Teoria ed Elaborazione dei Segnali - Appello 21 settembre 2023

(1) **1a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il sistema lineare tempo invariante la cui risposta all'impulso vale:

$$h(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{2T}\right)}{\pi t} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3} \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(8\pi \frac{t}{T}\right)$$

Sia $x(t)$ il segnale all'ingresso del sistema e il segnale di uscita è denominato $y(t)$. Per quale dei seguenti segnali di ingresso $x(t)$, l'uscita del sistema è identicamente nulla ($y(t) = 0\ \forall t$)

a. Nessuna delle altre risposte è corretta
b. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-5\left(t-k\frac{T}{4}\right)} u\left(t - k\frac{T}{4}\right)$
c. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-5\left(t-k\frac{T}{2}\right)} u\left(t - k\frac{T}{2}\right)$
d. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-5(t-kT)} u(t - kT)$
e. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-5\left(t-k\frac{T}{3}\right)} u\left(t - k\frac{T}{3}\right)$

(2) **1b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il sistema lineare tempo invariante la cui risposta all'impulso vale:

$$h(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{2T}\right)}{\pi t} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{5} \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(8\pi \frac{t}{T}\right)$$

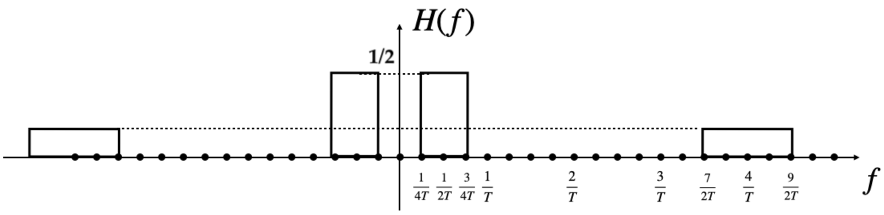
Sia $x(t)$ il segnale all'ingresso del sistema e il segnale di uscita è denominato $y(t)$. Per quale dei seguenti segnali di ingresso $x(t)$, l'uscita del sistema è identicamente nulla ($y(t) = 0\ \forall t$)

a. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-kT|}$
b. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\left|t-k\frac{T}{2}\right|}$
c. Nessuna delle altre risposte è corretta
d. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\left|t-k\frac{T}{3}\right|}$
e. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\left|t-k\frac{T}{4}\right|}$

Soluzione es 1a: La funzione di trasferimento del sistema vale:

$$H(f) = \frac{1}{2} p_{\frac{1}{2T}}\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{6} p_{\frac{1}{T}}\left(f - \frac{4}{T}\right) + \frac{1}{2} p_{\frac{1}{2T}}\left(f + \frac{1}{2T}\right) + \frac{1}{6} p_{\frac{1}{T}}\left(f + \frac{4}{T}\right)$$

come rappresentato in Figura



I segnali proposti sono del tipo $x(t) = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - kT^*)$ e sono segnali periodici di periodo T^* i cui spettri sono a righe del tipo

$$X(f) = \frac{1}{T^*} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R\left(\frac{k}{T^*}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T^*}\right)$$

e T^* vale nei vari casi $T, T/2, T/3, T/4$ Affinché l'uscita sia identicamente nulla è necessario che nessuna delle righe spettrali cada nella banda passante del filtro. L'unico caso in cui le righe spettrali cadono laddove la funzione di trasferimento è nulla è il caso in cui esse sono posizionate ai valori di frequenza $f_k = k\frac{3}{T} = 0, \pm\frac{3}{T}, \pm\frac{6}{T}, \ldots$.

(3) **2a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$y(t) = x(t) \cos(120\pi t) \sin(200\pi t)$$

In cui $x(t)$ è un segnale a energia finita di banda limitata $B = 30\,\text{Hz}$.

Il segnale viene filtrato da un filtro passabasso ideale di ampiezza unitaria e banda $B_f = 70\,\text{Hz}$. Il segnale $z(t)$ all'uscita di tale filtro vale:

a. $z(t) = \frac{1}{4}[x(t)\cos(80\pi t) + \sin(320\pi t)]$
b. $z(t) = 0 \ \ \forall t$
c. $z(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos(320\pi t)$
d. nessuna delle altre risposte
e. $z(t) = \frac{1}{2}x(t)\sin(80\pi t)$
f. $z(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos(80\pi t)$

(4) **2b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$y(t) = x(t)\cos(100\pi t)\sin(160\pi t)$$

In cui $x(t)$ è un segnale a energia finita di banda limitata $B = 20\,\text{Hz}$.

Il segnale viene filtrato da un filtro passabasso ideale di ampiezza unitaria e banda $B_f = 50$ Hz. Il segnale $z(t)$ all'uscita di tale filtro vale:

a. $z(t) = \frac{1}{4}x(t)\cos(60\pi t) + \sin(60\pi t)$
b. $z(t) = 0 \ \ \forall t$
c. $z(t) = \frac{1}{2}x(t)\sin(60\pi t)$
d. $z(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos(260\pi t)$
e. nessuna delle altre risposte
f. $z(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos(60\pi t)$

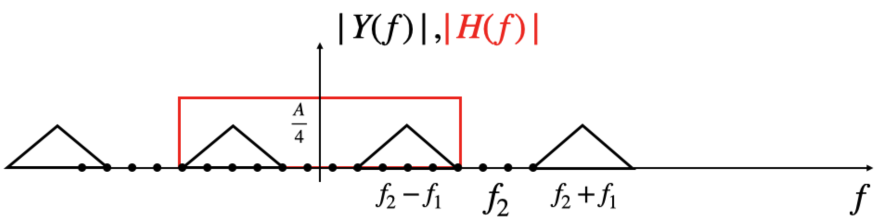
Soluzione es 2a: Entrambi gli esercizi si possono rappresentare con i valori generici f_1, f_2 con $f_1 \geq B$ e $f_2 \geq f_1 + B$ la soluzione puó essere ottenuta ricordando che

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta-\alpha)]$$

da cui

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t) = x(t)[\sin(2\pi(f_1+f_2)t) + \sin(2\pi(f_2-f_1)t)$$

Lo spettro del segnale risulta quindi



Il segnale viene filtrato da un filtro passabasso ideale di ampiezza unitaria e banda $B_f = f2 - f1 + B$. Il segnale $z(t)$ all'uscita di tale filtro vale quindi

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t)\sin(2\pi(f_2 - f1)t)$$

con $f_2 - f_1 = 40$ in un caso e $f_2 - f_1 = 30$ nell'altro.

(5) **3a** Risposta multipla | Una sola alternativa

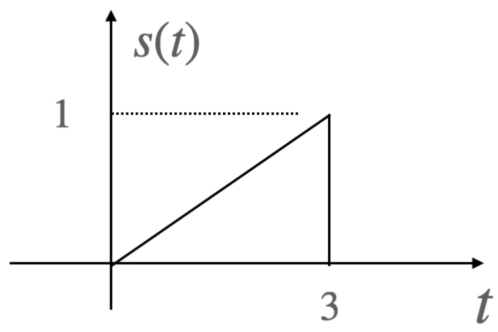
Si consideri il segnale $s(t)$ a tempo continuo rappresentato in figura

e si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t-4n)$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a. Il segnale $x(t)$ è a potenza media finita $P_x = \frac{1}{4}$
b. Il segnale $x(t)$ è a potenza media finita $P_x = \frac{3}{8}$
c. nessuna delle altre risposte
d. Il segnale $x(t)$ è a potenza media finita $P_x = \frac{3}{4}$
e. Il segnale $x(t)$ è a energia finita $E_x = \frac{3}{2}$
f. Il segnale $x(t)$ è a energia finita $E_x = 1$



Soluzione

Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo $T = 4$ e quindi a potenza media finita. Ricordando che per tali segnali

$$P_x = \frac{E_{x_T}}{T}$$

è necessario calcolare l'energia del segnale troncato sul periodo fondamentale E_{x_T} che corrisponde all'energia di $s(t)$.

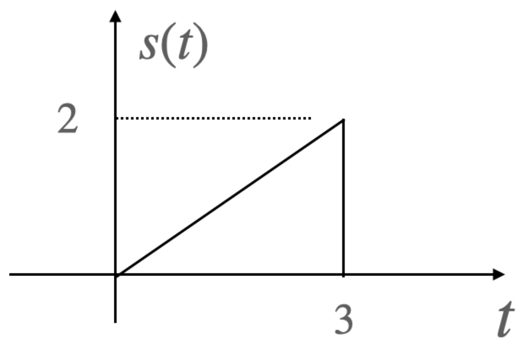
$$E_s = \int_0^4 |s(t)|^2 dt = \int_0^3 |\frac{1}{3}t|^2 dt = \frac{1}{9}\int_0^3 t^2 dt = \frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{27}{3} = 1$$

Da cui essendo $T = 4$ si ottiene

$$P_x = \frac{1}{4}$$

(6) **3b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale $s(t)$ a tempo continuo rappresentato in figura



e si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t - 6n)$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a. Il segnale $x(t)$ è a energia finita $E_x = 4$
b. Il segnale $x(t)$ è a energia finita $E_x = 3$
c. Il segnale $x(t)$ è a potenza media finita $P_x = \frac{2}{3}$
d. Il segnale $x(t)$ è a potenza media finita $P_x = \frac{1}{2}$
e. nessuna delle altre risposte
f. Il segnale $x(t)$ è a potenza media finita $P_x = \frac{1}{4}$

Soluzione

Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo $T = 6$ e quindi a potenza media finita. Ricordando che per tali segnali

$$P_x = \frac{E_{x_T}}{T}$$

è necessario calcolare l'energia del segnale troncato sul periodo fondamentale E_{x_T} che corrisponde all'energia di $s(t)$.

$$E_s = \int_0^6 |s(t)|^2 dt = \int_0^3 |\frac{2}{3}t|^2 dt = \frac{4}{9}\int_0^3 t^2 dt = \frac{4}{9}\frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{4}{9}\cdot\frac{27}{3} = 4$$

Da cui essendo $T = 6$ si ottiene

$$P_x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(7) **4a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato un sistema LTI a tempo discreto caratterizzato da questa relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + x[n] - 3x[n-1] + 2x[n-2]$$

La sua risposta all'impulso $h[n]$ vale:

a. $h[n] = u[n] - 2u[n-1]$.
b. $h[n] = u[n] - 2u[n-2]$.
c. $h[n] = 2u[n] - u[n-1]$.
d. Nessuna delle altre risposte è corretta.
e. $h[n] = u[n+1] + 2u[n-2]$.
f. $h[n] = u[n+1] - 2u[n-1]$.

Soluzione
La trasformata zeta della relazione ingresso uscita vale:

$$Y(z) = 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2} + X(z) - 3X(z)z^{-1} + 2X(z)z^{-2}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right]$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 2z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Essendo il sistema causale, la ROC della funzione di trasferimento è $|z| > 1$.
L'antistraformata zeta causale di $\frac{1}{1-z^{-1}}$ è pari a $u[n]$, quindi: Antitrasformando, si ottiene:

$$h[n] = u[n] - 2u[n-1]$$

(8) **4b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato un sistema LTI a tempo discreto caratterizzato da questa relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + x[n] - 4x[n-1] + 3x[n-2]$$

La sua risposta all'impulso $h[n]$ vale:

a. $h[n] = 3u[n] - u[n-1]$.
b. $h[n] = u[n+1] - 3u[n-3]$.
c. $h[n] = u[n] - 3u[n-1]$.
d. Nessuna delle altre risposte è corretta.
e. $h[n] = u[n+1] + 3u[n-3]$.
f. $h[n] = u[n] - 3u[n-2]$.

Soluzione
La trasformata zeta della relazione ingresso uscita vale:

$$Y(z) = 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2} + X(z) - 4X(z)z^{-1} + 3X(z)z^{-2}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}\right]$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 3z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Essendo il sistema causale, la ROC della funzione di trasferimento è $|z| > 1$.
L'antistraformata zeta causale di $\frac{1}{1-z^{-1}}$ è pari a $u[n]$, quindi: Antitrasformando, si ottiene:

$$h[n] = u[n] - 3u[n-1]$$

(9) **5a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un sistema LTI discreto con risposta all'impulso

$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\alpha^{-n}u[n]$$

con $u[n]$ la funzione gradino unitario causale e α una costante reale compresa tra 0 e 1 (estremi esclusi). All'interno della sua regione di convergenza, la funzione di trasferimento $H(z)$ vale:

a. Nessuna delle altre risposte è corretta
b. $H(z) = \frac{\alpha^{-1}z}{1+\cos(\alpha^{-2})z^{-2}}$
c. $H(z) = \frac{1}{1+\alpha^{-2}z^{-2}}$
d. $H(z) = \frac{1}{1+\alpha^{-1}z^{-1}}$
e. $H(z) = \frac{1}{1+\cos(\alpha^{-1})z^{-1}}$

Soluzione
Usando la definizione di trasformata zeta:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\alpha^{-n}u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\alpha^{-n}z^{-n}$$

La funzione $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ è diversa da zero solo se n è pari. Effettuando il cambio di variabile $n = 2k$, si escludono i termini per n diapri della sommatoria e si ottiene:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(\pi k)\,\alpha^{-2k}z^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,\alpha^{-2k}z^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\alpha^{-2}z^{-2}\right)^k$$

Utilizzando la serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

con $x = -\alpha^{-2}z^{-2}$, si ottiene:

$$H(z) = \frac{1}{1+\alpha^{-2}z^{-2}} \qquad |\alpha^{-2}z^{-2}| < 1$$

(10) **5b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un sistema LTI discreto con risposta all'impulso

$$h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\alpha^{n}u[n]$$

con $u[n]$ la funzione gradino unitario causale e α una costante reale compresa tra 0 e 1 (estremi esclusi).

All'interno della sua regione di convergenza, la funzione di trasferimento $H(z)$ vale:

a. $H(z) = \frac{z^2}{\alpha^2+z^2}$
b. $H(z) = \frac{1}{\cos(\alpha)+z}$
c. $H(z) = \frac{\alpha z}{\cos(\alpha^2)+z^2}$
d. Nessuna delle altre risposte è corretta
e. $H(z) = \frac{z}{\alpha+z}$

Soluzione
Usando la definizione di trasformata zeta:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\alpha^{n}u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\alpha^{n}z^{-n}$$

La funzione $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ è diversa da zero solo se n è pari. Effettuando il cambio di variabile $n = 2k$, si escludono i termini per n diapri della sommatoria e si ottiene:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(\pi k)\,\alpha^{2k}z^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,\alpha^{2k}z^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\alpha^{2}z^{-2}\right)^k$$

Utilizzando la serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

con $x = -\alpha^2 z^{-2}$, si ottiene:

$$H(z) = \frac{1}{1+\alpha^2 z^{-2}} \qquad |\alpha^2 z^{-2}| < 1$$

Molitiplicando numeratore e denominatore per z^2:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2+\alpha^2} \qquad |z| > |\alpha|$$

(11) **6b** Risposta multipla Una sola alternativa

Sia $X(t)$ un processo casuale gaussiano stazionario con funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$, dove $T > 0$ è un ritardo fisso. Si consideri il processo $Y(t) = X(t) + X(t-T) + X(t-2T)$ Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $Y(t)$ non è stazionario in senso lato.
b. Campioni di $Y(t)$ distanti fra di loro più di $2T$ sono statisticamente indipendenti.
c. $Y(t)$ è gaussiano, stazionario e con varianza pari a 9.
d. $Y(t)$ è stazionario in senso lato e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana, a valor medio nullo e varianza $3 + 4\mathrm{e}^{-T} - 2\mathrm{e}^{-2T}$.
e. Nessuna delle altre risposte
f. $Y(t)$ è stazionario in senso lato e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana, a valor medio nullo e varianza $3 + 4\mathrm{e}^{-T} + 2\mathrm{e}^{-2T}$.

(12) **6b** Risposta multipla Una sola alternativa

Sia $X(t)$ un processo casuale gaussiano stazionario con funzione di autocorrelazione

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/(2T) & \text{per } |\tau| \le 2T \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $T > 0$ è un ritardo fisso. Si consideri il processo $Y(t) = X(t) + X(t-T) + X(t-2T)$.

Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a. Campioni di $Y(t)$ distanti fra di loro T sono statisticamente indipendenti.
b. $X(t)$ ed $Y(t)$ sono processi gaussiani, stazionari in senso lato e fra loro statisticamente indipendenti.
c. Nessuna delle altre risposte
d. $Y(t)$ è stazionario in senso lato e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana, a valor medio nullo e varianza 3.
e. $Y(t)$ non è stazionario in senso lato.
f. $Y(t)$ è stazionario in senso lato e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana, a valor medio nullo e varianza 5.

Soluzione es. 6a:
$X(t)$ ha valor medio nullo perché l'autocorrelazione si annulla per $\tau \to \infty$, quindi anche $Y(t)$ ha valor medio nullo:

$$E\{Y(t)\} = E\{X(t) + X(t-T) + X(t-2T)\} = 0 + 0 + 0$$

Quindi la varianza di $Y(t)$ coincide con il valore quadratico medio.

$$\begin{aligned} E\{Y^2(t)\} &= E\{[X(t) + X(t-T) + X(t-2T)]^2\} \\ &= E\{X^2(t)\} + E\{X^2(t-T)\} + E\{X^2(t-2T)\} \\ &+ 2E\{X(t)X(t-T)\} + 2E\{X(t-T)X(t-2T)\} + 2E\{X(t)X(t-2T)\} \\ &= 3R_X(0) + 4R_X(T) + 2R_X(2T) = 3 + 4\mathrm{e}^{-T} + 2\mathrm{e}^{-2T} \end{aligned}$$

Fine Soluzione.

(13) **7a** Risposta multipla Una sola alternativa

Si consideri il processo casuale

$$X(t) = X_1 u(t) + X_2 u(-t)$$

dove X_1, X_2 sono variabili casuali indipendenti, a media nulla e con la stessa varianza $\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2} = 1$, e $u(t) = 1$ per $t \ge 0$ e $u(t) = 0$ per $t < 0$. L'autocorrelazione del processo, $R_X(t, t+\tau)$

a. se $\tau < 0$ vale 1 per qualsiasi valore di t
b. non dipende da t
c. vale 1 se $\tau > 0$ e $t > 0$

d. se $\tau > 0$ vale 1 per qualsiasi valore di t
e. nessuna delle altre risposte è corretta

(14) **7b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il processo casuale

$$X(t) = X_1 u(t) + X_2 u(-t)$$

dove X_1, X_2 sono variabili casuali indipendenti, a media nulla e con la stessa varianza $\sigma^2_{X_1} = \sigma^2_{X_2} = 2$, e $u(t) = 1$ per $t \geq 0$ e $u(t) = 0$ per $t < 0$. L'autocorrelazione del processo, $R_X(t, t+\tau)$

a. vale 2 se $\tau > 0$ e $t > 0$
b. non dipende da t
c. nessuna delle altre risposte è corretta
d. se $\tau < 0$ vale 2 per qualsiasi valore di t
e. se $\tau > 0$ vale 2 per qualsiasi valore di t

Soluzione es.7a:
Scriviamo l'espressione della funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E\{X(t)X(t+\tau)\} \\ &= E\{[X_1 u(t) + X_2 u(-t)][X_1 u(t+\tau) + X_2 u(-t-\tau)]\} \\ &= E\{X_1^2\}u(t)u(t+\tau) + E\{X_2^2\}u(-t)u(-t-\tau) + E\{X_1 X_2\}(\cdots) \\ &= u(t)u(t+\tau) + u(-t)u(-t-\tau) + 0 \cdot (\cdots)\} \end{aligned}$$

Il terzo termine e' nullo perché X_1 e X_2 sono indipendenti e a media nulla.
$u(t)u(t+\tau)$ é uguale a $u(t)$ se $\tau > 0$ e a $u(t+\tau)$ se $\tau < 0$.

Al contrario $u(-t)u(-t-\tau)$é uguale a $u(-t)$ se $\tau < 0$ e a $u(-t-\tau)$ se $\tau > 0$. Solo se $\tau = 0$ la funzione vale 1 per tutti i valori di t, altrimenti esiste un insieme di valoti di t per cui si annulla.

Fine Soluzione.

(15) **8a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri un segnale periodico $x(t)$ con periodo $T_p = 0.5$ms, costituito dalla ripetizione di una porta nel tempo $p_{T_d}(t)$ di durata $T_d = 4$ns. Il segnale $x(t)$ è inviato ad un filtro passabasso ideale con una banda $B = 2.5$ kHz (cioè un filtro con funzione di trasferimento pari a 1 per $f \in [-B, +B]$ e zero altrove), dando luogo in uscita al segnale $y(t)$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. il segnale $y(t)$ non è periodico
b. il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 5 righe spettrali non nulle (considerando tutto l'asse delle frequenze, incluse quelle negative)
c. il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 3 righe spettrali non nulle (considerando tutto l'asse delle frequenze, incluse quelle negative)
d. il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 2 righe spettrali non nulle (considerando tutto l'asse delle frequenze, incluse quelle negative)

SOLUZIONE Il segnale periodico $x(t)$ ha uno spettro costituito da delta di Dirac posizionate sui multipli della frequenza $f_p = 1/T_p = 2$ kHz, e sagomate da un inviluppo costituito dalla trasformata di Fourier della porta nel tempo $p_{T_d}(t)$, cioè da uno spettro di tipo $sinc(\cdot)$ con il primo zero in $\pm 1/T_d = \pm 250$ MHz. Lo spettro del segnale $x(t)$ viene poi filtrato con un filtro rettangolare in frequenza su $[-2.5, +2.5]$ kHz e dunque rimangono in uscita solo le delta posizionate nelle frequenze di -2 kHz, 0 kHz e +2 kHz, cioè 3 righe spettrali non nulle

(16) **8b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri un segnale periodico $x(t)$ con periodo $T_p = 0.5$ms, costituito dalla ripetizione di una porta nel tempo $p_{T_d}(t)$ di durata $T_d = 5$ns. Il segnale $x(t)$ è inviato ad un filtro passabasso ideale con una banda $B = 4.5$ kHz (cioè un filtro con funzione di trasferimento pari a 1 per $f \in [-B, +B]$ e zero altrove), dando luogo in uscita al segnale $y(t)$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 3 righe spettrali non nulle (considerando tutto l'asse delle frequenze, incluse quelle negative)
b. il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 4 righe spettrali non nulle (considerando tutto l'asse delle frequenze, incluse quelle negative)
c. il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 5 righe spettrali non nulle (considerando tutto l'asse delle frequenze, incluse quelle negative)
d. il segnale $y(t)$ non è periodico

SOLUZIONE Il segnale periodico $x(t)$ ha uno spettro costituito da delta di Dirac posizionate sui multipli della frequenza $f_p = 1/T_p = 2$ kHz, e sagomate da un inviluppo costituito dalla trasformata di Fourier della porta nel tempo $p_{T_d}(t)$, cioè da uno spettro di tipo $sinc(\cdot)$ con il primo zero in $\pm 1/T_d = \pm 200$ MHz. Lo spettro del segnale $x(t)$ viene poi filtrato con un filtro rettangolare in frequenza su $[-4.5, +4.5]$ kHz e dunque rimangono in uscita solo le delta posizionate nelle frequenze di -4 kHz,-2 kHz, 0 kHz, +2 kHz e +4 kHz, cioè 5 righe spettrali non nulle

(17) **9a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$ e la sua rappresentazione spettrale secondo la definizione introdotta in questo corso. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede che il processo sia stazionario in senso lato.
b. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede solo che il processo sia a potenza media finita.
c. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso si applica a qualunque tipo di processo casuale
d. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede che $x(t)$ assuma valori reali.

(18) **9b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$ e la sua rappresentazione spettrale secondo la definizione introdotta in questo corso. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso si applica a qualunque tipo di processo casuale
b. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede che il processo sia stazionario in senso lato.
c. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede solo che il processo sia a supporto limitato nel tempo.
d. la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede che $x(t)$ sia ergodico.

SOLUZIONE per entrambe le versioni del quiz In generale, esistono in letteratura varie definizioni di densità spettrale di potenza, ma in questo corso abbiamo considerato solo la più semplice, che richiede che il processo casuale sia stazionario in senso lato e dunque che la sua autocorrelazione dipenda solo da τ, in modo da poter poi definire la densità spettrale di potenza come trasformata di Fourier della autocorrelazione. La risposta corretta è dunque: "la definizione dello spettro di potenza introdotta in questo corso richiede che il processo sia stazionario in senso lato."

(19) **10a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ nullo per $n < 0$ e $n > 8$, e un filtro numerico con risposta all'impulso pari a $h[n] = 3 \cdot \delta[n-1] - 3 \cdot \delta[n-5]$. Il segnale discreto $y[n] = x[n] * h[n]$ all'uscita del filtro è sicuramente nullo:

a. per $n < 1$ e per $n > 13$
b. per $n > 8$
c. nessuna delle altre risposte
d. per $n \leq 1$ e per $n \geq 13$

SOLUZIONE $x[n]$ ha valori non nulli tra gli indici 0 e 8 (estremi compresi), mentre $h[n]$ è costituito da due delta discrete posizionate sugli indici +1 e +5. Facendo la convoluzione discreta tra $x[n]$ e $h[n]$ si ottiene in uscita $y[n] = 3x[n-1] - 3x[n-5]$ che dunque si estende al massimo da $n = 1$ a $n = 13$ (estremi compresi). La risposta corretta è dunque "è sicuramente nullo per $n < 1$ e per $n > 13$"

(20) **10b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ nullo per $n < 0$ e $n > 10$, e un filtro numerico con risposta all'impulso pari a $h[n] = 3 \cdot \delta[n-1] - 5 \cdot \delta[n-6]$. Il segnale discreto $y[n] = x[n] * h[n]$ all'uscita del filtro è sicuramente nullo:

a. nessuna delle altre risposte
b. per $n \leq 1$ e per $n \geq 16$
c. per $n < 1$ e per $n > 16$
d. per $n > 10$

SOLUZIONE $x[n]$ ha valori non nulli tra gli indici 0 e 10 (estremi compresi), mentre $h[n]$ è costituito da due delta discrete posizionate sugli indici +1 e +6. Facendo la convoluzione discreta tra $x[n]$ e $h[n]$ si ottiene in uscita $y[n] = 3x[n-1] - 5x[n-6]$ che dunque si estende al massimo da $n = 1$ a $n = 16$ (estremi compresi). La risposta corretta è dunque "è sicuramente nullo per $n < 1$ e per $n > 16$"