Processi casuali Settembre 2020. Tre esercizi

1. **1251**

   E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-1,1]$ e autocorrelazione $R_X(t_1,t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t_1) = X(t_1) + X(t_1 + 3T)$.

   (a) $\frac{2}{3}$ ✓
   (b) $\frac{T}{2}$
   (c) $\frac{1}{10}$
   (d) 2
   (e) Non ci sono dati sufficienti per calcolarla
   (f) E' una funzione del tempo

   Soluzione:
   Si noti che il processo $X(t)$ non é necessariamente WSS. Sappiamo pero che é strettamente stazionario del prim'ordine perché $f_X(x,t)$ non dipende dal tempo. La media vale

   $$\mu_x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} p dp = 0$$

   Il valore quadratico medio vale:

   $$s_x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} p^2 dp = \frac{1}{3}$$

   Calcoliamo

   $$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t_1)\} - E^2\{Y(t_1)\}$$
   $$E\{Y(t_1)\} = E\{X(t_1) + X(t_1 + 3T)\} = E\{X(t_1)\} + E\{X(t_1 + 3T)\} = 0 + 0 = 0$$
   $$E\{Y^2(t_1)\} = E\{(X(t_1)+X(t_1+3T))^2\} = E\{X^2(t_1)\}+E\{X^2(t_1+3T)\}+2E\{X(t_1)X(t_1+3T)\} = 2s_x^2+2R_X(t_1,t_1+3T)$$

   Sappiamo che l'ultimo termine é nullo ($|t_1 - t_2| = 3T > T$), da cui la soluzione A.

   Fine Soluzione.

2. **1252**

   E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-2,2]$ e autocorrelazione $R_X(t_1,t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t_1) = X(t_1) + 2X(t_1 + 2T)$.

   (a) $\frac{20}{3}$ ✓
   (b) $\frac{2}{3}$
   (c) $\frac{2T}{5}$
   (d) 4
   (e) Non ci sono dati sufficienti per calcolarla
   (f) E' una funzione del tempo

3. **1253**

   E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-2,2]$ e autocorrelazione $R_X(t_1,t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t_1) = X(t_1) + 3X(t_1 + 2T)$.

   (a) $\frac{40}{3}$ ✓
   (b) $\frac{5}{3}$
   (c) $\frac{2T}{3}$
   (d) 2
   (e) Non ci sono dati sufficienti per calcolarla
   (f) E' una funzione del tempo

---

4. **1210**

   Si calcoli la varianza del processo casuale

   $$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t - nT)] p_T(t - nT),$$

   dove A_n, $-\infty < n < \infty$, sono variabili casuali statisticamente indipendenti, tutte con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[0,1]$, $p_T(t)$ è una porta rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata T, e le costanti reali e positive f_0 e T sono legate dalla relazione $f_0 \cdot T = 8$.

(a) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{12}\sin^2(2\pi f_0 t)$ ✓
(b) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$
(c) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{12}$
(d) nessuna delle altre risposte
(e) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$

Soluzione:

Media:

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT)\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{A_n\}\sin[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT) \\ &= E\{A_n\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT) \\ &= E\{A_n\}\sin[2\pi f_0(t)] \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio deriva dal fatto che T contiene un multiplo intero di periodi della sinusoide.

Valore quadratico medio:

$$\begin{aligned} E\{X^2(t)\} &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n A_m \sin[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT)\sin[2\pi f_0(t-mT)]p_T(t-mT)\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{A_n A_m\}\sin[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT)\sin[2\pi f_0(t-mT)]p_T(t-mT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{A_n^2\}\sin^2[2\pi f_0(t-nT)]p_T^2(t-nT) \\ &= E\{A_n^2\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin^2[2\pi f_0(t-nT)]p_T^2(t-nT) \\ &= E\{A_n^2\}\sin^2[2\pi f_0(t)] \end{aligned}$$

Varianza:

$$\begin{aligned} E\{X^2(t)\} - E^2\{X(t)\} &= E\{A_n^2\}\sin^2[2\pi f_0(t)] - E^2\{A_n\}\sin^2[2\pi f_0(t)] \\ &= \sigma_A^2\sin^2[2\pi f_0(t)] = \frac{1}{12}\sin^2[2\pi f_0(t)] \end{aligned}$$

Fine Soluzione.

5. **1211**

Si calcoli la varianza del processo casuale

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT),$$

dove A_n, $-\infty < n < \infty$, sono variabili casuali statisticamente indipendenti, tutte con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[0,2]$, $p_T(t)$ è una porta rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata T, e le costanti reali e positive f_0 e T sono legate dalla relazione $f_0 \cdot T = 16$.

(a) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$ ✓
(b) $\sigma_x^2(t) = \frac{4}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$
(c) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$
(d) nessuna delle altre risposte
(e) $\sigma_x^2(t) = \frac{4}{3}$

6. **1212**

Si calcoli la varianza del processo casuale

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos[2\pi f_0(t-nT)]p_T(t-nT),$$

dove A_n, $-\infty < n < \infty$, sono variabili casuali statisticamente indipendenti, tutte con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[2, 4]$, $p_T(t)$ è una porta rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata T, e le costanti reali e positive f_0 e T sono legate dalla relazione $f_0 \cdot T = 16$.

(a) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$ ✓
(b) $\sigma_x^2(t) = \frac{28}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$
(c) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$
(d) nessuna delle altre risposte
(e) $\sigma_x^2(t) = \frac{28}{3}$

7. **1213**

Si calcoli la varianza del processo casuale

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos[2\pi f_0(t - nT)]p_T(t - nT),$$

dove A_n, $-\infty < n < \infty$, sono variabili casuali statisticamente indipendenti, tutte con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[1, 3]$, $p_T(t)$ è una porta rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata T, e le costanti reali e positive f_0 e T sono legate dalla relazione $f_0 \cdot T = 8$.

(a) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$ ✓
(b) $\sigma_x^2(t) = \frac{13}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$
(c) $\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$
(d) nessuna delle altre risposte
(e) $\sigma_x^2(t) = \frac{13}{3}$

8. **1320**

Si consideri il processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità del primo ordine

$$f_X(x, t) = a(t)u(x)\exp[-a(t) \cdot x]$$

con $a(t)$ funzione monotona crescente che assume valori nell'intervallo $[1, 2]$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) Il processo ha valore medio e varianza monotoni decrescenti con t ✓
(b) Il processo ha valore medio e varianza monotoni crescenti con t
(c) Il processo ha valore medio che non dipende dal tempo e varianza monotona decrescente con t
(d) Il processo ha valore medio e varianza indipendenti dal tempo
(e) nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione:

media

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= \int xa(t)u(x)\exp[-a(t) \cdot x]dx \\ &= \int_0^{\infty} xa(t)\exp[-a(t) \cdot x]dx \\ &= \left[-e^{-a(t)x}(a(t)x + 1))\frac{1}{a(t)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a(t)} \end{aligned}$$

Varianza

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= \int x^2 a(t)u(x)\exp[-a(t) \cdot x]dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 a(t)\exp[-a(t) \cdot x]dx \\ &= \left[-e^{-a(t)x}(a(t)^2x^2 + 2a(t)x + 2))\frac{1}{a^2(t)}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{a^2(t)} \end{aligned}$$

Fine Soluzione.

9. **1321**

Si consideri il processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità del primo ordine

$$f_X(x,t) = a(t)u(x)\exp[-a(t)\cdot x]$$

con $a(t)$ funzione monotona decrescente che assume valori nell'intervallo $[1,2]$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) Il processo ha valore medio e varianza monotoni crescenti con t ✓
(b) Il processo ha valore medio e varianza monotoni decrescenti con t
(c) Il processo ha valore medio che non dipende dal tempo e varianza monotona crescente con t
(d) Il processo ha valore medio e varianza indipendenti dal tempo
(e) nessuna delle altre risposte è corretta

10. **1322**

Si consideri il processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità del primo ordine uniforme

$$f_X(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{a(t)} & 0 \le x < a(t) \\ 0 & x < 0, \quad x \ge a(t) \end{cases}$$

con $a(t)$ funzione monotona crescente che assume valori nell'intervallo $[1,2]$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) Il processo ha valore medio e varianza monotoni crescenti con t ✓
(b) Il processo ha valore medio e varianza monotoni decrescenti con t
(c) Il processo ha valore medio che non dipende dal tempo e varianza monotona crescente con t
(d) Il processo ha valore medio e varianza indipendenti dal tempo
(e) nessuna delle altre risposte è corretta

11. **1323**

Si consideri il processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità del primo ordine uniforme

$$f_X(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{a(t)} & 0 \le x < a(t) \\ 0 & x < 0, \quad x \ge a(t) \end{cases}$$

con $a(t)$ funzione monotona decrescente che assume valori nell'intervallo $[1,2]$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) Il processo ha valore medio e varianza monotoni decrescenti con t ✓
(b) Il processo ha valore medio e varianza monotoni crescenti con t
(c) Il processo ha valore medio che non dipende dal tempo e varianza monotona decrescente con t
(d) Il processo ha valore medio e varianza indipendenti dal tempo
(e) nessuna delle altre risposte è corretta