Cognome e Nome.. Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 27 GENNAIO 2010 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Data la funzione

$$f(z) = \frac{4\,\mathrm{Im}(z) - (z + \overline{z})^2}{2 - |z|^2}\,,$$

trovarne il luogo degli zeri nel suo dominio naturale $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ e disegnarlo sul piano complesso.

Esercizio 2 (3 punti)
Si esprima la funzione

$$f(x+iy) := x(i-2x) + y(1-2y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

in termini della variabile complessa $z = x + iy$ e si stabilisca se è una funzione analitica.

Esercizio 3 (4 punti)
Si determini l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n}}{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)}\,.$$

Esercizio 4 (5 punti)
Si calcoli

$$I := \int_\gamma \frac{e^z}{(z-3)(z^2-2z+2)}\;dz\,,$$

dove γ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario e avente come sostegno l'insieme $E = \{z = x+iy \;:\; x,y \in \mathbb{R},\ (x^2/4)+(y^2/9)=1\}$.

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) = (\alpha - 3) z \cosh\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\alpha}{z}\,.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left|\frac{\pi x}{18}\right|\right) p_6(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove p_6 indica la porta di ampiezza 6. Disegnare il grafico di f e calcolarne la derivata nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 7 (4 punti)
Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^5 + 3s^3 + 6}{s^3 + 3s}\,.$$

Esercizio 8 (5 punti)
a) Scrivere la definizione di distribuzione temperata in $\mathbb{R}$.

b) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(x) := \dfrac{x^5 - 2}{x^4 + 1} + e^{3ix}$, $x \in \mathbb{R}$. Dire se T_f è temperata, giustificando la risposta.