<u>**Prop**</u> Se $T \in \mathcal{D}'$, $a \in \mathbb{R}$, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora

(i) $(T(x-a))' = T'(x-a)$

(ii) $(T(ax))' = a\,T'(ax)$ per $a \neq 0$

(iii) $(hT)' = h'T + hT'$

<u>**Dim**</u>

(i) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle (T(x-a))', \varphi \rangle \overset{\text{def. di derivata in } \mathcal{D}'}{=} -\langle T(x-a), \varphi' \rangle$$

$$\overset{\text{def. di traslazione}}{=} -\langle T, \varphi'(x+a) \rangle = -\langle T, \frac{d}{dx}(\varphi(x+a)) \rangle$$

$$\overset{\text{def. di derivata in } \mathcal{D}'}{=} \langle T', \varphi(x+a) \rangle \overset{\text{def. di traslazione}}{=} \langle T'(x-a), \varphi(x) \rangle$$

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle (T(ax))', \varphi \rangle \overset{\text{def. di derivata in } \mathcal{D}'}{=} -\langle T(ax), \varphi' \rangle$$

$$\overset{\text{def di riscalamento}}{=} -\langle T, \frac{1}{|a|}\varphi'\left(\frac{x}{a}\right) \rangle =$$

$$= -\langle T, \frac{1}{|a|}\, a \frac{d}{dx}\left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right) \rangle$$

$$\overset{\text{linearità}}{=} -\frac{a}{|a|}\left\langle T, \frac{d}{dx}\left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right\rangle$$

$$\overset{\text{def. di derivata in } \mathcal{D}'}{=} \frac{a}{|a|}\left\langle T', \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle \overset{\text{linearità}}{=} a\left\langle T', \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle$$

$$\overset{\text{def di riscalamento}}{=} a\left\langle T'(ax), \varphi\right\rangle \overset{\text{linearità}}{=} \left\langle aT'(ax), \varphi\right\rangle$$

(iii) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle (hT)', \varphi\rangle \overset{\text{def. di derivata in } \mathcal{D}'}{=} -\langle hT, \varphi'\rangle \overset{\text{def. di moltiplicazione}}{=} -\langle T, h\varphi'\rangle$$

$$= -\left\langle T, \frac{d}{dx}\left(h(x)\varphi(x)\right) - h'(x)\varphi(x)\right\rangle$$

$$\overset{\text{linearità}}{=} -\left\langle T, \frac{d}{dx}\left(h(x)\varphi(x)\right)\right\rangle + \langle T, h'\varphi\rangle$$

$$\overset{\text{def. di derivata in } \mathcal{D}'}{=} \langle T', h\varphi\rangle + \langle h'T, \varphi\rangle \quad (\text{def. di moltiplicazione})$$

$$\overset{\text{def. di moltiplicazione}}{=} \langle hT', \varphi\rangle + \langle h'T, \varphi\rangle$$

$$= \langle hT' + h'T, \varphi\rangle$$

somma di distribuzioni

∎