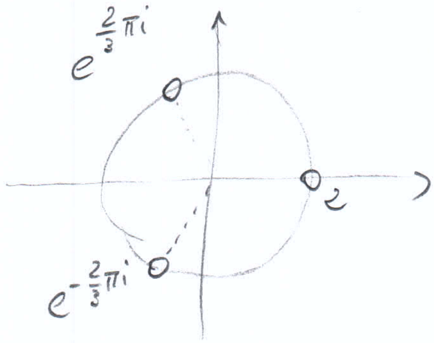
Cognome e Nome... Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 17 FEBBRAIO 2011 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Trovare gli zeri della funzione complessa



$$f(z) := \frac{\sin(2\pi z)}{8 - z^3}$$

nel suo naturale dominio di definizione dom(f).

$\mathrm{dom}(f) = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ z^3 - 8 \neq 0 \}$

$\sin(2\pi z) = 0 \iff 2\pi z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\iff z = \frac{k}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

quindi l'insieme degli zeri di f è

$$\left\{ \frac{k}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}, \ k \neq 4 \right\}$$

Esercizio 2 (3 punti)
Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ la funzione

$$f(x + iy) := (k + 2)x + i3y^k, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

è analitica in $\mathbb{C}$.

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) = (k+2)x \ ; \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x,y) = 3y^k$

Se $k \geq 2$ allora $v(x,y) = 3y^k$ non è armonica, quindi f non è analitica se $k \geq 2$.

Se $k = 1$ allora $f(x+iy) = 3(x+iy) = 3z$, analitica in $\mathbb{C}$.

Se $k = 0$ allora $f(x+iy) = 2x + i3$ che non è analitica in $\mathbb{C}$ (si usino C-R, oppure il fatto che $\mathrm{Im}\, f$ è costante, ma f non lo è)

Alternativamente si possono utilizzare le eq.ni di C-R.

Esercizio 3 (5 punti)
Si determini l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2niz}}{e^{i}(n^3+(-1)^n)} . = \sum_{n=2}^{\infty} a_n w^n \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{e^{i}(n^3+(-1)^n)} \\ w = e^{-2iz} \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n^3+(-1)^n}{(n+1)^3+(-1)^{n+1}}\right| \sim \frac{n^3}{(n+1)^3} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n\to\infty \Rightarrow R=1 \text{ raggio di convergenza}$$

Se $|w|=1$ allora $|a_n w^n| = |a_n||w|^n = \dfrac{1}{|e^{i}||n^3+(-1)^n|} =$

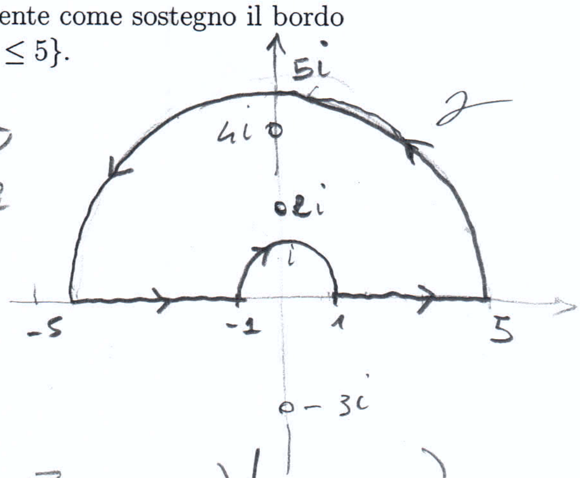
$= \dfrac{1}{(n^3+(-1)^n)} \sim \dfrac{1}{n^3}$, ma $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, quindi la serie data converge (assolutamente) anche per $|w|=1$. Allora l'insieme di convergenza è $\{z\in\mathbb{C} : |w|\le 1\} = \{z\in\mathbb{C} : |e^{-2iz}|\le 1\} =$

$= \{z=x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ e^{2y}\le 1\} = \{z=x+iy : x,y\in\mathbb{R},\ y\le 0\}$

Esercizio 4 (4 punti)
Si calcoli

$$I := \int_{\gamma} \frac{z}{(z^2-6iz-8)(z+3i)} dz ,$$

dove γ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario e avente come sostegno il bordo dell'insieme $C = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \ : \ x,y\in\mathbb{R},\ y\ge 0,\ 1\le |z|\le 5\}$.



Se $f(z)$ è la funzione integranda dal teorema dei residui segue che

$$I = 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}_f(2i) + \mathrm{Res}_f(4i) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left(\frac{z}{(z-4i)(z+3i)}\right)\Bigg|_{z=2i} + \left(\frac{z}{(z-2i)(z+3i)}\right)\Bigg|_{z=4i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{2i}{(-2i)(5i)} + \frac{4i}{2i\,7i} \right\} = 2\pi \left\{ -\frac{1}{5} + \frac{2}{7} \right\}$$

$$= \frac{6}{35}\pi$$

Esercizio 5 (5 punti)
Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z| < 3\}$ della funzione

$$f(z) := \frac{5}{3z^3 + z^4}.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Se $0 < |z| < 3$ allora

$$f(z) = \frac{5}{3z^3\left(1 - \frac{z}{3}\right)} = \frac{5}{3z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n$$

infatti $\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3$,

$$= \frac{5}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} z^{n-3} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{9z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} z^{n-3}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{3z^3} - \frac{5}{9z^2} + \frac{5}{27z}\right) + \frac{5}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n z^{n-3}$$

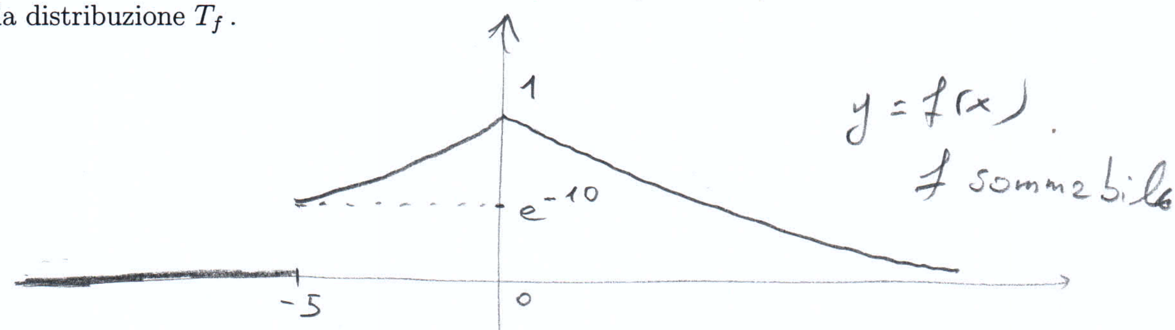
$$\mathrm{Res}_f(0) = 5/27$$

$z_0 = 0$ è un polo di ordine 3.

Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^{-2|x|} H(x+5),$$

dove H denota la funzione di Heaviside. Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f.



$\forall x \neq -5, 0 \quad \exists f'(x) = -2 \, \mathrm{sign}(x) \, e^{-2|x|} H(x+5)$

(oppure spezzare nei sottointervalli)

f' sommabile in $\mathbb{R}$

$$(T_f)' = T_{f'} + e^{-10} \delta_{-5}$$

Esercizio 7 (4 punti)
Sia $f(x) := ix^3 \sin(8\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$. Provare che T_f è una distribuzione temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

$|f(x)| = |ix^3 \sin(8\pi x)| \le |x|^3 \Rightarrow f$ a crescita lenta

$\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(T_f)(\nu) = \mathcal{F}(ix^3 \sin(8\pi x))(\nu)$$

$$= i\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^3 \left[\mathcal{F}\left(\frac{e^{8\pi i x} - e^{-8\pi i x}}{2i}\right)\right]^{(3)}(\nu)$$

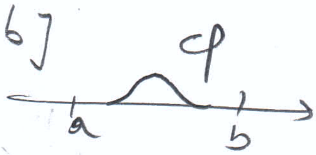
$$= \frac{i}{8\pi^3 i} \frac{1}{2i} \left[\left(\mathcal{F}(e^{8\pi i x})\right)^{(3)}(\nu) - \left(\mathcal{F}(e^{-8\pi i x})\right)^{(3)}(\nu)\right]$$

$$= \frac{1}{16\pi^3 i}\left[\delta_4^{(3)} - \delta_{-4}^{(3)}\right]$$

Esercizio 8 (5 punti)
a) Siano date una distribuzione T ed una successione di distribuzioni T_n. Scrivere cosa significa che T_n converge a T nel senso delle distribuzioni.

b) Dire se esiste il limite nel senso delle distribuzioni della successione $T_n = \delta_{3n} - \delta_{\frac{2}{n}}$. In caso affermativo calcolare tale limite.

(b) Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $supp(\varphi) \subseteq [a, b]$



allora

$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(3n) - \varphi\left(\frac{2}{n}\right) \rightarrow 0 - \varphi(0)$ per $n \to \infty$

perché $3n \notin supp(\varphi)$ per n sufficientemente grande e $\varphi\left(\frac{2}{n}\right) \to \varphi(0)$ essendo φ continua in $x_0 = 0$.

Allora $\langle T_n, \varphi \rangle \to -\langle \delta_0, \varphi \rangle$ cioè

$T_n \to -\delta_0$ in $\mathcal{D}'$