Quiz TEORIA appello 25 Gennaio 2023

1. **25 Gennaio 2023 QTCa**

   Si consideri un segnale $x(t)$ non nullo e periodico di periodo T, di cui $x_T(t)$ sia la sua versione troncata su un periodo T, e $E\{x_T(t)\}$ la corrispondente energia, che si assuma essere finita. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $x(t)$ è un segnale a potenza media finita il cui valore P_x è proporzionale a $E\{x_T(t)\}$ ✓
   (b) $x(t)$ è un segnale a energia finita e pari a $E\{x_T(t)\}$
   (c) il segnale $x(t-\tau)$ ha potenza diversa da $x(t)$
   (d) $x(t)$ è un segnale a potenza media finita e pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}$

   SOLUZIONE Per i segnali periodici, abbiamo visto a lezione che l'energia risulta infinita, mentre la potenza media è pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}/T$. La risposta corretta è dunque "$x(t)$ è un segnale a potenza media finita il cui valore P_x è proporzionale a $E\{x_T(t)\}$".

   Per quanto riguarda la risposta "il segnale $x(t-\tau)$ ha potenza diversa da $x(t)$", questa è chiaramente errata, in quanto una traslazione sull'asse dei tempi NON cambia la potenza media di un segnale.

   Per quanto riguarda la risposta "$x(t)$ è un segnale a potenza media finita e pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}$", questa risulta sbagliata, in quanto la potenza media è in realtà pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}/T$.

2. **25 Gennaio 2023 QTCb**

   Si consideri un segnale $x(t)$ non nullo e periodico di periodo T, di cui $x_T(t)$ sia la sua versione troncata su un periodo T, e $E\{x_T(t)\}$ la corrispondente energia, che si assuma essere finita. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) la densità spettrale di potenza di $x(t)$ è costituita da delta di Dirac posizionate in frequenza ai multipli di $1/T$ ✓
   (b) la densità spettrale di energia di $x(t)$ è costituita da delta di Dirac posizionate in frequenza ai multipli di $1/T$
   (c) il segnale $x(t+\tau)$ ha potenza diversa da $x(t)$
   (d) $x(t)$ è un segnale a potenza media finita e pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}$

   SOLUZIONE Per i segnali periodici, abbiamo visto a lezione che effettivamente la densità spettrale di potenza di $x(t)$ è costituita da delta di Dirac posizionate in frequenza ai multipli di $1/T$, mentre la la densità spettrale di energia non è definita. La risposta corretta è dunque "la densità spettrale di potenza di $x(t)$ è costituita da delta di Dirac posizionate in frequenza ai multipli di $1/T$"

   Per quanto riguarda la risposta "il segnale $x(t+\tau)$ ha potenza diversa da $x(t)$", questa è chiaramente errata, in quanto una traslazione sull'asse dei tempi NON cambia la potenza media di un segnale.

   Per quanto riguarda la risposta "$x(t)$ è un segnale a potenza media finita e pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}$", questa risulta sbagliata, in quanto la potenza media è in realtà pari a $P_x{=}E\{x_T(t)\}/T$.

3. **25 Gennaio 2023 QPCa**

   Si consideri un processo casuale $n(t)$ di tipo Gaussiano bianco con media nulla e densità spettrale di potenza pari a A per $\forall f$. Questo processo casuale $n(t)$ è inviato ad un sistema lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = 2$ per $f \in [-B, +B]$ e nullo altrove. Sia $n_{out}(t)$ il processo casuale all'uscita del sistema LTI. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $8AB$ ✓
   (b) la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $4AB$
   (c) la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $2AB$
   (d) la potenza media del processo casuale $n_{out}(t)$ è infinita.

   SOLUZIONE La densità spettrale di potenza del segnale di uscita si può in generale esprimere come $S_{n_{out}}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_n(f)$ e dunque: $S_{n_{out}}(f)) = 4A$ per $f \in [-B, +B]$ e nullo altrove. La potenza media si ottiene integrando la densità spettrale di potenza, ottenendo il valore $8AB$. La risposta corretta è dunque "la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $8AB$"

4. **25 Gennaio 2023 QPCb**

   Si consideri un processo casuale $n(t)$ di tipo Gaussiano bianco con media nulla e densità spettrale di potenza pari a $A/2$ per $\forall f$. Questo processo casuale $n(t)$ è inviato ad un sistema lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = 3$ per $f \in [-2B, +2B]$ e nullo altrove. Sia $n_{out}(t)$ il processo casuale all'uscita del sistema LTI. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $18AB$ ✓
   (b) la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $6AB$
   (c) la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $36AB$
   (d) la potenza media del processo casuale $n_{out}(t)$ è infinita.

SOLUZIONE La densità spettrale di potenza del segnale di uscita si può in generale esprimere come $S_{n_{out}}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_n(f)$ e dunque: $S_{n_{out}}(f)) = 9/2A$ per $f \in [-2B, +2B]$ e nullo altrove. La potenza media si ottiene integrando la densità spettrale di potenza, ottenendo il valore $18AB$. La risposta corretta è dunque "la potenza media di $n_{out}(t)$ è uguale a $18AB$"

5. **25 Gennaio 2023 QTDa**

   Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [3, 5]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2, 5]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) $y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli ✓
   (b) $y[n]$ assume (al massimo) 5 valori non nulli
   (c) $y[n]$ assume (al massimo) 7 valori non nulli
   (d) $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 1$

   SOLUZIONE I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno rispettivamente tre e quattro valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporto meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a sei. La risposta corretta è dunque " $y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli"

6. **25 Gennaio 2023 QTDb**

   Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [1, 5]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2, 4]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) $y[n]$ assume (al massimo) 7 valori non nulli ✓
   (b) $y[n]$ assume (al massimo) 5 valori non nulli
   (c) $y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli
   (d) $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 0$

   SOLUZIONE I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno rispettivamente cinque e tre valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporto meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a sette. La risposta corretta è dunque " $y[n]$ assume (al massimo) 7 valori non nulli"

Processi Casuali Gennaio 2022.

1. **531**

   Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con $S_n(f) = N_0/2$ è posto in ingresso ad un sistema LTI la cui risposta all'impulso $h(t)$ vale:

   $$h(t) = \frac{1}{T} p_{2T}(t-T) * p_T(t-T/2),$$

   dove $p_a(t)$ è la porta simmetrica di supporto a.

   Sia $y(t)$ l'uscita del sistema LTI. Quanto vale il coefficiente di correlazione tra $y(t_1)$ e $y(t_2)$, con $t_1 = 3T$ e $t_2 = 5T$?

   Si ricorda che il coefficiente di correlazione tra due variabili casuali X e Y (con media μ_X e μ_Y e varianza σ_X^2 e σ_Y^2) è pari a:

   $$\rho = \frac{E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

   (a) 0.1 ✓
   (b) $-0.25T$
   (c) -0.5
   (d) $+0.5$
   (e) $+2$

2. **530**

   Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con $S_n(f) = N_0/2$ è posto in ingresso ad un sistema LTI la cui risposta all'impulso $h(t)$ vale:

   $$h(t) = \frac{1}{T} p_{2T}(t-T) * p_T(t-T/2) - p_T(t-3T/2),$$

   dove $p_a(t)$ è la porta simmetrica di supporto a.

   Sia $y(t)$ l'uscita del sistema LTI. Quanto vale il coefficiente di correlazione tra $y(t_1)$ e $y(t_2)$, con $t_1 = 5T$ e $t_2 = 7T$?

   Si ricorda che il coefficiente di correlazione tra due variabili casuali X e Y (con media μ_X e μ_Y e varianza σ_X^2 e σ_Y^2) è pari a:

   $$\rho = \frac{E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

   (a) 0.25 ✓
   (b) $-0.25T$
   (c) -0.5
   (d) $+0.5$
   (e) $+2$

Soluzione 531:
Il processo di uscita $Y(t)$ é stazionario con valor medio nullo quindi il coefficiente si trova come:

$$\rho = \frac{E\{Y(t_1)Y(t_2)\}}{\sqrt{E\{Y^2(t_1)\}E\{Y^2(t_2)\}}} = \frac{R_y(t_1-t_2)}{R_y(0)} = \frac{R_y(2T)}{R_y(0)}$$

La risposta all'impulso (convoluzione di due porte causali di supporto diverso) consiste in un trapezio isoscele causale si supporto 3T, base minore T e altezza 1.

$$R_y(0) = \frac{N_0}{2}\int h^2(t) = 2\int_0^T (t/T)^2 dt + \int_T^{2T} 1dt = 2T/3 + T = \frac{N_0}{2}(5T/3)$$

$h(t)$ e $h(t+2T)$ sono sovrapposte solo in $[0, T]$, dove $h(t) = (t/T)$ e $h(t+2T) = (1-t/T)$ quindi:

$$R_y(2T) = \frac{N_0}{2}R_h(2T) = \frac{N_0}{2}\int h(t)h(t+2T)dt = \frac{N_0}{2}\int_0^T (t/T)(1-t/T)dt = \frac{N_0}{2}(T/2 - T/3) = \frac{N_0}{2}(T/6)$$

Mettendo insieme i risultati:

$$\rho = \frac{R_y(2T)}{R_y(0)} = \frac{\frac{N_0}{2}(T/6)}{\frac{N_0}{2}(5T/3)} = \frac{1}{10}$$

Fine Soluzione.

---

3. **781**

Un processo casuale WSS $x(t)$ a valor medio nullo caratterizzato da uno spettro di potenza $S_x(f) = e^{-\pi^2 f^2}$, passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f) = e^{-2\pi^2 f^2}$. Sia $y(t)$ il processo casuale all'uscita di tale sistema LTI. La varianza di $y(t)$ vale:

(a) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}$ ✓
(b) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$
(c) $\sigma_y^2 = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$
(d) σ_y^2 non può essere determinata con i dati del problema.
(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

4. **782**

Un processo casuale WSS $x(t)$ a valor medio nullo caratterizzato da uno spettro di potenza $S_x(f) = e^{-2\pi^2 f^2}$, passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f) = e^{-\pi^2 f^2}$. Sia $y(t)$ il processo casuale all'uscita di tale sistema LTI. La varianza di $y(t)$ vale:

(a) $\sigma_y^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ ✓
(b) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
(c) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$
(d) σ_y^2 non può essere determinata con i dati del problema.
(e) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione 782:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \int S_y(f)df = \int S_y(f)|H(f)|^2 df \\
&= \int e^{-2\pi^2 f^2} e^{-2\pi^2 f^2} df \\
&= \int e^{-4\pi^2 f^2} df \\
&= \int e^{-\frac{f^2}{2(1/8\pi^2)}} df
\end{aligned}$$

Nell'ultima equazione mostriamo che la funzione da integrare é una gaussiana (non normalizzata) di varianza $\sigma^2 = 1/8\pi^2$.

dalla relazione

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int e^{-f^2/2\sigma^2} = 1$$

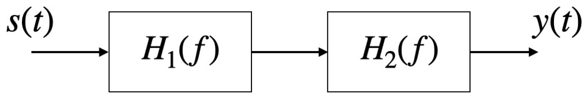
otteniamo

$$\sigma_y^2 = \sqrt{2\pi(1/8\pi^2)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Fine Soluzione.

Tempo contniuo Gennaio 2023.

1. **TD1a**



Sia dato il segnale $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$ in cui $\text{tri}(\alpha)$ è la funzione uguale a $1 - |\alpha|$ per $|\alpha| < 1$ e nulla altrove. Si consideri il segnale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - 3kT)$$

che viene elaborato dal sistema in Figura, con funzioni di trasferimento

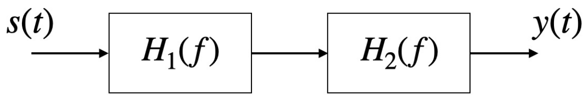
$$H_1(f) = 1 - p_B(f)$$

$$H_2(f) = \text{tri}\left(f/B\right)$$

in cui $B = \frac{1}{T}$, e $p_\beta(\alpha)$ è la funzione pari a 1 per $|\alpha| < \beta/2$ e nulla altrove. Il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema vale

(a) $y(t) = \frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{2\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$ ✓
(b) $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$
(c) $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{4\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$
(d) $y(t) = \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$
(e) nessuna delle altre risposte

2. **TD1b**



Sia dato il segnale $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$ in cui $\text{tri}(\alpha)$ è la funzione uguale a $1 - |\alpha|$ per $|\alpha| < 1$ e nulla altrove. Si consideri il segnale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - 3kT)$$

che viene elaborato dal sistema in Figura, con funzioni di trasferimento

$$H_1(f) = 1 - p_B(f)$$

$$H_2(f) = \text{tri}\left(f/B\right)$$

in cui $B = \frac{1}{2T}$, e $p_\beta(\alpha)$ è la funzione pari a 1 per $|\alpha| < \beta/2$ e nulla altrove. Il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema vale

(a) $y(t) = \frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{2\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$
(b) $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\pi^2} \cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$
(c) $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{4\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$
(d) $y(t) = \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$ ✓
(e) nessuna delle altre risposte

Soluzione

$$X(f) = T\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

Il segnale periodico ha periodo $3T$ e quindi ha spettro

$$S(f) = \frac{1}{3T}\sum_k X\left(\frac{k}{3T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{3T}\right)$$

$$X\left(\frac{k}{3T}\right) = T\frac{\sin^2(\pi\frac{k}{3T}T)}{\left(\pi\frac{k}{3T}T\right)^2} = T\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{3})}{\left(\frac{k\pi}{3}\right)^2}$$

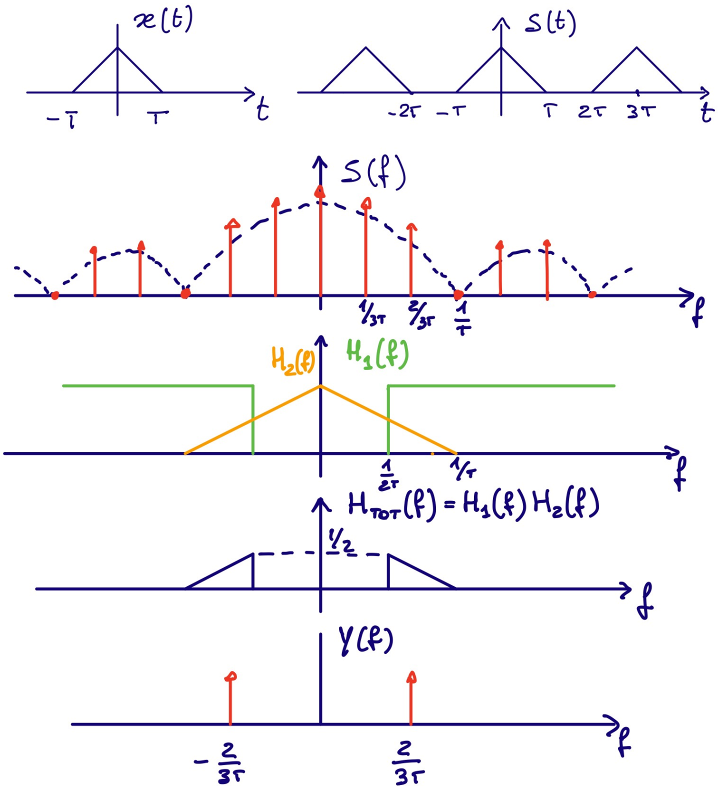
La funzione di trasferimento complessiva del sistema è data dal prodotto delle singole funzioni di trasferimento dei filtri connessi in serie, e quindi come si vede dalla figura, il sistema lascia passare due sole righe, per $k = \pm 2$ in corrispondenza di $f_k = \pm\frac{2}{3T}$, dando origine a un segnale di tipo coseno.

La funzione di trasferimento complessiva in $f = 2/3T$ vale $1/3$. Si noti che $X(f)$ è una funzione pari per cui $X\left(\frac{2}{3T}\right) = X\left(-\frac{2}{3T}\right)$

$$Y(f) = \frac{1}{9T}T\frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}\left[\delta\left(f - \frac{2}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{3T}\right)\right] = \frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{4\pi^2}\left[\delta\left(f - \frac{2}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{3T}\right)\right]$$

da cui

$$y(t) = 2\frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{4\pi^2}\cos\left(2\pi\frac{2}{3T}t\right) = \frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{2\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$$



NOTA: versione 2: $B = \frac{1}{2T}$ per cui passa solo la componente per $k = 1$

$$Y(f) = \frac{1}{9T}T\frac{\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right]$$

$$y(t) = \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$$

3. **TD2a**

Sia dato il segnale $x(t)$ ad energia finita di banda B_x e energia pari a E_x e si calcoli la distanza euclidea $d^2(x_1, x_2)$ tra i segnali $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ in cui $f_0 > 2B_x$. Essa vale:

(a) $d^2(x_1, x_2) = \frac{3}{2}E_x$ ✓
(b) $d^2(x_1, x_2) = 2E_x$
(c) $d^2(x_1, x_2) = E_x/2$
(d) $d^2(x_1, x_2) = +\infty$
(e) nessuna delle altre risposte

4. **TD2b**

Sia dato il segnale $x(t)$ ad energia finita di banda B_x e energia pari a E_x e si calcoli la distanza euclidea $d^2(x_1, x_2)$ tra i segnali $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t)$ in cui $f_0 > 2B_x$. Essa vale:

(a) $d^2(x_1, x_2) = \frac{3}{2}E_x$ ✓
(b) $d^2(x_1, x_2) = 2E_x$
(c) $d^2(x_1, x_2) = E_x/2$
(d) $d^2(x_1, x_2) = +\infty$
(e) nessuna delle altre risposte

SOLUZIONE

La distanza euclidea viene definita come

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

ed equivale a calcolare l'energia del segnale differenza, da cui deriviamo

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x(t)\cos(2\pi f_0 t)|^2 dt$$

Per l'uguaglianza di Parseval possiamo lavorare nel dominio della frequenza

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f) - \frac{1}{2}X(f - f_0) - \frac{1}{2}X(f + f_0) \right|^2 dt$$

Dato che $f_0 > 2B_x$ i termini dentro la parentesi hanno supporto disgiunto e quindi i prodotti misti sono nulli, per cui

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 + \frac{1}{4}|X(f - f_0)|^2 + \frac{1}{4}|X(f + f_0)|^2 dt$$

da cui

$$d^2(x_1, x_2) = E_x + \frac{1}{4}E_x + \frac{1}{4}E_x = \frac{3}{2}E_x$$

VERSIONE 2: Soluzione analoga, con:

$$d^2(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(f) - \frac{1}{2j}X(f - f_0) + \frac{1}{2j}X(f + f_0) \right|^2 dt$$

5. **TD3a**

Si consideri un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = e^{-3t}u(t)$ in cui $u(t) = 1$ per $t > 0$ e 0 altrove. Si calcoli la banda $B_{90\%}$ del filtro, ovvero la banda entro la quale é contenuto il 90% dell'energia complessiva.

Essa vale:

(a) $B_{90\%} = \frac{3}{2\pi}\tan\left(\frac{0.9\pi}{2}\right)$ ✓
(b) $B_{90\%} = \frac{3}{2\pi}\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
(c) $B_{90\%} = \frac{3}{2\pi}\frac{0.9\pi}{2}$
(d) $B_{90\%} = \frac{3}{2\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$
(e) nessuna delle altre risposte

6. **TD3a**

Si consideri un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = e^{-5t}u(t)$ in cui $u(t) = 1$ per $t > 0$ e 0 altrove. Si calcoli la banda $B_{90\%}$ del filtro, ovvero la banda entro la quale é contenuto il 90% dell'energia complessiva.

Essa vale:

(a) $B_{90\%} = \frac{5}{2\pi}\tan\left(\frac{0.9\pi}{2}\right)$ ✓
(b) $B_{90\%} = \frac{5}{2\pi}\tan\left(\frac{5\pi}{2}\right)$
(c) $B_{90\%} = \frac{5}{2\pi}\frac{0.9\pi}{2}$
(d) $B_{90\%} = \frac{5}{2\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$
(e) nessuna delle altre risposte

SOLUZIONE

Calcoliamo l'energia complessiva

$$E(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = -\frac{1}{2a}\left(e^{-2at}\right)_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}.$$

con $a = 3$ nella versione 1 e $a = 5$ nella versione 2.

La funzione di trasferimento vale (dalle tavole)

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

e quindi

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

La banda $B_{90\%}$ rappresenta il max valore di frequenza tale per cui

$$2\int_0^{B_{90\%}} |H(f)|^2 df = \frac{0.9}{2a}$$

Il primo termine si risolve come:

$$2\int_0^{B_{90\%}} |H(f)|^2 df = 2\int_0^{B_{90\%}} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} df =$$

$$2\int_0^{B_{90\%}} \frac{1/a^2}{1 + \frac{4\pi^2 f^2}{a^2}} df = \frac{2}{a^2}\frac{a}{2\pi} arctg\left(\frac{2\pi f}{a}\right)_0^{B_{90\%}} = \frac{1}{a\pi}\frac{a}{2\pi}\arctan\left(\frac{2\pi B_{90\%}}{a}\right)$$

Impostando l'uguaglianza

$$\frac{1}{a\pi}\arctan\left(\frac{2\pi B_{90\%}}{a}\right) = \frac{0.9}{2a}$$

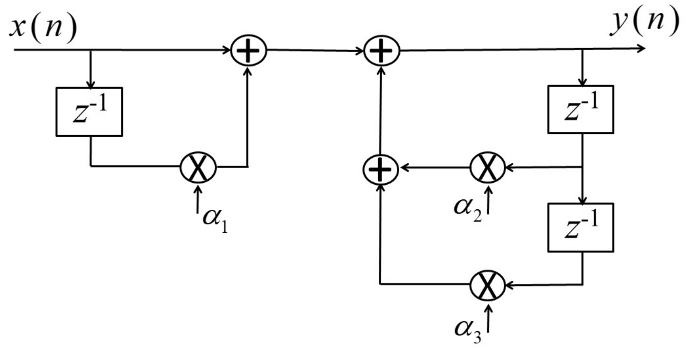
si ottiene

$$B_{90\%} = \frac{a}{2\pi}\tan\left(\frac{0.9\pi}{2}\right)$$

Tempo discreto Gennaio 2023.

1. **Gennaio 2023 TD1a**

   Si consideri il sistema LTI a tempo discreto mostrato in figura:



con $\alpha_1 = \frac{5}{3}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ e $\alpha_3 = \frac{2}{9}$. La risposta all'impulso del sistema è pari a:

(a) $h(n) = \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right] u(n)$ ✓
(b) $h(n) = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n)$
(c) $h(n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{2}{3}\right)^n u(-n-1)$
(d) $h(n) = 2\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right] u(-n-1)$
(e) $h(n) = 2\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 y(n-1) + \alpha_3 y(n-2)$$

Sostituendo i valori di α_1, α_2 e α_3 e calcolando la trasformata zeta, si ottiene:

$$Y(z) = X(z) + \frac{5}{3}X(z)z^{-1} - \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} + \frac{2}{9}Y(z)z^{-2}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + \frac{5}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)} \qquad |z| > \frac{2}{3}$$

(sistema causale)

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}\bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 + \frac{5}{3}\cdot 3}{1 + \frac{2}{3}\cdot 3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_2 = H(z)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{1 + \frac{5}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\bigg|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

Quindi:

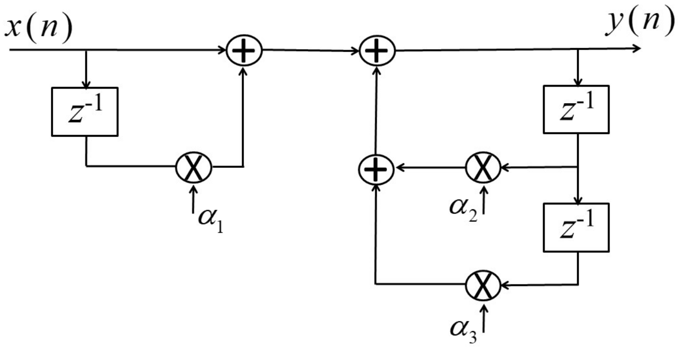
$$H(z) = 2\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

2. **Gennaio 2023 TD1b**

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto mostrato in figura:



con $\alpha_1 = -\frac{2}{3}$, $\alpha_2 = \frac{5}{6}$ e $\alpha_3 = -\frac{1}{6}$. La risposta all'impulso del sistema è pari a:

(a) $h(n) = \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$ ✓
(b) $h(n) = \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right] u(n)$
(c) $h(n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$
(d) $h(n) = 2\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(-n-1)$
(e) $h(n) = 2\left[-\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(n)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 x(n-1) + \alpha_2 y(n-1) + \alpha_3 y(n-2)$$

Sostituendo i valori di α_1, α_2 e α_3 e calcolando la trasformata zeta, si ottiene:

$$Y(z) = X(z) - \frac{2}{3}X(z)z^{-1} + \frac{5}{6}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{6}Y(z)z^{-2}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

(sistema causale)

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{2}{3}\cdot 3}{1 - \frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$R_2 = H(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}\cdot 2}{1 - \frac{1}{3}\cdot 2} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = -1$$

Quindi:

$$H(z) = 2\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

3. **Gennaio 2023 TD2a**

Un filtro numerico è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{6}y(n-1).$$

Quando all'ingresso del filtro è posto il segnale

$$x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$$

il segnale in uscita vale:

(a) $y(n) = -(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$ ✓
(b) $y(n) = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$
(c) $y(n) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^n u(n)$
(d) $y(n) = (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
(e) $y(n) = n\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione
Calcolando la trasformata zeta della relazione ingresso-uscita, si ottiene:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{6}Y(z)z^{-1}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right] = X(z)\left[1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{6}$$

(sistema causale)
La trasformata zeta dell'ingresso $x(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{6}$$

La trasformata zeta de segnale in uscita $y(n)$ vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > 1$$

<u>Calcolo dell'antitrasformata zeta (metodo 1)</u>

$Y(z)$ può scrivere come:

$$Y(z) = -\frac{2\frac{1}{6}z^{-1} - 1}{\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > 1$$

Si può quindi usare il seguente risultato delle tavole:

$$Z\left[-(n-1)\alpha^n u(n)\right] = \frac{2\alpha z^{-1} - 1}{\left(1 - \alpha z^{-1}\right)^2}$$

con $\alpha = \frac{1}{6}$:

$$y(n) = -(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$$

<u>Calcolo dell'antitrasformata zeta (metodo 2)</u>

$Y(z)$ si può scrivere come la somma di due termini:

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right)^2} - \frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > 1$$

Antitrasformando i due termini di Y(z) (usando le tavole delle traformate zeta):

$$y(n) = (n+1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) - \frac{1}{3}n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} u(n)$$

Sostituendo $\frac{1}{3}$ con $2 \cdot \frac{1}{6}$, si ottiene:

$$y(n) = (n+1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} u(n) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) - 2n\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) =$$

$$= (n+1-2n)\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)\right] = -(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$$

4. **Gennaio 2023 TD2b**

Un filtro numerico è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) - \frac{2}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1).$$

Quando all'ingresso del filtro è posto il segnale

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

il segnale in uscita vale:

(a) $y(n) = -(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ ✓
(b) $y(n) = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
(c) $y(n) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
(d) $y(n) = (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n u(n)$
(e) $y(n) = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione
Calcolando la trasformata zeta della relazione ingresso-uscita, si ottiene:

$$Y(z) = X(z) - \frac{2}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right] = X(z)\left[1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

(sistema causale)
La trasformata zeta dell'ingresso $x(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

La trasformata zeta de segnale in uscita $y(n)$ vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > 1$$

Calcolo dell'antitrasformata zeta (metodo 1)

$Y(z)$ può scrivere come:

$$Y(z) = -\frac{2\frac{1}{3}z^{-1} - 1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > 1$$

Si può quindi usare il seguente risultato delle tavole:

$$Z\left[-(n-1)\alpha^n u(n)\right] = \frac{2\alpha z^{-1} - 1}{\left(1 - \alpha z^{-1}\right)^2}$$

con $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$y(n) = -(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Calcolo dell'antitrasformata zeta (metodo 2)

$Y(z)$ si può scrivere come la somma di due termini:

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} - \frac{2}{3}\frac{z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} \qquad |z| > 1$$

Antitrasformando i due termini di Y(z) (usando le tavole delle traformate zeta):

$$y(n) = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n)$$

Sostituendo $\frac{2}{3}$ con $2 \cdot \frac{1}{3}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} y(n) &= (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n) = \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) = \\ &= (n+1-2n)\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right] = -(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \end{aligned}$$