POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Automatica e Informatica

Le tabelle di hash

Gianpiero Cabodi e Paolo Camurati

Tabelle di hash

Finora gli algoritmi di ricerca si erano basati sul confronto.

Eccezione: tabelle ad accesso diretto dove la chiave $k \in U = \{0, 1, ..., card(U)-1\}$ funge da indice di un array `st`[0, 1, ..., card(U)-1].

Limiti delle tabelle ad accesso diretto:

- $|U|$ grande (vettore `st` non allocabile)
- $|K| << |U|$ (spreco di memoria).

Tabella di hash: è un ADT con occupazione di spazio O(|K|) e tempo medio di accesso O(1).

La funzione di hash trasforma la chiave di ricerca in un indice della tabella.

La funzione di hash non può essere perfetta $\Rightarrow$ collisione.

Usate per inserzione, ricerca, cancellazione, non per ordinamento e selezione.

ADT di I classe ST

ST.h

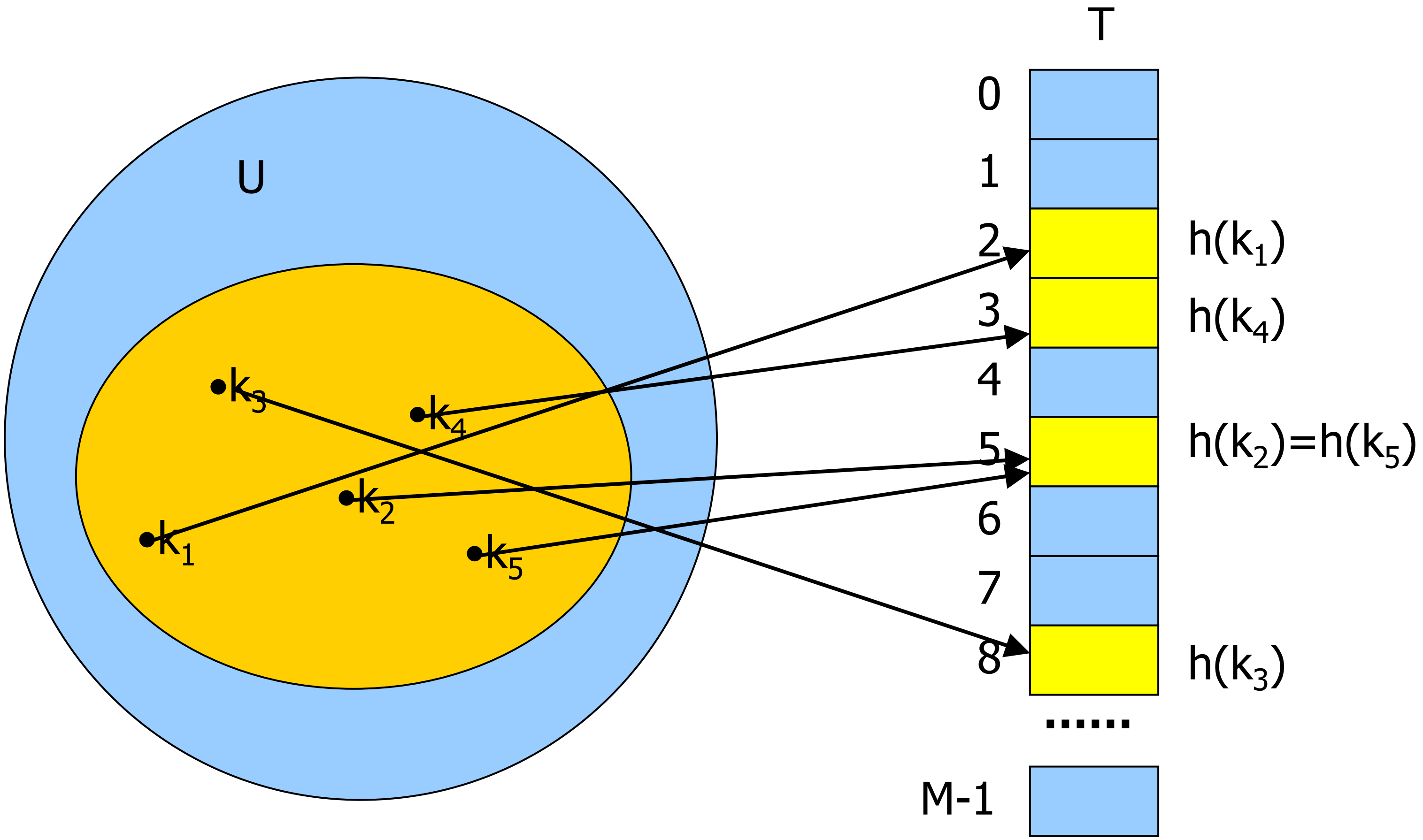
```
typedef struct symboltable *ST;

ST      STinit(int maxN, float r) ;
void    STinsert(ST st, Item val);
Item    STsearch(ST st, Key k) ;
void    STdelete(ST st, Key k) ;
void    STdisplay(ST st) ;
void    STfree(ST st);
int     STcount(ST st);
int     STempty(ST st);
```

Funzione di hash

- La tabella di hash ha dimensione M e contiene |K| elementi (|K|<<|U|)
- La tabella di hash ha indirizzi nell'intervallo [0 … M-1]
- La funzione di hash h mette in corrispondenza una chiave k con un indirizzo della tabella h(k)

$$h: U \rightarrow \{ 0, 1, ..., M\text{-}1 \}$$

- L'elemento x viene memorizzato all'indirizzo h(k) dato dalla sua chiave k (attenzione alla gestione delle collisioni!).



T
U
0
1
2
3
4
5
6
7
8
......
M-1
k_1
k_2
k_3
k_4
k_5
$h(k_1)$
$h(k_4)$
$h(k_2)=h(k_5)$
$h(k_3)$

Progetto della funzione di hash

Funzione ideale: **hashing uniforme semplice**:

- chiavi k equiprobabili => valori di h(k) devono essere equiprobabili.

In pratica

- le chiavi k non sono equiprobabili
- chiavi diverse k_i, k_j sono correlate.

Per rendere i **valori di h(k) equiprobabili** occorre:

- rendere $h(k_i)$ scorrelato da $h(k_j)$
  - "amplificare" le differenze
  - scorrelare h(k) da k
- distribuire gli h(k) in modo uniforme:
  - usare tutti i bit della chiave
  - moltiplicare per un numero primo.

Tipologie di funzioni di hash

Metodo moltiplicativo:

chiavi: numeri in virgola mobile in un intervallo prefissato ($s \leq k < t$):

$$h(k) = (k - s) / (t - s) * M$$

```
int hash(float k, int M, float s, float t) {
  return ((k-s)/(t-s))*M;
}
```

Esempio:

M = 97, s = 0.0, t = 1.0

k = 0.513870656

h(k) = (0.513870656 -0) /(1 - 0) * 97 = 49

Metodo modulare:

chiavi: numeri interi; M numero primo

$$h(k) = k \% M$$

```
int hash(int k, int M){
  return (k%M);
}
```

Esempio:

M = 19

k = 31

h(k) = 31 % 19 = 12

M numero primo evita:

- di usare solo gli ultimi n bit di k se $M = 2^n$
- di usare solo le ultime n cifre decimali di k se $M = 10^n$.

Metodo moltiplicativo-modulare

- chiavi: numeri interi:
  - data costante $0<A<1$

    $A = \phi = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0.6180339887$
  - $h(k) = \lfloor k \cdot A \rfloor \,\%\, M$

Metodo modulare

- chiavi: stringhe alfanumeriche corte come interi derivati dalla valutazione di polinomi in una data base
  - M numero primo
  - $h(k) = k \,\%\, M$

Esempio

stringa now = ‘n’*128^2 + ‘o’*128 + ‘w’

= 110*128^2 + 111*128 + 119

k = 1816567

k = 1816567   M = 19

h(k) = 1816567 % 19 = 15

Metodo modulare:

chiavi: stringhe alfanumeriche lunghe come interi derivati dalla valutazione di polinomi in una data base con il metodo di Horner: ad esempio

$$P_7(x) = p_7x^7+p_6x^6 + p_5x^5+p_4x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$$
$$= ((((((p_7x+p_6)x + p_5)x+p_4)x+p_3)x+p_2)x+p_1)x+p_0$$

Come prima:

M numero primo

$$h(k) = k \% M$$

Esempio

stringa averylongkey con base 128 (ASCII)

k = $97*128^{11}+118*128^{10}+101*128^{9}+114*128^{8}+121*128^{7}+108*128^{6}+$
$111*128^{5}+110*128^{4}+103*128^{3}+107*128^{2}+101*128^{1}+121*128^{0}$

Ovviamente k non è rappresentabile su un numero ragionevole di bit.

Con il metodo di Horner:

k = (((((((((((97*128+118)*128+101)*128+114)*128+121)*128+108)*128+111)*128+110)*
128+103)*128+107)*128+101)*128+121

Anche con il metodo di Horner k non è rappresentabile su un numero ragionevole di bit.

È possibile però ad ogni passo eliminare i multipli di M, anziché farlo dopo in fase di applicazione del metodo modulare, ottenendo la seguente funzione di hash per stringhe con base 128 per l'ASCII:

```
int hash (char *v, int M){
  int h = 0, base = 128;
  for (; *v != '\0'; v++)
    h = (base * h + *v) % M;
  return h;
}
```

In realtà anche per stringhe ASCII non si usa 128 come base, bensì:

- un numero primo (ad esempio 127)
- numero pseudocasuale diverso per ogni cifra della chiave (hash universale)

con lo scopo di ottenere una distribuzione abbastanza uniforme (probabilità di collisione tra 2 chiavi diverse prossima a 1/M).

Funzione di hash per chiavi stringa con base prima:

```c
int hash (char *v, int M) {
  int h = 0, base = 127;
  for (; *v != '\0'; v++)
    h = (base * h + *v) % M;
  return h;
}
```

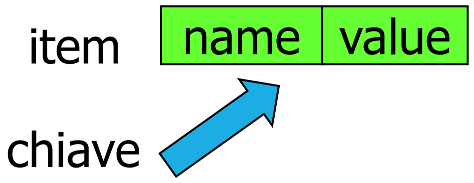
Funzione di hash per chiavi stringa con hash universale:

```c
int hashU( char *v, int M) {
  int h, a = 31415, b = 27183;
  for ( h = 0; *v != '\0'; v++, a = a*b % (M-1))
    h = (a*h + *v) % M;
  return h;
}
```

Item

- Quasi ADT Item
- Dati:
  - Nome (stringa), valore (intero)
  - Chiave = nome
  - Tipologia 3

  Negli esempi stringhe da 1 carattere e non visualizzato l’intero



Collisioni

Definizione:

collisione: $h(k_i)=h(k_j)$ per $k_i \neq k_j$

Le collisioni sono inevitabili, occorre:

- minimizzarne il numero (buona funzione di hash):
- gestirle:
  - linear chaining
  - open addressing.

Linear chaining

Più elementi possono risiedere nella stessa locazione della tabella $\Rightarrow$ lista concatenata.

Operazioni:

- inserimento in testa alla lista
- ricerca nella lista
- cancellazione dalla lista.

Determinazione della dimensione M della tabella:

- il più piccolo primo $M \geq$ numero di chiavi max / r così che la lunghezza media delle liste sia r.

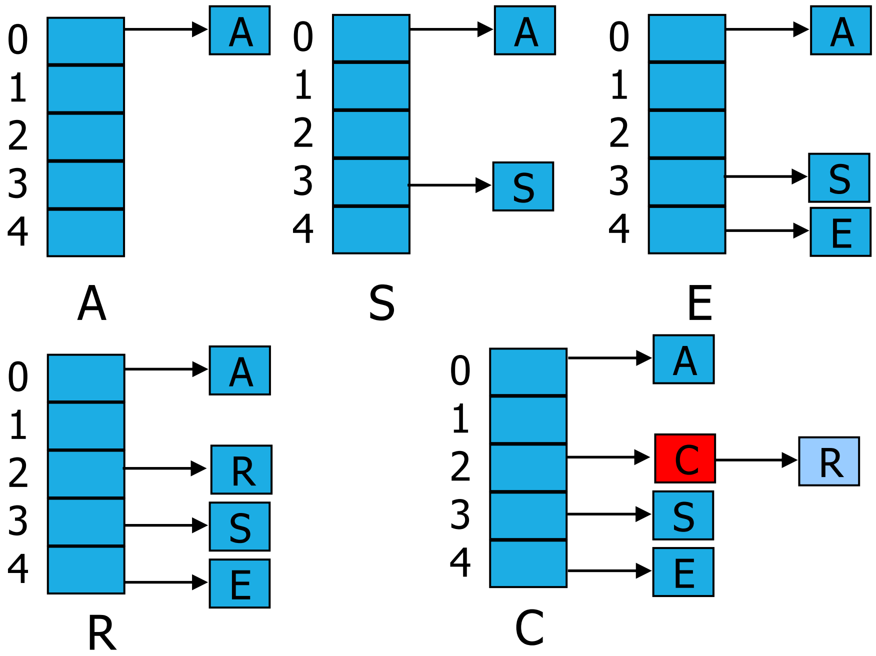
Esempio

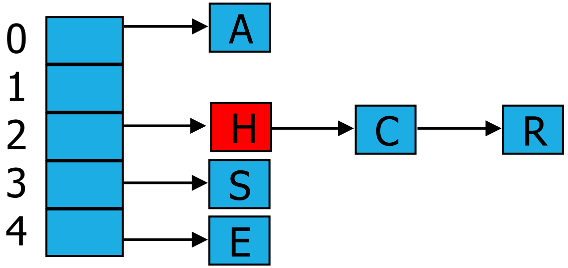
A S E R C H I N G X M P L

h(k) = 0 3 4 2 2 2 3 3 1 3 2 0 1

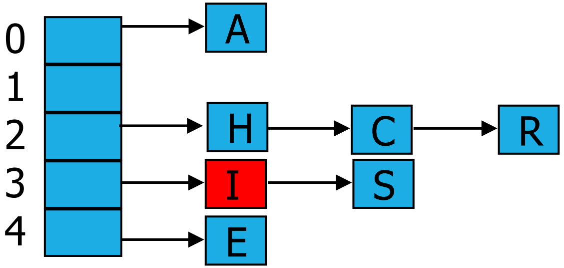
M = 5

```
int hash (Key k, int M) {
  int h = 0, base = 127;
  for (; *k != '\0'; k++)
    h = (base * h + *k) % M;
  return h;
}
```

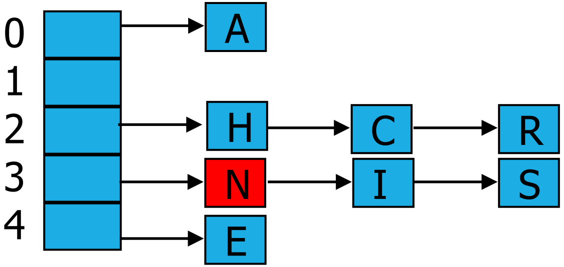



0
1
2
3
4
A
H
C
R
S
E

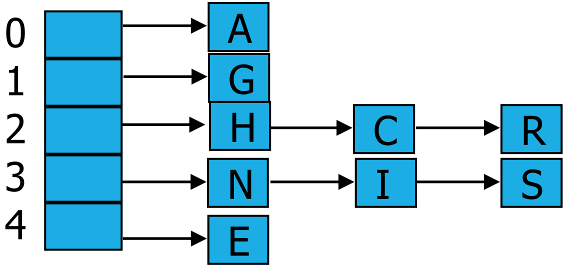
H


0
1
2
3
4
A
H
C
R
I
S
E

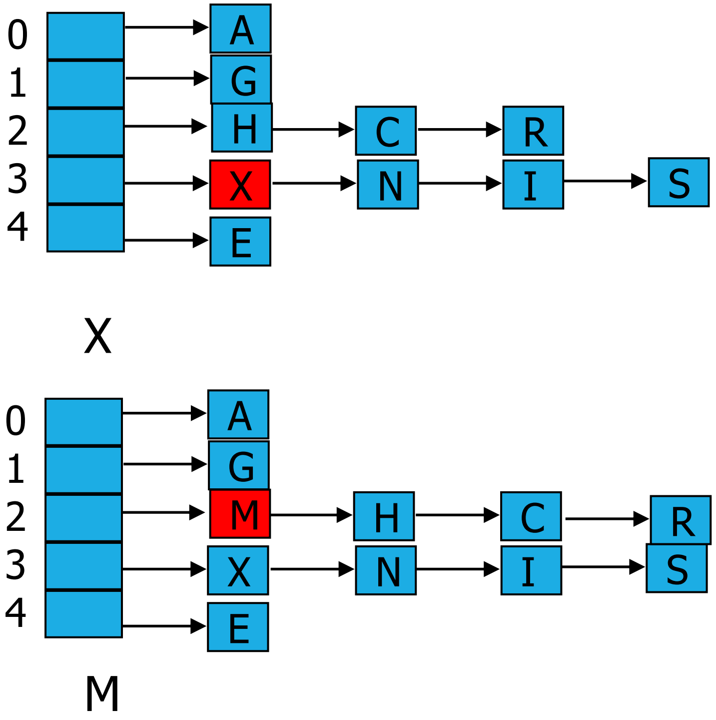
I

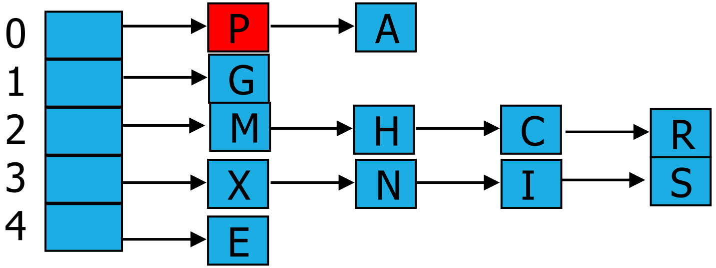

0
1
2
3
4
A
H
C
R
N
I
S
E

N

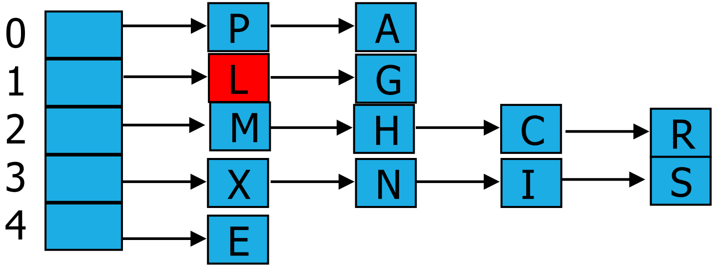

0
1
2
3
4
A
G
H
C
R
N
I
S
E

G


0
1
2
3
4
A
G
H
C
R
X
N
I
S
E
X
0
1
2
3
4
A
G
M
H
C
R
X
N
I
S
E
M



P



L

Linear chaining

ST.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include "Item.h"
#include "ST.h"

typedef struct STnode* link;

struct STnode { Item item; link next; } ;

struct symbtab { link *heads; int N; int M; link z; };

static link NEW( Item item, link next) {
  link x = malloc(sizeof *x);
  x->item = item;
  x->next = next;
  return x;
}
```

vettore di liste con nodo sentinella in coda

nodo sentinella

dimensione tabella

numero di chiavi

```
ST STinit(int maxN, float r) {
  int i;
  ST st;

  st = malloc(sizeof(*st));
  st->N = 0;
  st->M = STsizeSet(maxN, r);
  st->heads = malloc(st->M*sizeof(link));
  st->z = NEW(ITEMsetNull(), NULL);

  for (i=0; i < st->M; i++)
    st->heads[i] = st->z;

  return st;
}
```

$maxN \leq 53$

```
static int STsizeSet(int maxN, float r) {
  int primes[16]={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53};
  int i = 0;
  int size;
  size = maxN /r;
  if (size < primes[15]) {
    for (i = 0; i<16; i++)
      if (size <= primes[i])
        return primes[i];
  }
  else
    printf("Too many entries!\n");
  return -1;
}
```

```
void STfree(ST st) {
  int i;
  link t,u;
  for(i=0; i<st->M; i++)
    for (t = st->heads[i]; t != st->z; t = u){
      u = t->next;
      free(t);
  }
  free(st->z);
  free(st->heads);
  free(st);
}

int STcount(ST st) {
  return st->N;
}

int STempty(ST st) {
  if (STcount(st) == 0)
    return 1;
  return 0;
}
```

```
static int hash(Key v, int M) {
  int h = 0, base = 127;
  for ( ; *v != '\0'; v++)
    h = (base * h + *v) % M;
  return h;
}

static int hashU(Key v, int M) {
  int h, a = 31415, b = 27183;
  for ( h = 0; *v != '\0'; v++, a = a*b % (M-1))
    h = (a*h + *v) % M;
  return h;
}

void STinsert (ST st, Item val) {
  int i;
  i = hash(KEYget(&val), st->M);
  st->heads[i] = NEW(val, st->heads[i]);
}
```

```
Item STsearch(ST st, Key k) {
  return searchR(st->heads[hash(k, st->M)], k, st->z);
}
Item searchR(link t, Key k, link z) {
  if (t == z) return ITEMsetNull();
  if ((KEYcmp(KEYget(&t->item), k))==0) return t->item;
  return searchR(t->next, k, z);
}

void STdelete(ST st, Key k) {
  int i = hash(k, st->M);
  st->heads[i] = deleteR(st->heads[i], k);
}

link deleteR(link x, Key k) {
  if ( x == NULL ) return NULL;
  if ((KEYcmp(KEYget(&x->item), k))==0) {
    link t = x->next; free(x); return t;
  }
  x->next = deleteR(x->next, k);
  return x;
}
```

```c
void STdelete(ST st, Key k) {
  int i = hash(k, st->M);
  st->heads[i] = deleteR(st->heads[i], k);
}

void visitR(link h, link z) {
  if (h == z) return;
  ITEMstore(h->item);
  visitR(h->next, z);
}

void STdisplay(ST st)  {
  int i;
  for (i=0; i < st->M; i++) {
    printf("st->heads[%d] = ", i);
    visitR(st->heads[i], st->z);
    printf("\n");
  }
}
```

Complessità

Ipotesi:

Liste non ordinate:

- $N = |K|$ = numero di elementi memorizzati
- M = dimensione della tabella di hash

Hashing semplice uniforme:

h(k) ha egual probabilità di generare gli M valori di uscita.

Definizione

fattore di carico $\alpha = N/M$ (>, = o < 1)

- Inserimento: $T(n) = O(1)$
- Ricerca:
  - caso peggiore $T(n) = \Theta(N)$
  - caso medio $T(n) = O(1+\alpha)$
- Cancellazione:
  - $T(n) = O(1)$ se disponibile il puntatore ad x e la lista è doppiamente linkata
  - come la ricerca se disponibile il valore di x, oppure il valore della chiave k, oppure la lista è semplicemente linkata

Open addressing

- Ogni cella della tabella può contenere un solo elemento
- Tutti gli elementi sono memorizzati in tabella

$N \leq M$
$\alpha \leq 1$

- Collisione: ricerca di cella non ancora occupata mediante probing:
  - generazione di una permutazione delle celle = ordine di ricerca della cella libera.
  - Concettualmente:

$$h(k, t) : U \times \{ 0,1,\ldots,M-1 \} \rightarrow \{ 0,1,\ldots,M-1 \}$$

chiave tentativo (0…M-1)

Open addressing

ST.c

```
...
struct symboltable { Item *a; int N; int M;};

ST STinit(int maxN, float alpha) {
  int i;
  ST st = malloc(sizeof(*st));
  st->N = 0;
  st->M = STsizeSet(maxN, alpha);
  if (st->M == -1)
    st = NULL;
  else {
    st->a = malloc(st->M * sizeof(Item) );
    for (i = 0; i < st->M; i++)
      st->a[i] = ITEMsetNull();
  }
  return st;
}
```

```c
static int STsizeSet(int maxN, float alpha) {
  int primes[16]={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53};
  int i = 0;
  if (maxN < primes[15]*alpha) {
    for (i = 0; i<16; i++)
      if (maxN <= primes[i]*alpha)
        return primes[i];
  }
  else
    printf("Too many entries!\n");
  return -1;
}
```

Funzioni di probing

- Linear probing
- Quadratic probing
- Double hashing

Un problema dell'open addressing è il **clustering**, cioè il raggruppamento di posizioni occupate contigue.

Linear probing

Insert:

- calcola i = h(k)
- se libero, inserisci chiave, altrimenti incrementa i di 1 modulo M
- ripeti fino a cella vuota.

```
void STinsert(ST st, Item item) {
  int i = hash(KEYget(&item), st->M);
  while (full(st, i))
    i = (i+1)%st->M;
  st->a[i] = item;
  st->N++;
}
int full(ST st, int i) {
  if (ITEMcheckNull(st->a[i])) return 0;
  return 1;
}
```

Search:

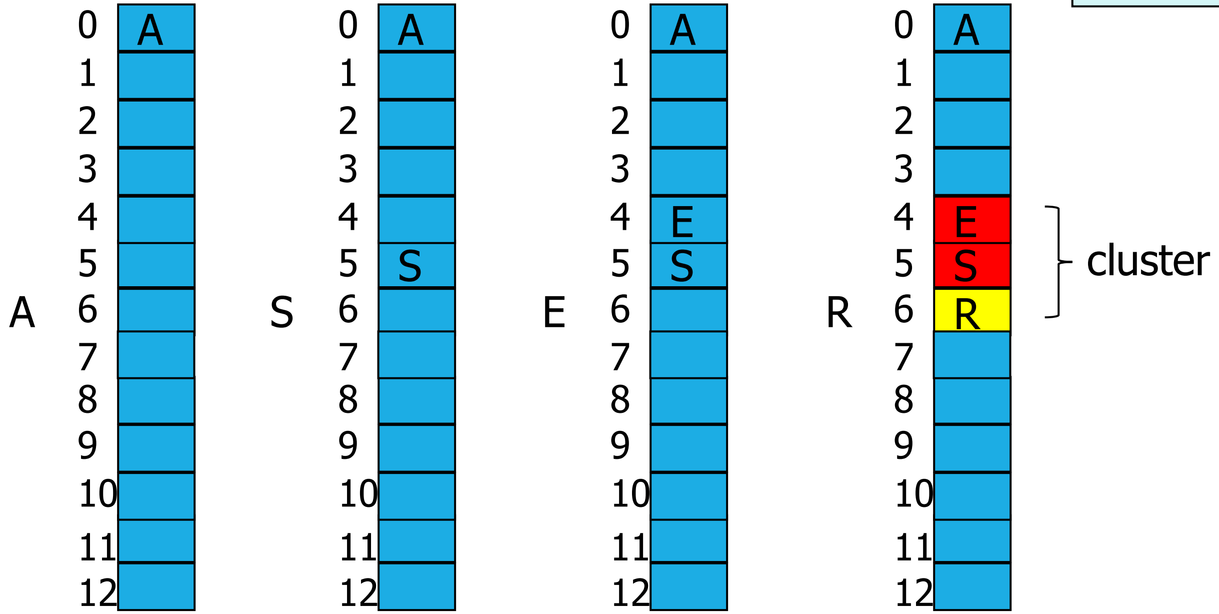
- calcola i = h(k)
- se trovata chiave, termina con successo
- incrementa i di 1 modulo M
- ripeti fino a cella vuota (insuccesso).

```
Item STsearch(ST st, Key k) {
  int i = hash(k, st->M);
  while (full(st, i))
    if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[i]))==0)
      return st->a[i];
    else
      i = (i+1)%st->M;
  return ITEMsetNull();
}
```

Esempio

```
static int hash (Key k,int M){
  int h = 0, base = 127;
  for (; *k != '\0'; k++)
    h = (base * h + *k) % M;
  return h;
}
```

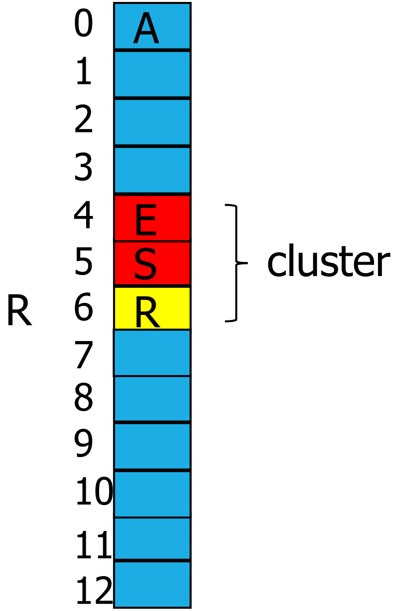
	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
h(k) =	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2



NB: non si rispetta il vincolo $\alpha < ½$

A S E R C H I N G X M P

h(k) = 0 5 4 4 2 7 8 0 6 10 12 2



$i = h('R') = 82 \% 13 = 4$ collisione

$i = (4+1) \% 13 = 5$ collisione

$i = (5+1) \% 13 = 6$

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
h(k) =	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	C	H	I	N
0	A	A	A	A
1				N
2	C	C	C	C
3				
4	E	E	E	E
5	S	S	S	S
6	R	R	R	R
7		H	H	H
8			I	I
9				
10				
11				
12				

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
h(k) =	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

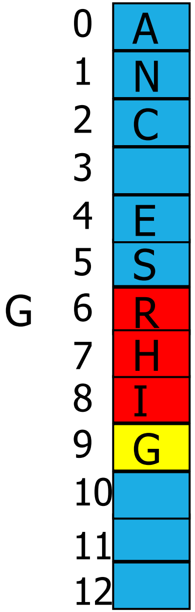
	0	A
	1	N
	2	C
	3	
	4	E
	5	S
N	6	R
	7	H
	8	I
	9	
	10	
	11	
	12	

i = h('N') = 78 % 13 = 0 collisione

i = (0+1) % 13 = 1

A S E R C H I N G X M P

h(k) = 0 5 4 4 2 7 8 0 6 10 12 2



i = h('G') = 71 % 13 = 6 collisione

i = (6+1) % 13 = 7 collisione

i = (7+1) % 13 = 8 collisione

i = (8+1) % 13 = 9

k	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
h(k) =	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

collisione

$i = h('P') = 80 \% 13 = 2$

$i = (2+1) \% 13 = 3$

	X	M	P
0	A	A	A
1	N	N	N
2	C	C	C
3			P
4	E	E	E
5	S	S	S
6	R	R	R
7	H	H	H
8	I	I	I
9	G	G	G
10	X	X	X
11			
12		M	M

Delete

operazione complessa che interrompe le catene di collisione.

L'open addressing è in pratica utilizzato solo quando non si deve mai cancellare.

Soluzioni:

1. sostituire la chiave cancellata con una chiave sentinella che conta come piena in ricerca e vuota in inserzione
2. reinserire le chiavi del cluster sottostante la chiave cancellata

Soluzione 1

Nell’ADT si introduce un vettore `status` di interi: 0 se la cella è vuota, 1 se è occupata, -1 se cancellata.

La funzione `CheckFull` controlla se la cella `i` è piena (`status`=1). La funzione `CheckDeleted` controlla se la cella è cancellata (`status`=-1).

```
struct symboltable { Item *a; int *status; int N; int M;};
static int CheckFull(ST st, int i);
static int CheckDeleted(ST st, int i);
```

```c
static int CheckFull(ST st, int i) {
  if (st->status[i] == 1) return 1;
  return 0;
}

static int CheckDeleted(ST st, int i){
  if (st->status[i] == -1) return 1;
  return 0;
}

void STinsert(ST st, Item item) {
  int i = hash(KEYget(&item), st->M);
  while (CheckFull(st, i))
    i = (i+1)%st->M;
  st->a[i] = item;
  st->status[i] = 1;
  st->N++;
}
```

```
Item STsearch(ST st, Key k) {
    int i = hash(k, st->M);
    while (CheckFull(st, i)==1 || CheckDeleted(st, i)==1)
        if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[i]))==0) return st->a[i];
        else i = (i+1)%st->M;
    return ITEMsetNull();
}

void STdelete(ST st, Key k){
  int i = hash(k, st->M);
  while (CheckFull(st, i)==1 || CheckDeleted(st, i)==1)
    if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[i]))==0) break;
    else i = (i+1) % st->M;
  if (ITEMcheckNull(st->a[i])) return;
  st->a[i] = ITEMsetNull();
  st->N--;
  st->status[i]=-1;
}
```

Esempio

Cancellare E, ricordando che c'era stata collisione tra E e R.

0	A	1
1		0
2	C	1
3		0
4	E	1
5	S	1
6	R	1
7	H	1
8		0
9		0
10		0
11		0
12		0

vettore status

~~E~~

0	A	1
1		0
2	C	1
3		0
4		-1
5	S	1
6	R	1
7	H	1
8		0
9		0
10		0
11		0
12		0

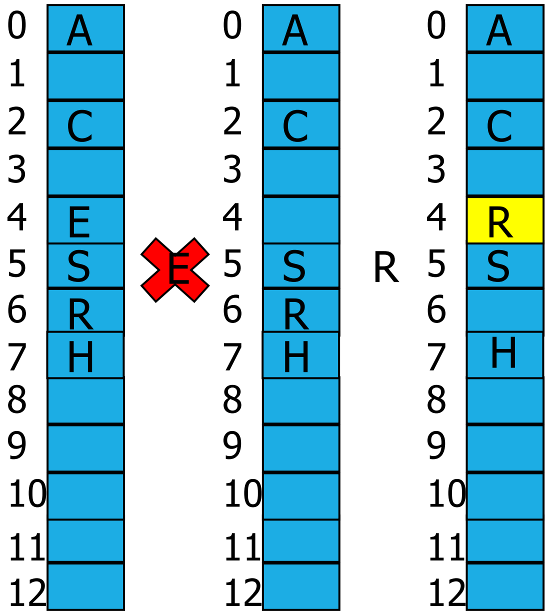
vettore status

Soluzione 2

```
void STdelete(ST st, Key k) {
  int j, i = hash(k, st->M);
  Item tmp;
  while (full(st, i))
    if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[i]))==0)
      break;
    else
      i = (i+1) % st->M;
  if (ITEMcheckNull(st->a[i]))
    return;
  st->a[i] = ITEMsetNull();
  st->N--;
  for (j = i+1; full(st, j); j = (j+1)%st->M, st->N--) {
    tmp = st->a[j];
    st->a[j] = ITEMsetNull();
    STinsert(st, tmp);
  }
}
```

Esempio

Cancellare E, ricordando che c’era stata collisione tra E e R.



Complessità

Complessità con l'ipotesi di:

- hashing semplice uniforme
- probing uniforme.

Tentativi in media di "probing" per la ricerca:

- search hit: $1/2(1 + 1/(1-\alpha))$
- search miss: $1/2(1 + 1/(1-\alpha)^2)$

α	1/2	2/3	3/4	9/10
hit	1.5	2.0	3.0	5.5
miss	2.5	5.0	8.5	55.5

Quadratic probing

Insert:

- i è il contatore dei tentativi (all'inizio 0)
- index = $(h'(k) + c_1 i + c_2 i^2)\%M$
- se libero, inserisci chiave, altrimenti incrementa i e ripeti fino a cella vuota.

```
#define c1 1
#define c2 1
void STinsert(ST st, Item item) {
  int i = 0, start = hash(KEYget(&item), st->M), index=start;
  while (full(st, index)) {
    i++;
    index = (start + c1*i + c2*i*i)%st->M;
  }
  st->a[index] = item;
  st->N++;
}
```

Search

```
Item STsearch(ST st, Key k) {
  int i=0, start = hash(k, st->M), index = start;
  while (full(st, index))
    if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[index]))==0)
      return st->a[index];
    else {
      i++;
      index = (start + c1*i + c2*i*i)%st->M;
    }
  return ITEMsetNull();
}
```

Delete (soluzione 2)

```c
void STdelete(ST st, Key k) {
  int i=0, start = hash(k, st->M), index = start;
  Item tmp;
  while (full(st, index))
    if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[index]))==0) break;
    else { i++;  index = (start + c1*i + c2*i*i)%st->M;
    }
  if (ITEMcheckNull(st->a[index])) return;
  st->a[index] = ITEMsetNull();
  st->N--; i++;
  index = (start + c1*i + c2*i*i)%st->M;
  while(full(st, index)) {
    tmp = st->a[index];
    st->a[index] = ITEMsetNull();
    st->N--; i++;
    STinsert(st, tmp);
    index = (start + c1*i + c2*i*i)%st->M;
  }
}
```

Scelta di c_1 e c_2

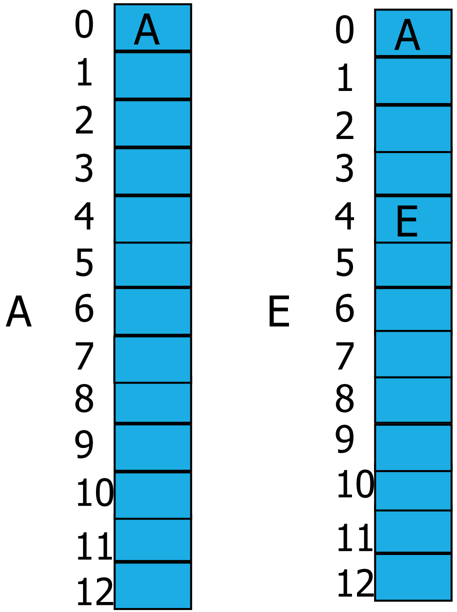
- se $M = 2^K$, scegliere $c_1 = c_2 = ½$ per garantire che siano generati tutti gli indici tra 0 e M-1:
- se M è primo, se $\alpha < ½$ i seguenti valori
  - $c_1 = c_2 = ½$
  - $c_1 = c_2 = 1$
  - $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

garantiscono che, con inizialmente start = h(k) e poi index = (start + $c_1 i + c_2 i^2$) modulo M si abbiano valori distinti per $1 \leq i \leq (M-1)/2$.

Esempio

```
static int hash (Key k,int M){
  int h = 0, base = 127;
  for (; *k != '\0'; k++)
    h = (base * h + *k) % M;
  return h;
}
```

	A	E	R	C	N	P
h(k) =	0	4	4	2	0	2



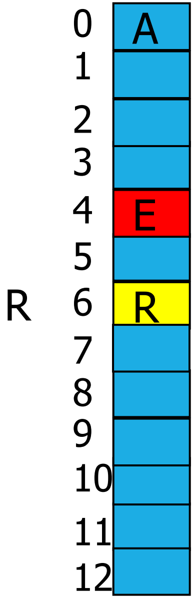
Funzione di quadratic probing

$c_1=1$ $c_2=1$

$i + i^2$

$\alpha = 6/13 < ½$

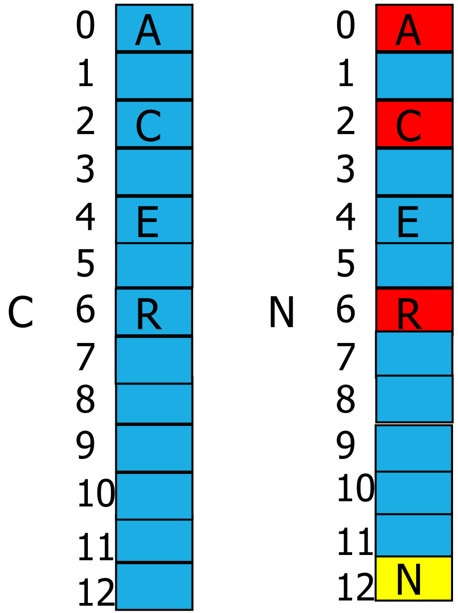
	A	E	R	C	N	P
h(k) =	0	4	4	2	0	2



start = h('R') = 82 % 13 = 4   collisione

index = $(4+1+1^2)$ % 13 = 6

	A	E	R	C	N	P
h(k) =	0	4	4	2	0	2



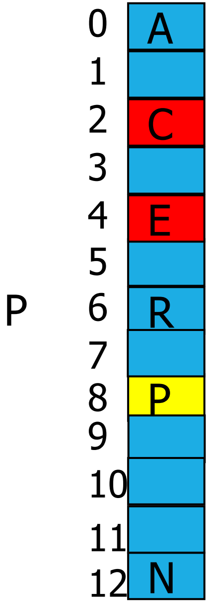
start = h('N') = 78 % 13 = 0 collisione

index = $(0+1+1^2)$ % 13 = 2 collisione

index = $(0+2+2^2)$ % 13 = 6 collisione

index = $(0+3+3^2)$ % 13 = 12

	A	E	R	C	N	P
h(k) =	0	4	4	2	0	2



start = h('P') = 80 % 13 = 2 collisione

index = $(2+1+1^2)$ % 13 = 4 collisione

index = $(2+2+2^2)$ % 13 = 8

Double hashing

Insert:

- calcola $i = h_1(k)$
- se posizione libera, inserisci chiave, altrimenti calcola $j = h_2(k)$ e prova in $i = (i + j) \% M$
- ripeti fino a cella vuota. Ricordare che, se $M = 2*max$, $\alpha < 1$

Importante: bisogna che il nuovo valore

$$i = (i + j) \% M = (h_1(k) + h_2(k)) \% M$$

sia diverso dal vecchio valore di i, altrimenti si entra in un ciclo infinito. Per evitarlo:

- h_2 non deve mai ritornare 0
- $h_2 \% M$ non deve mai ritornare 0

Esempi di h_1 e h_2:

$$h_1(k) = k \% M \text{ e } M \text{ primo}$$

$$h_2(k) = 1 + k\%97$$

$h_2(k)$ non ritorna mai 0 e $h_2\%M$ non ritorna mai 0 se $M > 97$.

```c
static int hash1(Key k, int M) {
  int h = 0, base = 127;
  for ( ; *k != '\0'; k++) h = (base * h + *k) % M;
  return h;
}
static int hash2(Key k, int M) {
  int h = 0, base = 127;
  for ( ; *k != '\0'; k++) h = (base * h + *k);
  h = ((h % 97) + 1)%M;
  if (h==0) h=1;
  return h;
}
void STinsert(ST st, Item item) {
  int i = hash1(KEYget(&item), st->M);
  int j = hash2(KEYget(&item), st->M);
  while (full(st, i))
    i = (i+j)%st->M;
  st->a[i] = item;
  st->N++;
}
```

Search

```
Item STsearch(ST st, Key k) {
  int i = hash1(k, st->M);
  int j = hash2(k, st->M);
    while (full(st, i))
      if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[i]))==0)
        return st->a[i];
      else
        i = (i+j)%st->M;
  return ITEMsetNull();
}
```

Delete (soluzione 2)

```
void STdelete(ST st, Key k) {
  int i = hash1(k, st->M), j = hash2(k); Item tmp;
  while (full(st, i))
    if (KEYcmp(k, KEYget(&st->a[i]))==0) break;
    else i = (i+j) % st->M;
  if (ITEMcheckNull(st->a[i]))
    return;
  st->a[i] = ITEMsetNull();
  st->N--;
  i = (i+j) % st->M;
  while(full(st, i)) {
    tmp = st->a[i];
    st->a[i] = ITEMsetNull();
    st->N--;
    STinsert(st, tmp);
    i = (i+j) % st->M;
  }
}
```

Esempio

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
$h_1(k)=$	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	A	S	E
0	A	A	A
1			
2			
3			
4			E
5		S	S
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

NB: non si rispetta il vincolo $\alpha < ½$

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
$h_1(k)=$	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	0	A
	1	
	2	
	3	
	4	E
	5	S
R	6	
	7	
	8	
	9	R
	10	
	11	
	12	

$i = h('R') = 82 \% 13 = 4$ collisione

$j = (82 \% 97 + 1) \% 13) = 5$

$i = (4 + 5) \% 13 = 9$

A S E R C H I N G X M P

$h_1(k)$= 0 5 4 4 2 7 8 0 6 10 12 2

	C	H	I
0	A	A	A
1			
2	C	C	C
3			
4	E	E	E
5	S	S	S
6			
7		H	H
8			I
9	R	R	R
10			
11			
12			

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
$h_1(k)=$	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	0	A
	1	N
	2	C
	3	
	4	E
	5	S
N	6	
	7	H
	8	I
	9	R
	10	
	11	
	12	

$i = h('N') = 78 \% 13 = 0$ collisione

$j = (78 \% 97 + 1) \% 13) = 1$

$i = (0 + 1) \% 13 = 1$

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
$h_1(k)=$	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	G	X	M
0	A	A	A
1	N	N	N
2	C	C	C
3			
4	E	E	E
5	S	S	S
6	G	G	G
7	H	H	H
8	I	I	I
9	R	R	R
10		X	X
11			
12			M

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
$h_1(k)=$	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	0	A
	1	N
	2	C
	3	
	4	E
	5	S
P	6	G
	7	H
	8	I
	9	R
	10	X
	11	P
	12	M

$i = h('P') = 80 \% 13 = 2$ collisione

$j = (80 \% 97 + 1) \% 13) = 3$

$i = (2 + 3) \% 13 = 5$ collisione

$i = (5 + 3) \% 13 = 8$ collisione

$i = (8 + 3) \% 13 = 11$

	A	S	E	R	C	H	I	N	G	X	M	P
$h_1(k)=$	0	5	4	4	2	7	8	0	6	10	12	2

	0	A
	1	N
	2	C
	3	
	4	E
	5	S
P	6	G
	7	H
	8	I
	9	R
	10	X
	11	P
	12	M

In inserzione c'è stata collisione tra 'P' e 'C'. Non ci sono state altre collisioni.
Se si cancella 'C', 'P' prende il suo posto.

	0	A
	1	N
	2	P
	3	
	4	E
	5	S
P	6	G
	7	H
	8	I
	9	R
	10	X
	11	
	12	M

Complessità del double hashing

Ipotesi:

- hashing semplice uniforme
- probing uniforme.

Tentativi di “probing” per la ricerca:

- search miss: $1/(1-\alpha)$
- search hit: $1/\alpha \ln (1/(1-\alpha))$

α	1/2	2/3	3/4	9/10
hit	1.4	1.6	1.8	2.6
miss	1.5	2.0	3.0	5.5

Confronto tra alberi e tabelle di hash

Tabelle di hash:

- più facili da realizzare
- unica soluzione per chiavi senza relazione d’ordine
- più veloci per chiavi semplici

Alberi (BST e loro varianti):

- meglio garantite le prestazioni (per alberi bilanciati)
- permettono operazioni su insiemi con relazione d’ordine.

Riferimenti

- Tabelle di hash
  - Cormen 12.1, 12.2, 12.3, 12.4
  - Sedgewick 14.1, 14.2, 14.3, 14.4

Esercizi di teoria

- 6. Tabelle di hash
  - 6.1 Hashing
  - 6.2 Linear chaining
  - 6.3 Open addressing con linear probing
  - 6.3 Open addressing con quadratic probing
  - 6.3 Open addressing con double hashing