16 Settembre 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Il tempo totale assegnato per la soluzione è di 2 ore. Al termine dei primi 30 minuti verrà ritirato il foglio con i quiz a risposta multipla.**
Consegnare il testo completo di tutti i fogli, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola (in STAMPATELLO MAIUSCOLO). Nella tabellina qui sotto riportare al più una risposta per ogni quiz di teoria usando LETTERE MAIUSCOLE. Spiegazioni o commenti (opzionali) sulla risposta selezionata possono essere aggiunti nel campo COMMENTI che segue ogni quiz di teoria.

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	QUIZ DI TEORIA

Quiz	1	2	3
Risposta	C	B	E

1. Il segnale
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)\,\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t}$$
viene campionato con un campionatore ideale. Indicare qual è la minima frequenza di campionamento che consente un'esatta ricostruzione del segnale a partire dai suoi campioni.

   (A) f_0
   (B) $2f_0$
   (C) $3f_0$
   (D) non esiste tale frequenza

   COMMENTI (opzionali)

2. Un processo casuale $n(t)$ gaussiano, stazionario, a valor medio nullo e spettro di potenza costante $G_n(f) = N_0/2 \; \forall f$ passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f)$. Si sa che $|H(f)|^2$ è una funzione triangolare, simmetrica rispetto a $f = 0$, con valore massimo pari a 1 e banda $[-B, B]$. Sia $y(t)$ l'uscita del sistema. La varianza di $y(t)$ vale

   (A) $N_0 B$
   (B) $\frac{N_0 B}{2}$
   (C) $\frac{N_0}{B}$
   (D) $\frac{N_0 B}{4}$
   (E) altro

   COMMENTI (opzionali)

3. Sia data la sequenza $x[n] = (-a)^n u[n]$ con $u[n]$ la sequenza gradino unitario e $a = 0.5$. La trasformata z di $x[n]$, $X(z)$:

   (A) non ha poli
   (B) non ha zeri e ha due poli semplici reali in $z = \pm 0.5$
   (C) ha uno zero nell'origine, uno zero reale in $z = -0.5$ e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$
   (D) ha uno zero nell'origine e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$
   (E) ha uno zero nell'origine e un polo reale semplice in $z = -0.5$

   COMMENTI (opzionali)

16 Settembre 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Consegnare il testo completo di tutti i fogli e con lo svolgimento completo degli esercizi, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola.**

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Dato il filtro numerico descritto dalla seguente relazioni ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) - \alpha x(n-1) + \left(\beta + \frac{1}{2}\right) y(n-1) - \frac{\beta}{2} y(n-2) \tag{1}$$

con α e β numeri reali non nulli.

1. Scrivere l'espressione dellla funzione di trasferimento $H(z)$ del filtro.
2. Indicare la regione di convergenza di $H(z)$ e discutere stabilità e tipologia (FIR o IIR) del filtro al variare dei parametri α e β.
3. Calcolare l'espressione del segnale $y(n)$ in uscita dal filtro quando all'ingresso viene posto il segnale: $x(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$.
4. Calcolare la risposta all'impulso del filtro quando α=1 e $\beta = \frac{1}{3}$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. La trasformata zeta della relazione ingresso/uscita vale:

$$Y(z) = X(z) - \alpha X(z) z^{-1} + \left(\beta + \frac{1}{2}\right) Y(z) z^{-1} - \frac{\beta}{2} Y(z) z^{-2}$$

Quindi:

$$Y(z)\left[1 - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) z^{-1} + \frac{\beta}{2} z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - \alpha z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) z^{-1} + \frac{\beta}{2} z^{-2}} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{\left(1 - \beta z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$

2. Il sistema è sempre causale, per qualunque valore di α e β, in quanto l'uscita all'istante di tempo n dipende solo dai valori dell'ingresso negli istanti di tempo precedenti. $H(z)$ ha due poli in $z = \beta$ e $z = \frac{1}{2}$ e due zeri in $z = \alpha$ e $z = 0$.
Se $\alpha \neq \beta$, ROC: $|z| > \max\left\{|\beta|, \frac{1}{2}\right\}$.
Se $\alpha = \beta$, il polo in $z = \beta$ viene cancellato dallo zero, quindi ROC: $|z| > \frac{1}{2}$.

La tipologia del filtro è IIR per qualunque valore di α e β. Essendo causale, è stabile se tutti i poli sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, ossia se $|\beta| < 1$, quando $\alpha \neq \beta$. È sempre stabile se $\alpha = \beta$.

3. La trasformata zeta dell'ingresso vale:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

La trasformata zeta dell'uscita vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \frac{1 - \alpha z^{-1}}{(1 - \beta z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{(1 - \beta z^{-1})}$$

Antitrasformando:

$$\begin{aligned} y(n) &= (\beta)^n\, u(n) - \alpha\, (\beta)^{n-1}\, u(n-1) = \\ &= \delta(n) + \beta\, (\beta)^{n-1}\, u(n-1) - \alpha\, (\beta)^{n-1}\, u(n-1) = \\ &= \delta(n) + (\beta - \alpha)\, (\beta)^{n-1}\, u(n-1) \end{aligned}$$

4. La risposta all'impulso si può trovare invertendo la funzione di trasferimento con il metodo dei fratti semplici:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1-2}{1-\frac{2}{3}} = -3$$

$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \left.\frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1-3}{1-\frac{3}{2}} = 4$$

Quindi:

$$H(z) = -\frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

16 Settembre 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

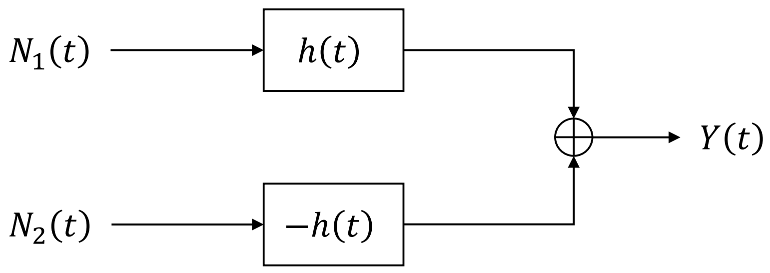
Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

Si consideri un rumore gaussiano bianco $N_1(t)$ con densità spettrale di potenza $N_{0,1}$, un altro rumore gaussiano bianco $N_2(t)$, indipendente da $N_1(t)$, con densità spettrale di potenza $N_{0,2}$, ed il processo $Y(t) = h(t) * N_1(t) - h(t) * N_2(t)$, dove $h(t)$ è la risposta all'impulso di un sistema LTI stabile.

1. Rappresentare con un diagramma a blocchi un sistema che genera il processo di uscita $Y(t)$.
2. Dare la definizione di processo stazionario in senso lato. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato?
3. Scrivere l'espressione della funzione di autocorrelazione di $Y(t)$.
4. Scrivere l'espressione della densità spettrale di potenza di $Y(t)$, $G_Y(f)$.
5. Ponendo $h(t) = 2\Pi_3(t)$, $N_{0,1} = 2$, $N_{0,2} = 2$, calcolare valor medio e potenza di $Y(t)$.
6. È possibile semplificare il sistema per generare un processo $Y'(t)$ con le stesse caratteristiche statistiche di $Y(t)$?

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1. Si veda figura sottostante



Sistemi LTI

2. Un processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato se la sua media è costante nel tempo ($m_Y(t) = E\{Y(t)\} = m_Y$) e la funzione di autocorrelazione $R_Y(t_1, t_2) = E\{Y(t_1)Y^*(t_2)\}$ dipende solo dalla differenza $\tau = t_1 - t_2$.
   Il processo $Y(t)$ considerato è stazionario perchè i processi di ingresso lo sono e passano attraverso sistemi LTI.

3. Sia $N_1'(t) = h(t) * N_1(t)$ e $N_2'(t) = h(t) * N_2(t)$.

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E\{(N_1'(t) - N_2'(t))(N_1'(t+\tau) - N_2'(t+\tau))\} \\
&= E\{N_1'(t)N_1'(t+\tau)\} + E\{N_2'(t)N_2'(t+\tau)\} + \text{termini misti nulli} \\
&= R_{N_1'}(\tau) + R_{N_2'}(\tau) \\
&= R_h(\tau) * N_{0,1}\delta(\tau) + R_h(\tau) * N_{0,2}\delta(\tau) \\
&= R_h(\tau) * (N_{0,1} + N_{0,2})\,\delta(\tau) \\
&= R_h(\tau)\,(N_{0,1} + N_{0,2})
\end{aligned}$$

   I termini misti si annullano perchè i due processi sono indipendenti e a media nulla. Si noti che il segno meno scompare. $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $h(t)$.

4. Densità spettrale di potenza di $Y(t)$,

$$G_Y(f) \triangleq \mathcal{F}(R_Y(\tau)) = |H(f)|^2\,(N_{0,1} + N_{0,2})$$

5. Ponendo $h(t) = 2\Pi_3(t)$, $N_{0,1} = 2$, $N_{0,2} = 2$, calcolare valor medio e potenza di $Y(t)$.
   La media è nulla perchè i processi di ingresso hanno media nulla.

   La potenza media coincide con la funzione di autocorrelazione nell'origine:

$$P_Y = R_Y(0) = R_h(0)\,(N_{0,1} + N_{0,2}) = 12 \cdot (2+2) = 48$$

   Infatti:

$$R_h(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) = 4 \cdot 3\Lambda_3(\tau).$$

   Senza calcolare la funzione di autocorrelazione possiamo scrivere:

$$R_h(0) = ||h(t)||^2 = 12$$

6. Dall'espressione della funzione di autocorrelazione o della densità spettrale di potenza si puó notare come un processo $Y'(t)$ con le stesse caratteristiche statistiche possa essere generato ponendo un unico processo gaussiano bianco $N_3(t)$ con densità spettrale di potenza $N_{0,3} = (N_{0,1} + N_{0,2})$ all'ingressso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$.

$$N_3(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

$$G_{N_3}(f) = N_{0,1} + N_{0,2}$$

16 Settembre 2019

Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

Si consideri l'insieme di segnali $\mathcal{B} = \{\psi_i(t)\},\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \frac{1}{2}\Pi_4(t-2)\\ \psi_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\Pi_2(t-1) - \Pi_2(t-3)\right)\\ \psi_3(t) &= \frac{1}{2}\left(\Pi_1(t-0.5) - \Pi_2(t-2) + \Pi_1(t-3.5)\right),\end{aligned}$$

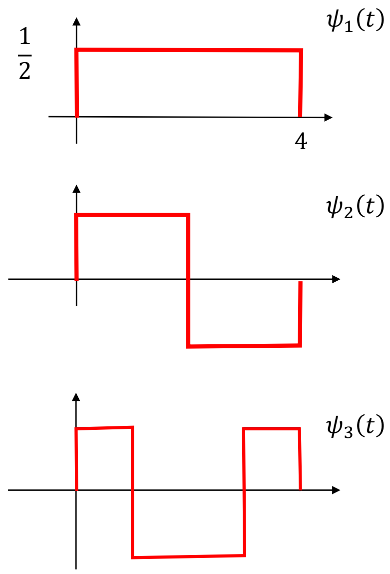
dove $\Pi_B(t)$ è una porta simmetrica di ampiezza unitaria e supporto B, ed il segnale

$$y(t) = \Pi_4(t-2)\cos(\pi t/4).$$

1. Disegnare l'insieme di segnali $\mathcal{B}$ ed il segnale $y(t)$.
2. $\mathcal{B}$ è un insieme di segnali ortonormali?
3. Si approssimi il segnale $y(t)$ con un segnale $\hat{y}(t)$ appartenente all'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$
4. Determinare l'errore quadratico residuo $E = ||y(t) - \hat{y}(t)||^2$
5. Verificare la diseguaglianza di Bessel
6. Verificare che il segnale errore $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ sia ortogonale al segnale approssimante $\hat{y}(t)$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1. Disegnare l'insieme di segnali $\mathcal{B}$ ed il segnale $y(t)$. Si veda figura sottostante.



2. Bisogna dimostrare che
$$< \psi_i(t), \psi_j(t) >= \delta_{ij}$$
Calcoliamo i prodotti scalari:
$$\begin{aligned}
< \psi_i(t), \psi_i(t) > &= \int_0^4 \psi_i^2(t) = \frac{1}{4}\int_0^4 1dt = 1 \\
< \psi_1(t), \psi_2(t) > &= \int_0^4 \psi_1(t)\psi_2(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 dt - \int_2^4 dt\right) = 0 \\
< \psi_1(t), \psi_3(t) > &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 dt - \int_1^3 dt + \int_3^4 dt\right) = 0 \\
< \psi_2(t), \psi_3(t) > &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 dt - \int_1^2 dt + \int_2^3 dt - \int_3^4 dt\right) = 0
\end{aligned}$$

3. Si approssimi il segnale $y(t)$ con un segnale $\hat{y}(t)$ appartenente all'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$.

   L'approssimazione
$$\hat{y}(t) = \alpha_1\psi_2(t) + \alpha_2\psi_2(t) + \alpha_3\psi_3(t)$$
   che minimizza l'errore quadratico medio usa come coefficienti i prodotti scalari:
$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \int_0^4 y(t)\psi_1(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^4 \cos(\pi t/4)dt = \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}[\sin(\pi t/4)]_0^4 = 0, \\
\alpha_2 &= \int_0^4 y(t)\psi_2(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 \cos(\pi t/4)dt - \int_2^4 \cos(\pi t/4)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left([\sin(\pi t/4)]_0^2 - [\sin(\pi t/4)]_2^4\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left(2\sin(\pi/2)\right) = \frac{4}{\pi}, \\
\alpha_3 &= \int_0^4 y(t)\psi_3(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \cos(\pi t/4)dt - \int_1^3 \cos(\pi t/4)dt + \int_3^4 \cos(\pi t/4)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left([\sin(\pi t/4)]_0^1 - [\sin(\pi t/4)]_1^3 + [\sin(\pi t/4)]_3^4\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left(\sin(\pi/4) - \sin(\pi 3/4) + \sin(\pi/4) - \sin(\pi 3/4)\right) = 0.
\end{aligned}$$
   Quindi otteniamo:
$$\hat{y}(t) = \frac{4}{\pi}\psi_2(t) = \frac{2}{\pi}\left(\Pi_2(t-1) - \Pi_2(t-3)\right)$$

4. Determinare l'errore quadratico residuo $E_{\min} = ||y(t) - \hat{y}(t)||^2$. Possiamo calcolare
$$E_Y = ||y(t)||^2 = \int_0^4 \cos^2(\pi t/4)dt = 2$$
   e scrivere direttamente:
$$E_{\min} = ||y(t)||^2 - ||\hat{y}(t)||^2 = 2 - \alpha_2^2 = 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 0.3788$$

5. Verificare la diseguaglianza di Bessel. $E_{\min}$ è maggiore di zero, quindi

$$||\hat{y}(t)||^2 \leq ||y(t)||^2$$

6. Verificare che il segnale errore $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ sia ortogonale al segnale approssimante $\hat{y}(t)$.

   Calcolo il prodotto scalare e verifico che sia nullo:

$$\begin{aligned}
< e(t), \hat{y}(t) > &= \int_0^4 \left(\cos(\pi t/4) - \frac{4}{\pi}\psi_2(t) \right) \frac{4}{\pi}\psi_2(t) dt \\
&= \int_0^4 \frac{4}{\pi}\psi_2(t) \cos(\pi t/4) - \frac{16}{\pi^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\frac{4}{\pi} \left([\sin(\pi t/4)]_0^2 - [\sin(\pi t/4)]_2^4 \right) - \frac{16}{\pi^2} \\
&= \frac{16}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^2} = 0
\end{aligned}$$