Cognome e Nome.. Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 9 SETTEMBRE 2010 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Data la funzione
$$f(z) = \frac{iz - \overline{z}}{z^8 - 1}\,,$$
trovarne il luogo degli zeri nel suo dominio naturale $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ e disegnarlo sul piano complesso.

Esercizio 2 (3 punti)
Dire se la seguente funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da
$$f(x + iy) := x^2 + i(x^3 - 3xy^2), \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$
è analitica in $\mathbb{C}$, giustificando la risposta data.

Esercizio 3 (5 punti)
Si determini e si rappresenti graficamente l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^2 (\mathrm{Im}(z))^{n+3}\,.$$

Se ne calcoli successivamente la somma.

Esercizio 4 (4 punti)
Si calcoli

$$I := \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z-i\frac{3}{2})} dz\,,$$

dove C è la frontiera percorsa in senso antiorario dell'insieme $T = \{z = x + iy \ :\ x, y \in \mathbb{R},\ |x| \leq y \leq 2\} \subseteq \mathbb{C}$.

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) = \frac{z - \beta \sin(iz)}{z^6}\,.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (\cosh x - 2)H(-x), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f .

Esercizio 7 (4 punti)
Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^6 - s^2 + 1}{s(s^2 + 1)} \, .$$

Esercizio 8 (5 punti)
a) Scrivere la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto.

b) Usando tale definizione, calcolare $\mathcal{F}(\delta_{x_0})$, la trasformata di Fourier della delta di Dirac centrata in $x_0 \in \mathbb{R}$.