19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	B
	ESERCIZIO 1

Si consideri un processo gaussiano bianco $N(t)$ con densità spettrale di potenza $N_0/2$, filtrato attraverso un filtro con funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} \sqrt{B - |f|} & \text{per} \quad |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sia $Y(t)$ il processo di uscita dal sistema.

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato? è stazionario in senso stretto?
2. Calcolare valor medio e la varianza di $Y(t)$
3. Scrivere la statistica del prim'ordine del processo di uscita $f_Y(y;t)$
4. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $Y(t)$.
5. Se il processo è stazionario, calcolare la densita spettrale di potenza $G_Y(f)$
6. E' possibile estrarre da $Y(t)$ due campioni $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ statisticamente indipendenti? Se la risposta è positiva indicare la distanza tra i due campioni.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso stretto perchè lo è quello in ingresso (processo gaussiano bianco) e passa per un sistema LTI
2. Media μ_Y:
$$\mu_Y = E[Y(t)] = H(0)\mu_N = \sqrt{B} \cdot 0 = 0.$$
la varianza σ_Y^2 è uguale al valore quadratico medio
$$\sigma_Y^2 = E[Y^2(t)] = R_Y(0) \quad R_Y(\tau) = R_N(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau)$$
Funzione di autocorrelazione:
$$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(|H(f)|^2) = \mathcal{F}^{-1}(B\Lambda(f/B)) = B^2\text{sinc}^2(\tau B)$$
da cui:
$$R_Y(\tau) = \frac{B^2 N_0}{2}\text{sinc}^2(\tau B) \to \sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{B^2 N_0}{2}$$
3. Il processo È Gaussiano, quindi la statistica del prim'ordine è:
$$f_Y(y;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}|y - \mu_Y|^2\right),$$
non dipende da t.
4. Si veda il punto 2.
5. Spettro di potenza:
$$G_Y(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0 B}{2}\Lambda(f/B)$$
6. Siccome due campioni di un processo Gaussiano $Y(t)$ hanno statistica congiuntamente gaussiana, l'indipendenza statistica coincide con la scorrelazione (indipendenza lineare). Basta quindi determinare dove è nulla la funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$.
$$R_Y(\tau) = \frac{B^2 N_0}{2}\text{sinc}^2(\tau B) \to R_Y(\tau) = 0 \quad \forall |\tau| = |t_1 - t_2| = k/B \;\; k \neq 0 \in \mathbb{Z}$$
Perciò $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ sono s.i. se e solo se $|t_1 - t_2| = k/B \;\; k \neq 0 \in \mathbb{Z}$.

19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	B
	ESERCIZIO 2

Si consideri un segnale $x(t)$ a banda limitata con banda B_x ed il segnale

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)q(t-nT)$$

con $q(t)$ impulso rettangolare di durata $T_q/2$ e $f_c = 1/T = 2B_x$. Il segnale $y(t)$ viene filtrato con un filtro ricostruttore con funzione di trasferimento $K(f)$ e si ottiene in uscita il segnale $w(t)$.

1. Scrivere un'espressione per la trasformata di Fourier di $y(t)$. Disegnarne qualitativamente l'andamento.
2. Scrivere un'espressione per la trasformata di Fourier di $w(t)$. Disegnarne qualitativamente l'andamento.
3. Sotto quali condizioni su T_q esiste un filtro ricostruttore $K_1(f)$ tale per cui $w(t) = x(t)$?
4. Scrivere l'espressione del filtro ricostruttore $K_1(f)$ in questo caso e disegnarne l'andamento qualitativo.
5. Sotto quali condizioni su T_q esiste un filtro ricostruttore $K_2(f)$ tale per cui $w(t) = \alpha x(t)\cos(4\pi B_x t)$, con $\alpha \neq 0$?
6. Scrivere l'espressione del filtro ricostruttore $K_2(f)$ in questo caso e disegnarne l'andamento qualitativo.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1.

$$y(t) = q(t) * \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = q(t) * \left(x(t) \cdot \sum_n \delta(t-nT)\right)$$

$$Y(f) = Q(f) \cdot \left(X(f) * \frac{1}{T}\sum_n \delta(f-n/T)\right) = Q(f)\frac{1}{T}\sum_n X(f-n/T) = T_q \text{sinc}^2(fT_q)\frac{1}{T}\sum_n X(f-n/T)$$

2.

$$W(f) = K(f) \cdot Y(f) = K(f) \cdot Q(f) \cdot \frac{1}{T}X(f-nT)$$

3. Siccome $1/T = 2B_x$ le repliche non si sovrappongono e la ricostruzione è possibile se $Q(f)$ non presenta zeri nella replica che si vuole ricostruire ed equalizzare.
4. Siccome $Q(f) = \frac{T_q}{2}\text{sinc}(fT_q/2)$, nel primo caso abbiamo $2/T_q \geq B_x \to T_q \leq 2/B_x$,

$$K_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{Q(f)}, & |f| < B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Nel secondo caso il filtro ricostruttore deve lasciare passare ed equalizzare le repliche centrate in $f = \pm 2B_x = \pm f_c$. Quindi la condizione è che $2/T_q \geq 3B_x \to T_q < 2/(3B_x)$ ed il filtro ricostruttore è:

$$K_2(f) = \begin{cases} \frac{1}{Q(f)}, & B_x < |f| < 3B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	B
	ESERCIZIO 3

La funzione di trasferimento di un sistema numerico fisicamente realizzabile vale:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \tag{1}$$

Al sistema viene posto in ingresso il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \tag{2}$$

1. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Calcolare la risposta all'impulso del sistema.
3. Calcolare l'uscita $y(n)$.
4. Indicare le regioni di convergenza di $H(z)$, $X(z)$ e $Y(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \cdot X(z) \tag{3}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \cdot Y(z) = \left(1 - \frac{4}{3}z^{-1}\right) \cdot X(z) \tag{4}$$

$$Y(z) = X(z) - \frac{4}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) \tag{5}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) - \frac{4}{3}x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-1) \tag{6}$$

Lo schema a blocchi del sistema è mostrato in Fig.1.

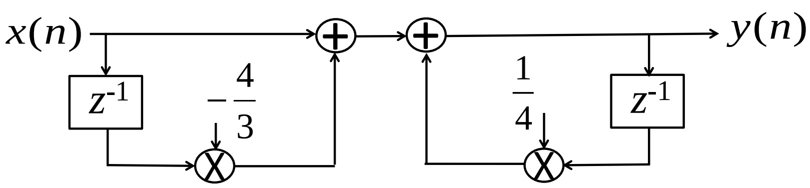

Figura 1: Schema a bloccchi del sistema.

2. La funzione di trasferimento del sistema può essere scritta come:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{4}{3}z^{-1}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \tag{7}$$

La sua antitrasformata vale:

$$h(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) \tag{8}$$

3. La trasformata z dell'uscita si può trovare moltiplicando $H(z)$ per $X(z)$, dove:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{9}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \tag{10}$$

La funzione $Y(z)$ si può antitrasformare usando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{4}{3} \cdot 2}{1 - \frac{1}{4} \cdot 2} = -\frac{10}{3}$$

$$R_2 = Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{4}{3} \cdot 4}{1 - \frac{1}{2} \cdot 4} = \frac{13}{3}$$

Quindi:

$$Y(z) = -\frac{10}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{13}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = -\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{13}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

4. Le regioni di convergenza sono:
ROC$_H$: $|z| > \frac{1}{4}$, ROC$_X$: $|z| > \frac{1}{2}$, ROC$_Y$: $|z| > \frac{1}{2}$

Il sistema è stabile in quanto è causale e tutti i poli (polo singolo in $z = 1/4$) cadono all'interno della circonferenza di raggio unitario. Il sistema non è a fase minima in quanto lo zero ($z = 4/3$) cade al di fuori della circonferenza di raggio unitario.