Cognome e Nome.. Matricola............
Docente ....

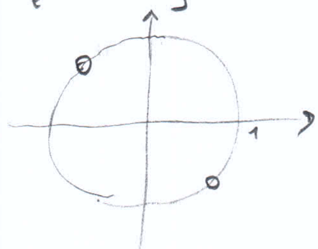
ANALISI COMPLESSA
Appello del 3 SETTEMBRE 2009 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Trovare gli zeri della funzione

$$f(z) = \frac{2\cosh(z) - e^z - 1}{z^2 + i}$$

nel suo naturale dominio di definizione dom(f).

$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \neq -i\}$; si trova che $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{\pm e^{\frac{3}{4}\pi i}\}$



$$2\cosh(z) - e^z - 1 = 0 \iff 2\,\frac{e^z + e^{-z}}{2} - e^z - 1 = 0$$

$$\iff e^{-z} - 1 = 0 \iff -z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Per cui l'insieme degli zeri di f è

$$\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

Esercizio 2 (3 punti)
Si trovino tutte le funzioni analitiche $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}\, f(z) = -1 + \mathrm{Im}\, z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se $f = u + iv$ e $z = x + iy$ si ha che $u(x,y) = -1 + y$ e le equazioni di C-R sono date da

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ 1 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}, \qquad (1) \iff v(x,y) = \phi(x) \xrightarrow{(2)}$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = -1 \Rightarrow \phi(x) = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+iy) = (-1+y) + i(-x+c), \quad c \in \mathbb{R}$$

3/9/09

Esercizio 3 (4 punti)
Si determini l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)z^{2n}}{i^n 5^n}. = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_n = n+3 \\ w = \dfrac{z^2}{i5} \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+4}{n+3} \to 1 \text{ per } n \to \infty \Rightarrow R = 1 \text{ raggio di convergenza.}$$

Se $|w| = 1$ si ha $|a_n w^n| = |a_n||w|^n = |a_n| = n+3 \not\to 0$ per $n \to \infty$

quindi se $|w|=1$, la serie data non può convergere.

Allora l'insieme di convergenza è $\{z \in \mathbb{C} : |w| < 1\} =$

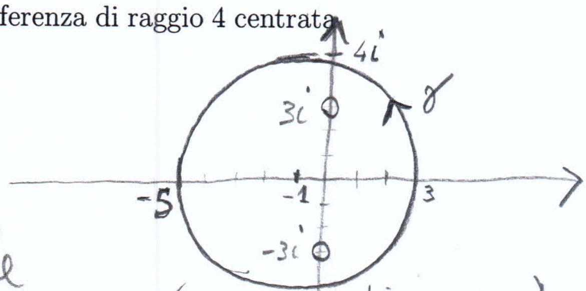
$$= \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z^2}{i5}\right| < 1\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 5\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{5}\right\}$$

$$= B_{\sqrt{5}}(0)$$

Esercizio 4 (5 punti)
Calcolare

$$I := \int_\gamma \frac{z e^{iz}}{(z^2+9)} dz$$

dove γ è il cammino di Jordan avente come supporto la circonferenza di raggio 4 centrata in $z_0 = -1$.



$$\left(|\pm 3i - (-1)| = \sqrt{10} < 4\right)$$

$$f(z) := \frac{z e^{iz}}{z^2+3} = \frac{z e^{iz}}{(z+i3)(z-i3)}$$

Dal teorema dei residui segue che

$$I = 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}_f(3i) + \mathrm{Res}_f(-3i) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left.\frac{z e^{iz}}{z+3i}\right|_{z=3i} + \left.\frac{z e^{iz}}{z-3i}\right|_{z=-3i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{3i e^{-3}}{6i} + \frac{3i e^{3}}{6i} \right\} = 2\pi i \left(\frac{e^3 + e^{-3}}{2} \right)$$

$$= 2\pi i \cosh(3)$$

3/9/09

Esercizio 5 (5 punti)
Scrivere lo sviluppo di Laurent in $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 1\}$ centrato in $z_0 = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{iz^2 - z^5}.$$

Se $|z|>1$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{iz^2 - z^5} = \frac{1}{z^5\left(\frac{i}{z^3} - 1\right)} = \frac{-1}{z^5\left(1 - \frac{i}{z^3}\right)}$$

se $\left|\frac{i}{z^3}\right| < 1$ cioè $|z| > 1$

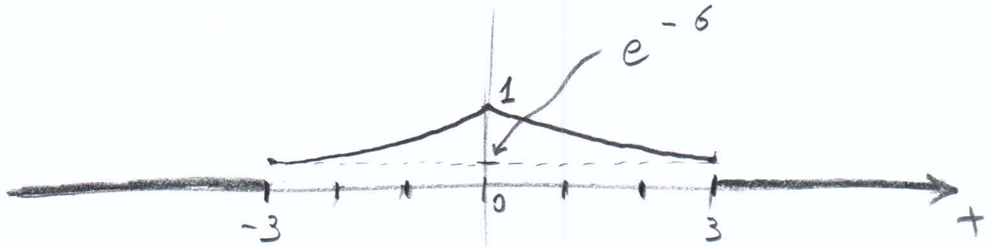
$$= -\frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{z^3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{3n+5}}$$

$$\left(= -\frac{1}{z^5} - \frac{i}{z^8} + \frac{1}{z^{11}} + \dots \right)$$

Esercizio 6 (4 punti)
Si consideri la distribuzione T_f dove

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|2x|} & \text{se } |x| \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare T_f'.



$\forall x \notin \{0, \pm 3\}$

$$\exists f'(x) = \begin{cases} e^{-|2x|}(-\mathrm{sgn}(2x))2 & \text{se } |x|<3, \ x \neq 0 \\ 0 & \text{se } |x| > 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\,\mathrm{sgn}(x)\, e^{-|2x|} & \text{se } |x| < 3, \ x \neq 0 \\ 0 & \text{se } |x| > 3 \end{cases}$$

$$= -2\,\mathrm{sgn}(x)\, e^{-|2x|}\, \mathbb{1}_{[-3,3]}(x)$$

$$T_f' = T_{f'} + e^{-6}\delta_{-3} - e^{-6}\delta_3$$

3/9/09

Esercizio 7 (4 punti)
Posto

$$f(x) = x^3 + 2\sin(2\pi x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

verificare che la distribuzione T_f è temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

$|f(x)| = |x^3 + 2\sin(2\pi x)| \le |x|^3 + 2 \implies f$ a crescita lenta $\implies T_f \in \mathcal{S}'$

$$\mathcal{F}(T_f)(\nu) = \mathcal{F}(x^3)(\nu) + 2\,\mathcal{F}(\sin(2\pi x))(\nu)$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^3 [\mathcal{F}(1)]^{(3)}(\nu) + 2\,\mathcal{F}\left(\frac{e^{2\pi i x} - e^{-2\pi i x}}{2i}\right)(\nu)$$

$$= \frac{1}{8\pi^3}\delta_0^{(3)} + \frac{1}{i}\left[\mathcal{F}(e^{2\pi i x})(\nu) - \mathcal{F}(e^{-2\pi i x})(\nu)\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi^3}\delta_0^{(3)} + \frac{1}{i}\delta_1 - \frac{1}{i}\delta_{-1}$$

Esercizio 8 (5 punti)

a) Definire la derivata di una distribuzione.

b) Verificare, tramite la definizione, che $T_H' = \delta_0$, dove H è la funzione di Heaviside.

(b) Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$,

allora $\langle T_H', \varphi \rangle := -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx$

$$= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\int_0^b \varphi'(x)\,dx = -(\varphi(b) - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$