12 Febbraio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Il tempo totale assegnato per la soluzione è di 2 ore. Al termine dei primi 30 minuti verrà ritirato il foglio con i quiz a risposta multipla.**
Consegnare il testo completo di tutti i fogli, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola (in STAMPATELLO MAIUSCOLO). Nella tabellina qui sotto riportare al più una risposta per ogni quiz di teoria usando LETTERE MAIUSCOLE. Spiegazioni o commenti (opzionali) sulla risposta selezionata possono essere aggiunti nel campo COMMENTI che segue ogni quiz di teoria.

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	
	QUIZ DI TEORIA

Quiz	1	2	3
Risposta (Compito A)	A	A	B
Risposta (Compito B)	A	B	D

12 Febbraio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Consegnare il testo completo di tutti i fogli e con lo svolgimento completo degli esercizi, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola.**

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Un processo $N(t)$ WSS con distribuzione uniforme e densità spettrale di potenza $S_N(f) = 2\Pi_2(f) + 9\delta(f)$ è posto in ingresso ad un blocco derivatore, generando il processo:

$$Y(t) = \frac{d}{dt}N(t).$$

1. Calcolare media e varianza di $N(t)$
2. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $N(t)$
3. Il processo $Y(t)$ è Gaussiano? è stazionario?
4. Calcolare media e varianza di $Y(t)$
5. Calcolare la densità spettrale di potenza di $Y(t)$
6. Calcolare la funzione di mutua correlazione tra $Y(t)$ e $N(t)$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. Il valore quadratico medio coincide con l'integrale della densita' spettrale di potenza:

$$E\{N^2\} = m_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [2\Pi_2(f) + 9\delta(f)]df = 2 \times 2 + 9 = 13$$

L'ampiezza della delta nell'origine coincide con la media al quadrato

$$\mu_N^2 = 9 \rightarrow \mu_N = 3$$

La varianza è dunque

$$\sigma_N^2 = m_N^2 - \mu_N^2 = 4$$

2. La funzione di autocorrelazione è l'antitrasformata dello spettro di potenza

$$R_N(\tau) = F^{-1}\{2\Pi_2(f) + 9\delta(f)\} = 2 \times 2\text{sinc}(2\tau) + 9$$

3. Il derivatore è un sistema LTI, quindi $Y(t)$ e' stazionario WSS perchè l'ingresso lo è. $Y(t)$ non è Gaussiano perchè l'ingresso non lo è.

4. La risposta all'impulso del derivatore è la derivata della delta, la sua funzione di trasferimento è $H(f) = j2\pi f$. Possiamo dunque calcolare media e varianza con le solite formule:

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= H(0)\mu_N = 0 \times 3 = 0 \\
S_Y(f) &= |H(f)|^2[2\Pi_2(f) + 9\delta(f)] = (2\pi f)^2[2\Pi_2(f) + 9\delta(f)] = (2\pi f)^2 2\Pi_2(f) \\
&= 8\pi^2\Pi_2(f)f^2 \\
m_Y^2 &= \int S_Y(f)df = 8\pi^2 \int_{-1}^{1} f^2 df = 8\pi^2\frac{2}{3} = \pi^2\frac{16}{3} \\
\sigma_Y^2 &= m_Y^2 - \mu_Y^2 = \pi^2\frac{16}{3}
\end{aligned}$$

5. vedi 4

6. La funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$ sarebbe

$$R_Y(\tau) = F^{-1}\{S_Y(f)\} = F^{-1}\{8\pi^2\Pi_2(f)f^2\}$$

ma non è richiesta.

La mutua correlazione tra Y e N invece si ottiene come segue

$$\begin{aligned}
R_{N,Y}(\tau) &= R_N(\tau) * h(\tau) = \frac{d}{d\tau}F^{-1}\{S_N(f)\} \\
&= \frac{d}{d\tau}[4\text{sinc}(2\tau) + 9] \\
&= \frac{d}{d\tau}\left[4\frac{\sin(2\pi\tau)}{(2\pi\tau)} + 9\right] \\
&= 4\frac{(2\pi)^2\tau\cos(2\pi\tau) - 2\pi\sin(2\pi\tau)}{(2\pi\tau)^2} \\
&= 4\frac{2\pi\tau\cos(2\pi\tau) - \sin(2\pi\tau)}{2\pi\tau^2} \\
&= 4\frac{2\pi\tau}{2\pi\tau^2}\left[\cos(2\pi\tau) - \frac{\sin(2\pi\tau)}{2\pi\tau}\right] \\
&= \frac{4}{\tau}\left[\cos(2\pi\tau) - \text{sinc}(2\tau)\right]
\end{aligned}$$

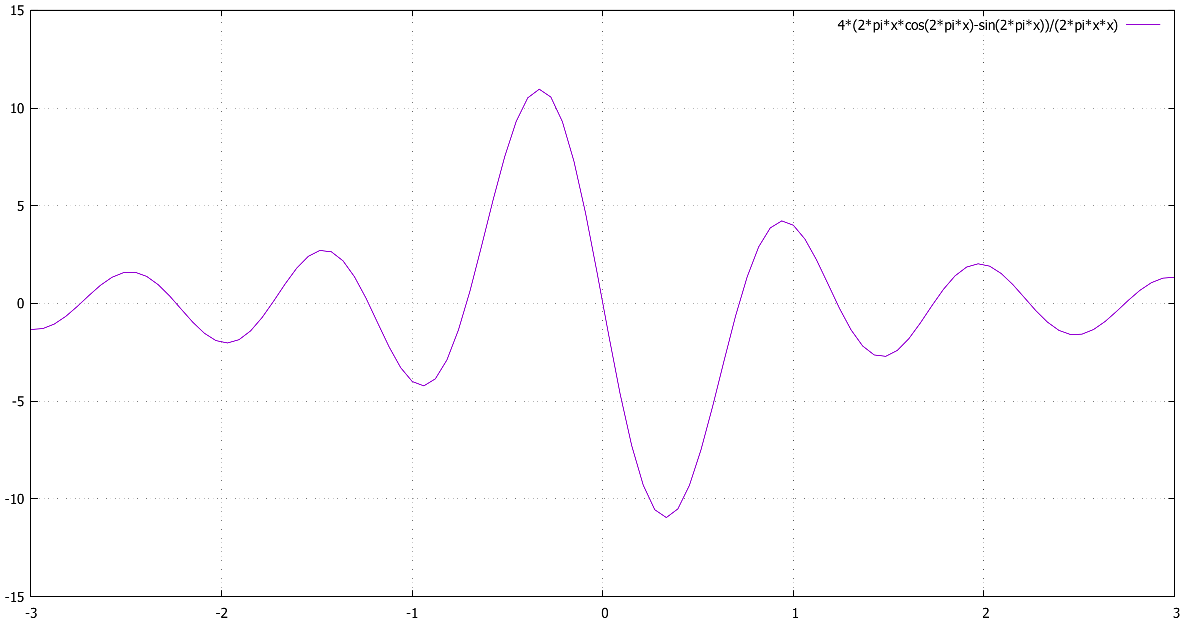


Figura 1: $R_{N,Y}(\tau)$

12 Febbraio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

Si considerino tre filtri numerici con le seguenti risposte all'impulso:

$h_1(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n), \;\; h_2(n) = \left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n), \;\; h_3(n) = \frac{1}{4}$ per $n = 0, 1$ e zero altrove.

I tre filtri sono concatenati come indicato in Fig. 2.

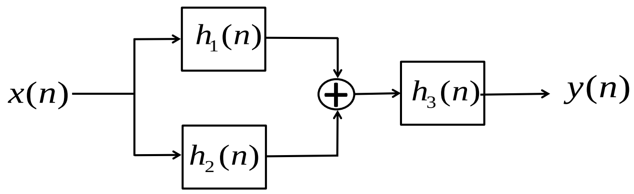


Figura 2: Sistema numerico per l'esercizio 2.

1. Ricavare la funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$ del sistema di Fig. 2.
2. Calcolare la corrispondente risposta all'impulso $h_{eq}(n)$.
3. Calcolare la relazione ingresso–uscita del sistema di Fig. 2 (espressa tramite l'equazione alle differenze nel dominio del tempo discreto) e disegnare il corrispondente diagramma a blocchi.
4. Discutere la tipologia (FIR o IIR), la causalità e la stabilità del sistema di Fig. 2.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1. La funzione di trasferimento del sistema di Fig. 2 è pari a:

$$H_{eq}(z) = (H_1(z) + H_2(z)) \cdot H_3(z)$$

con:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \;\; (|z| > 2/3), \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}} \;\; (|z| > 2/3), \quad H_3(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^{-1}$$

Sostituendo e svolgendo i conti si ottiene:

$$H_{eq}(z) = \frac{1}{2} \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}.$$

con regione di convergenza $|z| > \frac{2}{3}$.

2. La risposta all'impulso è l'antitrasformata della funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$. Usando il metodo dei residui per scomporre $H_{eq}(z)$, si ottiene:

$$H_{eq}(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}} =$$

con:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{8}, \quad R_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{8}$$

L'antitrasformata di $H_{eq}(z)$ vale quindi:

$$h_{eq}(n) = \frac{5}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n) - \frac{1}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

3. La relazione ingresso–uscita nel dominio della trasformata zeta si scrive come:

$$Y(z) = X(z) \cdot H_{eq}(z)$$

Sostituendo l'espressione di $H_{eq}(z)$ ricavata al punto 1:

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{1}{2} \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}.$$

Quindi:

$$\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right) Y(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right) X(z).$$

$$\left(1 - \frac{4}{9}z^{-2}\right) Y(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right) X(z)$$

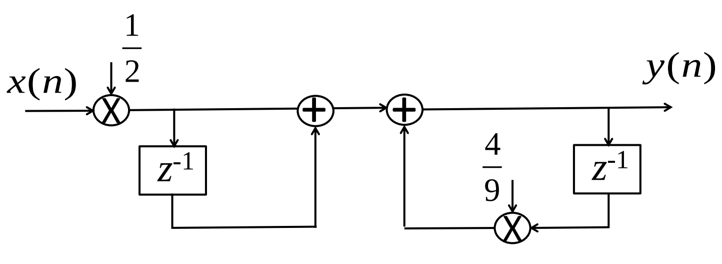
$$Y(z) - \frac{4}{9}z^{-2}Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

Antitrasformando:

$$y(n) - \frac{4}{9}y(n-2) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{4}{9}y(n-2)$$

Diagramma a blocchi:



4. Il sistema è di tipo IIR, poiché contiene una retroazione. È inoltre causale e stabile. La causalità si può a esempio ricavare dal fatto che la risposta all'impulso ricavata al punto 2 è nulla per valori di n minori di zero. La stabilità è garantita dal fatto che il sistema è causale e i poli di $H_{eq}(z)$ ($\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$) cadono tutti all'interno della circonferenza di raggio unitario.

12 Febbraio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

Si consideri il segnale $x(t) = \mathrm{e}^{-t/T}u(t)$, con T=3 ms. Si vuole campionare $x(t)$ usando un campionatore ideale che moltiplica l'ingresso per $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$. Poiché la banda di $x(t)$ è infinita, si filtra inizialmente $x(t)$ con un filtro anti-aliasing passabasso ideale di banda B e guadagno unitario, poi si campiona il segnale $x_a(t)$ all'uscita del filtro anti-aliasing.

1. Si calcoli la banda B (espressa in hertz) tale che $x_a(t)$ abbia un'energia pari al 95% dell'energia di $x(t)$.
2. Qual è la minima frequenza di campionamento f_N (in hertz) affinchè sia possibile ricostruire perfettamente $x_a(t)$ dai suoi campioni?
3. Assumendo di usare una frequenza di campionamento pari a $f_s = 2f_N$ (con f_N ricavata al punto 2), si diano le specifiche (in termini di banda e guadagno) del filtro ricostruttore da usare per ricostruire $x_a(t)$ dai suoi campioni.
4. Scrivere l'espressione dello spettro di potenza del segnale $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 2kT)$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1. Dalle tavole si ricava che la trasformata di Fourier di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f} = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

Il segnale all'uscita del filtro anti-aliasing ha trasformata:

$$X_a(f) = X(f) \cdot p_{2B}(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT} \cdot p_{2B}(f)$$

dove $p_{2B}(f)$ è una funzione rettangolare con supporto $[-B, B]$ e ampiezza unitaria.
L'energia di $x(t)$ è:

$$E(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t/T} dt = \frac{T}{2}.$$

L'energia di $x_a(t)$ si può trovare usando l'eguaglianza di Parseval:

$$E(x_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_a(f)|^2 df = \int_{-B}^{+B} \left| \frac{T}{1 + j2\pi fT} \right|^2 df$$

Siccome $X_a(f)$ è pari:

$$E(x_a) = 2 \int_0^{+B} \frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2} df$$

Con il cambio di variabile $u = 2\pi f T$ si ottiene:

$$E(x_a) = 2\int_0^{+2\pi BT} \frac{T^2}{1+u^2}\frac{1}{2\pi T}du = \frac{T}{\pi}\text{atan}(u)\Big|_0^{2\pi BT} = \frac{T}{\pi}\text{atan}(2\pi BT)$$

Imponendo la condizione sull'energia di $x_a(t)$ ($E(x_a) = \alpha E(x)$ con $\alpha = 0.95$), si ottiene:

$$\frac{T}{\pi}\text{atan}(2\pi BT) = \alpha\frac{T}{2}$$

ossia:

$$B = \frac{1}{2\pi T}\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) = 0.674\text{kHz} = 674\text{Hz}.$$

2. In base al teorema del campionamento, $f_N = 2B$=1.34 kHz.

3. La trasformata di Fourier del segnale campionato $x_c(t)$ è:

$$X_c(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(f - \frac{k}{T_s}\right).$$

con $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4B}$.
Il filtro ricostruttore ideale, nel caso di campionamento di $x_a(t)$ con un treno di delta con periodo $T_s = 1/f_s$, è un filtro passabasso ideale con banda B_F compresa tra B ed $f_s - B$. Siccome $f_s = 2f_N = 4B$, la condizione sulla banda del filtro è: $B < B_F < 3B$, con B=674 Hz. Affinché il segnale ricostruito sia esattamente uguale ad $x_a(t)$, il guadagno K_F del filtro deve essere pari a T_s, ossia $K_F = \frac{1}{4B}$, con B=674 Hz.

4. La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ è:

$$Y(f) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{2T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{2T}\right) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{T}{1+j2\pi\frac{k}{2T}T}\delta\left(f - \frac{k}{2T}\right).$$

Il su ospettro di potenza vale quindi:

$$G_Y(f) = \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\pi^2k^2}\delta\left(f - \frac{k}{2T}\right).$$