. errata

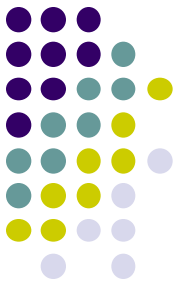
Unità di misura!!!



# Errori sistematici

Col termine errori si indicano le deviazioni note (o comunque conoscibili) del valore misurato da quello previsto

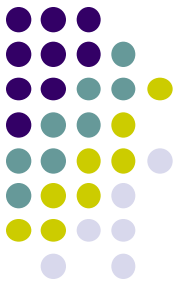
Gli errori sistematici possono essere corretti



# Errori sistematici

## Esempi:

- ❑ Misura del peso di un oggetto sottoposto alla forza di Archimede
- ❑ Mirino di un fucile di precisione
- ❑ Misura di una resistenza
- ❑ ...



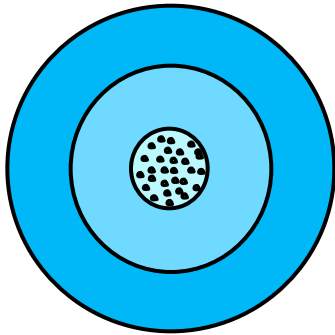
# Errori sistematici

Non dobbiamo confonderci nell'utilizzo dei termini

- ❑ Incertezza
- ❑ Errore sistematico

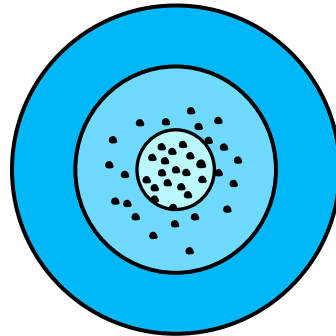


# Incertezza ed errore sistematico



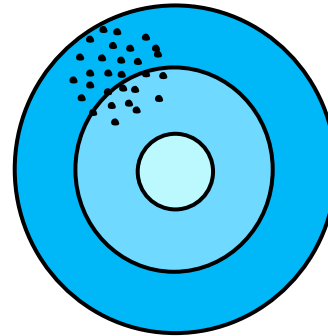
Bassa dispersione  
Assenza di  
errore sistematico

Accurate and  
precise



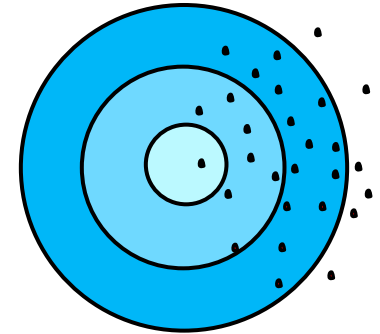
Alta dispersione  
Assenza di  
errore sistematico

Accurate but  
not precise



Bassa dispersione  
Presenza di  
errore sistematico

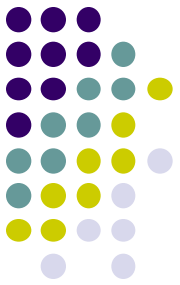
Precise but  
not accurate



Alta dispersione  
Presenza di  
errore sistematico

Not accurate and  
not precise

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



A volte una grandezza fisica può essere ottenuta per mezzo di altre grandezze fisiche legate fra loro da un modello matematico che le collega fra loro

## Esempio

❑ Periodo del pendolo semplice

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

❑ Superficie di un rettangolo

$$A = L_1 \cdot L_2$$

❑ Resistenza di un filo conduttore

$$R = \rho \cdot l / S$$

❑ Resistenza di un filo conduttore

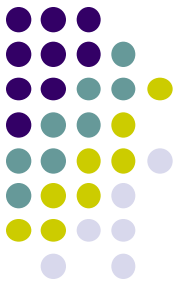
$$R = V / I$$

❑ Potenza elettrica

$$P = R \cdot I^2$$

❑ ....

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto

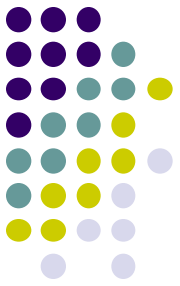


Si indichi con  $y$  la generica grandezza fisica che è legata ad  $m$  grandezze fisiche  $x_i$  dalla relazione:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

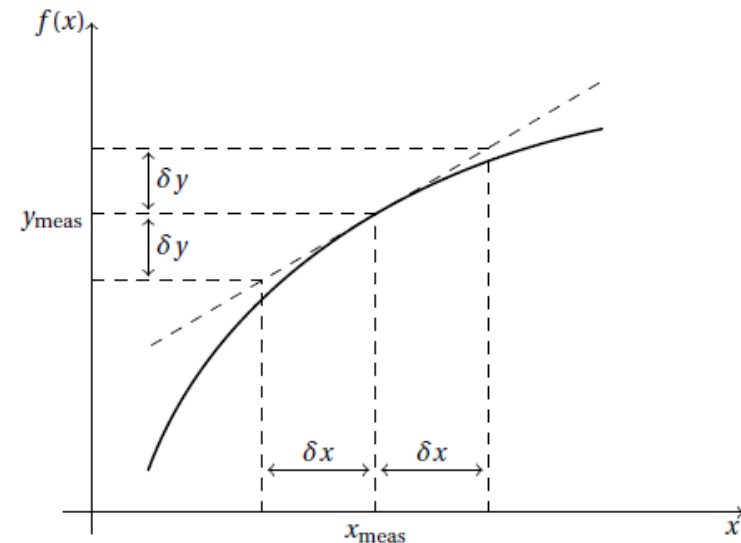
L'incertezza di misura della grandezza fisica  $y$  è ottenuta come una opportuna somma pesata delle incertezze dei vari  $x_i$ .

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



La grandezza  $y$  dipende solo da  $x$ : sviluppo in serie di Taylor e, nell'ipotesi che l'incertezza sia piccola, ci fermiamo ai termini del primo ordine

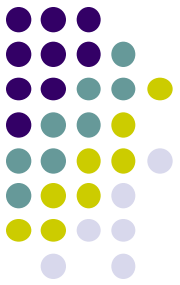
- $f(x) \approx f(x_{meas}) + \left(\frac{df}{dx}\right) \cdot (x - x_{meas})$
- $|y - y_{meas}| = |f(x) - f(x_{meas})| = \left|\frac{df}{dx}\right| \cdot |x - x_{meas}|$
- $\delta y = |y - y_{meas}| = \left|\frac{df}{dx}\right| \cdot |x - x_{meas}| \rightarrow \delta y = \left|\frac{df}{dx}\right| \delta x$



**NOTA:**

Se la derivata  $df/dx$  ha segno negativo il metodo deterministico presuppone che si debba prendere il valore assoluto in modo da sommare sempre tutte le incertezze (...evitando così anche il caso assurdo di incertezza nulla...)

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



## Esempio

Misura di una resistenza a seguito di una misura della tensione ai suoi capi e della corrente che scorre nella resistenza

Dati i valori di misura di tensione e corrente misurati

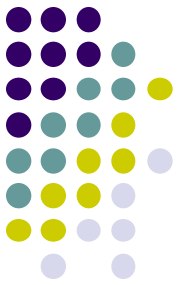
$$V = V_{meas} \pm \delta V$$

$$I = I_{meas} \pm \delta I$$

Determiniamo R e la sua incertezza:

$$\begin{aligned} R &= R_{meas} \pm \delta R = \frac{V_{meas} \pm \delta V}{I_{meas} \pm \delta I} = \frac{V_{meas}(1 \pm \frac{\delta V}{V_{meas}})}{I_{meas}(1 \pm \frac{\delta I}{I_{meas}})} \approx \frac{V_{meas}}{I_{meas}} \cdot \left(1 \pm \frac{\delta V}{V_{meas}}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\delta I}{I_{meas}}\right) = \\ &= \frac{V_{meas}}{I_{meas}} \cdot \left(1 \pm \frac{\delta V}{V_{meas}}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\delta I}{I_{meas}}\right) = \\ &= \frac{V_{meas}}{I_{meas}} \left(1 \pm \frac{\delta V}{V_{meas}} \pm \frac{\delta I}{I_{meas}}\right) = \frac{V_{meas}}{I_{meas}} \pm \frac{\delta V}{I_{meas}} \pm \frac{V_{meas}}{I_{meas}^2} \delta I \end{aligned}$$

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



Da cui ottengo:

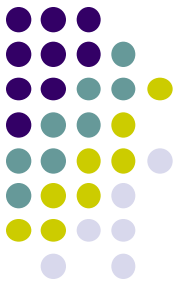
$$R = R_{meas} \pm \delta R \approx \frac{V_{meas}}{I_{meas}} + \left| \frac{\delta V}{I_{meas}} \right| + \left| -\frac{V_{meas}}{I_{meas}^2} \right| \delta I$$

Attenzione! Occorre applicare il modulo alle derivate parziali

$$R_{meas} = \frac{V_{meas}}{I_{meas}}$$

$$\delta R = \pm \left( \left| \frac{dR}{dV} \right| \delta V + \left| \frac{dR}{dI} \right| \delta I \right) = \frac{1}{I_{meas}} \delta V + \frac{V_{meas}}{I_{meas}^2} \delta I$$

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



Esercizio: la resistenza di un resistore è valutata tramite metodo voltamperometrico. La tensione ai capi della resistenza è di  $(5.00 \pm 0.05)V$  e la corrente misurata che vi scorre è di  $(1.000 \pm 0.015)mA$ .

Determinare il valore di resistenza

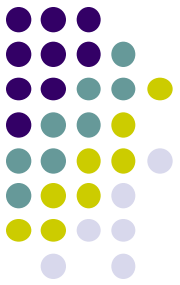
$$R = \frac{V}{I} = \frac{5V}{1mA} = 5.00000 \dots k\Omega \text{ (è il valore della misura)}$$

$$\begin{aligned} \delta R &= \left| \frac{dR}{dV} \right| \delta V + \left| \frac{dR}{dI} \right| \delta I = \frac{\delta V}{I} + \frac{V}{I^2} \delta I = \frac{0.05V}{1mA} + \frac{5V}{(1mA)^2} 0.015mA = 50\Omega + 75\Omega = \\ &= 125\Omega \text{ (è il valore dell'incertezza ma ci sono troppe cifre significative)} \end{aligned}$$

Risultato finale della misurazione di R tramite metodo voltamperometrico:

$$R = (5.00 \pm 0.12)k\Omega$$

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



Effettuando un po' di calcoli, sviluppando in serie di Taylor intorno al valor medio di ciascuna grandezza fisica  $x_i$ , si ottiene la seguente relazione:

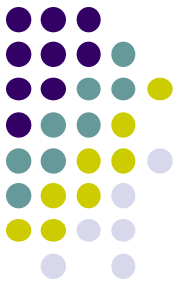
$$u(y) = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u(x_i)$$

- La grandezza  $u(y)$  è detta “incertezza tipo composta associata alla grandezza  $y$ ”
- Il metodo utilizzato è detto “deterministico”

Nota: esiste un altro metodo, che non utilizzeremo, detto metodo probabilistico

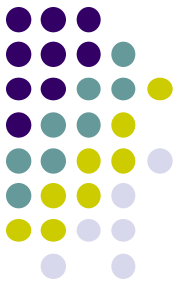


# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto



La legge di propagazione è di grande utilità nella valutazione di incertezze su grandezze misurate per via indiretta

- Le derivate parziali della funzione  $y = f(\dots)$  sono chiamati coefficienti di sensibilità
- L'applicazione pratica della legge di propagazione risulta in molti casi difficoltosa in assenza di modelli matematici. In tal caso occorre utilizzare metodi sperimentali



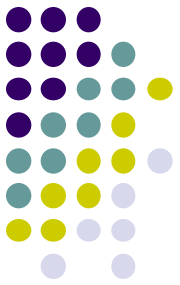
# Esempio

Un pendolo di lunghezza  $L = (0.98 \pm 0.02)m$  oscilla con periodo  $T = (1.986 \pm 0.005)s$ .

Quanto vale  $g$  ?

Come primo passo determino il valor atteso di  $g$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} = f(L, T) = 9.809058 \frac{m}{s^2}$$



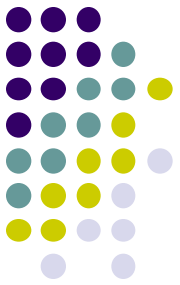
# Esempio

- Determinazione dell'incertezza

$$u(g) = \left| \frac{\partial g}{\partial L} \right| u(L) + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| u(T) = \dots = 0.2 + 0.049 = \mathbf{0.249} \frac{m}{s^2}$$

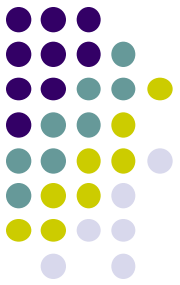
- La semplice valutazione dell'incertezza con la calcolatrice presenta un risultato con troppe cifre significative
- Le cifre significative dell'incertezza devono essere al **massimo pari a 2**
- Risultato finale:  $g = (9.81 \pm 0.25) m s^{-2}$

# Cifre significative: esempio



Numero	Cifre significative
23	2
21.3	3
21.30	4
4720	4
0.3	1
0.03	1
0.32	2

# Esercizio



Volete determinare la potenza dissipata da una resistenza: misurate corrente e tensione ai capi della resistenza. I valori letti per mezzo di multimetri digitali sono

$$V_m = 3.5211234 \text{ V}$$
$$I_m = 2.221234 \text{ mA}$$

Il manuale del voltmetro riporta che, per un fondo scala di 10 V, l'incertezza vale:

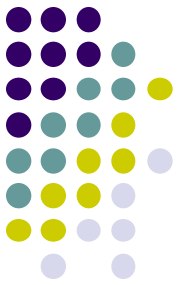
$$\delta V = \pm (0.01\% \text{ of reading} + 0.005\% \text{ of full scale})$$

Il manuale dell'amperometro riporta che, per un fondo scala di 10 mA, l'incertezza vale:

$$\delta I = \pm (0.2\% \text{ of reading} + 0.5\% \text{ of full scale})$$

- ❑ Indicare le cifre significative di tensione e corrente.
- ❑ Quanto vale la potenza dissipata dal resistore?

# Soluzione



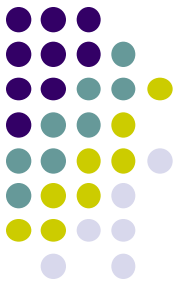
Il manuale del voltmetro riporta che, per un fondo scala di 10 V, l'incertezza vale:

$$\begin{aligned}\delta V &= \pm (0.01\% \, 3.52 + 0.005\% \, 10) = \pm \left( \frac{0.01}{100} 3.52 + \frac{0.005}{100} 10 \right) = \\ &= 0.35 \, mV + 0.50 \, mV = 0.85 \, mV\end{aligned}$$

Il manuale dell'amperometro riporta che, per un fondo scala di 10 mA, l'incertezza vale:

$$\delta I = \pm (0.2\% \, 0.00222 + 0.5\% \, 0.01) = 4.4 \, \mu A + 50 \, \mu A = 54 \, \mu A$$

# Soluzione



Come scegliere le cifre significative di tensione e corrente da indicare nel risultato di misura?

Un possibile metodo: allineo le cifre della misura e dell'incertezza elimino le cifre del risultato di misura indiretta che non hanno una corrispondenza con l'incertezza

Per la tensione ottengo:

$$V_m = 3.52112 \text{ V}$$

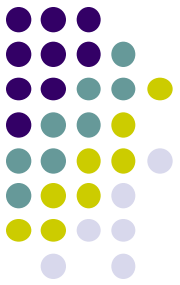
$$\delta V = 0.00085 \text{ V}$$

Per la corrente ottengo:

$$I_m = 2.221 \text{ mA}$$

$$\delta I = 0.054 \text{ mA}$$

# Soluzione



Quanto vale la potenza dissipata dal resistore?

$$\square \quad P = V \cdot I = 7.8204 \dots mW$$

$$\square \quad \delta P = V\delta I + I\delta V = 3.52 \cdot 54 \cdot 10^{-6} + 2.22 \cdot 10^{-3} 0.85 \cdot 10^{-3} = 0.19 mW$$

Scelta delle cifre significative:

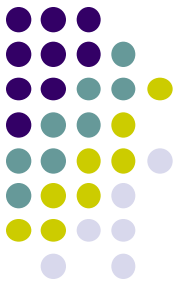
$$P = 7.82 \text{ | } \textcolor{red}{04} \text{ mW}$$

$$\delta P = 0.19 \text{ | } \text{ mW}$$

Risultato finale:  $P = (7.82 \pm 0.19) mW$



# Casi particolari

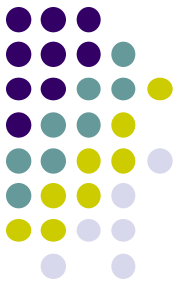


- Somma  $y = f(a, b) = a + b \rightarrow \delta y = \delta a + \delta b$
- Differenza  $y = f(a, b) = a - b \rightarrow \delta y = \delta a + \delta b$

□ **Nota:** in entrambi i casi si sommano le incertezze assolute

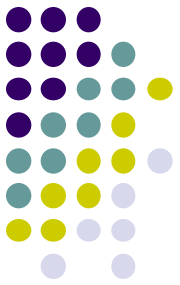
- Prodotto  $y = f(a, b) = a \cdot b \rightarrow \frac{\delta y}{y} = \left| \frac{\delta a}{a} \right| + \left| \frac{\delta b}{b} \right|$
- Quoz.  $y = f(a, b) = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{\delta y}{y} = \left| \frac{\delta a}{a} \right| + \left| \frac{\delta b}{b} \right|$
- Potenza  $y = f(a) = a^n \rightarrow \frac{\delta y}{y} = n \cdot \left| \frac{\delta a}{a} \right|$
- Radice  $y = f(a) = \sqrt[n]{a} \rightarrow \frac{\delta y}{y} = \frac{1}{n} \cdot \left| \frac{\delta a}{a} \right|$

NB: nel dubbio utilizzate la formula  $u(y) = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u(x_i)$



# Esercizio

Determinare il valore di una resistenza ottenuta dalla serie di  $R_1$  ed  $R_2$ . La prima ha valore nominale  $12\text{ k}\Omega$  ed incertezza del 2%. La seconda ha valore nominale  $3.3\text{ k}\Omega$  ed incertezza del 3%.



# Soluzione

$$R_t = R_1 + R_2 = 12\text{k}\Omega + 3.3\text{k}\Omega = 15.3\text{ k}\Omega$$

$$\delta R_t = \delta R_1 + \delta R_2$$

$$\delta R_1 = (\delta R_1 / R_1) \cdot R_1 = 2\% \cdot 12\text{k}\Omega = 240\ \Omega$$

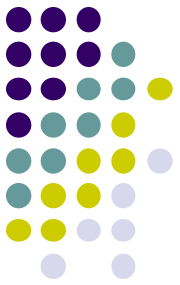
$$\delta R_2 = (\delta R_2 / R_2) \cdot R_2 = 3\% \cdot 3.3\text{k}\Omega = 99\ \Omega$$

$$\delta R_t = \delta R_1 + \delta R_2 = 0.34\text{ k}\Omega$$

Risultato finale:

$$R_t = (15.30 \pm 0.34)\text{ k}\Omega \quad (2 \text{ cifre significative})$$

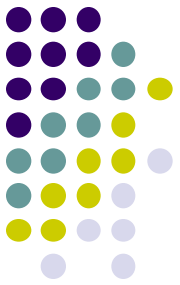
$$R_t = (15.3 \pm 0.3)\text{ k}\Omega \quad (1 \text{ cifra significativa})$$



# Esercizio

Un condensatore da  $100\text{ pF}$  è collegato in serie con un condensatore da  $390\text{ pF}$ . Le tolleranze (incertezze) dei due condensatori sono del 5% e del 10%, rispettivamente.

Determinare il valore della capacità ottenuta e la sua incertezza.



# Soluzione

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100 \cdot 390}{100 + 390} = 80 \text{ pF}$$

$$\delta C = \left| \frac{\partial C}{\partial C_1} \right| \delta C_1 + \left| \frac{\partial C}{\partial C_2} \right| \delta C_2 = \frac{C^2}{C_1^2} \delta C_1 + \frac{C^2}{C_2^2} \delta C_2 = 5 \text{ pF}$$

Notare che è possibile utilizzare una scorciatoia: tenendo conto che  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$  ed applicando il differenziale:

$$\delta \left( \frac{1}{C} \right) = \delta \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \rightarrow \frac{\delta C}{C^2} = \frac{\delta C_1}{C_1^2} + \frac{\delta C_2}{C_2^2}$$