

**Esercizi e temi d'esame di
Analisi dei Segnali
(Ing. Biomedica - Politecnico di Torino)
Prof. Monica Visintin**

4 marzo 2015

Indice

1	Esercitazioni	4
1.1	Esercitazione 1	4
1.2	Esercitazione 2	19
1.3	Esercitazione 3	27
1.4	Esercitazione 4	40
1.5	Esercitazione 5	57
1.6	Esercitazione 6	63
1.7	Esercitazione 7	73
1.8	Esercitazione 8	79
1.9	Esercitazione 9	87
1.10	Esercitazione 10	100
1.10.1	Ulteriori esercizi	108
1.11	Esercitazione 11	115
1.12	Esercitazione 12	125
2	Temî d'esame, anno 2011	131
2.1	Appello del 30 Giugno 2011	131
2.2	Appello del 20 luglio 2011	139
2.3	Appello del 9 settembre 2011	146
3	Temî d'esame, anno 2012	152
3.1	Esempio di prova d'esame 14 giugno 2012	152
3.2	Appello del 30 gennaio 2012	157
3.3	Appello del 22 febbraio 2012	162
3.4	Appello del 18 giugno 2012	167
3.5	Appello del 16 luglio 2012	173
3.6	Appello del 3 settembre 2012	178
4	Temî d'esame, anno 2013	183
4.1	Esempio di prova d'esame 13 giugno 2013	183
4.2	Appello del 28 gennaio 2013	193
4.3	Appello del 26 febbraio 2013	198
4.4	Appello del 26 giugno 2013	204
4.5	Appello del 15 luglio 2013	213
4.6	Appello del 2 settembre 2013	226

5	Temì d'esame, anno 2014	238
5.1	Appello del 20 gennaio 2014	238
5.2	Appello del 14 febbraio 2014	242
5.3	Appello del 4 luglio 2014	247
5.4	Appello del 22 luglio 2014	254
5.5	Appello del 1 settembre 2014	261

Capitolo 1

Esercitazioni

1.1 Esercitazione 1

1. Scrivere una tabella con i valori di $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$, $e^{j\varphi}$ per $\varphi = 0, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.
2. Disegnare il grafico (quotato) per le seguenti funzioni di t (segnali) :

$$x(t) = 4, \quad y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad z(t) = x(t)y(t).$$

3. Disegnare il grafico (quotato) per i seguenti segnali:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t), \quad y(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad z(t) = x(t)y(t), \quad T = 4/f_c.$$

4. Disegnare il grafico (quotato) per i seguenti segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & |t| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad z(t) = x(t) + y(t).$$

5. Disegnare il grafico per i seguenti segnali:

$$x(t) = e^{-t} \text{ per } t > 0, \quad x(t) = 0 \text{ per } t < 0$$
$$y(t) = e^{-|t|}, \quad z(t) = e^{-t^2}.$$

6. Si calcolino parte reale, parte immaginaria, modulo e fase per i numeri complessi

$$c_1 = 2e^{j\pi/4}, \quad c_2 = 3 + j, \quad c_3 = j, \quad c_4 = 1 - j.$$

Si disegnino nel piano complesso \mathbb{C} i punti corrispondenti a c_1, \dots, c_4 .

7. Si calcolino i complessi coniugati dei numeri (complessi) c_1, c_2, c_3, c_4 dell'esercizio precedente. Si disegnino nel piano complesso \mathbb{C} i punti corrispondenti a c_1^*, \dots, c_4^* .
8. Si consideri il segnale complesso

$$x(t) = e^{-j2\pi f_c t} = x_R(t) + jx_I(t) = M(t)e^{j\psi(t)}.$$

Fornire l'espressione matematica e disegnare il grafico di $x_R(t)$, $x_I(t)$, $M(t)$, $\psi(t)$. Disegnare nel piano complesso \mathbb{C} i punti corrispondenti a $x(t)$ per $t = 0, 1/(8f_c), 1/(4f_c), 3/(8f_c), 1/(2f_c), 1/f_c, 2/f_c$. Disegnare nel piano complesso \mathbb{C} la traiettoria percorsa da $x(t)$ nell'intervallo $t \in [0, 1/f_c]$.

9. Sia

$$x(t) = M(t)e^{j\psi(t)}, \quad M(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/T & 0 \leq t \leq T \\ 1 & t > T \end{cases}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\pi f_c t & t \geq 0 \end{cases}$$

Disegnare nel piano complesso \mathbb{C} la traiettoria percorsa da $x(t)$, assumendo che sia che sia nell'ordine $f_c = 1/(4T)$, $f_c = 1/(2T)$ $f_c = 1/T$.

10. Disegnare il grafico di

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha u} du$$

per $t > 0$, supponendo $\alpha > 0$ (reale).

11. Disegnare il grafico dei due segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du, \quad t \in \mathbb{R}$$

12. Disegnare il grafico dei due segnali:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in [kT, kT + T/2[\\ -1 & t \in [kT + T/2, kT + T[\end{cases} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

Soluzione

1. Si veda la tabella [1.1](#)

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	$e^{j\varphi}$
0	1	0	1
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(1+j)/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$(1+j\sqrt{3})/2$
$\pi/2$	0	1	j
$3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$(-1+j)/\sqrt{2}$
π	-1	0	-1

Tabella 1.1: Tabella con i valori di $\cos(\varphi)$ e $\sin(\varphi)$ per alcuni valori di φ (es. [1](#))

2. I grafici richiesti sono riportati in figura [1.1](#). Si noti che $y(t)$ è nullo per $t < -T$ e per $t > T$; parimenti $z(t)$ è nullo per $t < -T$ e per $t > T$.

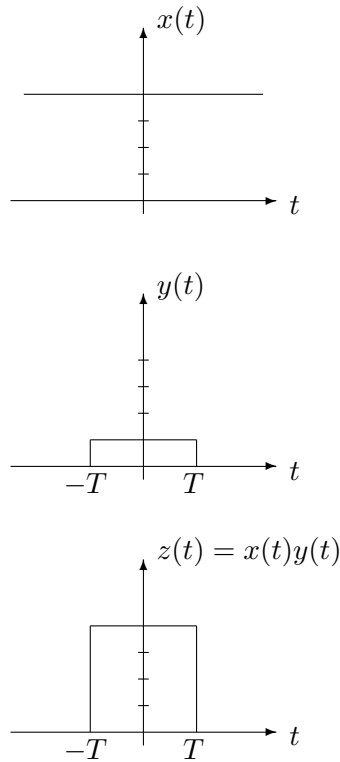


Figura 1.1: Soluzione dell'esercizio [2](#)

3. Si veda la figura 1.2

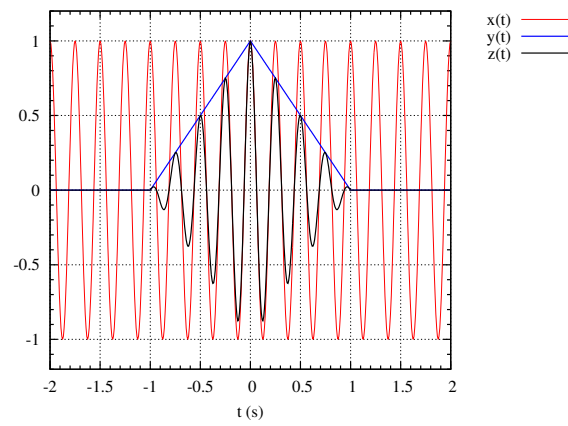


Figura 1.2: Segnali $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ dell'esercizio 3, con $A = 1$ e $T = 1$ s.

4. Si veda la figura 1.3

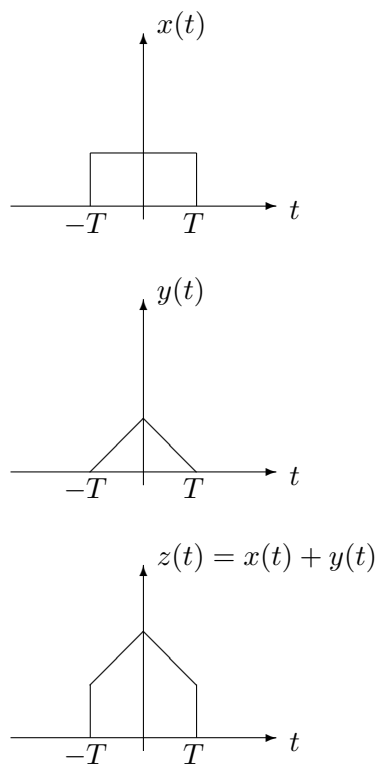


Figura 1.3: Segnali $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ dell'esercizio 4.

5. Si veda la figura 1.4

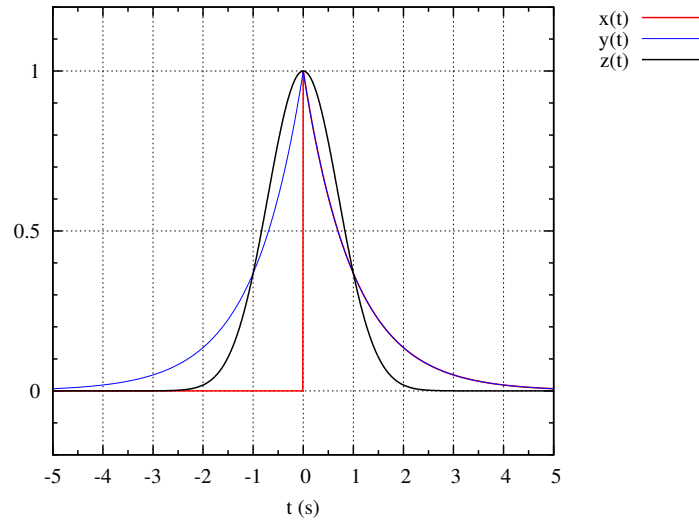


Figura 1.4: Segnali $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ dell'esercizio 5.

6. Si ricordi che (formula di Eulero)

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$c_1 = 2 e^{j\pi/4}, \quad \Re\{c_1\} = \sqrt{2}, \quad \Im\{c_1\} = \sqrt{2}, \quad |c_1| = 2, \quad \angle c_1 = \pi/4$$

$$c_2 = 3 + j, \quad \Re\{c_2\} = 3, \quad \Im\{c_2\} = 1, \quad |c_2| = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}, \quad \angle c_2 = \tan^{-1} \frac{1}{3} \simeq 0.1\pi$$

$$c_3 = j, \quad \Re\{c_3\} = 0, \quad \Im\{c_3\} = 1, \quad |c_3| = 1, \quad \angle c_3 = \pi/2$$

$$c_4 = 1 - j, \quad \Re\{c_4\} = 1, \quad \Im\{c_4\} = -1, \quad |c_4| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad \angle c_4 = -\pi/4$$

I numeri complessi c_1, \dots, c_4 sono rappresentati nella figura 1.5.

7. I complessi coniugati dei numeri

$$c_1 = 2 e^{j\pi/4}, \quad c_2 = 3 + j, \quad c_3 = j, \quad c_4 = 1 - j.$$

sono

$$c_1^* = 2 e^{-j\pi/4}, \quad c_2^* = 3 - j, \quad c_3^* = -j, \quad c_4^* = 1 + j$$

rappresentati nella figura 1.6.

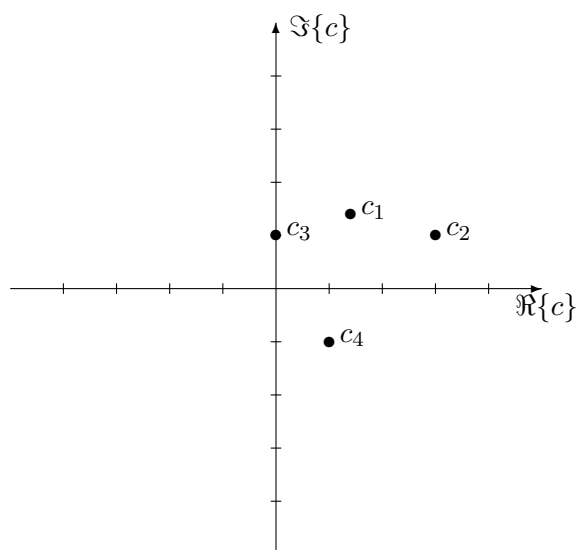


Figura 1.5: Punti nel piano complesso corrispondenti ai numeri c_1, \dots, c_4 dell'esercizio 6

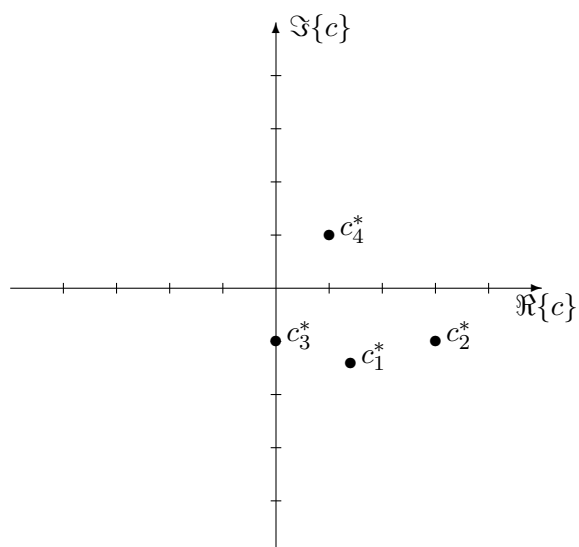


Figura 1.6: Punti nel piano complesso corrispondenti ai numeri c_1^*, \dots, c_4^* dell'esercizio 7

8. La sinusoida complessa

$$x(t) = e^{j2\pi f_c t}$$

può essere scritta, usando la formula di Eulero, come

$$x(t) = e^{j2\pi f_c t} = \cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t).$$

Pertanto, la parte reale di $x(t)$ è

$$x_R(t) = \Re \left\{ e^{j2\pi f_c t} \right\} = \cos(2\pi f_c t)$$

mentre la parte immaginaria di $x(t)$ è

$$x_I(t) = \Im \left\{ e^{j2\pi f_c t} \right\} = \sin(2\pi f_c t).$$

Il modulo di $x(t)$ è

$$M(t) = |x(t)| = 1$$

mentre la fase di $x(t)$ è

$$\psi(t) = 2\pi f_c t$$

I grafici dei segnali sono riportati nella figura 1.7 nel caso $f_c = 1$ Hz e nella figura 1.8 nel caso $f_c = 10$ Hz. Per gli istanti di tempo indicati nell'esercizio, il segnale $x(t)$ assume i

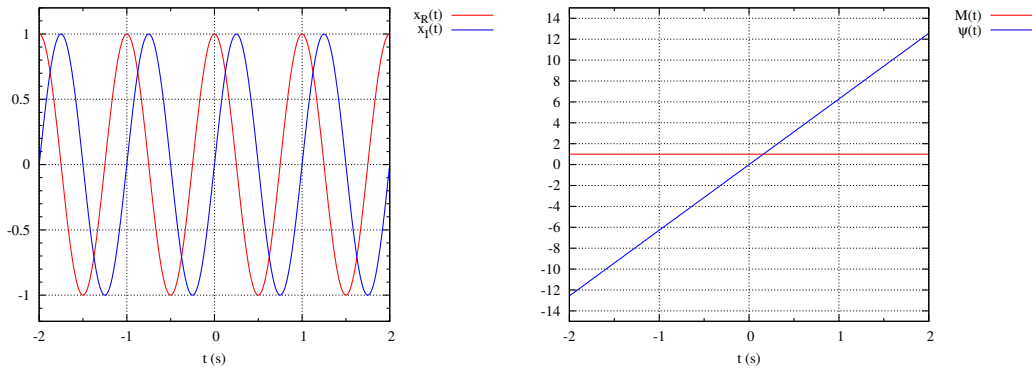


Figura 1.7: Segnali $x_R(t)$ e $x_I(t)$, $M(t)$ e $\psi(t)$ per l'esercizio 8; caso di $f_c = 1$ Hz.

seguenti valori (riportati nella figura 1.9):

$$x(t)|_{t=0} = x(0) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

$$x(t)|_{t=1/(8f_c)} = x(1/(8f_c)) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=1/(8f_c)} = e^{j2\pi f_c/(8f_c)} = e^{j\pi/4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$

$$x(t)|_{t=1/(4f_c)} = x(1/(4f_c)) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=1/(4f_c)} = e^{j2\pi f_c/(4f_c)} = e^{j\pi/2} = j$$

$$x(t)|_{t=3/(8f_c)} = x(3/(8f_c)) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=3/(8f_c)} = e^{j2\pi f_c 3/(8f_c)} = e^{j3\pi/4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$$

$$x(t)|_{t=1/(2f_c)} = x(1/(2f_c)) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=1/(2f_c)} = e^{j2\pi f_c/(2f_c)} = e^{j\pi} = -1$$

$$x(t)|_{t=1/f_c} = x(1/f_c) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=1/f_c} = e^{j2\pi f_c/f_c} = e^{j2\pi} = 1 = x(0)$$

$$x(t)|_{t=2/f_c} = x(2/f_c) = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{t=2/f_c} = e^{j2\pi f_c 2/f_c} = e^{j4\pi} = 1 = x(0)$$

È chiaro che, ad ogni incremento di t di una quantità pari a $1/(8f_c)$, la fase di $x(t)$ aumenta di $\pi/4$, ma, dato che $2k\pi + \theta = \theta$ ai fini del calcolo di $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, il valore di $x(t)$ in 0 è uguale al valore di $x(t)$ in $t = 1/f_c$, in $t = 2/f_c$, e in generale in $t = k/f_c$ con k intero (positivo o negativo).

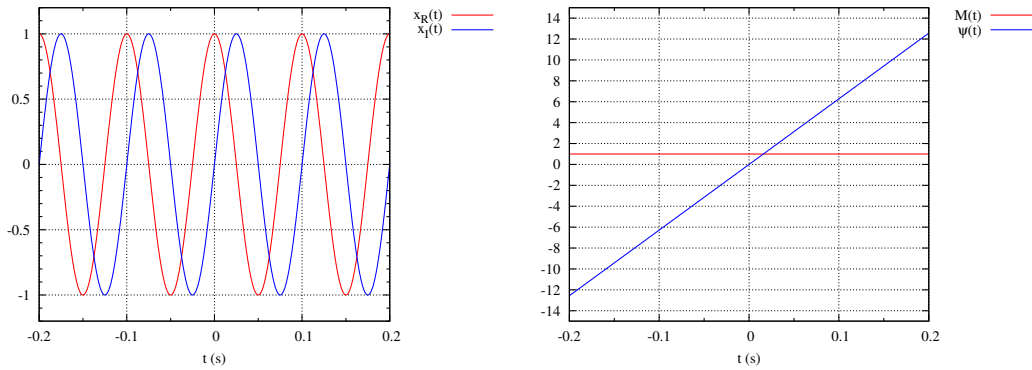


Figura 1.8: Segnali $x_R(t)$ e $x_I(t)$, $M(t)$ e $\psi(t)$ per l'esercizio 8; caso di $f_c = 10$ Hz.

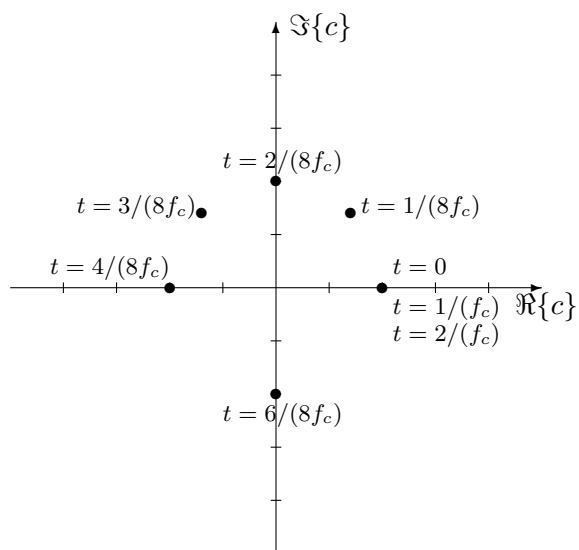


Figura 1.9: Punti nel piano complesso corrispondenti alla sinusoide complessa $x(t)$ dell'esercizio 8, per $t = 0, 1/(8f_c), 2/(8f_c), 3/(8f_c), 4/(8f_c), 6/(8f_c), 1/f_c, 2/f_c$.

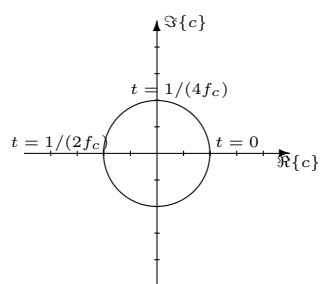


Figura 1.10: Traiettoria “compiuta” dalla sinusoide complessa $x(t)$ dell'esercizio 8 nell'intervallo di tempo $[0, 1/f_c]$.

9. La figura 1.11 mostra l'andamento dei segnali $M(t)$ e $\psi(t)$, mentre la figura 1.12 mostra la traiettoria di $x(t)$ nel piano complesso, per i 3 casi richiesti.

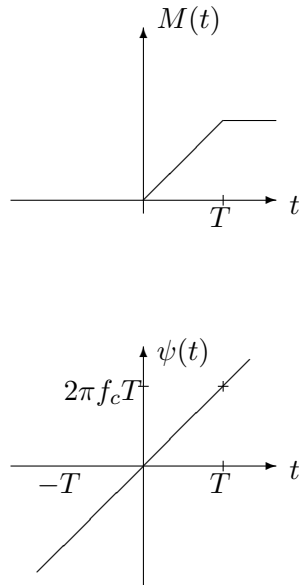


Figura 1.11: Segnali $M(t)$ e $\psi(t)$ per l'esercizio 9.

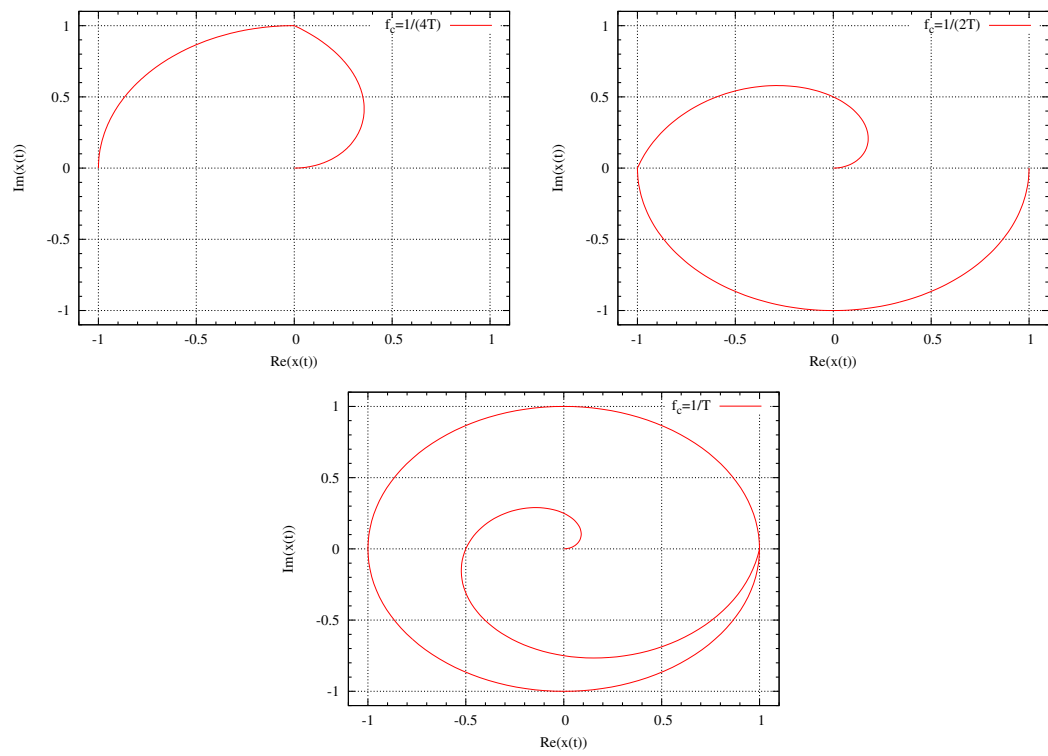


Figura 1.12: Traiettorie del segnale $x(t)$ dell'esercizio 9 nell'intervallo $t \in [-2T, 2T]$.

10. Il segnale $x(t)$ è definito da un integrale. Si ha

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha u} du = \frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha} \Big|_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - z(t)$$

$$z(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

Per $t < 0$ il segnale $x(t)$ non è definito (possiamo considerarlo pari a zero nel grafico); in $t = 0^+$, $x(t) = 0$ e $z(t) = 1/\alpha$; per $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 1/\alpha$ mentre $z(t) \rightarrow 0$; $x(t)$ e $z(t)$ sono sempre positivi. La figura 1.13 mostra il grafico di $z(t)$ utilizzando in ordinata sia la scala lineare sia la scala logaritmica.

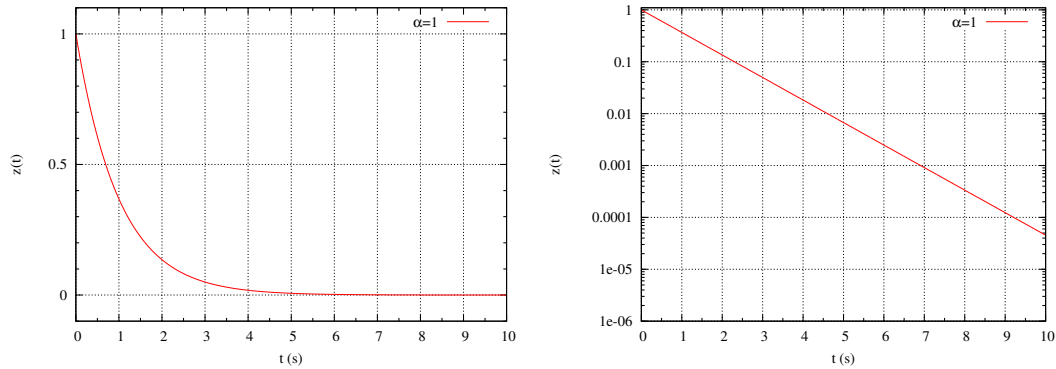


Figura 1.13: Grafico del segnale $z(t) = \frac{1}{\alpha} - x(t)$ dell'esercizio 10 con $\alpha = 1$, usando in ordinata la scala lineare (a sinistra) e la scala logaritmica (a destra).

11. Il segnale $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è nullo per $t < 0$ e quindi anche $x(u) = 0$ se $u < 0$. Se dunque $t < 0$, l'integrale $y(t)$ diventa

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_{-\infty}^t 0 du = 0, \quad t < 0$$

ed anche $y(t)$ è nullo per $t < 0$.

Per $u \in [0, T]$, $x(u)$ vale 1 e quindi, finché $t \in [0, T]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^t 1 du = t, \quad t \in [0, T]$$

Per $u > T$ si ha $x(u) = 0$, e quindi, se $t > T$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^T 1 du + \int_T^t 0 du = T, \quad t > T$$

La figura 1.14 mostra i grafici di $x(t)$ e $y(t)$.

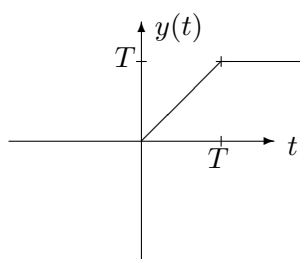
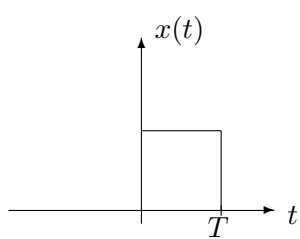


Figura 1.14: Segnali $x(t)$ e $y(t)$ per l'esercizio [11](#).

12. Il segnale $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in [kT, kT + T/2[\\ -1 & t \in [kT + T/2, kT + T[\end{cases} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots,$$

ha il grafico riportato nella figura 1.15.

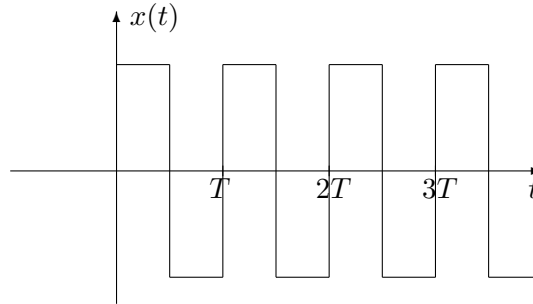


Figura 1.15: Segnale $x(t)$ per l'esercizio 12.

- Per $t < 0$ l'integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

è nullo perché è nulla la funzione integranda.

- Per $u \in [0, T/2]$, $x(u) = 1$ e quindi per $t \in [0, T/2]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^t 1 du = t, \quad t \in [0, T/2]$$

In particolare, $y(t) = T/2$ per $t = T/2$.

- Per $u \in [T/2, T]$, $x(u) = -1$ e quindi per $t \in [T/2, T]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^{T/2} 1 du + \int_{T/2}^t -1 du = T/2 - (t - T/2) = T - t, \quad t \in [T/2, T]$$

In particolare, $y(t) = 0$ per $t = T$.

- Per $u \in [T, 3T/2]$, $x(u) = 1$ e quindi per $t \in [T, 3T/2]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^T x(u) du + \int_T^t 1 du = t - T, \quad t \in [T, 3T/2]$$

Nell'integrale precedente si è sfruttato il fatto che l'integrale di $x(u)$ tra 0 e T vale 0. In particolare, $y(t) = T/2$ per $t = 3T/2$.

- Per $u \in [3T/2, 2T]$, $x(u) = -1$ e quindi per $t \in [3T/2, 2T]$ si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^T x(u) du + \int_T^{3T/2} 1 du + \int_{3T/2}^t -1 du = T/2 - (t - 3T/2) = 2T - t, \quad t \in [3T/2, 2T]$$

In particolare, $y(t) = 0$ per $t = 2T$.

In sostanza, $y(t)$ prima cresce linearmente da 0 a $T/2$, poi decresce linearmente da $T/2$ a 0, in modo periodico ogni T secondi, a partire da $t = 0$.

Il segnale $y(t)$ ha il grafico riportato nella figura 1.16.

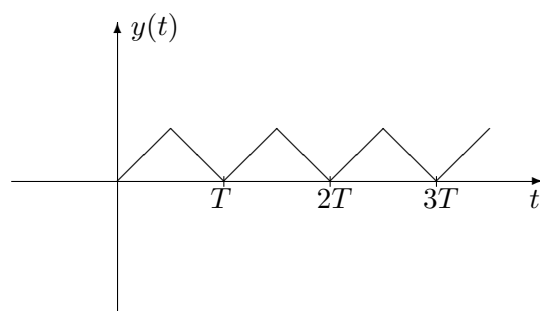


Figura 1.16: Segnale $y(t)$ per l'esercizio [12](#).

1.2 Esercitazione 2

1. Si consideri il sistema a tempo discreto costituito da due sottosistemi in parallelo, come in figura 1.17. Si assuma

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$$

- (a) Si disegni lo schema a blocchi per il sottosistema 1 (risposta all'impulso $h_1[n]$).
- (b) Si disegni lo schema a blocchi per il sottosistema 2 (risposta all'impulso $h_2[n]$).
- (c) Si calcoli la risposta all'impulso del sistema complessivo.
- (d) Si disegni uno schema a blocchi alternativo del sistema complessivo

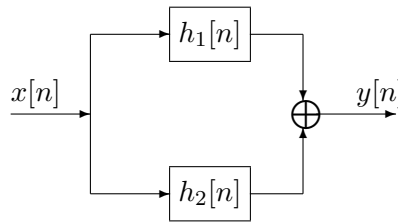


Figura 1.17: Sistema (tempo-discreto) costituito dal parallelo di due sottosistemi.

2. Si consideri la cascata di due sottosistemi a tempo discreto, come indicato nella figura 1.18, con risposte all'impulso

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$$

Si calcoli la risposta all'impulso $h[n]$ del sistema complessivo, si disegni il grafico di $h[n]$, si disegni uno schema a blocchi alternativo che realizzi $h[n]$.



Figura 1.18: Sistema (tempo-discreto) costituito dalla cascata di due sottosistemi.

3. Si calcoli la risposta all'impulso del sistema a tempo-discreto la cui relazione ingresso uscita è

$$y[n] = x[n] + \alpha y[n - 1]$$

(suggerimento: si riempia la tabella 1.2). Si disegni lo schema a blocchi del sistema corrispondente alla relazione ingresso-uscita assegnata.

4. Si consideri il sistema a tempo discreto in figura 1.19. Si scrivano le equazioni che legano l'uscita $y[n]$ all'ingresso $x[n]$. Nota 1: i blocchi con etichetta "rit." ritardano il segnale di ingresso di 1 passo. Nota 2: non si chiede di risolvere il sistema di equazioni.

Soluzione

1. Lo schema a blocchi del sottosistema 1 è riportato nella figura 1.20; Lo schema a blocchi del sottosistema 2 è riportato nella figura 1.21.

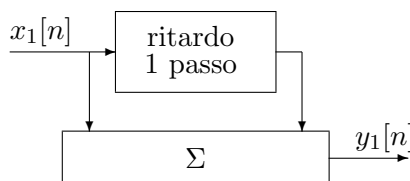


Figura 1.20: Schema a blocchi del sottosistema 1 dell'esercizio 1.

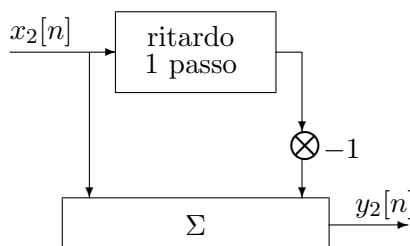


Figura 1.21: Schema a blocchi del sottosistema 2 dell'esercizio 1.

La risposta all'impulso del sistema di figura 1.17 si ottiene ponendo $\delta[n]$ all'ingresso. Il segnale $\delta[n]$ si trova quindi all'ingresso sia del sottosistema 1, all'uscita del quale si ha $h_1[n]$, sia del sottosistema 2, all'uscita del quale si ha $h_2[n]$. La risposta all'impulso del sistema di figura 1.17 è dunque la somma delle risposte all'impulso dei due sottosistemi $h_1[n]$ e $h_2[n]$:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n].$$

Nel caso specifico in esame, si ha:

$$h[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) + (\delta[n] - \delta[n-1]) = 2\delta[n]$$

In sostanza, il sistema di figura 1.17 semplicemente moltiplica per due il segnale di ingresso:

$$y[n] = 2x[n]$$

e lo schema a blocchi equivalente è riportato in figura 1.22.

2. La risposta all'impulso del sistema si ottiene ponendo $\delta[n]$ all'ingresso. Il segnale $\delta[n]$ si trova dunque all'ingresso del primo sottosistema, alla cui uscita si ottiene $h_1[n]$. All'ingresso del secondo sottosistema si ha dunque $h_1[n]$ e all'uscita del secondo sottosistema

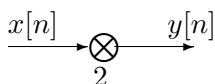


Figura 1.22: Schema a blocchi equivalente per l'esercizio 1.

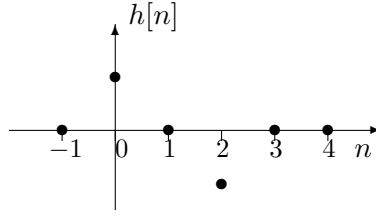


Figura 1.23: Risposta all'impulso $h[n]$ per il sistema di figura 1.18.

si ha la convoluzione tra l'ingresso $h_1[n]$ e la risposta all'impulso del sottosistema 2, cioè $h_2[n]$:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k]$$

Per ottenere la risposta all'impulso del sistema di fig. 2 occorre dunque calcolare la convoluzione delle risposte all'impulso dei due sottosistemi. In particolare, si ha

$$h[n] = 0 \quad \text{per } n < 0$$

$$h[0] = h_1[0]h_2[0] + h_1[1]h_2[-1] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$h[1] = h_1[0]h_2[1] + h_1[1]h_2[0] = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

$$h[2] = h_1[0]h_2[2] + h_1[1]h_2[1] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1$$

$$h[3] = h_1[0]h_2[3] + h_1[1]h_2[2] = 0$$

$$h[n] = 0 \quad \text{per } n \geq 3$$

Il grafico di $h[n]$ è in figura 1.23, mentre lo schema a blocco equivalente per il sistema di fig. 1.18 è riportato in figura 1.24.

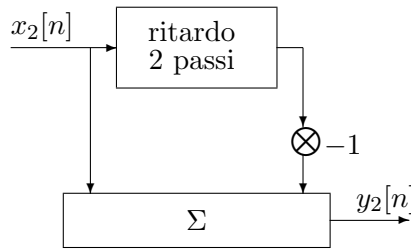


Figura 1.24: Schema a blocchi equivalente per l'esercizio 1.18.

3. La tabella 1.3 mostra l'evoluzione di $h[n]$. Per induzione, si ottiene

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \alpha^n & n \geq 0 \end{cases}$$

Lo schema a blocchi del sistema che realizza la relazione ingresso uscita dell'esercizio 3 è mostrato in figura 1.25.

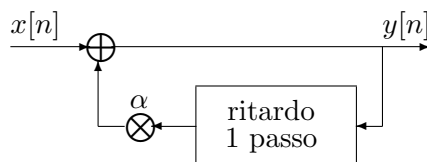


Figura 1.25: Schema a blocchi del sistema dell'esercizio 3.

4. Per risolvere questo tipo di esercizi conviene dare un nome (“battezzare”) uno o più segnali all'interno del sistema, facendone poi riferimento all'interno delle equazioni. Nel caso in questione è sufficiente “battezzare” come $w[n]$ il segnale all'uscita del primo nodo di somma e $z[n]$ il segnale all'uscita del secondo nodo di somma (si faccia riferimento alla fig. 1.26). Si noti che, nella figura, il primo nodo di somma ha due ingressi e due uscite, ma le due uscite sono identiche (sono entrambe uguali a $w[n]$). Si ha:

$$\begin{cases} y[n] = \beta_1 w[n] + \beta_2 z[n] + \beta_3 z[n-1] \\ z[n] = w[n-1] + \alpha_2 z[n-1] \\ w[n] = x[n] + \alpha_1 z[n-1] \end{cases}$$

Grazie alla trasformata zeta (argomento successivo del corso) sarà possibile calcolare la risposta all'impulso di questo sistema. Per il momento si possono solo scrivere le equazioni che corrispondono allo schema a blocchi. Le equazioni possono essere utilizzate per realizzare il sistema in software.

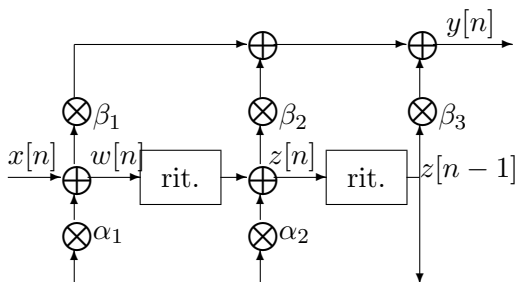


Figura 1.26: Sistema per l'esercizio 4

5. Lo schema a blocchi del sistema è rappresentato in figura 1.27.

n	$\delta[n]$	$h[n-1]$	$h[n]$
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	α
2	0	α	α^2
3	0	α^2	α^3
4	0	α^3	α^4

Tabella 1.3: Tabella per l'esercizio 3

- Linearità: Occorre prima trovare le risposte $y_1(t)$ e $y_2(t)$ del sistema a due generici ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = \int_{t-1}^t x_1(\tau) d\tau + x_1(t-2)$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} = \int_{t-1}^t x_2(\tau) d\tau + x_2(t-2)$$

Poi occorre trovare l'uscita $y(t)$ per l'ingresso $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{T}\{x(t)\} = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau + x(t-2) \\ &= \int_{t-1}^t [\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)] d\tau + [\alpha_1 x_1(t-2) + \alpha_2 x_2(t-2)] \\ &= \alpha_1 \int_{t-1}^t x_1(\tau) d\tau + \alpha_1 x_1(t-2) + \alpha_2 \int_{t-1}^t x_2(\tau) d\tau + \alpha_2 x_2(t-2) \\ &= \alpha_1 \left\{ \int_{t-1}^t x_1(\tau) d\tau + x_1(t-2) \right\} + \alpha_2 \left\{ \int_{t-1}^t x_2(\tau) d\tau + x_2(t-2) \right\} \end{aligned}$$

Si nota immediatamente che

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

e si deduce che il sistema è lineare (cioè vale la sovrapposizione degli effetti).

- Tempo invarianza: Si calcola l'uscita del sistema $y_1(t)$ per l'ingresso $x_1(t)$

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = \int_{t-1}^t x_1(\tau) d\tau + x_1(t-2)$$

Poi si ritarda di t_0 (generico) il segnale $y_1(t)$, ottenendo $y_1(t-t_0)$:

$$y_1(t-t_0) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x_1(\tau) d\tau + x_1(t-t_0-2)$$

(al posto di t si scrive $t-t_0$).

Adesso si calcola l'uscita del sistema $y_2(t)$ per l'ingresso ritardato di t_0 , cioè per $w(t) = x_1(t-t_0)$:

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{w(t)\} = \int_{t-1}^t w(\tau) d\tau + w(t)$$

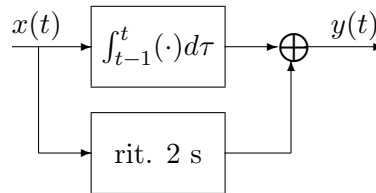


Figura 1.27: Schema a blocchi per il sistema dell'esercizio 5.

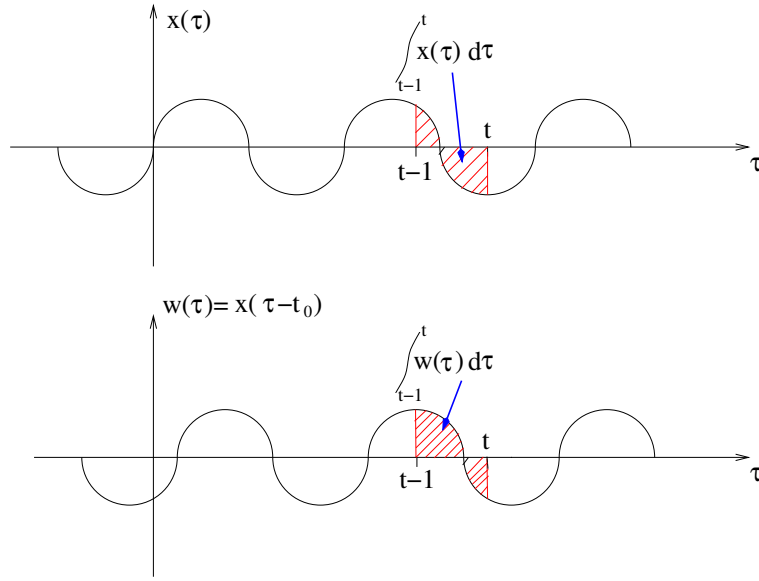


Figura 1.28: Significato “grafico” di $\int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$ e di $\int_{t-1}^t w(\tau) d\tau$ con $w(t) = x(t - t_0)$.

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t - t_0)\} = \int_{t-1}^t x_1(\tau - t_0) d\tau + x_1(t - t_0 - 2)$$

Con un cambio di variabile nell'integrale ($u = \tau - t_0$), si ottiene (si veda fig. 1.28)

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t - t_0)\} = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x_1(u) du + x_1(t - t_0 - 2)$$

e si nota che $y_2(t) = y_1(t - t_0)$, deducendo che il sistema è tempo invariante.

6. Lo schema a blocchi del sistema è riportato in figura 1.29.

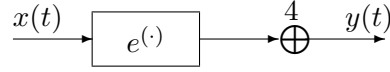


Figura 1.29: Schema a blocchi del sistema dell'esercizio 6.

- Linearità. Occorre calcolare le due uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$ per i due generici ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_2(t)\} = 4 + e^{x_2(t)}$$

Poi occorre calcolare l'uscita $y(t)$ per l'ingresso $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = 4 + e^{x(t)} = 4 + e^{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)} = 4 + e^{\alpha_1 x_1(t)} e^{\alpha_2 x_2(t)}$$

È immediato constatare che non è possibile scrivere

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

e pertanto il sistema è nonlineare.

- Tempo invarianza. Si calcola l'uscita del sistema $y_1(t)$ per l'ingresso $x_1(t)$

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} = 4 + e^{x_1(t)}$$

Poi si ritarda di t_0 (generico) il segnale $y_1(t)$, ottenendo $y_1(t - t_0)$:

$$y_1(t - t_0) = 4 + e^{x_1(t - t_0)}$$

(al posto di t si scrive $t - t_0$). Adesso si calcola l'uscita del sistema $y_2(t)$ per l'ingresso ritardato di t_0 , cioè per $w(t) = x_1(t - t_0)$:

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{w(t)\} = 4 + e^{w(t)}$$

$$y_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t - t_0)\} = 4 + e^{x_1(t - t_0)}$$

e si nota che $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ e quindi il sistema è tempo invariante.

1.3 Esercitazione 3

1. L'equazione differenziale che lega la tensione $v(t)$ ai capi di un induttore e la corrente $i(t)$ che vi scorre attraverso è

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

essendo L l'induttanza. Lo schema a blocchi corrispondente all'equazione differenziale è riportato nella figura 1.30; si noti che $i(t)$ è il segnale d'ingresso (unità di misura ampere) e $v(t)$ è il segnale di uscita (unità di misura volt). Il sistema è lineare e tempo invariante. Utilizzando il concetto di autofunzione e autovalore di un sistema LTI, si calcoli la funzione di trasferimento del sistema $H(f)$. Successivamente, supponendo che sia

$$i(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

si calcoli $v(t)$.

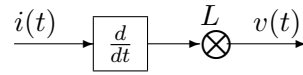


Figura 1.30: Schema a blocchi che modella il comportamento di un induttore con induttanza L

2. Dai due segnali

$$x(t) = e^{-(t/T)^2}, \quad y(t) = \delta(t) + \delta(t - T)$$

si ottiene il segnale

$$z(t) = x(t)y(t)$$

che viene posto come ingresso del sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli l'uscita $w(t)$ del sistema LTI e se ne disegni il grafico. Suggerimento: si disegnino i grafici di $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $h(t)$.

3. Si ripeta l'esercizio 2 usando prima

$$h(t) = h_1(t) = e^{-t/T} u(t)$$

e poi

$$h(t) = h_2(t) = \begin{cases} t/T & t \in [0, T] \\ 2 - t/T & t \in [T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Nota: $u(t)$ rappresenta il gradino unitario, definito come

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

4. Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

quando l'ingresso è

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

Per quali valori di f_0 $y(t)$ è nulla? Si risolva l'esercizio due volte, lavorando prima nel dominio del tempo e poi nel dominio della frequenza (cioè utilizzando la funzione di trasferimento del sistema).

5. Si ripeta l'esercizio 4 utilizzando

$$h(t) = e^{-t/T} u(t)$$

e lavorando esclusivamente nel dominio della frequenza. Nota: T è detta “costante di tempo” ed è un numero reale e positivo.

6. Si consideri il circuito elettrico indicato nella figura 1.31 Il generatore di tensione produce

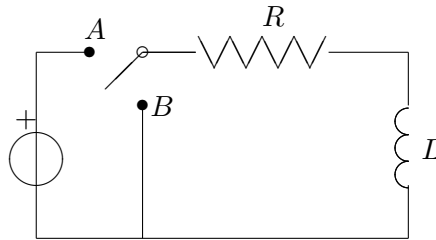


Figura 1.31: Circuito per l'esercizio 6.

una differenza di potenziale pari a V volt (costante). L'interruttore viene posto a riposo in posizione B . Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene posto in posizione A e, successivamente, al tempo $t = T$ viene posto nuovamente in posizione B . Si calcoli la funzione di trasferimento $H(f)$ del sistema equivalente al circuito che ha come uscita la corrente $i(t)$ che scorre nell'induttore.

Soluzione

1. Se un sistema LTI ha risposta all'impulso $h(t)$ e ha come ingresso un generico segnale $x(t)$, l'uscita è

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Il segnale $w(t)$ è un'autofunzione della convoluzione se

$$w(t) * h(t) = \lambda w(t)$$

e si è visto a lezione che le autofunzioni sono

$$w_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

con autovalori

$$\lambda_f = H(f) = \int h(t)e^{-j2\pi ft}dt.$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} w_f(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)w_f(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{j2\pi ft} \int h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = w_f(t)H(f) \end{aligned}$$

In sostanza, se l'ingresso del sistema è $w_f(t)$, l'uscita è $w_f(t)H(f)$. Viene chiesto di calcolare $H(f)$ utilizzando le autofunzioni $w_f(t)$. È dunque sufficiente utilizzare

$$i(t) = w_{f_0}(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

per un assegnato valore di f_0 , e calcolare la corrispondente uscita $v(t)$, sapendo che si avrà

$$v(t) = w_{f_0}(t)H(f_0) = i(t)H(f_0).$$

L'uscita $v(t)$ è

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = L \frac{d}{dt} e^{j2\pi f_0 t} = L(j2\pi f_0) e^{j2\pi f_0 t} = j2\pi f_0 L i(t)$$

e quindi

$$H(f_0) = j2\pi f_0 L$$

cioè, per un valore qualsiasi di f_0 in \mathbb{R} , si ha

$$H(f) = j2\pi f L.$$

Si noti che $H(f)$ corrisponde esattamente all'impedenza $Z(f)$ dell'induttore.

Se l'ingresso $i(t)$ è

$$i(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

l'uscita $v(t)$ può essere calcolata direttamente come

$$v(t) = L \frac{d}{dt} A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = -AL2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t + \theta).$$

In alternativa, si può lavorare in frequenza e calcolare $V(f)$ a partire da $I(f)$ e $H(f)$. Si ha

$$I(f) = \frac{A}{2} [e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0)]$$

e quindi

$$\begin{aligned} V(f) &= H(f)I(f) = H(f) \frac{A}{2} [e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{A}{2} [e^{j\theta} H(f_0) \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} H(-f_0) \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{A}{2} [e^{j\theta} j2\pi f_0 L \delta(f - f_0) - e^{-j\theta} j2\pi f_0 L \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{A2\pi f_0 L}{2} [e^{j\theta} j \delta(f - f_0) - e^{-j\theta} j \delta(f + f_0)] \\ &= \frac{-A2\pi f_0 L}{2j} [e^{j\theta} \delta(f - f_0) - e^{-j\theta} \delta(f + f_0)] \end{aligned}$$

e si ha dunque

$$v(t) = -A2\pi f_0 L \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

Nota: l'unità di misura di $I(f)$ si ricava dalla definizione

$$I(f) = \int i(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

ed è $As = A/Hz$ (il termine $e^{j2\pi f t}$ è adimensionato). L'unità di misura di $V(f)$ è $Vs = V/Hz$. L'unità di misura di $H(f) = V(f)/I(f)$ è V/A . L'unità di misura di $H(f)$ può anche essere calcolata dal suo valore:

$$H(f) = j2\pi f L$$

con L misurata in henry ($H = Vs/A$) e f misurata in Hz : $j2\pi f L$ risulta misurata in $Hz \cdot H = Hz \cdot Vs/A = V/A$. Si noti che $j2\pi$ è adimensionato.

Se l'ingresso del sistema fosse una tensione e l'uscita una corrente, $H(f)$ si misurerebbe in A/V . Se l'ingresso del sistema fosse una tensione e l'uscita una tensione, $H(f)$ sarebbe adimensionato. Se l'ingresso del sistema fosse una corrente e l'uscita una corrente, $H(f)$ sarebbe adimensionato.

2. I due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono riportati nella figura 1.32 Il segnale $z(t)$ è (si veda fig. 1.33)

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t)y(t) = e^{-(t/T)^2} [\delta(t) + \delta(t - T)] \\ &= e^{-(t/T)^2} \delta(t) + e^{-(t/T)^2} \delta(t - T) \\ &= e^{-(t/T)^2} \Big|_{t=0} \delta(t) + e^{-(t/T)^2} \Big|_{t=T} \delta(t - T) \\ &= 1\delta(t) + e^{-1}\delta(t - T) \\ &= \delta(t) + \frac{1}{e}\delta(t - T) \end{aligned}$$

Il sistema ha risposta all'impulso (si veda fig. 1.34)

$$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

L'uscita $w(t)$ del sistema è (si veda fig. 1.35)

$$\begin{aligned} w(t) &= z(t) * h(t) = \left[\delta(t) + \frac{1}{e} \delta(t - T) \right] * h(t) \\ &= \delta(t) * h(t) + \frac{1}{e} \delta(t - T) * h(t) \\ &= h(t) + \frac{1}{e} h(t - T) \end{aligned}$$

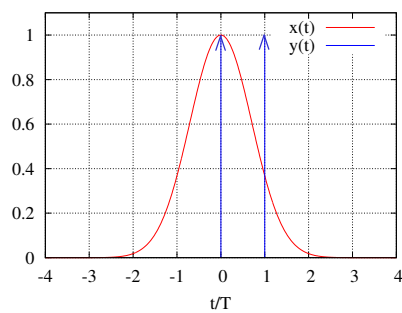


Figura 1.32: Grafici di $x(t)$ e $y(t)$ per l'esercizio 2

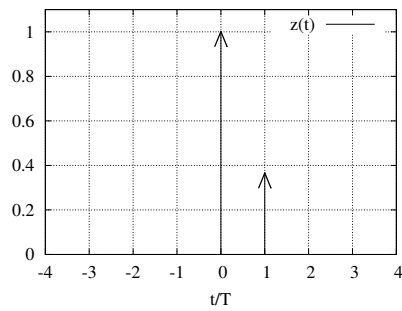


Figura 1.33: Grafico di $z(t)$ per l'esercizio 2

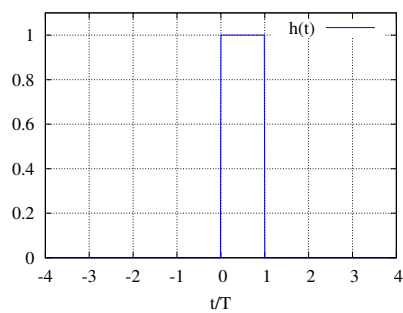


Figura 1.34: Grafico di $h(t)$ per l'esercizio 2

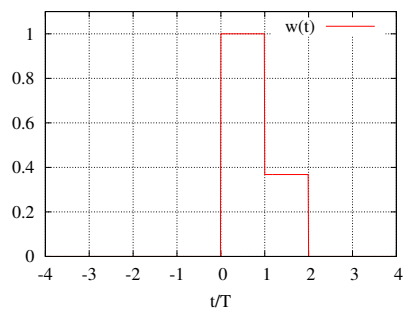


Figura 1.35: Grafico di $w(t)$ per l'esercizio 2

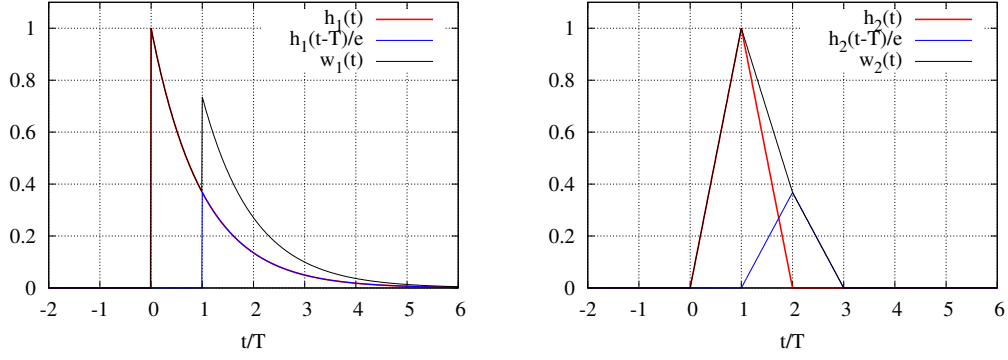


Figura 1.36: Segnali per l'esercizio 3.

3. Nell'esercizio 3, la soluzione è identica fino al calcolo di $z(t)$, mentre cambia $w(t)$, essendo diversa la risposta all'impulso del sistema:

$$h(t) = e^{-t/T} u(t)$$

Si ha

$$z(t) = \delta(t) + \frac{1}{e} \delta(t - T)$$

Per $h(t) = h_1(t)$, si ha

$$\begin{aligned} w_1(t) &= z(t) * h_1(t) = h_1(t) + \frac{1}{e} h_1(t - T) \\ &= e^{-t/T} u(t) + \frac{1}{e} e^{-(t-T)/T} u(t - T) \\ &= e^{-t/T} u(t) + \frac{e}{e} e^{-t/T} u(t - T) \\ &= e^{-t/T} u(t) + e^{-t/T} u(t - T) \\ &= e^{-t/T} [u(t) + u(t - T)] \end{aligned}$$

Per $h(t) = h_2(t)$, si ha

$$w_2(t) = z(t) * h_2(t) = h_2(t) + \frac{1}{e} h_2(t - T)$$

Il segnale $w_2(t)$ è lineare a tratti; in particolare:

$$w_2(t) = \begin{cases} h_2(t) = \frac{t}{T} & t \in [0, T] \\ h_2(t) + \frac{1}{e} h_2(t - T) = 2 - \frac{t}{T} + \frac{1}{e} \frac{t-T}{T} = (2 - \frac{1}{e}) - (1 - \frac{1}{e}) \frac{t}{T} & t \in [T, 2T] \\ \frac{1}{e} h_2(t - T) = \frac{1}{e} [2 - \frac{t-T}{T}] = \frac{1}{e} [3 - \frac{t}{T}] & t \in [2T, 3T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e $w_2(0) = 0$, $w_2(T) = 1$, $w_2(2T) = 1/e$, $w_2(3T) = 0$. I grafici di $w_1(t)$ e $w_2(t)$ sono riportati nella figura 1.36

4. Il segnale all'uscita del sistema è

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

con trasformata di Fourier

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Se si desidera lavorare nel dominio del tempo, occorre calcolare espressamente la convoluzione:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^T x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^T A \cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta) d\tau \\ &= \int_t^{t-T} A \cos(2\pi f_0 u + \theta) (-du) \\ &= \int_{t-T}^t A \cos(2\pi f_0 u + \theta) du \\ &= \left. \frac{A \sin(2\pi f_0 u + \theta)}{2\pi f_0} \right|_{t-T}^t \\ &= A \frac{\sin(2\pi f_0 t + \theta) - \sin(2\pi f_0(t-T) + \theta)}{2\pi f_0} \\ &= A \frac{\sin(2\pi f_0 t + \theta) - \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 T + \theta)}{2\pi f_0} \end{aligned}$$

Il segnale $y(t)$ si annulla se $2\pi f_0 T$ è multiplo di 2π , cioè per i valori di f_0 che risolvono l'equazione

$$2\pi f_0 T = 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}^+$$

$$f_0 T = k, \implies f_0 = \frac{k}{T} \quad k \in \mathbb{N}^+$$

(cioè se $f_0 = 1/T$ oppure $f_0 = 2/T$, ecc, l'uscita $y(t)$ è identicamente nulla).

Se si desidera lavorare nel dominio della frequenza, occorre invece calcolare $X(f)$, trasformata di Fourier di $x(t)$, e $H(f)$, trasf. di Fourier di $h(t)$ e funzione di trasferimento del sistema. Per quanto riguarda $X(f)$:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\{A \cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = \frac{A}{2} \mathcal{F}\{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}\} \\ &= \frac{Ae^{j\theta}}{2} \mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{Ae^{-j\theta}}{2} \mathcal{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} \\ &= \frac{Ae^{j\theta}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{Ae^{-j\theta}}{2} \delta(f + f_0) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $H(f)$:

$$\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_0^T \\
&= \frac{e^{-j2\pi fT} - 1}{-j2\pi f} = e^{-j\pi fT} \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f} \\
&= e^{-j\pi fT} T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}
\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
Y(f) &= H(f)X(f) = H(f) \left[\frac{Ae^{j\theta}}{2} \delta(f - f_0) + \frac{Ae^{-j\theta}}{2} \delta(f + f_0) \right] \\
&= \frac{Ae^{j\theta}}{2} H(f_0) \delta(f - f_0) + \frac{Ae^{-j\theta}}{2} H(-f_0) \delta(f + f_0)
\end{aligned}$$

Poiché la risposta all'impulso del sistema è reale, $H(-f) = H^*(f)$ e quindi

$$H(f_0) = M(f_0)e^{j\psi(f_0)}, \quad H(-f_0) = M(f_0)e^{-j\psi(f_0)}.$$

Ciò consente di scrivere

$$Y(f) = \frac{AM(f_0)}{2} \left[e^{j(\theta+\psi(f_0))} \delta(f - f_0) + e^{-j(\theta+\psi(f_0))} \delta(f + f_0) \right]$$

che corrisponde a

$$y(t) = AM(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \theta + \psi(f_0)). \quad (1.1)$$

Il risultato appena trovato è valido in generale: se l'ingresso $x(t)$ di un sistema LTI fisicamente realizzabile è un segnale sinusoidale ad una data frequenza f_0 , l'uscita $y(t)$ è ancora sinusoidale alla stessa frequenza, ma con una diversa ampiezza e fase. Il rapporto tra l'ampiezza massima di $y(t)$ (cioè $AM(f_0)$ nella (1.1)) e l'ampiezza massima di $x(t)$ (cioè A) è pari al modulo della funzione di trasferimento alla frequenza f_0 . La differenza tra la fase di $y(t)$ (cioè $\theta + \psi(f_0)$ nella (1.1)) e la fase di $x(t)$ (cioè θ) è pari alla fase della funzione di trasferimento alla frequenza f_0 .

Il segnale $y(t)$ si annulla se la frequenza f_0 del segnale d'ingresso $x(t)$ corrisponde esattamente ad uno degli zeri di $H(f)$ (o, equivalentemente di $|H(f)| = M(f)$). Poiché $H(f)$ si annulla per $f = k/T$ con k intero diverso da zero, l'uscita $y(t)$ è nulla se

$$f_0 T = k, \implies f_0 = \frac{k}{T} \quad k \in \mathbb{N}^+$$

In queste condizioni, si ha $H(f_0) = 0$ e $H(f_0)\delta(f - f_0) = 0$; si ha inoltre $H(-f_0) = 0$ e $H(-f_0)\delta(f + f_0) = 0$, cosicché $Y(f) = 0$.

5. In questo caso viene chiesto espressamente di lavorare nel dominio della frequenza. Occorre dunque calcolare la trasformata di Fourier di

$$h(t) = e^{-t/T} u(t).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/T} u(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j2\pi f + 1/T)t} dt \\
&= \left. \frac{e^{-(j2\pi f + 1/T)t}}{-(j2\pi f + 1/T)} \right|_0^{\infty} \\
&= \frac{0 - 1}{-(j2\pi f + 1/T)} = \frac{1}{j2\pi f + 1/T} \\
&= \frac{T}{1 + j2\pi fT}
\end{aligned}$$

Si noti che questa trasformata di Fourier è riportata nelle tavole.

Si ha dunque

$$Y(f) = \frac{AM(f_0)}{2} \left[e^{j(\theta + \psi(f_0))} \delta(f - f_0) + e^{-j(\theta + \psi(f_0))} \delta(f + f_0) \right]$$

Il modulo di $H(f)$ è

$$M(f) = \frac{T}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}}$$

mentre la fase è

$$\psi(f) = -\tan^{-1}(2\pi fT)$$

(vale $\pi/2$ per $f \rightarrow -\infty$ e $-\pi/2$ per $f \rightarrow \infty$).

Il segnale $y(t)$ è

$$y(t) = \frac{AT}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 T)^2}} \cos[2\pi f_0 t + \theta - \tan^{-1}(2\pi f_0 T)]$$

6. Per $t < 0$ il circuito è a riposo e $i(t) = 0$. Per $t \in [0, T]$ il circuito è quello di figura 1.37, retto dall'equazione differenziale:

$$V = v_R(t) + v_L(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$$

dove $v_R(t) = Ri(t)$ è la tensione ai capi del resistore e $v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$ è la tensione ai capi dell'induttore.

Per $t > T$, il circuito è quello di figura 1.38, retto dall'equazione differenziale

$$0 = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$$

Le due equazioni possono essere riunite in un'unica equazione (cfr. Fig. 1.39:

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t) \tag{1.2}$$

dove si è definito

$$v(t) = \begin{cases} V & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si può procedere in due modi: cercare di scrivere $i(t)$ come funzione di $v(t)$ (difficile), oppure utilizzare il concetto di funzione di trasferimento:

$$I(f) = H(f)V(f)$$

dove $I(f)$ e $V(f)$ le trasformate di Fourier di $i(t)$ e $v(t)$. Mentre è possibile calcolare $V(f)$, visto che $v(t)$ è nota, non è possibile calcolare $I(f)$, che va considerata come incognita. L'equazione (1.2) può essere tradotta in una corrispondente equazione tra trasformate di Fourier:

$$V(f) = RI(f) + Lj2\pi fI(f)$$

dove si è utilizzato il risultato ottenuto nell'esercizio 1. Si ottiene allora

$$V(f) = (R + j2\pi fL)I(f), \quad \implies \quad I(f) = \frac{1}{R + j2\pi fL}V(f) = H(f)V(f)$$

Dunque si ha

$$H(f) = \frac{1}{R + j2\pi fL}V(f)$$

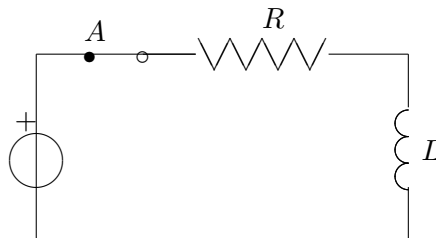


Figura 1.37: Circuito per l'esercizio 6 per $t \in [0, T]$.

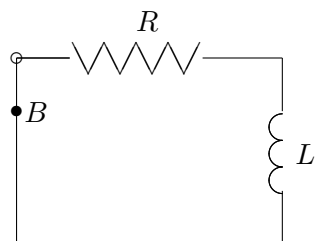


Figura 1.38: Circuito per l'esercizio 6 per $t > T$.

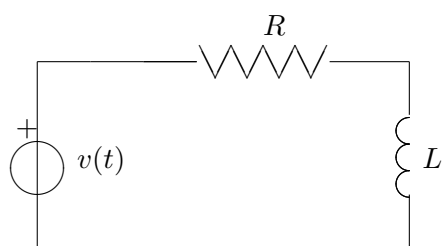


Figura 1.39: Circuito per l'esercizio 6 per $t \in \mathbb{R}$.

Nota: volendo, si può disegnare lo schema a blocchi del sistema equivalente al circuito. Occorre partire dall'equazione

$$V(f) = RI(f) + Lj2\pi fI(f)$$

e riscriverla come

$$\frac{1}{R}V(f) = I(f) + \frac{L}{R}j2\pi fI(f)$$

in modo da far comparire $I(f)$ senza coefficienti. Poi si riscrive l'equazione mettendo $I(f)$ a sinistra e tutto il resto a destra:

$$I(f) = \frac{1}{R}V(f) - \frac{L}{R}j2\pi fI(f) \quad (1.3)$$

A questo punto si può disegnare lo schema a blocchi, partendo con una freccia a sinistra corrispondente all'ingresso $V(f)$ e una freccia a destra corrispondente all'uscita $I(f)$ e completando lo schema sulla base dell'equazione (1.3). Il risultato è lo schema di figura 1.40, corrispondente anche a quello di figura 1.41.

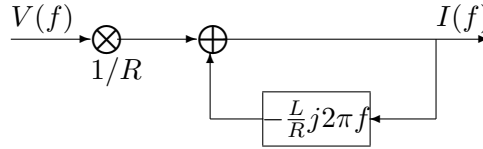


Figura 1.40: Schema a blocchi corrispondente al circuito di Fig. 1.39.

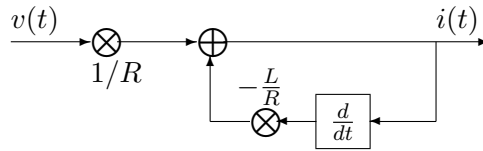


Figura 1.41: Ulteriore schema a blocchi corrispondente al circuito di Fig. 1.39.

1.4 Esercitazione 4

1. Si calcoli la trasformata di Fourier $X(f)$ di

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

e se ne disegni modulo e fase.

2. Si calcoli la trasformata di Fourier $Y(f)$ di

$$y(t) = e^{-|t-t_0|/T}$$

e se ne disegni modulo e fase.

3. Si calcoli la trasformata di Fourier $Z(f)$ di

$$z(t) = e^{-|t|/T} \cos(2\pi f_0 t)$$

e se ne disegni modulo e fase, supponendo $f_0 \gg 1/T$

4. Si calcoli la trasformata di Fourier di

$$x(t) = \begin{cases} 2T - |t| & |t| < T \\ T & t \in [T, 2T] \\ T & t \in [-2T, -T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Si calcoli la risposta all'impulso del sistema (filtro passabasso ideale di banda B) che ha come funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6. Si calcoli la risposta all'impulso del sistema (filtro passabanda ideale di banda $2B$) che ha come funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_0| < B \\ 1 & |f + f_0| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

7. Si calcoli la risposta all'impulso $h(t)$ che si ottiene dalla cascata di due sistemi LTI con risposte all'impulso

$$h_1(t) = e^{-t/T_1} u(t)$$

$$h_2(t) = e^{-t/T_2} u(t)$$

Si consideri prima il caso $T_1 > T_2 > 0$ e poi il caso $T_1 = T_2 = T > 0$. Si disegni qualitativamente il grafico di $h(t)$ nel caso $T_1 = T_2$.

8. Il segnale

$$x(t) = p_{T_1}(t - T_1/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è posto all'ingresso di un sistema con risposta all'impulso

$$h(t) = p_{T_2}(t - T_2/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $T_2 > T_1$. Si calcoli l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del sistema.

9. Il segnale gaussiano $x(t)$

$$x(t) = e^{-(t/T)^2}$$

passa attraverso il filtro passabasso gaussiano con funzione di trasferimento:

$$H(f) = e^{-(f/B)^2} e^{-j2\pi f(10/B)}.$$

Si calcoli l'espressione del segnale all'uscita del filtro.

10. Il segnale rettangolare $x(t)$

$$x(t) = p_T(t - T/2)$$

viene posto all'ingresso del filtro passabanda con risposta all'impulso

$$h(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-t/T} u(t)$$

Si calcoli l'espressione del segnale all'uscita del filtro.

11. Dal segnale

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

si ottiene

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

che passa in una linea di ritardo che introduce un ritardo t_0 . Il segnale all'uscita

$$w(t) = y(t - t_0)$$

viene nuovamente moltiplicato per $\cos(2\pi f_0 t)$ ottenendo il segnale $v(t)$, che viene fatto passare attraverso un filtro passabasso ideale. Per quale valore del ritardo t_0 l'uscita $z(t)$ del filtro passabasso è nulla?

Soluzione

1. Il segnale $x(t)$ (riportato in fig. 1.42) è sostanzialmente presente nelle tavole delle trasformate di Fourier (caso 3), dove si legge:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Il segnale assegnato

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

si ottiene ponendo $a = 1/T$. Si può dunque calcolare la trasformata di Fourier richiesta come segue:

$$X(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \Big|_{a=1/T} = \frac{2/T}{1/T^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}.$$

Il grafico di $X(f) = |X(f)|$ è riportato nella figura 1.43. Si può comunque ottenere facilmente $X(f)$ utilizzando la definizione di trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{t/T} e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1/T - j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-1/T - j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{e^{(1/T - j2\pi f)t}}{(1/T - j2\pi f)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{(-1/T - j2\pi f)t}}{(-1/T - j2\pi f)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(1/T - j2\pi f)} + \frac{-1}{(-1/T - j2\pi f)} \\ &= \frac{T}{(1 - j2\pi fT)} + \frac{T}{(1 + j2\pi fT)} \\ &= T \frac{1 - j2\pi fT + 1 + j2\pi fT}{(1 - j2\pi fT)(1 + j2\pi fT)} \\ &= T \frac{2}{1 + (2\pi fT)^2} \end{aligned}$$

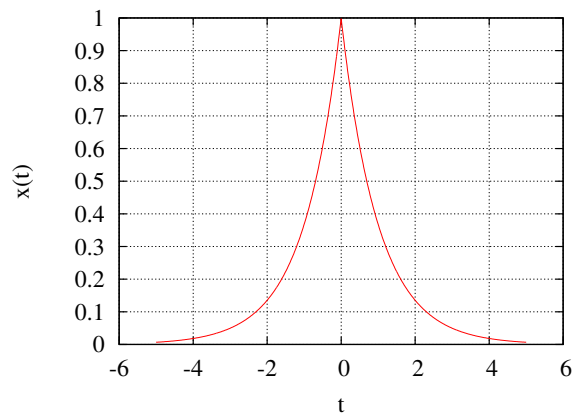


Figura 1.42: Grafico di $x(t)$ per l'esercizio 1, con $T = 1$.

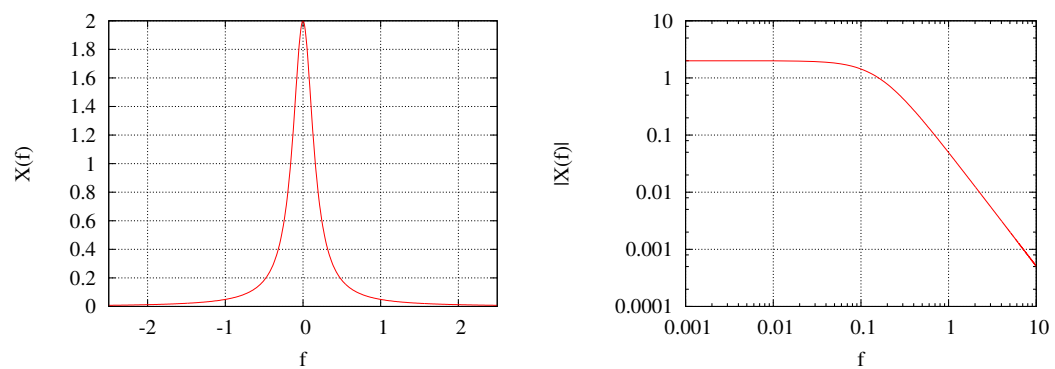


Figura 1.43: Grafico di $|X(f)| = X(f)$ per l'esercizio 1, con $T = 1$, in scale naturali e logaritmiche.

2. Il segnale assegnato

$$y(t) = e^{-|t-t_0|/T}$$

può essere visto come il segnale all'uscita di un ritardatore (con ritardo t_0 , risposta all'impulso $h(t) = \delta(t - t_0)$) avente all'ingresso il segnale

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

Si ha dunque

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

e

$$Y(f) = X(f)H(f).$$

La funzione di trasferimento del ritardatore è

$$H(f) = \mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int \delta(t - t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \int \delta(t - t_0)e^{-j2\pi ft_0}dt = e^{-j2\pi ft_0}$$

mentre $X(f)$ è stata calcolata nella soluzione dell'esercizio 1:

$$X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

La trasformata di Fourier di $y(t)$ è dunque

$$Y(f) = H(f)X(f) = e^{-j2\pi ft_0} \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

3. Il segnale $z(t)$

$$z(t) = e^{-|t|/T} \cos(2\pi f_0 t)$$

è il prodotto tra i due segnali

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

$$w(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Si ha dunque (trasformata di Fourier del prodotto di due segnali è pari alla convoluzione delle rispettive trasformate di Fourier)

$$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)w(t)\} = X(f) * W(f)$$

dove

$$X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

$$W(f) = \mathcal{F}\{w(t)\} = \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Si ha

$$Z(f) = X(f) * W(f) = X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{T}{1 + [2\pi(f - f_0)T]^2} + \frac{T}{1 + [2\pi(f + f_0)T]^2}$$

Il grafico di $Z(f)$ è riportato in Fig. 1.44.

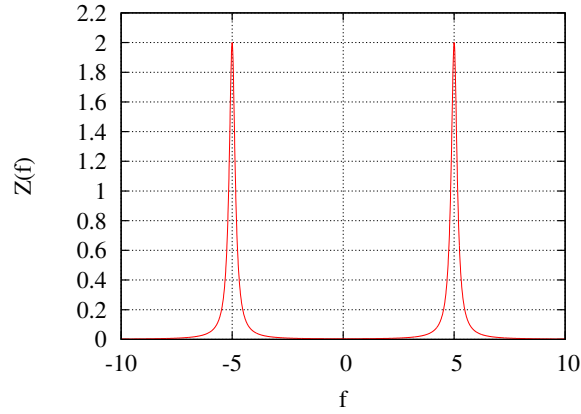


Figura 1.44: Trasformata di Fourier $Z(f)$ per l'esercizio 3.

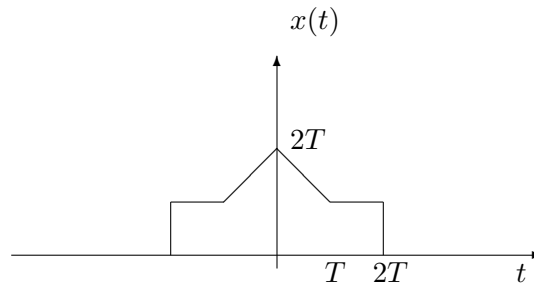


Figura 1.45: Segnale $x(t)$ per l'esercizio 4.

4. Il segnale assegnato, il cui grafico è riportato in figura 1.45,

$$x(t) = \begin{cases} 2T - |t| & |t| < T \\ T & t \in [T, 2T] \\ T & t \in [-2T, -T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

può essere visto come la somma dei seguenti due segnali:

$$x_1(t) = \begin{cases} T - |t| & |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} T & t \in [-2T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = p_{4T}(t)$$

La trasformata richiesta può essere calcolata come

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \mathcal{F}\{x_2(t)\} = X_1(f) + X_2(f)$$

Il segnale $x_1(t)$ ha andamento triangolare (funzione pari) e vale T in $t = 0$, e 0 per $t = \pm T$; può dunque essere scritto come

$$x_1(t) = T \operatorname{tri}(t/T)$$

dove il segnale $\text{tri}(t/T)$ è presente nelle tavole delle trasformate di Fourier (caso 25):

$$\mathcal{F}\{\text{tri}(t/T)\} = T \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2.$$

Pertanto si ha

$$X_1(f) = T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2.$$

Il segnale $x_2(t)$ è anch'esso presente nelle tavole delle trasformate di Fourier (caso 23) dove si legge:

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}.$$

In realtà la trasformata di Fourier di $x_2(t)$ si ottiene sostituendo al valore T delle tavole il valore $4T$:

$$X_2(f) = 4T \frac{\sin(4\pi f T)}{4\pi f T}.$$

La trsformata richiesta è dunque

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = T^2 \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2 + 4T \frac{\sin(4\pi f T)}{4\pi f T}.$$

5. Da

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

occorre calcolare $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$. La funzione di trasferimento assegnata vale 1 nell'intervallo di frequenze $[-B, B]$, e 0 altrove (si veda Fig. 1.46); in sostanza $H(f) = p_{2B}(f)$. Si può procedere in due modi: utilizzare le tavole o calcolare l'antitrasformata di Fourier in base alla definizione. Dalle tavole (caso 23), si ha

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}\right\} = p_{1/T}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < 1/(2T) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La trasformata delle tavole coincide con $H(f)$ ponendo $B = 1/(2T)$ (cioè $T = 1/(2B)$). Si ha dunque

$$h(t) = \left. \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \right|_{T=1/(2B)} = \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi t} = 2B \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t}$$

Il calcolo diretto di $h(t)$ non è difficile:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-B}^B e^{j2\pi f t} df \\ &= \left. \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right|_{-B}^B = \frac{e^{j2\pi B t} - e^{-j2\pi B t}}{j2\pi t} \\ &= \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi t} = 2B \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t} \end{aligned}$$

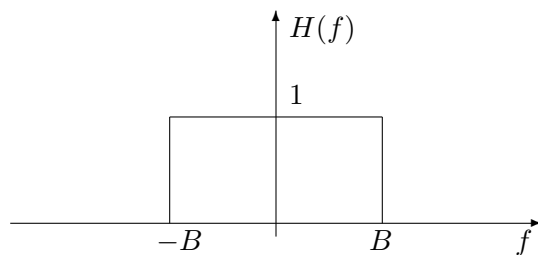


Figura 1.46: Funzione di trasferimento $H(f)$ per il filtro passbasso ideale di banda B , esercizio 5.

6. La funzione di trasferimento assegnata

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_0| < B \\ 1 & |f + f_0| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

vale 1 nell'intervallo di frequenze $[-f_0 - B, -f_0 + B]$ e nell'intervallo di frequenze $[f_0 - B, f_0 + B]$, mentre vale 0 altrove. Pertanto $H(f)$ può essere vista come

$$H(f) = H_L(f - f_0) + H_L(f + f_0)$$

dove

$$H_L(f) = p_{2B}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con antitrasformata (calcolata nell'esercizio 5)

$$h_L(t) = 2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}.$$

Si può scrivere

$$\begin{aligned} H(f) &= H_L(f) * \delta(f - f_0) + H_L(f) * \delta(f + f_0) \\ &= H_L(f) * [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ &= 2H_L(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ &= 2\mathcal{F}\{h_L(t)\} * \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} \\ &= 2\mathcal{F}\{h_L(t) \cos(2\pi f_0 t)\} \end{aligned}$$

che porta al risultato finale:

$$h(t) = 2h_L(t) \cos(2\pi f_0 t) = 4B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \cos(2\pi f_0 t)$$

7. Occorre calcolare

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

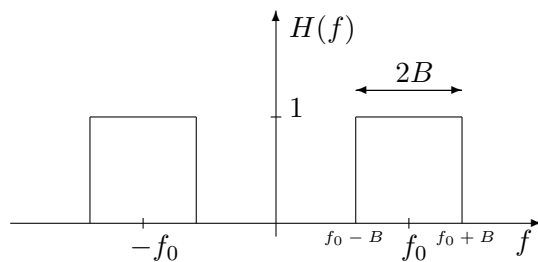


Figura 1.47: Funzione di trasferimento $H(f)$ per il filtro passbanda ideale di banda $2B$ e frequenza centrale f_0 , esercizio 6.

con

$$h_1(t) = e^{-t/T_1} u(t)$$

$$h_2(t) = e^{-t/T_2} u(t).$$

Si può pensare di lavorare in frequenza calcolando prima

$$H(f) = H_1(f)H_2(f)$$

e poi calcolando l'antitrasformata di $H(f)$. Dalle tavole (caso 1, ponendo $a = 1/T_1$ e $a = 1/T_2$) si può calcolare facilmente $H_1(f)$ e $H_2(f)$:

$$H_1(f) = \frac{1}{1/T_1 + j2\pi f}$$

$$H_2(f) = \frac{1}{1/T_2 + j2\pi f}$$

e, di conseguenza, si ottiene subito

$$H(f) = H_1(f)H_2(f) = \frac{1}{1/T_1 + j2\pi f} \frac{1}{1/T_2 + j2\pi f}$$

ma questa trasformata non compare nelle tavole in questa forma. In realtà, se $T_1 = T_2 = T$, si ha

$$H(f) = \frac{1}{(1/T + j2\pi f)^2}$$

e questa trasformata sostanzialmente presente nelle tavole (caso 2) dove si legge:

$$\mathcal{F}\{ate^{-at}u(t)\} = \frac{a}{(a + j2\pi f)^2}.$$

Si ha dunque

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a}{(a + j2\pi f)^2}\right\} = \frac{1}{a}[ate^{-at}u(t)] = te^{-at}u(t)$$

Ponendo $a = 1/T$, si ottiene

$$h(t) = te^{-at}u(t)\big|_{a=1/T} = te^{-t/T}u(t).$$

Pertanto, per il caso $T_1 = T_2 = T$, si può lavorare in frequenza, ma il metodo non può essere esteso al caso più generale in cui $T_1 > T_2$, dove occorre necessariamente calcolare la convoluzione.

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau$$

Per $t < 0$, $h_1(\tau)$ e $h_2(\tau)$ non hanno intervalli comuni in cui entrambi sono diversi da zero e quindi $h(t) = 0$. Per $t > 0$, $h_2(t - \tau)$ è diversa da zero per $\tau < t$ e il prodotto $h_1(\tau)h_2(t - \tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [0, t]$ e quindi

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{-\tau/T_1} u(\tau) e^{-(t-\tau)/T_2} u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau/T_1} e^{-(t-\tau)/T_2} d\tau = e^{-t/T_2} \int_0^t e^{-\tau/T_1} e^{\tau/T_2} d\tau \\ &= e^{-t/T_2} \int_0^t e^{(1/T_2 - 1/T_1)\tau} d\tau \end{aligned}$$

Se $T_1 = T_2 = T$, la funzione integranda vale 1 e si ottiene quanto già ottenuto e cioè

$$h(t) = e^{-t/T} \int_0^t d\tau = te^{-t/T}.$$

Se invece $T_1 > T_2$ si ha

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-t/T_2} \int_0^t e^{(1/T_2 - 1/T_1)\tau} d\tau = e^{-t/T_2} \left. \frac{e^{(1/T_2 - 1/T_1)\tau}}{(1/T_2 - 1/T_1)} \right|_0^t \\ &= e^{-t/T_2} \frac{e^{(1/T_2 - 1/T_1)t} - 1}{(1/T_2 - 1/T_1)} \\ &= \frac{e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}}{(1/T_2 - 1/T_1)} \\ &= \frac{T_2 T_1}{T_1 - T_2} \left[e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right] \end{aligned}$$

La figura 1.48 riporta il grafico di $h(t)$ per i casi $T_2 = 1$ e $T_1 = 1, 2, 10$.

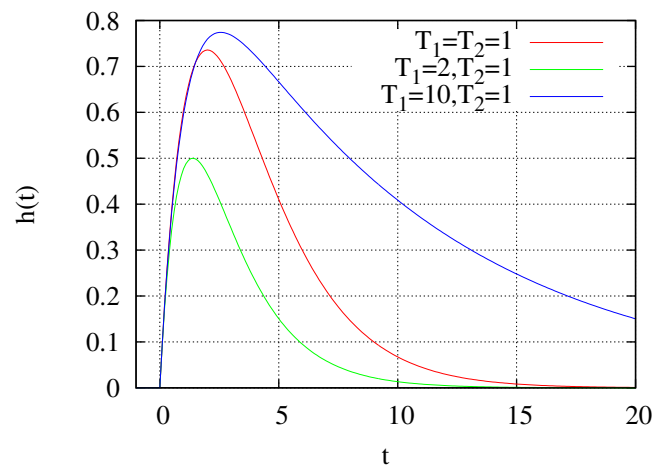


Figura 1.48: Grafici di $h(t)$ per i casi $T_2 = 1$ e $T_1 = 1, 2, 10$, esercizio 7.

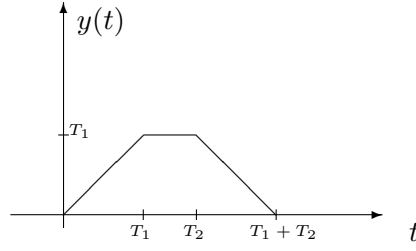


Figura 1.49: Convoluzione $y(t) = p_{T_1}(t - T_1/2) * p_{T_2}(t - T_2/2)$ con $T_2 > T_1$.

8. In questo caso conviene lavorare nel dominio del tempo:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

dove $x(\tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [0, T_1]$, mentre $h(t - \tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [t - T_2, t]$. Si ricordi che $T_2 > T_1$.

Per $t < 0$, l'uscita $y(t)$ è nulla.

Per $t \in [0, T_1]$ la funzione integranda è diversa da zero (e pari a 1) per $\tau \in [0, t]$ e si ha

$$y(t) = \int_0^t d\tau = t$$

Per $t \in [T_1, T_2]$, $h(t - \tau)$ è pari a 1 per tutti i valori di τ per cui $x(\tau) = 1$ e

$$y(t) = \int_0^{T_1} d\tau = T_1$$

Per $t \in [T_2, T_1 + T_2]$, $h(t - \tau)$ vale 1 per $\tau \in [t - T_2, t]$ con estremo inferiore $t - T_2$ positivo ma minore di T_1 e estremo superiore maggiore di T_2 . Si ha allora

$$y(t) = \int_{t-T_2}^{T_1} d\tau = T_1 - (t - T_2) = T_1 + T_2 - t.$$

Per $t > T_1 + T_2$, $h(t - \tau)$ vale 1 per $\tau \in [t - T_2, t]$ con estremo inferiore $t - T_2$ positivo ma maggiore di T_1 , cosicché la funzione integranda è nulla e $y(t) = 0$.

In sostanza $y(t)$ ha la forma di un trapezio isoscele con altezza T_1 , base maggiore $t \in [0, T_1 + T_2]$, base minore $t \in [T_1, T_2]$ (si veda Fig. 1.49).

9. Conviene lavorare in frequenza: dalle tavole delle trasformate di Fourier si ha (caso 28)

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-t^2/(2T_o^2)} \right\} = T_o \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 f^2 T_o^2}$$

mentre si deve calcolare la trasformata di Fourier di

$$x(t) = e^{-(t/T)^2}.$$

Si ottiene la trasformata desiderata ponendo $T_o = T/\sqrt{2}$:

$$X(f) = \frac{T}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} e^{-\pi^2 f^2 T^2} = T \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2 T^2}.$$

All'uscita del filtro passabasso con funzione di trasferimento:

$$H(f) = e^{-(f/B)^2} e^{-j2\pi f(10/B)}.$$

si ha

$$Y(f) = H(f)X(f) = e^{-(f/B)^2} e^{-j2\pi f(10/B)} T\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2 T^2} = T\sqrt{\pi} e^{-j2\pi f(10/B)} e^{-f^2(\pi^2 T^2 + 1/B^2)}.$$

Si riconosce ancora una funzione gaussiana ($e^{-\alpha^2 f^2}$), di cui è possibile calcolare l'antitrasformata utilizzando ancora il caso 28 delle tavole delle trasformate, ed un esponenziale complesso, che è riconducibile ad un ritardo. Il segnale d'uscita $y(t)$ può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} y(t) &= T\sqrt{\pi}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-j2\pi f(10/B)}\right\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-f^2(\pi^2 T^2 + 1/B^2)}\right\} \\ &= T\sqrt{\pi}\delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2\pi^2 f^2(T^2/2 + 1/(2\pi^2 B^2))}\right\} \\ &= T\sqrt{\pi}\delta\left(t - \frac{10}{B}\right) * \left(\frac{1}{T_o\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/(2T_o^2)}\right) \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}T_o} e^{-(t-10/B)^2/(2T_o^2)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove adesso

$$T_o = \sqrt{\frac{T^2}{2} + \frac{1}{2\pi^2 B^2}} \quad (1.5)$$

10. In questo caso la trasformata di Fourier di $x(t)$ è di tipo $\sin(x)/x$ e $H(f)$ è piuttosto complessa; conviene pertanto calcolare l'uscita del sistema lavorando nel dominio del tempo:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Il segnale $x(t-\tau)$ è una funzione di τ pari a 1 nell'intervallo $\tau \in [t-T, t]$ e nulla altrove; $h(\tau)$ è nulla per $\tau < 0$.

Per $t < 0$, l'uscita $y(t)$ è nulla.

Per $t \in [0, T]$, l'uscita è¹

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau = \int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau) e^{-\tau/T} d\tau \\
&= \int_0^t \Im \left\{ e^{j2\pi f_0 \tau} \right\} e^{-\tau/T} d\tau = \Im \int_0^t \left\{ e^{(j2\pi f_0 - 1/T)\tau} \right\} d\tau \\
&= \Im \left\{ \left. \frac{e^{(j2\pi f_0 - 1/T)\tau}}{[j2\pi f_0 - 1/T]} \right|_0^t \right\} = \Im \left\{ \frac{e^{(j2\pi f_0 - 1/T)t} - 1}{[j2\pi f_0 - 1/T]} \right\} \\
&= \Im \left\{ \frac{[e^{j2\pi f_0 t - t/T} - 1] [-j2\pi f_0 - 1/T]}{[j2\pi f_0 - 1/T] [-j2\pi f_0 - 1/T]} \right\} \\
&= \frac{-\Im \{ j2\pi f_0 (e^{-t/T} e^{j2\pi f_0 t} - 1) \} - \Im \{ e^{-t/T} e^{j2\pi f_0 t} - 1 \} / T}{(2\pi f_0)^2 + (1/T)^2} \\
&= \frac{-2\pi f_0 e^{-t/T} \cos(2\pi f_0 t) + 2\pi f_0 - e^{-t/T} \sin(2\pi f_0 t) / T}{(2\pi f_0)^2 + (1/T)^2} \\
&= \frac{2\pi f_0 T^2 - e^{-t/T} [2\pi f_0 T^2 \cos(2\pi f_0 t) + T \sin(2\pi f_0 t)]}{1 + (2\pi f_0 T)^2}
\end{aligned}$$

¹Negli integrali si e' preferito sostituire a $\sin(2\pi f_0 \tau)$ la sua espressione come parte immaginaria di $e^{j2\pi f_0 \tau}$, scritto come $\Im \{ e^{j2\pi f_0 \tau} \}$

Per $t > T$, l'uscita è

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t-T}^t h(\tau) d\tau = \int_{t-T}^t \sin(2\pi f_0 \tau) e^{-\tau/T} d\tau = \Im \left\{ \int_{t-T}^t e^{j2\pi f_0 \tau - \tau/T} d\tau \right\} \\
&= \Im \left\{ \left. \frac{e^{j2\pi f_0 \tau - \tau/T}}{[j2\pi f_0 - 1/T]} \right|_{t-T}^t \right\} = \Im \left\{ \frac{e^{t[j2\pi f_0 - 1/T]} - e^{(t-T)[j2\pi f_0 - 1/T]}}{[j2\pi f_0 - 1/T]} \right\} \\
&= \Im \left\{ \frac{e^{t[j2\pi f_0 - 1/T]}}{[j2\pi f_0 - 1/T]} [1 - e^{-T[j2\pi f_0 - 1/T]}] \right\} = \Im \left\{ \frac{e^{-t/T} e^{j2\pi f_0 t}}{[j2\pi f_0 - 1/T]} [1 - e^{-[j2\pi f_0 T - 1]}] \right\} \\
&= \Im \left\{ \frac{e^{-t/T} e^{j2\pi f_0 t}}{[j2\pi f_0 - 1/T][-j2\pi f_0 - 1/T]} [1 - e^{-[j2\pi f_0 T - 1]}] [-j2\pi f_0 - 1/T] \right\} \\
&= \frac{T e^{-t/T}}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \Im \left\{ e^{j2\pi f_0 t} [1 - e^{-[j2\pi f_0 T - 1]}] [-j2\pi f_0 T - 1] \right\} \\
&= \frac{T e^{-t/T}}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \Im \left\{ e^{j2\pi f_0 t} [-1 + e^{-[j2\pi f_0 T - 1]} - j2\pi f_0 T + j2\pi f_0 T e^{-[j2\pi f_0 T - 1]}] \right\} \\
&= \frac{T e^{-t/T}}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \Im \left\{ e^{j2\pi f_0 t} [-1 + e \cos(2\pi f_0 T) - j e \sin(2\pi f_0 T) - j2\pi f_0 T \right. \\
&\quad \left. + j2\pi f_0 T e [\cos(2\pi f_0 T) - j \sin(2\pi f_0 T)]] \right\} \\
&= \frac{T e^{-t/T}}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \Im \left\{ e^{j2\pi f_0 t} [-1 + e \cos(2\pi f_0 T) + 2\pi f_0 T e \sin(2\pi f_0 T) \right. \\
&\quad \left. - j e \sin(2\pi f_0 T) - j2\pi f_0 T + j2\pi f_0 T e \cos(2\pi f_0 T)] \right\} \\
&= \frac{T e^{-t/T}}{1 + (2\pi f_0 T)^2} \{ \cos(2\pi f_0 t) [-e \sin(2\pi f_0 T) - 2\pi f_0 T + 2\pi f_0 T e \cos(2\pi f_0 T)] \\
&\quad + \sin(2\pi f_0 t) [-1 + e \cos(2\pi f_0 T) + 2\pi f_0 T e \sin(2\pi f_0 T)] \}
\end{aligned}$$

11. Il sistema è descritto dallo schema a blocchi della figura 1.50; si noti che il sistema compreso tra l'ingresso $x(t)$ e l'uscita $z(t)$ è lineare ma non è tempo invariante e quindi non se ne può calcolare una risposta all'impulso o una funzione di trasferimento. Occorre procedere passo passo, analizzando i singoli segnali. Dal segnale

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

si ottiene

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

che passa in una linea di ritardo che introduce un ritardo t_0 . Il segnale all'uscita

$$w(t) = y(t - t_0)$$

viene nuovamente moltiplicato per $\cos(2\pi f_0 t)$ ottenendo il segnale $v(t)$. L'espressione del segnale $v(t)$ è dunque

$$v(t) = w(t) \cos(2\pi f_0 t) = y(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t) = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0(t - t_0)) \cos(2\pi f_0 t).$$

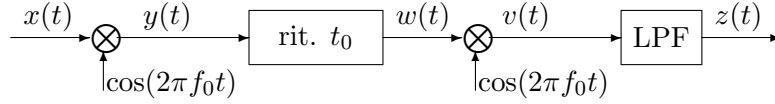


Figura 1.50: Schema a blocchi del sistema descritto nell'esercizio 7 (LPF corrisponde a Low Pass Filter, filtro passa-basso).

Per capire che cosa succede all'uscita del filtro passabasso successivo, occorre conoscere la trasformata $V(f)$ di $v(t)$. Si può calcolare $V(f)$ in vari modi; ad esempio si può seguire la catena da $x(t)$ a $v(t)$ applicando le proprietà delle trasformate di Fourier:

$$X(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

$$Y(f) = X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$W(f) = Y(f)e^{-j2\pi ft_0} = \frac{e^{-j2\pi ft_0}}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$\begin{aligned} V(f) &= W(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2}[W(f - f_0) + W(f + f_0)] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ e^{-j2\pi(f-f_0)t_0} [X(f - 2f_0) + X(f)] + e^{-j2\pi(f+f_0)t_0} [X(f) + X(f + 2f_0)] \right\} \\ &= \frac{e^{-j2\pi ft_0}}{4} \left\{ e^{j2\pi f_0 t_0} [X(f - 2f_0) + X(f)] + e^{-j2\pi f_0 t_0} [X(f) + X(f + 2f_0)] \right\} \\ &= \frac{e^{-j2\pi ft_0}}{4} \left\{ e^{j2\pi f_0 t_0} X(f - 2f_0) + e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f + 2f_0) + (e^{j2\pi f_0 t_0} + e^{-j2\pi f_0 t_0}) X(f) \right\} \\ &= \frac{e^{-j2\pi ft_0}}{4} \left\{ e^{j2\pi f_0 t_0} X(f - 2f_0) + e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f + 2f_0) \right\} \\ &\quad + \frac{e^{-j2\pi ft_0}}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) X(f) \end{aligned}$$

In alternativa si può lavorare nel dominio del tempo:

$$v(t) = x(t - t_0) \cos(2\pi f_0(t - t_0)) \cos(2\pi f_0 t),$$

lavorando sul prodotto dei due coseni. Ricordando che

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0(t - t_0)) \cos(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2}[\cos(2\pi f_0(2t - t_0)) + \cos(2\pi f_0 t_0)] \\ &= \frac{1}{2}[\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) + \cos(2\pi f_0 t_0)] \end{aligned}$$

e quindi

$$v(t) = \frac{1}{2} [x(t - t_0) \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) + x(t - t_0) \cos(2\pi f_0 t_0)].$$

Allora

$$V(f) = \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} * \mathcal{F}\{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)\} + \cos(2\pi f_0 t_0) \mathcal{F}\{x(t - t_0)\}]$$

e si noti che $2\pi f_0 t_0$ è una fase costante (dipende dai parametri f_0 e t_0 ma, noti questi, è nota la fase) e $\cos(2\pi f_0 t_0)$ è una costante.

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)\} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{j(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)} + e^{-j(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0)}\} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-j2\pi f_0 t_0} \delta(f - 2f_0) + e^{j2\pi f_0 t_0} \delta(f + 2f_0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{2} X(f) e^{-j2\pi f t_0} * \frac{1}{2} \left[e^{-j2\pi f_0 t_0} \delta(f - 2f_0) + e^{j2\pi f_0 t_0} \delta(f + 2f_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) X(f) e^{-j2\pi f t_0} \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f - 2f_0) e^{-j2\pi(f-2f_0)t_0} + e^{j2\pi f_0 t_0} X(f + 2f_0) e^{-j2\pi(f+2f_0)t_0} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) X(f) e^{-j2\pi f t_0} \\ &= \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{4} \left[e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f - 2f_0) e^{+j2\pi 2f_0 t_0} + e^{j2\pi f_0 t_0} X(f + 2f_0) e^{-j2\pi 2f_0 t_0} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) X(f) e^{-j2\pi f t_0} \\ &= \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{4} \left[e^{j2\pi f_0 t_0} X(f - 2f_0) + e^{-j2\pi f_0 t_0} X(f + 2f_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) X(f) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned}$$

All'uscita del filtro passabasso si ha

$$Z(f) = V(f)H(f)$$

e, se la banda B del filtro passabasso è minore di f_0 (basta che si minore di $2f_0 - B_x$ dove B_x è la banda di $X(f)$), si ha

$$Z(f) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

corrispondente a

$$z(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t_0) x(t - t_0).$$

Il segnale $z(t)$ è nullo se

$$\cos(2\pi f_0 t_0) = 0, \implies 2\pi f_0 t_0 = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

cioè se

$$t_0 = \frac{1}{4f_0} + \frac{k}{2f_0}, \quad k \in \mathbb{N}$$

1.5 Esercitazione 5

1. Il filtro passbasso gaussiano ha funzione di trasferimento:

$$H(f) = e^{-(f/B)^2} e^{-j2\pi f(10/B)}.$$

- (a) Qual è la banda a -3 dB del filtro?
 - (b) Qual è la banda a -20 dB del filtro?
2. Si dimostri che la funzione di autocorrelazione di un segnale reale ad energia finita è una funzione pari.
 3. Si dimostri che le funzioni di autocorrelazione dei segnali $x(t)$ e $y(t) = x(t - t_0)$ sono identiche ($x(t)$ segnale reale ad energia finita).
 4. Si trovi la relazione tra l'energia \mathcal{E}_x di un segnale $x(t)$ (ad energia finita) e l'energia \mathcal{E}_y del segnale $y(t) = x(2t)$.
 5. Si trovi la relazione tra l'energia \mathcal{E}_x di un segnale $x(t)$ (ad energia finita) e l'energia \mathcal{E}_y del segnale $y(t) = x(t/2)$.
 6. Si calcolino l'energia e la funzione di autocorrelazione del segnale

$$x(t) = e^{-|t|/T}$$

7. Si calcolino l'energia e la funzione di autocorrelazione del segnale

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

8. Si calcoli l'energia del segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) p_T(t - T/2), \quad f_0 = 10/T$$

e si fornisca l'espressione matematica del segnale $y(t)$ proporzionale a $x(t)$ ma con energia unitaria (normalizzato).

Soluzione

1. La banda B_3 a -3 dB (nota: $10 \log_{10} 2 = 3$) del filtro si calcola risolvendo l'equazione

$$|H(B_3)|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2.$$

In questo caso

$$|H(f)|^2 = e^{-2(f/B)^2}$$

e quindi

$$e^{-2(B_3/B)^2} = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad B_3 = B \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \simeq 0.588B$$

La banda B_{20} a -20 dB (nota: $10 \log_{10} 100 = 20$) del filtro si calcola risolvendo l'equazione

$$|H(B_{20})|^2 = \frac{1}{100} |H(0)|^2.$$

e quindi

$$e^{-2(B_{20}/B)^2} = \frac{1}{100}, \quad \Rightarrow \quad B_{20} = B \sqrt{\frac{\ln 100}{2}} \simeq 1.517B$$

2. Occorre dimostrare che la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ gode della proprietà

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau).$$

Per un segnale ad energia finita la funzione di autocorrelazione è calcolabile come

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Si ha

$$\begin{aligned} R_x(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+\tau)x(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)dt = R_x(\tau) \end{aligned}$$

In alternativa, si può effettuare la dimostrazione in frequenza:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \int |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{-j2\pi f\tau} df = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \right]^* = [R_x(\tau)]^* = R_x(\tau)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, essendo $x(t)$ reale, la sua funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ è reale.

3. In questo caso partiamo dalla dimostrazione in frequenza:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f), \quad \mathcal{F}\{y(t)\} = Y(f) = \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2, \quad S_y(f) = |Y(f)|^2 = \left| X(f)e^{-j2\pi f t_0} \right|^2 = |X(f)|^2 = S_x(f)$$

Poiché $S_x(f) = S_y(f)$, allora $R_x(f) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = R_y(f) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\}$.

Volendo lavorare nel dominio del tempo, si ha invece:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)x(t - t_0 + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(u + \tau)du = R_x(\tau)$$

Si noti che $y(t)$ ha la stessa energia di $x(t)$, essendo semplicemente ritardato.

4. In base alla definizione di energia si ha

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(2t)dt$$

Con il cambio di variabile $2t = u$ si ottiene

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\mathcal{E}_x$$

Il risultato è facilmente verificabile nel caso in cui $x(t) = p_T(t)$, visto che $y(t) = x(2t) = p_{T/2}(t)$ ha la stessa ampiezza ma durata dimezzata.

5. In base alla definizione di energia si ha

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t/2)dt$$

Con il cambio di variabile $t/2 = u$ si ottiene

$$\mathcal{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(u)2du = 2\mathcal{E}_x$$

Il risultato è facilmente verificabile nel caso in cui $x(t) = p_T(t)$, visto che $y(t) = x(t/2) = p_{2T}(t)$ ha la stessa ampiezza ma durata doppia.

6. L'energia del segnale è

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|/T}dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2t/T}dt + \int_0^{\infty} e^{-2t/T}dt \\ &= \left. \frac{e^{2t/T}}{2/T} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-2t/T}}{-2/T} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{T}{2} + \frac{T}{2} = T \end{aligned}$$

La funzione di autocorrelazione per un segnale ad energia finita è

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Essendo $x(t)$ un segnale reale, valgono le seguenti proprietà:

- il massimo di $R_x(\tau)$ si ha per $\tau = 0$ e corrisponde all'energia \mathcal{E}_x del segnale, cioè $R_x(\tau) \leq R_x(0) = \mathcal{E}_x$
- $R_x(\tau)$ è una funzione pari, cioè $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

In sostanza, è sufficiente calcolare $R_x(\tau)$ per $\tau \geq 0$ per poter rispondere alle domande.

Il segnale $x(t)$ ha il massimo in $t = 0$ e

$$x(t) = e^{-|t|/T} = \begin{cases} e^{-t/T} & t \geq 0 \\ e^{t/T} & t < 0 \end{cases}$$

Il segnale $x(t+\tau)$ è anticipato di τ rispetto a $x(t)$ e ha il massimo in $t = -\tau$, essendo τ (per nostra scelta) positivo, il massimo è in $t = -\tau < 0$.

L'integrale va dunque calcolato separando ciò che succede per $t < -\tau$, ciò che succede nell'intervallo $[-\tau, 0]$ e ciò che succede per $t > 0$. Questa distinzione va fatta perché l'espressione matematica di $x(t)$ o $x(t+\tau)$ cambia nei tre sottointervalli. Si ha, per $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int x(t)x(t+\tau)dt = \int e^{-|t|/T} e^{-|t+\tau|/T} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{-|t|/T} e^{-|t+\tau|/T} dt + \int_{-\tau}^0 e^{-|t|/T} e^{-|t+\tau|/T} dt + \int_0^{\infty} e^{-|t|/T} e^{-|t+\tau|/T} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{t/T} e^{(t+\tau)/T} dt + \int_{-\tau}^0 e^{t/T} e^{-(t+\tau)/T} dt + \int_0^{\infty} e^{-t/T} e^{-(t+\tau)/T} dt \\ &= e^{\tau/T} \int_{-\infty}^{-\tau} e^{2t/T} dt + e^{-\tau/T} \int_{-\tau}^0 dt + e^{-\tau/T} \int_0^{\infty} e^{-2t/T} dt \\ &= e^{\tau/T} \left. \frac{e^{2t/T}}{2/T} \right|_{-\infty}^{-\tau} + \tau e^{-\tau/T} + e^{-\tau/T} \left. \frac{e^{-2t/T}}{-2/T} \right|_0^{\infty} \\ &= T e^{\tau/T} \frac{e^{-2\tau/T}}{2} + \tau e^{-\tau/T} + T e^{-\tau/T} \frac{1}{2} = T e^{-\tau/T} + \tau e^{-\tau/T} = e^{-\tau/T} (T + \tau) \end{aligned}$$

L'espressione di $R_x(\tau)$ valida per qualsiasi valore di τ diventa dunque:

$$R_x(\tau) = e^{-|\tau|/T} (T + |\tau|).$$

Conviene (non è obbligatorio) controllare il risultato precedente verificando che sia $R_x(0) = \mathcal{E}_x = T$:

$$R_x(\tau) = T = \mathcal{E}_x$$

In teoria, il problema poteva essere risolto anche nel dominio della frequenza, essendo lo spettro di energia di $x(t)$ la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

Dalle tavole delle trasformate di Fourier, si può calcolare facilmente lo spettro di energia $S_x(f)$:

$$X(f) = \mathcal{F}\{e^{-|t|/T}\} = \frac{2/T}{(1/T)^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2} \implies S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{4T^2}{[1 + (2\pi fT)^2]^2}$$

Per calcolare $R_x(\tau)$ è dunque sufficiente antitrasformare $S_x(f)$, ma, sfortunatamente, le tavole non riportano l'antitrasformata di $S_x(f)$, che andrebbe calcolata a partire dalla definizione di antitrasformata, cosa per nulla facile. In sostanza, come suggerito, in questo caso conviene lavorare nel dominio del tempo.

7. Il segnale

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

ha trasformata di Fourier (si vedano le tavole)

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\right\} = T\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}\right\} = Tp_{1/T}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

L'energia di $x(t)$ è definita come

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\right]^2 dt$$

ma il calcolo di questo integrale è molto difficile. Conviene invece usare l'uguaglianza di Parseval:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} T^2 df = T^2 \frac{1}{T} = T$$

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione, conviene ancora lavorare in frequenza:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{T^2 p_{1/T}(f)\} = T^2 \frac{\sin(\pi \tau/T)}{\pi \tau} = T \frac{\sin(\pi \tau/T)}{\pi \tau/T}$$

Si noti che, correttamente, $R_x(0) = T = \mathcal{E}_x$.

8. In questo caso conviene calcolare l'energia in base alla definizione:

$$\mathcal{E}_x = \int x^2(t)dt = \int [\cos(2\pi f_0 t) p_T(t - T/2)]^2 dt.$$

Il segnale $x(t)$ è diverso da zero solo per $t \in [0, T]$ e quindi l'integrale si riduce a

$$\mathcal{E}_x = \int_0^T [\cos(2\pi f_0 t)]^2 dt;$$

utilizzando la formula $\cos^2(x) = [1 + \cos(2x)]/2$, si ottiene

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2} \int_0^T [1 + \cos(4\pi f_0 t)] dt = \frac{1}{2} \left[T + \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0} \Big|_0^T \right] = \frac{1}{2} \left[T + \frac{\sin(4\pi f_0 T)}{4\pi f_0} \right]$$

Poiché $f_0 = 10/T$, $\sin(4\pi f_0 T) = \sin(40\pi) = 0$ e si ottiene

$$\mathcal{E}_x = \frac{T}{2}$$

Il segnale $y(t)$ richiesto ha espressione

$$y(t) = \alpha x(t)$$

con α costante opportuna, in modo che sia $\mathcal{E}_y = 1$. Si ha

$$\mathcal{E}_y = \int y^2(t)dt = \int \alpha^2 x^2(t)dt = \alpha^2 \mathcal{E}_x = \alpha^2 \frac{T}{2}$$

Ponendo

$$\alpha^2 \frac{T}{2} = 1$$

si ottiene il valore di α :

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{T}}$$

(due soluzioni possibili).

1.6 Esercitazione 6

1. Si calcoli la potenza di

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

2. Si dica se il segnale

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$$

con $f_1 = 50$ Hz e $f_2 = 30$ Hz, è periodico ed, in caso positivo, se ne specifichi il periodo.
Si calcoli la potenza di $x(t)$ per $f_1 \neq f_2$ generici, e per $f_1 = f_2$.

3. Si calcoli periodo e potenza del segnale

$$x(t) = A \operatorname{sign}(\sin(2\pi f_0 t))$$

($\operatorname{sign}(x) = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sign}(x) = -1$ se $x < 0$, $\operatorname{sign}(x) = 0$ se $x = 0$).

4. Si calcoli il prodotto scalare tra i segnali della base ortonormale

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} p_T(t) \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

(k intero) ed i segnali:

(a) $x_1(t) = A \sin(2\pi 10t/T + \theta) p_T(t)$, con $\theta \neq 0$

(b) $x_2(t) = A \operatorname{sign}(\sin(2\pi t/T)) p_T(t)$

(c) $x_3(t) = A |\sin(2\pi t/T)| p_T(t)$

(d) $x_4(t) = A \sin^2(2\pi t/T + \theta) p_T(t)$, con $\theta \neq 0$

Soluzione

1. Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo $T = 1/f_0$ e la sua potenza è calcolabile tramite la formula

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Si ricordi che

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2(2\pi f_0 t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2}{2} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 - \cos(4\pi f_0 t + \theta)] dt \\ &= \frac{A^2}{2} \frac{1}{T} \left[T - \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + \theta) dt \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \frac{1}{T} \left[T - \frac{\sin(4\pi f_0 t + \theta)}{4\pi f_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \frac{1}{T} \left[T - \frac{\sin(2\pi f_0 T + \theta) - \sin(-2\pi f_0 T + \theta)}{4\pi f_0} \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \frac{1}{T} \left[T - \frac{\sin(\theta) - \sin(\theta)}{4\pi f_0} \right] \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Si è usato il fatto che, per definizione di periodo, $f_0 T = 1$ e $\sin(2\pi + \theta) = \sin(-2\pi + \theta) = \sin(\theta)$.

Il risultato, molto importante, è che **un segnale sinusoidale di ampiezza A ha potenza $A^2/2$** , indipendentemente dalla fase θ e dalla frequenza f_0 (purché diversa da zero).

2. Un segnale $x(t)$ è periodico di periodo T se $x(t+T) = x(t)$. Nel caso in esame si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \pi/4) \\ x(t+T) &= A_1 \cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T + \pi/4) \\ x(t) &= x(t+T) \iff 2\pi f_1 T = K2\pi, \quad 2\pi f_2 T = N2\pi \end{aligned}$$

Le due condizioni

$$\begin{cases} 2\pi f_1 T = K2\pi \\ 2\pi f_2 T = N2\pi \end{cases}$$

vanno entrambe soddisfatte con N intero e K intero. Dividendo la prima condizione per la seconda si ottiene

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{K}{N}$$

e dunque una soluzione esiste (cioè il segnale $x(t)$ è periodico) se e solo se f_1/f_2 è un numero razionale. Nel caso in cui fosse, ad esempio, $f_1/f_2 = \sqrt{2}$ o $f_1/f_2 = e$, $x(t)$ NON sarebbe periodico, in quanto $\sqrt{2}$ e e sono numeri reali non razionali.

Nel caso in esame

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$$

e quindi $K = 5$ e $N = 3$. Dalla prima condizione abbiamo

$$2\pi f_1 T = K 2\pi \implies T = \frac{K}{f_1} = \frac{5}{50} = 0.1 \text{ s};$$

a riprova, dalla seconda condizione abbiamo

$$2\pi f_2 T = N 2\pi \implies T = \frac{N}{f_2} = \frac{3}{30} = 0.1 \text{ s}.$$

Il periodo di $x(t)$ è dunque $T = 0.1$ s, e la frequenza fondamentale è $f_0 = 10$ Hz.

Per quanto riguarda la potenza del segnale, bisogna distinguere il caso di segnale periodico dal caso di segnale non periodico, perché cambia il modo di calcolarla. Per segnali periodici di periodo T (caso di $f_1/f_2 = K/N$ o $f_1 = f_2$), la potenza può essere calcolata come

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

mentre per segnali non periodici (caso di f_1/f_2 non razionale) la potenza è

$$P_x = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} |x(t)|^2 dt.$$

In realtà la definizione di potenza valida per segnale non periodico può essere utilizzata anche nel caso di segnale periodico (la formula valida per segnale periodico è solo una semplificazione della formula generale).

Nel caso $f_1 = f_2$, il segnale è

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_1 t + \pi/4)$$

ed è scrivibile come

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_1}{2} [e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t}] + \frac{A_2}{2j} [e^{j(2\pi f_1 t + \pi/4)} - e^{-j(2\pi f_1 t + \pi/4)}] \\ &= \frac{A_1}{2} [e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t}] + \frac{A_2}{2j} [e^{j\pi/4} e^{j2\pi f_1 t} - e^{-j\pi/4} e^{-j2\pi f_1 t}] \\ &= \left[\frac{A_1}{2} + \frac{A_2 e^{j\pi/4}}{2j} \right] e^{j2\pi f_1 t} + \left[\frac{A_1}{2} - \frac{A_2 e^{-j\pi/4}}{2j} \right] e^{-j2\pi f_1 t} \\ &= M e^{j\psi} e^{j2\pi f_1 t} + M e^{-j\psi} e^{-j2\pi f_1 t} \\ &= 2M \cos(2\pi f_1 t + \psi) \end{aligned}$$

Nelle precedenti espressioni si è definito

$$M = \left| \frac{A_1}{2} + \frac{A_2 e^{j\pi/4}}{2j} \right|$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\Im \left\{ \frac{A_1}{2} + \frac{A_2 e^{j\pi/4}}{2j} \right\}}{\Re \left\{ \frac{A_1}{2} + \frac{A_2 e^{j\pi/4}}{2j} \right\}}$$

In sostanza $x(t)$ è un segnale sinusoidale di ampiezza $2M$ e la sua potenza è quindi

$$P_x = \frac{(2M)^2}{2} = 2M^2 = 2 \left| \frac{A_1}{2} + \frac{A_2 e^{j\pi/4}}{2j} \right|^2 = 2 \left| \frac{A_1}{2} - j \frac{A_2(1+j)}{2\sqrt{2}} \right|^2 = 2 \left| \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2\sqrt{2}} - j \frac{A_2}{2\sqrt{2}} \right|^2$$

$$P_x = 2 \left(\frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{A_2}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{2}A_1 + A_2)^2}{4} + \frac{A_2^2}{4} = \frac{A_1^2 + A_2^2 + \sqrt{2}A_1A_2}{2}$$

Si noti che non occorre calcolare la fase ψ .

Nel caso $f_1 \neq f_2$ con f_1/f_2 razionale o irrazionale, invece si ha

$$P(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} x^2(t) dt.$$

$$P(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} [A_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t) + A_2^2 \sin^2(2\pi f_2 t + \pi/4) + 2A_1 A_2 \cos(2\pi f_1 t) \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)] dt.$$

Si ricorda che

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$$

$$P(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{A_1^2}{2} [1 + \cos(2\pi 2f_1 t)] + \frac{A_2^2}{2} [1 - \cos(2\pi 2f_2 t + \pi/2)] \right. \\ \left. + \frac{2A_1 A_2}{2} [\sin(2\pi(f_1 + f_2)t + \pi/4) - \sin(2\pi(f_2 - f_1)t + \pi/4)] \right] dt$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \right] dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left[\frac{A_1^2 a}{2} + \frac{A_2^2 a}{2} \right] = \left[\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \right]$$

Si noti che, per un qualsiasi $f' \neq 0$,

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos(2\pi f' t + \theta) dt = \frac{\sin(2\pi f' t + \theta)}{2\pi f'} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{\sin(\pi f' a + \theta) - \sin(-\pi f' a + \theta)}{2\pi f'}$$

ed il numeratore assume valori tra -2 e 2 (a seconda dei valori di a e θ); pertanto

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos(2\pi f' t + \theta) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi f' a + \theta) - \sin(-\pi f' a + \theta)}{2\pi f' a} = 0$$

per ogni valore di f' e θ . Pertanto nel calcolo di $P(x)$, nella funzione integranda sono stati conservati solo i termini costanti $A_1^2/2$ e $A_2^2/2$.

Commento: la potenza della somma di due sinusoidi è sempre pari alla somma delle potenze delle singole sinusoidi, purché le sinusoidi abbiano frequenza diversa.

3. Il segnale $x(t)$ è un'onda quadra con duty cycle 50% con lo stesso periodo del segnale $\sin(2\pi f_0 t)$. In particolare, $x(t)$ vale 1 per $t \in]0, T/2[$, vale -1 per $t \in]T/2, T[$ (e vale 0

in $t = 0$ e $t = T$), con $T = 1/f_0$. Il periodo di $x(t)$ è $T = 1/f_0$. La potenza può essere calcolata come

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt = \frac{1}{T} A^2 T = A^2$$

(nota: al fine del calcolo della potenza non interessa che negli istanti di tempo $0, \pm T, \pm 2T, \dots$ $x(t)$ valga 0).

4. Sia

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} p_T(t)$$

La base è ortonormale e quindi il prodotto scalare tra due segnali della base è

$$\langle \psi_k(t), \psi_n(t) \rangle = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

(a) Il segnale $x_1(t)$ (cfr. Fig. 1.51) può essere scritto come (formula di Eulero)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(2\pi 10t/T + \theta) p_T(t) = A p_T(t) \frac{e^{j(2\pi 10t/T + \theta)} - e^{-j(2\pi 10t/T + \theta)}}{2j} \\ &= \frac{A e^{j\theta}}{2j} e^{j2\pi 10t/T} p_T(t) - \frac{A e^{-j\theta}}{2j} e^{-j2\pi 10t/T} p_T(t) \\ &= \frac{\sqrt{T} A e^{j\theta}}{2j} \psi_{10}(t) - \frac{\sqrt{T} A e^{-j\theta}}{2j} \psi_{-10}(t) \end{aligned}$$

Pertanto (utilizzando l'ortonormalità dei segnali della base), si ha

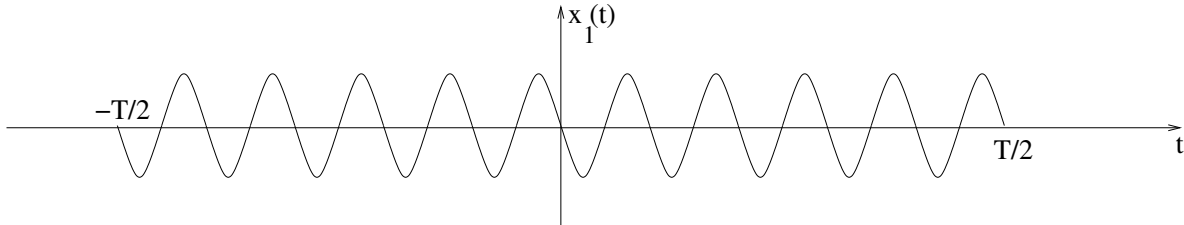


Figura 1.51: Segnale $x_1(t)$ per l'esercizio 4(a).

$$x_{1,k} = \langle x_1(t), \psi_k(t) \rangle = 0 \quad \text{per } k \neq \pm 10$$

$$x_{1,10} = \langle x_1(t), \psi_{10}(t) \rangle = \frac{\sqrt{T} A e^{j\theta}}{2j}$$

$$x_{1,-10} = \langle x_1(t), \psi_{-10}(t) \rangle = -\frac{\sqrt{T} A e^{-j\theta}}{2j}$$

(b) Il segnale $x_2(t)$, riportato in figura 1.52, non può essere facilmente scritto come combinazione lineare dei segnali della base. Occorre fare i calcoli.

Per il generico segnale $\psi_k(t)$ della base, si ha

$$x_{2,k} = \langle x_2(t), \psi_k(t) \rangle = \int x_2(t) \psi_k^*(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} x_2(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt$$

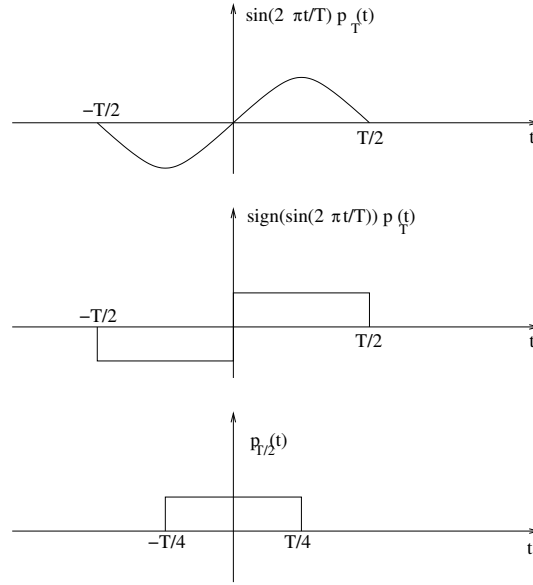


Figura 1.52: Segnali $\sin(2\pi t/T)p_T(t)$, $\text{sign}(\sin(2\pi t/T))p_T(t)$, $p_{T/2}(t)$ per l'esercizio 4(b).

$$\begin{aligned}
 x_{2,k} &= \frac{A}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sign}(\sin(2\pi t/T)) e^{-j2\pi kt/T} dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\int_{-T/2}^0 -e^{-j2\pi kt/T} dt + \int_0^{T/2} e^{-j2\pi kt/T} dt \right] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{-e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k/T} \Big|_{-T/2}^0 + \frac{e^{-j2\pi kt/T}}{-j2\pi k/T} \Big|_0^{T/2} \right] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[-\frac{1 - e^{j\pi k}}{-j2\pi k/T} + \frac{e^{-j\pi k} - 1}{-j2\pi k/T} \right] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[-\frac{1 - (-1)^k}{-j2\pi k/T} + \frac{(-1)^k - 1}{-j2\pi k/T} \right] = \frac{jA\sqrt{T}}{2\pi k} \left\{ -[1 - (-1)^k] + [(-1)^k - 1] \right\} \\
 &= \frac{jA\sqrt{T}}{\pi k} \left\{ (-1)^k - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

Se k è pari (cioè $k = 2n$ per n intero qualsiasi), il prodotto scalare è nullo, quindi si ha

$$x_{2,2n} = 0$$

Se k è dispari (cioè $k = 2n + 1$ per n intero qualsiasi), il prodotto scalare è

$$x_{2,2n+1} = \frac{-2jA\sqrt{T}}{\pi(2n+1)}$$

I prodotti scalari potevano essere calcolati anche usando un altro metodo. Infatti si può scrivere:

$$x_{2,k} = \int_{-T/2}^{T/2} x_2(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathcal{F}\{x_2(t)\}|_{f=k/T}$$

Si noti che 1) $x_2(t)$ vale 0 al di fuori dell'intervallo temporale $[-T/2, T/2]$ e quindi l'integrale può avere estremi $\pm\infty$ senza alterarne il valore, 2) a parte il coefficiente moltiplicativo, l'integrale corrisponde alla trasformata di Fourier di $x_2(t)$ valutata in $f = k/T$.

Si ha

$$\begin{aligned}
X_2(f) &= \mathcal{F}\{x_2(t)\} = A\mathcal{F}\{-p_{T/2}(t + T/4) + p_{T/2}(t - T/4)\} \\
&= A\mathcal{F}\{-p_{T/2}(t) * \delta(t + T/4) + p_{T/2}(t) * \delta(t - T/4)\} \\
&= A\mathcal{F}\{p_{T/2}(t) * [\delta(t - T/4) - \delta(t + T/4)]\} \\
&= A\mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\}\mathcal{F}\{[\delta(t - T/4) - \delta(t + T/4)]\} \\
&= A \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f} \left[e^{-j2\pi f T/4} - e^{j2\pi f T/4} \right] \\
&= -2jA \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f} \frac{e^{j2\pi f T/4} - e^{-j2\pi f T/4}}{2j} \\
&= -2jA \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f} \sin(\pi f T/2) \\
&= -2jA \frac{\sin^2(\pi f T/2)}{\pi f}
\end{aligned}$$

e quindi

$$a_k = X_2\left(\frac{k}{T}\right) = -2jA \frac{\sin^2(\pi k/2)}{\pi k/T}$$

Se k è pari, cioè $k = 2n$, si ha $a_{2n} = 0$ e $x_{2,2n} = 0$. Se k è dispari, cioè $k = 2n + 1$, si ha $\sin^2(\pi k/2) = \sin^2(\pi n + \pi/2) = 1$ e quindi

$$a_{2n+1} = X_2\left(\frac{2n+1}{T}\right) = -2jA \frac{1}{\pi(2n+1)/T} = -2jAT \frac{1}{\pi(2n+1)}$$

e si ottiene

$$x_{2,2n+1} = \frac{1}{\sqrt{T}} a_{2n+1} = \frac{-2jA\sqrt{T}}{\pi(2n+1)}$$

- (c) Il segnale $x_3(t) = A|\sin(2\pi t/T)|p_T(t)$ vale $-A\sin(2\pi t/T)$ nell'intervallo $[-T/2, 0]$ e vale $A\sin(2\pi t/T)$ nell'intervallo $[0, T/2]$ (cfr. Fig. 1.53); in sostanza, con A positivo, $x_3(t)$ non è mai negativo nell'intervallo $[-T/2, T/2]$; si può immaginare che $x_3(t)$ sia l'uscita di un raddrizzatore a doppia semionda con ingresso $A\sin(2\pi t/T)p_T(t)$. Come nel caso precedente è possibile calcolare in due modi diversi i prodotti scalari.

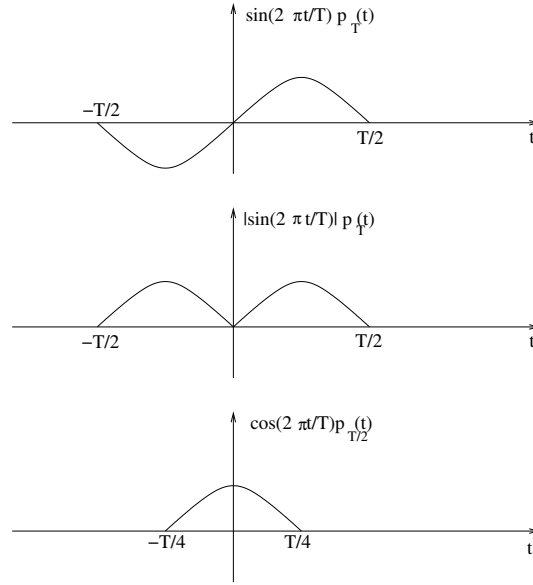


Figura 1.53: Segnali $\sin(2\pi t/T)p_T(t)$, $|\sin(2\pi t/T)|p_T(t)$, $\cos(2\pi t/T)p_{T/2}(t)$ per l'esercizio 4(c).

Con il metodo diretto si ha:

$$\begin{aligned}
 x_{3,k} &= \int_{-T/2}^{T/2} x_3(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^0 -A \sin(2\pi t/T) e^{-j2\pi kt/T} dt + \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{T/2} A \sin(2\pi t/T) e^{-j2\pi kt/T} dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\int_{-T/2}^0 -\sin(2\pi t/T) e^{-j2\pi kt/T} dt + \int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T) e^{-j2\pi kt/T} dt \right] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\int_0^{T/2} \sin(2\pi u/T) e^{j2\pi ku/T} du + \int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T) e^{-j2\pi kt/T} dt \right] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T) \left[e^{j2\pi kt/T} + e^{-j2\pi kt/T} \right] dt \\
 &= \frac{2A}{\sqrt{T}} \int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T) \cos(2\pi kt/T) dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \int_0^{T/2} [\sin(2\pi(1+k)t/T) + \sin(2\pi(1-k)t/T)] dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{-\cos(2\pi(1+k)t/T)}{2\pi(1+k)/T} \Big|_0^{T/2} + \frac{-\cos(2\pi(1-k)t/T)}{2\pi(1-k)/T} \Big|_0^{T/2} \right] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{T}} \left[\frac{-\cos(\pi(1+k)) + 1}{2\pi(1+k)/T} + \frac{-\cos(\pi(1-k)) + 1}{2\pi(1-k)/T} \right] \\
 &= \frac{AT}{2\pi\sqrt{T}} \left[\frac{1 - (-1)^{1+k}}{1+k} + \frac{1 - (-1)^{1-k}}{1-k} \right]
 \end{aligned}$$

Si è usata l'uguaglianza:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Se k è pari, cioè $k = 2n$, si ha $(-1)^{1+k} = -1$ e $(-1)^{1-k} = -1$, e quindi

$$x_{3,2n} = \frac{A\sqrt{T}}{2\pi} \left[\frac{1+1}{1+2n} + \frac{1+1}{1-2n} \right] = \frac{A\sqrt{T}}{\pi} \frac{2}{1-(2n)^2}$$

Se k è dispari, cioè $k = 2n + 1$, si ha $(-1)^{1+k} = 1$ e $(-1)^{1-k} = 1$, e quindi

$$x_{3,2n+1} = 0$$

Volendo usare la trasformata di Fourier, si ha invece:

$$\begin{aligned} x_{3,k} &= \int_{-T/2}^{T/2} x_3(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t) e^{-j2\pi kt/T} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} X_3 \left(\frac{k}{T} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3(f) &= \mathcal{F}\{-A \sin(2\pi t/T) p_{T/2}(t + T/4) + A \sin(2\pi t/T) p_{T/2}(t - T/4)\} \\ &= A\mathcal{F}\{\cos(2\pi t/T) p_{T/2}(t) * \delta(t + T/4) + \cos(2\pi t/T) p_{T/2}(t) * \delta(t - T/4)\} \\ &= A\mathcal{F}\{\cos(2\pi t/T) p_{T/2}(t) * [\delta(t - T/4) + \delta(t + T/4)]\} \\ &= A\mathcal{F}\{\cos(2\pi t/T) p_{T/2}(t)\} \mathcal{F}\{\delta(t - T/4) + \delta(t + T/4)\} \\ &= A\mathcal{F}\{\cos(2\pi t/T) p_{T/2}(t)\} [e^{-j2\pi fT/4} + e^{j2\pi fT/4}] \\ &= 2A\mathcal{F}\{\cos(2\pi t/T) p_{T/2}(t)\} \cos(2\pi fT/4) \\ &= 2A \cos(\pi fT/2) [\mathcal{F}\{\cos(2\pi t/T)\} * \mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\}] \\ &= 2A \cos(\pi fT/2) \left[\frac{1}{2j} [\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] * \frac{\sin(\pi fT/2)}{\pi f} \right] \\ &= A \cos(\pi fT/2) \left[\frac{\sin(\pi(f - 1/T)T/2)}{\pi(f - 1/T)} + \frac{\sin(\pi(f + 1/T)T/2)}{\pi(f + 1/T)} \right] \\ &= A \cos(\pi fT/2) \left[\frac{\sin(\pi fT/2 - \pi/2)}{\pi(f - 1/T)} + \frac{\sin(\pi fT/2 + \pi/2)}{\pi(f + 1/T)} \right] \\ &= \frac{AT}{\pi} \cos(\pi fT/2) \left[\frac{\sin(\pi fT/2 - \pi/2)}{fT - 1} + \frac{\sin(\pi fT/2 + \pi/2)}{fT + 1} \right] \\ &= \frac{AT}{\pi} \cos(\pi fT/2) \left[\frac{-\cos(\pi fT/2)}{fT - 1} + \frac{\cos(\pi fT/2)}{fT + 1} \right] \\ &= \frac{AT}{\pi} \cos^2(\pi fT/2) \left[\frac{1}{fT + 1} - \frac{1}{fT - 1} \right] \\ &= \frac{AT}{\pi} \cos^2(\pi fT/2) \frac{2}{1 - (fT)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{3,k} &= \frac{1}{\sqrt{T}} X_3 \left(\frac{k}{T} \right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{AT}{\pi} \cos^2(\pi k/2) \frac{2}{1 - k^2} \\ &= \frac{A\sqrt{T}}{\pi} \cos^2(\pi k/2) \frac{2}{1 - k^2} \end{aligned}$$

Se $k = 2n$, $\cos^2(\pi k/2) = \cos^2(\pi n) = 1$ e

$$x_{3,2n} = \frac{A\sqrt{T}}{\pi} \frac{2}{1 - (2n)^2}$$

Se $k = 2n + 1$, $\cos^2(\pi k/2) = \cos^2(\pi n + \pi/2) = 0$ e

$$x_{3,2n+1} = 0$$

(d) Il segnale $x_4(t)$ può essere riscritto come segue:

$$x_4(t) = A \sin^2(2\pi t/T + \theta) p_T(t) = A \frac{1 - \cos(4\pi t/T + 2\theta)}{2} p_T(t),$$

dove si è usata l'uguaglianza:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Il segnale può ulteriormente essere riscritto come

$$\begin{aligned} x_4(t) &= \frac{A}{2} p_T(t) - \frac{A}{2} \cos(4\pi t/T + 2\theta) \\ &= \frac{A}{2} p_T(t) - \frac{A}{4} \left[e^{j(4\pi t/T + 2\theta)} + e^{-j(4\pi t/T + 2\theta)} \right] p_T(t) \\ &= \frac{A}{2} p_T(t) - \frac{Ae^{j2\theta}}{4} e^{j4\pi t/T} p_T(t) - \frac{Ae^{-j2\theta}}{4} e^{-j4\pi t/T} p_T(t) \\ &= \frac{A\sqrt{T}}{2} \frac{1}{\sqrt{T}} p_T(t) - \frac{Ae^{j2\theta}\sqrt{T}}{4} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j4\pi t/T} p_T(t) - \frac{Ae^{-j2\theta}\sqrt{T}}{4} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j4\pi t/T} p_T(t) \\ &= \frac{A\sqrt{T}}{2} \psi_0(t) - \frac{Ae^{j2\theta}\sqrt{T}}{4} \psi_2(t) - \frac{Ae^{-j2\theta}\sqrt{T}}{4} \psi_{-2}(t) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$x_{4,0} = \frac{A\sqrt{T}}{2}$$

$$x_{4,2} = -\frac{A\sqrt{T}}{4} e^{j2\theta}$$

$$x_{4,-2} = -\frac{A\sqrt{T}}{4} e^{-j2\theta}$$

$$x_{4,k} = 0, \quad k \neq 0, \pm 2$$

1.7 Esercitazione 7

1. Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

con

$$h(t) = e^{-t/t_0} u(t).$$

Si dica se $x(t)$ è periodico e se ne calcoli la trasformata di Fourier $X(f)$.

2. Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$

con

$$h(t) = e^{-t/t_0} u(t).$$

Si dica se $x(t)$ è periodico e se ne calcoli la trasformata di Fourier $X(f)$.

3. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{T/2}(t - kT)$$

viene posto all'ingresso di un filtro passabanda ideale con frequenza centrale $f_c = L/T$, L intero positivo, e banda $1/(2T)$. Si scriva l'espressione del segnale d'uscita $y(t)$. Il segnale $x(t)$ viene posto successivamente all'ingresso di un filtro passabasso ideale di banda $1/(2T)$: qual è l'uscita in questo caso? Qual è il segnale all'uscita se il filtro passabasso ideale ha banda $5.5/T$?

4. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT)$$

con

$$q(t) = e^{-t/t_0} u(t)$$

viene posto all'ingresso di un filtro con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T(t - T/2)$$

Qual è l'espressione (nel tempo) del segnale d'uscita $y(t)$?

Soluzione

1. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

è periodico di periodo T . Può essere scritto come

$$x(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

e la sua trasformata di Fourier è

$$X(f) = H(f) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k/T) \delta(f - k/T)$$

La trasformata di Fourier di $h(t)$ (dalle tavole) è:

$$H(f) = \frac{t_0}{1 + j2\pi f t_0}$$

e quindi

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{t_0}{1 + j2\pi k t_0 / T} \delta(f - k/T) = \frac{t_0}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j2\pi k t_0 / T} \delta(f - k/T)$$

2. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h(t - kT)$$

può essere scritto come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2n} h(t - 2nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{2n+1} h(t - 2nT - T)$$

dove si sono distinti i valori pari dell'indice da quelli dispari. Quindi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 2nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 2nT - T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - 2nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - T) * \delta(t - 2nT)$$

$$x(t) = [h(t) - h(t - T)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2nT).$$

Il periodo di $x(t)$ è $2T$. Detto

$$g(t) = [h(t) - h(t - T)]$$

si ha

$$X(f) = G(f) \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/(2T)) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n/(2T)) \delta(f - n/(2T))$$

Si ha poi

$$G(f) = H(f) - H(f)e^{-j2\pi fT} = H(f) [1 - e^{-j2\pi fT}]$$

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = H\left(\frac{n}{2T}\right) [1 - e^{-j\pi n}] = H\left(\frac{n}{2T}\right) [1 - (-1)^n]$$

In particolare

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = 0 \quad \text{per } n \text{ pari}$$

$$G\left(\frac{n}{2T}\right) = 2H\left(\frac{n}{2T}\right) = \frac{2t_0}{1 + j\pi nt_0/T} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

Pertanto

$$X(f) = \frac{1}{2T} \sum_{n=\text{dispari}} \frac{2t_0}{1 + j\pi nt_0/T} \delta(f - n/(2T)) = \sum_{n=\text{dispari}} \frac{t_0/T}{1 + j\pi nt_0/T} \delta(f - n/(2T))$$

Si noti che le righe dello spettro sono presenti in questo caso alle frequenze

$$\pm \frac{1}{2T}, \pm \frac{3}{2T}, \pm \frac{5}{2T}, \dots$$

mentre nell'esercizio 1 erano presenti alle frequenze

$$\pm \frac{1}{T}, \pm \frac{2}{T}, \pm \frac{3}{T}, \dots$$

3. Il segnale ha trasformata di Fourier

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T)$$

(μ_k opportuni) e le delta di Dirac sono spaziate di $1/T$ Hz. Il filtro passabanda ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f \in \left[\frac{L}{T} - \frac{1}{4T}, \frac{L}{T} + \frac{1}{4T}\right] \\ 1 & f \in \left[-\frac{L}{T} - \frac{1}{4T}, -\frac{L}{T} + \frac{1}{4T}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi una sola coppia di delta di Dirac presenti nella trasformata di Fourier di $x(t)$ viene lasciata passare dal filtro, mentre tutte le altre vengono rimosse. In particolare,

$$Y(f) = H(f)X(f) = \mu_L \delta(f - L/T) + \mu_{-L} \delta(f + L/T)$$

e, scrivendo

$$\mu_L = M_L e^{j\Theta_L},$$

si ha

$$Y(f) = M_L [\delta(f - L/T) e^{j\Theta_L} + \delta(f + L/T) e^{-j\Theta_L}]$$

(si è sfruttato il fatto che $\mu_{-L} = \mu_L^*$, essendo $x(t)$ reale). Il segnale $y(t)$ è dunque

$$y(t) = 2M_L \cos\left(2\pi \frac{L}{T}t + \Theta_L\right)$$

Occorre dunque calcolare modulo M_L e fase Θ_L di μ_L .

$$\mu_L = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi Lt/T} dt = \frac{1}{T} \mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\}|_{f=L/T} = \frac{1}{T} \frac{T}{2} \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2} \Big|_{f=L/T} = \frac{\sin(\pi L/2)}{\pi L}$$

Essendo μ_L reale, si ha subito

$$y(t) = \frac{2\sin(\pi L/2)}{\pi L} \cos\left(2\pi \frac{L}{T}t\right)$$

Se L è pari, $y(t) = 0$.

Se il filtro è di tipo passabasso con banda $1/(2T)$, allora la sua funzione di trasferimento è

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f \in \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi il filtro lascia passare solo la delta di Dirac a frequenza zero:

$$Y(f) = \mu_0 \delta(f)$$

$$y(t) = \mu_0$$

Il coefficiente μ_0 è

$$\mu_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{2}$$

Se il filtro passabasso ha banda $5.5/T$, la sua funzione di trasferimento è

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f \in \left[-\frac{5.5}{T}, \frac{5.5}{T}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e lascia passare, in generale, le delta di Dirac a frequenza 0, $1/T$, $2/T$, $3/T$, $4/T$ e $5/T$:

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f)X(f) = \sum_{k=-5}^5 \mu_k \delta(f - k/T) \\ &= \mu_0 \delta(f) + \mu_1 [\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] + \mu_3 [\delta(f - 3/T) + \delta(f + 3/T)] \\ &+ \mu_5 [\delta(f - 5/T) + \delta(f + 5/T)] \\ &= \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{\sin(\pi/2)}{\pi} [\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] + \frac{\sin(\pi 3/2)}{\pi 3} [\delta(f - 3/T) + \delta(f + 3/T)] \\ &+ \frac{\sin(\pi 5/2)}{\pi 5} [\delta(f - 5/T) + \delta(f + 5/T)] \\ &= \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{\pi} [\delta(f - 1/T) + \delta(f + 1/T)] - \frac{1}{3\pi} [\delta(f - 3/T) + \delta(f + 3/T)] \\ &+ \frac{1}{5\pi} [\delta(f - 5/T) + \delta(f + 5/T)] \end{aligned}$$

Il segnale $y(t)$ risulta dunque

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t/T) - \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi 3t/T) + \frac{2}{5\pi} \cos(2\pi 5t/T)$$

4. Il segnale $x(t)$ può essere scritto come:

$$x(t) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Il segnale $y(t)$ è

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

In frequenza,

$$Y(f) = X(f)H(f)\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(k/T)H(k/T)\delta(f - k/T)$$

e si può ottenere $y(t)$ antitrasformando $Y(f)$. In questo caso, è più facile lavorare nel dominio del tempo, scambiando l'ordine con cui vengono effettuate le convoluzioni:

$$y(t) = q(t) * h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT)$$

Infatti

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_T(t - kT - T/2) = 1$$

(basta disegnare il grafico per rendersene conto). Quindi

$$y(t) = q(t) * 1;$$

questa convoluzione può apparire “strana”, ma in frequenza si ha

$$Y(f) = Q(f)\delta(f) = Q(0)\delta(f)$$

e

$$y(t) = Q(0) \quad (\text{costante})$$

In particolare

$$Q(f) = \frac{t_0}{1 + j2\pi ft_0}$$

e $Q(0) = t_0$. Pertanto

$$y(t) = t_0$$

Volendo proprio calcolare la convoluzione tra $q(t)$ ed il segnale costante $z(t) = 1$, si ha

$$y(t) = q(t) * z(t) = \int q(\tau)z(t-\tau)d\tau = \int q(\tau) \times 1 d\tau = \int q(t)dt = \int q(t)e^{j2\pi ft}dt \Big|_{f=0} = Q(0)$$

L'esercizio può anche essere risolto nel dominio della frequenza:

$$H(f) = e^{-j\pi fT} T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

$$H(k/T) = e^{-j\pi k} T \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = \begin{cases} T & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Quindi

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(k/T) H(k/T) \delta(f - k/T) = \frac{1}{T} Q(0) T \delta(f) = Q(0) \delta(f)$$

e

$$y(t) = Q(0)$$

Si noti che non è necessario andare a calcolare $Q(k/T)$, ma basta $Q(0)$.

1.8 Esercitazione 8

1. Si consideri il sistema di campionamento ideale (non fisicamente realizzabile) in cui il segnale d'ingresso $x(t)$ viene moltiplicato per il treno di delta ottenendo il segnale

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s).$$

In fase di ricostruzione, il segnale $x_\delta(t)$ passa attraverso il filtro con risposta all'impulso $g(t)$ (risposta in frequenza $G(f)$), ottenendo l'uscita $y(t)$:

$$y(t) = x_\delta(t) * g(t)$$

Il teorema del campionamento dà le condizioni che consentono di ottenere $y(t) = x(t)$. In questo esercizio si vuole analizzare il caso in cui $y(t) \neq x(t)$ perché una delle condizioni del teorema del campionamento non è rispettata.

- (a) Il segnale di ingresso è

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad t \in \mathbb{R}$$

con frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s = 2f_0$ e filtro ricostruttore con funzione di trasferimento

$$G(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq f_0 + \epsilon \\ 0 & |f| > f_0 + \epsilon \end{cases}$$

(con ϵ positivo ma molto piccolo rispetto a f_0). Si dia l'espressione del segnale $x_\delta(t)$ per $\theta = 0$ e per $\theta = \pi/2$, e si calcoli quindi l'uscita $y(t)$ del filtro ricostruttore nei due casi. Qual è la condizione del teorema del campionamento che non è stata rispettata? Si ripeta l'esercizio per $\theta = \pi/4$ (soluzione non fornita).

- (b) Il segnale d'ingresso è l'onda quadra

$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT)$$

$$q(t) = p_{T/2}(t) - p_{T/2}(t - T/2)$$

l'intervallo di campionamento è $T_s = T/2$ (la frequenza di campionamento è $f_s = 1/T_s$) ed il filtro ricostruttore ha funzione di trasferimento

$$G(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq f_s/2 + \epsilon \\ 0 & |f| > f_s/2 + \epsilon \end{cases}$$

(con ϵ positivo ma molto piccolo rispetto a $f_s/2$). Si calcoli l'espressione del segnale $y(t)$. Qual è la condizione del teorema del campionamento che non è stata rispettata?

2. Il sistema di campionamento di tipo "Sample&Hold" (fisicamente realizzabile) genera il segnale campionato

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) v(t - nT_s)$$

$$v(t) = p_{T_s}(t - T_s/2)$$

con T_s intervallo di campionamento. Si disegni qualitativamente il grafico di $x_p(t)$ assumendo che l'ingresso del sistema sia

$$x(t) = te^{-t/t_0}u(t)$$

e che sia $T_s = t_0/4$.

Seguendo lo stesso metodo utilizzato per dimostrare il teorema del campionamento (ideale), si ricavi la funzione di trasferimento $G(f)$ del filtro ricostruttore che consente di ottenere esattamente $x(t)$ a partire da $x_p(t)$, supponendo che il segnale $x(t)$ all'ingresso del sistema sia strettamente limitato in banda e abbia banda B_x , e che la frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s$ sia strettamente maggiore di $2B_x$.

3. Il segnale di tipo passabanda

$$z(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

viene campionato idealmente a frequenza $f_c = f_0/2$ (si tratta chiaramente di sottocampionamento) ottenendo il segnale

$$w(t) = z(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/f_c).$$

Si scriva l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro passabasso ideale di banda $B = f_c/2$ e con ingresso $w(t)$, supponendo che la banda del segnale $x(t)$ sia $B_x < B$.

4. Il segnale periodico $x(t)$ di periodo $T = 1$ s e di banda $B_x = 10/T$ viene campionato a frequenza $f_c = 2B_x$. Ogni campione (analogico) viene memorizzato utilizzando 2 byte (cioè 16 bit per ogni campione). La memorizzazione dei campioni viene effettuata per un intervallo di tempo pari a 1 minuto. Qual è la dimensione del file (in byte) che contiene i campioni? Qual è la dimensione del file per $f_c = 4B_x$?

Soluzione

1. Il sistema da analizzare è riportato nella Fig. 1.54.

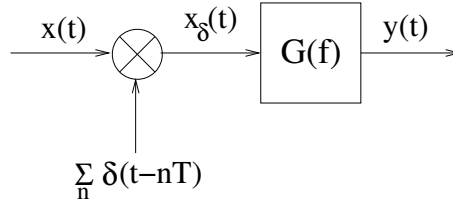


Figura 1.54: Schema a blocchi del sistema costituito da campionamento ideale (prima parte) e ricostruzione (seconda parte, tramite il filtro ricostruttore con funzione di trasferimento $G(f)$) di un segnale $x(t)$.

(a) I campioni $x(nT_s)$ sono

$$x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s + \theta) = A \cos(2\pi n/2 + \theta) = A \cos(n\pi + \theta)$$

Se $\theta = 0$, si ha

$$x(nT_s) = A(-1)^n$$

e quindi

$$x_\delta(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT_s)$$

(segnale periodico di periodo $2T_s$). Se invece $\theta = \pi/2$, si ha

$$x(nT_s) = 0 \quad \forall n$$

e $x_\delta(t) = 0$. Nel caso $\theta = \pi/2$ è immediato ricavare che $y(t) = 0$ (il segnale all'ingresso del filtro ricostruttore è nullo). Nel caso $\theta = 0$, occorre invece fare qualche calcolo. Il segnale $x_\delta(t)$ è periodico di periodo $2T_s$ e quindi ha uno spettro a righe alle frequenze multiple di $1/(2T_s) = f_s/2 = f_0$. All'uscita del filtro ricostruttore si ha il segnale $y(t)$ con trasformata di Fourier

$$Y(f) = X_\delta(f)G(f) = T_s[\mu_0\delta(f) + \mu_1\delta(f - f_0) + \mu_{-1}\delta(f + f_0)]$$

dove μ_0, μ_1, μ_{-1} sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di $x_\delta(t)$. Il coefficiente μ_0 è chiaramente nullo ($x_\delta(t)$ ha valor medio nullo). Il coefficiente μ_1 è²

$$\mu_1 = \frac{1}{2T_s} \int_{-T_s+T_s/4}^{T_s+T_s/4} A[\delta(t) - \delta(t - T_s)]e^{-j2\pi t/(2T_s)} dt = \frac{A}{2T_s} [1 - e^{-j2\pi/2}] = \frac{A}{T_s}$$

²I coefficienti della serie di Fourier si ottengono calcolando integrali con estremi tali da includere un intero periodo del segnale, non è necessario che siano simmetrici rispetto all'origine; nel caso in esame, ponendo l'estremo inferiore pari a $-T_s + T_s/4$ e l'estremo superiore pari a $T_s + T_s/4$ si evita di dover calcolare l'integrale di una delta di Dirac posta esattamente in corrispondenza dell'estremo superiore di integrazione; altre scelte erano ovviamente possibili.

e $\mu_{-1} = \mu_1^* = \mu_1 = A/T_s$. In sostanza,

$$Y(f) = T_s \frac{A}{T_s} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = A[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e

$$y(t) = 2A \cos(2\pi f_0 t).$$

Nel caso $\theta = \pi/2$, il segnale di uscita $y(t)$ è diverso da $x(t)$ perché il segnale di ingresso ha banda $B_x = f_0$ e la frequenza di campionamento è scelta esattamente uguale a $2B_x$, mentre dovrebbe essere strettamente maggiore di $2B_x = 2f_0$. Nel caso $\theta = 0$, invece, per pura coincidenza, si ha $y(t) = 2x(t)$.

Per $\theta = 0$, l'esercizio poteva anche essere risolto come segue.

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - n/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_n X(f - n/T_s)$$

In questo caso, si ha $f_s = 1/T_s = 2f_0$ e

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e quindi

$$\begin{aligned} X_\delta(f) &= f_s \sum_n X(f - nf_s) = \frac{Af_s}{2} \sum_n [\delta(f - nf_s - f_0) + \delta(f - nf_s + f_0)] \\ &= \frac{Af_s}{2} \sum_n [\delta(f - 2nf_0 - f_0) + \delta(f - 2nf_0 + f_0)] \\ &= \frac{Af_s}{2} \{ [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \dots] \\ &\quad + [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \dots] \} \\ &= Af_s [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \dots] \end{aligned}$$

Si ha poi

$$Y(f) = X_\delta(f)G(f) = Af_s[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]T_s = A[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e quindi, nuovamente,

$$y(t) = 2A \cos(2\pi f_0 t).$$

Per $\theta = \pi/2$, l'esercizio poteva anche essere risolto come segue.

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_n \delta(f - n/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_n X(f - n/T_s)$$

In questo caso, si ha $f_s = 1/T_s = 2f_0$ e

$$X(f) = \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

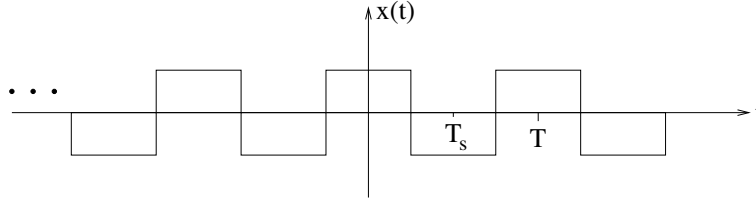


Figura 1.55: Segnale $x(t)$ per l'esercizio 1(b).

e quindi

$$\begin{aligned}
 X_\delta(f) &= f_s \sum_n X(f - nf_s) = \frac{Af_s}{2j} \sum_n [\delta(f - nf_s - f_0) - \delta(f - nf_s + f_0)] \\
 &= \frac{Af_s}{2j} \sum_n [\delta(f - 2nf_0 - f_0) - \delta(f - 2nf_0 + f_0)] \\
 &= \frac{Af_s}{2j} \{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \dots] \\
 &\quad - [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) + \delta(f + 3f_0) + \delta(f - 3f_0) + \dots]\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Poiché $X_\delta(f) = 0$, anche $x_\delta(t) = 0$ e $y(t) = x_\delta(t) * g(t) = 0$.

(b) Il grafico del segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT)$$

è riportato nella figura 1.55. I campioni negli istanti $nT_s = nT/2$ sono:

$$x(nT_s) = A(-1)^n$$

ed il segnale $x_\delta(t)$ è identico a quello ottenuto nel caso (a) con $\theta = 0$. L'uscita del filtro ricostruttore è ancora

$$y(t) = 2A \cos(2\pi f_0 t) = 2 \cos(2\pi t/T)$$

Il segnale d'ingresso $x(t)$ ha banda infinita e l'aliasing porta ad un segnale $y(t)$ completamente diverso da $x(t)$.

2. Per il segnale $x(t)$ assegnato, i grafici di $x(t)$ e $x_p(t)$ sono riportati nella figura 1.56.

Per quanto riguarda il progetto del filtro ricostruttore (generico segnale di ingresso con banda B_x), il segnale $x_p(t)$ può essere scritto come

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)v(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) * v(t) \quad (1.6)$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] * v(t) \quad (1.7)$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \right] * v(t) \quad (1.8)$$

$$= \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right] * v(t) \quad (1.9)$$

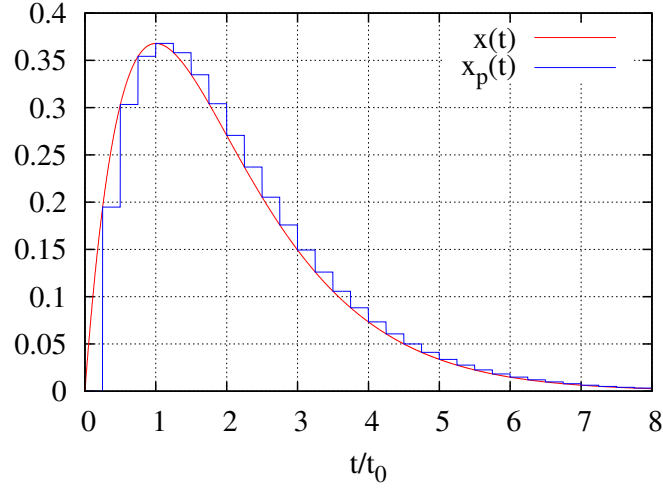


Figura 1.56: Segnali $x(t)$ e $x_p(t)$ per l'esercizio 2.

e la sua trasformata di Fourier è

$$X_p(f) = \left[X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T_s) \right] V(f)$$

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T_s) \right] V(f)$$

Deve essere

$$Y(f) = G(f)X_p(f) = X(f)$$

e quindi

$$\frac{1}{T_s} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n/T_s) \right] V(f)G(f) = X(f).$$

La precedente uguaglianza è valida se

$$\frac{1}{T_s} V(f)G(f) = p_{f_s}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases}$$

Deve dunque essere

$$G(f) = T_s \frac{p_{f_s}(f)}{V(f)}$$

(nel campionamento ideale si ha invece $G(f) = T_s p_{f_s}(f)$). La funzione $V(f)$ è

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} = e^{-j2\pi f T_s/2} \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f} = e^{-j\pi f T_s} \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f}$$

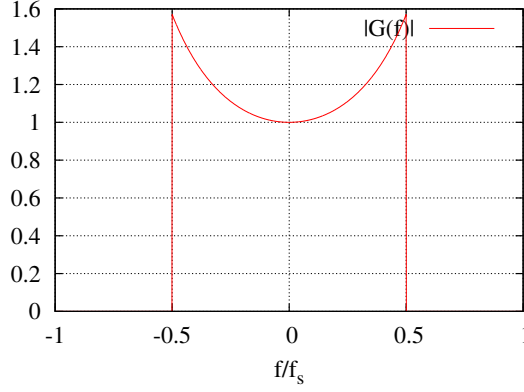


Figura 1.57: Modulo della funzione di trasferimento $G(f)$ del filtro ricostruttore ideale per un campionatore di tipo Sample& Hold.

e quindi

$$G(f) = \begin{cases} \frac{\pi f T_s}{\sin(\pi f T_s)} e^{j\pi f T_s} & |f| < f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases}$$

La figura 1.57 riporta il grafico di $|G(f)|$. **Nota:** in genere il sistema **ADC (Analog to Digital Converter)** è costituito da un filtro anti-aliasing (passabasso di banda $f_s/2$) un campionatore di tipo Sample&Hold e un quantizzatore, che trasforma il livello $x(nT_s)$ in una successione di N_q bit; il sistema **DAC (Digital to Analog Converter)** è costituito da un “decodificatore” che trasforma gli N_q bit nel corrispondente livello $x(nT_s)$, che viene mantenuto per T_s secondi, seguito dal filtro ricostruttore. Il filtro anti-aliasing è un semplice filtro passa-basso (non ideale); il filtro ricostruttore in genere non ha funzione di trasferimento $G(f)$ come calcolata nell’esercizio, ma nuovamente un semplice filtro passa-basso (non ideale). Il segnale ricostruito $y(t)$ è sicuramente diverso dal segnale $x(t)$ all’ingresso del campionatore, ma la differenza è tutto sommato trascurabile. La coppia ADC e DAC è caratterizzata da due soli parametri: frequenza di campionamento (che determina anche le bande dei filtri passa-basso) e numero di bit per campione N_q .

3. Il k -esimo campione di

$$z(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

in $kT_c = k/f_c = 2k/f_0$ è

$$z(kT_c) = x(kT_c) \cos(2\pi f_0 kT_c) = x(kT_c) \cos(4\pi k) = x(kT_c)$$

e dunque il segnale $w(t)$ è

$$\begin{aligned} w(t) &= z(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(kT_c) \delta(t - kT_c) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \end{aligned}$$

In sostanza, il campionatore campiona $z(t)$, ma è come se campionasse $x(t)$. La trasformata di Fourier di $w(t)$ contiene dunque tutte le repliche di $X(f)$ centrate in kf_c , senza aliasing. All'uscita del filtro passabasso ricostruttore si ha dunque

$$y(t) = x(t)$$

Commento: nei sistemi di trasmissione, la frequenza f_0 (detta frequenza di portante) è tipicamente molto maggiore di B_x (ordini di grandezza più grande) e dunque campionare a $f_0/2$ significa sottocampionare $z(t)$ e sovracampionare (di ordini di grandezza) $x(t)$. Se fosse $z(t) = x(t) \sin(2\pi f_0 t)$ il sistema proposto non funzionerebbe, per lo stesso motivo identificato nell'esercizio 1(a). Nella realtà la frequenza di campionamento è scelta leggermente superiore a $f_0/2$ e questo tipo di sistema viene usato per non dover demodulare il segnale $z(t)$ moltiplicandolo per $\cos(2\pi f_0 t)$ e filtrando il risultato della moltiplicazione con un filtro passabasso (si sostituisce moltiplicatore e filtro con un sovracampionamento).

4. Il segnale $x(t)$ ha banda $B_x = 10$ Hz e viene campionato a frequenza $f_c = 20$ Hz, cioè l'intervallo di campionamento è $T_c = 1/20 = 0.05$ s e si preleva un campione ogni T_c s.

Il numero di campioni N_c acquisiti in un tempo t_o pari a 1 minuto (cioè 60 s) è dunque

$$N_c = \frac{t_o}{T_c} = t_o f_c = 60 \times 20 = 1200$$

Poiché un campione viene tradotto in $m = 2$ byte, il numero di byte N_B nel file è

$$N_B = N_c m = t_o f_c m = N_c \times 2 = 2400.$$

Se la frequenza di campionamento fosse $f'_c = 4B_x = 2f_c$, il numero di byte nel file risulterebbe $N'_B = 2N_B = 4800$:

$$N'_B = t_o f'_c m = 4800$$

1.9 Esercitazione 9

1. Si consideri un sistema LTI a tempo discreto con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{8z^2 - 6z + 1}$$

- (a) Si stabilisca se il sistema è stabile o no
 - (b) Si disegni lo schema a blocchi di un circuito che realizza la funzione di trasferimento $H(z)$
 - (c) Si scriva l'equazione alle differenze finite che lega l'uscita $y[n]$ all'ingresso $x[n]$
2. Si consideri un sistema LTI a tempo discreto con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{4z^2 - 4z + 1}$$

- (a) Si calcoli la risposta all'impulso $h[n]$
 - (b) Si calcoli la risposta $y[n]$ all'ingresso $x[n] = u[n]$ (gradino unitario)
3. Si consideri il sistema LTI tempo-discreto con la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

- (a) Si tratta di un sistema stabile?
- (b) Qual è la risposta all'impulso $h[n]$?
- (c) Si scriva $y[n]$ in funzione di $x[n]$ e dei campioni precedenti $x[n-1], x[n-2], x[n-3], \dots$: che tipo di operazione viene effettuata dal sistema sul segnale di ingresso?
- (d) Si calcoli l'uscita $y_1[n]$ per l'ingresso $x_1[n] = u[n]$
- (e) Si calcoli l'uscita $y_2[n]$ per l'ingresso $x_2[n] = p_4[n]$ ($x_2[n] = 1$ per $n = 0, 1, 2, 3$ e $x_2[n] = 0$ altrove)
- (f) Si calcoli l'uscita $y_3[n]$ per l'ingresso

$$x_3[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ -1 & n = 4, 5, 6, 7 \\ 0 & n > 8 \end{cases}$$

4. Il segnale

$$x(t) = t e^{-t/t_0} u(t)$$

viene posto all'ingresso di un campionario di tipo sample & hold con frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c = 10/t_0$. Il segnale numerico $x[n] = x(nT_c)$ viene posto all'ingresso di un sistema FIR con funzione di trasferimento

$$H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}$$

fornendo in uscita i campioni $y[n]$.

- (a) Quale deve essere il valore di α affinché $y[n]$ abbia la minima durata possibile?
Suggerimento: si calcolino le trasformate zeta di $x[n]$ e $y[n]$.

- (b) Per il valore di α trovato al punto precedente, si calcoli l'uscita $w(t)$ del filtro passabasso ricostruttore (ideale per il sistema sample & hold) al cui ingresso sia posto

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]v(t - nT_c)$$

essendo

$$v(t) = p_{T_c}(t - T_c/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_c] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Si consideri il sistema con due ingressi ed una uscita descritto in figura 1.58 a sinistra. Si calcolino le funzioni di trasferimento $G_1(z)$ e $G_2(z)$ affinché il sistema di figura 1.58 a sinistra sia equivalente al sistema di figura 1.58 a destra. Si considerino

$$H_1(z) = \frac{z}{z - \alpha}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z - \beta}, \quad \gamma \neq 1$$

Quanti sono i poli per $G_1(z)$? quanti per $G_2(z)$? Posti $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.8$, qual è l'insieme dei possibili valori di γ che garantiscono la stabilità del sistema?

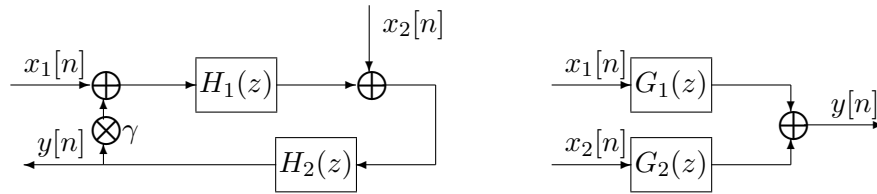


Figura 1.58: Sistemi per l'esercizio 5.

Soluzione

1. Occorre trovare poli e zeri di $H(z)$

$$H(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{8z^2 - 6z + 1} = \frac{2(z - z_1)(z - z_2)}{8(z - p_1)(z - p_2)}$$

Gli zeri z_1 e z_2 sono soluzioni dell'equazione di II grado:

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Si ha pertanto $z_1 = 1/2$ e $z_2 = 2$. I poli sono soluzioni dell'equazione di II grado:

$$z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}$$

Si ha pertanto $p_1 = 1/4$ e $p_2 = 1/2$. La funzione di trasferimento può dunque essere riscritta come segue:

$$H(z) = \frac{2z^2 - 5z + 2}{8z^2 - 6z + 1} = \frac{2(z - 1/2)(z - 2)}{8(z - 1/2)(z - 1/4)}$$

Poiché uno zero coincide con un polo ($z_1 = p_2$), la funzione di trasferimento può essere semplificata in

$$H(z) = \frac{2(z - 2)}{8(z - 1/4)}$$

restando dunque solo uno zero in $z_2 = 2$ ed un polo in $p_1 = 1/4$.

- (a) Poiché $|p_1| < 1$, il sistema è stabile.
 (b) Occorre scrivere in maniera esplicita il legame tra $Y(z)$ e $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(z - 2)}{8(z - 1/4)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{4(1 - 1/4z^{-1})}$$

$$Y(z) \left[1 - \frac{1}{4}z^{-1} \right] = \frac{1}{4}(1 - 2z^{-1})X(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{4}(1 - 2z^{-1})X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) = \frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z)$$

Un circuito che realizza la funzione di trasferimento $H(z)$ è ad esempio quello indicato nella figura 1.59 (ne esistono altri).

- (c) È sufficiente antitrasformare la relazione che fornisce $Y(z)$ in funzione di $X(z)$ per ottenere l'equazione alle differenze finite che lega $y[n]$ a $x[n]$:

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}y[n-1]$$

Nella figura 1.60 si può vedere la risposta all'impulso trovata al calcolatore implementando con Matlab/Octave l'equazione alle differenze finite, ponendo $x[n] = \delta[n]$.

2. Come nell'esercizio precedente occorre trovare zeri e poli di $H(z)$:

$$H(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{4z^2 - 4z + 1} = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{4(z - p_1)(z - p_2)}$$

Gli zeri sono soluzione di

$$z^2 - 3z + 2 = 0, \quad z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

e sono dunque $z_1 = 2$ e $z_2 = 1$.

I poli sono soluzione di

$$z^2 - z + 1/4 = 0, \quad p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

e sono dunque $p_1 = p_2 = 1/2$ (due poli coincidenti). Non è possibile semplificare la funzione di trasferimento, essendo i poli diversi dagli zeri. Il sistema è stabile perché $|p_1| < 1$ e $|p_2| < 1$. In sostanza

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{(z - 2)(z - 1)}{(z - 1/2)^2}$$

- (a) Per calcolare la risposta all'impulso $h[n]$ occorre antitrasformare $H(z)$. Il procedimento (suggerito, non obbligatorio) è di sviluppare con la tecnica dei fratti semplici la funzione

$$H^0(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 - 3z + 2}{z(4z^2 - 4z + 1)} = \frac{1}{4} \frac{(z - 2)(z - 1)}{z(z - 1/2)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 1/2} + \frac{C}{(z - 1/2)^2} \quad (1.10)$$

I coefficienti A, B, C possono essere calcolati come segue:

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} H^0(z)z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4} \frac{(z - 2)(z - 1)}{(z - 1/2)^2} = \frac{1}{4} \frac{2}{1/4} = 2$$

$$C = \lim_{z \rightarrow 1/2} H^0(z)(z - 1/2)^2 = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{1}{4} \frac{(z - 2)(z - 1)}{z} = \frac{1}{4} \frac{(-3/2)(-1/2)}{1/2} = \frac{3}{8}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{d}{dz} [H^0(z)(z - 1/2)^2] = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - 2)(z - 1)}{z} \right] = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{1}{4} \frac{d}{dz} [z - 3 + 2/z]$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{1}{4} \left[1 - \frac{2}{z^2} \right] = -\frac{7}{4}$$

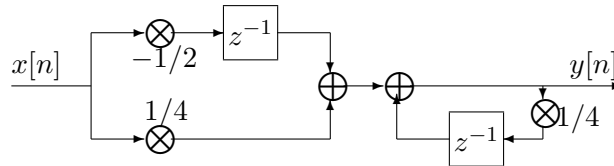


Figura 1.59: Circuito che consente di realizzare la funzione di trasferimento dell'esercizio 2.

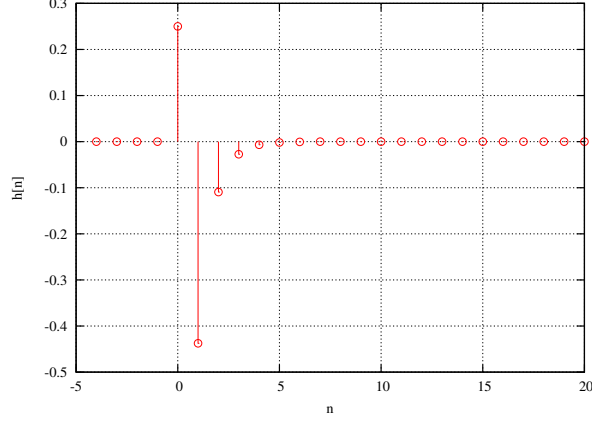


Figura 1.60: Risposta all'impulso per il sistema dell'esercizio 1 ottenuta tramite simulazione

Dopo aver calcolato i coefficienti A, B, C conviene verificare che siano corretti re-inserendoli nello sviluppo in fratti semplici per controllare che il risultato sia uguale ad $H^0(z)$:

$$\begin{aligned}
 H^0(z) &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 1/2} + \frac{C}{(z - 1/2)^2} = \frac{2}{z} + \frac{-7/4}{z - 1/2} + \frac{3/8}{(z - 1/2)^2} \\
 &= \frac{2(z - 1/2)^2}{z(z - 1/2)^2} + \frac{-7/4z(z - 1/2)}{z(z - 1/2)^2} + \frac{3/8z}{z(z - 1/2)^2} \\
 &= \frac{1}{z(z - 1/2)^2} [2z^2 - 2z + 1/2 - 7/4z^2 + 7/8z + 3/8z] \\
 &= \frac{1}{z(z - 1/2)^2} [1/4z^2 - 6/8z + 1/2] \\
 &= \frac{z^2 - 3z + 2}{4z(z - 1/2)^2}
 \end{aligned}$$

Poiché lo sviluppo in fratti semplici corrisponde all'espressione di $H^0(z)$ riportata nella (1.10), allora i coefficienti A, B, C sono corretti e si può proseguire.

L'espressione di $H(z)$ risulta essere dunque:

$$H(z) = H^0(z)z = 2 + \frac{-7/4z}{z - 1/2} + \frac{3/8z}{(z - 1/2)^2} = 2 + \frac{-7/4z}{z - 1/2} + \frac{3}{8} \frac{1/2z}{(z - 1/2)^2}$$

la cui antitrasformata è ottenibile dalle tavole:

$$h[n] = 2\delta[n] - \frac{7}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{4} n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Si ricorda che

$$\mathcal{Z} \{p^n u[n]\} = \frac{z}{z - p},$$

$$\mathcal{Z} \{np^n u[n]\} = \frac{zp}{(z - p)^2}.$$

La figura 1.61 confronta la risposta all'impulso appena calcolata con la risposta all'impulso ottenuta tramite simulazione con Matlab/Octave.

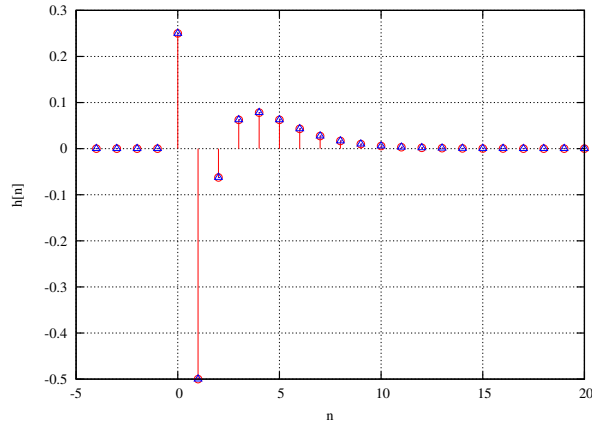


Figura 1.61: Risposta all'impulso per il sistema dell'esercizio 2 ottenuta tramite simulazione (triangoli blu) e calcolata teoricamente (cerchi rossi).

(b) Nel caso in cui l'ingresso sia $x[n] = u[n]$, l'uscita $y[n]$ ha trasformata z

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z}{z-1}H(z) = \frac{z}{z-1} \frac{1}{4} \frac{(z-2)(z-1)}{(z-1/2)^2} = \frac{1}{4} \frac{z(z-2)}{(z-1/2)^2}$$

Per ottenere $y[n]$ occorre antitrasformare $Y(z)$. Il metodo è lo stesso usato prima: si sviluppa in fratti semplici $Y^0(z) = Y(z)/z$:

$$Y^0(z) = \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{4} \frac{(z-2)}{(z-1/2)^2} = \frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{(z-1/2)^2}$$

Si ha:

$$B = \lim_{z \rightarrow 1/2} Y^0(z)(z-1/2)^2 = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{1}{4}(z-2) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{1}{4} \frac{-3}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$C = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{d}{dz} [Y^0(z)(z-1/2)^2] = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{4}(z-2) \right] = \frac{1}{4}$$

e quindi

$$Y^0(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{z-1/2} - \frac{3}{8} \frac{1}{(z-1/2)^2}$$

Conviene controllare che lo sviluppo sia corretto:

$$Y^0(z) = \frac{1}{4} \frac{z-1/2}{(z-1/2)^2} - \frac{3}{8} \frac{1}{(z-1/2)^2} = \frac{2z-1-3}{8(z-1/2)^2} = \frac{z-2}{4(z-1/2)^2}$$

essendo lo sviluppo corretto, possiamo continuare:

$$Y(z) = Y^0(z)z = \frac{1}{4} \frac{z}{z-1/2} - \frac{3}{8} \frac{z}{(z-1/2)^2} = \frac{1}{4} \frac{z}{z-1/2} - \frac{6}{8} \frac{1/2 z}{(z-1/2)^2}$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - \frac{3}{4} n \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n]$$

La figura 1.62 confronta la risposta all'impulso appena calcolata con la risposta all'impulso ottenuta tramite simulazione con Matlab/Octave.

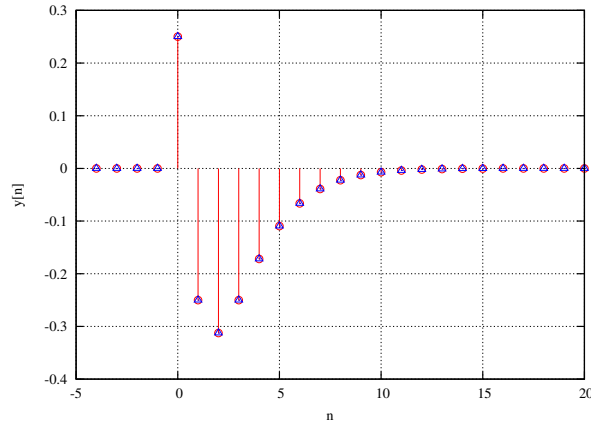


Figura 1.62: Risposta al gradino per il sistema dell'esercizio 2 ottenuta tramite simulazione (triangoli blu) e calcolata teoricamente (cerchi rossi).

3. Il sistema ha relazione ingresso-uscita

$$y[n] = y[n-1] + x[n]$$

Applicando la trasformata zeta alla precedente uguaglianza si ottiene

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z), \quad Y(z)[1 - z^{-1}] = X(z), \quad Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z - 1}X(z)$$

La funzione di trasferimento del sistema è dunque

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - 1}$$

ed ha uno zero in $z_1 = 0$ ed un polo in $p_1 = 1$.

- (a) Poiché $|p_1| = 1$ (il polo ha modulo esattamente uguale a uno e non strettamente minore di 1), il sistema **non è stabile**.
- (b) La risposta all'impulso $h[n]$ è l'antitrasformata di $H(z)$, già presente nelle tavole delle trasformate zeta:

$$h[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

- (c) La relazione ingresso-uscita fornita è di tipo ricorsivo (a destra appare nuovamente $y[n]$ anche se ritardato). Si desidera avere un'espressione in cui $y[n]$ compare solo a sinistra dell'uguaglianza, mentre a destra compare sono $x[n]$ e sue versioni ritardate. Il risultato si ottiene scrivendo l'espressione della convoluzione tra ingresso e risposta all'impulso del sistema:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = \sum_k h[k]x[n-k]$$

In particolare, in questo caso si ha $h[n] = u[n]$ e quindi si ha

$$y[n] = \sum_k h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \dots$$

in sostanza $y[n]$ è la somma del campione attualmente presente all'ingresso del sistema $x[n]$ e di tutti i precedenti campioni d'ingresso, si comporta in sostanza come un integratore numerico.

- (d) Se il segnale d'ingresso è $x_1[n] = u[n]$, l'uscita $y_1[n]$ è tale per cui

$$Y_1(z) = X_1(z)H(z) = \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Applicando lo stesso procedimento usato per l'esercizio 2,

$$Y_1^0(z) = \frac{Y_1(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Si nota che $Y_1^0(z)$ è già una trasformata zeta nota, quindi è possibile dire che

$$y_1^0[n] = nu[n]$$

e si ricava $y_1[n]$ sapendo che $Y_1(z) = zY_1^0(z)$:

$$y_1[n] = \delta[n+1] * y_1^0[n] = y_1^0[n+1] = (n+1)u[n+1].$$

Si noti che

$$y_1[n] = 0 \quad \forall n < -1, \quad y_1[-1] = 0 \times 1 = 0, \quad y_1[0] = 1, \quad y_1[1] = 2, \dots$$

e quindi si può anche scrivere

$$y_1[n] = (n+1)u[n].$$

Si noti che, per l'ingresso $u[n]$ (bounded) l'uscita è $(n+1)u[n]$ divergente (unbounded) e quindi il sistema **non è stabile in senso BIBO** (come già notato dall'analisi dei poli).

- (e) L'uscita per l'ingresso $x_2[n]$ può essere calcolata in fretta notando che

$$x_2[n] = p_4[n] = u[n] - u[n-4]$$

e quindi

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n] = u[n] * h[n] - u[n-4] * h[n] = x_1[n] * h[n] - x_1[n] * h[n] * \delta[n-4]$$

$$y_2[n] = y_1[n] - y_1[n-4] = (n+1)u[n] - (n+1-4)u[n-4]$$

Per $n = 0, 1, 2, 3$, $u[n] = 1$ mentre $u[n-4] = 0$; per $n > 3$ $u[n] = 1$ e $u[n-4] = 1$ e quindi

$$y_2[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n+1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ (n+1) - (n+1-4) = 4 & n > 3 \end{cases}$$

In sostanza, $y_2[n]$ cresce linearmente da 1 a 4 nei primi 4 campioni ($n = 0, 1, 2, 3$) e poi resta costante e pari a 4 per ogni $n > 3$.

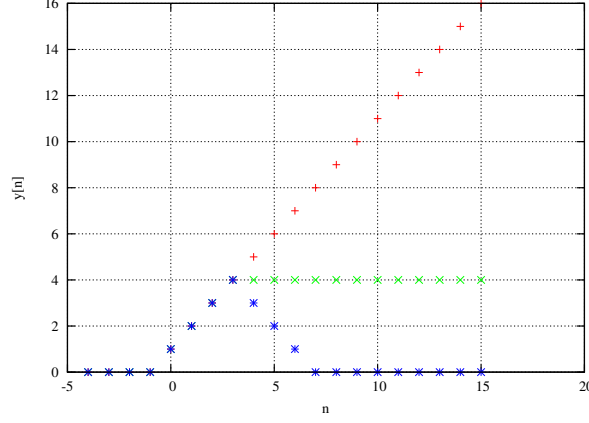


Figura 1.63: Per il sistema dell'esercizio 3 uscite $y_1[n]$ (rosso), $y_2[n]$ (verde) e $y_3[n]$ (blu) ottenute tramite simulazione.

- (f) Il segnale $x_3[n]$ può essere visto come il segnale $x_2[n] = p_4[n]$ meno il segnale $x_2[n - 4] = p_4[n - 4]$. L'uscita $y_3[n]$ può ancora essere ottenuta sfruttando la linearità del sistema come

$$\begin{aligned} y_3[n] &= y_2[n] - y_2[n - 4] \\ &= ((n + 1)u[n] - (n + 1 - 4)u[n - 4]) \\ &\quad - ((n + 1 - 4)u[n - 4] - (n + 1 - 4 - 4)u[n - 4 - 4]) \\ y_3[n] &= (n + 1)u[n] - 2(n - 3)u[n - 4] + (n - 7)u[n - 8] \end{aligned}$$

Si noti che, nella precedente espressione di $y_3[n]$, $u[n]$ dà contributo per $n \geq 0$, $u[n - 4]$ dà contributo per $n \geq 4$, $u[n - 8]$ dà contributo per $n \geq 8$. Pertanto

$$y_3[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n + 1 & n = 0, 1, 2, 3 \\ (n + 1) - 2(n - 3) = -n + 7 & n = 4, 5, 6, 7 \\ (n + 1) - 2(n - 3) + (n - 7) = 0 & n > 7 \end{cases}$$

In sostanza $y_3[n]$ ha solo 8 campioni non-nulli e ha l'aspetto di un segnale triangolare campionato. La figura 1.63 mostra le tre uscite, ottenute tramite simulazione con Matlab/Octave.

4. (a) I campioni del segnale

$$x(t) = t e^{-t/t_0} u(t)$$

sono

$$x[n] = x(nT_c) = nT_c e^{-nT_c/t_0} u(nT_c)$$

e $T_c = t_0/10$, quindi

$$x[n] = nT_c e^{-n/10} u[n] = T_c n a^n u[n]$$

dove $a = \exp(-0.1)$. Si noti che $u(nT_c)$ per $n = 0$ può essere definito pari a 0, a 1 o a 1/2 (a seconda della definizione che si dà al segnale $u(t)$ per $t = 0$, cosa che

dipende dal contesto, dagli autori, ecc.); in questo caso, però, il segnale $x(t)$ vale comunque zero in $t = 0$ e quindi il valore che si attribuisce a $u(nT_c)$ per $n = 0$ è totalmente influente perché viene moltiplicato per n . Si è deciso, per semplicità di porre $u(nT_c) = u[n]$ (valore 1 per $n = 0$).

La trasformata zeta di $x[n]$ è

$$X(z) = T_c \frac{za}{(z-a)^2}$$

Il sistema FIR ha funzione di trasferimento

$$H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} = z^{-2}(z - \alpha)^2$$

La trasformata zeta dell'uscita $y[n]$ è dunque

$$Y(z) = X(z)H(z) = T_c \frac{za}{(z-a)^2} z^{-2}(z - \alpha)^2.$$

Finché $Y(z)$ ha dei poli, il segnale $y[n]$ ha durata infinita (vedasi distinzione tra filtri FIR e IIR). Per limitare la durata di $y[n]$ è dunque necessario annullare il polo doppio in $z = a$ di $X(z)$ con lo zero doppio in $z = \alpha$ del filtro FIR, cosa che si ottiene ponendo $\alpha = a = \exp(-0.1)$. Con questa condizione, si ha

$$Y(z) = T_c a z^{-1}$$

cioè

$$y[n] = T_c a \delta[n - 1],$$

segnale tempo-discreto con un solo campione diverso da zero.

(b) Il segnale all'uscita del FIR e all'ingresso del filtro ricostruttore è

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]v(t - nT_c)$$

ma solo il termine $n = 1$ dà un effettivo contributo alla sommatoria, visto che per tutti gli altri valori di n $y[n] = 0$. In sostanza il segnale $y_s(t)$ si riduce a

$$y(t) = y[1]v(t - T_c) = T_c a v(t - T_c)$$

ed il segnale all'uscita del filtro ricostruttore è dunque

$$w(t) = y(t) * h_R(t)$$

dove $h_R(t)$ è la risposta all'impulso del filtro ricostruttore, che ha funzione di trasferimento

$$H_R(f) = \frac{p_{f_c}(f)}{S(f)}.$$

Poiché la funzione di trasferimento del filtro è relativamente semplice, mentre la risposta all'impulso $h_R(t)$ è di difficile derivazione, conviene trovare $w(t)$ come anti-trasformata di $W(f) = Y(f)H_R(f)$. La trasformata di Fourier di $y(t)$ è

$$Y(f) = T_c a S(f) e^{-j2\pi f T_c}$$

e quindi

$$W(f) = T_c a e^{-j2\pi f T_c} p_{f_c}(f)$$

La antitrasformata di $p_{f_c}(f)$ è

$$\mathcal{F}^{-1}\{p_{f_c}(f)\} = f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t}$$

e quindi

$$w(t) = T_c a f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} * \delta(t - T_c) = a \frac{\sin(\pi f_c(t - T_c))}{\pi f_c(t - T_c)}$$

5. Conviene introdurre il segnale ausiliario $w[n]$ come definito nella figura 1.64. Si ha

$$Y(z) = H_2(z)[X_2(z) + H_1(z)W(z)]$$

$$W(z) = X_1(z) + \gamma Y(z)$$

che consente di scrivere

$$Y(z) = H_2(z)[X_2(z) + H_1(z)(X_1(z) + \gamma Y(z))]$$

$$Y(z)[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)] = H_1(z)H_2(z)X_1(z) + H_2(z)X_2(z)$$

$$Y(z) = \frac{H_1(z)H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]}X_1(z) + \frac{H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]}X_2(z) = G_1(z)X_1(z) + G_2(z)X_2(z)$$

Si ottiene dunque

$$G_1(z) = \frac{H_1(z)H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]}, \quad G_2(z) = \frac{H_2(z)}{[1 - \gamma H_1(z)H_2(z)]}$$

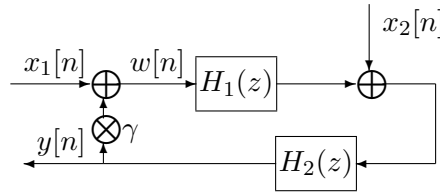


Figura 1.64: Sistema per l'esercizio 5, con la definizione del segnale ausiliario $w[n]$.

Se

$$H_1(z) = \frac{z}{z - \alpha}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z - \beta}, \quad \gamma \neq 1$$

allora

$$G_1(z) = \frac{z^2}{(z - \alpha)(z - \beta) - \gamma z^2} = \frac{z^2}{(1 - \gamma)z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta}$$

$$G_2(z) = \frac{z(z - \alpha)}{(z - \alpha)(z - \beta) - \gamma z^2} = \frac{z(z - \alpha)}{(1 - \gamma)z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta}$$

Poiché i denominatori di $G_1(z)$ e $G_2(z)$ sono entrambi di secondo grado (sicuramente, perché $\gamma \neq 1$) e si annullano per valori di z diversi da 0 o α , sia $G_1(z)$ sia $G_2(z)$ hanno due poli e due zeri. Se $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.8$, il denominatore per $G_1(z)$ e $G_2(z)$ diventa:

$$d(z) = (1 - \gamma)z^2 - 1.3z + 0.4 \quad (1.11)$$

e si annulla nei due poli

$$p_{1,2} = \frac{0.65}{1 - \gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{0.65}{1 - \gamma}\right)^2 - \frac{0.4}{1 - \gamma}} = \frac{0.65}{1 - \gamma} \pm \frac{\sqrt{(0.65)^2 - 0.4(1 - \gamma)}}{1 - \gamma}$$

$$p_{1,2} = \frac{0.65}{1 - \gamma} \pm \frac{\sqrt{0.0225 + 0.4\gamma}}{1 - \gamma}$$

(a) Se

$$0.0225 + 0.4\gamma < 0, \implies \gamma < -\frac{0.0225}{0.4} = -0.05625$$

i due poli sono complessi coniugati:

$$p_{1,2} = \frac{0.65}{1 - \gamma} \pm j \frac{\sqrt{-(0.0225 + 0.4\gamma)}}{1 - \gamma}$$

e

$$|p_{1,2}|^2 = \frac{(0.65)^2}{(1 - \gamma)^2} + \frac{-(0.0225 + 0.4\gamma)}{(1 - \gamma)^2} = \frac{0.4(1 - \gamma)}{(1 - \gamma)^2} = \frac{0.4}{1 - \gamma} < 1$$

(infatti $1 - \gamma > 1$ essendo γ negativo). Poiché i due poli hanno modulo minore di 1, il sistema è sempre stabile per $\gamma < -0.05625$

(b) Se

$$0.0225 + 0.4\gamma > 0, \implies \gamma > -\frac{0.0225}{0.4} = -0.05625$$

i due poli sono reali:

$$p_{1,2} = \frac{0.65}{1 - \gamma} \pm \frac{\sqrt{0.0225 + 0.4\gamma}}{1 - \gamma}$$

Per $\gamma = 1$,

$$p_{1,2} = 0.65 \frac{1 \pm \gamma}{1 - \gamma}$$

ed un polo vale zero, mentre l'altro vale infinito, pertanto il sistema è instabile per $\gamma = 1$. In generale, il polo che può assumere modulo maggiore di 1 è

$$p_1 = \frac{0.65 + \sqrt{0.0225 + 0.4\gamma}}{1 - \gamma}$$

Per $\gamma < 1$, sia il numeratore sia il denominatore di p_1 sono positivi ed il modulo di p_1 è minore di 1 se

$$0.65 + \sqrt{0.0225 + 0.4\gamma} < 1 - \gamma, \implies \gamma^2 - 1.1\gamma + 0.1 > 0 \implies \gamma < 0.1$$

(l'altra soluzione $\gamma > 1$ non è accettabile perché si è partiti dall'ipotesi $\gamma < 1$). Pertanto il sistema è stabile anche nell'intervallo $\gamma \in [-0.05625, 0.1[$, mentre è sicuramente instabile per $\gamma \in [0.1, 1]$.

Per $\gamma > 1$ si ha

$$p_1 = \frac{0.65 + \sqrt{0.0225 + 0.4\gamma}}{1 - \gamma}$$

con il denominatore negativo ed il numeratore positivo; pertanto p_1 è negativo e può essere minore di -1. Perché il sistema sia stabile deve essere

$$p_1 > -1, \quad \implies \quad 0.65 + \sqrt{0.0225 + 0.4\gamma} < \gamma - 1$$

$$\gamma^2 - 3.7\gamma + 2.7 > 0, \quad \implies \quad \gamma > 2.7$$

(l'altra soluzione $\gamma < 1$ non è accettabile perché si è partiti dall'ipotesi $\gamma > 1$).

In sostanza il sistema è stabile anche per $\gamma > 2.7$, mentre è instabile per $\gamma \in [0.1, 2.7]$. Si può verificare (per controllare la correttezza dei calcoli) che nella (1.11) $d(z) = 0$ per $z = 1$ quando $\gamma = 0.1$ e $d(z) = 0$ per $z = -1$ quando $\gamma = 2.7$.

1.10 Esercitazione 10

1. Si consideri un test per individuare la presenza di una data malattia (ad esempio TBC, HIV, ecc). Si usi il simbolo P per indicare che il risultato del test è positivo (si deduce che il paziente è malato) ed il simbolo N per indicare che il risultato del test è negativo (si deduce che il paziente è sano). Si usi il simbolo m per indicare che il paziente è effettivamente malato ed il simbolo s per indicare che è sano. È dato quanto segue:
 - $P\{P|m\} = 0.9$ (il test risulta positivo nel 90% dei casi nel caso di pazienti effettivamente malati, caso detto “vero positivo”, $P\{P|m\}$ è detta “sensibilità del test”)
 - $P\{P|s\} = 0.05$ (il test risulta positivo nel 5% dei casi nel caso di pazienti effettivamente sani, caso detto “falso positivo”)
 - $P\{m\} = 0.1$ (incidenza della malattia per la popolazione in esame)

Nota: $P\{N|s\}$ è detto “specificità del test”; in genere si vuole che il test abbia valori elevati sia per la specificità sia per la sensibilità. Si calcolino:

- (a) la probabilità che il test effettuato su una persona scelta a caso sia positivo
 - (b) la probabilità che una persona sia effettivamente malata sapendo che il suo test è risultato positivo
 - (c) la probabilità che una persona sia effettivamente sana sapendo che il suo test è risultato positivo
 - (d) la probabilità che una persona sia effettivamente sana sapendo che il suo test è risultato negativo
 - (e) la probabilità che una persona sia effettivamente malata sapendo che il suo test è risultato negativo
 - (f) la probabilità che il test fallisca
2. In un'industria farmaceutica ci sono 3 linee di produzione (A, B, C) di un dato farmaco in blister. La linea A produce il 55% dei blister ed il 2% dei suoi blister è difettoso (manca una pastiglia, ecc). La linea B produce il 30% dei blister ed il 3% è difettoso. La linea C produce il restante 15% dei blister ed il 6% è difettoso. Qual è la probabilità che un blister scelto a caso tra quelli prodotti sia difettoso? Qual è la probabilità che un blister difettoso scelto a caso provenga dalla linea C ?
 3. Si vuole verificare l'efficacia di una data cura per una data malattia. Il gruppo di malati viene diviso in due sottogruppi di pari numerosità; al primo sottogruppo viene somministrata la medicina (la si indichi con M) mentre al secondo viene somministrato un placebo (lo si indichi con P). Alla fine della sperimentazione, si misura la probabilità di guarigione nei due sottogruppi: $P\{G|M\} = 0.5$ e $P\{G|P\} = 0.2$. Il paziente x , guarito, ed il paziente y , non guarito, vorrebbero sapere che cosa è stato somministrato loro. Qual è la probabilità che x abbia ricevuto la medicina? qual è la probabilità che x abbia ricevuto il placebo? E per y ?
 4. Si vuole studiare l'eventuale associazione tra una data malattia e la presenza di due possibili marker (A e B) nel sangue del paziente. Si sa che il 10% della popolazione è malata (quindi $P\{M\} = 0.1$), il 20% della popolazione ha nel sangue il marker A , il 10% ha il marker B , il 2% della popolazione è malata e ha il marker A , il 5% della popolazione è malata e ha il marker B . Si vuole stabilire se si può rilevare la malattia in un dato paziente cercando i due marker nel suo sangue. Si calcolino:

- (a) $P\{A|M\}$ e $P\{B|M\}$
 - (b) $P\{M|A\}$ e $P\{M|B\}$
 - (c) Si confrontino $P\{A\}$ e $P\{A|M\}$, $P\{B\}$ e $P\{B|M\}$. Che cosa si deduce?
 - (d) Si confrontino $P\{M\}$ e $P\{M|A\}$, $P\{M\}$ e $P\{M|B\}$. Che cosa si deduce?
5. All'interno della popolazione l'allele A (albino) è presente in $1/4$ degli individui, l'allele N (normale) è presente in $3/4$ della popolazione. L'allele A è di tipo recessivo, e ciò significa che un individuo con genotipo NA o NN ha fenotipo normale, mentre solo l'individuo con genotipo AA ha fenotipo albino. Una donna con genotipo NA sposa un uomo con fenotipo normale, ma con genotipo non noto. Qual è la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele A ? Qual è la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele N ? Qual è la probabilità che un figlio abbia genotipo AA , NA , NN ?

Soluzione

1. I dati a disposizione sono i seguenti:

$$P\{P|m\} = 0.9, \quad P\{P|s\} = 0.05, \quad P\{m\} = 0.1$$

e si ricavano le seguenti ulteriori probabilità, che servono nella soluzione dell'esercizio:

$$P\{N|m\} = 1 - P\{P|m\} = 0.1, \quad (\text{caso di falso negativo})$$

$$P\{N|s\} = 1 - P\{P|s\} = 0.95, \quad (\text{caso di vero negativo})$$

$$P\{s\} = 1 - P\{m\} = 0.9, \quad (\text{probabilità che una persona sia effettivamente sana})$$

Le precedenti probabilità derivano dalle seguenti considerazioni:

- se una persona è malata, il test risulta o positivo o negativo (non esistono altre possibilità), i due eventi $\{N|m\}$ e $\{P|m\}$ sono dunque complementari (mutuamente esclusivi ed esaustivi dello spazio campione) e quindi la probabilità del primo evento è pari a 1 (probabilità dell'evento certo) meno la probabilità del secondo evento: $P\{N|m\} = 1 - P\{P|m\}$. Si noti che il condizionamento sul fatto che il paziente è malato limita lo spazio campione alle sole persone malate, e, all'interno di questo spazio campione, si identificano i due sottoinsiemi complementari legati ai due possibili risultati del test.
 - per il caso di paziente sano vale lo stesso ragionamento del punto precedente (questa volta lo spazio campione è costituito dai sani, che vengono divisi nei due insiemi complementari legati ai due possibili risultati del test)
 - data una persona scelta a caso (lo spazio campione è l'insieme di tutte le persone), questa o è malata o è sana (ancora una volta due sottoinsiemi complementari), e quindi $P\{s\} = 1 - P\{m\}$.
- (a) La probabilità che il test risulti positivo per una persona scelta a caso può essere calcolato usando il teorema della probabilità totale, dividendo lo spazio campione (le persone) nei due sottoinsiemi mutuamente esclusivi ed esaustivi: persone effettivamente malate e persone effettivamente sane. Si ha dunque

$$P\{P\} = P\{P, m\} + P\{P, s\} = P\{P|m\}P\{m\} + P\{P|s\}P\{s\} = 0.9 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.135$$

La seconda uguaglianza si ottiene applicando la regola di Bayes. La probabilità che il test effettuato su una persona scelta a caso sia negativo, sarà poi

$$P\{N\} = 1 - P\{P\} = 0.865$$

perché il test o è positivo o è negativo.

(b) Viene chiesto di calcolare $P\{m|P\}$:

$$P\{m|P\} = \frac{P\{m, P\}}{P\{P\}} = \frac{P\{P|m\}P\{m\}}{P\{P\}} = \frac{P\{P|m\}P\{m\}}{P\{P|m\}P\{m\} + P\{P|s\}P\{s\}} = \frac{0.9 \times 0.1}{0.135} = \frac{2}{3}$$

Si noti che la probabilità che la persona con test positivo sia effettivamente malata è solo 0.66 (in media solo 66 persone su 100 tra quelle con test positivo sono effettivamente malate). Si provi a ricalcolare questa probabilità considerando una malattia più rara, per la quale $P\{m\} = 10^{-4}$, tenendo gli stessi valori per $P\{P|m\}$ e

$P\{P|s\}$: si avrebbe $P\{m|P\} = (0.9 \times 10^{-4}) / (0.9 \times 10^{-4} + 0.05 \times 0.9999) = 1.8 \times 10^{-3}$ (il commento è che il test è totalmente inutile, visto che non riesce ad identificare le persone malate: solo 2 persone circa su 1000 sono effettivamente malate anche se il test è positivo). L'unico modo per avere $P\{m|P\}$ elevato è avere $P\{P|m\}$ e $P\{N|s\}$ tendenti a 1 (alta specificità e alta sensibilità). Nel caso $P\{m\} = 0.1$, con $P\{P|m\} = 0.99$ e $P\{P|s\} = 0.01$, si ottiene $P\{m|P\} \simeq 0.92$ (questa volta il test è più affidabile). In generale, meno probabile è la malattia e più devono essere elevati i valori di $P\{P|m\}$ e $P\{N|s\}$.

(c) Viene chiesto di calcolare $P\{s|P\}$:

$$P\{s|P\} = \frac{P\{s, P\}}{P\{P\}} = \frac{P\{P|s\}P\{s\}}{P\{P\}} = \frac{0.05 \times 0.9}{0.135} = \frac{1}{3}$$

Si poteva anche calcolare direttamente

$$P\{s|P\} = 1 - P\{m|P\} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(d) Viene chiesto di calcolare $P\{s|N\}$:

$$P\{s|N\} = \frac{P\{s, N\}}{P\{N\}} = \frac{P\{N|s\}P\{s\}}{P\{N\}} = \frac{0.95 \times 0.9}{0.865} = 0.9884$$

(e) Viene chiesto di calcolare $P\{m|N\}$:

$$P\{m|N\} = 1 - P\{s|N\} = 0.0116$$

(f) Si indichi con F il fallimento del test; occorre calcolare $P\{F\}$ usando il test su una persona scelta a caso. Il test può fallire in due modi diversi: o perché risulta positivo su una persona sana o perché risulta negativo su una persona malata. Conviene dunque calcolare la probabilità richiesta usando il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P\{F\} &= P\{F, m\} + P\{F, s\} = P\{F|m\}P\{m\} + P\{F|s\}P\{s\} \\ &= P\{N|m\}P\{m\} + P\{P|s\}P\{s\} = 0.1 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.055 \end{aligned}$$

2. Dai dati si evincono le seguenti probabilità:

$$P\{A\} = 0.55, \quad P\{D|A\} = 0.02$$

$$P\{B\} = 0.30, \quad P\{D|B\} = 0.03$$

$$P\{C\} = 0.15, \quad P\{D|C\} = 0.06$$

dove A , B e C indicano le linee di produzione e D indica il fatto che il blister è difettoso. Occorre calcolare $P\{D\}$ e $P\{C|D\}$. Per calcolare $P\{D\}$ conviene usare ancora il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} P\{D\} &= P\{D, A\} + P\{D, B\} + P\{D, C\} = P\{D|A\}P\{A\} + P\{D|B\}P\{B\} + P\{D|C\}P\{C\} \\ &= 0.02 \times 0.55 + 0.03 \times 0.3 + 0.06 \times 0.15 = 0.029. \end{aligned}$$

Rispetto all'esercizio precedente, in questo caso gli eventi mutuamente esclusivi ed esauritivi sono 3 (le tre linee di produzione).

La probabilità condizionata $P\{C|D\}$ può essere calcolata con la regola di Bayes:

$$P\{C|D\} = \frac{P\{C, D\}}{P\{D\}} = \frac{P\{D|C\}P\{C\}}{P\{D\}} = \frac{0.06 \times 0.15}{0.029} \simeq 0.31$$

3. Viene chiesto di calcolare $P\{M|G\}$, $P\{P|G\}$, $P\{M|\overline{G}\}$, $P\{P|\overline{G}\}$, dove \overline{G} significa paziente non guarito (il complementare di G); vengono fornite le probabilità $P\{G|M\}$, $P\{G|P\}$ e viene detto che metà dei pazienti sono stati trattati con il placebo e metà con la medicina: pertanto nello spazio campione delle persone trattate, abbiamo $P\{M\} = 0.5$ e $P\{P\} = 0.5$. Si ha dunque:

$$P\{M|G\} = \frac{P\{M, G\}}{P\{G\}} = \frac{P\{G|M\}P\{M\}}{P\{G|M\}P\{M\} + P\{G|P\}P\{P\}} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.5 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5} = \frac{0.025}{0.35} \simeq 0.714$$

$$P\{P|G\} = 1 - P\{M|G\} \simeq 0.286$$

$$P\{M|\overline{G}\} = \frac{P\{M, \overline{G}\}}{P\{\overline{G}\}} = \frac{P\{\overline{G}|M\}P\{M\}}{1 - P\{G\}} = \frac{0.5 \times 0.5}{0.65} \simeq 0.384$$

$$P\{P|\overline{G}\} = 1 - P\{M|\overline{G}\} \simeq 0.616$$

4. I dati a disposizione sono:

$$P\{M\} = 0.1, \quad P\{A\} = 0.2, \quad P\{B\} = 0.1, \quad P\{A, M\} = 0.02, \quad P\{B, M\} = 0.05$$

e vengono chieste le probabilità

- (a) $P\{A|M\}$, $P\{B|M\}$:

$$P\{A|M\} = \frac{P\{A, M\}}{P\{M\}} = \frac{0.02}{0.1} = 0.2 = P\{A\}$$

$$P\{B|M\} = \frac{P\{B, M\}}{P\{M\}} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5 \neq P\{B\}$$

- (b) $P\{M|A\}$, $P\{M|B\}$:

$$P\{M|A\} = \frac{P\{A, M\}}{P\{A\}} = \frac{0.02}{0.2} = 0.1 = P\{M\}$$

$$P\{M|B\} = \frac{P\{B, M\}}{P\{B\}} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5 \neq P\{M\}$$

Si deduce che M e A sono eventi statisticamente indipendenti (quindi il marker A non dà informazioni su presenza o assenza della malattia), mentre gli eventi B e M sono statisticamente dipendenti (quindi il marker B può essere usato per rivelare la presenza della malattia).

5. L'uomo ha fenotipo normale, ma il suo genotipo può essere NN oppure NA , mentre sicuramente non può essere AA , poiché altrimenti avrebbe fenotipo albino. Indichiamo con la N_f il fenotipo normale, con A_f il fenotipo albino, e con NN_g , NA_g , AA_g i genotipi NN , NA , AA , rispettivamente. Occorre calcolare preliminarmente quanto segue:

- Le probabilità che un individuo a caso abbia genotipo AA_g , NN_g , NA_g . La probabilità $P\{NN_g\}$ è la probabilità che un individuo (qualsiasi, di cui non si conosce il fenotipo) abbia genotipo NN_g , e questa probabilità si calcola attraverso la probabilità che un generico individuo abbia l'allele N : poiché l'allele N ha probabilità $P\{N\} = 3/4$,

$$P\{NN_g\} = P\{N\}P\{N\} = 3/4 \times 3/4 = 9/16.$$

Si è usato il fatto che i due alleli sono indipendenti l'uno dall'altro, provenendo da due individui (i genitori) diversi e “statisticamente indipendenti”.

Parimenti, si ha

$$P\{AA_g\} = 1/4 \times 1/4 = 1/16.$$

Gli altri individui (né AA_g né NN_g) sono di tipo NA_g e

$$P\{NA_g\} = 1 - P\{AA_g\} - P\{NN_g\} = 6/16.$$

Si noti che $P\{NA_g\}$ indica la probabilità che si verifichi la sequenza non ordinata in cui un allele è N e l'altro è A ; la probabilità della sequenza ordinata $NA_{g,o}$ è $3/4 \times 1/4 = 3/16$, la probabilità della sequenza ordinata $AN_{g,o}$ è $1/4 \times 3/4 = 3/16$, la probabilità della sequenza non ordinata AN_g è la probabilità che si verifichi la sequenza ordinata $AN_{g,o}$ oppure la sequenza ordinata $NA_{g,o}$, cioè $3/16 + 3/16 = 6/16$.

- La probabilità che un individuo qualsiasi abbia fenotipo N_f può essere ottenuta con il teorema della probabilità totale: il genotipo è uno e uno solo tra AA_g , NN_g , NA_g (eventi mutuamente esclusivi e esaustivi) e quindi

$$\begin{aligned} P\{N_f\} &= P\{N_f, NN_g\} + P\{N_f, AA_g\} + P\{N_f, NA_g\} \\ &= P\{N_f|NN_g\}P\{NN_g\} + P\{N_f|AA_g\}P\{AA_g\} + P\{N_f|NA_g\}P\{NA_g\} \\ &= 1 \times P\{NN_g\} + 0 \times P\{AA_g\} + 1 \times P\{NA_g\} \\ &= P\{NN_g\} + P\{NA_g\} = 9/16 + 6/16 = 15/16 \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che il fenotipo è sicuramente N_f (cioè ha probabilità 1 di verificarsi) se il genotipo è NN_g , è sicuramente N_f se il genotipo è NA_g , mentre non può assolutamente essere N_f (cioè ha probabilità 0 di verificarsi) se il genotipo è AA_g .

Questa probabilità poteva anche essere calcolata più velocemente dicendo che un individuo ha fenotipo N_f se ha genotipo NN_g oppure NA_g , cioè:

$$P\{N_f\} = P\{\{NN_g\} \cup \{NA_g\}\} = P\{NN_g\} + P\{NA_g\} = 15/16.$$

Si è usato il terzo assioma delle probabilità: la probabilità dell'unione di due eventi è pari alla somma delle due probabilità se i due eventi sono mutuamente esclusivi, come in questo caso (l'individuo è NN_g oppure NA_g , non può essere contemporaneamente NN_g e NA_g).

Si poteva ancora calcolare la probabilità $P\{N_f\}$ andando prima a calcolare la probabilità $P\{A_f\}$, più facile da calcolare perché il fenotipo è A_f se e solo se il genotipo è AA_g (i due eventi A_f e AA_g sono equivalenti, si verificano negli stessi individui all'interno della popolazione):

$$P\{A_f\} = P\{AA_g\} = 1/16.$$

Poiché il fenotipo è A_f oppure N_f (eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi), si ha

$$P\{N_f\} = 1 - P\{A_f\} = 15/16$$

- La probabilità condizionata che l'uomo abbia genotipo NN_g , sapendo che è di fenotipo N_f :

$$P\{NN_g|N_f\} = \frac{P\{NN_g, N_f\}}{P\{N_f\}} = \frac{P\{N_f|NN_g\}P\{NN_g\}}{P\{N_f\}} = \frac{P\{NN_g\}}{P\{N_f\}} = \frac{9/16}{15/16} = 9/15 = 3/5$$

(infatti $P\{N_f|NN_g\} = 1$: se il genotipo è NN_g , sicuramente il fenotipo è N_f).

La probabilità condizionata che l'uomo abbia genotipo NA_g , sapendo che è di fenotipo N_f , è:

$$P\{NA_g|N_f\} = \frac{P\{NA_g, N_f\}}{P\{N_f\}} = \frac{P\{N_f|NA_g\}P\{NA_g\}}{P\{N_f\}} = \frac{P\{NA_g\}}{P\{N_f\}} = \frac{6/16}{15/16} = 6/15 = 2/5$$

Quest'ultima probabilità poteva anche essere calcolata osservando che, posto che il fenotipo è N_f , allora l'uomo ha genotipo NN_g oppure NA_g (eventi mutuamente esclusivi e esaustivi per lo spazio campione costituito dagli individui con fenotipo N_f):

$$P\{NA_g|N_f\} = 1 - P\{NN_g|N_f\} = 1 - 3/5 = 2/5$$

A questo punto si può calcolare la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele N , utilizzando ancora una volta il teorema della probabilità totale:

$$P\{N|N_f\} = P\{N, NA_g|N_f\} + P\{N, NN_g|N_f\}$$

(il condizionamento va mantenuto in quanto sappiamo che l'uomo ha fenotipo N_f e ciò influenza il suo genotipo). Usando la regola di Bayes, abbiamo poi

$$P\{N|N_f\} = P\{N|N_f, NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|N_f, NN_g\}P\{NN_g|N_f\}$$

La notazione può apparire difficile, ma è corretta: $P\{N|N_f, NA_g\}$ è la probabilità che il figlio riceva dal padre l'allele N sapendo che il padre ha fenotipo N_f e genotipo NA_g (le due condizioni sono entrambe presenti). Al posto della virgola nella descrizione dell'evento condizionante si può usare il simbolo \cap :

$$P\{N|N_f\} = P\{N|N_f \cap NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|N_f \cap NN_g\}P\{NN_g|N_f\}.$$

Volendo, possiamo semplificare la notazione scrivendo $P'\{N\}$ al posto di $P\{N|N_f\}$, e usando in generale l'apice per indicare il condizionamento legato al fenotipo N_f ; in questo modo abbiamo

$$P'\{N\} = P'\{N|NA_g\}P\{NA_g\} + P'\{N|NN_g\}P\{NN_g\}$$

che ricalca la solita formula.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} P\{N|N_f\} &= P\{N|N_f, NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|N_f, NN_g\}P\{NN_g|N_f\} \\ &= P\{N|NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|NN_g\}P\{NN_g|N_f\} \\ &= 1/2 \times 2/5 + 1 \times 3/5 = 4/5 \end{aligned}$$

Infatti, $P\{N|N_f, NA_g\} = P\{N|NA_g\}$ in quanto se il genotipo è NA_g , allora sicuramente il fenotipo è N_f e, tra le due condizioni N_f ed NA_g , la più restrittiva è NA_g . In formule:

$$P\{N|N_f, NA_g\} = \frac{P\{N, N_f, NA_g\}}{P\{N_f, NA_g\}} = \frac{P\{N_f|N, NA_g\}P\{N, NA_g\}}{P\{N_f|NA_g\}P\{NA_g\}} = \frac{P\{N, NA_g\}}{P\{NA_g\}} = P\{N|NA_g\}$$

in quanto $P\{N_f|N, NA_g\} = 1$ e $P\{N_f|NA_g\} = 1$ (in realtà non interessa affatto sapere che l'uomo passi al figlio l'allele N quando calcoliamo la probabilità che abbia fenotipo N_f e $P\{N_f|NNA_g\} = P\{N_f|NA_g\} = 1$).

Ovviamente l'uomo (qualunque sia il suo fenotipo) o passa al figlio l'allele N oppure passa l'allele A (eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi) e quindi, anche il presenza di condizionamento N_f , si ha

$$P\{A|N_f\} = 1 - P\{N|N_f\} = 1 - 4/5 = 1/5.$$

Possiamo adesso calcolare le probabilità dei vari genotipi del figlio, considerando adesso anche la madre, che sappiamo essere di genotipo NA_g . Per evitare ambiguità useremo adesso una notazione diversa: $_fAA_g$ indica che il figlio ha genotipo AA_g , $_mNA_g$ indica che la madre ha genotipo NA_g , $_pNN_g$ indica che il padre ha genotipo NN_g , ecc.

$$\begin{aligned} P\{_fAA_g|_mNA_g, _pN_f\} &= P\{_fAA_g|_mNA_g, _pNN_g, _pN_f\}P\{_pNN_g|_pN_f\} \\ &+ P\{_fAA_g|_mNA_g, _pNA_g, _pN_f\}P\{_pNA_g|_pN_f\} \\ &= 0 \times 3/5 + 1/2 \times 1/2 \times 2/5 = 1/10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{_fNN_g|_mNA_g, _pN_f\} &= P\{_fNN_g|_mNA_g, _pNN_g, _pN_f\}P\{_pNN_g|_pN_f\} \\ &+ P\{_fNN_g|_mNA_g, _pNA_g, _pN_f\}P\{_pNA_g|_pN_f\} \\ &= 1/2 \times 3/5 + 1/2 \times 1/2 \times 2/5 = 4/10 = 2/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{_fNA_g|_mNA_g, _pN_f\} &= P\{_fNA_g|_mNA_g, _pNN_g, _pN_f\}P\{_pNN_g|_pN_f\} \\ &+ P\{_fNA_g|_mNA_g, _pNA_g, _pN_f\}P\{_pNA_g|_pN_f\} \\ &= 1/2 \times 3/5 + (1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2) \times 2/5 = 1/2 \end{aligned}$$

Quest'ultima probabilità poteva anche essere calcolata come

$$\begin{aligned} P\{_fNA_g|_mNA_g, _pN_f\} &= 1 - [P\{_fNN_g|_mNA_g, _pN_f\} + P\{_fAA_g|_mNA_g, _pN_f\}] \\ &= 1 - 1/10 - 2/5 = 5/10 = 1/2 \end{aligned}$$

genotipo	fenotipo
AA	A
BB	B
00	0
$B0$	B
$A0$	A
AB	AB

Tabella 1.4: Legame tra genotipo e fenotipo per il sangue.

1.10.1 Ulteriori esercizi

1. All'interno della popolazione l'allele A (albino) è presente in $1/4$ degli individui, l'allele N (normale) è presente in $3/4$ della popolazione. L'allele A è di tipo recessivo, e ciò significa che un individuo con genotipo NA o NN ha fenotipo normale, mentre solo l'individuo con genotipo AA ha fenotipo albino. Una donna con genotipo NA sposa un uomo con fenotipo normale, ma con genotipo non noto. Qual è la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele A ? Qual è la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele N ? Qual è la probabilità che un figlio abbia genotipo AA , NA , NN ?
2. Per i tipi di sangue $A, B, 0$, la frequenza dell'allele A è 0.3 , dell'allele B è 0.1 , e dell'allele 0 è 0.6 . Qual è la probabilità che una persona si di genotipo AA , AB , BB , $A0$, $B0$, 00 ?
3. Si usino le frequenze degli alleli $A, B, 0$ indicate nel problema 2. Una persona con sangue di tipo AB (genotipo) ed una persona con fenotipo A e genotipo sconosciuto hanno un figlio.
 - (a) Qual è la probabilità che il figlio abbia genotipo $AA, AB, BB, A0, B0, 00$?
 - (b) Si scopre che il figlio ha fenotipo A . Qual è la probabilità che sia di genotipo $AA, A0$?
 - (c) Se il figlio è $A0$, qual è la probabilità che il genitore con sangue di tipo A abbia il genotipo $AA, A0$?

Il fenotipo dipende dal genotipo come indicato nella tabella 1.4: gli alleli A e B sono codominanti (si esprimono sempre: dominano sull'allele 0 e co-dominano tra loro), mentre l'allele 0 è recessivo.

Soluzione

1. L'uomo ha fenotipo normale, ma il suo genotipo può essere NN oppure NA , mentre sicuramente non può essere AA , poiché altrimenti avrebbe fenotipo albino. Indichiamo con la N_f il fenotipo normale, con A_f il fenotipo albino, e con NN_g , NA_g , AA_g i genotipi NN , NA , AA , rispettivamente. Occorre calcolare preliminarmente quanto segue:

- Le probabilità che un individuo a caso abbia genotipo AA_g , NN_g , NA_g . La probabilità $P\{NN_g\}$ è la probabilità che un individuo (qualsiasi, di cui non si conosce il fenotipo) abbia genotipo NN_g , e questa probabilità si calcola attraverso la probabilità che un generico individuo abbia l'allele N : poiché l'allele N ha probabilità $P\{N\} = 3/4$,

$$P\{NN_g\} = P\{N\}P\{N\} = 3/4 \times 3/4 = 9/16.$$

Si è usato il fatto che i due alleli sono indipendenti l'uno dall'altro, provenendo da due individui (i genitori) diversi e "statisticamente indipendenti".

Parimenti, si ha

$$P\{AA_g\} = 1/4 \times 1/4 = 1/16.$$

Gli altri individui (né AA_g né NN_g) sono di tipo NA_g e

$$P\{NA_g\} = 1 - P\{AA_g\} - P\{NN_g\} = 6/16.$$

Si noti che $P\{NA_g\}$ indica la probabilità che si verifichi la sequenza non ordinata in cui un allele è N e l'altro è A ; la probabilità della sequenza ordinata $NA_{g,o}$ è $3/4 \times 1/4 = 3/16$, la probabilità della sequenza ordinata $AN_{g,o}$ è $1/4 \times 3/4 = 3/16$, la probabilità della sequenza non ordinata AN_g è la probabilità che si verifichi la sequenza ordinata $AN_{g,o}$ oppure la sequenza ordinata $NA_{g,o}$, cioè $3/16 + 3/16 = 6/16$.

- La probabilità che un individuo qualsiasi abbia fenotipo N_f può essere ottenuta con il teorema della probabilità totale: il genotipo è uno e uno solo tra AA_g , NN_g , NA_g (eventi mutuamente esclusivi e esaustivi) e quindi

$$\begin{aligned} P\{N_f\} &= P\{N_f \cap NN_g\} + P\{N_f \cap AA_g\} + P\{N_f \cap NA_g\} \\ &= P\{N_f|NN_g\}P\{NN_g\} + P\{N_f|AA_g\}P\{AA_g\} + P\{N_f|NA_g\}P\{NA_g\} \\ &= 1 \times P\{NN_g\} + 0 \times P\{AA_g\} + 1 \times P\{NA_g\} \\ &= P\{NN_g\} + P\{NA_g\} = 9/16 + 6/16 = 15/16 \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che il fenotipo è sicuramente N_f (cioè ha probabilità 1 di verificarsi) se il genotipo è NN_g , è sicuramente N_f se il genotipo è NA_g , mentre non può assolutamente essere N_f (cioè ha probabilità 0 di verificarsi) se il genotipo è AA_g .

Questa probabilità poteva anche essere calcolata più velocemente dicendo che un individuo ha fenotipo N_f se ha genotipo NN_g oppure NA_g , cioè:

$$P\{N_f\} = P\{NN_g \cup NA_g\} = P\{NN_g\} + P\{NA_g\} = 15/16.$$

Si è usato il terzo assioma delle probabilità: la probabilità dell'unione di due eventi è pari alla somma delle due probabilità se i due eventi sono mutuamente esclusivi, come in questo caso (l'individuo è NN_g oppure NA_g , non può essere contemporaneamente NN_g e NA_g).

Si poteva ancora calcolare la probabilità $P\{N_f\}$ andando prima a calcolare la probabilità $P\{A_f\}$, più facile da calcolare perché il fenotipo è A_f se e solo se il genotipo è AA_g (i due eventi A_f e AA_g sono equivalenti, si verificano negli stessi individui all'interno della popolazione):

$$P\{A_f\} = P\{AA_g\} = 1/16.$$

Poiché il fenotipo è A_f oppure N_f (eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi), si ha

$$P\{N_f\} = 1 - P\{A_f\} = 15/16$$

- La probabilità condizionata che l'uomo abbia genotipo NN_g , sapendo che è di fenotipo N_f :

$$\begin{aligned} P\{NN_g|N_f\} &= \frac{P\{NN_g \cap N_f\}}{P\{N_f\}} = \frac{P\{N_f|NN_g\}P\{NN_g\}}{P\{N_f\}} \\ &= \frac{P\{NN_g\}}{P\{N_f\}} = \frac{9/16}{15/16} = 9/15 = 3/5 \end{aligned}$$

(infatti $P\{N_f|NN_g\} = 1$: se il genotipo è NN_g , sicuramente il fenotipo è N_f).

La probabilità condizionata che l'uomo abbia genotipo NA_g , sapendo che è di fenotipo N_f , è:

$$\begin{aligned} P\{NA_g|N_f\} &= \frac{P\{NA_g \cap N_f\}}{P\{N_f\}} = \frac{P\{N_f|NA_g\}P\{NA_g\}}{P\{N_f\}} \\ &= \frac{P\{NA_g\}}{P\{N_f\}} = \frac{6/16}{15/16} = 6/15 = 2/5 \end{aligned}$$

Quest'ultima probabilità poteva anche essere calcolata osservando che, posto che il fenotipo è N_f , allora l'uomo ha genotipo NN_g oppure NA_g (eventi mutuamente esclusivi e esaustivi per lo spazio campione costituito dagli individui con fenotipo N_f):

$$P\{NA_g|N_f\} = 1 - P\{NN_g|N_f\} = 1 - 3/5 = 2/5$$

A questo punto si può calcolare la probabilità che l'uomo passi al figlio l'allele N , utilizzando ancora una volta il teorema della probabilità totale:

$$P\{N|N_f\} = P\{N \cap NA_g|N_f\} + P\{N \cap NN_g|N_f\}$$

(il condizionamento va mantenuto in quanto sappiamo che l'uomo ha fenotipo N_f e ciò influenza il suo genotipo). Usando la regola di Bayes, abbiamo poi

$$P\{N|N_f\} = P\{N|N_f, NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|N_f, NN_g\}P\{NN_g|N_f\}$$

La notazione può apparire difficile, ma è corretta: $P\{N|N_f, NA_g\}$ è la probabilità che il figlio riceva dal padre l'allele N sapendo che il padre ha fenotipo N_f e genotipo NA_g (le due condizioni sono entrambe presenti). Al posto della virgola nella descrizione dell'evento condizionante si può usare il simbolo \cap :

$$P\{N|N_f\} = P\{N|N_f \cap NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|N_f \cap NN_g\}P\{NN_g|N_f\}.$$

Volendo, possiamo semplificare la notazione scrivendo $P'(N)$ al posto di $P\{N|N_f\}$, e usando in generale l'apice per indicare il condizionamento legato al fenotipo N_f ; in questo modo abbiamo

$$P'(N) = P'(N|NA_g)P'(NA_g) + P'(N|NN_g)P'(NN_g)$$

che ricalca la solita formula.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} P\{N|N_f\} &= P\{N|N_f, NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|N_f, NN_g\}P\{NN_g|N_f\} \\ &= P\{N|NA_g\}P\{NA_g|N_f\} + P\{N|NN_g\}P\{NN_g|N_f\} \\ &= 1/2 \times 2/5 + 1 \times 3/5 = 4/5 \end{aligned}$$

Infatti, $P\{N|N_f, NA_g\} = P\{N|NA_g\}$ in quanto se il genotipo è NA_g , allora sicuramente il fenotipo è N_f e, tra le due condizioni N_f ed NA_g , la più restrittiva è NA_g . In formule:

$$\begin{aligned} P\{N|N_f, NA_g\} &= \frac{P\{N \cap N_f \cap NA_g\}}{P\{N_f \cap NA_g\}} = \frac{P\{N_f|N \cap NA_g\}P\{N \cap NA_g\}}{P\{N_f|NA_g\}P\{NA_g\}} \\ &= \frac{P\{N \cap NA_g\}}{P\{NA_g\}} = P\{N|NA_g\} \end{aligned}$$

in quanto $P\{N_f|N \cap NA_g\} = 1$ e $P\{N_f|NA_g\} = 1$ (in realtà non interessa affatto sapere che l'uomo passi al figlio l'allele N quando calcoliamo la probabilità che abbia fenotipo N_f e $P\{N_f|N \cap NA_g\} = P\{N_f|NA_g\} = 1$).

Ovviamente l'uomo (qualunque sia il suo fenotipo) o passa al figlio l'allele N oppure passa l'allele A (eventi mutuamente esclusivi ed esaustivi) e quindi, anche il presenza di condizionamento N_f , si ha

$$P\{A|N_f\} = 1 - P\{N|N_f\} = 1 - 4/5 = 1/5.$$

Possiamo adesso calcolare le probabilità dei vari genotipi del figlio, considerando adesso anche la madre, che sappiamo essere di genotipo NA_g . Per evitare ambiguità useremo adesso una notazione diversa: $_fAA_g$ indica che il figlio ha genotipo AA_g , $_mNA_g$ indica che la madre ha genotipo NA_g , $_pNN_g$ indica che il padre ha genotipo NN_g , ecc.

$$\begin{aligned} P\{_fAA_g|_mNA_g, _pN_f\} &= P\{_fAA_g|_mNA_g, _pNN_g, _pN_f\}P\{_pNN_g|_pN_f\} \\ &+ P\{_fAA_g|_mNA_g, _pNA_g, _pN_f\}P\{_pNA_g|_pN_f\} \\ &= 0 \times 3/5 + 1/2 \times 1/2 \times 2/5 = 1/10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{_fNN_g|_mNA_g, _pN_f\} &= P\{_fNN_g|_mNA_g, _pNN_g, _pN_f\}P\{_pNN_g|_pN_f\} \\ &+ P\{_fNN_g|_mNA_g, _pNA_g, _pN_f\}P\{_pNA_g|_pN_f\} \\ &= 1/2 \times 3/5 + 1/2 \times 1/2 \times 2/5 = 4/10 = 2/5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{_fNA_g|_mNA_g, _pN_f\} &= P\{_fNA_g|_mNA_g, _pNN_g, _pN_f\}P\{_pNN_g|_pN_f\} \\ &+ P\{_fNA_g|_mNA_g, _pNA_g, _pN_f\}P\{_pNA_g|_pN_f\} \\ &= 1/2 \times 3/5 + (1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2) \times 2/5 = 1/2 \end{aligned}$$

Quest'ultima probabilità poteva anche esserle calcolata come

$$\begin{aligned} P\{fNA_g | mNA_g, pN_f\} &= 1 - [P\{fNN_g | mNA_g, pN_f\} + P\{fAA_g | mNA_g, pN_f\}] \\ &= 1 - 1/10 - 2/5 = 5/10 = 1/2 \end{aligned}$$

2. In questo caso è facile calcolare le probabilità $P\{AA_g\}, P\{BB_g\}, P\{00_g\}$ perché non c'è differenza tra sequenza ordinata e non ordinata, cioè, usando la notazione dell'esercizio precedente $P\{AA_{go}\} = P\{AA_g\}$:

$$P\{AA_g\} = P\{A\}P\{A\} = 0.09$$

$$P\{BB_g\} = P\{B\}P\{B\} = 0.01$$

$$P\{00_g\} = P\{0\}P\{0\} = 0.36$$

Per gli altri casi, invece, c'è differenza tra sequenza ordinata e non ordinata, e ci viene chiesta la probabilità della sequenza non ordinata:

$$P\{AB_g\} = P\{AB_{go} \cup BA_{go}\} = P\{AB_{go}\} + P\{BA_{go}\} = 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.3 = 0.06$$

$$P\{A0_g\} = P\{A0_{go} \cup 0A_{go}\} = P\{A0_{go}\} + P\{0A_{go}\} = 0.3 \times 0.6 + 0.6 \times 0.3 = 0.36$$

$$P\{B0_g\} = P\{B0_{go} \cup 0B_{go}\} = P\{B0_{go}\} + P\{0B_{go}\} = 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.1 = 0.12$$

Si noti che la somma di tutte le probabilità appena calcolate è 1, come deve essere, visto che il genotipo è necessariamente uno (e solo uno) tra $AA_g, BB_g, 00_g, AB_g, A0_g, B0_g$. Rispetto all'esercizio precedente, il problema è un po' più complicato perché il numero dei casi possibili è 6 invece di 3.

3. Occorre calcolare preliminarmente le seguenti probabilità:

- Probabilità di ciascuno dei 4 fenotipi (utilizzando i risultati del problema 2):

$$P\{A_f\} = P\{AA_g \cup A0_g\} = P\{AA_g\} + P\{A0_g\} = 0.09 + 0.36 = 0.45$$

$$P\{AB_f\} = P\{AB_g\} = 0.06$$

$$P\{B_f\} = P\{BB_g \cup B0_g\} = P\{BB_g\} + P\{B0_g\} = 0.01 + 0.12 = 0.13$$

$$P\{0_f\} = P\{00_g\} = 0.36$$

Si noti che la somma delle probabilità è 1: il fenotipo è necessariamente uno tra $A_f, B_f, 0_f, AB_f$.

- Probabilità condizionate che la persona abbia genotipo AA_g o $A0_g$, sapendo che ha fenotipo A_f :

$$P\{AA_g | A_f\} = \frac{P\{AA_g \cap A_f\}}{P\{A_f\}} = \frac{P\{AA_g\}}{P\{A_f\}} = \frac{0.09}{0.45} = 1/5$$

$$P\{A0_g | A_f\} = \frac{P\{A0_g \cap A_f\}}{P\{A_f\}} = \frac{P\{A0_g\}}{P\{A_f\}} = \frac{0.36}{0.45} = 4/5$$

Si noti che non è possibile che una persona con fenotipo A_f abbia genotipo $BB_g, B0_g, 00_g, AB_g$.

genotipo padre	genotipo figlio
AA_g	AA_g, AB_g
$A0_g$	$AA_g, A0_g, AB_g, B0_g$

Tabella 1.5: Possibili genotipi del figlio con padre di genotipo indicato nella prima colonna e madre di genotipo AB .

- (a) Per quanto riguarda il genotipo del figlio, usiamo la stessa notazione usata nel problema 1 e aggiungiamo il fatto che la madre ha il genotipo certo AB_g mentre il padre ha fenotipo A_f : in realtà non ha importanza chi dei due abbia genotipo AB_g e chi abbia fenotipo A_f , ma ciò viene specificato semplicemente per aiutare la scrittura. I possibili genotipi del figlio sono indicati nella tabella 1.5. Cominciamo con

$$\begin{aligned}
P\{fAB_g|mAB_g, pA_f\} &= P\{fAB_g|mAB_g, pAA_g\}P\{pAA_g|pA_f\} \\
&+ P\{fAB_g|mAB_g, pA0_g\}P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 1/2 \times P\{pAA_g|pA_f\} + 1/2 \times 1/2 \times P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 1/2 \times 1/5 + 1/4 \times 4/5 = 3/10
\end{aligned}$$

Il figlio ha genotipo AB_g con genitori mAB_g e pAA_g se e solo se la madre fornisce l'allele B , con probabilità $1/2$ (il padre sicuramente fornisce l'allele A); il figlio ha genotipo AB_g con genitori mAB_g e $pA0_g$ se e solo se la madre fornisce l'allele B e il padre fornisce l'allele A , cosa che avviene con probabilità $1/4$.

$$\begin{aligned}
P\{fA0_g|mAB_g, pA_f\} &= P\{fA0_g|mAB_g, pAA_g\}P\{pAA_g|pA_f\} \\
&+ P\{fA0_g|mAB_g, pA0_g\}P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 0 \times P\{pAA_g|pA_f\} + P\{fA0_g|mAB_g, pA0_g\}P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 1/2 \times 1/2 \times 4/5 = 1/5
\end{aligned}$$

Si noti che l'evento $fA0_g$ può verificarsi sotto la condizione $\{mAB_g, pA0_g\}$ solo se la madre passa l'allele A ed il padre l'allele 0 , cosa che si verifica con probabilità $1/4$.

$$\begin{aligned}
P\{fB0_g|mAB_g, pA_f\} &= P\{fB0_g|mAB_g, pAA_g\}P\{pAA_g|pA_f\} \\
&+ P\{fB0_g|mAB_g, pA0_g\}P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 0 \times P\{pAA_g|pA_f\} + P\{fB0_g|mAB_g, pA0_g\}P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 1/2 \times 1/2 \times 4/5 = 1/5
\end{aligned}$$

L'evento $fB0_g$ può verificarsi sotto la condizione $\{mAB_g, pA0_g\}$ solo se la madre passa l'allele B ed il padre l'allele 0 , cosa che si verifica con probabilità $1/4$.

$$\begin{aligned}
P\{fAA_g|mAB_g, pA_f\} &= P\{fAA_g|mAB_g, pAA_g\}P\{pAA_g|pA_f\} \\
&+ P\{fAA_g|mAB_g, pA0_g\}P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 1/2 \times P\{pAA_g|pA_f\} + 1/2 \times 1/2 \times P\{pA0_g|pA_f\} \\
&= 1/2 \times 1/5 + 1/2 \times 1/2 \times 4/5 = 3/10
\end{aligned}$$

L'evento fAA_g può verificarsi sotto la condizione $\{mAB_g, pAA_g\}$ solo se la madre passa l'allele A (probabilità $1/2$), visto che il padre sicuramente passa l'allele A ; L'evento fAA_g può verificarsi sotto la condizione $\{mAB_g, pA0_g\}$ solo se la madre passa l'allele A ed il padre passa l'allele A (probabilità $1/4$).

Quest'ultima probabilità poteva essere calcolata anche come

$$\begin{aligned} P\{fAA_g|mAB_g, pA_f\} &= 1 - [P\{fB0_g|mAB_g, pA_f\} + P\{fA0_g|mAB_g, pA_f\} \\ &\quad + P\{fAB_g|mAB_g, pA_f\}] \end{aligned}$$

- (b) Una volta che si scopre che il figlio ha fenotipo A_f , si eliminano le possibilità (considerate appena sopra) che sia di genotipo fAB_g o $fB0_g$ e restano possibili solo i due casi, che sia di genotipo fAA_g oppure $fA0_g$, che possono verificarsi per i due possibili genotipi del padre pAA_g e $pA0_g$. Si ha:

$$P\{fAA_g|mAB_g, pA_f, fA_f\} = \frac{P\{fAA_g \cap fA_f|mAB_g, pA_f\}}{P\{fA_f|mAB_g, pA_f\}} = \frac{P\{fAA_g|mAB_g, pA_f\}}{P\{fA_f|mAB_g, pA_f\}}$$

$$P\{fA0_g|mAB_g, pA_f, fA_f\} = \frac{P\{fA0_g \cap fA_f|mAB_g, pA_f\}}{P\{fA_f|mAB_g, pA_f\}} = \frac{P\{fA0_g|mAB_g, pA_f\}}{P\{fA_f|mAB_g, pA_f\}}$$

in quanto il genotipo $fA0_g$ implica il fenotipo fA_f ed il genotipo fAA_g implica il fenotipo fA_f . Per terminare il calcolo occorre trovare il denominatore, cioè $P\{fA_f|mAB_g, pA_f\}$, che può essere calcolato a partire dai risultati del punto (a):

$$\begin{aligned} P\{fA_f|mAB_g, pA_f\} &= P\{fAA_g|mAB_g, pA_f\} + P\{fA0_g|mAB_g, pA_f\} \\ &= 1/5 + 3/10 = 1/2 \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$P\{fAA_g|mAB_g, pA_f, fA_f\} = \frac{1/5}{1/2} = 2/5$$

$$P\{fA0_g|mAB_g, pA_f, fA_f\} = \frac{3/10}{1/2} = 3/5$$

- (c) Adesso supponiamo di aver scoperto che il figlio ha genotipo $fA0_g$ e si vuole scoprire, a questo punto, quali sono le probabilità che il genitore di fenotipo pA_f sia di genotipo pAA_g e $pA0_g$. La risposta è semplice perché, visto che la madre ha genotipo mAB_g , il figlio può avere genotipo $fA0_g$ solo se la madre gli ha passato l'allele A ed il padre l'allele 0 ; ma il padre è di fenotipo pA_f e quindi l'unica soluzione possibile è che abbia genotipo $pA0_g$. Si ha dunque

$$P\{pA0_g|fA0_g, mAB_g, pA_f\} = 1$$

$$P\{pAA_g|fA0_g, mAB_g, pA_f\} = 0$$

1.11 Esercitazione 11

1. Si calcoli media μ e varianza σ^2 di

$$\zeta = \xi_1 - \xi_2$$

supponendo che le variabili aleatorie ξ_1 e ξ_2 siano correlate con coefficiente di correlazione $\rho_{1,2}$, e abbiano medie μ_1, μ_2 e varianze σ_1^2, σ_2^2 .

2. Si calcoli media μ_ζ di

$$\zeta = \xi\eta$$

supponendo che le variabili aleatorie ξ e η siano correlate con coefficiente di correlazione $\rho_{\xi,\eta}$, e abbiano medie μ_ξ, μ_η e varianze $\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2$.

3. Si calcolino la media μ_ζ e la varianza σ_ζ^2 di

$$\zeta = \xi\eta$$

supponendo che le variabili aleatorie ξ e η siano statisticamente indipendenti, e abbiano medie μ_ξ, μ_η e varianze $\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2$.

4. Si calcoli la densità di probabilità di

$$\zeta = \xi + \eta$$

essendo ξ variabile aleatoria gaussiana con valor medio μ_ξ e varianza σ_ξ^2 , η variabile aleatoria gaussiana con valor medio μ_η e varianza σ_η^2 , con ξ ed η statisticamente indipendenti. Suggestione: si usi la funzione caratteristica di ζ

$$C_\zeta(p) = E\{e^{jp\zeta}\}$$

e si utilizzi la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left\{e^{-t^2/(2T^2)}\right\} = T\sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 f^2 T^2}$$

5. Si consideri il segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi t/T + \theta)$$

con A costante, T costante, e θ variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

- (a) Si consideri l'istante $t = 0$, in cui

$$x(t)|_{t=0} = x(0) = A \cos(\theta)$$

Si calcolino il valor medio μ_0 e la varianza σ_0^2 della variabile aleatoria $x(0)$.

- (b) Si consideri l'istante $t = T/2$, in cui

$$x(t)|_{t=T/2} = x(T/2) = A \cos(\pi + \theta) = -A \cos(\theta)$$

Si calcolino il valor medio μ_1 e la varianza σ_1^2 della variabile aleatoria $x(T/2)$.

(c) Si consideri l'istante $t = T/4$, in cui

$$x(t)|_{t=T/4} = x(T/4) = A \cos(\pi/2 + \theta) = -A \sin(\theta)$$

Si calcolino il valor medio μ_2 e la varianza σ_2^2 della variabile aleatoria $x(T/4)$.

6. Si ripeta l'esercizio 5, supponendo adesso che θ sia uniformemente distribuita tra 0 e π .

7. Si consideri il segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

con A variabile aleatoria gaussiana con media zero e varianza σ^2 e f_0 parametro costante. Si considerino le due variabili aleatorie

$$\xi = x(t_0), \quad \eta = x(t_1)$$

con t_0 e t_1 parametri non aleatori (valori non specificati in \mathbb{R}).

Si calcolino media e varianza di ξ e η , la media $E\{\xi\eta\}$, il coefficiente di correlazione tra ξ e η . **Difficile:** calcolare la densità di probabilità congiunta di ξ ed η , nel caso in cui $\cos(2\pi f_0 t_0) > 0$ e $\cos(2\pi f_0 t_1) > 0$.

Soluzione

1. Non occorre conoscere la densità di probabilità (d.d.p.) di ξ_1 e ξ_2 (né la d.d.p. congiunta).

$$\mu = E\{\zeta\} = E\{\xi_1 - \xi_2\} = E\{\xi_1\} - E\{\xi_2\} = \mu_1 - \mu_2$$

(si noti che la media è un operatore lineare e non importa se ξ_1 e ξ_2 sono correlate).

$$\begin{aligned}\sigma_\zeta^2 &= E\{(\zeta - \mu_\zeta)^2\} = E\{[(\xi_1 - \mu_1) - (\xi_2 - \mu_2)]^2\} \\ &= E\{[\xi_1 - \mu_1]^2\} + E\{[\xi_2 - \mu_2]^2\} - 2E\{(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)\} \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

Nota 1: se fosse stato $\rho_{1,2} = 0$, la media sarebbe stata la differenza delle medie: $\mu = \mu_1 - \mu_2$, ma la varianza sarebbe stata la **somma** delle varianze, anche se ζ è definito come **differenza** tra ξ_1 e ξ_2 .

Nota 2: se fosse stata nota la d.d.p. congiunta $f_{1,2}(x, y)$ di ξ_1 e ξ_2 , la media di ζ sarebbe stata calcolabile come

$$E\{\zeta\} = E\{\xi_1 - \xi_2\} = E\{g(\xi_1, \xi_2)\},$$

cioè media di una funzione g di ξ_1 e ξ_2 , calcolabile tramite il teorema fondamentale della media per coppie di variabili casuali:

$$E\{\zeta\} = \int \int g(x, y) f_{1,2}(x, y) dx dy = \int \int (x - y) f_{1,2}(x, y) dx dy;$$

Cominciamo a considerare l'integrale:

$$\int_x \int_y x f_{1,2}(x, y) dx dy = \int_x x \left(\int_y f_{1,2}(x, y) dy \right) dx. \quad (1.12)$$

L'integrale rispetto a y è calcolabile grazie alle condizioni marginali:

$$F_{1,2}(x, y) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f_{1,2}(u, v) du dv;$$

$$F_{1,2}(x, \infty) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq \infty) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v) du dv;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{1,2}(x, \infty) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x) = f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v) du dv = \int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(x, v) dv$$

In sostanza:

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v) dv = f_1(u), \quad \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{1,2}(u, v) du = f_2(v)$$

(le due d.d.p. $f_1(u)$ e $f_2(v)$ calcolate in questa maniera vengono dette d.d.p. marginali).

Tornando all'integrale 1.12, si ottiene

$$\int_y \int_x x f_{1,2}(x, y) dx dy = \int_x x \left(\int_y f_{1,2}(x, y) dy \right) dx = \int_x x f_1(x) dx = \mu_1$$

e

$$\int_y \int_x y f_{1,2}(x, y) dx dy = \int_y y \left(\int_x f_{1,2}(x, y) dx \right) dy = \int_y y f_2(y) dy = \mu_2$$

e la media di ζ è $\mu = \mu_1 - \mu_2$, come già ottenuto.

2. Per definizione

$$\begin{aligned}\rho_{\xi,\eta} &= \frac{E\{(\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta)\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E\{\xi\eta - \eta\mu_\xi - \mu_\eta\xi + \mu_\eta\mu_\xi\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \\ &= \frac{E\{\zeta\} - \mu_\eta\mu_\xi - \mu_\eta\mu_\xi + \mu_\eta\mu_\xi}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E\{\zeta\} - \mu_\eta\mu_\xi}{\sigma_\xi \sigma_\eta}\end{aligned}$$

Si ottiene dunque

$$\mu_\zeta = E\{\zeta\} = \rho_{\xi,\eta}\sigma_\xi\sigma_\eta + \mu_\xi\mu_\eta$$

3. Se ξ ed η sono statisticamente indipendenti, allora la loro d.d.p. congiunta è pari al prodotto delle d.d.p. di ξ e η :

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$$

La media di $\zeta = \xi\eta$ può essere vista come la media della funzione $g(\xi, \eta) = g_1(\xi)g_2(\eta) = \xi\eta$; usando il teorema fondamentale della media, si ha

$$\begin{aligned}E\{g(\xi, \eta)\} &= E\{g_1(\xi)g_2(\eta)\} = \int \int g_1(x)g_2(y)f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy \\ &= \int \int g_1(x)g_2(y)f_\xi(x)f_\eta(y) dx dy = \int g_1(x)f_\xi(x) dx \int g_2(y)f_\eta(y) dy \\ &= E\{g_1(\xi)\}E\{g_2(\eta)\}\end{aligned}$$

Pertanto

$$E\{\zeta\} = E\{\xi\eta\} = E\{\xi\}E\{\eta\} = \mu_\xi\mu_\eta$$

(lo stesso risultato poteva essere ottenuto con il metodo usato per l'esercizio 2). In sostanza, la media del prodotto di due v.a. statisticamente indipendenti è il prodotto delle singole medie.

La varianza è ottenibile come

$$\sigma_\zeta^2 = E\{\zeta^2\} - \mu_\zeta^2$$

Occorre calcolare il valor quadratico medio di ζ , cioè

$$E\{\zeta^2\} = E\{\xi^2\eta^2\} = E\{\xi^2\}E\{\eta^2\} = (\sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2)(\sigma_\eta^2 + \mu_\eta^2)$$

In sostanza, il valor quadratico medio del prodotto di due v.a. statisticamente indipendenti è il prodotto dei singoli valori quadratici medi.

Si ha quindi

$$\sigma_\zeta^2 = E\{\zeta^2\} - \mu_\zeta^2 = (\sigma_\xi^2 + \mu_\xi^2)(\sigma_\eta^2 + \mu_\eta^2) - \mu_\xi^2\mu_\eta^2 = \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 + \mu_\xi^2\sigma_\eta^2 + \mu_\eta^2\sigma_\xi^2$$

4. La funzione caratteristica di ξ è

$$C_\xi(p) = E\{e^{jp\xi}\} = \int e^{jpx} f_\xi(x) dx = \int e^{j2\pi tx} f_\xi(x) dx \Big|_{t=p/(2\pi)} = \mathcal{F}^{-1}\{f_\xi(x)\}|_{t=p/(2\pi)}$$

con

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2} \right\}$$

Dalle tavole delle trasformate di Fourier, si ha

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-t^2/(2T^2)} \right\} = T\sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 f^2 T^2}$$

e quindi

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp(-2\pi^2 f^2 T^2) \right\} = \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2T^2} \right\}.$$

Ponendo

$$2\pi^2 T^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2\pi\sigma}$$

si ottiene

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left(-\frac{f^2}{2\sigma^2} \right) \right\} = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -2\pi^2 \sigma^2 t^2 \right\}.$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left(-\frac{(f - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left(-\frac{f^2}{2\sigma^2} \right) * \delta(f - \mu) \right\} = \sqrt{2\pi}\sigma \exp \left\{ -2\pi^2 \sigma^2 t^2 \right\} \exp \{ j2\pi\mu t \}.$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{(f - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\} = \exp \left\{ -2\pi^2 \sigma^2 t^2 + j2\pi\mu t \right\}$$

La funzione caratteristica è l'antitrasformata della d.d.p., calcolata in $p = t/(2\pi)$ e quindi

$$C_{\xi}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_{\xi}^2 p^2 + j\mu_{\xi} p \right\}$$

$$C_{\eta}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_{\eta}^2 p^2 + j\mu_{\eta} p \right\}$$

La funzione caratteristica di ζ è

$$C_{\zeta}(p) = E \left\{ e^{jp\zeta} \right\} = E \left\{ e^{jp(\xi+\eta)} \right\} = E \left\{ e^{jp\xi} e^{jp\eta} \right\};$$

poiché ξ ed η sono stat. indep., la media del prodotto è uguale al prodotto delle medie:

$$C_{\zeta}(p) = E \left\{ e^{jp\xi} \right\} E \left\{ e^{jp\eta} \right\} = C_{\xi}(p) C_{\eta}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2) p^2 + j(\mu_{\xi} + \mu_{\eta}) p \right\}$$

che continua ad essere la funzione caratteristica di una v.a. gaussiana, con media $\mu_{\zeta} = \mu_{\xi} + \mu_{\eta}$ e varianza $\sigma_{\zeta}^2 = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2$:

$$f_{\zeta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2)}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_{\xi} - \mu_{\eta})^2}{2\sigma_{\xi}^2} \right\}$$

Da ricordare: la somma di due v.a. gaussiane è ancora una v.a. gaussiana con media pari alla somma delle medie e varianza pari alla somma delle varianze.

5. (a) Il campione $x(0) = A \cos(\theta)$ è una variabile aleatoria (v.a.), ottenuta da una trasformazione nonlineare di θ ; il valore di A non è noto, ma è costante (si può pensare che valga 2 V, per esempio; A è un parametro, non una v.a.). Per calcolare la media e la varianza di $x(0)$ non è necessario conoscere la densità di probabilità (d.d.p.) della nuova v.a. $x(0)$, grazie al teorema fondamentale della media:

$$E\{g(\xi)\} = \int g(u) f_{\xi}(u) du.$$

Nel caso dell'esercizio:

$$\mu_0 = E\{x(0)\} = E\{A \cos(\theta)\} = \int A \cos(u) f_{\theta}(u) du = \int A \cos(u) \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(u) du$$

Nella formula precedente si è inserita la d.d.p. di θ :

$$f_{\theta}(u) = \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi < u < \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La media è dunque calcolabile come

$$\mu_0 = E\{A \cos(\theta)\} = \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du = \frac{A}{2\pi} \sin(u) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

La varianza è

$$\sigma_0^2 = E\{x^2(0) - \mu_0^2\} = E\{x^2(0)\} - \mu_0^2.$$

Poiché $\mu_0 = 0$, la varianza coincide con il valor quadratico medio $E\{x^2(0)\}$, calcolabile ancora con il teorema fondamentale della media:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= E\{x^2(0)\} = E\{A^2 \cos^2(\theta)\} = \int A^2 \cos^2(u) f_{\theta}(u) du = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(u) du \\ \sigma_0^2 &= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos(2u)] du = \frac{A^2}{4\pi} \left[2\pi + \frac{\sin(2u)}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{A^2}{4\pi} 2\pi = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

- (b) Poiché $x(T/2) = -x(0)$, la media è

$$\mu_1 = E\{x(T/2)\} = E\{-x(0)\} = -E\{x(0)\} = -\mu_0 = 0$$

(si è usata la linearità dell'operatore di media). Per quanto riguarda la varianza, si ha:

$$\sigma_1^2 = E\{x^2(T/2)\} = E\{[-x(0)]^2\} = E\{x^2(0)\} = \sigma_0^2$$

- (c) Per calcolare media e varianza di $x(T/4)$ occorre rifare i calcoli perché adesso la trasformazione coinvolge una funzione seno al posto di una funzione coseno:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E\{-A \sin(\theta)\} = \frac{-A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(u) du = \frac{A}{2\pi} \cos(u) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{A}{2\pi} [-1 + 1] = 0 \\ \sigma_2^2 &= E\{[-A \sin(\theta)]^2\} = A^2 E\{\sin^2(\theta)\} = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(u) du \\ \sigma_2^2 &= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos(2u)] du = \frac{A^2}{4\pi} 2\pi = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Commento: media e varianza sono uguali per $x(0)$, $x(T/2)$, $x(T/4)$.

6. (a)

$$\mu_0 = E\{x(0)\} = E\{A \cos(\theta)\} = \int A \cos(u) f_\theta(u) du = \int A \cos(u) \frac{1}{\pi} p_\pi(u - \pi/2) du$$

Nella formula precedente si è inserita la d.d.p. di θ :

$$f_\theta(u) = \frac{1}{\pi} p_\pi(u - \pi/2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 < u < \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La media è dunque calcolabile come

$$\mu_0 = E\{A \cos(\theta)\} = \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \cos(u) du = \frac{A}{\pi} \sin(u) \Big|_0^\pi = 0$$

Poiché $\mu_0 = 0$, la varianza coincide con il valor quadratico medio $E\{x^2(0)\}$:

$$\sigma_0^2 = E\{x^2(0)\} = E\{A^2 \cos^2(\theta)\} = \int A^2 \cos^2(u) f_\theta(u) du = \frac{A^2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2(u) du$$

$$\sigma_0^2 = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^\pi [1 + \cos(2u)] du = \frac{A^2}{2\pi} \left[\pi + \frac{\sin(2u)}{2} \Big|_0^\pi \right] = \frac{A^2}{2\pi} \pi = \frac{A^2}{2}$$

(b) Poichè $x(T/2) = -x(0)$, si ha

$$\mu_1 = E\{x(T/2)\} = E\{-x(0)\} = -E\{x(0)\} = -\mu_0 = 0$$

$$\sigma_1^2 = E\{x^2(T/2)\} = E\{[-x(0)]^2\} = E\{x^2(0)\} = \sigma_0^2$$

(c)

$$\mu_2 = E\{-A \sin(\theta)\} = \frac{-A}{\pi} \int_0^\pi \sin(u) du = \frac{A}{\pi} \cos(u) \Big|_0^\pi = \frac{A}{2\pi} [-1 - 1] = -\frac{A}{\pi}$$

Il valor quadratico medio di $x(T/4)$ è:

$$\begin{aligned} E\{[-A \sin(\theta)]^2\} &= A^2 E\{\sin^2(\theta)\} = \frac{A^2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(u) du \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^\pi [1 - \cos(2u)] du = \frac{A^2}{2\pi} \pi = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

La varianza è:

$$\sigma_2^2 = E\{x^2(T/4)\} - \mu_2^2 = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{\pi^2}$$

Commento: questa volta media e varianza dipendono dal tempo.

7. Le due variabili aleatorie sono

$$\xi = x(t_0) = A \cos(2\pi f_0 t_0) = \alpha A, \quad \eta = x(t_1) = A \cos(2\pi f_0 t_1) = \beta A$$

dove

$$\alpha = \cos(2\pi f_0 t_0), \quad \beta = \cos(2\pi f_0 t_1)$$

sono due numeri che, a seconda dei valori di t_0 e t_1 , assumono valori tra -1 e 1 .

Poiché ξ ed η sono proporzionali a A , sono essi stessi v.a. gaussiane, così come lo è A . In particolare

$$\begin{aligned}\mu_\xi &= E\{\xi\} = E\{\alpha A\} = \alpha E\{A\} = 0, & \mu_\eta &= E\{\eta\} = E\{\beta A\} = \beta E\{A\} = 0 \\ \sigma_\xi^2 &= E\{\xi^2\} = E\{\alpha^2 A^2\} = \alpha^2 E\{A^2\} = \alpha^2 \sigma^2, & \sigma_\eta^2 &= E\{\eta^2\} = \beta^2 \sigma^2 \\ E\{\xi\eta\} &= E\{\alpha A \beta A\} = \alpha \beta \sigma^2\end{aligned}$$

Il coefficiente di correlazione tra ξ e η è (con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, altrimenti non è definibile):

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{E\{(\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta)\}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E\{\xi\eta\}}{\sqrt{\sigma_\xi^2 \sigma_\eta^2}} = \frac{\alpha \beta \sigma^2}{\sqrt{\alpha^2 \sigma^2 \beta^2 \sigma^2}} = \text{segno}(\alpha \beta)$$

In sostanza il coefficiente di correlazione vale 1 se $\alpha \beta > 0$, altrimenti vale -1 , come era da aspettarsi visto che le due variabili aleatorie sono proporzionali tra loro ($\eta = \xi(\beta/\alpha)$). Poiché ξ ed η sono correlate NON sono statisticamente indipendenti (come è ovvio, visto che sono proporzionali tra loro).

La distribuzione di probabilità congiunta è

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y) = P(\alpha A \leq x, \beta A \leq y)$$

Nel testo è specificato che la d.d.p. congiunta va calcolata nel caso $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, quindi si ha

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\left(A \leq \frac{x}{\alpha}, A \leq \frac{y}{\beta}\right) = \begin{cases} P\left(A \leq \frac{x}{\alpha}\right) = F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) & \text{se } \frac{x}{\alpha} < \frac{y}{\beta} \\ P\left(A \leq \frac{y}{\beta}\right) = F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) & \text{se } \frac{x}{\alpha} > \frac{y}{\beta} \end{cases}$$

Si può scrivere, con una formula unica,

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) \left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] + F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$

dove $u(z)$ è la solita funzione gradino che vale 1 se $z > 0$. La d.d.p. congiunta si ottiene come derivata doppia rispetto a x e y :

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{\alpha} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) \left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] + \left[F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) - F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \frac{1}{\alpha} \delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$$

Si noti che, con le solite proprietà della delta di Dirac, si ha

$$g(x, y) \delta(x - y) = g(y, y) \delta(x - y) = g(x, x) \delta(x - y)$$

e quindi

$$\left[F_A\left(\frac{y}{\beta}\right) - F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \frac{1}{\alpha} \delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = \left[F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) - F_A\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \frac{1}{\alpha} \delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) = 0$$

In sostanza la derivata parziale rispetto a x della distribuzione di probabilità cumulativa si riduce a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x, y) &= \frac{1}{\alpha} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) \left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] \\ f_{\xi\eta}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x, y) \right] = \frac{1}{\alpha} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left[1 - u\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\right] = \frac{1}{\alpha\beta} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) \delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) \\ f_{\xi\eta}(x, y) &= \frac{1}{\alpha\beta\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{x^2}{\alpha^2}\right] \delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)\end{aligned}$$

La d.d.p. congiunta è sostanzialmente una d.d.p. gaussiana con varianza $\alpha^2\sigma^2$ moltiplicata per una delta di Dirac posizionata sulla retta $y = \beta x/\alpha$.

Per controllare la validità della formula appena trovata, verifichiamo che l'integrale doppio della d.d.p. congiunta sia pari a 1:

$$\int \int f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int \int \frac{1}{\alpha\beta} f_A\left(\frac{x}{\alpha}\right) \delta\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right) dx dy$$

Con il cambio di variabile $z = x/\alpha$ ($dx = \alpha dz$), si ha

$$\int \int f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \int \int \frac{1}{\beta} f_A(z) \delta\left(z - \frac{y}{\beta}\right) dz dy,$$

con il cambio di variabile $w = y/\beta$ ($dy = \beta dw$), si ha

$$\begin{aligned}\int \int f_{\xi\eta}(x, y) dx dy &= \int \int f_A(z) \delta(z - w) dz dw = \int_z f_A(z) \left[\int_w \delta(z - w) dw \right] dz \\ &= \int f_A(z) dz = 1\end{aligned}$$

Nota sulla d.d.p. congiunta di due v.a. gaussiane statisticamente dipendenti

Essendo ξ ed η due v.a. gaussiane a valor medio nullo, la d.d.p. congiunta di η e ξ è

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbb{M})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}[x, y]\mathbb{M}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

dove

$$\mathbb{M} = E \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} [\xi, \eta] \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} \xi^2 & \xi\eta \\ \xi\eta & \eta^2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & E\{\xi\eta\} \\ E\{\xi\eta\} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & \sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} \\ \sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} & \sigma_\eta^2 \end{bmatrix}$$

Se $\rho_{\xi\eta}^2 \neq 1$ (nell'esercizio 7 era $\rho_{\xi\eta}^2 = 1$ e quindi non si poteva applicare quanto segue), si ha

$$\det(\mathbb{M}) = \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 - \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2\rho_{\xi\eta}^2 = (1 - \rho_{\xi\eta}^2)\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2$$

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{M})} \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} \\ -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} f_{\xi,\eta}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbb{M})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}[x, y]\mathbb{M}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1 - \rho_{\xi\eta}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2[(1 - \rho_{\xi\eta}^2)\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2]} [x, y] \begin{bmatrix} \sigma_\eta^2 & -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} \\ -\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta} & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1 - \rho_{\xi\eta}^2}} \exp \left\{ -\frac{\sigma_\eta^2 x^2 + \sigma_\xi^2 y^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta\rho_{\xi\eta}xy}{2[(1 - \rho_{\xi\eta}^2)\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2]} \right\} \end{aligned}$$

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1 - \rho_{\xi\eta}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_{\xi\eta}^2)} \left[\frac{x^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{y^2}{\sigma_\eta^2} - \frac{2\rho_{\xi\eta}xy}{\sigma_\xi\sigma_\eta} \right] \right\}$$

1.12 Esercitazione 12

1. Si considerino i due processi casuali $x(t)$ e $y(t)$ statisticamente indipendenti e stazionari in senso lato con funzioni di autocorrelazione $R_x(\tau)$ ed $R_y(\tau)$, rispettivamente, e media nulla. Si calcolino la funzione di autocorrelazione e lo spettro del valor quadratico medio di

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$w(t) = x(t)y(t)$$

2. Si consideri il processo casuale WSS $x(t)$ a valor medio nullo e funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$. Si calcoli la funzione di autocorrelazione di

$$y(t) = x(t) + A$$

essendo A una costante non nulla. Il processo $y(t)$ è ancora WSS? se sì, si calcoli il suo spettro del valor quadratico medio.

3. Si consideri il processo casuale

$$x(t) = \xi e^{-t/T} u(t).$$

Si calcolino: media, varianza e funzione di autocorrelazione. Si tratta di un processo WSS?

4. Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con spettro del valor quadratico medio (o spettro di potenza) $G_n(f) = N_0/2$ viene filtrato da un filtro passabasso con risposta all'impulso

$$h(t) = e^{-t/T} u(t)$$

e si ottiene in uscita il processo $z(t)$. Si calcolino media, varianza e spettro del valor quadratico medio di $z(t)$.

5. Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con spettro del valor quadratico medio $G_n(f) = N_0/2$ viene filtrato da un filtro passabasso ideale di banda B , il processo di uscita $w(t)$ viene campionato negli istanti $t = kT$. Per quale valore di T i campioni $w(kT)$ sono tutti statisticamente indipendenti tra loro? Sapendo che $w(kT)$ ha d.d.p. gaussiana, e posto che T sia stato scelto per soddisfare il precedente requisito, qual è la d.d.p. congiunta dei 4 campioni $w(0)$, $w(T)$, $w(2T)$ e $w(3T)$?
6. (Difficile ma utile) Un processo casuale WSS $x(t)$ con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ viene posto all'ingresso di un derivatore. Qual è la funzione di autocorrelazione del processo casuale di uscita $y(t)$?
7. Un rumore gaussiano bianco con spettro del valor quadratico medio (o spettro di potenza) $G_n(f) = N_0/2$ viene posto all'ingresso di un filtro con risposta all'impulso

$$h(t) = e^{-t/T} u(t)$$

ottenendo il processo $y(t)$. Sapendo che $y(t)$ ha d.d.p. gaussiana, qual è la sua d.d.p. del I ordine? Qual è la sua d.d.p. del II ordine?

Soluzione

1. (a) Per quanto riguarda $z(t) = x(t) + y(t)$, si ha

$$E\{z(t)\} = E\{x(t) + y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{(x(t) + y(t))(x(t+\tau) + y(t+\tau))\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} + E\{y(t)y(t+\tau)\} + E\{x(t)y(t+\tau)\} + E\{y(t)x(t+\tau)\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\} + E\{y(t)\}E\{x(t+\tau)\} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) \end{aligned}$$

Si è scritto $E\{x(t)y(t+\tau)\} = E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\}$ perché, per ipotesi, i due processi sono statisticamente indipendenti, inoltre si è usato il fatto che entrambi hanno media nulla. Si noti che

$$R_z(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = E\{x^2(t)\} + E\{y^2(t)\} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

e la varianza di $z(t)$ risulta pari alla somma delle varianze.

Lo spettro del v.q.m. di $z(t)$ è

$$G_z(f) = \mathcal{F}\{R_z(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau) + R_y(\tau)\} = G_x(f) + G_y(f).$$

In sostanza lo spettro del v.q.m. della somma (o differenza) di due processi statisticamente indipendenti è pari alla somma degli spettri di potenza.

- (b) Per quanto riguarda $w(t) = x(t)y(t)$, si ha

$$E\{z(t)\} = E\{x(t)y(t)\} = E\{x(t)\}E\{y(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{x(t)y(t)x(t+\tau)y(t+\tau)\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\}E\{y(t)y(t+\tau)\} = R_x(\tau)R_y(\tau) \end{aligned}$$

e la funzione di autocorrelazione di $z(t)$ è pari al prodotto delle funzioni di autocorrelazione. Si noti che $z(t)$ è ancora WSS (la media è costante e la funz. autocorr. dipende solo da τ).

Lo spettro del v.q.m. di $z(t)$ è

$$S_z(f) = \mathcal{F}\{R_z(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau)R_y(\tau)\} = G_x(f) * G_y(f),$$

ed è pari alla convoluzione dei due spettri. Si noti che, se $x(t)$ ha banda B_x e $y(t)$ ha banda B_y , allora $z(t)$ ha banda $B_x + B_y$.

2. La funzione di autocorrelazione di $y(t)$ è

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{(x(t) + A)(x(t+\tau) + A)\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} + AE\{x(t)\} + AE\{x(t+\tau)\} + A^2 \\ &= R_x(\tau) + A^2 \end{aligned}$$

Il valor medio di $y(t)$ è

$$E\{y(t)\} = E\{x(t) + A\} = A.$$

Poiché la media è costante (non dipende dal tempo) e la funz. di autocorr. dipende solo da τ (e non da t), allora $y(t)$ è WSS. Il suo spettro di potenza è

$$G_y(f) = G_x(f) + A^2\delta(f).$$

Nota: un processo casuale $x(t)$ che abbia valor medio μ ha

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \mu^2$$

e ha una riga $\mu^2\delta(f)$ a frequenza zero nello spettro del v.q.m.

3. Il processo casuale

$$x(t) = \xi e^{-t/T} u(t)$$

è caratterizzato da:

(a) media

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = E\{\xi e^{-t/T} u(t)\} = \mu_\xi e^{-t/T} u(t)$$

(b) valor quadratico medio

$$E\{x^2(t)\} = E\{\xi^2 e^{-2t/T} u(t)\} = E\{\xi^2\} e^{-2t/T} u(t)$$

(c) varianza

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= E\{x^2(t)\} - \mu_x^2(t) = E\{\xi^2\} e^{-2t/T} u(t) - \mu_\xi^2 e^{-2t/T} u(t) \\ &= [E\{\xi^2\} - \mu_\xi^2] e^{-2t/T} u(t) = \sigma_\xi^2 e^{-2t/T} u(t) \end{aligned}$$

(d) funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E\{x(t)x(t+\tau)\} \\ &= E\{\xi e^{-t/T} u(t) \xi e^{-(t+\tau)/T} u(t+\tau)\} \\ &= E\{\xi^2\} u(t) e^{-(2t+\tau)/T} u(t+\tau) = R_x(t, \tau) \end{aligned}$$

Nel testo non vengono specificati i valori di μ_ξ e σ_ξ^2 , ma $x(t)$ in ogni caso NON è stazionario in senso lato:

- se fosse $\mu_\xi \neq 0$, si avrebbe $\mu_x(t)$ dipendente dal tempo e quindi $x(t)$ risulterebbe non stazionario (violata la prima condizione)
- se fosse $\mu_\xi = 0$, si avrebbe $\mu_x(t) = 0$ (media del processo costante, quindi prima condizione soddisfatta), ma si avrebbe comunque l'autocorrelazione dipendente sia da t sia da τ (non solo da τ) e quindi sarebbe violata la seconda condizione; infatti non è possibile che il v.q.m. di una variabile aleatoria sia nullo (l'unica possibilità è che la variabile aleatoria sia pari a zero con probabilità 1, ma ciò vorrebbe dire $x(t) = 0$).

Nota: La funzione di autocorrelazione è stata indicata con $R_x(\tau)$ supponendo, erroneamente, che $x(t)$ fosse stazionario in senso lato e quindi l'autocorrelazione dipendesse solo da τ . Si è invece verificato che l'autocorrelazione dipende da t e da τ e quindi si è aggiunto $= R_x(t, \tau)$ all'ultimo passaggio.

4. Il processo casuale d'uscita $z(t)$ ha media

$$\mu_z = \mu_n H(0)$$

dove μ_n è la media del processo all'ingresso del sistema. Poiché viene detto che l'ingresso è un rumore bianco, la sua media μ_n è nulla e quindi $\mu_z = 0$, indipendentemente dal valore di $H(0)$ (funzione di trasferimento valutata in $f = 0$). La varianza di $z(t)$ coincide dunque con il suo valor quadratico medio e

$$E\{z^2(t)\} = R_z(0) = \int G_z(f) df$$

dove $G_z(f)$ è lo spettro del valor quadratico medio o spettro di potenza di $z(t)$. Lo spettro del v.q.m. del processo d'uscita $z(t)$ è ottenibile dallo spettro del v.q.m. del processo di ingresso tramite la formula

$$G_z(f) = G_n(f) |H(f)|^2$$

che, in questo caso, si riduce a

$$G_z(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

Occorre dunque calcolare $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$; dalle tavole, si ha direttamente

$$H(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

e quindi

$$G_z(f) = \frac{N_0}{2} \left| \frac{T}{1 + j2\pi fT} \right|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2}$$

A questo punto, si può calcolare la varianza di $z(t)$ come

$$\sigma_z^2 = \int G_z(f) df = \int \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int |H(f)|^2 df$$

Occorre dunque calcolare l'integrale di $|H(f)|^2$, cosa che è forse più semplice da fare nel dominio del tempo, utilizzando l'uguaglianza di Parseval:

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \int h^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty e^{-2t/T} dt = \frac{N_0}{2} \frac{T}{2} = \frac{N_0 T}{4}$$

5. I campioni $w(kT)$ sono statisticamente indipendenti tra loro se sono scorrelati, cioè se

$$E\{w(kT)w(nT)\} = 0, \quad \forall k \neq n$$

(si noti che $w(kT)$ ha sicuramente valor medio nullo, essendo campione di un processo ottenuto dal filtraggio di un rumore bianco, che ha valor medio nullo). La condizione

$$E\{w(kT)w(nT)\} = 0, \quad \forall k \neq n$$

coincide con la condizione

$$R_w((k - n)T) = 0$$

dove $R_w(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione del processo d'uscita $w(t)$: infatti, da $w(t)$ vengono estratti i campioni negli istanti $t_1 = kT$ e $t_2 = nT$ ed occorre calcolare $E\{w(t_1)w(t_2)\}$, cioè la funzione di autocorrelazione $R_w(\tau)$ in $\tau = t_1 - t_2 = (k - n)T$.

Si ha

$$R_w(\tau) = R_n(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau)$$

dove $R_h(\tau)$ è la funz. di autocorr. del segnale determinato $h(t)$:

$$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_h(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{p_{2B}(f)\}$$

$$R_h(\tau) = \int_{-B}^B e^{j2\pi f\tau} df = \frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{2j\pi\tau} = \frac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau} = 2B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

Quindi

$$R_w((k - n)T) = \frac{N_0}{2} R_h((k - n)T) = N_0 B \frac{\sin(2\pi B(k - n)T)}{2\pi B(k - n)T}$$

e

$$R_w((k - n)T) = 0 \quad \text{se} \quad 2\pi B(k - n)T = m\pi$$

(multiplo intero di 2π) cioè se

$$BT = \frac{m}{2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{T} = \frac{2B}{m}, \quad m \text{ intero positivo}$$

Si noti che, se $m = 1$ (è una possibilità, corrispondente alla massima frequenza di campionamento che consente di avere campioni statisticamente indipendenti), si ha

$$\frac{1}{T} = 2B$$

e $2B$ è la minima frequenza di campionamento in base al teorema del campionamento. In sostanza, se $1/T = 2B$ riusciamo a soddisfare il teorema del campionamento (e quindi saremo in grado di ricostruire $w(t)$ dai suoi campioni) e, contemporaneamente, ad avere campioni statisticamente indipendenti.

Se $1/T$ è effettivamente pari a $2B/m$ allora $w(0), \dots, w(3T)$ sono statisticamente indipendenti e la loro d.d.p. congiunta $f_{w_0, w_1, w_2, w_3}(u_0, u_1, u_2, u_3)$ è pari al prodotto delle d.d.p.:

$$f_{w_0, w_1, w_2, w_3}(u_0, u_1, u_2, u_3) = f_{w_0}(u_0) f_{w_1}(u_1) f_{w_2}(u_2) f_{w_3}(u_3)$$

con

$$f_{w_0}(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u_0^2/(2\sigma^2)}, \quad f_{w_1}(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u_1^2/(2\sigma^2)},$$

$$f_{w_2}(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u_2^2/(2\sigma^2)}, \quad f_{w_3}(u_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u_3^2/(2\sigma^2)},$$

e

$$\sigma^2 = R_w(\tau)|_{\tau=0} = N_0 B$$

In sostanza,

$$f_{w_0, w_1, w_2, w_3}(u_0, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \right\}$$

6. Lo spettro di potenza o del valor quadratico medio di $y(t)$ è

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

dove $G_x(f)$ è lo spettro di potenza del processo di ingresso $x(t)$ e $H(f) = j2\pi f$ è la funzione di trasferimento del derivatore. Possiamo immaginare che il segnale $R_x(t)$ entri in un sistema che ha funzione di trasferimento $|H(f)|^2 = (j2\pi f)(-j2\pi f)$, da cui esce il segnale $R_y(t)$. Il sistema è costituito da un primo derivatore, con funzione di trasferimento $j2\pi f$, e, in cascata, da un secondo blocco che deriva l'ingresso e ne cambia il segno (funzione di trasferimento $-j2\pi f$). Allora, all'uscita del primo blocco troviamo la derivata di $R_x(t)$ e all'uscita del secondo blocco troviamo la derivata seconda di $R_x(t)$ cambiata di segno:

$$R_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_x(\tau)$$

Si noti che $R_x(\tau)$ ha un massimo in $\tau = 0$ e quindi la derivata seconda di $R_x(\tau)$ in zero è negativa, ma, con il cambio di segno, risulta $R_y(0) > 0$, come deve essere, visto che $R_y(0) = E\{y^2(t)\}$.

7. Per stabilire la d.d.p. del I ordine, è necessario conoscere media e varianza di $y(t)$ (i due parametri della d.d.p. gaussiana):

$$\begin{aligned}\mu_y &= \mu_n H(0) = 0 \\ \sigma_y^2 &= \frac{N_0 T}{4}\end{aligned}$$

(soluzione esercizio 4). Poiché media e varianza non dipendono dal tempo, neanche la d.d.p. del I ordine dipende dal tempo; pertanto

$$f_y(u; t) = f_y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-u^2/(2\sigma^2)}.$$

Per la d.d.p. del II ordine, occorre conoscere anche il coefficiente di correlazione tra $y(t_1)$ e $y(t_2)$. Cominciamo dal calcolare

$$E\{y(t_1)y(t_2)\} = R_y(t_1 - t_2)$$

$$\begin{aligned}R_y(\tau) &= R_n(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau) \\ &= \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2}\right\} \\ &= \frac{N_0 T}{4} e^{-|\tau|/T}\end{aligned}$$

Pertanto

$$E\{y(t_1)y(t_2)\} = R_y(t_1 - t_2) = \frac{N_0 T}{4} e^{-|t_1 - t_2|/T}$$

Il coefficiente di correlazione ρ è

$$\rho = \frac{E\{y(t_1)y(t_2)\}}{\sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)} = \frac{E\{y(t_1)y(t_2)\}}{\sigma_y^2} = e^{-|t_1 - t_2|/T}$$

(i campioni $y(t_1)$ e $y(t_2)$ sono tanto più correlati quanto è più piccolo l'intervallo $t_1 - t_2$). La d.d.p. congiunta è

$$f_y(u_1, u_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u_1^2 + u_2^2 - 2\rho u_1 u_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}$$

Capitolo 2

Temi d'esame, anno 2011

2.1 Appello del 30 Giugno 2011

Domande di teoria

1. Dimostrare che, essendo $z(t) = x(t)y(t)$, $Z(f) = X(f) * Y(f)$. Si considerino $x(t)$ e $y(t)$ segnali determinati ad energia finita, con trasformate di Fourier $X(f)$ e $Y(f)$ rispettivamente.
2. Elencare le proprietà della funzione di autocorrelazione per un segnale $x(t)$ reale ad energia finita.

Problema 1

Si consideri il sistema riportato in figura 2.1 dove

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad T = \frac{3}{2}t_0.$$

Disegnare l'andamento qualitativo di $y(t)$ e calcolarne la potenza P_y e la trasformata di Fourier $Y(f)$.

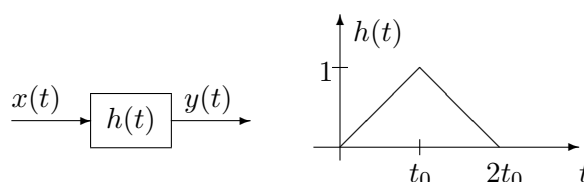


Figura 2.1: Sistema per il problema 1.

Problema 2

Si consideri il sistema riportato in figura 2.2 dove $x(t)$ è un processo casuale gaussiano bianco, a valor medio nullo e con densità spettrale di potenza $N_0/2$. Si calcolino media, valor quadratico medio e varianza di $y(t)$.

Problema 3

Si consideri il sistema LTI tempo-discreto di figura 2.3. Si calcoli la funzione di trasferimento $H(z)$. Sapendo che $\alpha = 0.25$, si indichi per quali valori di β il sistema ha due poli complessi coniugati ed è stabile.

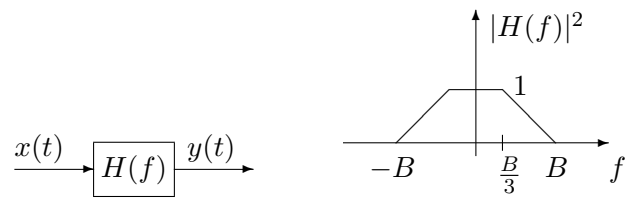


Figura 2.2: Sistema per il problema 2.

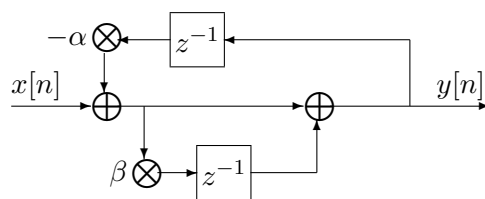


Figura 2.3: Sistema LTI per il problema 3.

Soluzione

Domande

1.

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_t z(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_t x(t) y(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_t \left[\int_{f_1} X(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \right] \left[\int_{f_2} Y(f_2) e^{j2\pi f_2 t} df_2 \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{f_1} \int_{f_2} \left[\int_t e^{j2\pi(f_1 + f_2 - f)t} dt \right] X(f_1) Y(f_2) df_1 df_2 \\ &= \int_{f_2} \left[\int_{f_1} \delta(f_1 + f_2 - f) X(f_1) df_1 \right] Y(f_2) df_2 \\ &= \int_{f_2} X(f - f_2) Y(f_2) df_2 = X(f) * Y(f) \end{aligned}$$

2. Per un segnale $x(t)$ ad energia finita e reale, la funzione di autocorrelazione è definita come

$$R_x(\tau) = \int x(t) x(t + \tau) dt$$

Le sue proprietà sono:

- $R_x(\tau)$ valutata in $\tau = 0$ è pari all'energia di $x(t)$

$$R_x(0) = \int x^2(t) dt = E\{x(t)\}$$

- Il massimo di $R_x(\tau)$ è in $\tau = 0$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

- La funzione $R_x(\tau)$ è pari:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

Soluzione del problema 1

In figura 2.4 è mostrato il grafico di $y(t)$, con

$$y(t) = \sum_k h(t - kT).$$

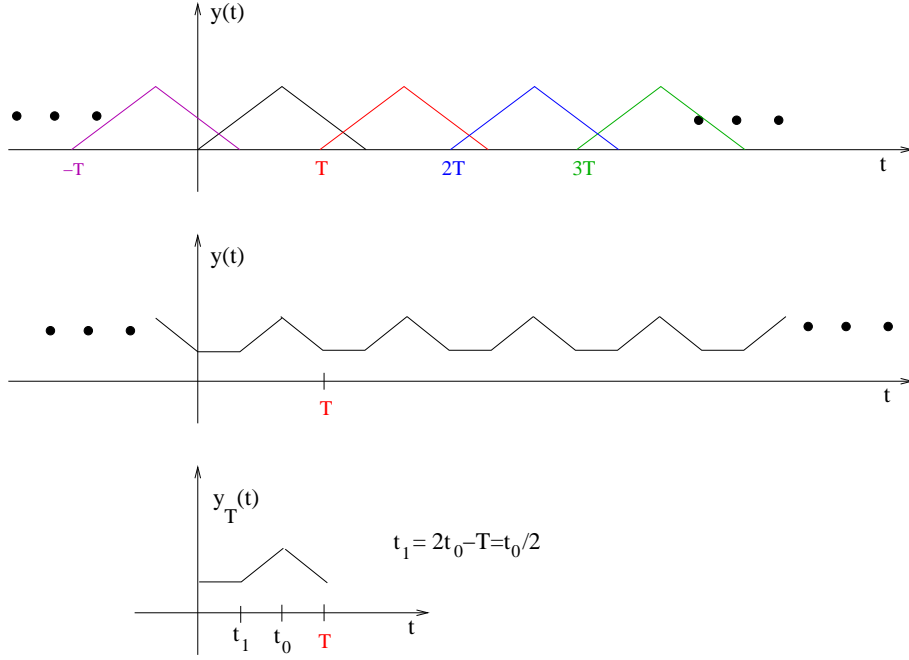


Figura 2.4: Grafico di $y(t)$ e di $y_T(t)$ (cioè $y(t)$ troncato in un suo periodo) per il problema 1

La trasformata di Fourier di $y(t)$ si può ottenere considerando $y(t)$ come uscita di un sistema LTI con ingresso il treno di delta:

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= H(f)X(f) = H(f)\mathcal{F}\left\{\sum_k \delta(t - kT)\right\} \\
 &= H(f)\frac{1}{T}\sum_k \delta(f - k/T) = \frac{1}{T}\sum_k H(f)\delta(f - k/T) \\
 &= \frac{1}{T}\sum_k H(k/T)\delta(f - k/T)
 \end{aligned}$$

oppure dalla serie di Fourier:

$$y(t) = \sum_k h(t - kT) = \sum_n \mu_n e^{j2\pi nt/T} \quad \text{con}$$

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-j2\pi nt/T} dt = \frac{1}{T} \int y_T(t) e^{-j2\pi nt/T} dt$$

Il primo metodo è più veloce, infatti basta solo calcolare la trasformata di Fourier di $h(t)$ e campionarla.

Per quanto riguarda il calcolo di $H(f)$, si possono usare le tavole delle trasformate di Fourier: il caso 25 considera un segnale triangolare che inizia in $-T$, termina in T e ha valore massimo 1. Nel caso del problema, occorre sostituire t_0 al posto di T e, utilizzando la proprietà del ritardo, moltiplicare per $e^{-j2\pi ft_0}$. Si ottiene dunque,

$$H(f) = e^{-j2\pi ft_0} t_0 \left[\frac{\sin(\pi ft_0)}{\pi ft_0} \right]^2$$

In conclusione,

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \frac{1}{T} \sum_k H(k/T) \delta(f - k/T) \\
&= \frac{t_0}{T} \sum_k e^{-j2\pi k t_0/T} \left[\frac{\sin(\pi k t_0/T)}{\pi k t_0/T} \right]^2 \delta(f - k/T) \\
&= \frac{2}{3} \sum_k e^{-j4\pi k/3} \left[\frac{\sin(2\pi k/3)}{2\pi k/3} \right]^2 \delta(f - k/T)
\end{aligned}$$

dove è stata inclusa l'ipotesi $T = 3t_0/2$, cioè $t_0/T = 2/3$.

Per il calcolo della potenza di $y(t)$ si può procedere in due modi:

- si usa la definizione

$$P_y = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y_T^2(t) dt = \frac{E_{y_T}}{T}$$

- si integra lo spettro di potenza

$$G_y(t) = \frac{1}{T^2} \sum_k |H(k/T)|^2 \delta(f - k/T)$$

È sicuramente più facile calcolare la potenza tramite la definizione, calcolando l'energia E_{y_T} del segnale troncato $y_T(t)$. Dal grafico di figura 2.4 si può notare che $y_T(t)$ è uguale a $h(t)$ nell'intervallo $[t_1, T]$, mentre è costante nell'intervallo $[0, t_1]$. Il valore di t_1 è facilmente ottenibile come

$$t_1 = t_0 - (T - t_0) = 2t_0 - T = 2t_0 - \frac{3}{2}t_0 = \frac{t_0}{2}$$

L'espressione di $h(t)$ è invece

$$h(t) = 1 - \frac{|t - t_0|}{t_0} \quad \text{per } t \in [0, 2t_0]; \quad h(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

Quindi

$$y_T(t) = \begin{cases} c & t \in [0, t_1] \\ h(t) & t \in [t_1, T] \end{cases}$$

Occorre solo calcolare il valore costante c . Nell'intervallo $[0, t_1]$

$$\begin{aligned}
y_T(t) &= c = h(t) + h(t + T) \\
&= \left[1 - \frac{|t - t_0|}{t_0} \right] + \left[1 - \frac{|t + T - t_0|}{t_0} \right] \\
&= \left[1 + \frac{t - t_0}{t_0} \right] + \left[1 - \frac{t + T - t_0}{t_0} \right] \\
&= \left[1 + \frac{t}{t_0} - 1 \right] + \left[1 - \frac{t}{t_0} - \frac{T}{t_0} + 1 \right] \\
&= 2 - \frac{T}{t_0} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Più facilmente, il valore di c corrisponde al valore che $h(t)$ ha nell'istante t_1 , poich/è $h(t+T)$ vale 0 in t_1 :

$$h(t_1) = h(t_0/2) = \left[1 - \frac{|t_0/2 - t_0|}{t_0} \right] = 1/2.$$

Pertanto $c = 1/2$. L'energia di $y_T(t)$ è dunque

$$\begin{aligned} E_{y_T} &= \int_0^T y_T^2(t) dt = \int_0^{t_1} c^2 dt + \int_{t_1}^T h^2(t) dt \\ &= c^2 t_1 + 2 \int_{t_1}^{t_0} h^2(t) dt \\ &= c^2 t_1 + 2 \int_{t_1}^{t_0} \left[1 + \frac{t - t_0}{t_0} \right]^2 dt \\ &= c^2 t_1 + 2 \int_{t_1/t_0}^1 u^2 t_0 du \\ &= c^2 t_1 + 2 t_0 \left. \frac{u^3}{3} \right|_{t_1/t_0}^1 = c^2 t_1 + \frac{2 t_0}{3} \left[1 - \frac{t_1^3}{t_0^3} \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{t_0}{2} + \frac{2 t_0}{3} [1 - 1/8] = \frac{17}{24} t_0 = \frac{17}{36} T \end{aligned}$$

mentre la potenza di $y(t)$ è

$$P_y = \frac{17}{36} \simeq 0.472$$

Soluzione del problema 2

Per quanto riguarda la media:

$$E\{y(t)\} = H(0)E\{x(t)\} = 0$$

in quanto la media di $x(t)$ è zero. Per quanto riguarda il valor quadratico medio:

$$E\{y^2(t)\} = R_y(0) = \int S_y(f) df$$

dove $R_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\}$ è l'autocorrelazione di $y(t)$ e $S_y(f) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\}$ è il suo spettro di potenza (o spettro del valor quadratico medio). Si ha

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2.$$

In questo caso conviene lavorare in frequenza:

$$\begin{aligned} E\{y^2(t)\} &= \int S_y(f) df = \int \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int |H(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{2(B + B/3)}{2} \times 1 = \frac{N_0}{2} \frac{4}{3} B = \frac{2}{3} N_0 B \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la varianza,

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} - [E\{y(t)\}]^2 = E\{y^2(t)\} = \frac{2}{3} N_0 B$$

Soluzione del problema 3

Convienne definire $w[n]$ il segnale dopo il primo nodo di somma (cfr. fig. 2.5). Usando direttamente le trasformate zeta, si ha

$$\begin{aligned} W(z) &= X(z) - \alpha z^{-1} Y(z) \\ Y(z) &= W(z) + \beta z^{-1} W(z) = W(z) (1 + \beta z^{-1}) \end{aligned}$$

Sostituendo nella II equazione il valore di $W(z)$ dato nella I equazione, si ottiene

$$Y(z) = (X(z) - \alpha z^{-1} Y(z)) (1 + \beta z^{-1})$$

cioè

$$Y(z) [1 + \alpha z^{-1} (1 + \beta z^{-1})] = X(z) (1 + \beta z^{-1}).$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ è dunque

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{(1 + \beta z^{-1})}{1 + \alpha z^{-1} (1 + \beta z^{-1})} = \frac{1 + \beta z^{-1}}{1 + \alpha z^{-1} + \alpha \beta z^{-2}} \\ &= \frac{z(z + \beta)}{z^2 + \alpha z + \alpha \beta} = \frac{z(z + \beta)}{(z - p_1)(z - p_2)} \end{aligned}$$

Il sistema è stabile se i due poli p_1 e p_2 si trovano, nel piano complesso, all'interno del cerchio di raggio unitario. I poli sono

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \alpha\beta} = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{\beta}{4}}.$$

I poli sono complessi coniugati se

$$\frac{1}{64} - \frac{\beta}{4} < 0, \quad \implies \quad \beta > \frac{1}{16}$$

e si ha

$$p_{1,2} = -\frac{1}{8} \pm j\sqrt{\frac{\beta}{4} - \frac{1}{64}}.$$

Per valori di $\beta > 1/16$, si ha

$$|p_1|^2 = |p_2|^2 = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{4} - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{64} = \frac{\beta}{4}$$

Per avere stabilità occorre che sia

$$|p_1|^2 < 1, |p_2|^2 < 1, \quad \implies \quad \frac{\beta}{4} < 1, \quad \implies \quad \beta < 4$$

Pertanto i due poli sono complessi coniugati ed il sistema è stabile se $\frac{1}{16} < \beta < 4$.

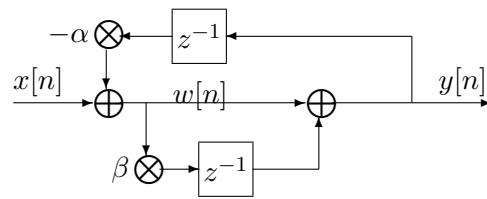


Figura 2.5: Definizione di $w[n]$ per la soluzione del problema 3 .

2.2 Appello del 20 luglio 2011

Domande di teoria

1. Dimostrare che l'energia di un segnale $x(t)$ (a energia finita) non cambia se il segnale $x(t)$ viene ritardato.
2. Elencare le condizioni che rendono un processo casuale WSS.
3. Elencare le condizioni che rendono un sistema tempo-invariante.

Problema 1

Si consideri il sistema riportato in figura 2.6 dove

$$h(t) = p_{T_0}(t - T_0/2)$$

Si calcolino le uscite $y_i(t)$ per i seguenti ingressi $x_i(t)$:

1. $x_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 1/T_0$ (uscita $y_1(t)$)
2. $x_2(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ con $f_1 = 3/(2T_0)$ (uscita $y_2(t)$)
3. $x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|t-kT_0|/T}$ (uscita $y_3(t)$, $T \neq T_0$)

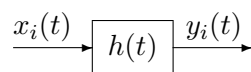


Figura 2.6: Sistema per il problema 1.

Problema 2

Si consideri il sistema riportato in figura 2.7 dove $x(t)$ è un processo casuale gaussiano bianco, a valor medio nullo e con densità spettrale di potenza $G_x(f) = 1$,

$$h_1(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} u(t) \quad \text{con } T = 10 \text{ s,} \quad \text{e} \quad H_2(f) = p_{2B}(f)$$

Si calcolino le potenze di $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Quanto deve valere B affinché $y_1(t)$ e $y_2(t)$ abbiano la stessa densità di probabilità?

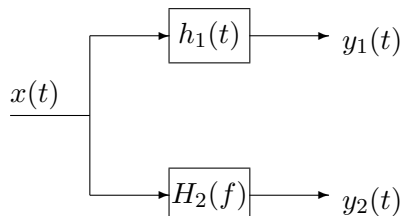


Figura 2.7: Sistema per il problema 2.

Problema 3

Si consideri il sistema LTI tempo-discreto di figura 2.8. Si calcolino la funzione di trasferimento $H(z)$ e la risposta all'impulso $h[n]$, nel caso $\alpha = 1/4$.

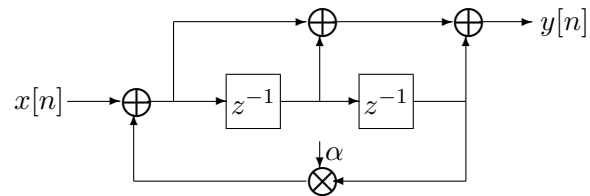


Figura 2.8: Sistema LTI per il problema 3.

Soluzione

Risposte alle domande di teoria

1. L'energia di $x(t)$ è

$$\mathcal{E}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df,$$

dove si è usata l'uguaglianza di Parseval. Sia $y(t) = x(t - t_0)$ il segnale $x(t)$ ritardato di t_0 . Nel dominio del tempo si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t - t_0)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}(x(t)).\end{aligned}$$

Nel dominio della frequenza si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)e^{-j2\pi ft_0}|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \mathcal{E}(x(t)).\end{aligned}$$

2. Un processo casuale $x(t)$ è WSS (Wide Sense Stationary) se

- la sua media non dipende dal tempo: $E\{x(t)\} = \mu_x, \forall t$
- la sua funzione di autocorrelazione dipende solo dalla differenza dei tempi in cui viene valutata: $R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\}$ è funzione di $\tau = t_1 - t_2$

3. Si consideri un sistema che, per un ingresso $x(t)$, genera l'uscita $y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$. Il sistema è tempo invariante se l'uscita $y_1(t)$ ottenuta con l'ingresso $x(t)$ ritardato di t_0

$$y_1(t) = \mathcal{T}\{x(t - t_0)\}$$

è uguale a $y(t - t_0)$, cioè l'uscita del sistema quando l'ingresso è $x(t)$, ma ritardata di t_0 . In alternativa, un sistema è tempo invariante se i due sistemi costituiti da

(a) ingresso $x(t)$, ritardatore di t_0 , sistema, uscita $y_1(t)$

(b) ingresso $x(t)$, sistema, ritardatore di t_0 , uscita $y_2(t)$

sono equivalenti (cioè $y_1(t) = y_2(t)$).

Soluzione del problema 1

Convienne innanzitutto calcolare $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ utilizzando le tavole e la proprietà del ritardo:

$$H(f) = \mathcal{F}\{p_{T_0}(t - T_0/2)\} = \mathcal{F}\{p_{T_0}(t)\} e^{-j2\pi f T_0/2} = \frac{\sin(\pi f T_0)}{\pi f} e^{-j\pi f T_0}$$

1. Per $x_1(t)$ si ha

$$X_1(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$Y_1(f) = X_1(f)H(f) = \frac{A}{2} [H(f_0)\delta(f - f_0) + H(-f_0)\delta(f + f_0)]$$

$$H(f_0) = H\left(\frac{1}{T_0}\right) = \frac{\sin(\pi)}{\pi/T_0} e^{-j\pi} = 0, \quad H(-f_0) = H^*(f_0) = 0$$

$$Y_1(f) = 0 \implies y_1(t) = 0$$

2. Per $x_2(t)$ si ha

$$X_2(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$$

$$Y_2(f) = X_2(f)H(f) = \frac{A}{2} [H(f_1)\delta(f - f_1) + H(-f_1)\delta(f + f_1)]$$

$$H(f_1) = H\left(\frac{3}{2T_0}\right) = \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/(2T_0)} e^{-j3\pi/2} = \frac{-1}{3\pi/(2T_0)} j = \frac{-j2T_0}{3\pi}$$

$$H(-f_1) = H^*(f_1) = \frac{j2T_0}{3\pi}$$

$$Y_2(f) = \frac{A}{2} \frac{2T_0}{3\pi} [-j\delta(f - f_1) + j\delta(f + f_1)]$$

$$y_2(t) = \frac{2T_0 A}{3\pi} \sin(2\pi f_1 t)$$

3. Il segnale $x_3(t)$ è periodico di periodo T_0 (frequenza fondamentale $f_0 = 1/T_0$) e può essere scritto come

$$x_3(t) = e^{-|t|/T} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0), \quad \text{con } q(t) = e^{-|t|/T}.$$

La sua trasformata di Fourier è

$$X_3(f) = Q(f) \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

Il segnale $y_3(t)$ ha trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} Y_3(f) &= X_3(f)H(f) = H(f)f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(nf_0) \delta(f - nf_0) \\ &= f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(nf_0)H(nf_0) \delta(f - nf_0) \end{aligned}$$

Ma

$$H(nf_0) = \frac{\sin(\pi n f_0 T_0)}{\pi n f_0} e^{-j\pi n f_0 T_0} = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n f_0} e^{-j\pi n}$$

e quindi $H(nf_0)$ è pari a zero per ogni $n \neq 0$ e pari a $1/f_0$ per $n = 0$. Pertanto si ha

$$Y_3(f) = f_0 Q(0) H(0) \delta(f) = Q(0) \delta(f)$$

Non occorre dunque calcolare tutta $Q(f)$ (comunque è presente nella tabella delle trasformate), ma basta calcolare

$$Q(0) = \int q(t) e^{-j2\pi ft} dt \Big|_{f=0} = \int q(t) dt = 2 \int_0^\infty e^{-t/T} dt = 2 \frac{e^{-t/T}}{-1/T} \Big|_0^\infty = 2T$$

Si ha dunque

$$Y_3(f) = 2T \delta(f) \implies y_3(t) = 2T \quad \text{costante per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Soluzione del problema 2

Per calcolare la potenza del processo $y(t)$ all'uscita di un sistema LTI si può

- integrare lo spettro di potenza $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$
- calcolare l'autocorrelazione $R_y(\tau)$ di $y(t)$ per $\tau = 0$

I due metodi sono di fatto equivalenti in termini di complessità di calcolo quando l'ingresso è un rumore bianco. Infatti,

$$P_y = \int G_y(f) df = \int G_x(f) |H(f)|^2 df = \int |H(f)|^2 df = \int h^2(t) dt = \mathcal{E}(h(t))$$

(si è usata l'uguaglianza di Parseval).

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= R_x(\tau) * R_h(\tau) = \delta(\tau) * R_h(\tau) = R_h(\tau) \\ \implies P_y &= R_y(0) = R_h(0) = \int h^2(t) dt = \mathcal{E}(h(t)) \end{aligned}$$

(si è usato il fatto che l'autocorrelazione $R_x(\tau)$ è l'antitrasformata di $G_x(f) = 1$ e quindi $R_x(\tau) = \delta(\tau)$). In sostanza, la potenza di $y(t)$ è uguale all'energia di $h(t)$.

Per $y_1(t)$ conviene lavorare nel dominio del tempo:

$$P_{y_1} = \mathcal{E}(h_1(t)) = \int h_1^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{1}{T^2} e^{-2t/T} dt = \frac{1}{T^2} \frac{-T}{2} e^{-2t/T} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2T} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Per $y_2(t)$ invece conviene lavorare nel dominio della frequenza:

$$P_{y_2} = \mathcal{E}(h_2(t)) = \int |H_2(f)|^2 df = 2B$$

I due processi $y_1(t)$ e $y_2(t)$ hanno lo stesso valor medio (nullo perché $x(t)$ è a valor medio nullo) e hanno varianza

$$\sigma_{y_1}^2 = P_{y_1} = \frac{1}{2T}, \quad \sigma_{y_2}^2 = P_{y_2} = 2B$$

Le due densità di probabilità sono uguali se medie e varianze sono uguali, cioè se

$$2B = \frac{1}{2T} \implies B = \frac{1}{4T} = 0.025 \text{ Hz}$$

Soluzione del problema 3

Convienne “battezzare” il segnale all’uscita del primo nodo di somma come $w[n]$. La figura 2.9 mostra il sistema proposto con le trasformate zeta dei segnali coinvolti. Si ha:

$$\begin{aligned}W(z) &= X(z) + \alpha W(z)z^{-2} \\ Y(z) &= W(z) + W(z)z^{-1} + W(z)z^{-2}\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ricava

$$W(z)[1 - \alpha z^{-2}] = X(z) \implies W(z) = \frac{X(z)}{1 - \alpha z^{-2}}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$Y(z) = [1 + z^{-1} + z^{-2}]W(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - \alpha z^{-2}} X(z).$$

La funzione di trasferimento è dunque

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - \alpha z^{-2}} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - \alpha}$$

Il sistema ha due zeri e due poli. I due poli sono reali e distinti:

$$p_1 = \sqrt{\alpha} = 1/2, \quad p_2 = -\sqrt{\alpha} = -1/2$$

ed il sistema è stabile, trovandosi i poli all’interno del cerchio unitario. Per semplicità definiamo $p = 1/2$, in modo che i due poli siano $p_1 = p$ e $p_2 = -p$.

Per calcolare la risposta all’impulso conviene calcolare l’antitrasformata zeta di $H(z)$, secondo il metodo indicato nel libro di testo.

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 + z + 1}{z(z-p)(z+p)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-p} + \frac{c}{z+p}$$

$$a = \lim_{z \rightarrow 0} H_1(z)z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + z + 1}{(z-p)(z+p)} = -\frac{1}{p^2} = -4$$

$$b = \lim_{z \rightarrow p} H_1(z)(z-p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z^2 + z + 1}{z(z+p)} = \frac{p^2 + p + 1}{2p^2} = \frac{7}{2}$$

$$c = \lim_{z \rightarrow -p} H_1(z)(z+p) = \lim_{z \rightarrow -p} \frac{z^2 + z + 1}{z(z-p)} = \frac{p^2 - p + 1}{2p^2} = \frac{3}{2}$$

$$H(z) = a + b \frac{z}{z-p} + c \frac{z}{z+p} = a + b \frac{1}{1-pz^{-1}} + c \frac{1}{1+pz^{-1}}$$

$$= a + b \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^{-n} + c \sum_{n=0}^{\infty} (-p)^n z^{-n}$$

$$h[n] = a\delta[n] + bp^n u[n] + c(-p)^n u[n] = -4\delta[n] + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = -4\delta[n] + \frac{7+3(-1)^n}{2^{n+1}} u[n].$$

In particolare:

$$h[0] = -4 + \frac{7+3}{2} = 1, \quad h[1] = \frac{7-3}{4} = 1, \quad h[2] = \frac{7+3}{8} = 5/4$$

$$h[3] = \frac{7-3}{16} = 1/4, \quad h[4] = \frac{7+3}{32} = 5/16, \quad h[5] = \frac{7-3}{64} = 1/16$$

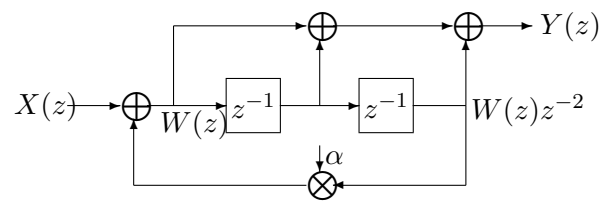


Figura 2.9: Sistema LTI per il problema 3.

2.3 Appello del 9 settembre 2011

Domande di teoria

1. Elencare le proprietà della delta di Dirac
2. Elencare le condizioni che rendono un processo casuale stazionario in senso lato
3. Elencare le proprietà della funzione di autocorrelazione per un segnale $x(t)$ periodico di periodo T

Problema 1

Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema di figura 2.10, essendo

$$x(t) = \sin(\pi t/T) p_T(t - T/2)$$

$$h(t) = p_T(t - T/2)$$

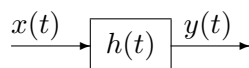


Figura 2.10: Sistema per il problema 1.

Problema 2

Si vuole misurare e memorizzare un elettrocardiogramma utilizzando un sistema a tempo discreto, costituito da due parti:

- sul paziente: un sensore, un ADC (analog-to-digital converter), una memoria
- in laboratorio: un computer per la visualizzazione ed analisi dei campioni del segnale da parte del medico

Il blocco ADC riceve in ingresso il segnale miocardico $x(t)$, lo filtra con un filtro anti-aliasing e poi lo campiona a 80 Hz.

1. Sia $H_A(f)$ la funzione di trasferimento del filtro anti-aliasing: si scriva l'espressione (matematica, utilizzando le funzioni definite a lezione) di $H_A(f)$ e la si disegni, quotando opportunamente i due assi cartesiani (ascisse e ordinate).
2. Si calcoli il numero medio di campioni per periodo del segnale miocardico nel caso di paziente con frequenza cardiaca pari a
 - (a) 60 battiti/minuto
 - (b) 100 battiti/minuto
 - (c) 180 battiti/minuto
3. Si supponga che ciascun campione del segnale venga memorizzato utilizzando 16 bit (2 byte). Quanti byte è necessario memorizzare per una traccia di 1 minuto? Quanti byte in un giorno? Il risultato dipende dalla frequenza cardiaca del paziente?

4. Tramite computer, si calcola la DFT (o FFT) del segnale campionato utilizzando i primi $L = 2048$ campioni e si produce un grafico; si vuole visualizzare in ascissa la frequenza (in Hz), in ordinata il modulo della DFT. Qual è la massima frequenza F (= finestra in frequenza) che può essere visualizzata sul grafico della DFT? qual è il valore Δ_f (= passo/risoluzione in frequenza) tra un campione della DFT ed il successivo? È possibile ridurre il valore di Δ_f ? se sì, come?

Problema 3

Si consideri il sistema LTI tempo-discreto di figura 2.11. Si calcoli la funzione di trasferimento $H(z)$ e la risposta all'impulso $h[n]$, nel caso $N = 7$ e $\alpha = 0.2$. Si disegni una struttura alternativa a questo filtro (mantenendo inalterata la risposta all'impulso).

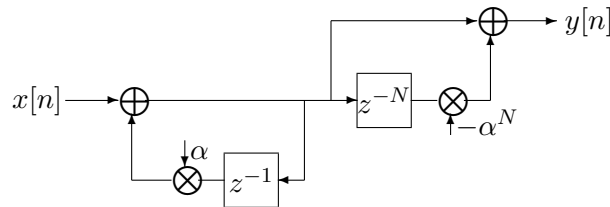


Figura 2.11: Sistema LTI per il problema 3.

Soluzione

Risposte alle domande di teoria

1. Proprietà della delta di Dirac $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{integrale}$$

$$\delta(t - t_0) * x(t) = x(t - t_0) \quad \text{ritardo}$$

$$\delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad \text{campionamento}$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad \text{trasformata di Fourier}$$

2. Un processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso lato se:

- la media $E\{x(t)\}$ è costante per ogni t
- la funzione di autocorrelazione $E\{x(t_1)x(t_2)\}$ dipende solo dalla differenza dei tempi $\tau = t_1 - t_2$.

3. Se $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T , la sua funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ è periodica di periodo T :

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T}$$

con μ_k k -esimo coefficiente della serie di Fourier. La funzione di autocorrelazione può essere anche calcolata come

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

Soluzione del problema 1

Lavorando nel dominio del tempo, si ha

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Occorre distinguere i seguenti casi:

- $t < 0$, con $y(t) = 0$
- $0 < t < T$, con

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t \sin(\pi\tau/T)d\tau = \frac{T}{\pi}[1 - \cos(\pi t/T)]$$

- $T < t < 2T$, con

$$y(t) = \int_{t-T}^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-T}^T \sin(\pi\tau/T)d\tau = \frac{T}{\pi}[1 + \cos(\pi(t-T)/T)] = \frac{T}{\pi}[1 - \cos(\pi t/T)]$$

- $t > 2T$, con $y(t) = 0$.

In sostanza,

$$y(t) = \frac{T}{\pi} [1 - \cos(\pi t/T)] p_{2T}(t - T).$$

Lavorando nel dominio della frequenza, il calcolo è decisamente più complesso.

Soluzione del problema 2

Sia $f_s = 80$ Hz la frequenza di campionamento e $T_s = 1/80$ s il periodo di campionamento.

1. Il filtro anti-aliasing è un filtro passabasso con funzione di trasferimento ideale

$$H_A(f) = p_{2B}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq B = f_s/2 = 40 \text{ Hz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2. Se il paziente ha N battiti al minuto, la durata media di un battito è

$$T = \frac{1 \text{ min}}{N} = \frac{60 \text{ s}}{N} = \frac{60}{N} \text{ s}$$

ed il numero M di campioni in questo periodo è

$$M = \frac{T}{T_s} = T f_s = \frac{60}{N} f_s = \frac{60 \times 80}{N} = \frac{4800}{N}.$$

Si ha dunque

- (a) $M = 4800/60 = 80$ campioni per battito per un paziente con $N = 60$ battiti/minuto
- (b) $M = 4800/100 = 48$ campioni per battito per un paziente con $N = 100$ battiti/minuto
- (c) $M = 4800/180 \simeq 26.6$ campioni per battito per un paziente con $N = 180$ battiti/minuto

ed il valore di M appare adeguato nei 3 casi.

3. Il campionatore preleva 80 campioni/s e quindi il numero di campioni in un minuto è

$$L_m = 80 \frac{\text{camp}}{\text{s}} \times 60 \text{ s} = 4800 \text{ camp}$$

che vengono trasformati in un numero di byte pari a

$$N_{B,m} = 2L_m = 9600.$$

Occorrono dunque 9600 byte (cioè circa 10 kByte) per memorizzare 1 minuto di segnale. Poiché in una giornata ci sono $24 \times 60 = 1440$ minuti, il numero di byte per la registrazione di un'intera giornata è

$$N_{B,g} = N_{B,m} \times 1440 = 13\,824\,000$$

(cioè circa 14 MByte o 13 MiB). Il risultato è indipendente dalla frequenza cardiaca del paziente.

4. La massima frequenza visualizzabile è $f_s/2 = 40$ Hz (la DFT risulta periodica di periodo f_s , pari in modulo e dispari in fase). La DFT ha $L = 2048$ campioni e $\Delta_f = f_s/L = f_s/2048 = 0.039$ Hz (ovvero 39 mHz). È possibile ridurre Δ_f aumentando in numero L di campioni utilizzati. (Opzionale) Se si utilizza l'algoritmo FFT, si ottiene un vettore \underline{X} con $L = 2048$ elementi, che può essere visualizzato in due modi:

- disegnando \underline{X} così come viene generato dalla FFT in funzione del vettore \underline{f} , con

$$f[k] = k\Delta_f, \quad k = 0, 1, \dots, L-1$$

- disegnando \underline{Y} tale che

$$Y[0] = X[L/2], Y[1] = X[L/2 + 1], \dots, Y[L/2 - 1] = X[L - 1],$$

$$Y[L/2] = X[0], Y[L/2 + 1] = X[1], \dots, Y[L - 1] = X[L/2 - 1]$$

ed utilizzando in ascissa il vettore \underline{f} , con

$$f[0] = -f_s/2, f[1] = -f_s/2 + \Delta_f, f[2] = -f_s/2 + 2\Delta_f, \dots,$$

$$f[L/2] = 0, \dots, f[L - 1] = -f_s/2 + (L - 1)\Delta_f = f_s/2 - \Delta_f$$

Soluzione del problema 3

Convienne utilizzare il segnale ausiliario $w[n]$ indicato nella fig. 2.12. Nel dominio z , si ha:

$$W(z) = X(z) + \alpha z^{-1}W(z)$$

$$Y(z) = W(z) - \alpha^N z^{-N}W(z)$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - \alpha z^{-1}},$$

e dalla seconda, si ha

$$Y(z) = W(z)1 - \alpha^N z^{-N}$$

e dunque

$$Y(z) = X(z) \frac{1 - \alpha^N z^{-N}}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

La funzione di trasferimento del sistema è

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \alpha^N z^{-N}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{1 - [\alpha z^{-1}]^N}{1 - [\alpha z^{-1}]}$$

Si ricordi che

$$1 - x^N = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1})$$

che consente di scrivere

$$1 - \alpha^N z^{-N} = (1 - \alpha z^{-1}) (1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots + \alpha^{N-1} z^{-N+1})$$

e quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots + \alpha^{N-1} z^{-N+1})$$

cui corrisponde la risposta all'impulso

$$h[n] = \alpha^n (u[n] - u[n - N]) = \begin{cases} \alpha^n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$

Il sistema è dunque solo apparentemente di tipo IIR (la prima parte dello schema a blocchi effettivamente è di tipo IIR), perché la risposta all'impulso $h[n]$ ha durata finita (solo N campioni). Si può implementare lo stesso filtro (con la stessa risposta all'impulso e funzione di trasferimento) con la struttura FIR indicata nella figura 2.13.

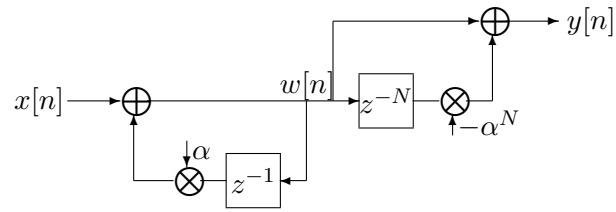


Figura 2.12: Sistema LTI per il problema 3.

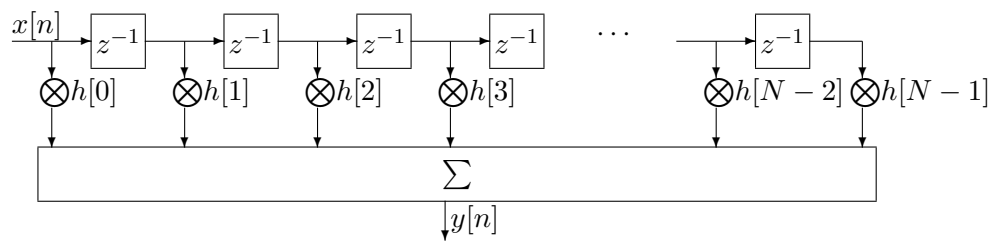


Figura 2.13: Implementazione alternativa del sistema di figura 2.12.

Capitolo 3

Temi d'esame, anno 2012

3.1 Esempio di prova d'esame 14 giugno 2012

Problema 1

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|t-kT|/T}.$$

Si calcoli in forma chiusa la potenza di $x(t)$.

Suggerimento: si consideri l'intervallo di tempo $t \in [0, T[$, si scriva $x(t)$ sviluppando esplicitamente la sommatoria e scrivendo nel modo più semplice possibile ciascuno degli addendi. Si calcoli l'energia di $x(t)$ nell'intervallo $[0, T[$ per cui si è trovata l'espressione analitica esatta.

Problema 2

Si consideri il sistema di figura 3.1: l'ingresso $n(t)$ è un rumore gaussiano bianco con spettro del valor quadratico medio $G_n(f) = N_0/2$, le risposte all'impulso dei due sottosistemi sono

$$h_1(t) = p_T(t - T/2)$$

$$h_2(t) = p_{T/2}(t - T/4) - p_{T/2}(t - 3T/4)$$

ed i due processi casuali di uscita $w_1(t)$ e $w_2(t)$ vengono campionati nello stesso istante t_0 , ottenendo le due variabili aleatorie η_1 e η_2 . Si calcoli il coefficiente di correlazione tra η_1 e η_2 . Si tratta di due variabili aleatorie statisticamente indipendenti o no?

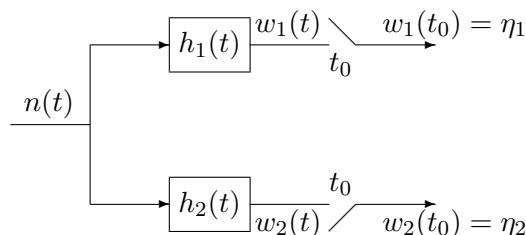


Figura 3.1: Sistema per il problema 2.

Problema 3

Si vuole che il sistema tempo-discreto ottenuto dalla cascata dei due sottosistemi indicati nella figura 3.2 si comporti come un ritardatore di N passi. Sapendo che la risposta all'impulso del primo sottosistema è

$$h[n] = p^n u[n], \quad p \in \mathbb{R}, \quad |p| < 1$$

quale deve essere la funzione di trasferimento $G(z)$ del secondo sottosistema? qual è la sua risposta all'impulso $g[n]$? Si tratta di un sistema stabile?

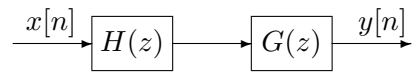


Figura 3.2: Sistema per il problema 3.

Soluzione

Soluzione del problema 1

Il segnale $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T , ottenuto come somma di esponenziali bilateri traslati in kT . Il segnale può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|t-kT|/T} \\ &= e^{-|t|/T} + e^{-|t-T|/T} + e^{-|t-2T|/T} + e^{-|t-3T|/T} + \dots \\ &+ e^{-|t+T|/T} + e^{-|t+2T|/T} + e^{-|t+3T|/T} + \dots \end{aligned}$$

Nell'intervallo di tempo $t \in [0, T]$, l'espressione precedente può essere semplificata. Ad esempio, non occorre scrivere $e^{-|t|/T}$, ma si può scrivere, più semplicemente $e^{-t/T}$, essendo t positivo. Analogamente $e^{-|t-T|/T}$ si riduce a $e^{(t-T)/T}$ (per $t \in [0, T]$, $t - T$ risulta negativo). Si ottiene dunque l'espressione semplificata

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/T} + e^{(t-T)/T} + e^{(t-2T)/T} + e^{(t-3T)/T} + \dots \\ &+ e^{-(t+T)/T} + e^{-(t+2T)/T} + e^{-(t+3T)/T} + \dots \\ &= e^{-t/T} + e^{-(t+T)/T} + e^{-(t+2T)/T} + e^{-(t+3T)/T} + \dots \\ &+ e^{(t-T)/T} + e^{(t-2T)/T} + e^{(t-3T)/T} + \dots \\ &= e^{-t/T} \left[1 + e^{-T/T} + e^{-2T/T} + e^{-3T/T} + \dots \right] \\ &+ e^{(t-T)/T} \left[1 + e^{-T/T} + e^{-2T/T} + \dots \right] \\ &= e^{-t/T} \left[1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots \right] \\ &+ e^{(t-T)/T} \left[1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots \right] \\ &= \left[e^{-t/T} + e^{(t-T)/T} \right] \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \\ &= \left[e^{-t/T} + e^{(t-T)/T} \right] \frac{1}{1 - e^{-1}} \\ &= \left[e^{-t/T} + e^{(t-T)/T} \right] \frac{e}{e - 1} \end{aligned}$$

L'energia di $x(t)$ nell'intervallo $[0, T]$ è

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x_T} &= \int_0^T x^2(t) dt \\ &= \left(\frac{e}{e-1} \right)^2 \int_0^T \left[e^{-t/T} + e^{(t-T)/T} \right]^2 dt \\ &= \left(\frac{e}{e-1} \right)^2 \int_0^T \left[e^{-2t/T} + e^{2(t-T)/T} + e^{-1} \right] dt \\ &= \left(\frac{e}{e-1} \right)^2 \left[\left. \frac{e^{-2t/T}}{-2/T} \right|_0^T + e^{-2} \left. \frac{e^{2t/T}}{2/T} \right|_0^T + e^{-1} T \right] \\ &= \left(\frac{e}{e-1} \right)^2 \left[T \frac{1 - e^{-2}}{2} + T e^{-2} \frac{e^2 - 1}{2} + e^{-1} T \right] \\ &= \left(\frac{e}{e-1} \right)^2 T \left[1 - e^{-2} + e^{-1} \right] = T \frac{e^2 + e - 1}{(e-1)^2} \end{aligned}$$

La potenza di $x(t)$ è

$$P_x = \frac{\mathcal{E}_{x_T}}{T} = \frac{e^2 + e - 1}{(e - 1)^2} \simeq 3.08$$

Soluzione del problema 2

Il coefficiente di correlazione richiesto è

$$\rho_{\eta_1, \eta_2} = \frac{E\{(\eta_1 - \mu_{\eta_1})(\eta_2 - \mu_{\eta_2})\}}{\sigma_{\eta_1} \sigma_{\eta_2}}$$

dove $\mu_{\eta_1}, \mu_{\eta_2}$ sono le medie e $\sigma_{\eta_1}, \sigma_{\eta_2}$ sono le deviazioni di standard di η_1 ed η_2 , rispettivamente.

Le due variabili aleatorie sono campioni dei processi casuali $w_1(t)$ e $w_2(t)$, stazionari in senso lato e con medie

$$\mu_{w_1} = \mu_n H_1(0) = 0$$

$$\mu_{w_2} = \mu_n H_2(0) = 0$$

(μ_n è la media di $n(t)$ ed è pari a zero); pertanto, qualunque sia il valore di t_0 , $\mu_{\eta_1} = \mu_{w_1} = \mu_{\eta_2} = \mu_{w_2} = 0$. Le varianze di η_1 e η_2 sono uguali alle varianze di $w_1(t)$ e $w_2(t)$, rispettivamente. Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta_1}^2 &= \sigma_{w_1}^2 = E\{(w_1(t) - \mu_{w_1})^2\} = E\{w_1^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{w_1}(f) df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(t) dt = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta_2}^2 &= \sigma_{w_2}^2 = E\{(w_2(t) - \mu_{w_2})^2\} = E\{w_2^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{w_2}(f) df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_2(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_2^2(t) dt = T \end{aligned}$$

Il coefficiente di correlazione richiesto diventa quindi

$$\rho_{\eta_1, \eta_2} = \frac{E\{\eta_1 \eta_2\}}{T}$$

Occorre calcolare quindi $E\{\eta_1 \eta_2\}$. Si procede in base alla definizione di convoluzione:

$$\begin{aligned} E\{\eta_1 \eta_2\} &= E\{w_1(t_0) w_2(t_0)\} \\ &= E\left\{ \int h_1(\tau_1) n(t_0 - \tau_1) d\tau_1 \int h_2(\tau_2) n(t_0 - \tau_2) d\tau_2 \right\} \\ &= E\left\{ \int \int h_1(\tau_1) h_2(\tau_2) n(t_0 - \tau_1) n(t_0 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} \\ &= \int \int h_1(\tau_1) h_2(\tau_2) E\{n(t_0 - \tau_1) n(t_0 - \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int \int h_1(\tau_1) h_2(\tau_2) R_n(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int \int h_1(\tau_1) h_2(\tau_2) \frac{N_0}{2} \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int h_1(\tau_2) h_2(\tau_2) \frac{N_0}{2} d\tau_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \langle h_1(t), h_2(t) \rangle \end{aligned}$$

Si è fatto uso del fatto che:

- la funzione di autocorrelazione del processo $n(t)$ è

$$R_n(\tau) = E\{n(t)n(t+\tau)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- l'integrale

$$\int h_1(\tau_2)h_2(\tau_2) d\tau_2$$

corrisponde alla definizione di prodotto scalare tra i due segnali $h_1(t)$ e $h_2(t)$

Poiché i due segnali $h_1(t)$ e $h_2(t)$ sono ortogonali, $E\{\eta_1\eta_2\} = 0$ e $\rho_{\eta_1,\eta_2} = 0$.

Poiché l'ingresso $n(t)$ è un processo gaussiano, i due processi $w_1(t)$ e $w_2(t)$ all'uscita dei due sistemi $h_1(t)$ e $h_2(t)$ sono gaussiani. Pertanto η_1 e η_2 (campioni dei due processi) sono variabili aleatorie gaussiane, e risultano scorrelate (si è appena visto che il coefficiente di correlazione vale zero); si può dunque concludere che η_1 e η_2 sono statisticamente indipendenti.

Soluzione del problema 3

La funzione di trasferimento del sistema con ingresso $x[n]$ e uscita $y[n]$ è

$$L(z) = H(z)G(z)$$

e si vuole che si comporti come un ritardatore di N passi; si vuole dunque che sia

$$L(z) = z^{-N}$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ si ottiene calcolando la trasformata zeta di $h[n]$, e vale

$$H(z) = \frac{z}{z-p}.$$

La funzione di trasferimento $G(z)$ si ottiene risolvendo

$$\frac{z}{z-p}G(z) = z^{-N}$$

$$G(z) = z^{-N} \frac{z-p}{z} = z^{-N} - pz^{-N-1}$$

La risposta all'impulso $g[n]$ si ottiene antitrasformando $G(z)$:

$$g[n] = \delta[n-N] - p\delta[n-(N+1)]$$

Il sistema con funzione di trasferimento $G(z)$ è un sistema FIR (la risposta all'impulso ha durata $N+1$ passi) ed è pertanto sicuramente stabile.

3.2 Appello del 30 gennaio 2012

Domande di teoria

1. Dare enunciato e dimostrazione del teorema del campionamento.
2. Dare l'enunciato del teorema di Parseval.
3. Scrivere la relazione che lega l'uscita $y(t)$ all'ingresso $x(t)$ di un sistema lineare tempo invariante (tempo-continuo) con risposta all'impulso $h(t)$. Scrivere la relazione che lega le trasformate di Fourier di $x(t)$, $y(t)$, $h(t)$. Qual è il termine tecnico con cui si indica la trasformata di Fourier di $h(t)$?

Problema 1

Si calcolino l'energia e la funzione di autocorrelazione di

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < \infty$$

Suggerimento: si disegni qualitativamente il grafico di $x(t)$ e di tutti gli altri segnali che eventualmente servono per calcolare quanto richiesto.

Problema 2

Sia $n_1(t)$ un processo casuale gaussiano bianco con spettro di potenza $G_{n_1}(f) = N_1/2$ (valor medio nullo). Sia $n_2(t)$ un processo casuale gaussiano bianco con spettro di potenza $G_{n_2}(f) = N_2/2$ (valor medio nullo). I due processi $n_1(t)$ e $n_2(t)$ sono statisticamente indipendenti. Sia

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$$

1. Qual è lo spettro di potenza di $n(t)$?
2. Qual è la funzione di autocorrelazione di $n(t)$?
3. Dire se $n(t)$ è statisticamente indipendente da $n_1(t)$.

Problema 3

Un sistema LTI tempo-discreto ha funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z}{z - 1/2}$$

1. Dire se il sistema è stabile.
2. Qual è la risposta all'impulso del sistema?
3. Si schizzi una possibile implementazione del sistema LTI utilizzando ritardatori, moltiplicatori e sommatore.

Soluzione del compito

Risposte alle domande di teoria

1. Dato un segnale tempo-continuo $x(t)$ di banda B , è possibile ricostruirlo esattamente dai suoi campioni prelevati a frequenza f_s posto che sia $f_s > 2B$.
Il segnale campionato è

$$x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

con $T_s = 1/f_s$. La trasformata di Fourier di $x_s(t)$ è

$$X_s(f) = X(f) * \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right\} = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T_s)$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - k/T_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k/T_s) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

$X_s(f)$ è la somma di infinite repliche di $X(f)$ traslate di kf_s . Se $f_s > 2B$, le repliche non si sovrappongono (non c'è aliasing) e nell'intervallo di frequenza $f \in [-f_s/2, f_s/2]$ $X_s(f)$ contiene esattamente $X(f)$. Filtrando $X_s(f)$ con un filtro passabasso con banda passante compresa tra B e $f_s/2$, si ottiene esattamente $x(t)$.

2. Teorema di Parseval: $\int x(t)y^*(t)dt = \int X(f)Y^*(f)df$
3. $y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int h(\tau)x(t - \tau)d\tau$

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ è detta funzione di trasferimento o risposta in frequenza.

Soluzione del problema 1

Il segnale $x(t)$ è un segnale determinato ad energia finita (non è periodico, non è un processo casuale). La funzione di autocorrelazione va dunque calcolata utilizzando la definizione valida per segnali determinati ad energia finita:

$$R_x(\tau) = \int x(t)x(t + \tau)dt$$

Essendo $x(t)$ un segnale reale, valgono le seguenti proprietà:

- il massimo di $R_x(\tau)$ si ha per $\tau = 0$ e corrisponde all'energia E_x del segnale, cioè $R_x(\tau) \leq R_x(0) = E_x$
- $R_x(\tau)$ è una funzione pari, cioè $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

In sostanza, è sufficiente calcolare $R_x(\tau)$ per $\tau \geq 0$ per poter rispondere alle domande.

Il segnale $x(t)$ ha il massimo in $t = 0$ e

$$x(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ e^t & t < 0 \end{cases}$$

Il segnale $x(t + \tau)$ è anticipato di τ rispetto a $x(t)$ e ha il massimo in $t = -\tau$, essendo τ (per nostra scelta) positivo, il massimo è in $t = -\tau < 0$.

L'integrale va dunque calcolato separando ciò che succede per $t < -\tau$, ciò che succede nell'intervallo $[-\tau, 0]$ e ciò che succede per $t > 0$. Questa distinzione va fatta perché l'espressione matematica di $x(t)$ o $x(t + \tau)$ cambia nei tre sottointervalli. Si ha, per $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int x(t)x(t + \tau)dt = \int e^{-|t|} e^{-|t+\tau|} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\tau} e^{-|t|} e^{-|t+\tau|} dt + \int_{-\tau}^0 e^{-|t|} e^{-|t+\tau|} dt + \int_0^{\infty} e^{-|t|} e^{-|t+\tau|} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\tau} e^t e^{t+\tau} dt + \int_{-\tau}^0 e^t e^{-(t+\tau)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-(t+\tau)} dt \\ &= e^{\tau} \int_{-\infty}^{-\tau} e^{2t} dt + e^{-\tau} \int_{-\tau}^0 dt + e^{-\tau} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \\ &= e^{\tau} \frac{e^{2t}}{2} \Big|_{-\infty}^{-\tau} + \tau e^{-\tau} + e^{-\tau} \frac{e^{-2t}}{-2} \Big|_0^{\infty} \\ &= e^{\tau} \frac{e^{-2\tau}}{2} + \tau e^{-\tau} + e^{-\tau} \frac{1}{2} = e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} = e^{-\tau}(1 + \tau) \end{aligned}$$

L'espressione di $R_x(\tau)$ valida per qualsiasi valore di τ diventa dunque:

$$R_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|).$$

L'energia di $x(t)$ è

$$E_x = R_x(0) = 1$$

Conviene (non è obbligatorio) controllare il risultato precedente calcolando direttamente E_x :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t}dt = 2 \frac{e^{-2t}}{-2} \Big|_0^{\infty} = 2 \frac{1}{2} = 1$$

In teoria, il problema poteva essere risolto anche nel dominio della frequenza, essendo lo spettro di energia di $x(t)$ la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

Dalle tavole delle trasformate di Fourier, si può calcolare facilmente lo spettro di energia $S_x(f)$:

$$X(f) = \mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2} \implies S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{4}{[1 + 4\pi^2 f^2]^2}$$

Per calcolare $R_x(\tau)$ è dunque sufficiente antitrasformare $S_x(f)$, ma, sfortunatamente, le tavole non riportano l'antitrasformata di $S_x(f)$, che andrebbe calcolata a partire dalla definizione di antitrasformata, cosa per nulla facile. In sostanza, come suggerito, in questo caso conviene lavorare nel dominio del tempo.

Soluzione del problema 2

1. Il processo $n(t)$ è la somma di due processi statisticamente indipendenti, quindi lo spettro di potenza $G_n(f)$ di $n(t)$ è la somma dei due spettri di potenza. La derivazione di questo importante risultato è stata fatta a lezione, ma è facilmente ottenibile passando dal calcolo della funzione di autocorrelazione $R_n(\tau)$ visto che:

$$G_n(f) = \mathcal{F}\{R_n(\tau)\}$$

$$\begin{aligned}
R_n(\tau) &= E\{n(t)n(t+\tau)\} \\
&= E\{[n_1(t) + n_2(t)][n_1(t+\tau) + n_2(t+\tau)]\} \\
&= E\{n_1(t)n_1(t+\tau)\} + E\{n_1(t)n_2(t+\tau)\} + E\{n_2(t)n_1(t+\tau)\} + E\{n_2(t)n_2(t+\tau)\} \\
&= R_{n_1}(\tau) + E\{n_1(t)\}E\{n_2(t+\tau)\} + E\{n_2(t)\}E\{n_1(t+\tau)\} + R_{n_2}(\tau) \\
&= R_{n_1}(\tau) + R_{n_2}(\tau)
\end{aligned}$$

dove

$$E\{n_1(t)n_2(t+\tau)\} = E\{n_1(t)\}E\{n_2(t+\tau)\}$$

è corretta perché i due processi sono statisticamente indipendenti e

$$E\{n_1(t)\}E\{n_2(t+\tau)\} = 0$$

perché sia $n_1(t)$ sia $n_2(t)$ hanno valor medio nullo. Si ottiene dunque che la funzione di autocorrelazione di $n(t)$ è la somma delle funzioni di autocorrelazione di $n_1(t)$ e $n_2(t)$:

$$R_n(\tau) = R_{n_1}(\tau) + R_{n_2}(\tau)$$

e quindi

$$G_n(f) = G_{n_1}(f) + G_{n_2}(f) = \frac{N_0}{2} + \frac{N_1}{2} = \frac{N_0 + N_1}{2}$$

2. La funzione di autocorrelazione di $n(t)$ è

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\} = \frac{N_0 + N_1}{2}\delta(\tau)$$

3. Poiché $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$, allora $n(t)$ dipende da $n_1(t)$ e quindi non può essere statisticamente indipendente da $n_1(t)$. Per verificare dal punto di vista matematico questo risultato è sufficiente calcolare il coefficiente di correlazione tra $n(t)$ e $n_1(t)$: se è zero, i due processi sono scorrelati ed, essendo gaussiani, sono anche statisticamente indipendenti.

Le definizione di coefficiente di correlazione tra due variabili aleatorie ξ e η è la seguente:

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{E\{(\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta)\}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}$$

dove μ_x è il valor medio di ξ e σ_ξ è la sua deviazione standard; idem per μ_η e σ_η .

Nel caso in questione, occorre calcolare

$$\rho = \frac{E\{n(t)n_1(t)\}}{\sigma_n\sigma_{n_1}}$$

In particolare,

$$E\{n(t)n_1(t)\} = E\{[n_1(t) + n_2(t)]n_1(t)\} = E\{n_1^2(t)\} + E\{n_2(t)n_1(t)\} = \sigma_{n_1}^2$$

essendo $n_1(t)$ ed $n_2(t)$ statisticamente indipendenti e a media nulla. Poiché il numeratore di ρ NON è nullo, ρ è diverso da zero e quindi $n_1(t)$ ed $n(t)$ sono correlati e dunque statisticamente dipendenti.

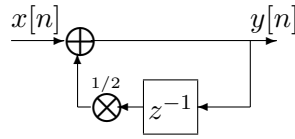


Figura 3.3: Struttura del sistema LTI per l'esercizio 3.

Soluzione del problema 3

Il sistema in questione è un sistema LTI tempo-discreto.

1. La funzione di trasferimento $H(z)$ ha un solo polo in $z = 1/2$. Poiché il polo si trova all'interno del cerchio unitario, il sistema è stabile.
2. La risposta all'impulso del sistema si trova antitrasformando $H(z)$. Si può riscrivere $H(z)$ in questo modo:

$$H(z) = \frac{z}{z - 1/2} = \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

e, dalle tavole delle trasformate z , si ottiene

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Il fatto che $h[n]$ tenda a zero per n che tende a infinito è una conferma della stabilità del sistema. La risposta all'impulso ha durata infinita, e quindi il sistema è di tipo IIR (Infinite Impulse Response).

3. Per ricavare la struttura del filtro occorre ricordare che

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \text{ovvero} \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

e sostituire l'espressione di $H(z)$. Si ha

$$Y(z) = \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}} X(z), \quad \Rightarrow \quad Y(z)[1 - (1/2)z^{-1}] = X(z)$$

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z), \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) + X(z)$$

Nel dominio del tempo discreto, l'ultima relazione corrisponde a

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

e quindi la struttura del sistema LTI è quella indicata nella figura [3.3](#)

3.3 Appello del 22 febbraio 2012

Domande di teoria

1. Scrivere le proprietà della delta di Dirac.
2. Scrivere la formula della convoluzione discreta tra due segnali tempo-discreti $x[n]$ e $h[n]$
3. Sia $x(t)$ un segnale tempo-continuo periodico di periodo T . Qual è l'espressione generale della sua trasformata di Fourier $X(f)$? Qual è l'espressione generale della suo spettro di potenza?

Problema 1

Si consideri il sistema indicato in figura 3.4, dove $h_1(t)$ e $h_2(t)$ sono risposte all'impulso.

1. Il sistema è LTI? (basta la risposta sì/no senza giustificazione)
2. Qual è la risposta all'impulso del sistema (tra ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$)?
3. Qual è la funzione di trasferimento del sistema?
4. Si supponga adesso che sia, specificamente,

$$h_1(t) = 1 \quad \text{per } t \in [0, T/2] \quad \text{e } h_1(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

$$h_2(t) = 1 \quad \text{per } t \in [T/2, T] \quad \text{e } h_2(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

$$x(t) = 1 \quad \text{per } t \in [0, T] \quad \text{e } x(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

Si calcoli $y(t)$.

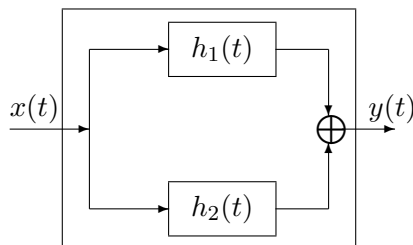


Figura 3.4: Sistema considerato nel problema 1

Problema 2

Si consideri il sistema di figura 3.5, dove $n(t)$ è un processo casuale gaussiano bianco (stazionario ed ergodico) con spettro di potenza $G_n(f) = 1$,

$$h(t) = 1 \quad \text{per } t \in [0, T] \quad \text{e } h(t) = 0 \quad \text{altrove}$$

1. Si calcoli lo spettro di potenza e la funzione di autocorrelazione del processo d'uscita $z(t)$.
2. Si scriva la densità di probabilità di $z(t)$.

Problema 3

Un sistema LTI tempo-discreto ha funzione di trasferimento

$$H(z) = 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}$$

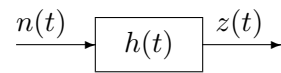


Figura 3.5: Sistema considerato nel problema 2

1. Dire se il sistema è stabile.
2. Qual è la risposta all'impulso del sistema?
3. Si schizzi una possibile implementazione del sistema LTI utilizzando ritardatori, moltiplicatori e sommatore.

Soluzione del compito

Risposte alle domande di teoria

1. Proprietà della delta di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t - t_0) * x(t) = x(t - t_0)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad \delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

2. Convoluzione discreta:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k h[k]x[n - k] = \sum_k x[k]h[n - k]$$

3. Se $x(t)$ è periodico di periodo T , allora può essere scritto utilizzando la serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T} \quad \text{con} \quad \mu_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

e la trasformata di Fourier è

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T),$$

mentre lo spettro di potenza è

$$G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(f - k/T).$$

la sua trasformata di Fourier può essere scritta

Soluzione del problema 1

1. Il sistema è lineare visto che è composto di sistemi lineari in parallelo ed un sommatore di segnali (anch'esso lineare). D'altra parte nei punti successivi si andrà a calcolare la risposta all'impulso e la funzione di trasferimento, cosa possibile solo per sistemi lineari tempo invarianti.
2. Se si pone $x(t) = \delta(t)$ all'ingresso del sistema, alla sua uscita si ottiene la risposta all'impulso $h(t)$. Ovviamente si ha

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

3. La funzione di trasferimento è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso e quindi

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f) \quad \text{essendo} \quad H_1(f) = \mathcal{F}\{h_1(t)\}, H_2(f) = \mathcal{F}\{h_2(t)\}$$

4. Nel caso specifico,

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = 1 \quad \text{per } t \in [0, T]$$

e $h(t) = 0$ altrove. L'uscita $y(t)$ è quindi

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

ed è la convoluzione di due segnali rettangolari di durata T . Come già calcolato nel libro di testo, il grafico di $y(t)$ corrisponde ad un triangolo isoscele di base $2T$ e altezza T :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in [0, T] \\ (2T - t) & t \in [T, 2T] \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

Soluzione del problema 2

1. Il processo di uscita $z(t)$ ha spettro di potenza

$$G_z(f) = |H(f)|^2 G_n(f) = |H(f)|^2$$

visto che $G_n(f) = 1$. In particolare, come riportato nelle tavole,

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_0^T e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

e

$$G_z(f) = \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right]^2$$

La funzione di autocorrelazione di $z(t)$ può essere calcolata o come antitrasformata di $G_z(f)$ oppure con la formula

$$R_z(\tau) = R_n(\tau) * R_h(\tau),$$

dove

$$R_n(\tau) = E\{n(t)n(t+\tau)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\} = \delta(\tau)$$

è la funzione di autocorrelazione del processo di ingresso, e

$$R_h(\tau) = \int h(t)h(t+\tau)dt$$

è la funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso $h(t)$, segnale determinato. Per la risposta all'impulso in questione, come ricavato nel libro di testo, la funzione di autocorrelazione è

$$R_h(\tau) = |T - t|, \quad \text{per } t \in [-T, T], \quad R_h(\tau) = 0 \quad \text{per } |t| > T.$$

Pertanto

$$R_z(\tau) = \delta(\tau) * R_h(\tau) = R_h(\tau)$$

2. La densità di probabilità di $z(t)$ è gaussiana con media

$$\mu_z = \mu_n H(0) = 0,$$

in quanto la media μ_n di $n(t)$ è nulla, e varianza

$$\sigma_z^2 = R_z(\tau)|_{\tau=0} = T.$$

Pertanto, la densità di probabilità richiesta è

$$f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}$$

Soluzione del problema 3

1. Il sistema è di tipo FIR (Finite Impulse Response) ed è stabile.
2. La risposta all'impulso si ottiene calcolando l'antitrasformata z di $H(z)$. Si ottiene direttamente

$$h[n] = \delta[n] + 0.5 \delta[n - 1] + 0.25 \delta[n - 2]$$

3. L'implementazione del sistema è riportata in figura 3.6, dove z^{-1} indica un ritardatore di un passo e Σ indica un sommatore.

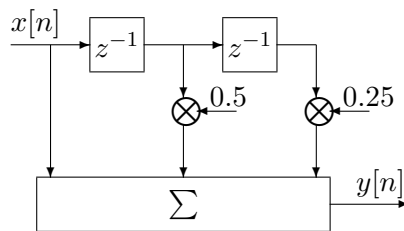


Figura 3.6: Struttura del sistema FIR per il problema 3.

3.4 Appello del 18 giugno 2012

Domande di teoria

1. Dimostrare l'uguaglianza di Parseval (segnali ad energia finita tempo-continui)
2. Elencare le condizioni che rendono un processo casuale WSS, dando la definizione di tutti i parametri o funzioni necessari.
3. Dato $x(t) = e^{-|t|/T}$ calcolare
 - (a) $x(t) * \delta(t)$
 - (b) $x(t) * \delta(t - T)$
 - (c) $x(t - t_0)\delta(t - T)$
 - (d) $\int x(t - t_0)\delta(t - T)dt$

Problema 1

Si consideri il sistema indicato nella figura 3.7, dove i due coefficienti reali a_1 e a_2 sono maggiori di zero e i ritardi τ_1 e τ_2 sono positivi e $\tau_2 > \tau_1$. Se all'ingresso viene posto un segnale sinusoidale a frequenza $f_0 > 0$ di potenza P_x , per quale valore di f_0 il segnale di uscita $y(t)$ ha la massima potenza? quanto vale la massima potenza di $y(t)$?

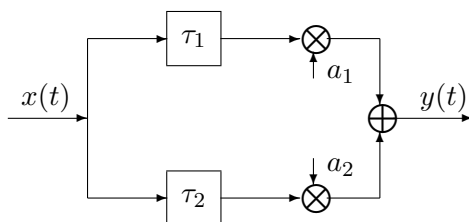


Figura 3.7: Sistema per il problema 1

Problema 2

Un rumore bianco $n(t)$ con spettro di potenza $G_n(f) = 1$ viene filtrato da un filtro con risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t),$$

con $f_0 T \gg 1$, ottenendo il processo d'uscita $z(t)$.

1. Si dica se $z(t)$ è WSS
2. Si calcolino media, varianza, valor quadratico medio di $z(t)$
3. Si calcoli lo spettro del valor quadratico medio di $z(t)$
4. Si scriva l'espressione analitica della densità di probabilità del primo ordine di $z(t)$

Problema 3

Si consideri il sistema a tempo discreto di figura 3.8.

1. Si trovino i valori dei coefficienti a_1, a_2, b_1, b_2 tali che il sistema abbia poli e zeri ($M < 1$):

$$p_1 = jM, \quad p_2 = -jM, \quad z_1 = 2M, \quad z_2 = -2M$$

2. Per i poli e gli zeri indicati nel punto 1, si calcoli la risposta all'impulso del sistema
3. Si tratta di un sistema stabile?

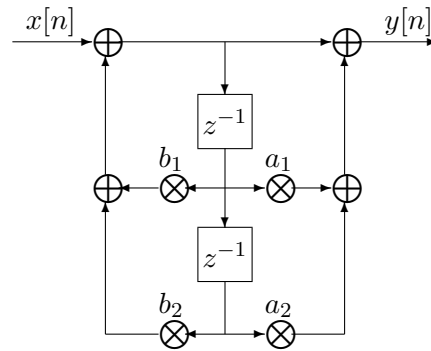


Figura 3.8: Sistema per il problema 3

Soluzione

Soluzione del problema 1

Il sistema è lineare e tempo invariante con risposta all'impulso

$$h(t) = a_1\delta(t - \tau_1) + a_2\delta(t - \tau_2)$$

e risposta in frequenza

$$H(f) = a_1e^{-j2\pi f\tau_1} + a_2e^{-j2\pi f\tau_2}.$$

Il segnale di ingresso è sinusoidale, con frequenza f_0 ($f_0 > 0$) e potenza P_x :

$$x(t) = \sqrt{2P_x} \cos(2\pi f_0 t + \theta);$$

il valore della fase θ non viene fornito. Il segnale di uscita $y(t)$ è ancora sinusoidale:

$$y(t) = \sqrt{2P_x} |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \theta + \varphi(f_0))$$

dove $\varphi(f_0)$ è la fase di $H(f)$ alla frequenza f_0 . La potenza di $y(t)$ non dipende dalla fase (quindi non dipende né da θ né da φ) e vale

$$P_y = P_x |H(f_0)|^2.$$

Per massimizzare P_y occorre dunque scegliere f_0 in modo che $|H(f_0)|$ sia massimo.

Calcolando in maniera esplicita $|H(f)|^2$ si ottiene:

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f) = \left[a_1e^{-j2\pi f\tau_1} + a_2e^{-j2\pi f\tau_2} \right] \left[a_1e^{j2\pi f\tau_1} + a_2e^{j2\pi f\tau_2} \right]$$

$$|H(f)|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos[2\pi f(\tau_2 - \tau_1)]$$

Il massimo \tilde{A} :

$$\max_f |H(f)|^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \max_f \cos[2\pi f(\tau_2 - \tau_1)] = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

e si ottiene per tutti i valori di f_0 tali che $\cos[2\pi f_0(\tau_2 - \tau_1)] = 1$, cioè per $f_0 = k/(\tau_2 - \tau_1)$, k intero maggiore di zero.

Un'altra soluzione si ottiene osservando che la funzione di trasferimento $H(f)$ è, per una preassegnata frequenza, la somma di due numeri complessi ed il suo modulo è massimo se i due numeri complessi hanno la stessa fase:

$$H(f) = a_1e^{j\phi_1(f)} + a_2e^{j\phi_2(f)}$$

(si noti che $|a_1 \exp(-j2\pi f\tau_1)| = a_1$ essendo a_1 reale e positivo, idem per a_2);

$$\max_f |H(f)|^2 = |(a_1 + a_2)e^{j\psi}|^2 = (a_1 + a_2)^2$$

per $f = f_0$ tale che

$$\phi_1(f_0) = \psi, \quad \phi_2(f_0) = \psi.$$

Si noti che non è necessario che sia esattamente $\phi_1(f_0) = \psi$ e $\phi_2(f_0) = \psi$, ma è sufficiente che sia $\phi_1(f_0) = \psi$, $\phi_2(f_0) = \psi - 2k\pi$ con k intero qualsiasi. Si ottiene dunque il sistema

$$\phi_1(f_0) = -2\pi f_0\tau_1 = \psi, \quad \phi_2(f_0) = -2\pi f_0\tau_2 = \psi - 2k\pi$$

e quindi

$$\phi_1(f_0) - \phi_2(f_0) = 2\pi f_0(\tau_2 - \tau_1) = 2k\pi, \quad \implies \quad f_0 = \frac{k}{\tau_2 - \tau_1}$$

con k intero (positivo) qualsiasi.

Riassumendo, una soluzione del problema è dunque

$$\max_{f_0} P_y = (a_1 + a_2)^2 P_x, \quad \text{per } f_0 = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}$$

ma si ha anche

$$\max_{f_0} P_y = (a_1 + a_2)^2 P_x, \quad \text{per } f_0 = \frac{2}{\tau_2 - \tau_1}$$

ecc.

Soluzione del problema 2

1. Il processo d'uscita è WSS in quanto ottenuto da un processo stazionario (il rumore bianco) filtrato da un sistema LTI
2. Il filtro ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t) \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \right\} * \mathcal{F} \{ \cos(2\pi f_0 t) \}$$

$$H(f) = p_{1/T}(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2} [p_{1/T}(f - f_0) + p_{1/T}(f + f_0)]$$

In sostanza si tratta di un filtro passabanda centrato in f_0 e di banda $1/T$.

La media di $z(t)$ è zero:

$$\mu_z = \mu_n H(0) = 0$$

in quanto $\mu_n = 0$ e $H(0) = 0$. Pertanto varianza e valor quadratico medio di $z(t)$ coincidono:

$$\sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = R_z(0)$$

e la funzione di autocorrelazione di $z(t)$ è

$$R_z(\tau) = R_n(\tau) * R_h(\tau) = \delta(\tau) * R_h(\tau) = R_h(\tau).$$

Allora

$$\sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = R_z(0) = R_h(0) = \mathcal{E}(h) = \int h^2(t) dt = \int |H(f)|^2 df = \frac{1}{4} \frac{2}{T} = \frac{1}{2T}$$

3. Lo spettro $S_z(f)$ del valor quadratico medio di $z(t)$ (uguale allo spettro di potenza) è

$$S_z(f) = |H(f)|^2 S_n(f) = |H(f)|^2 = \frac{1}{4} [p_{1/T}(f - f_0) + p_{1/T}(f + f_0)]$$

4. La d.d.p. del I ordine di $z(t)$ è

$$f_z(u; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_z^2}} = \sqrt{\frac{T}{\pi}} e^{-u^2 T}$$

Soluzione del problema 3

Conviene definire il segnale ausiliario $w[n]$ indicato nella figura 3.9. La funzione di trasferimento $H(z)$ può essere ottenuta risolvendo le seguenti equazioni:

$$W(z) = X(z) + b_1 z^{-1} W(z) + b_2 z^{-2} W(z)$$

$$Y(z) = W(z) + a_1 z^{-1} W(z) + a_2 z^{-2} W(z)$$

Dalla prima equazione si ottiene

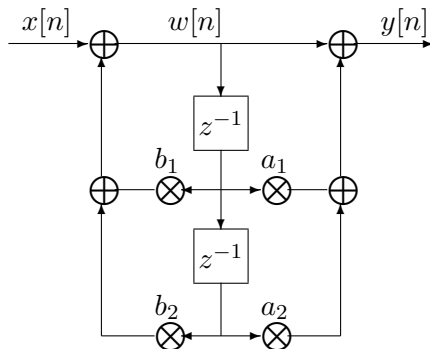


Figura 3.9: Sistema per il problema 3 con indicazione del segnale $w[n]$.

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

e dalla seconda si ha

$$Y(z) = \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} X(z)$$

Pertanto

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 - b_1 z - b_2}$$

1. Si vuole che il sistema abbia due poli e due zeri:

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2}{z^2 - (p_1 + p_2)z + p_1 p_2} = \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 - b_1 z - b_2}$$

Si deve dunque avere

$$a_1 = -(z_1 + z_2), \quad a_2 = z_1 z_2$$

$$b_1 = (p_1 + p_2), \quad b_2 = -p_1 p_2$$

con $z_1 = 2M$, $z_2 = -2M$, $p_1 = jM$, $p_2 = -jM$. Si ha allora

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -4M^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = M^2$$

e la funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$H(z) = \frac{z^2 - 4M^2}{z^2 + M^2}$$

2. La risposta all'impulso può essere ottenuta con la tecnica standard della scomposizione in fratti semplici (metodo del libro Lo Presti - Neri):

$$H^o(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 - 4M^2}{z(z - jM)(z + jM)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - jM} + \frac{C}{z + jM}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} H^o(z)z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 4M^2}{(z - jM)(z + jM)} = -4$$

$$B = \lim_{z \rightarrow jM} H^o(z)(z - jM) = \lim_{z \rightarrow jM} \frac{z^2 - 4M^2}{z(z + jM)} = \frac{-M^2 - 4M^2}{jM(2jM)} = \frac{5}{2}$$

$$C = \lim_{z \rightarrow -jM} H^o(z)(z + jM) = \lim_{z \rightarrow -jM} \frac{z^2 - 4M^2}{z(z - jM)} = \frac{-M^2 - 4M^2}{-jM(-2jM)} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-4}{z} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{z - jM} + \frac{1}{z + jM} \right)$$

$$H(z) = -4 + \frac{5}{2} \left(\frac{z}{z - jM} + \frac{z}{z + jM} \right)$$

$$\begin{aligned} h[n] &= -4\delta[n] + \frac{5}{2} \{ (jM)^n u[n] + (-jM)^n u[n] \} \\ &= -4\delta[n] + \frac{5}{2} u[n] \left\{ \left(Me^{j\pi/2} \right)^n + \left(Me^{-j\pi/2} \right)^n \right\} \\ &= -4\delta[n] + \frac{5}{2} M^n u[n] \left\{ \left(e^{jn\pi/2} \right) + \left(e^{-jn\pi/2} \right) \right\} \\ &= -4\delta[n] + 5M^n u[n] \cos(n\pi/2) \end{aligned}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 5M^n & n = 4k, k \text{ intero positivo} \\ -5M^n & n = 4k + 2, k \text{ intero positivo o nullo} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Poiché nel testo è specificato $M < 1$, i due poli si trovano all'interno del cerchio di raggio unitario ed il sistema è stabile. La stabilità può anche essere verificata calcolando la somma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 5M^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} 5M^{4k} M^2 = 1 + 5 \left(\frac{1}{1 - M^4} - 1 \right) + 5M^2 \frac{1}{1 - M^4}$$

e constatando che risulta limitata (minore di infinito).

3.5 Appello del 16 luglio 2012

Domande di teoria

1. Si calcoli la trasformata di Fourier di $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$
2. Un segnale $x(t)$ ad energia finita ha banda B_x . Quale deve essere la frequenza minima f_{min} di campionamento per poter ricostruire esattamente il segnale a partire dai suoi campioni? supponendo di usare un campionatore ideale (che utilizza le delta di Dirac) con frequenza di campionamento maggiore di f_{min} , come deve essere fatto il dispositivo che ricostruisce $x(t)$ a partire dai suoi campioni? Si dimostri che all'uscita di questo dispositivo si ha effettivamente $x(t)$.

Problema 1

Si considerino i segnali

$$z(t) = |\cos(2\pi f_0 t)| \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x(t) = z\left(t + \frac{1}{8f_0}\right).$$

1. Si disegni il grafico di $x(t)$
2. Si calcoli la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$, esprimendola nella maniera più compatta possibile (si portino avanti i calcoli quanto più si riesce)
3. Si specifichi a quale categoria di segnali appartiene $x(t)$ (energia finita, potenza finita non periodico, potenza finita periodico)
4.
 - (a) Se $x(t)$ è un segnale ad energia finita, si calcoli lo spettro di energia $S_x(f)$ e l'energia $\mathcal{E}(x)$
 - (b) Se $x(t)$ è un segnale periodico a potenza finita, si calcoli lo spettro di potenza $G_x(f)$ e la potenza $\mathcal{P}(x)$
 - (c) Se $x(t)$ è un segnale a potenza finita non periodico, si calcoli la potenza $\mathcal{P}(x)$

Problema 2

Si consideri un processo gaussiano bianco $n(t)$ con densità spettrale di potenza $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$. Si considerino quindi i processi

$$w(t) = \frac{1}{4}n(t) + 1 \quad \text{e} \quad z(t) = w(t) * h(t), \quad \text{dove} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [T/4, 5T/4] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcolino:

1. la funzione di autocorrelazione e lo spettro del valor quadratico medio di $w(t)$
2. il valor medio di $z(t)$
3. lo spettro del valor quadratico medio di $z(t)$

Si disegni il grafico dello spettro del valor quadratico medio sia per $w(t)$, sia per $z(t)$.

Problema 3

Il segnale tempo-discreto

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

viene filtrato dal filtro FIR con risposta all'impulso

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Si disegni il grafico del segnale $y[n]$ all'uscita del filtro dopo averne calcolato l'espressione matematica.

Soluzione

Soluzione del problema 1

Il segnale

$$x(t) = |\cos(2\pi f_0 t)| \quad t \in \mathbb{R}$$

è periodico, ha frequenza fondamentale $2f_0$ (il doppio rispetto al segnale $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$) e periodo $T = 1/(2f_0)$.

1. grafico omesso
2. La trasformata di Fourier $X(f)$ è

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k2f_0)$$

e ha righe (delta di Dirac) nei multipli della frequenza fondamentale $2f_0$.

(a) I coefficienti μ_k possono essere calcolati nel seguente modo:

$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \mathcal{F}\{x_T(t)\}|_{f=k/T} = \frac{1}{T} X_T(k/T)$$

dove

$$x_T(t) = x(t)p_T(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|p_T(t) = \cos(2\pi f_0 t)p_T(t)$$

e $p_T(t)$ vale 1 per $t \in [-T/2, T/2] = [-1/(4f_0), 1/(4f_0)]$ e zero altrove; si noti che all'interno dell'intervallo $t \in [-T/2, T/2]$ si ha $|\cos(2\pi f_0 t)| = \cos(2\pi f_0 t)$. La trasformata di Fourier di $x_T(t)$ è

$$X_T(f) = \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t) * \mathcal{F}\{p_T(t)\}\} = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

$$X_T(f) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\pi(f - f_0)T)}{\pi(f - f_0)} + \frac{\sin(\pi(f + f_0)T)}{\pi(f + f_0)} \right]$$

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{T} X_T(k/T) = \frac{1}{2T} \left[\frac{\sin(\pi(k/T - f_0)T)}{\pi(k/T - f_0)} + \frac{\sin(\pi(k/T + f_0)T)}{\pi(k/T + f_0)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k\pi - \pi/2)}{k\pi - \pi/2} + \frac{\sin(k\pi + \pi/2)}{k\pi + \pi/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-(-1)^k}{k\pi - \pi/2} + \frac{(-1)^k}{k\pi + \pi/2} \right] = \frac{(-1)^k}{\pi} \left[\frac{-1}{2k - 1} + \frac{1}{2k + 1} \right] = \frac{-2(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)} \end{aligned}$$

(b) In alternativa, i coefficienti della serie di Fourier μ_k possono essere calcolati in base alla definizione:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = 2f_0 \int_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} x(t) e^{-j2\pi k2f_0 t} dt \\ &= 2f_0 \int_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} |\cos(2\pi f_0 t)| e^{-j2\pi k2f_0 t} dt \end{aligned}$$

Si noti che $|\cos(2\pi f_0 t)| = \cos(2\pi f_0 t)$ per t tra i due estremi di integrazione. Pertanto, si può semplificare l'integrale rimuovendo il valore assoluto:

$$\mu_k = 2f_0 \int_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi k 2f_0 t} dt$$

e usando la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} \mu_k &= 2f_0 \int_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi k 2f_0 t} dt \\ &= f_0 \int_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} e^{-j2\pi f_0 t(2k-1)} dt + f_0 \int_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} e^{-j2\pi f_0 t(2k+1)} dt \\ &= f_0 \frac{e^{-j2\pi f_0 t(2k-1)}}{-j2\pi f_0(2k-1)} \Big|_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} + f_0 \frac{e^{-j2\pi f_0 t(2k+1)}}{-j2\pi f_0(2k+1)} \Big|_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} \\ &= \frac{e^{-j\pi/2(2k-1)} - e^{j\pi/2(2k-1)}}{-j2\pi(2k-1)} + \frac{e^{-j\pi/2(2k+1)} - e^{j\pi/2(2k+1)}}{-j2\pi(2k+1)} \\ &= \frac{\sin(\pi/2(2k-1))}{\pi(2k-1)} + \frac{\sin(\pi/2(2k+1))}{\pi(2k+1)} \\ &= \frac{\sin(k\pi - \pi/2)}{\pi(2k-1)} + \frac{\sin(k\pi + \pi/2)}{\pi(2k+1)} \\ &= \frac{-(-1)^k}{\pi(2k-1)} + \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\mu_k = \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{-(2k+1) + (2k-1)}{4k^2 - 1} = \frac{-2(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)}$$

3. Il segnale $x(t)$ è periodico a potenza finita

4. Lo spettro di potenza per $x(t)$ è

$$G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(f - k/T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(4k^2 - 1)^2} \delta(f - 2kf_0)$$

La potenza $\mathcal{P}(x)$ può essere calcolata in tre modi:

(a) come integrale dello spettro di potenza:

$$\mathcal{P}(x) = \int G_x(f) df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(4k^2 - 1)^2}$$

di difficile valutazione

(b) come rapporto tra l'energia di $x_T(t)$ ed il periodo di $x(t)$:

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\mathcal{E}(x_T)}{T},$$

che consente di valutare $\mathcal{P}(x)$ in modo relativamente facile:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x_T) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(4\pi f_0 t)] dt \\ &= \frac{T}{2} + \frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0 t} \Big|_{-1/(4f_0)}^{1/(4f_0)} = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2}$$

(c) notando che

$$x^2(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|^2 = \cos^2(2\pi f_0 t)$$

e quindi la potenza di $x(t)$ deve essere uguale alla potenza di $\cos(2\pi f_0 t)$, cioè $1/2$.

Soluzione del problema 2

1. Il processo $w(t)$ è ancora gaussiano e stazionario, ma ha valor medio diverso da zero:

$$\mu_w = E \left\{ \frac{1}{4}n(t) + 1 \right\} = \frac{1}{4}E \{n(t)\} + E \{1\} = 1$$

in quanto $E\{n(t)\} = 0$, essendo $n(t)$ bianco.

La funzione di autocorrelazione è

$$\begin{aligned} R_w(\tau) &= E\{w(t)w(t+\tau)\} = E \left\{ \left[\frac{1}{4}n(t) + 1 \right] \left[\frac{1}{4}n(t+\tau) + 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{16}E\{n(t)n(t+\tau)\} + \frac{1}{4}E\{n(t)\} + \frac{1}{4}E\{n(t+\tau)\} + E\{1\} \\ &= \frac{1}{16}R_n(\tau) + 1 = \frac{N_0}{32}\delta(\tau) + 1 \end{aligned}$$

poiché l'autocorrelazione del processo gaussiano bianco $n(t)$ è $R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$.

Lo spettro del valor quadratico medio $S_w(f)$ di $w(t)$ è la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione $R_w(\tau)$:

$$S_w(f) = \mathcal{F}\{R_w(\tau)\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{N_0}{32}\delta(\tau) + 1 \right\} = \frac{N_0}{32} + \delta(f)$$

Rispetto a $S_n(f) = N_0/2$, lo spettro di $w(t)$ risulta scalato e ha una delta in più a frequenza zero, legata al valor medio pari a 1.

2. Il processo $z(t)$ è ottenuto filtrando $w(t)$ con un sistema che ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = T e^{-j\pi f T} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}.$$

Il processo $z(t)$ è stazionario e ha valor medio

$$\mu_z = \mu_w H(0) = H(0) = T$$

3. Lo spettro del valor quadratico medio di $z(t)$ è

$$\begin{aligned} S_z(f) &= S_w(f)|H(f)|^2 = \left[\frac{N_0}{32} + \delta(f) \right] |H(f)|^2 = \frac{N_0}{32}|H(f)|^2 + \delta(f)|H(0)|^2 \\ S_z(f) &= T^2 \frac{N_0}{32} \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]^2 + T^2 \delta(f). \end{aligned}$$

Soluzione del problema 3

Una soluzione è la seguente. Si calcola la trasformata zeta $X(z)$ di $x[n]$, la funzione di trasferimento $H(z)$, si calcola $Y(z) = H(z)X(z)$ e quindi si antitrasforma.

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

$$H(z) = 1 - z^{-1}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= (1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}) \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} - z^{-1} - 2z^{-2} - 3z^{-3} - 2z^{-4} - z^{-5} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} - z^{-5} \end{aligned}$$

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] - \delta[n-4] - \delta[n-5]$$

In alternativa, si calcola la convoluzione discreta secondo la definizione.

3.6 Appello del 3 settembre 2012

Domande di teoria

1. Si dimostri che la trasformata di Fourier di $x(t)y(t)$ è $X(f)*Y(f)$, essendo $x(t)$ e $y(t)$ due segnali tempo-continui ad energia finita.
2. Si consideri il segnale tempo-discreto periodico

$$x[n] = \sin(2\pi n/20), \quad n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Si scriva l'espressione della sua DFT (non occorre calcolare la DFT, basta scrivere l'espressione che consente poi di calcolarla).

3. Si elenchino tutte le proprietà del segnale $x(t)$ sapendo che la sua trasformata di Fourier è

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - 20n)$$

con c_n reale e $c_{-n} = c_n$

Problema 1

Dal segnale

$$x(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 20t + \pi/4)$$

si ottiene il segnale $y(t) = x^2(t)$, che viene successivamente filtrato ottenendo il segnale $z(t)$. Il filtro ha in ingresso $y(t)$ e in uscita $z(t)$, è di tipo ideale passabasso con banda 5 Hz e guadagno unitario. Si calcoli l'espressione di $z(t)$.

Problema 2

Il rumore gaussiano bianco $n(t)$ (stazionario ed ergodico) con spettro di potenza $N_0/2$ viene filtrato con un filtro passbasso ideale di banda 50 Hz e guadagno unitario, ottenendo $m(t)$. Il rumore filtrato $m(t)$ viene passato attraverso un derivatore, ottenendo $r(t)$. Si calcolino:

1. media, varianza e valor quadratico medio di $r(t)$
2. lo spettro di potenza di $r(t)$
3. la potenza di $r(t)$

Problema 3

Il segnale tempo-discreto

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

viene posto all'ingresso del sistema di figura 3.10. Si calcoli l'espressione dell'uscita $y[n]$. Si disegni il grafico qualitativo di $y[n]$.

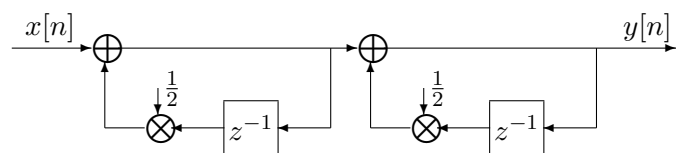


Figura 3.10: Sistema per il problema 3.

Soluzione

Soluzione del problema 1

La soluzione viene fornita per

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

e $A = 2$, $f_0 = 20$ Hz, $\theta = \pi/4$.

Il sistema da analizzare è rappresentato nello schema a blocchi di figura 3.11. Il segnale $y(t)$ può essere scritto come segue:

$$y(t) = x^2(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{A^2}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)]$$

La trasformata di Fourier di $y(t)$ è

$$Y(f) = \frac{A^2}{2} \left[\delta(f) + \frac{1}{2} \left(e^{j2\theta} \delta(f - 2f_0) + e^{-j2\theta} \delta(f + 2f_0) \right) \right]$$

Il filtro passabasso ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B = f_0/4 \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Il segnale $z(t) = h(t) * y(t)$ all'uscita del filtro ha trasformata di Fourier

$$Z(f) = X(f)Y(f) = \frac{A^2}{2} \delta(f)$$

(le delta di Dirac presenti in $Y(f)$ alle frequenze $2f_0$ e $-2f_0$ vengono eliminate dal filtro passabasso). L'espressione di $z(t)$ è quindi

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Z(f)\} = \frac{A^2}{2}.$$

In sostanza, all'uscita del filtro si ha solo la componente continua di $y(t)$.

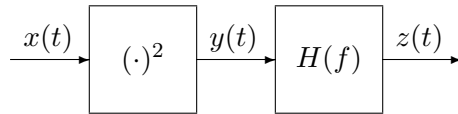


Figura 3.11: Sistema per il problema 1

Soluzione del problema 2

Il sistema da analizzare è descritto nello schema a blocchi di figura 3.12. Il processo casuale $m(t)$ è gaussiano, stazionario ed ergodico e ha spettro di potenza

$$G_m(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f| \leq B = 50 \text{ Hz} \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Il derivatore ha funzione di trasferimento

$$H_d(f) = j2\pi f$$

e quindi il processo casuale $r(t)$ ha spettro di potenza

$$G_r(f) = G_m(f)|H_d(f)|^2 = \begin{cases} N_0 2\pi^2 f^2 & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

(lo spettro di potenza è di tipo parabolico tra $-B$ e B ed è nullo al di fuori di questo intervallo).

Il processo $r(t)$ si ottiene filtrando (con la cascata di due sistemi lineari) un rumore bianco $n(t)$, che ha valor medio μ_n nullo; pertanto la media di $r(t)$ è

$$\mu_r = \mu_n H(0) H_d(0) = 0.$$

Essendo il valor medio di $r(t)$ nullo, i suoi valor quadratico medio e varianza coincidono

$$E\{r^2(t)\} = \sigma_r^2$$

e possono essere calcolati integrando lo spettro di potenza:

$$E\{r^2(t)\} = \sigma_r^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_r(f) df = \int_{-B}^B N_0 2\pi^2 f^2 df = N_0 4\pi^2 \frac{B^3}{3}.$$

Essendo $r(t)$ ottenuto filtrando il processo ergodico $n(t)$ con un sistema lineare, è anch'esso un processo ergodico e la sua potenza P_r coincide con il suo valor quadratico medio:

$$P_r = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r^2(t; s_0) dt = E\{r^2(t)\} = \frac{4}{3} N_0 \pi^2 B^3.$$

Nell'espressione precedente $r(t; s_0)$ identifica una tra le possibili realizzazioni del processo $r(t)$.

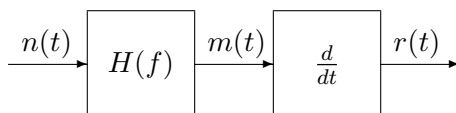


Figura 3.12: Sistema per il problema 2

Soluzione del problema 3

La soluzione viene fornita per il sistema di figura 3.13, che corrisponde a quello di figura 3.10 ponendo $p = 1/2$. Il sistema di figura 3.13 ha funzione di trasferimento $H(z)$ che può essere calcolata come segue:

$$W(z) = X(z) + W(z)pz^{-1}, \quad Y(z) = W(z) + Y(z)pz^{-1}$$

$$W(z)(1 - pz^{-1}) = X(z), \quad Y(z)(1 - pz^{-1}) = W(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - pz^{-1}}, \quad Y(z) = \frac{W(z)}{1 - pz^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{[1 - pz^{-1}]^2} = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{[1 - pz^{-1}]^2}$$

Il segnale d'ingresso $x[n] = \delta[n] - p\delta[n-1]$ ha trasformata zeta

$$X(z) = 1 - pz^{-1}$$

e quindi

$$Y(z) = \frac{1 - pz^{-1}}{[1 - pz^{-1}]^2} = \frac{1}{1 - pz^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (pz^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^{-n}.$$

L'antitrasformata zeta di $Y(z)$ è

$$y[n] = p^n u[n]$$

ovvero

$$y[0] = 1, \quad y[1] = p, \quad y[2] = p^2, \quad y[3] = p^3, \quad \dots$$

(grafico omesso).

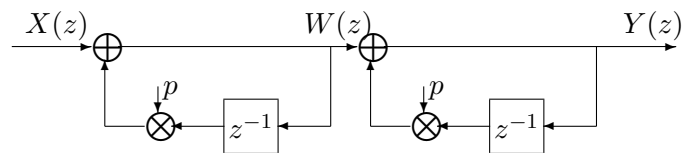


Figura 3.13: Sistema per il problema 3.

Capitolo 4

Temi d'esame, anno 2013

4.1 Esempio di prova d'esame 13 giugno 2013

Domande di teoria

1. Dimostrare l'uguaglianza di Parseval (segnali ad energia finita tempo-continui)
2. Elencare le condizioni che rendono un processo casuale WSS, dando la definizione di tutti i parametri o funzioni necessari.
3. Dato $x(t) = e^{-|t|/T}$ calcolare
 - (a) $x(t) * \delta(t)$
 - (b) $x(t) * \delta(t - T)$
 - (c) $x(t - t_0)\delta(t - T)$
 - (d) $\int x(t - t_0)\delta(t - T)dt$

Problema 1

Si consideri il segnale

$$x(t) = p_T \left(t - \frac{T}{2} \right) - \frac{T}{2} [\delta(t) + \delta(t - T)]$$

Si calcoli l'espressione analitica del segnale

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

e se ne disegni qualitativamente il grafico (nota: $y(t) = 0$ per t che tende a meno infinito).

Si disegni qualitativamente il grafico di

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t - kT)$$

e se ne calcoli la trasformata di Fourier.

Problema 2

Si consideri il sistema di Fig. 4.1, dove $n(t)$ è un processo casuale gaussiano bianco con spettro del valor quadratico medio $G_n(f) = 1$. Si calcolino: (a) media, (b) varianza, (c) valor

quadratico medio e (d) funzione di autocorrelazione del processo d'uscita $y(t)$. Si calcoli il coefficiente di correlazione tra $y(t)$ e $w(t)$. Le funzioni di trasferimento dei filtri sono:

$$H_1(f) = p_{2B}(f), \quad H_2(f) = \frac{1}{2}p_{4B}(f)$$

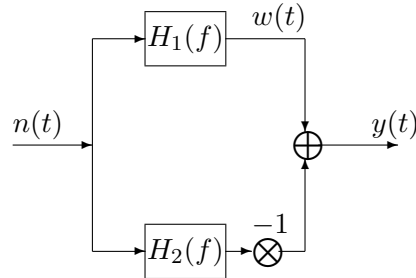


Figura 4.1: Sistema per il problema 2.

Problema 3

Si consideri il sistema a tempo discreto di figura 4.2. Si calcoli la risposta all'impulso $h[n]$ assumendo α costante reale e positiva. Per quali valori di α il sistema è stabile in senso BIBO?

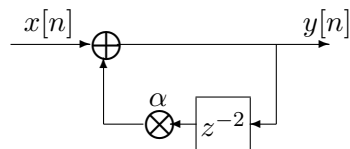


Figura 4.2: Sistema per il problema 3

Soluzione

Soluzione del problema 1

Il segnale $y(t)$ è

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t x(u) du \\ &= \int_{-\infty}^t \left\{ p_T \left(u - \frac{T}{2} \right) - \frac{T}{2} [\delta(u) + \delta(u - T)] \right\} du \\ &= \int_{-\infty}^t p_T \left(u - \frac{T}{2} \right) du - \frac{T}{2} \int_{-\infty}^t \delta(u) du - \frac{T}{2} \int_{-\infty}^t \delta(u - T) du \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il primo integrale, si ha

$$\int_{-\infty}^t p_T \left(u - \frac{T}{2} \right) du = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t 1 du = t & 0 < t < T \\ \int_0^T 1 du = T & t > T \end{cases}$$

e quindi l'integrale è nullo per $t < 0$, cresce linearmente per $t \in [0, T]$ e poi resta costante e pari a T per $t > T$. Per il secondo integrale si ha

$$\int_{-\infty}^t \delta(u) du = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t \delta(u) du = 1 & t > 0 \end{cases} = u(t)$$

Per il terzo integrale si ha

$$\int_{-\infty}^t \delta(u - T) du = \begin{cases} 0 & t < T \\ \int_0^t \delta(u - T) du = 1 & t > T \end{cases} = u(t - T)$$

Il segnale $y(t)$ ha dunque la seguente espressione analitica:

$$y(t) = t p_T(t - T/2) + T u(t - T) - \frac{T}{2} [u(t) + u(t - T)] \quad (4.1)$$

e vale 0 per $t < 0$, vale $t - T/2$ per $t \in [0, T]$, vale 0 per $t > T$. Si può dunque riscrivere $y(t)$ come

$$y(t) = p_T(t - T/2)[t - T/2]$$

Il grafico di $y(t)$ è riportato in figura 4.3.

Il segnale $z(t)$ è periodico di periodo T e la sua trasformata di Fourier è

$$Z(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T)$$

dove

$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} Y(f)|_{f=k/T}$$

La trasformata $Y(f)$ può essere calcolata in vari modi. Di seguito se ne forniscono tre.

- Si nota che $y(t)$ è l'uscita di un integratore che ha all'ingresso $x(t)$. Se $X(0) = 0$, allora $Y(f) = X(f)/(j2\pi f)$. La trasformata di Fourier di $x(t)$ è

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j2\pi f T/2} - \frac{T}{2} [1 + e^{-j2\pi f T}] = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j2\pi f T/2} - \frac{T}{2} [1 + e^{-j2\pi f T}]$$

e $X(0) = 0$. L'espressione di $X(f)$ può essere semplificata come segue:

$$\begin{aligned} X(f) &= T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T} - \frac{T}{2} [1 + e^{-j2\pi f T}] \\ &= T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T} - \frac{T}{2} e^{-j\pi f T} [e^{j\pi f T} + e^{-j\pi f T}] \\ &= T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T} - T e^{-j\pi f T} \cos(\pi f T) \\ &= T e^{-j\pi f T} \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} - \cos(\pi f T) \right] \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = \frac{T e^{-j\pi f T}}{j2\pi f} \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} - \cos(\pi f T) \right]$$

Poiché $X(0) = 0$, anche $Y(0) = 0$.

- In alternativa, $Y(f)$ può essere calcolato utilizzando le tavole delle trasformate di Fourier. Si ha (utilizzando la formula 4.1)

$$y(t) = y(t) = t p_T(t-T/2) + T u(t-T) - \frac{T}{2} [u(t) + u(t-T)] = t u(t) - (t-T) u(t-T) - \frac{T}{2} [u(t) + u(t-T)]$$

Dalle tavole, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{t u(t)\} &= \frac{-1}{(2\pi f)^2} + \frac{\delta(f)}{j4\pi f} \triangleq W(f), \\ \mathcal{F}\{u(t)\} &= \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \triangleq S(f). \end{aligned}$$

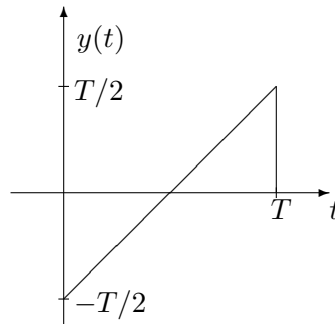


Figura 4.3: Grafico di $y(t)$ per il problema 1.

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
Y(f) &= W(f) - W(f)e^{-j2\pi fT} - \frac{T}{2} [S(f) + S(f)e^{-j2\pi fT}] \\
&= W(f) [1 - e^{-j2\pi fT}] - \frac{T}{2} S(f) [1 + e^{-j2\pi fT}] \\
&= W(f)e^{-j\pi fT} [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] - \frac{T}{2} S(f)e^{-j\pi fT} [e^{j\pi fT} + e^{-j\pi fT}] \\
&= W(f)e^{-j\pi fT} 2j \sin(\pi fT) - \frac{T}{2} S(f)e^{-j\pi fT} 2 \cos(\pi fT) \\
&= e^{-j\pi fT} 2j \sin(\pi fT) \left[\frac{-1}{(2\pi f)^2} + \frac{\delta(f)}{j4\pi f} \right] - e^{-j\pi fT} \frac{T}{2} 2 \cos(\pi fT) \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right] \\
&= e^{-j\pi fT} 2j \sin(\pi fT) \left[\frac{1}{(j2\pi f)(j2\pi f)} + \frac{\delta(f)}{2j2\pi f} \right] - e^{-j\pi fT} T \cos(\pi fT) \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right] \\
&= e^{-j\pi fT} \left[\frac{T \sin(\pi fT)}{(j2\pi f)(\pi fT)} + \frac{T \sin(\pi fT)\delta(f)}{2\pi fT} \right] - e^{-j\pi fT} T \left[\frac{\cos(\pi fT)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} \right] \\
&= e^{-j\pi fT} \left[\frac{T \text{sinc}(\pi fT)}{j2\pi f} + \frac{T \text{sinc}(\pi fT)\delta(f)}{2} - \frac{T \cos(\pi fT)}{j2\pi f} - \frac{T\delta(f)}{2} \right] \\
&= e^{-j\pi fT} \left[\frac{T \text{sinc}(\pi fT)}{j2\pi f} + \frac{T\delta(f)}{2} - \frac{T \cos(\pi fT)}{j2\pi f} - \frac{T\delta(f)}{2} \right] \\
&= e^{-j\pi fT} \left[\frac{T \text{sinc}(\pi fT)}{j2\pi f} - \frac{T \cos(\pi fT)}{j2\pi f} \right] \\
&= e^{-j\pi fT} \frac{T}{j2\pi f} [\text{sinc}(\pi fT) - \cos(\pi fT)]
\end{aligned}$$

Nei passaggi precedenti si è usata la definizione

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(x)}{x}$$

- Si può calcolare $Y(f)$ in base alla definizione di trasformata di Fourier:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T \left(t - \frac{T}{2} \right) e^{-j2\pi ft} dt$$

Utilizzando l'integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \left(t - \frac{T}{2} \right) \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} dt \\
&= \frac{1}{-j2\pi f} \left[\frac{T}{2} e^{-j2\pi fT} + \frac{T}{2} \right] - \frac{1}{-j2\pi f} \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_0^T \\
&= \frac{T/2}{-j2\pi f} e^{-j\pi fT} \left[e^{-j\pi fT} + e^{j\pi fT} \right] - \frac{1}{(-j2\pi f)^2} \left[e^{-j2\pi fT} - 1 \right] \\
&= \frac{T}{-j2\pi f} e^{-j\pi fT} \cos(\pi fT) - \frac{1}{(-j2\pi f)^2} e^{-j\pi fT} \left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT} \right] \\
&= \frac{T}{-j2\pi f} e^{-j\pi fT} \cos(\pi fT) + \frac{1}{(j2\pi f)^2} e^{-j\pi fT} 2j \sin(\pi fT) \\
&= \frac{T}{-j2\pi f} e^{-j\pi fT} \cos(\pi fT) + \frac{T}{(j2\pi f)(\pi fT)} e^{-j\pi fT} \sin(\pi fT) \\
&= \frac{T}{j2\pi f} e^{-j\pi fT} \left[-\cos(\pi fT) + \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right]
\end{aligned}$$

È facile verificare che

$$Y(0) = \int_0^T \left(t - \frac{T}{2} \right) dt = 0$$

Tornando ai coefficienti della serie di Fourier, per $k \neq 0$, si ha

$$\mu_k = \frac{1}{T} Y\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{e^{-j\pi k}}{j2\pi k/T} \left[\frac{\sin(\pi k)}{\pi k} - \cos(\pi k) \right] = T \frac{(-1)^k}{j2\pi k} [-(-1)^k] = -\frac{T}{j2\pi k}$$

mentre per $k = 0$, si ha $\mu_0 = 0$. Si ottiene dunque

$$Z(f) = - \sum_{k \neq 0} \frac{T}{j2\pi k} \delta(f - k/T)$$

In alternativa, si possono calcolare i coefficienti μ_k dello sviluppo in serie di Fourier direttamente in base alla definizione:

$$\begin{aligned}
\mu_k &= \frac{1}{T} \int_0^T (t - T/2) e^{-j2\pi kt/T} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u e^{-j2\pi k(u+T/2)/T} du \\
&= \frac{e^{-j\pi k}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u e^{-j2\pi ku/T} du \\
&= \frac{e^{-j\pi k}}{T} \left\{ u \frac{e^{-j2\pi ku/T}}{-j2\pi k/T} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-j2\pi ku/T}}{-j2\pi k/T} du \right\} \\
&= \frac{(-1)^k}{T} \left\{ \frac{(T/2)e^{-j\pi k} + (T/2)e^{j\pi k}}{-j2\pi k/T} - \frac{e^{-j2\pi ku/T}}{(-j2\pi k/T)^2} \Big|_{-T/2}^{T/2} \right\} \\
&= \frac{(-1)^k}{T} \left\{ \frac{T^2}{2} \frac{\cos(\pi k)}{-j\pi k} - \frac{\sin(\pi k)}{j2(\pi k/T)^2} \right\} = \frac{T(-1)^k}{2} \left\{ \frac{\cos(\pi k)}{-j\pi k} - \frac{\sin(\pi k)}{j\pi k(\pi k)} \right\}
\end{aligned}$$

Per $k \neq 0$,

$$\mu_k = \frac{T(-1)^k}{-2j\pi k} \{(-1)^k\} = -\frac{T}{j2\pi k}$$

e quindi, come già ricavato,

$$Z(f) = -\sum_{k \neq 0} \frac{T}{j2\pi k} \delta(f - k/T)$$

Soluzione del problema 2

Il sistema con ingresso $n(t)$ e uscita $y(t)$ ha risposta all'impulso

$$h(t) = h_1(t) - h_2(t)$$

(si pone $\delta(t)$ come ingresso); la funzione di trasferimento è

$$H(f) = H_1(f) - H_2(f)$$

Il grafico di $H(f)$ è riportato in Fig. 4.4.

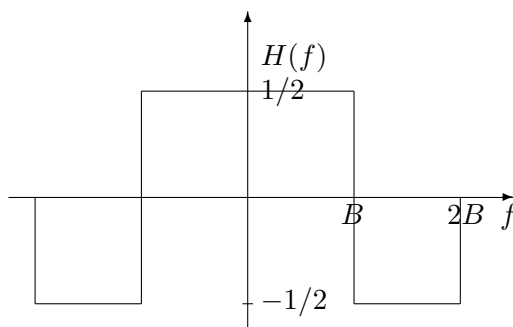


Figura 4.4: Grafico di $H(f)$ per il problema 2.

Il processo d'uscita $y(t)$ ha media

$$\mu_y = \mu_n H(0) = 0$$

in quanto la media di $n(t)$ (processo bianco) è $\mu_n = 0$. Varianza σ_y^2 e valor quadratico medio $E\{y^2(t)\}$ di $y(t)$ possono essere calcolati a partire dallo spettro del valor quadratico medio di $y(t)$:

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_n(f) = |H(f)|^2 = \frac{1}{4} p_{4B}(f)$$

Si ha

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} = \int G_y(f) df = \int_{-2B}^{2B} \frac{1}{4} df = B$$

La funzione di autocorrelazione è l'antitrasformata di Fourier di $G_y(f)$:

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \int_{-2B}^{2B} \frac{1}{4} e^{j2\pi f\tau} df = \left. \frac{e^{j2\pi f\tau}}{4j2\pi\tau} \right|_{-2B}^{2B} = \frac{e^{j4\pi B\tau} - e^{-j4\pi B\tau}}{4j2\pi\tau} = \frac{\sin(4\pi B\tau)}{4\pi\tau} = B \frac{\sin(4\pi B\tau)}{4\pi B\tau}$$

Si noti che, correttamente, $R_y(0) = E\{y^2(t)\} = B$.

Il coefficiente di correlazione tra $y(t)$ e $w(t)$ è

$$\rho_{yw} = \frac{E\{(y(t) - \mu_y)(w(t) - \mu_w)\}}{\sigma_y \sigma_w} = \frac{E\{y(t)w(t)\}}{\sigma_y \sigma_w}$$

(si è usato il fatto che $\mu_y = \mu_w = 0$). La varianza di $w(t)$ è

$$\sigma_w^2 = \int G_w(f) df = \int [p_{2B}(f)]^2 df = \int_{-B}^B df = 2B$$

Occorre calcolare $E\{y(t)w(t)\}$:

$$\begin{aligned} E\{y(t)w(t)\} &= E \left\{ \int h_1(\tau_1) n(t - \tau_1) d\tau_1 \int h(\tau_2) n(t - \tau_2) d\tau_2 \right\} \\ &= E \left\{ \int \int h_1(\tau_1) h(\tau_2) n(t - \tau_1) n(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} \\ &= \int \int h_1(\tau_1) h(\tau_2) E\{n(t - \tau_1) n(t - \tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int \int h_1(\tau_1) h(\tau_2) R_n(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int \int h_1(\tau_1) h(\tau_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int h_1(\tau_2) h(\tau_2) d\tau_2 = \langle h_1(t), h(t) \rangle \end{aligned}$$

Pertanto $E\{y(t)w(t)\}$ risulta pari al prodotto scalare tra $h(t)$ e $h_1(t)$. Per calcolare questo prodotto scalare conviene utilizzare il teorema di Parseval generalizzato, ricavabile facilmente utilizzando il metodo usato per ricavare il teorema di Parseval: al posto di $h_1(t)$ si scrive la antitrasformata di Fourier di $H_1(f)$, al posto di $h(t)$ si scrive la antitrasformata di Fourier di $H(f)$ e si proseguono i calcoli.

$$\begin{aligned} E\{y(t)w(t)\} &= \langle h_1(t), h(t) \rangle = \int h_1(t) h(t) dt \\ &= \int \left[\int H_1(f_1) e^{j2\pi f_1 t} df_1 \int H(f_2) e^{j2\pi f_2 t} df_2 \right] dt \\ &= \int \int H_1(f_1) H(f_2) \left[\int e^{j2\pi(f_1 + f_2)t} dt \right] df_1 df_2 \\ &= \int \int H_1(f_1) H(f_2) \delta(f_1 + f_2) df_1 df_2 \\ &= \int H_1(-f_2) H(f_2) df_2 = \int H_1^*(f_2) H(f_2) df_2 \\ &= \int_{-B}^B 1 \cdot \frac{1}{2} df_2 = B \end{aligned}$$

Il coefficiente di correlazione richiesto è

$$\rho_{yw} = \frac{B}{\sqrt{B}\sqrt{2B}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Soluzione del problema 3

La funzione di trasferimento del sistema può essere calcolata come segue:

$$Y(z) = X(z) + \alpha Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)[1 - \alpha z^{-2}] = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - \alpha z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \alpha}$$

La funzione di trasferimento ha due poli reali distinti: $p_1 = \sqrt{\alpha}$, $p_2 = -\sqrt{\alpha}$. Il sistema è stabile in senso BIBO se i poli si trovano all'interno del cerchio di raggio unitario; la condizione di stabilità è dunque $\alpha < 1$.

La risposta all'impulso $h[n]$ può essere calcolata almeno in tre modi, riportati nel seguito.

- Utilizzando la serie geometrica, si ha:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha z^{-2}]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} [\sqrt{\alpha}]^{2k} z^{-2k}$$

D'altra parte, per definizione di trasformata zeta,

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Confrontando le due espressioni di $H(z)$ si ottiene

$$h[n] = 0 \quad \text{per } n < 0$$

$$h[n] = 0 \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$h[n] = [\sqrt{\alpha}]^n = \alpha^{n/2} \quad \text{per } n \text{ pari}$$

- Utilizzando il metodo canonico, si ha

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - \alpha} = \frac{a_1}{z - \sqrt{\alpha}} + \frac{a_2}{z + \sqrt{\alpha}}$$

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow \sqrt{\alpha}} \frac{z}{z^2 - \alpha} (z - \sqrt{\alpha}) = \lim_{z \rightarrow \sqrt{\alpha}} \frac{z}{z + \sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \lim_{z \rightarrow -\sqrt{\alpha}} \frac{z}{z^2 - \alpha} (z + \sqrt{\alpha}) = \lim_{z \rightarrow -\sqrt{\alpha}} \frac{z}{z - \sqrt{\alpha}} = \frac{-\sqrt{\alpha}}{-\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}$$

Si ottiene dunque

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{2} \frac{1}{z - \sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{1}{z + \sqrt{\alpha}}$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z - \sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z + \sqrt{\alpha}}$$

n	$\delta[n]$	$n - 2$	$h[n - 2]$	$h[n]$
-2	0	-4	0	0
-1	0	-3	0	0
0	1	-2	0	1
1	0	-1	0	0
2	0	0	1	α
3	0	1	0	0
4	0	2	α	α^2
5	0	3	0	0
6	0	4	α^2	α^3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabella 4.1: Calcolo della risposta all'impulso del sistema del problema 3 in forma tabellare

La risposta all'impulso si ottiene a questo punto antitrasformando $H(z)$:

$$h[n] = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha})^n u[n] + \frac{1}{2}(-\sqrt{\alpha})^n u[n]$$

Per n dispari, si ha

$$h[n] = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha})^n u[n] - \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha})^n u[n] = 0$$

mentre per n pari si ha

$$h[n] = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha})^n u[n] + \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha})^n u[n] = (\sqrt{\alpha})^n u[n] = (\alpha)^{n/2} u[n]$$

- Ponendo all'ingresso del sistema $\delta[n]$ e facendolo evolvere nel tempo, come riportato nella tabella 4.1, utilizzando l'equazione alle differenze

$$h[n] = \delta[n] + \alpha h[n - 2]$$

4.2 Appello del 28 gennaio 2013

Domande di teoria

1. Sia $x(t) = te^{-t/t_0}u(t)$ con $t_0 = 10$ s. Si calcoli quanto segue, usando lo specifico segnale assegnato (non si accettano risposte in cui compare $x(t)$ a destra dell'uguale)

$$x(t) * \delta(t - t_0) =$$

$$x(t)\delta(t - t_0) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt =$$

$$x(t) * \delta(t) =$$

$$x(t)\delta(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt =$$

2. Si dimostri che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

essendo $x(t)$ un segnale ad energia finita che ammette trasformata di Fourier. Si dica che cosa rappresenta

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

e qual è la sua unità di misura.

Problema 1

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale periodico $x(t)$ di figura 4.5. Il segnale $x(t)$ ha valore minimo 1 e valore massimo 2. Si disegni qualitativamente il grafico di $|X(f)|$ specificando l'unità di misura per l'asse delle ascisse.

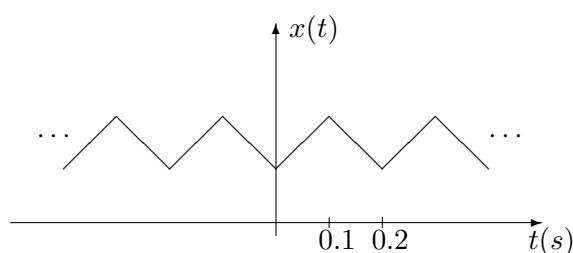


Figura 4.5: Segnale $x(t)$ per il problema 1.

Problema 2

Si consideri un processo casuale gaussiano bianco $x(t)$ con densità spettrale di potenza $G_n(f) = \frac{N_0}{2}$. Il processo è posto all'ingresso di un filtro con funzione di trasferimento

$$H(f) = e^{-(f/f_0)^2}$$

ottenendo all'uscita il processo casuale gaussiano $y(t)$. Si calcoli quanto segue:

1. Valor medio di $y(t)$
2. Valor quadratico medio di $y(t)$
3. Varianza di $y(t)$
4. Funzione di autocorrelazione di $y(t)$

Problema 3

Si disegni lo schema a blocchi di un sistema LTI tempo discreto che abbia i seguenti due poli

$$p_1 = 0.8e^{j3\pi/4}, \quad p_2 = p_1^*$$

(solo questi due poli, nessuno zero). Si calcoli la risposta all'impulso del sistema.

Soluzione

Soluzione del problema 1

Il segnale periodico $x(t)$ può essere scritto come

$$x(t) = 1 + v(t - T') * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

dove $T = 0.2$ s è il periodo del segnale, $v(t)$ è il segnale triangolare

$$v(t) = \text{Tri}(t/T') = \begin{cases} 1 - |t/T'| & |t| \leq T' \\ 0 & |t| > T' \end{cases}$$

dove $T' = 0.1$ s, e $v(t - T')$ è il segnale triangolare che inizia in $t = 0$ e termina in $t = 2T' = T$.

La trasformata di Fourier di $x(t)$ è dunque

$$X(f) = \delta(f) + \left(V(f) e^{-j2\pi f T'} \right) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \delta(f) + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(n/T) e^{-j2\pi n T'/T} \delta(f - n/T)$$

La trasformata di $v(t)$ è presente nelle tavole (basta usare T' al posto di T):

$$V(f) = T' \frac{\sin^2(\pi f T')}{(\pi f T')^2}$$

e

$$V(n/T) = T' \frac{\sin^2(\pi n T'/T)}{(\pi n T'/T)^2} = T' \frac{\sin^2(\pi n/2)}{(\pi n/2)^2} = \begin{cases} \frac{T'}{(\pi n/2)^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

Si noti che, per n dispari, il termine $\exp[-j2\pi n T'/T] = \exp[-j\pi n]$ vale sempre -1. Pertanto si ha

$$X(f) = \delta(f) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty, \text{ndisp}}^{\infty} \frac{1}{(\pi n/2)^2} \delta(f - n/T) = \delta(f) - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\pi(2m+1)/2)^2} \delta(f - (2m+1)/T)$$

In particolare, per $|X(f)|$ le delta di Dirac si trovano alle seguenti frequenze:

- 0 Hz, con ampiezza della delta pari a 1
- $\pm 1/T = \pm 5$ Hz, con ampiezza della delta pari a $2/(\pi)^2$
- $\pm 3/T = \pm 15$ Hz, con ampiezza della delta pari a $2/(3\pi)^2$
- $\pm 5/T = \pm 25$ Hz, con ampiezza della delta pari a $2/(5\pi)^2$

ecc.

Soluzione del problema 2

Il segnale $y(t)$ è un processo gaussiano stazionario, ma non più bianco; lo spettro di potenza di $y(t)$ è infatti

$$G_y(f) = G_x(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} e^{-2(f/f_0)^2}.$$

Il valor medio di $y(t)$ è

$$\mu_y = \mu_x H(0) = 0$$

in quanto $x(t)$ ha valor medio zero.

Il valor quadratico medio $E\{y^2(t)\}$ di $y(t)$ coincide con la sua varianza σ_y^2 , e può essere calcolato dalla funzione di autocorrelazione $R_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\}$, in quanto $\sigma_y^2 = R_y(0)$, oppure calcolando l'integrale dello spettro di potenza. Occorre comunque calcolare la funzione di autocorrelazione (domanda 4) e quindi può convenire dare prima la risposta alla domanda 4 e poi dare la risposta alle domande 2 e 3.

La funzione di autocorrelazione può essere calcolata come

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} R_h(\tau)$$

dove

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt$$

oppure può essere calcolata come antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza:

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2(f/f_0)^2}\right\}$$

Questa seconda strada conviene in quanto l'antitrasformata di Fourier richiesta è presente nelle tavole delle trasformate di Fourier:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-[t/(2T)]^2}\right\} = T\sqrt{2\pi}e^{-2(\pi fT)^2}$$

Ponendo nell'espressione a destra $T = 1/(f_0\pi)$ si ottiene

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2(f/f_0)^2}\right\} = \frac{1}{T\sqrt{2\pi}}e^{-[t/(2T)]^2}\bigg|_{T=1/(f_0\pi)} = \frac{\pi f_0}{\sqrt{2\pi}}e^{-[\pi f_0 t/2]^2}$$

Si ha dunque

$$R_y(\tau) = \frac{N_0 f_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-[\pi f_0 t/2]^2}$$

e

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} = R_y(0) = \frac{N_0 f_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Si riporta di seguito il calcolo della varianza come integrale dello spettro di potenza, a verifica della correttezza dei calcoli precedenti:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2f^2/f_0^2} df$$

L'integrale può essere calcolato facilmente riconoscendo che la funzione integranda è proporzionale ad una d.d.p. gaussiana con media zero e varianza $2\sigma^2 = f_0^2/2$, cioè $\sigma^2 = f_0^2/4$. Si ricordi che l'integrale tra meno infinito e infinito di qualsiasi d.d.p. (ed in particolare, in questo caso, la d.d.p. gaussiana) vale sempre 1. Si ha dunque

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0}{2} \sqrt{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-f^2/(2\sigma^2)} df = \frac{N_0}{2} \sqrt{2\pi\sigma^2} = \frac{N_0}{2} \sqrt{2\pi f_0^2/4} = \frac{N_0 f_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

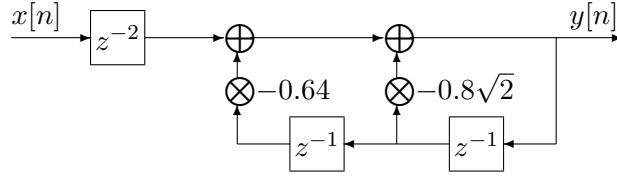


Figura 4.6: Schema a blocchi del sistema del problema 3

che coincide con il valore trovato in precedenza.

Soluzione del problema 3

Il polo p_1 può essere scritto come

$$p_1 = 0.8e^{j3\pi/4} = 0.8[\cos(3\pi/4) + j\sin(3\pi/4)] = -0.4\sqrt{2} + j0.4\sqrt{2}.$$

La funzione di trasferimento del sistema richiesto è

$$H(z) = \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)} = \frac{1}{z^2 - (p_1 + p_2)z + p_1p_2} = \frac{1}{z^2 - 2\Re\{p_1\}z + |p_1|^2} = \frac{1}{z^2 + 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Si può anche scrivere

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + 0.8\sqrt{2}z + 0.64} = \frac{z^{-2}}{1 + 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

$$Y(z)[1 + 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}] = X(z)z^{-2}$$

$$Y(z) = -0.8\sqrt{2}z^{-1}Y(z) - 0.64z^{-2}Y(z) + z^{-2}X(z)$$

Da quest'ultima equazione si ottiene lo schema a blocchi di figura 4.6. La risposta all'impulso $h[n]$ si ottiene come antitrasformata zeta di $H(z)$, cosa facilmente ottenibile tramite lo sviluppo in fratti semplici di

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z(z - p_1)(z - p_1^*)} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_1^*}{z - p_1^*}$$

I coefficienti A_0 e A_1 si calcolano come segue:

$$A_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z - p_1)(z - p_1^*)} = \frac{1}{|p_1|^2} = \frac{1}{0.64}$$

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{1}{z(z - p_1^*)} = \frac{1}{p_1(p_1 - p_1^*)} = \frac{e^{-j3\pi/4}}{0.8(j0.8\sqrt{2})} = \frac{-je^{-j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}} = \frac{e^{j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{1}{0.64z} + \frac{e^{j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}(z - p_1)} + \frac{e^{-j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}(z - p_1^*)} \\ H(z) &= \frac{1}{0.64} + \frac{ze^{j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}(z - p_1)} + \frac{ze^{-j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}(z - p_1^*)} \end{aligned}$$

con antitrasformata

$$h[n] = \frac{1}{0.64}\delta[n] + \frac{e^{j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}}(p_1)^n u[n] + \frac{e^{-j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}}(p_1^*)^n u[n] = \frac{1}{0.64}\delta[n] + 2\Re\left\{\frac{e^{j3\pi/4}}{0.64\sqrt{2}}(0.8)^n e^{jn3\pi/4}\right\} u[n]$$

$$h[n] = \frac{1}{0.64}\delta[n] + \sqrt{2}(0.8)^{n-2}\Re\left\{e^{j(n+1)3\pi/4}\right\} u[n] = \frac{1}{0.64}\delta[n] + \sqrt{2}(0.8)^{n-2}\cos[(n+1)3\pi/4]u[n]$$

4.3 Appello del 26 febbraio 2013

Domande di teoria

1. Si dimostri che la trasformata di Fourier $X(f)$ di un segnale $x(t)$ reale soddisfa la seguente proprietà:

$$X(-f) = X^*(f)$$

2. Si scriva l'espressione della funzione di autocorrelazione per:

- (a) un segnale $x(t)$ ad energia finita
- (b) un segnale $y(t)$ periodico di periodo T
- (c) un processo casuale $w(t)$ stazionario in senso stretto

3. Si scriva la definizione di stabilità BIBO per un sistema LTI tempo-continuo.

Problema 1

Il sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f)$ indicata nella Fig. 4.7 ha come ingresso il segnale

$$x(t) = 10 \cos(2\pi f_1 t + \pi/4) + 5 \sin(2\pi f_2 t + \pi/3)$$

con $f_1 = 10$ Hz e $f_2 = 15$ Hz. Si scriva l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del sistema. Si dica se il segnale $y(t)$ è periodico e, in caso affermativo, si scriva il valore del periodo T (in secondi).

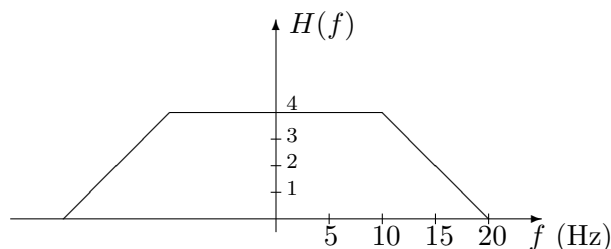


Figura 4.7: Funzione di trasferimento $H(f)$ per il problema 1.

Problema 2

Il processo casuale gaussiano bianco $x(t)$ con spettro di potenza $G_x(f) = N_0/2$ è posto all'ingresso del sistema di figura 4.8. Si calcoli quanto segue:

1. spettro di potenza di $y(t)$
2. funzione di autocorrelazione di $y(t)$
3. coefficiente di correlazione tra $y(t_0)$ e $y(t_1)$ con $t_1 = t_0 + 1$ (t_0, t_1 espressi in secondi)
4. spettro di potenza di $w(t)$
5. coefficiente di correlazione tra $y(t_0)$ e $w(t_0)$

6. Inoltre si dica

- (a) se $y(t_0)$ è statisticamente indipendente da $y(t_1)$
- (b) se $y(t_0)$ è statisticamente indipendente da $w(t_0)$
- (c) se il sistema con ingresso $x(t)$ ed uscita $w(t)$ è lineare e tempo invariante

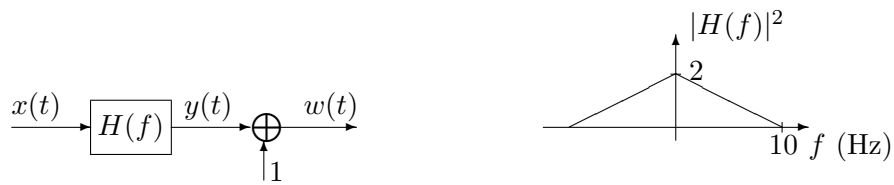


Figura 4.8: Sistema per il problema 2

Problema 3

Si consideri il sistema LTI tempo-discreto di figura 4.9, dove α_1 ed α_2 sono due valori reali (non complessi). Si calcoli la funzione di trasferimento $H(z)$, la risposta all'impulso $h[n]$ e si dica per quali valori di α_1 e α_2 il sistema è stabile.

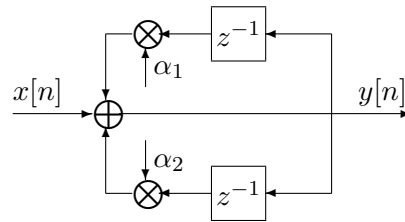


Figura 4.9: Sistema per il problema 3

Soluzione

Soluzione del problema 1

Il segnale $x(t)$ può essere riscritto usando la formula di Eulero come

$$x(t) = 10 \frac{1}{2} \left[e^{j2\pi f_1 t + j\pi/4} + e^{-j2\pi f_1 t - j\pi/4} \right] + 5 \frac{1}{2j} \left[e^{j2\pi f_2 t + j\pi/3} - e^{-j2\pi f_2 t - j\pi/3} \right]$$

con trasformata di Fourier

$$X(f) = 5 \left[e^{j\pi/4} \delta(f - f_1) + e^{-j\pi/4} \delta(f + f_1) \right] + \frac{5}{2j} \left[e^{j\pi/3} \delta(f - f_2) - e^{-j\pi/3} \delta(f + f_2) \right]$$

Il segnale all'uscita del sistema ha trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f)X(f) = 5 \left[e^{j\pi/4} H(f) \delta(f - f_1) + e^{-j\pi/4} H(f) \delta(f + f_1) \right] \\ &+ \frac{5}{2j} \left[e^{j\pi/3} H(f) \delta(f - f_2) - e^{-j\pi/3} H(f) \delta(f + f_2) \right]. \end{aligned}$$

Poiché $H(f)\delta(f - f_0) = H(f_0)\delta(f - f_0)$, si ha

$$\begin{aligned} Y(f) &= 5 \left[e^{j\pi/4} H(f_1) \delta(f - f_1) + e^{-j\pi/4} H(-f_1) \delta(f + f_1) \right] \\ &+ \frac{5}{2j} \left[e^{j\pi/3} H(f_2) \delta(f - f_2) - e^{-j\pi/3} H(-f_2) \delta(f + f_2) \right] \end{aligned}$$

con $H(f_1) = H(-f_1) = 4$ e $H(f_2) = H(-f_2) = 2$. In sostanza

$$Y(f) = 20 \left[e^{j\pi/4} \delta(f - f_1) + e^{-j\pi/4} \delta(f + f_1) \right] + \frac{10}{2j} \left[e^{j\pi/3} \delta(f - f_2) - e^{-j\pi/3} \delta(f + f_2) \right]$$

e l'espressione di $y(t)$ risulta dunque essere

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = 40 \cos(2\pi f_1 t + \pi/4) + 10 \sin(2\pi f_2 t + \pi/3)$$

Il segnale $y(t)$ è periodico di periodo T se

$$y(t + T) = y(t)$$

$$40 \cos(2\pi f_1(t+T) + \pi/4) + 10 \sin(2\pi f_2(t+T) + \pi/3) = 40 \cos(2\pi f_1 t + \pi/4) + 10 \sin(2\pi f_2 t + \pi/3)$$

cosa che si verifica se vengono rispettate contemporaneamente le due condizioni

$$2\pi f_1 T = k2\pi, \quad 2\pi f_2 T = n2\pi$$

con k, n interi positivi qualsiasi. Quindi deve essere contemporaneamente $f_1 T = 10T = k$ e $f_2 T = 15T = n$, sistema che ha come soluzione $T = 1/5 = 0.2$ s (risulta $k = 2$ e $n = 3$). Detto altrimenti, T è il minimo comune multiplo tra il periodo T_1 del segnale $\cos(2\pi f_1 t + \pi/4)$ (periodo $T_1 = 1/10 = 0.1$ s) ed il periodo T_2 del segnale $\sin(2\pi f_2 t + \pi/3)$ (periodo $T_2 = 1/15 \simeq 0.0677$ s).

Si può anche “lavorare in frequenza”: se $y(t)$ è periodico di periodo T , allora la sua frequenza fondamentale è $f_0 = 1/T$, $Y(f)$ contiene righe (delta di Dirac) a frequenze multiple di f_0 , ma le righe non necessariamente sono presenti in tutti i multipli di f_0 . Nel caso in esame le righe sono presenti alle frequenze $f_1 = 10$ Hz e $f_2 = 15$ Hz ed occorre trovare f_0 tale che $k f_0 = f_1$ e, contemporaneamente $n f_0 = f_2$; si ottiene facilmente $f_0 = 5$ Hz (con $k = 2$ e $n = 3$). In altri termini, f_0 è il massimo comun divisore tra f_1 e f_2 .

Soluzione del problema 2

Il processo $y(t)$ è stazionario ed ergodico, così come lo è $x(t)$: il processo $w(t)$ è stazionario ma non ergodico.

1. Lo spettro di potenza di $y(t)$ è

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

2. La funzione di autocorrelazione di $y(t)$ è l'antitrasformata dello spettro di potenza:

$$R_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G_y(f)\} = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \frac{N_0}{2} R_h(\tau)$$

La funzione di autocorrelazione di $h(t)$, $R_h(\tau)$, si calcola facilmente usando le tavole delle trasformate di Fourier (numero 26, si pone $1/T = 10$ e si moltiplica per 2):

$$\mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = 2 \times 10 \left(\frac{\sin(10\pi\tau)}{10\pi\tau} \right)^2.$$

Si ottiene dunque

$$R_y(\tau) = 10N_0 \left(\frac{\sin(10\pi\tau)}{10\pi\tau} \right)^2.$$

3. il coefficiente di correlazione tra le due variabili aleatorie $y(t_0)$ e $y(t_1)$ si calcola come segue:

$$\rho_{y(t_0),y(t_1)} = \frac{E\{[y(t_0) - \mu_{y(t_0)}][y(t_1) - \mu_{y(t_1)}]\}}{\sigma_{y(t_0)}\sigma_{y(t_1)}}$$

dove $\mu_{y(t_0)}$ e $\sigma_{y(t_0)}$ sono, rispettivamente, media e deviazione standard di $y(t_0)$, mentre $\mu_{y(t_1)}$ e $\sigma_{y(t_1)}$ sono media e deviazione standard di $y(t_1)$. Nel caso in esame, essendo $x(t)$ un processo casuale a valor medio nullo, allora anche $y(t)$ ha valor medio nullo e quindi $\mu_{y(t_0)} = \mu_{y(t_1)} = 0$; il processo casuale $y(t)$ è stazionario e quindi $\sigma_{y(t_0)} = \sigma_{y(t_1)} = \sigma_y$. In particolare la varianza di $y(t)$ è

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} = R_y(0) = 10N_0$$

Pertanto il coefficiente di correlazione diventa:

$$\rho_{y(t_0),y(t_1)} = \frac{E\{y(t_0)y(t_1)\}}{\sigma_y^2} = \frac{R_y(t_1 - t_0)}{R_y(0)} = 0$$

in quanto, per $\tau = 1$ la funzione di autocorrelazione di $y(t)$ si annulla ($\sin(10\pi) = 0$).

4. Lo spettro di potenza di $w(t)$ va calcolato a partire dalla sua funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_w(\tau) &= E\{w(t)w(t+\tau)\} = E\{(y(t)+1)(y(t+\tau)+1)\} \\ &= E\{y(t)y(t+\tau) + y(t) + y(t+\tau) + 1\} \\ &= R_y(\tau) + 1 \end{aligned}$$

$$G_w(f) = G_y(f) + \delta(f)$$

5. Il coefficiente di correlazione tra $y(t_0)$ e $w(t_0)$ è

$$\rho_{y(t_0),w(t_0)} = \frac{E\{[y(t_0) - \mu_{y(t_0)}][w(t_0) - \mu_{w(t_0)}]\}}{\sigma_{y(t_0)}\sigma_{w(t_0)}}$$

con ovvio significato dei simboli. Questa volta la media di $w(t)$ non è zero:

$$\mu_{w(t_0)} = E\{w(t_0)\} = E\{y(t_0) + 1\} = E\{y(t_0)\} + 1 = 1$$

mentre la varianza di $w(t_0)$ è

$$\sigma_{w(t_0)}^2 = E\{[w(t_0) - \mu_{w(t_0)}]^2\} = E\{y^2(t_0)\} = \sigma_{y(t_0)}^2$$

Pertanto il coefficiente di correlazione è

$$\rho_{y(t_0),w(t_0)} = \frac{E\{y(t_0)y(t_0)\}}{\sigma_{y(t_0)}^2} = 1$$

6. (a) $y(t_0)$ e $y(t_1)$ sono due variabili aleatorie gaussiane e sono scorrelate (coefficiente di correlazione pari a zero) e quindi sono statisticamente **indipendenti**
 (b) $y(t_0)$ e $w(t_0)$ sono due variabili aleatorie gaussiane e sono correlate (coefficiente di correlazione pari a uno) e quindi sono statisticamente **dipendenti**
 (c) il sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$ è lineare e tempo invariante (infatti possiede una funzione di trasferimento), ma il sistema con ingresso $y(t)$ ed uscita $w(t)$ è tempo invariante ma non è lineare e quindi, globalmente, il sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $w(t)$ **non è lineare** e non possiede né risposta all'impulso né funzione di trasferimento (anche se è tempo invariante).

Soluzione del problema 3

La funzione di trasferimento può essere ottenuta risolvendo la seguente equazione:

$$X(z) + \alpha_1 z^{-1}Y(z) + \alpha_2 z^{-1}Y(z) = Y(z);$$

si ottiene

$$Y(z)[1 - (\alpha_1 + \alpha_2)z^{-1}] = X(z)$$

e quindi

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)z^{-1}}.$$

La funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)z^{-1}} = \frac{z}{z - (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

e si tratta di un sistema con uno zero in $z = 0$ ed un polo in $p_1 = \alpha_1 + \alpha_2$. La risposta all'impulso si ottiene facilmente dalle tavole:

$$h[n] = p_1^n u[n] = (\alpha_1 + \alpha_2)^n u[n].$$

Il sistema è stabile se il polo p_1 cade all'interno del cerchio unitario nel piano zeta, cioè se

$$|p_1| = |\alpha_1 + \alpha_2| < 1$$

4.4 Appello del 26 giugno 2013

Domande di teoria

1. Per il segnale $x(t) = e^{-(2t)^2}$, si calcoli quanto segue:

- $\delta(t)x(t) =$
- $\delta(t - T)x(t) =$
- $\delta(t)x(t - T) =$
- $\delta(t - T) * x(t) =$
- $\delta(t) * x(t - T) =$

Risposte in cui compaia $x(t)$ o similari verranno considerate sbagliate, occorre utilizzare l'espressione analitica di $x(t)$ fornita nel testo.

2. Si dimostri che, essendo $x(t)$ l'ingresso di un sistema lineare tempo invariante con risposta all'impulso $h(t)$, l'uscita $y(t)$ si ottiene tramite convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$.
3. Si scriva la formula che consente di calcolare la funzione di autocorrelazione di un segnale periodico $x(t)$ di periodo T nel dominio del tempo. Che legame esiste tra funzione di autocorrelazione e spettro di potenza?

Problema 1

In un sistema viene generato il segnale

$$x(t) = \left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \right]^2 \cos(2\pi f_1 t),$$

ma il disturbo di rete fa sì che il segnale effettivamente presente nel sistema sia

$$w(t) = x(t) + y(t), \quad y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

Per eliminare il disturbo di rete, il segnale $w(t)$ viene filtrato con un filtro di tipo “notch” la cui funzione di trasferimento è approssimabile con

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_0 - \Delta_f \\ 1 & |f| > f_0 + \Delta_f \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sia $z(t)$ il segnale all'uscita del filtro “notch”.

1. Si calcoli la trasformata di Fourier di $w(t)$, se ne disegni qualitativamente il modulo e si specifichi la larghezza di banda del segnale.
2. Si calcolino
 - (a) l'energia E_x del segnale $x(t)$ (valore numerico, non formula)
 - (b) l'energia E_z del segnale $z(t)$ (valore numerico, non formula)
 - (c) l'energia E_e del segnale errore $e(t) = x(t) - z(t)$ (valore numerico, non formula)
3. Si discuta l'ortogonalità della coppia di segnali $x(t)$ e $e(t)$, e l'ortogonalità della coppia di segnali $z(t)$ e $e(t)$.

Nota: si risponda alla domanda 3 solo se si è terminato tutto il resto del compito; la risposta verrà valutata unicamente per l'assegnazione della lode.

I valori dei parametri sono i seguenti:

$$T = 1/30 \text{ s e } f_1 = 40 \text{ Hz, } f_0 = 50 \text{ Hz e } \theta = \pi/3, \Delta_f = 5 \text{ Hz.}$$

Problema 2

Si consideri il sistema riportato nella figura 4.10 dove $x(t)$ è un processo casuale gaussiano bianco, con unità di misura \sqrt{W} e spettro del valor quadratico medio (o spettro di potenza) $G_x(f) = G_x \text{ W/Hz}$,

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \text{ Hz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcolino

1. media, varianza e valor quadratico medio (valori numerici, non formule) del processo $y(t)$
2. densità di probabilità della variabile aleatoria $\xi = y(t_0)$
3. media, varianza e valor quadratico medio (valori numerici, non formule) del processo $z(t)$

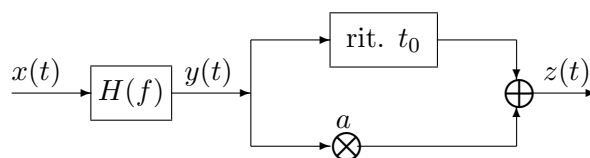


Figura 4.10: Schema a blocchi del sistema per il problema 2.

Si utilizzino i seguenti valori per i parametri:

$$G_x(f) = 2, B = 10 \text{ Hz, } t_0 = 0.25 \text{ ms, } a = 2$$

Problema 3

Si calcolino funzione di trasferimento e risposta all'impulso del sistema a tempo discreto schematizzato nella figura 4.11, essendo $a_2 = 1/4$, $a_1 = 1/4$, $b_2 = 3/4$, $b_1 = 1/2$. Si dica se il sistema è stabile.

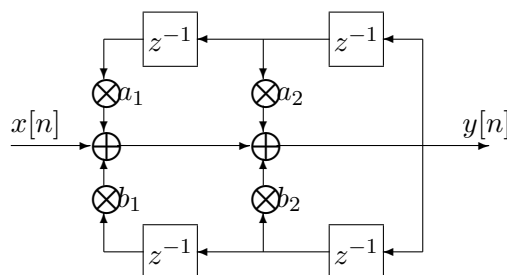


Figura 4.11: Schema a blocchi del sistema per il problema 3.

Si utilizzino i seguenti valori per i parametri:

$$a_1 = 1/4, b_1 = 1/2, a_2 = 1/2, b_2 = 1/2$$

Soluzione

Soluzione del problema 1

1. Il sistema ha lo schema a blocchi della figura 4.12. La trasformata di Fourier di $w(t)$ è la

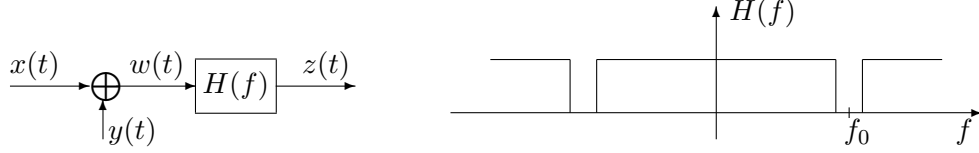


Figura 4.12: Schema a blocchi del sistema per il problema 1

somma delle trasformate di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$:

$$W(f) = X(f) + Y(f)$$

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier di $x(t)$ si ha:

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F} \left\{ \left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \right]^2 \right\} * \mathcal{F} \{ \cos(2\pi f_1 t) \} \\ &= \mathcal{F} \left\{ T^2 \left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \right]^2 \right\} * \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \\ &= T \mathcal{F} \left\{ T \left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \right]^2 \right\} * \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \\ &= T \text{Tri}(fT) * \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] \\ &= \frac{T}{2} [\text{Tri}((f - f_1)T) + \text{Tri}((f + f_1)T)] \end{aligned}$$

(si sono utilizzate le tavole delle trasformate di Fourier). Il grafico di $X(f)$ è riportato nella figura 4.13. In particolare, $X(f)$ è diverso da zero nell'intervallo di frequenza $[f_1 -$

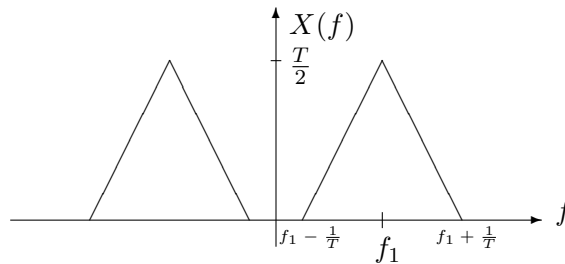


Figura 4.13: Trasformata di Fourier di $x(t)$ per il problema 1

$1/T, f_1 + 1/T]$ Hz e la banda del segnale è $B = 2/T$ Hz. Il valore massimo della trasformata di Fourier è $T/2$.

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier di $y(t)$, si ha

$$Y(f) = \frac{1}{2} \left[e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right]$$

con θ e f_0 assegnati.

Il modulo di $W(f) = X(f) + Y(f)$ è riportato nella figura 4.14 ed è valido nel caso in cui $f_0 > f_1$.

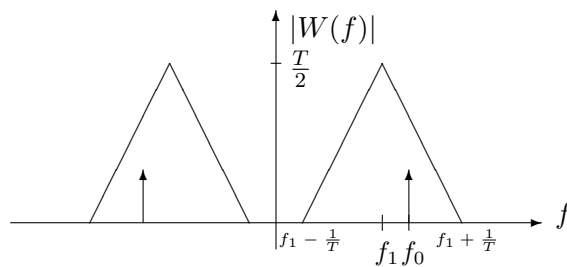


Figura 4.14: Modulo della trasformata di Fourier di $w(t)$ per il problema 1

2. La trasformata di Fourier di $z(t)$ all'uscita del filtro è

$$Z(f) = H(f)W(f)$$

e ha il modulo riportato nella figura 4.15. In particolare, la trasformata di Fourier di $z(t)$

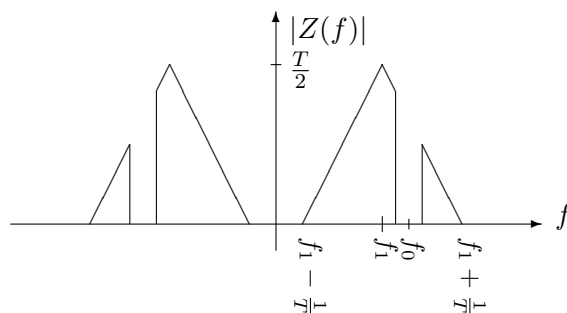


Figura 4.15: Modulo della trasformata di Fourier di $z(t)$ per il problema 1

è nulla per $f \in [f_0 - \Delta_f, f_0 + \Delta_f]$ ed è nulla per $f \in [-f_0 - \Delta_f, -f_0 + \Delta_f]$. In forma analitica, si può scrivere

$$H(f) = 1 - p_{2\Delta_f}(f - f_0) - p_{2\Delta_f}(f + f_0)$$

e

$$\begin{aligned} Z(f) &= H(f)W(f) = H(f)X(f) + H(f)Y(f) \\ &= X(f) - [p_{2\Delta_f}(f - f_0) + p_{2\Delta_f}(f + f_0)]X(f) + Y(f) - [p_{2\Delta_f}(f - f_0) + p_{2\Delta_f}(f + f_0)]Y(f) \\ &= X(f) - [p_{2\Delta_f}(f - f_0) + p_{2\Delta_f}(f + f_0)]X(f) = H(f)X(f) \end{aligned}$$

in quanto $\delta(f - f_0)p_{2\Delta_f}(f - f_0) = \delta(f - f_0)$ e $\delta(f + f_0)p_{2\Delta_f}(f + f_0) = \delta(f + f_0)$.

Il segnale $x(t)$ ha energia E_x finita, che conviene calcolare utilizzando il teorema di Parseval:

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 2 \int_{f_1-1/T}^{f_1+1/T} |X(f)|^2 df \\
&= 2 \int_{f_1-1/T}^{f_1+1/T} \left[\frac{T}{2} \text{Tri}((f - f_1)T) \right]^2 df \\
&= \frac{T^2}{2} \int_{-1/T}^{1/T} [\text{Tri}(fT)]^2 df = \frac{T^2}{2} 2 \int_0^{1/T} (1 - fT)^2 df = T^2 \int_0^{1/T} (1 - fT)^2 df \\
&= T^2 \frac{1}{T} \int_0^1 u^2 du = \frac{T}{3}
\end{aligned}$$

Il segnale $z(t)$ è ancora ad energia finita ed anche in questo caso conviene usare il teorema di Parseval:

$$\begin{aligned}
E_z &= \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df = 2 \int_{f_1-1/T}^{f_1+1/T} |Z(f)|^2 df \\
&= 2 \left[\int_{f_1-1/T}^{f_1+1/T} |X(f)|^2 df - \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df \right] \\
&= E_x - 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df \\
&= E_x - 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} \left[\frac{T}{2} \text{Tri}((f - f_1)T) \right]^2 df \\
&= E_x - 2 \int_{f_0-\Delta_f-f_1}^{f_0+\Delta_f-f_1} \left[\frac{T}{2} \text{Tri}(fT) \right]^2 df = E_x - \frac{T^2}{2} \int_{f_0-\Delta_f-f_1}^{f_0+\Delta_f-f_1} (1 - fT)^2 df \\
&= E_x - \frac{T}{2} \int_{(f_0-\Delta_f-f_1)T-1}^{(f_0+\Delta_f-f_1)T-1} u^2 du = E_x - \frac{T}{6} [((f_0 + \Delta_f - f_1)T - 1)^3 - ((f_0 - \Delta_f - f_1)T - 1)^3]
\end{aligned}$$

I precedenti calcoli si riferiscono al caso $f_0 > f_1$.

L'energia E_e del segnale errore $e(t) = x(t) - z(t)$ è calcolabile utilizzando il fatto che

$$E(f) = X(f) - Z(f) = [p_{2\Delta_f}(f - f_0) + p_{2\Delta_f}(f + f_0)]X(f)$$

La figura 4.16 riporta il modulo di $E(f)$.

In particolare

$$E_e = 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df = \frac{T}{6} [((f_0 + \Delta_f - f_1)T - 1)^3 - ((f_0 - \Delta_f - f_1)T - 1)^3]$$

Nel caso in cui $f_0 < f_1$, le formule precedenti vanno modificate come segue:

$$\begin{aligned}
E_z &= \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df = 2 \int_{f_1-1/T}^{f_1+1/T} |Z(f)|^2 df \\
&= 2 \left[\int_{f_1-1/T}^{f_1+1/T} |X(f)|^2 df - \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df \right] \\
&= E_x - 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df \\
&= E_x - 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} \left[\frac{T}{2} \text{Tri}((f - f_1)T) \right]^2 df \\
&= E_x - 2 \int_{f_0-\Delta_f-f_1}^{f_0+\Delta_f-f_1} \left[\frac{T}{2} \text{Tri}(fT) \right]^2 df = E_x - \frac{T^2}{2} \int_{f_0-\Delta_f-f_1}^{f_0+\Delta_f-f_1} (1 + fT)^2 df \\
&= E_x - \frac{T}{2} \int_{(f_0-\Delta_f-f_1)T+1}^{(f_0+\Delta_f-f_1)T+1} u^2 du = E_x - \frac{T}{6} [((f_0 + \Delta_f - f_1)T + 1)^3 - ((f_0 - \Delta_f - f_1)T + 1)^3] \\
E_e &= 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df = \frac{T}{6} [((f_0 + \Delta_f - f_1)T + 1)^3 - ((f_0 - \Delta_f - f_1)T + 1)^3]
\end{aligned}$$

I valori numerici di E_x, E_z, E_e sono:

$T = 1/30$ s e $f_1 = 40$ Hz, $f_0 = 50$ Hz, $\Delta_f = 5$ Hz.

$E_x = 1.11e - 2$ J, $E_e = 2.52e - 3$ J, $E_z = 8.59e - 3$ J

3. I segnali $x(t)$ e $e(t)$ sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo. In questo caso si ha (utilizzando l'uguaglianza di Parseval generalizzata)

$$\begin{aligned}
\langle x(t), e(t) \rangle &= \int x(t)e(t) dt = \int X(f)E^*(f) df = \\
&= \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} X(f)X^*(f) df + \int_{-f_0-\Delta_f}^{-f_0+\Delta_f} X(f)X^*(f) df \\
&= 2 \int_{f_0-\Delta_f}^{f_0+\Delta_f} |X(f)|^2 df = E_e
\end{aligned}$$

I segnali $x(t)$ e $e(t)$ non sono ortogonali.

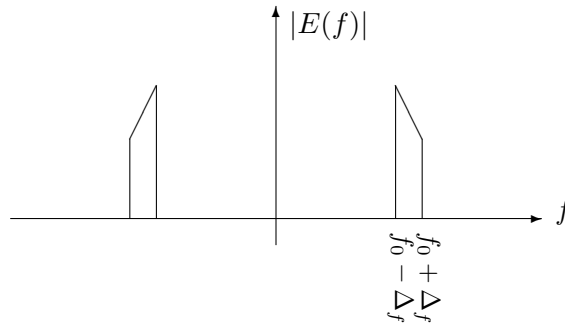


Figura 4.16: Modulo della trasformata di Fourier di $e(t)$ per il problema 1

Il prodotto scalare tra $z(t)$ e $e(t)$ si calcola in modo analogo:

$$\langle z(t), e(t) \rangle = \int z(t)e(t) dt = \int Z(f)E^*(f) df = 0$$

in quanto $Z(f)$ è uguale a zero nell'intervallo di frequenze in cui $E(f)$ è diverso da zero.

Soluzione del problema 2

Per il processo $y(t)$ le medie richieste sono le seguenti:

$$\mu_y = \mu_x H(0) = 0 \sqrt{W} \quad \text{in quanto } \mu_x = 0 \sqrt{W}$$

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} = \int G_y(f) df = \int G_x(f)|H(f)|^2 df = G_x \int_{-B}^B df = 2BG_x \quad W$$

Il processo $z(t)$ è ottenuto filtrando $y(t)$ con un filtro con risposta all'impulso

$$g(t) = \delta(t - t_0) + 2\delta(t)$$

e funzione di trasferimento

$$G(f) = a + e^{-j2\pi f t_0}.$$

Pertanto

$$\mu_z = \mu_y G(0) = 0 \sqrt{W} \quad \text{in quanto } \mu_y = 0 \sqrt{W}$$

$$\sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = \int G_y(f)|G(f)|^2 df = G_x \int |H(f)|^2 |G(f)|^2 df = G_x \int_{-B}^B |G(f)|^2 df$$

Il modulo al quadrato di $G(f)$ è

$$|G(f)|^2 = G(f)G^*(f) = a^2 + 1 + ae^{-j2\pi f t_0} + ae^{j2\pi f t_0} = (a^2 + 1) + 2a \cos(2\pi f t_0)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= G_x \int_{-B}^B [(a^2 + 1) + 2a \cos(2\pi f t_0)] df \\ &= (a^2 + 1)2BG_x + 2aG_x \left. \frac{\sin(2\pi f t_0)}{2\pi t_0} \right|_{-B}^B \\ &= (a^2 + 1)2BG_x + 2aG_x \frac{\sin(2\pi B t_0)}{\pi t_0} \\ &= (a^2 + 1)2BG_x + 4aBG_x \frac{\sin(2\pi B t_0)}{2\pi B t_0} \end{aligned}$$

In alternativa, si può lavorare nel dominio del tempo:

$$\mu_z = E\{z(t)\} = E\{y(t - t_0) + ay(t)\} = E\{y(t - t_0)\} + 2E\{y(t)\} = \mu_y + a\mu_y = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{z^2(t)\} = E\{[y(t - t_0) + ay(t)]^2\} \\ &= E\{y^2(t - t_0)\} + a^2 E\{y^2(t)\} + 2aE\{y(t - t_0)y(t)\} \\ &= \sigma_y^2 + a^2 \sigma_y^2 + 2aR_y(t_0) \end{aligned}$$

La funzione di autocorrelazione $R_y(\tau)$ è l'antitrasformata di $G_y(f) = p_{2B}(f)$:

$$R_y(\tau) = \int G_y(f) e^{j2\pi f\tau} df = G_x \int_{-B}^B e^{j2\pi f\tau} df = G_x \frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} = G_x \frac{\sin(2\pi B\tau)}{\pi\tau} = 2B \frac{\sin(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau}$$

Risulta dunque

$$R_y(t_0) = 2BG_x \frac{\sin(2\pi Bt_0)}{2\pi Bt_0} \text{ W}$$

e

$$\sigma_z^2 = (a^2 + 1)2BG_x + 4aBG_x \frac{\sin(2\pi Bt_0)}{2\pi Bt_0} \text{ W}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\sigma_y^2 = 40 \text{ W}, BT_0 = 0.25, R_y(t_0)/\sigma_y^2 = 0.6366, \sigma_z^2 \simeq 301.86 \text{ W}$$

Soluzione del problema 3

Facendo riferimento alla figura 4.17, si ha:

$$W(z) = X(z) + Y(z)(a_1 + b_1)z^{-2}$$

$$Y(z) = W(z) + Y(z)(a_2 + b_2)z^{-1}$$

Si ottiene dunque

$$Y(z) = X(z) + Y(z)(a_1 + b_1)z^{-2} + Y(z)(a_2 + b_2)z^{-1}$$

$$Y(z)[1 - (a_2 + b_2)z^{-1} - (a_1 + b_1)z^{-2}] = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - (a_2 + b_2)z^{-1} - (a_1 + b_1)z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - (a_2 + b_2)z^{-1} - (a_1 + b_1)z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - (a_2 + b_2)z - (a_1 + b_1)} = \frac{z^2}{z^2 - c_2z - c_1}$$

dove $c_2 = a_2 + b_2$ e $c_1 = a_1 + b_1$.

I poli della funzione di trasferimento sono

$$p_{1,2} = \frac{c_2}{2} \pm \sqrt{\frac{c_2^2}{4} + c_1}$$

e sono calcolabili sostituendo i valori $a_1 = 1/4$, $b_1 = 1/2$, $a_2 = 1/2$, $b_2 = 1/2$, $c_1 = 3/4$, $c_2 = 1$,
come $p_1 = 3/2$, $p_2 = -1/2$

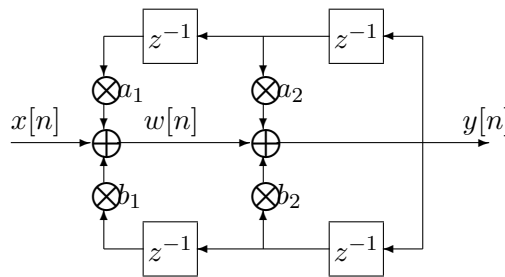


Figura 4.17: Schema a blocchi del sistema per il problema 3.

Per la risposta all'impulso $h[n]$ occorre calcolare l'antitrasformata di $H(z)$.

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)z} = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A}{z-p_1} + \frac{B}{z-p_2}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{H(z)}{z}(z-p_1) = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{z}{z-p_2} = \frac{p_1}{p_1-p_2}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{H(z)}{z}(z-p_2) = \lim_{z \rightarrow p_2} \frac{z}{z-p_1} = \frac{p_2}{p_2-p_1}$$

$$H(z) = \frac{Az}{z-p_1} + \frac{Bz}{z-p_2}$$

$$h[n] = Ap_1^n u[n] + Bp_2^n u[n]$$

dove $p_1 = 3/2$, $p_2 = -1/2$ $A = 3/4$, $B = 1/4$.

4.5 Appello del 15 luglio 2013

Domande di teoria

1. Sia $x[n] = \cos(2\pi n/8)$. Si scriva la formula che consente di calcolare la DFT di $x[n]$ (senza calcolarla).
2. Si scriva tutto ciò che si conosce sulla stabilità BIBO di sistemi LTI a tempo continuo.
3. Sia $x(t)$ un segnale ad energia finita, reale e pari. Si dica se è vero o no che la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$ è 1) reale, 2) pari (con dimostrazione).

Problema 1

Si considerino i segnali

$$x(t) = 10 \frac{\sin(\pi 10 t)}{\pi 10 t}.$$

$$y(t) = 10 \frac{\sin(\pi 10 t)}{\pi 10 t} * \delta(t - 0.1).$$

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/f_c)$$

Il segnale $x(t)$ è l'ingresso di un campionario ideale, che genera il segnale $x_\delta(t) = x(t)c(t)$.

Il segnale $y(t)$ è l'ingresso di un campionario ideale, che genera il segnale $y_\delta(t) = y(t)c(t)$.

Per i due casi $f_c = 10$ Hz e $f_c = 20$ Hz.

1. Si scrivano le espressioni analitiche di $x_\delta(t)$ e di $y_\delta(t)$ nel modo più semplice possibile
2. Si scrivano le espressioni dei segnali $x_r(t)$ e $y_r(t)$, essendo

$$x_r(t) = x_\delta(t) * h(t), \quad y_r(t) = y_\delta(t) * h(t)$$

con $h(t)$ risposta all'impulso di un filtro passabasso ideale di banda $f_c/2$.

Problema 2

Si consideri il sistema di figura 4.18, dove $x(t)$ è un processo casuale gaussiano bianco con spettro del valor quadratico medio $G_x(f) = 2$ W/Hz. Si calcoli media varianza e valor quadratico medio dell'uscita $y(t)$. Si scriva la densità di probabilità di $\xi = y(t_0)$ con $t_0 = 10$ s.

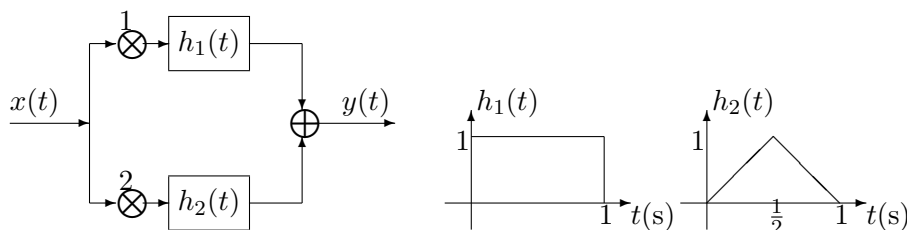


Figura 4.18: Sistema per il problema 2

Problema 3

Si disegni lo schema a blocchi del sistema LTI tempo-discreto caratterizzato dall'avere un polo (ed uno solo) in $p_1 = -0.8$ ed uno zero (ed uno solo) in $z_1 = 1.2$.

1. Si dica se il sistema è stabile in senso BIBO.
2. Si calcoli l'uscita del filtro $y_1[n]$ per l'ingresso $x_1[n] = (0.8)^n u[n]$
3. Si calcoli l'uscita $y_2[n]$ per l'ingresso $x_2[n] = (0.8)^{n-2} u[n-2]$
4. Si calcoli l'uscita $y_3[n]$ per l'ingresso $x_3[n] = (0.8)^{n-2} u[n]$

Soluzione del compito

Risposte alle domande di teoria

1. Il segnale tempo-discreto $x[n]$ è periodico di periodo $N = 8$. Pertanto la sua DFT va calcolata utilizzando la seguente formula:

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-j2\pi kn/8}, \quad k = 0, \dots, 7$$

2. La sigla BIBO corrisponde in inglese a “Bounded Input Bounded Output”, cioè a dire uscita limitata (in ampiezza) per ingresso limitato (in ampiezza). Un sistema LTI tempo-continuo è stabile in senso BIBO se, per un qualsiasi ingresso $x(t)$ limitato in ampiezza (cioè valendo la disuguaglianza $|x(t)| < A < \infty$), l'uscita del sistema $y(t)$ è anch'essa limitata in ampiezza (cioè $y(t) = x(t) * h(t)$, essendo $h(t)$ la risposta all'impulso del sistema, e $|y(t)| < B < \infty$). Si dimostra che la condizione di stabilità BIBO appena enunciata è equivalente alla seguente condizione: un sistema è stabile in senso BIBO se e solo se la sua risposta all'impulso $h(t)$ è tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < C < \infty.$$

In alternativa, un sistema è stabile in senso BIBO se e solo se la sua funzione di trasferimento $H(f)$ è tale che

$$|H(f)| < \infty \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

In alternativa, un sistema è stabile in senso BIBO se e solo se i poli p_k della sua funzione di trasferimento

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

cadono nel semipiano di sinistra (cioè $\Re\{p_k\} < 0$ per ogni k).

3. La trasformata di Fourier di $x(t)$ è

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Si ha inoltre

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt$$

e questo integrale può essere visto come il complesso coniugato della trasformata di Fourier di $x^*(t)$:

$$X(-f) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^*$$

D'altra parte, per ipotesi, $x(t)$ è reale e quindi $x^*(t) = x(t)$; si ha dunque

$$X(-f) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = [X(f)]^*$$

(visto a lezione, risultato valido per ogni segnale reale).

Si può anche vedere $X(-f)$ in questo modo:

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f(-t)} dt$$

e si può operare il cambio di variabile di integrazione $u = -t$, che porta a

$$X(-f) = \int_{\infty}^{-\infty} x(-u) e^{-j2\pi f u} (-du) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-u) e^{-j2\pi f u} du = \mathcal{F}\{x(-t)\}.$$

Poiché $x(t)$ è una funzione pari del tempo t , si ha però $x(-t) = x(t)$ e quindi $\mathcal{F}\{x(-t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(f)$. Si è dunque arrivati a dimostrare che, per un segnale $x(t)$ reale e pari, vale quanto segue:

$$X(-f) = X^*(f) = X(f)$$

Dall'uguaglianza $X^*(f) = X(f)$ deduciamo che $X(f)$ è reale, dall'uguaglianza $X(-f) = X(f)$ deduciamo che $X(f)$ è pari.

In alternativa, si poteva procedere nel seguente modo:

$$X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

(si è usata la formula di Eulero). Il primo integrale ha come funzione integranda una funzione pari (in quanto $x(t)$ è pari per ipotesi e $\cos(2\pi f t)$ è una funzione pari di t). La funzione integranda del secondo integrale è invece una funzione dispari di t , visto che $\sin(2\pi f t)$ è dispari; poiché l'integrale ha estremi opposti, il valore del secondo integrale è nullo. Si ottiene dunque che

$$X(f) = \int x(t) \cos(2\pi f t) dt$$

e si dimostra così che $X(f)$ è reale. Se si calcola poi $X(-f)$, si ottiene

$$X(-f) = \int x(t) \cos(2\pi(-f)t) dt = \int x(t) \cos(2\pi f t) dt = X(f)$$

visto che $\cos(2\pi f t)$ è anche funzione pari di f . Poiché $X(-f) = X(f)$, allora $X(f)$ è pari.

Soluzione del problema 1

Il segnale $x(t)$ è scrivibile in forma più generica come

$$x(t) = B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}, \quad B = 10 \text{ Hz}$$

mentre il segnale $y(t)$ è scrivibile come

$$y(t) = x(t - 0.1) = x\left(t - \frac{1}{B}\right)$$

ed è semplicemente $x(t)$ ritardato di $1/B$. Il sistema da analizzare è costituito da un campionario ideale con frequenza di campionamento f_c seguito da un filtro di ricostruzione passabasso di banda $f_c/2$, come richiesto dal teorema del campionamento.

Le trasformate di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$ sono:

$$X(f) = p_B(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B/2 = 5 \text{ Hz} \\ 0 & |f| > B/2 \end{cases}$$

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi f/B}$$

I grafici dei moduli di $X(f)$ e $Y(f)$ sono riportati nella figura 4.19. Si noti che i segnali $x(t)$ e $y(t)$ hanno banda $B/2 = 5 \text{ Hz}$ e, in base al teorema del campionamento, la frequenza minima di campionamento (necessaria per non perdere informazione) è $f_c = B = 10 \text{ Hz}$ e corrisponde al primo dei due casi da considerare. Nel secondo caso, la frequenza di campionamento indicata è $f_c = 2B = 20 \text{ Hz}$ ed è il doppio della frequenza minima richiesta dal teorema del campionamento. In base a quanto noto dalla teoria si può già dire che i due segnali di uscita $x_r(t)$ e $y_r(t)$ sono proporzionali a $x(t)$ e $y(t)$, rispettivamente, sia per $f_c = B$ sia per $f_c = 2B$. Nel seguito viene riportata l'analisi di dettaglio.

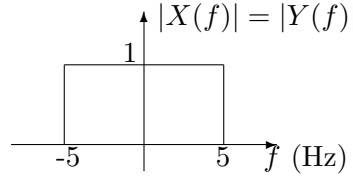


Figura 4.19: Modulo delle trasformate di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$.

- Caso $f_c = B = 10$. La figura 4.20 mostra $x(t)$ e $c(t)$, la figura 4.21 mostra $y(t)$ e $c(t)$. In questo caso il segnale $c(t)$ ha le delta di Dirac in corrispondenza degli zeri di $x(t)$, a parte la delta in $t = 0$.

In sostanza si ha

$$x_\delta(t) = B\delta(t)$$

$$y_\delta(t) = B\delta\left(t - \frac{1}{B}\right) = x_\delta\left(t - \frac{1}{B}\right)$$

$$H(f) = p_{f_c}(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_c/2 \\ 0 & |f| > f_c/2 \end{cases}, \quad h(t) = \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi t} = f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t}$$

$$x_r(t) = x_\delta(t) * h(t) = B\delta(t) * f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} = B f_c \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} = f_c B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} = f_c x(t)$$

$$y_r(t) = x_r\left(t - \frac{1}{B}\right) = f_c x\left(t - \frac{1}{B}\right) = f_c y(t)$$

Si poteva anche scegliere

$$H(f) = \frac{1}{f_c} p_{f_c}(f), \quad h(t) = \frac{1}{f_c} \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi t} = \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t}$$

con risultati:

$$x_r(t) = x(t), \quad y_r(t) = y(t)$$

Di seguito viene riportata la verifica di quanto appena ottenuto, lavorando nel dominio della frequenza (per il solo caso $x(t)$), seguendo i passaggi della dimostrazione del teorema del campionamento, così come visto a lezione. La trasformata di Fourier di $x_\delta(t)$ è

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\{c(t)x(t)\} = \mathcal{F}\{c(t)\} * \mathcal{F}\{x(t)\} = C(f) * X(f)$$

$$C(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_k \delta(t - k/f_c)\right\} = f_c \sum_k \delta(f - kf_c)$$

$$X_\delta(f) = f_c \sum_k \delta(f - kf_c) * X(f) = f_c \sum_k X(f - kf_c) = f_c$$

in quanto (si veda la figura 4.22)

$$\sum_k X(f - kf_c) = 1$$

La trasformata di Fourier di $x_r(t)$ è

$$X_r(f) = X_\delta(f)H(f) = f_c H(f)$$

e quindi, nel caso $H(f) = p_{f_c}(f)$, si ha

$$x_r(t) = f_c h(t) = f_c^2 \frac{\sin(\pi f_c t)}{\pi f_c t} = f_c B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} = f_c x(t)$$

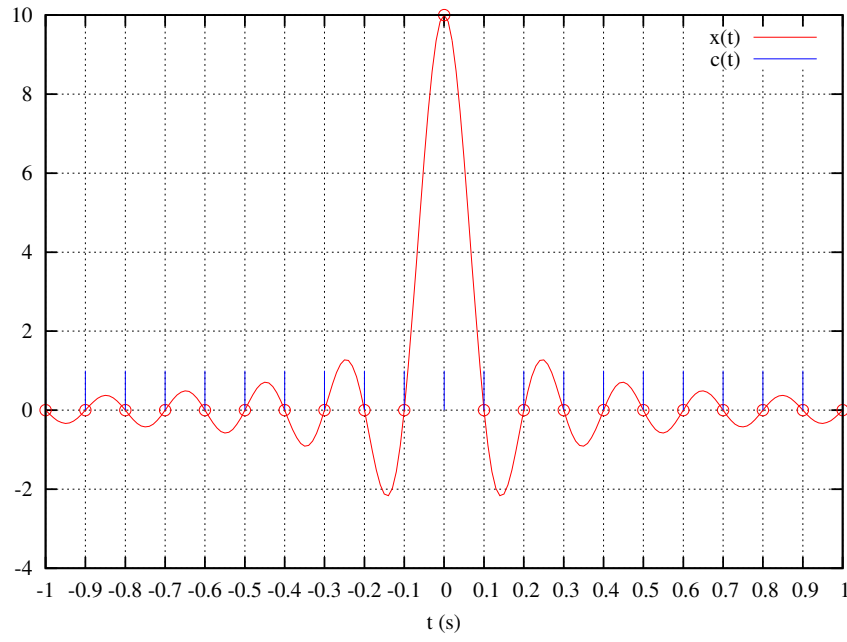


Figura 4.20: Segnali $x(t)$ e $c(t)$ per il problema 1, caso $f_c = B = 10$ Hz; le linee blu verticali corrispondono alle delta di Dirac del segnale $c(t)$, i pallini rossi corrispondono ai valori $x(k/f_c)$.

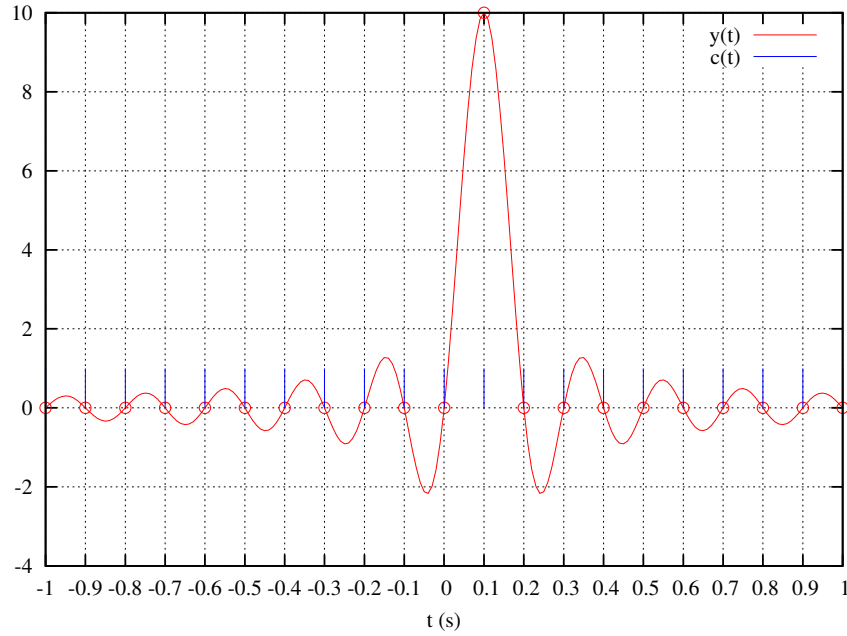


Figura 4.21: Segnali $y(t)$ e $c(t)$ per il problema 1, caso $f_c = B = 10$ Hz; le linee blu verticali corrispondono alle delta di Dirac del segnale $c(t)$, i pallini rossi corrispondono ai valori $y(k/f_c)$.

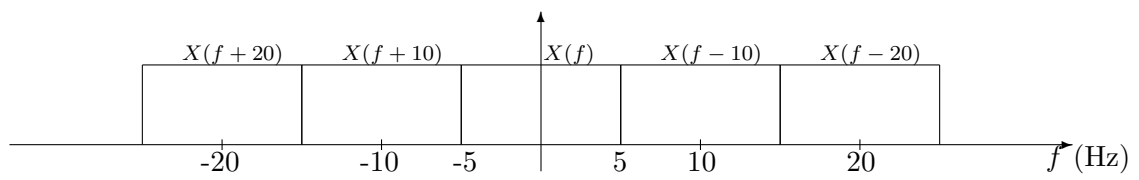


Figura 4.22: Costruzione di $\sum_k X(f - kf_c)$ con $f_c = 10$.

- Caso $f_c = 2B$. La figura 4.23 mostra $x(t)$ e $c(t)$, la figura 4.24 mostra $y(t)$ e $c(t)$.

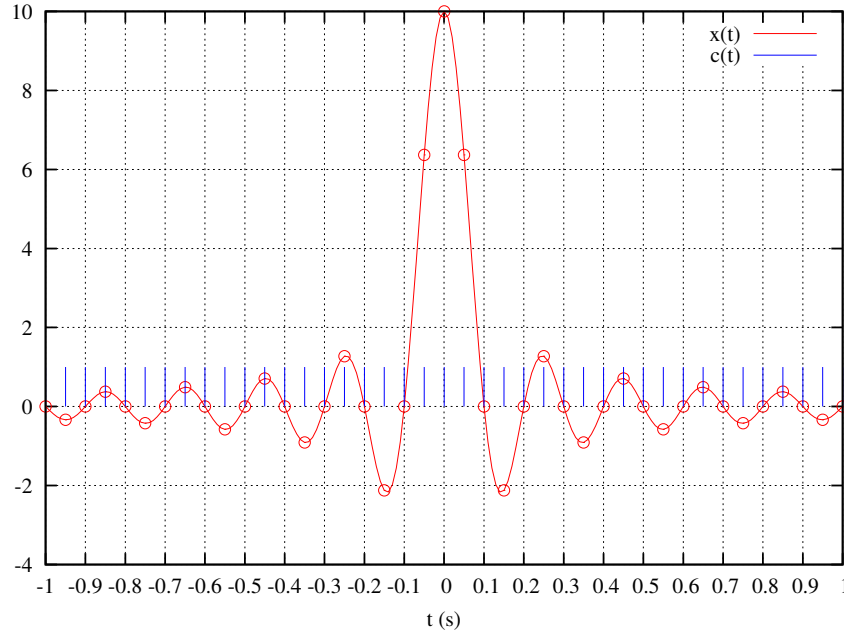


Figura 4.23: Segnali $x(t)$ e $c(t)$ per il problema 1, caso $f_c = 2B = 20$ Hz; le linee blu verticali corrispondono alle delta di Dirac del segnale $c(t)$, i pallini rossi corrispondono ai valori $x(k/f_c)$.

In questo caso $c(t)$ ha le sue delta negli istanti $k/(2B)$ e, per k pari, le delta sono sostanzialmente in corrispondenza degli zeri di $x(t)$ (tranne $k = 0$) e, per k dispari le delta sono in corrispondenza di istanti temporali in cui $x(t)$ è diverso da zero. Si ha

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k/f_c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{f_c}\right) \delta(t - k/f_c)$$

$$x\left(\frac{k}{f_c}\right) = x\left(\frac{k}{2B}\right) = B \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} = \begin{cases} B & k = 0 \\ 0 & k \text{ pari e } k \neq 0 \\ \frac{B \sin(k\pi/2)}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= B\delta(t) + \sum_{k \text{ dispari}} \frac{B \sin(k\pi/2)}{k\pi} \delta\left(f - \frac{k}{2B}\right) \\ &= B\delta(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B \sin(n\pi + \pi/2)}{(2n+1)\pi} \delta\left(f - \frac{2n+1}{2B}\right) \\ &= B\delta(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B(-1)^n}{(2n+1)\pi} \delta\left(f - \frac{2n+1}{2B}\right) \end{aligned}$$

$$y_\delta(t) = x_\delta\left(t - \frac{1}{B}\right)$$

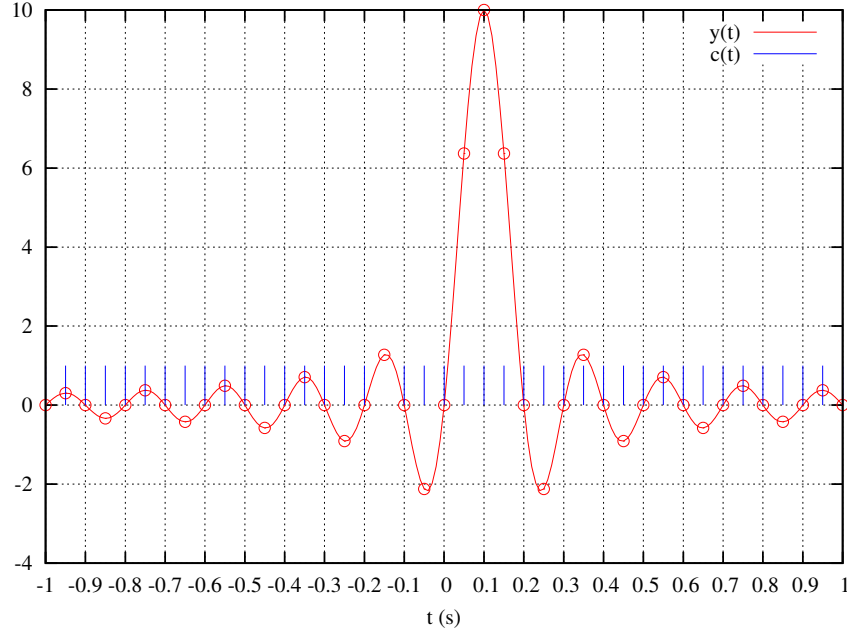


Figura 4.24: Segnali $y(t)$ e $c(t)$ per il problema 1, caso $f_c = 2B = 20$ Hz; le linee blu verticali corrispondono alle delta di Dirac del segnale $c(t)$, i pallini rossi corrispondono ai valori $y(k/f_c)$.

In questo caso è strettamente necessario lavorare nel dominio della frequenza per poter scrivere l'espressione di $x_r(t)$.

$$X_\delta(f) = f_c \sum_k X(f - kf_c) = 2B \sum_k X(f - 2kB) = 2B \sum_k p_B(f - 2kB)$$

(si veda la figura 4.25)

$$X_r(f) = X_\delta(f)H(f) = X_\delta(f)p_{f_c}(f) = X_\delta(f)p_{2B}(f) = 2B \sum_k p_B(f - 2kB)p_{2B}(f) = 2Bp_B(f)$$

$$x_r(t) = 2B \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi t} = 2B^2 \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} = 2Bx(t)$$

Si ha poi

$$y_r(t) = x_r\left(t - \frac{1}{B}\right) = 2By(t)$$

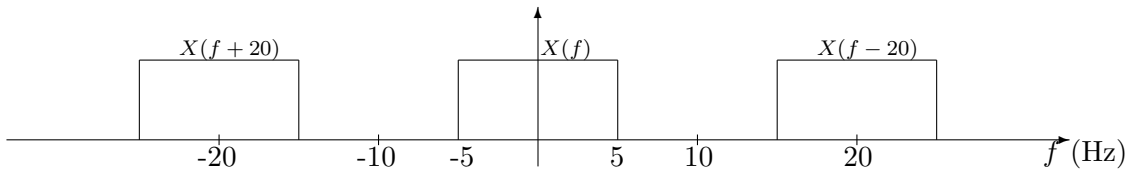


Figura 4.25: Costruzione di $\sum_k X(f - kf_c)$ con $f_c = 20$.

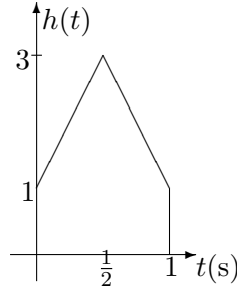


Figura 4.26: Risposta all'impulso del sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$ per il problema 2.

Soluzione del problema 2

Il sistema con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$ ha risposta all'impulso

$$h(t) = h_1(t) + 2h_2(t)$$

Il grafico di $h(t)$ è riportato nella Fig. 4.26.

Il processo casuale $y(t)$ ha valor medio

$$\mu_y = E\{y(t)\} = \mu_x H(0) = 0$$

dove $\mu_x = 0$ è il valor medio di $x(t)$, processo casuale gaussiano bianco e quindi con media nulla.

Il valor quadratico medio $E\{y^2(t)\}$ e la varianza σ_y^2 di $y(t)$ risultano coincidenti e pari a

$$\sigma_y^2 = \int G_y(f) df = \int G_x(f) |H(f)|^2 df = \int 2|H(f)|^2 df = 2 \int |h(t)|^2 dt = 2\mathcal{E}_h$$

dove si è usata l'uguaglianza di Parseval nell'ultimo passaggio e si è usato il simbolo \mathcal{E}_h per indicare l'energia di $h(t)$. Si ha

$$\mathcal{E}_h = \int_0^1 h^2(t) dt = 2 \int_0^{1/2} h^2(t) dt$$

(l'ultimo passaggio è vero perché $h(t)$ è una funzione simmetrica rispetto a $x = 1/2$)

$$\mathcal{E}_h = 2 \int_0^{1/2} (1+4t)^2 dt = 2 \int_0^{1/2} (1+8t+16t^2) dt = 2 \left[\frac{1}{2} + 8 \frac{(1/2)^2}{2} + 16 \frac{(1/2)^3}{3} \right] = 2 \left[\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} \right] = \frac{13}{3}$$

Si ottiene dunque

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} = \frac{26}{3}$$

Il processo $y(t)$ è stazionario in senso lato (lo è $x(t)$, essendo un processo casuale gaussiano bianco) e quindi la densità di probabilità del primo ordine di $y(t)$ non dipende da t ; altrimenti si può anche dire che, come appena calcolato, media e varianza di $y(t)$ non dipendono da t e quindi la ddp di ξ è indipendente dal particolare valore t_0 scelto. La ddp richiesta è dunque

$$f_\xi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(u-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(52/3)}} e^{-\frac{u^2}{52/3}}$$

Soluzione del problema 3

La funzione di trasferimento del sistema è

$$H(z) = \frac{z - z_1}{z - p_1} = \frac{z - 1.2}{z + 0.8}$$

Una possibile struttura del filtro è riportata nella Fig. 4.27.

La trasformata zeta di $x_1[n]$ (dalle tavole) è

$$X_1(z) = \frac{z}{z + p_1}$$

La trasformata zeta dell'uscita $y_1[n]$ è

$$Y_1(z) = X_1(z)H(z) = \frac{z - z_1}{z - p_1} \frac{z}{z + p_1}$$

Per calcolare $y_1[n]$ conviene usare la tecnica della scomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(z)}{z} &= \frac{(z - z_1)z}{z(z - p_1)(z + p_1)} = \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z + p_1)} = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z + p_1} \\ c_1 &= \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{Y_1(z)}{z} (z - p_1) = \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{(z - z_1)}{z + p_1} = \frac{(p_1 - z_1)}{2p_1} = \frac{p_1 - z_1}{2p_1} = \frac{-0.8 - 1.2}{-2 \times 0.8} = \frac{2}{1.6} = 1.25 \\ c_2 &= \lim_{z \rightarrow -p_1} \frac{Y_1(z)}{z} (z + p_1) = \lim_{z \rightarrow -p_1} \frac{(z - z_1)}{z - p_1} = \frac{-p_1 - z_1}{-2p_1} = \frac{p_1 + z_1}{2p_1} = \frac{-0.8 + 1.2}{-1.6} = \frac{0.4}{-1.6} = -0.25 \\ \frac{Y_1(z)}{z} &= \frac{p_1 - z_1}{2p_1} \frac{1}{z - p_1} + \frac{p_1 + z_1}{2p_1} \frac{1}{z + p_1} \\ Y_1(z) &= \frac{p_1 - z_1}{2p_1} \frac{z}{z - p_1} + \frac{p_1 + z_1}{2p_1} \frac{z}{z + p_1} \\ y_1[n] &= \frac{p_1 - z_1}{2p_1} (p_1)^n u[n] + \frac{p_1 + z_1}{2p_1} (-p_1)^n u[n] \\ y_1[n] &= 1.25(-0.8)^n u[n] - 0.25(0.8)^n u[n] \end{aligned}$$

Poiché $x_2[n] = x_1[n] * \delta[n - 2]$, grazie alla tempo-invarianza del sistema, si ha

$$y_2[n] = y_1[n - 2] = 1.25(-0.8)^{n-2} u[n - 2] - 0.25(0.8)^{n-2} u[n - 2]$$

Poiché $x_3[n] = x_1[n]/(p_1^2)$, grazie alla linearità del sistema, si ha

$$y_3[n] = \frac{1}{p_1^2} y_1[n] = 1.25(-0.8)^{n-2} u[n] - 0.25(0.8)^{n-2} u[n]$$

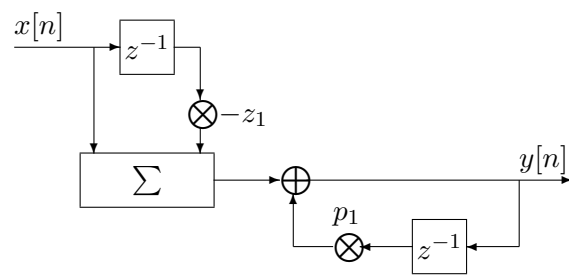


Figura 4.27: Possibile struttura del filtro per il problema 3.

4.6 Appello del 2 settembre 2013

Domande di teoria

1. Indicare tutte le differenze tra convoluzione circolare e convoluzione “normale” nel caso di sistema lineare tempo invariante a tempo discreto.
2. Si scrivano tutte le formule a disposizione per il calcolo della potenza media P_x di un segnale periodico $x(t)$ di periodo T .
3. Una variabile aleatoria α ha densità di probabilità $f_\alpha(x)$. Si scriva la formula che consente di calcolare $C_\alpha(u) = E\{e^{j2\pi u\alpha}\}$.

Problema 1

Si consideri il sistema **lineare e tempo invariante** che produce l'uscita $y(t)$ di figura 4.28 quando l'ingresso è $x(t) = p_T(t - T/2)$.

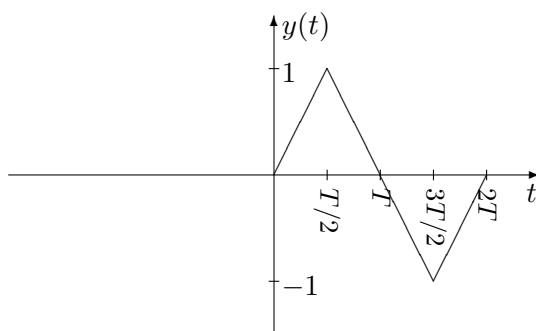


Figura 4.28: Uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t)$, problema 1.

Si calcoli quanto segue:

1. uscita $y_1(t)$ per l'ingresso $x_1(t) = p_T(t - 3T/2)$
2. uscita $y_2(t)$ per l'ingresso $x_2(t) = p_T(t - T/2) - p_T(t - 3T/2)$
3. uscita $y_3(t)$ per l'ingresso $x_3(t) = tp_T(t - T/2) + Tu(t - T)$

Nota 1: si suggerisce di disegnare il grafico per tutti i segnali coinvolti.

Nota 2: si ricordi che

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Problema 2

Si consideri il sistema riportato nella figura 4.29 dove $x(t)$ è un processo casuale gaussiano SSS ed ergodico con spettro del valor quadratico medio (o spettro di potenza)

$$G_x(f) = p_{100}(f) = \begin{cases} 1 \text{ W/Hz} & |f| < 50 \text{ Hz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e media nulla.

Assumendo $t_0 = 5 \text{ ms}$, si calcolino

1. varianza e valor quadratico medio (valori numerici, non formule) del processo $x(t)$
2. media, varianza e valor quadratico medio (valori numerici, non formule) del processo $z(t)$

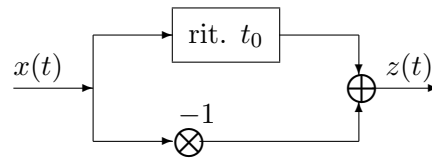


Figura 4.29: Schema a blocchi del sistema per il problema 2.

Problema 3

Un sistema lineare tempo invariante e tempo discreto ha risposta all'impulso

$$h[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$$

Si calcoli l'uscita del sistema per l'ingresso

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{8} \delta[n-3]$$

e se ne disegni il grafico.

Soluzione del compito

Soluzione del problema 1

Il grafico di $x(t)$ è riportato nella figura 4.30. Il corrispondente segnale d'uscita $y(t)$ ha

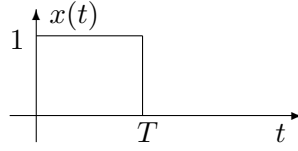


Figura 4.30: Ingresso $x(t)$ per il problema 1.

espressione

$$y(t) = \begin{cases} 2t/T & t \in [0, T/2] \\ 2 - 2t/T & t \in [T/2, 3T/2] \\ -4 + 2t/T & t \in [3T/2, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.2)$$

La soluzione più facile non richiede calcolo di trasformate di Fourier o convoluzioni, né il calcolo della risposta all'impulso (o funzione di trasferimento) del sistema, ma semplicemente **l'applicazione delle definizioni di linearità e tempo invarianza**.

1. Il segnale $x_1(t)$ è pari a $x(t)$ ritardato di T : $x_1(t) = x(t-T)$. Grazie alla tempo invarianza del sistema, il segnale d'uscita $y_1(t)$ è $y(t)$ ritardato di T : $y_1(t) = y(t-T)$, con grafico riportato nella figura 4.31 ed espressione

$$y_1(t) = \begin{cases} 2t/T - 2 & t \in [T, 3T/2] \\ 4 - 2t/T & t \in [3T/2, 5T/2] \\ -6 + 2t/T & t \in [5T/2, 3T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2. Il segnale $x_2(t)$ è pari a $x(t) - x(t-T) = x(t) - x_1(t)$. Grazie alla linearità del sistema, l'uscita $y_2(t)$ è $y_2(t) = y(t) - y_1(t)$, con grafico riportato nella figura 4.32 ed espressione

$$y_2(t) = y(t) - y_1(t) = \begin{cases} 2t/T & t \in [0, T/2] \\ 2 - 2t/T & t \in [T/2, T] \\ 2 - 2t/T - (2t/T - 2) = 4 - 4t/T & t \in [T, 3T/2] \\ -4 + 2t/T - (4 - 2t/T) = -8 + 4t/T & t \in [3T/2, 2T] \\ -(4 - 2t/T) = -4 + 2t/T & t \in [2T, 5T/2] \\ -(-6 + 2t/T) = 6 - 2t/T & t \in [5T/2, 3T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Il segnale $x_3(t)$ riprodotto nella figura 4.33 è l'integrale di $x(t)$:

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$$

Infatti, per $t < 0$ si ha

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = 0 = \int_{-\infty}^t 0 \cdot du = 0,$$

per $t \in [0, T]$ si ha

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^t 1 \cdot du = t,$$

per $t > T$ si ha

$$x_3(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du = \int_0^T 1 \cdot du = T.$$

Invece di avere $x_3(t)$ direttamente all'ingresso del sistema in esame, è possibile immaginare un sistema equivalente in cui $x(t)$ si trova all'ingresso della cascata di un integratore (alla cui uscita si ha $x_3(t)$) seguito dal sistema in esame, avendo all'uscita il segnale incognito $y_3(t)$. Grazie al fatto che sia l'integratore sia il sistema in esame sono lineari e tempo invarianti, è possibile scambiare l'ordine dei due sistemi e studiare il sistema equivalente costituito dal sistema in esame seguito dall'integratore, sempre con ingresso $x(t)$ e uscita $y_3(t)$ (si veda la fig. 4.34). All'uscita del sistema in esame con ingresso $x(t)$ si ha $y(t)$; all'uscita dell'integratore si ha

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^t y(u) du$$

Utilizzando l'espressione analitica di $y(t)$ in (4.2), il calcolo di $y_3(t)$ può essere effettuato come segue:

$$\text{per } t < 0, \quad y_3(t) = \int_{-\infty}^t y(u) du = \int_{-\infty}^t 0 \cdot du = 0$$

$$\text{per } t \in [0, T/2], \quad y_3(t) = \int_{-\infty}^t y(u) du = \int_0^t \frac{2u}{T} du = \frac{2}{T} \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^t = \frac{t^2}{T}$$

$$\begin{aligned} t \in [T/2, 3T/2], \quad y_3(t) &= \int_0^{T/2} y(u) du + \int_{T/2}^t y(u) du \\ &= \frac{T}{4} + \int_{T/2}^t \left[2 - \frac{2u}{T} \right] du \\ &= \frac{T}{4} + 2 \left[t - \frac{T}{2} \right] - \frac{2}{T} \left. \frac{u^2}{2} \right|_{T/2}^t \\ &= \frac{T}{4} + 2 \left[t - \frac{T}{2} \right] - \frac{1}{T} \left[t^2 - \frac{T^2}{4} \right] \\ &= \frac{T}{4} + 2 \left[t - \frac{T}{2} \right] - \frac{t^2}{T} + \frac{T}{4} \\ &= -\frac{t^2}{T} + 2t - \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t \in [3T/2, 2T], \quad y_3(t) &= \int_0^{3T/2} y(u) du + \int_{3T/2}^t y(u) du \\
&= \left[-\frac{t^2}{T} + 2t - \frac{T}{2} \right] \Big|_{3T/2}^t + \int_{3T/2}^t \left[-4 + \frac{2u}{T} \right] du \\
&= \left[-\frac{9T}{4} + 3T - \frac{T}{2} \right] - 4 \left[t - \frac{3T}{2} \right] + \frac{2}{T} \frac{u^2}{2} \Big|_{3T/2}^t \\
&= \frac{T}{4} - 4 \left[t - \frac{3T}{2} \right] + \frac{1}{T} \left[t^2 - \frac{9T^2}{4} \right] \\
&= \frac{T}{4} - 4t + 6T + \frac{t^2}{T} - \frac{9T}{4} \\
&= \frac{t^2}{T} - 4T + 4T
\end{aligned}$$

$$t > 2T, \quad y_3(t) = \int_0^{2T} y(u) du + \int_{2T}^t y(u) du = \int_0^{2T} y(u) du + \int_{2T}^t 0 \cdot du = \left[\frac{t^2}{T} - 4T + 4T \right] \Big|_{2T} = 0$$

Il grafico di $y_3(t)$ è riportato nella figura 4.35.

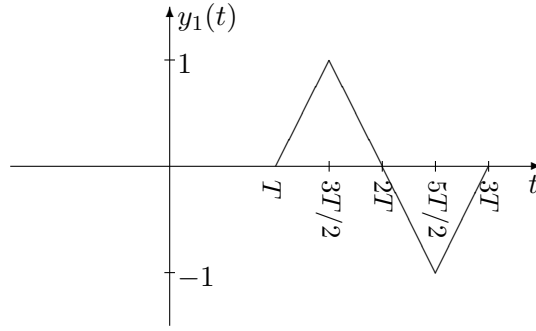


Figura 4.31: Uscita $y_1(t)$ corrispondente all'ingresso $x_1(t)$, problema 1.

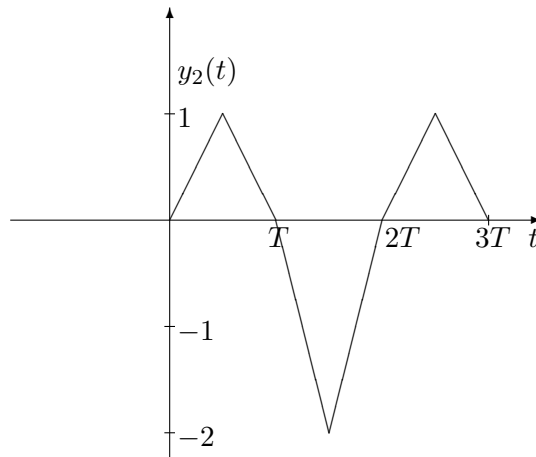


Figura 4.32: Uscita $y_2(t)$ corrispondente all'ingresso $x_2(t)$, problema 1.

Di seguito una soluzione alternativa del problema. Il segnale $x(t) = p_T(t - T/2)$ ha trasformata di Fourier

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j\pi f T}$$

Il segnale $y(t)$ può essere scritto come

$$y(t) = \text{tri} \left(\frac{t}{T/2} \right) * \left[\delta \left(t - \frac{T}{2} \right) - \delta \left(t - \frac{3T}{2} \right) \right]$$

(si noti che la base di un singolo triangolino nel grafico di $y(t)$ è T , mentre nelle tavole delle trasformate di Fourier il segnale triangolare ha base $2T$). La trasformata di Fourier di $y(t)$ è

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{T \sin^2(\pi f T/2)}{2 (\pi f T/2)^2} \left[e^{-j\pi f T} - e^{-j3\pi f T} \right] \\ &= \frac{T \sin^2(\pi f T/2)}{2 (\pi f T/2)^2} e^{-2j\pi f T} \left[e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right] \\ &= \frac{T \sin^2(\pi f T/2)}{2 (\pi f T/2)^2} e^{-2j\pi f T} 2j \sin(\pi f T) \\ &= j4T \frac{\sin^2(\pi f T/2) \sin(\pi f T)}{(\pi f T)^2} e^{-2j\pi f T} \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento del sistema è dunque

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} \\ &= j4T \frac{\sin^2(\pi f T/2) \sin(\pi f T)}{(\pi f T)^2} e^{-2j\pi f T} \frac{\pi f}{\sin(\pi f T)} e^{j\pi f T} \\ &= j4 \frac{\sin^2(\pi f T/2)}{\pi f T} e^{-j\pi f T} \\ &= j4 \frac{\sin(\pi f T/2) [e^{j\pi f T/2} - e^{-j\pi f T/2}]}{2j\pi f T} e^{-j\pi f T} \\ &= \frac{\sin(\pi f T/2) [e^{-j\pi f T/2} - e^{-j3\pi f T/2}]}{\pi f T/2} \end{aligned}$$

La risposta all'impulso del sistema è (si veda Fig. 4.36)

$$h(t) = \frac{2}{T} p_{T/2}(t) * [\delta(t - T/4) - \delta(t - 3T/4)]$$

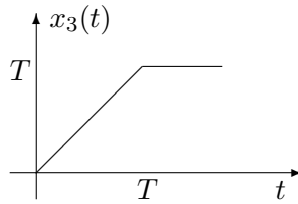


Figura 4.33: Ingresso $x_3(t)$ per il problema 1.

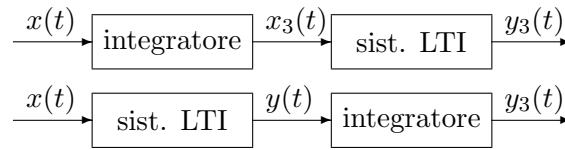


Figura 4.34: Sistemi equivalenti per il calcolo di $y_3(t)$, problema 1.

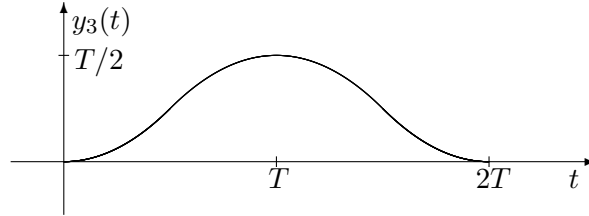


Figura 4.35: Segnale $y_3(t)$ per il problema 1.

Si noti che $h(t)$ ha durata T , che $x(t)$ ha durata T e che, correttamente, $y(t) = x(t) * h(t)$ ha estensione $2T$, pari alla somma delle durate di $x(t)$ e $h(t)$.

Soluzione del problema 2

1. Poiché il valor medio di $x(t)$ è nullo, varianza σ_x^2 e valor quadratico medio $E\{x^2(t)\}$ di $x(t)$ coincidono. In particolare si ha

$$\sigma_x^2 = E\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} p_{100}(f) df = \int_{-50}^{50} 1 \cdot df = 100 \text{ W}$$

2. Il processo $z(t)$ è scrivibile come

$$z(t) = -x(t) + x(t - t_0)$$

Il sistema presente tra l'ingresso $x(t)$ e l'uscita $z(t)$ è LTI ed ha risposta all'impulso

$$h(t) = -\delta(t) + \delta(t - t_0)$$

e funzione di trasferimento

$$H(f) = -1 + e^{-j2\pi f t_0}.$$

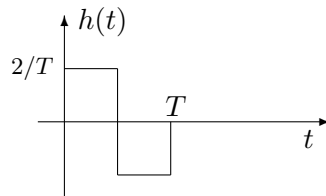


Figura 4.36: Risposta all'impulso $h(t)$ per il problema 1.

Poiché $x(t)$ è stazionario in senso stretto (SSS), la sua media non dipende dal tempo e $E\{x(t)\} = E\{x(t - t_0)\} = 0$ e quindi la media di $z(t)$ è anch'essa nulla:

$$E\{z(t)\} = E\{-x(t) + x(t - t_0)\} = -E\{x(t)\} + E\{x(t - t_0)\} = 0.$$

In alternativa, si può ricavare la media di $z(t)$ usando la formula

$$E\{z(t)\} = H(0)E\{x(t)\} = 0$$

(a) La varianza σ_z^2 ed il valor quadratico medio di $z(t)$ coincidono e si ha

$$\sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = \int G_z(f) df$$

Lo spettro $G_z(f)$ del valor quadratico medio di $z(t)$ si ottiene dalla formula

$$\begin{aligned} G_z(f) &= G_x(f)|H(f)|^2 = G_x(f)H(f)H^*(f) = G_x(f) \left[-1 + e^{-j2\pi ft_0} \right] \left[-1 + e^{j2\pi ft_0} \right] \\ &= G_x(f) \left[1 + 1 - e^{j2\pi ft_0} - e^{-j2\pi ft_0} \right] = G_x(f) [2 - 2\cos(2\pi ft_0)] \\ &= 2p_{100}(f) [1 - \cos(2\pi ft_0)] \end{aligned}$$

Nell'espressione precedente, $t_0 = 5$ ms e quindi il valore da inserire al posto di t_0 è 5×10^{-3} s, mentre f viene espresso in Hz.

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{z^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} 2p_{100}(f) [1 - \cos(2\pi ft_0)] df \\ &= 2 \int_{-50}^{50} [1 - \cos(2\pi ft_0)] df = 200 - 2 \left. \frac{\sin(2\pi ft_0)}{2\pi t_0} \right|_{-50}^{50} \\ &= 200 - 4 \frac{\sin(2\pi 50 t_0)}{2\pi t_0} = 200 - 200 \frac{\sin(2\pi 50 t_0)}{2\pi 50 t_0} \\ &= 200 - 200 \frac{\sin(100\pi \times 5 \times 10^{-3})}{100\pi \times 5 \times 10^{-3}} = 200 - 200 \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = 200 - 200 \frac{1}{\pi/2} \\ &= 200 - \frac{400}{\pi} \simeq 72.676 \text{ W} \end{aligned}$$

(b) In alternativa, si può calcolare la varianza di $z(t)$ anche come segue:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{z^2(t)\} = E\{[-x(t) + x(t - t_0)]^2\} = E\{x^2(t) + x^2(t - t_0) - 2x(t)x(t - t_0)\} \\ &= E\{x^2(t)\} + E\{x^2(t - t_0)\} - 2E\{x(t)x(t - t_0)\} \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_x^2 - 2R_x(-t_0) = 200 - 2R_x(-t_0) \end{aligned}$$

Si è usato il fatto che $x(t)$ è stazionario e quindi il suo valor quadratico medio non dipende dal tempo, cosa che consente di dire che $E\{x^2(t)\} = E\{x^2(t - t_0)\}$ (qualunque sia t_0), e si è usata la definizione di funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\}.$$

Si ha dunque

$$R_x(\tau) = \int_{-50}^{50} e^{j2\pi f\tau} df = \left. \frac{e^{j2\pi f\tau}}{2j\pi\tau} \right|_{-50}^{50} = \frac{e^{j2\pi 50\tau} - e^{-j2\pi 50\tau}}{2j\pi\tau} = \frac{\sin(100\pi\tau)}{\pi\tau}$$

e

$$R_x(-t_0) = \frac{\sin(-100\pi t_0)}{-\pi t_0} = \frac{\sin(100\pi t_0)}{\pi t_0} = 100 \frac{\sin(100\pi t_0)}{100\pi t_0} = 100 \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{200}{\pi}$$

Riassumendo, la varianza di $z(t)$ è

$$\sigma_z^2 = E\{z^2(t)\} = 200 - 2R_x(-t_0) = 200 - \frac{400}{\pi} = 72.676 \text{ W}$$

Soluzione del problema 3

1. Convienne risolvere il problema nel dominio del tempo discreto, calcolando la convoluzione tra $x[n]$ e $h[n]$:

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \{\delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-3]\} = x[n] + x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-3].$$

Sostituendo l'espressione di $x[n]$ si ottiene

$$y[n] = \frac{1}{2^n}u[n] + \frac{1}{2^{n-1}}u[n-1] - \frac{1}{8} \frac{1}{2^{n-3}}u[n-3]$$

I valori di $y[n]$ per $n \geq 0$ sono riportati nella tabella 4.2. Come si può notare, per $n \geq 3$ i due termini $x[n]$ e $\frac{1}{8}x[n-3]$ sono uguali e si elidono, restando $y[n] = x[n-1]$. In sostanza, l'espressione di $y[n]$ è

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 3/2 & n = 1 \\ 3/4 & n = 2 \\ \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 3 \end{cases}$$

mentre il grafico è in figura 4.37.

2. La soluzione basata sulla trasformata zeta è più complessa:

$$X(z) = 1 + z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-3} = z^{-3} \left[z^3 + z^2 - \frac{1}{8} \right]$$

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{z^2 \left(z - \frac{1}{2} \right)}$$

Volendo usare il metodo dei fratti semplici, si ottiene

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{z^3 \left(z - \frac{1}{2} \right)}$$

e si nota che $Y(z)/z$ ha un polo triplo in $z = 0$, per cui si ha

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{z^3 \left(z - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{b}{z - \frac{1}{2}}$$

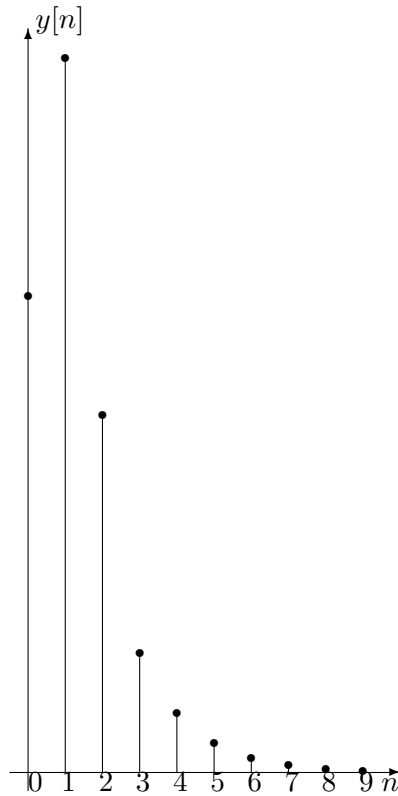


Figura 4.37: Segnale $y[n]$ per il problema 3.

ed occorre trovare i tre coefficienti a_1, a_2, a_3 , nonché il coefficiente b . Per quanto riguarda b , si ha

$$b = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{z^3} = 2$$

Si definisca la funzione

$$W(z) = \frac{Y(z)}{z} z^3 = a_1 z^2 + a_2 z + a_3 + \frac{bz^3}{z - \frac{1}{2}}$$

Il calcolo di $W(z)$ in $z = 0$ dà l'uguaglianza

$$W(0) = a_3 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{(z - \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$$

La derivata prima di $W(z)$ è

$$\frac{d}{dz} W(z) = \frac{d}{dz} \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{(z - \frac{1}{2})} = 2a_1 z + a_2$$

ed il calcolo della derivata in $z = 0$ dà l'uguaglianza

$$\left. \frac{d}{dz} W(z) \right|_{z=0} = a_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{8}}{(z - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

La derivata seconda di $W(z)$ è

$$\frac{d^2}{dz^2}W(z) = \frac{d}{dz} \frac{2z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} = 2a_1$$

ed il calcolo della derivata seconda in $z = 0$ dà l'uguaglianza

$$\frac{d^2}{dz^2}W(z) = 2a_1 = \lim_{z=0} \frac{(6z^2 - z - 1) \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - (2z^3 - \frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{8}) 2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^4} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{16}} = -2$$

Si ottiene dunque $a_2 = -1$.

Si ha dunque la seguente espansione in fratti semplici:

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^3} + \frac{2}{z - \frac{1}{2}}$$

che porta alla seguente espressione di $Y(z)$

$$Y(z) = -1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \frac{2z}{z - \frac{1}{2}}$$

facilmente invertibile:

$$y[n] = -\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Per quanto questa espressione sia diversa da quella fornita dalla prima soluzione del problema, i valori numerici di $y[n]$ sono identici.

3. In realtà non è strettamente necessario utilizzare lo sviluppo in fratti semplici, ma occorre saper manipolare con intelligenza l'espressione di $Y(z)$:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z^3 + z^2 - \frac{1}{8}}{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

In particolare, conviene usare la seguente uguaglianza

$$z^3 - \frac{1}{8} = \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\right)$$

che consente di scrivere

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{z^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\right)}{z^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}{z^2} = z^{-1} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \end{aligned}$$

A questo punto è facile calcolare $y[n]$:

$$y[n] = \delta[n-1] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

La precedente espressione di $y[n]$ è ancora diversa dalle espressioni ottenute nelle prime due soluzioni, ma i valori numerici sono gli stessi.

n	$x[n]$	$x[n-1]$	$\frac{1}{8}x[n-3]$	$y[n]$
0	1	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$
6	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$
7	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$
8	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$
9	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$

Tabella 4.2: Valori di $y[n]$ per $n = 0, \dots, 9$, problema 3.

Capitolo 5

Temi d'esame, anno 2014

5.1 Appello del 20 gennaio 2014

Domande di teoria

1. Sia $x[n] = \cos(2\pi n/8)$. Si scriva la formula che consente di calcolare la DFT di $x[n]$ (senza calcolarla).
2. Si scriva tutto ciò che si conosce sulla stabilità BIBO di sistemi LTI a tempo discreto.
3. Sia $x(t)$ un segnale ad energia finita, reale e pari. Si dica se è vero o no che la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$ è 1) reale, 2) pari (con dimostrazione).

Problema 1

Il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier

$$X(f) = \begin{cases} 0 & f \leq -B \\ A(1 + f/B) & f \in [-B, 0] \\ A(1 - f/B) & f \in [0, B] \\ 0 & f > B \end{cases}$$

(con A e B parametri reali positivi) viene campionato con un campionario ideale a frequenza B . Il segnale campionato $x_s(t)$ viene posto all'ingresso di un filtro ricostruttore passabasso ideale di banda $B/2$. Si scriva l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro ricostruttore e, nel caso in cui $y(t)$ sia diverso da $x(t)$, se ne spieghi il motivo.

Problema 2

Il processo casuale $x(t)$ stazionario ed ergodico, a media nulla, con spettro di potenza (o spettro del valor quadratico medio)

$$G_x(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = e^{-|f|/B} e^{-j20\pi f/B}$$

Si calcoli la varianza del processo casuale $y(t)$ all'uscita del sistema.

Problema 3

Dovendo calcolare la derivata di un segnale $x(t)$, si decide di campionarlo ottenendo i campioni $x[n] = x(n\Delta_t)$, effettuare la derivata numerica

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{\Delta_t}$$

e quindi interpolare $y[n]$ per ottenere $y(t)$ che, in linea di principio, dovrebbe essere simile a $x'(t) = dx(t)/dt$ al tempo $n\Delta_t - \Delta_t/2$.

Per il segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

si calcoli quanto segue:

1. la derivata corretta $x'(t)$ ed i suoi campioni $x'[n] = x'(n\Delta_t - \Delta_t/2)$
2. l'espressione di $y[n]$ per un generico valore di $f_0\Delta_t$
3. $y[n]$ per $f_0\Delta_t = 1/2$
4. $y[n]$ per $f_0\Delta_t = 1/4$
5. l'espressione approssimata di $y[n]$ per $f_0\Delta_t = 1/1000$, usando le tipiche approssimazioni per i segnali sinusoidali.

Si dica in quali condizioni $y[n]$ è effettivamente un'approssimazione di $x'[n]$.

Soluzione del compito

Soluzione del problema 1

Soluzione nel dominio della frequenza:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT); \quad T = 1/B$$

$$X_s(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nB) = AB \quad \forall f$$

$$Y(f) = H_R(f)X_s(f) = ABH_R(f) = \begin{cases} A & |f| < B/2 \\ 0 & |f| > B/2 \end{cases}$$

$$y(t) = AB \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}$$

$Y(f)$ è di tipo rettangolare, mentre $X(f)$ è di tipo triangolare, e quindi $y(t)$ è diverso da $x(t)$. Il motivo della differenza sta nel fatto che il teorema del campionamento non è soddisfatto: la frequenza di campionamento deve essere almeno due volte la banda del segnale $x(t)$, mentre in questo caso la frequenza di campionamento è B , pari alla banda di $x(t)$.

Soluzione nel dominio del tempo: Dalle tavole delle trasformate di Fourier, si ha

$$x(t) = AB \left[\frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt} \right]^2$$

Il segnale campionato è

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

L'ennesimo campione del segnale è

$$x(nT) = AB \left[\frac{\sin(\pi BnT)}{\pi BnT} \right]^2 = AB \left[\frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \right]^2$$

e quindi $x(nT) = 0$ per ogni n diverso da zero, mentre vale AB per $n = 0$. In sostanza risulta

$$x_s(t) = AB\delta(t)$$

in quanto tutti i successivi e precedenti campioni di $x(t)$ sono nulli. L'uscita del filtro ricostruttore è

$$y(t) = x_s(t) * h_R(t) = AB\delta(t) * h_R(t) = ABh_R(t)$$

Immaginando che il filtro ricostruttore abbia $H_R(f) = 1/B$ per $|f| < B/2$ e $H_R(f) = 0$ altrove, si ha

$$y(t) = A \int_{-B/2}^{B/2} e^{j2\pi ft} df = AB \frac{\sin(\pi Bt)}{\pi Bt}$$

Soluzione del problema 2

Il processo casuale $y(t)$ ha spettro di potenza (o del valor quadratico medio)

$$G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2 = \begin{cases} e^{-2|f|/B} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Essendo l'ingresso del sistema a valor medio nullo, l'uscita $y(t)$ ha ancora valor medio nullo e dunque la varianza di $y(t)$ coincide con il suo valor quadratico medio $E\{y^2(t)\}$, che è pari all'integrale di $G_y(f)$. Si ha dunque

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-B}^B e^{-2|f|/B} df = 2 \int_0^B e^{-2f/B} df = 2 \left. \frac{e^{-2f/B}}{-2/B} \right|_0^B = \frac{e^{-2} - 1}{-1/B} = B(1 - e^{-2}) \simeq 0.86B$$

Soluzione del problema 3

Nel seguito si usa la definizione $\alpha = f_0 \Delta_t$. Si ha

1. $x'(t) = -2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 t)$; the samples of $x'(t)$ are

$$x'[n] = x'(n\Delta_t + \Delta_t/2) = -2\pi f_0 \sin(2\pi f_0 n\Delta_t - \pi f_0 \Delta_t) = -2\pi f_0 \sin(2\pi \alpha n - \pi \alpha)$$

Per $\alpha = 1/2$, $x'[n] = -2\pi f_0 \sin(\pi n - \pi/2) = 2\pi f_0 (-1)^n$.

Per $\alpha = 1/4$, $x'[n] = -2\pi f_0 \sin(\pi n/2 - \pi/4) = -\sqrt{2}\pi f_0 [\sin(\pi n/2) - \cos(\pi n/2)] = \sqrt{2}\pi f_0 [\cos(\pi n/2) - \sin(\pi n/2)]$.

2. Per $y[n]$, si ha

$$x[n] = x(n\Delta_t) = \cos(2\pi f_0 n\Delta_t) = \cos(2\pi \alpha n)$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{\Delta_t} [\cos(2\pi \alpha n) - \cos(2\pi \alpha (n-1))] \\ &= \frac{1}{\Delta_t} [\cos(2\pi \alpha n) - \cos(2\pi \alpha n - 2\pi \alpha)] \\ &= \frac{1}{\Delta_t} [\cos(2\pi \alpha n) - \cos(2\pi \alpha n) \cos(2\pi \alpha) - \sin(2\pi \alpha n) \sin(2\pi \alpha)] \\ &= \frac{1}{\Delta_t} [\cos(2\pi \alpha n) [1 - \cos(2\pi \alpha)] - \sin(2\pi \alpha n) \sin(2\pi \alpha)] \end{aligned}$$

3. Per $f_0 \Delta_t = \alpha = 1/2$ (cioè $1/\Delta_t = 2f_0$), abbiamo

$$y[n] = \frac{1}{\Delta_t} [\cos(\pi n) [1 - \cos(\pi)] - \sin(\pi n) \sin(\pi)] = \frac{2}{\Delta_t} \cos(\pi n) = 4f_0 (-1)^n \neq x'[n]$$

Il segno di $y[n]$ è corretto, ma l'ampiezza è sbagliata

4. Per $f_0 \Delta_t = \alpha = 1/4$ (i.e. $1/\Delta_t = 4f_0$), abbiamo

$$y[n] = \frac{1}{\Delta_t} [\cos(\pi n/2) [1 - \cos(\pi/2)] - \sin(\pi n/2) \sin(\pi/2)] = 4f_0 [\cos(\pi n/2) - \sin(\pi n/2)]$$

Il segno di $y[n]$ è corretto, ma l'ampiezza è sbagliata

5. Per $f_0 \Delta_t = \alpha = 10^{-3}$, abbiamo

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{f_0}{10^{-3}} [\cos(2\pi \alpha n) [1 - \cos(2\pi 10^{-3})] - \sin(2\pi \alpha n) \sin(2\pi 10^{-3})] \simeq \frac{f_0}{10^{-3}} [-\sin(2\pi \alpha n) 2\pi 10^{-3}] \\ y[n] &\simeq -2\pi f_0 \sin(2\pi \alpha n) = x'[n] \end{aligned}$$

In pratica, $y[n]$ tende ad essere uguale a $x'[n]$ in ampiezza solo se $\Delta_t \ll 1/f_0$, cioè per una frequenza di campionamento $f_s = 1/\Delta_t$ molto più grande della banda $B_x = f_0$ of $x(t)$ (e molto più grande di $2B_x$, frequenza minima di campionamento di $x(t)$ secondo il teorema del campionamento).

5.2 Appello del 14 febbraio 2014

Domande di teoria

1. Si dimostri che la trasformata di Fourier di un segnale reale ha modulo pari e fase dispari.
2. Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T . Si scrivano tutte le formule necessarie per calcolare il suo spettro di potenza (ogni parametro deve essere calcolabile una volta nota l'espressione matematica di $x(t)$).
3. Sia $x(t)$ un processo casuale. Sotto quali condizioni $x(t)$ è stazionario in senso lato?

Problema 1

Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT)$$

con

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T/8, T/8] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

passa attraverso un filtro con risposta all'impulso

$$h(t) = \begin{cases} t/T & t \in [0, T] \\ 2 - t/T & t \in [T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro.

Problema 2

Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con spettro di potenza $N_0/2$ (ergodico, stazionario in senso stretto, a media nulla) è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h_1(t)$ ottenendo il processo di uscita $y(t)$. Il processo $y(t)$ a sua volta viene posto all'ingresso di un secondo sistema LTI con risposta all'impulso $h_2(t)$, ottenendo il processo $z(t)$. Si calcoli quanto segue:

1. la media, la varianza e lo spettro di potenza di $y(t)$ e di $z(t)$
2. la media congiunta $E\{y(t)z(t)\}$,

assumendo

$$h_1(t) = h_2(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Problema 3

Si calcoli la convoluzione tra i due segnali a tempo-discreto

$$x[n] = \begin{cases} p^n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & n < 0 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$

e

$$h[n] = p^n u[n]$$

Suggerimento: NON si usi la trasformata zeta, ma si calcoli la convoluzione in base alla definizione.

Soluzione

Soluzione del problema 1

La trasformata di Fourier del segnale periodico $x(t)$ è

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T)$$

dove μ_k è il k -esimo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier:

$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} Q(f)|_{f=k/T}$$

dove $Q(f)$ è la trasformata di Fourier di $q(t)$. Si ha (dalle tavole)

$$Q(f) = \frac{\sin(\pi f T/4)}{\pi f}$$

e

$$\mu_k = \frac{1}{T} \frac{\sin(\pi k/4)}{\pi k/T} = \frac{\sin(\pi k/4)}{\pi k}$$

e

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/4)}{\pi k} \delta(f - k/T)$$

Si noti che $\mu_0 = 1/4$.

La trasformata di Fourier del segnale d'uscita $y(t)$ (anch'esso periodico) è

$$Y(f) = H(f)X(f) = H(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k H(f) \delta(f - k/T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k H(k/T) \delta(f - k/T)$$

Occorre dunque calcolare la funzione di trasferimento del filtro. Dalle tavole, si ha

$$H(f) = e^{-j2\pi f T} \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \right]^2$$

e quindi

$$H(k/T) = e^{-j2\pi k} \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\pi k)}{\pi k/T} \right]^2$$

che però risulta pari a 0 per ogni $k \neq 0$, mentre $H(0) = T$. Si ha dunque

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k H(k/T) \delta(f - k/T) = \mu_0 H(0) \delta(f) = \frac{T}{4} \delta(f)$$

Soluzione del problema 2

1. Si può immaginare che sia $y(t) = n(t) * h_1(t)$ e $z(t) = n(t) * h_{eq}(t)$ dove $h_{eq}(t) = h_1(t) * h_2(t)$. Le funzioni di trasferimento dei due sistemi sono

$$H_1(f) = \mathcal{F}\{h_1(t)\} = e^{-j\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

$$H_{eq}(f) = \mathcal{F}\{h_{eq}(t)\} = H_1(f)^2 = e^{-j2\pi fT} \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \right]^2$$

Essendo $n(t)$ a media nulla, anche $y(t)$ e $z(t)$ sono a media nulla. Lo spettro di potenza di $y(t)$ è

$$G_y(f) = G_n(f) |H_1(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \right]^2$$

Lo spettro di potenza di $z(t)$ è

$$G_z(f) = G_n(f) |H_{eq}(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \left[\frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \right]^4$$

La varianza di $y(t)$ può essere calcolata come

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = R_y(0)$$

dove $R_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\} = R_n(\tau) * R_{h_1}(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $y(t)$. Si ha, in particolare

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * R_{h_1}(\tau) = \frac{N_0}{2} R_{h_1}(\tau)$$

e quindi

$$R_y(0) = \frac{N_0}{2} R_{h_1}(0)$$

dove $R_{h_1}(0)$ è la funzione di autocorrelazione di $h_1(t)$ valutata in zero, ed è pari all'energia di $h_1(t)$. L'energia E_{h_1} di $h_1(t)$ è facilmente calcolabile:

$$E_{h_1} = \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(t) dt = \int_0^T dt = T$$

Si ha dunque il risultato finale

$$\sigma_y^2 = \frac{N_0 T}{2}$$

Lo stesso discorso vale per $z(t)$ sostituendo $h_{eq}(t)$ al posto di $h_1(t)$:

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} E_{h_{eq}}$$

Si può calcolare l'energia di $h_{eq}(t)$ nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza (grazie al teorema di Parseval)

$$E_{h_{eq}} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{eq}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{eq}(f)|^2 df$$

ma l'integrale nel dominio della frequenza è troppo difficile. conviene lavorare nel dominio del tempo e, per far ciò, occorre avere l'espressione analitica di $h_{eq}(t)$, antitrasformata di Fourier di $H_{eq}(f)$. Dalle tavole delle trasformate di Fourier si ottiene

$$h_{eq}(t) = \begin{cases} t & t \in [0, T] \\ 2T - t & t \in [T, 2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(d'altra parte la convoluzione tra due segnali rettangolari di ampiezza unitaria e durata T era stata calcolata a lezione e si era visto che il risultato è un segnale triangolare).

Sfruttando la simmetria di $h_{eq}(t)$ rispetto al tempo $t = T$, l'energia $E_{h_{eq}}$ è calcolabile come

$$E_{h_{eq}} = 2 \int_0^T t^2 dt = 2 \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^T = \frac{2T}{3}$$

e la varianza di $z(t)$ è

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0 T}{3}$$

2. La media $E\{y(t)z(t)\}$ può essere calcolata come segue:

$$E\{y(t)z(t)\} = E\left\{y(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)y(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)E\{y(t)y(t-\tau)\}d\tau$$

(si è usata la linearità dell'operatore di media e dell'integrale ed il fatto che $h_2(t)$ è un segnale completamente deterministico, non aleatorio). Nell'integrale compare $E\{y(t)y(t-\tau)\}$, che corrisponde alla funzione di autocorrelazione di $y(t)$ valutata in $-\tau$; sappiamo però che l'autocorrelazione è una funzione pari e quindi $E\{y(t)y(t-\tau)\} = R_y(\tau)$. Riassumendo, si ha

$$E\{y(t)z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)E\{y(t)y(t-\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)R_y(\tau)d\tau$$

Si è già visto che

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{2} R_{h_1}(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{F}\{|H_1(f)|^2\}$$

Utilizzando nuovamente le tavole delle trasformate di Fourier, si ottiene

$$R_y(\tau) = \frac{N_0 T}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \quad \tau \in [-T, T]$$

e $R_y(\tau) = 0$ per $|\tau| > T$ (questa autocorrelazione era anche stata espressamente calcolata a lezione). La media richiesta può essere finalmente calcolata come

$$E\{y(t)z(t)\} = \int_0^T \frac{N_0 T}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = \frac{N_0 T}{2} \frac{T}{2}$$

Soluzione del problema 3

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} p^k p^{n-k} u[n-k] = p^n \sum_{k=0}^{N-1} u[n-k]$$

Il segnale $u[n-k]$ vale 1 se $n-k \geq 0$, cioè se $k \leq n$, altrimenti vale 0; occorre pertanto distinguere i due casi $n < N$ e $n \geq N$:

1. per $n < N$, si ha

$$y[n] = p^n \sum_{k=0}^{N-1} u[n-k] = p^n \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)p^n$$

2. per $n \geq N$, si ha

$$y[n] = p^n \sum_{k=0}^{N-1} u[n-k] = p^n \sum_{k=0}^{N-1} 1 = Np^n$$

5.3 Appello del 4 luglio 2014

Domande di teoria

1. Sia $x[n] = (1/3)^n$ l'ingresso di un sistema LTI tempo discreto con funzione di trasferimento $H(z) = (z-1)/(z-1/4)$. Si scriva l'espressione del segnale d'uscita $y[n]$. Nota: l'ingresso è $x[n] = (1/3)^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l'ingresso NON è $x[n] = (1/3)^n u[n]$
2. Per $x(t) = e^{-|t|/T}$ con $T = 1$ ms, si calcoli quanto segue:
 - (a) $x(t)\delta(t-t_0)$ per $t_0 = 5$ ms
 - (b) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt$ per $t_0 = 5$ ms
 - (c) $\int_{-A}^A x(t)\delta(t-t_0)dt$ per $t_0 = 5$ ms e $A = 1$ s
 - (d) $x(t) * \delta(t-t_0)$ per $t_0 = 5$ ms
3. Si consideri il processo casuale $x(t) = e^{-(t-\tau)/T} u(t-\tau)$ con $T = 1$ s e τ variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$ s. Si dica se esiste un istante di tempo t_0 tale per cui la variabile aleatoria $x(t_0)$ ha media e varianza entrambe nulle.

Problema 1

Occorre campionare il segnale

$$x(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} u(t), \quad T = 1 \text{ ms.}$$

Per semplicità, si immagini di utilizzare un campionatore ideale, che moltiplica l'ingresso per

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Poiché la banda di $x(t)$ è infinita, si filtra inizialmente $x(t)$ con un filtro anti-aliasing passabasso ideale di banda B e guadagno unitario, poi si campiona il segnale $x_a(t)$ all'uscita del filtro anti-aliasing.

1. Si calcoli la banda B (espressa in hertz) tale che $x_a(t)$ abbia un'energia pari al 90% dell'energia di $x(t)$
2. Si scelga la frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s$ (in hertz) di $x_a(t)$, affinché sia possibile ricostruire esattamente $x_a(t)$ dai suoi campioni.
3. Assumendo di usare la frequenza di campionamento f_s ricavata al punto 2), si diano le specifiche del filtro ricostruttore da usare per ricostruire $x_a(t)$ dai suoi campioni.
4. Assumendo di usare la frequenza di campionamento f_s ricavata al punto 2) ed il filtro ricostruttore del punto 3), si scriva l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro ricostruttore.
5. (Facoltativo, per la lode) Si calcoli il prodotto scalare tra $x(t)$ e $y(t)$ e **si commentino i risultati** dopo aver disegnato in uno spazio opportuno i vettori che rappresentano i segnali $x(t)$ e $y(t)$.

Si ricorda che

$$\frac{d}{dx} \text{atan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Problema 2

Un processo casuale $z(t)$ gaussiano e stazionario, a media nulla e con funzione di autocorrelazione

$$R_z(\tau) = \beta \delta(\tau)$$

viene filtrato con un filtro con risposta in frequenza

$$H(f) = -\alpha \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2$$

ottenendo il processo $x(t)$. Valutare media e varianza del processo di uscita $x(t)$.

Problema 3

Il sistema descritto nella figura 5.1 ha come ingresso il segnale

$$x[n] = \cos(2\pi n/N) \quad N = 13$$

Si calcoli il segnale d'uscita $y[n]$.

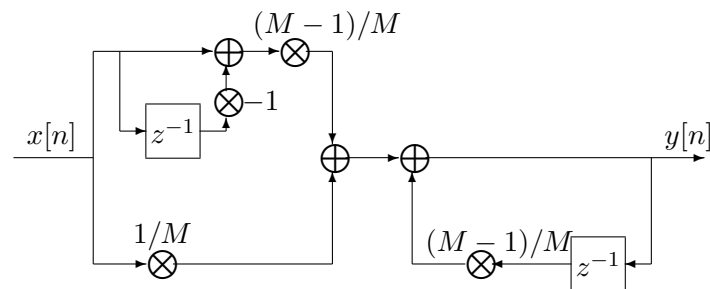


Figura 5.1: Schema a blocchi del sistema da analizzare nel problema 3

Soluzione del compito

Risposte alle domande di teoria

1. Il segnale $x[n] = z^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ è una autofunzione della convoluzione discreta, e ciò per ogni $z \in \mathbb{C}$. Il segnale d'uscita è dunque $y[n] = x[n]H(z)$ (dove $H(z)$ è l'autovalore associato alla autofunzione $x[n]$). Nel caso specifico, $z = a$ e, per esempio, nel caso $a = 1/3$ si ha

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n H(z) \Big|_{z=1/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1/3 - 1}{1/3 - 1/4} = -8 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Si noti che la regione di convergenza per $H(z)$ è $|z| > 1/4$ ed è quindi possibile calcolare, senza problemi, $H(z)$ in $z = 1/3$.

2. Esprimendo t in secondi (in accordo con il sistema internazionale), il segnale $x(t)$ è

$$x(t) = e^{-|t|/10^{-3}}$$

- (a) $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) = e^{-|5 \times 10^{-3}|/10^{-3}}\delta(t - 5 \times 10^{-3}) = e^{-5}\delta(t - 5 \times 10^{-3})$
 - (b) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) = e^{-5}$ in quanto l'integrale della delta di Dirac è pari a 1.
 - (c) $\int_{-A}^A x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-A}^A x(t_0)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) = e^{-5}$ poiché $\delta(t - t_0)$ è diversa da zero in $t_0 = 5 \times 10^{-3}$ s e l'intervallo di integrazione, tra -1 s e 1 s, include completamente la delta di Dirac.
 - (d) $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) = e^{-|t - 5 \times 10^{-3}|/10^{-3}}$.
3. Il processo casuale ha come realizzazioni i segnali $x(t; s) = e^{-(t-s)/T}u(t-s)$ con s compreso tra 0 e T e questi segnali sono sempre diversi da zero per $t > T$, possono essere pari a zero o diversi da zero per $t \in [0, T]$ (dipende dal valore di s), sono sicuramente pari a zero per $t < 0$. Per $t < 0$ abbiamo dunque $x(t) = 0$, con media zero e varianza zero (il processo $x(t)$ per $t < 0$ si riduce ad una variabile pseudo-aleatoria). Nell'intervallo $t > 0$ sicuramente la media è maggiore di zero ($x(t)$ è positivo o nullo) e la varianza è anche positiva (non può essere nulla, perché solo le variabili pseudo-aleatorie hanno varianza nulla).

Soluzione del problema 1

1. La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ottiene come segue (tavole trasformate di Fourier, caso 3):

$$x(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}u(t) = \frac{1}{T}e^{-at}u(t) \quad \text{dove } a = 1/T$$

$$X(f) = \frac{1}{T} \frac{a}{a + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi fT}$$

Il segnale all'uscita del filtro anti-aliasing $x_a(t)$ ha trasformata di Fourier

$$X_a(f) = X(f)p_{2B}(f) = \begin{cases} \frac{1}{1+j2\pi fT} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

dove B è l'incognita, che va calcolata imponendo che $x_a(t)$ abbia energia $\mathcal{E}_{x_a} = \alpha \mathcal{E}_x$.

L'energia di $x_a(t)$ può essere facilmente calcolata usando l'uguaglianza di Parseval:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{x_a} &= \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(f)|^2 df = \int_{-B}^B |X(f)|^2 df = \int_{-B}^B \left| \frac{1}{1 + j2\pi fT} \right|^2 df \\ &= \int_{-B}^B \frac{1}{1 + (2\pi fT)^2} df = \int_{-2\pi BT}^{2\pi BT} \frac{1}{1 + u^2} \frac{1}{2\pi T} du \\ &= \frac{1}{2\pi T} \operatorname{atan}(u) \Big|_{-2\pi BT}^{2\pi BT} = \frac{1}{\pi T} \operatorname{atan}(2\pi BT)\end{aligned}$$

L'energia di $x(t)$ può ancora essere calcolata usando l'uguaglianza di Parseval, come

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + j2\pi fT} \right|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi fT)^2} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} \frac{1}{2\pi T} du \\ &= \frac{1}{2\pi T} \operatorname{atan}(u) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi T} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2T}\end{aligned}$$

(si poteva semplicemente calcolare come $\mathcal{E}_x = \lim_{B \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{x_a}$). Per sicurezza, si ripete il calcolo usando la definizione di energia, nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{T^2} e^{-2t/T} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \left. \frac{e^{-2t/T}}{-2/T} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{T^2} \frac{T}{2} = \frac{1}{2T}\end{aligned}$$

Imponendo la condizione sull'energia di $x_a(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi T} \operatorname{atan}(2\pi BT) &= \alpha \frac{1}{2T} \\ 2\pi BT = \tan(\alpha\pi/2), &\implies B = \frac{1}{2\pi T} \tan(\alpha\pi/2)\end{aligned}$$

Con $\alpha = 0.9$ e $T = 1$ ms, risulta $B \simeq 1005$ Hz.

2. In base al teorema del campionamento, deve essere $f_s > 2B$. In questo caso, la frequenza minima di campionamento è $f_s = 2B = 2010$ Hz ($X_a(f)$ non presenta delta di Dirac a frequenza B ed è sufficiente $f_s = 2B$). Vengono accettate anche risposte $f_s = 2011$ Hz, piuttosto che $f_s = 2010$ Hz, ecc.
3. Il filtro ricostruttore ideale, nel caso di campionamento ottenuto tramite moltiplicazione del segnale $x_a(t)$ con un treno di delta, è un filtro passabasso ideale di banda $f_s/2$. Vanno bene anche queste risposte: filtro passabasso ideale di banda B (se si è scelto $f_s > 2B$), filtro passabasso reale con banda passante (funzione di trasferimento costante) B e stop-band tra B e $f_s/2$, ecc. Il guadagno del filtro ricostruttore è a scelta, ma occorre essere coerenti nel momento in cui si va a scrivere l'espressione del segnale all'uscita del filtro ricostruttore (punto 4). Senza perdere in genericità, possiamo porre la funzione di trasferimento $G(f)$ del filtro ricostruttore pari a

$$G(f) = \begin{cases} h & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

(il risultato al punto 4 non dipende dalla funzione di trasferimento per $|f| > B$, purché sia $G(f) = 0$ per $f > f_2/2$).

4. All'uscita del campionatore ideale abbiamo il segnale

$$x_s(t) = x_a(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

con trasformata di Fourier

$$X_s(f) = X_a(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T_s) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kf_s).$$

All'uscita del filtro ricostruttore abbiamo il segnale $y(t)$ con trasformata di Fourier

$$Y(f) = X_s(f)G(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - kf_s)G(f) = f_s X_a(f)G(f) = hf_s X_a(f)$$

Il segnale $y(t)$ è dunque

$$y(t) = hf_s x_a(t)$$

Se si sceglie $h = T_s = 1/f_s$, si ottiene $y(t) = x_a(t)$.

Soluzione del problema 2

Il sistema ha ingresso $z(t)$ e uscita $x(t)$. L'ingresso è stazionario e l'uscita è dunque un processo stazionario. La media di $x(t)$ si ottiene dalla formula

$$\mu_x = E\{x(t)\} = E\{z(t)\}H(0)$$

dove $E\{z(t)\}$ è la media di $z(t)$, ed è uguale a zero. Pertanto $\mu_x = 0$ e varianza e valor quadratico medio di $x(t)$ coincidono.

La funzione di autocorrelazione dell'uscita $x(t)$ è

$$R_x(\tau) = R_z(\tau) * R_h(\tau) = \beta \delta(\tau) * R_h(\tau) = \beta R_h(\tau)$$

dove $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso del sistema $h(t)$:

$$R_h(\tau) = \int h(t)h(t+\tau)dt = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\}.$$

La varianza di $x(t)$ è pari alla funzione di autocorrelazione valutata in $\tau = 0$:

$$\sigma_x^2 = E\{x^2(t)\} = R_x(0) = \beta R_h(0) = \beta \int h^2(t)dt = \beta \int |H(f)|^2 df = \beta \mathcal{E}_h$$

dove \mathcal{E}_h è l'energia della risposta all'impulso del sistema.

Convien calcolare l'energia di $h(t)$ nel dominio del tempo. Si ha

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-\alpha}{T}T \left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2\right\}$$

Dalle tavole delle trasformate di Fourier,

$$h(t) = \frac{-\alpha}{T} \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

In particolare, $h(t)$ ha la forma di un triangolo che ha base $2T$ e altezza $-\alpha/T$. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h &= \int_{-T}^T \left[\frac{-\alpha}{T} \left(1 - \frac{|t|}{T} \right) \right]^2 dt \\ &= \frac{2\alpha^2}{T^2} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2 dt \\ &= \frac{2\alpha^2}{T^2} T \int_0^1 u^2 du = \frac{2\alpha^2}{T} \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2\alpha^2}{3T}\end{aligned}$$

La varianza di $x(t)$ risulta pertanto essere

$$\sigma_x^2 = \beta \frac{2\alpha^2}{3T}$$

Soluzione del problema 3

Convien definire il segnale $w[n]$ come indicato nella figura 5.2. Lavorando nel dominio z , si ottiene

$$\begin{aligned}W(z) &= [X(z) - z^{-1}X(z)] \frac{M-1}{M} + X(z) \frac{1}{M} = X(z) \left[\frac{M-1}{M} - \frac{M-1}{M} z^{-1} + \frac{1}{M} \right] = X(z) \left[1 - \frac{M-1}{M} z^{-1} \right] \\ Y(z) &= W(z) + z^{-1}Y(z) \frac{M-1}{M}\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$Y(z) \left[1 - \frac{M-1}{M} z^{-1} \right] = W(z), \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{W(z)}{\left[1 - \frac{M-1}{M} z^{-1} \right]}$$

Sostituendo l'espressione di $W(z)$ ottenuta analizzando la prima equazione, si ottiene

$$Y(z) = \frac{X(z) \left[1 - \frac{M-1}{M} z^{-1} \right]}{\left[1 - \frac{M-1}{M} z^{-1} \right]} = X(z)$$

La funzione di trasferimento richiesta è dunque

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1$$

e la risposta all'impulso è

$$h[n] = \delta[n]$$

Per qualsiasi ingresso $x[n]$, l'uscita del sistema è

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \delta[n] = x[n]$$

indipendentemente dal fatto che $x[n]$ sia un segnale che ammette trasformata zeta $X(z)$ oppure, come nel presente caso, un segnale periodico, che non ammette trasformata zeta.

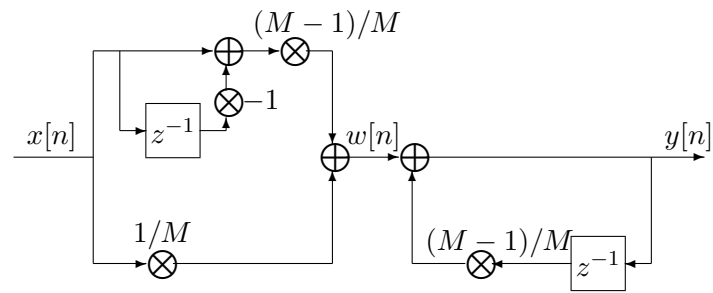


Figura 5.2: Definizione del segnale $w[n]$, problema 3.

5.4 Appello del 22 luglio 2014

Domande di teoria

1. Si consideri il segnale periodico

$$x[n] = \text{sign} \left[\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{2\pi K n}{N} \right) \right]$$

con $K = 2$ e $N = 7$. 1) Si scriva l'espressione della DFT di $x[n]$. 2) Si scriva la formula per ottenere $x[n]$ a partire dalla sua DFT.

2. Si consideri il processo casuale

$$x(t) = q(t - 2\tau)$$

con $q(t)$ segnale determinato (noto, non aleatorio) e τ variabile aleatoria con densità di probabilità $f_\tau(u)$. Si scriva l'integrale che consente di calcolare la media/valor quadratico medio di $x(t)$.

3. Si considerino i due segnali $x(t)$ e $h(t)$ con le seguenti caratteristiche:

(a) $x(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ per $t \notin [0, T_x]$, $x(t) > 0$ per $t \in [0, T_x]$

(b) $h(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) = 0$ per $t \notin [0, T_h]$, $h(t) > 0$ per $t \in [0, T_h]$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per $y(t) = x(t) * h(t)$?

(a) $y(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

(b) $y(t) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

(c) $y(t)$ assume sia valori positivi sia valori negativi sia il valore nullo

(d) $y(t)$ è diverso da zero $\forall t \in \mathbb{R}$

(e) $y(t) = 0, t \notin [0, T_x]$

(f) $y(t) = 0, t \notin [0, T_h]$

(g) $y(t) = 0, t \notin [0, T_x + T_h]$

(h) $y(t) = 0, t \notin [0, T_x - T_h]$

(i) $y(t) = 0, t \notin [-T_h, T_x]$

(j) $y(t) = 0, t \notin [-T_x, T_h]$

(k) $y(t) = 0, t \notin [0, T_x + T_h - 1]$

(l) $y(t) = 0, t \notin [-1, T_x + T_h]$

Si consiglia di scrivere a fianco di ciascuna delle affermazioni la sigla "V" se vera, e la sigla "F" se falsa e poi elencare le affermazioni vere (es. "a,f,l")

Problema 1

Si considerino i due segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ definiti come

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t - kT), \quad q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T/2[\\ -1 & t \in [T/2, T[\\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

$$x_2(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta), \quad f_0 = \frac{3}{T}, A = 2, \theta = \pi/6$$

Il segnale $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ viene filtrato con un filtro passabanda ideale con frequenza centrale f_0 e banda $1/T$ (guadagno unitario).

1. Si dimostri che il segnale $y(t)$ all'uscita del filtro passabanda può essere scritto come

$$y(t) = M \cos(2\pi f_1 t + \psi)$$

e si specifichino i valori di M , f_1 e ψ .

2. Si calcoli la potenza media \mathcal{P}_y di $y(t)$

Problema 2

Un processo $z(t)$ gaussiano bianco ergodico e stazionario con spettro di potenza $G_z(f) = N0/2$ viene filtrato con un filtro con funzione di trasferimento, in modulo quadro,

$$|H(f)|^2 = p_{2B}(f) \text{tri}(f/B), \quad B = 50 \text{ Hz}$$

ottenendo in uscita $x(t)$.

1. Si calcolino la media e la varianza di $x(t)$,
2. Si calcoli la funzione di autocorrelazione di $x(t)$,
3. Si trovi un istante t_1 tali per cui $x(t_0)$ e $x(t_1)$ sono statisticamente indipendenti, essendo $t_0 = 1$ s.
4. (Per la lode) Si consideri un nuovo processo casuale gaussiano e stazionario $y(t)$ a media nulla con campioni $y(t_1)$ e $y(t_2)$ che hanno varianza unitaria e coefficiente di correlazione 0.5. Si trovino i 4 coefficienti a_{nk} con $n = 1, 2$ e $k = 1, 2$ tali per cui le variabili aleatorie z_1 e z_2 definite come

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11} y(t_1) + a_{12} y(t_2) \\ z_2 &= a_{21} y(t_1) + a_{22} y(t_2) \end{aligned}$$

risultano statisticamente indipendenti.

Problema 3

Si definisca il segnale tempo discreto $p_N[n]$ come

$$p_N[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli l'espressione del segnale $y[n]$ all'uscita del sistema a tempo discreto con risposta all'impulso

$$h[n] = a^n p_N[n]$$

quando l'ingresso è

$$x[n] = a^n p_N[n],$$

essendo $a = 4$ e $N = 12$. Il sistema è stabile in senso BIBO? si motivi la risposta.

Soluzione del compito

Domande di teoria

1. Il segnale ha periodo $N = 7$. La DFT è

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j2\pi kn/7}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

La IDFT è

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^6 X(k)e^{j2\pi kn/7}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. Si applica il teorema fondamentale della media.

$$\mu_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t-2u)f_{\tau}(u)du$$

$$E\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} q^2(t-2u)f_{\tau}(u)du$$

3. La convoluzione di $x(t)$ e $h(t)$ ha espressione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Poiché $x(t)$ è positivo o nullo e $h(t)$ è positivo o nullo, allora anche $y(t)$ è positivo o nullo. L'integrale di convoluzione è nullo per $t < 0$: $x(t-\tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [t-T_x, t]$, intervallo in $t < 0$, mentre $h(\tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [0, T_h]$, intervallo in $t \geq 0$, e quindi il prodotto $x(t-\tau)h(\tau)$ è sempre nullo, per ogni τ , e $y(t) = 0$. L'integrale è nuovamente nullo per $t > T_x + T_h$: $x(t-\tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [t-T_x, t]$, intervallo in $t > T_h$, mentre $h(\tau)$ è diverso da zero per $\tau \in [0, T_h]$, e quindi il prodotto $x(t-\tau)h(\tau)$ è sempre nullo, per ogni τ e $y(t) = 0$. Nell'intervallo $t \in [0, T_x + T_h]$, $y(t)$ è sicuramente positivo (l'integrale effettivo può avere estremi inferiore e superiore rispettivamente più grande di 0 e più piccolo di T_h , ma la funzione integranda è positiva e l'integrale è positivo).

Problema 1

È conveniente lavorare nel dominio della frequenza. Si ha

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

$$x_1(t) = \frac{A}{2j} \left[e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} - e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)} \right]$$

$$X_1(f) = \frac{A}{2j} \left[\delta(f - f_0)e^{j\theta} - \delta(f + f_0)e^{-j\theta} \right]$$

Il segnale periodico $x_2(t)$ è scrivibile come

$$x_2(t) = q(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

e quindi

$$X_2(f) = Q(f) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{k}{T}\right) \delta(f - k/T)$$

Dunque $X_2(f)$ ha righe (cioè delta di Dirac) alle frequenze multiple di k/T , e ha una riga a frequenza $f_0 = K/T$ con $K = 3$.

Il filtro passabanda ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_0 - 1/(2T) < f < f_0 + 1/(2T) \\ 1 & -f_0 - 1/(2T) < f < -f_0 + 1/(2T) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La trasformata di Fourier del segnale all'uscita del filtro passabanda è

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)H(f) = X_1(f)H(f) + X_2(f)H(f) \\ &= X_1(f) + \frac{1}{T}Q\left(\frac{K}{T}\right)\delta(f - f_0) + \frac{1}{T}Q\left(\frac{-K}{T}\right)\delta(f + f_0) \\ &= \left[\frac{A}{2j}e^{j\theta} + \frac{1}{T}Q\left(\frac{K}{T}\right)\right]\delta(f - f_0) + \left[\frac{-A}{2j}e^{-j\theta} + \frac{1}{T}Q\left(\frac{-K}{T}\right)\right]\delta(f + f_0) \\ &= \alpha\delta(f - f_0) + \alpha^*\delta(f + f_0) \\ &= |\alpha| \left[\delta(f - f_0)e^{j\psi} + \delta(f + f_0)e^{-j\psi} \right] \end{aligned}$$

e quindi $y(t)$ è scrivibile come

$$y(t) = 2|\alpha| \cos(2\pi f_0 t + \psi) = M \cos(2\pi f_1 t + \psi)$$

dove $f_1 = f_0$, ψ è la fase del numero complesso α , mentre $M = 2|\alpha|$, con

$$\alpha = \frac{A}{2j}e^{j\theta} + \frac{1}{T}Q\left(\frac{K}{T}\right)$$

Ci sono vari modi di calcolare $Q(K/T)$. Di seguito ne vengono forniti due.

Si calcola solo $Q(K/T)$ in base alla definizione:

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{K}{T}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-j2\pi Kt/T} dt \\ &= \int_0^{T/2} e^{-j2\pi Kt/T} dt - \int_{T/2}^T e^{-j2\pi Kt/T} dt = \frac{e^{-j2\pi Kt/T}}{-j2\pi K/T} \Bigg|_{t=0}^{T/2} - \frac{e^{-j2\pi Kt/T}}{-j2\pi K/T} \Bigg|_{t=T/2}^T \\ &= \frac{e^{-j\pi K} - 1}{-j2\pi K/T} - \frac{e^{-2j\pi K} - e^{-j\pi K}}{-j2\pi K/T} = \frac{e^{-j\pi K} - 1}{-j2\pi K/T} - \frac{1 - e^{-j\pi K}}{-j2\pi K/T} \\ &= 2 \frac{e^{-j\pi K} - 1}{-j2\pi K/T} = \frac{(-1)^K - 1}{-j\pi K/T} \end{aligned}$$

Poichè $K = 3$, si ha

$$Q\left(\frac{3}{T}\right) = \frac{2T}{j3\pi}$$

Si calcola la trasformata di Fourier $Q(f)$ di $q(t)$ per ogni f e poi la si calcola alla specifica frequenza K/T .

$$q(t) = p_{T/2}(t - T/4) - p_{T/2}(t - 3T/4)$$

$$P(f) = \mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\} = \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f}$$

$$Q(f) = P(f) \left[e^{-j2\pi f T/4} - e^{-j2\pi f 3T/4} \right] = P(f) e^{-j2\pi f T/4} \left[1 - e^{-j\pi f T} \right]$$

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{K}{T}\right) &= P\left(\frac{K}{T}\right) e^{-j2\pi K/4} [1 - e^{-j\pi K}] \\ &= \frac{\sin(\pi K/2)}{\pi K/T} e^{-j\pi K/2} [1 - (-1)^K] \end{aligned}$$

Per $K = 3$ si ottiene

$$Q\left(\frac{3}{T}\right) = \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/T} (-j)2 = \frac{-j2T}{3\pi}$$

Si ha dunque

$$\alpha = \frac{A}{2j} e^{j\theta} + \frac{1}{T} \frac{-j2T}{3\pi} = -j \frac{A}{2} e^{j\theta} - j \frac{2}{3\pi} = -j \frac{A}{2} [\cos(\theta) + j \sin(\theta)] - j \frac{2}{3\pi}$$

e

$$|\alpha|^2 = \frac{A^2}{4} \sin^2(\theta) + \left[\frac{A}{2} \cos(\theta) + \frac{2}{3\pi} \right]^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{4}{9\pi^2} + A \frac{2}{3\pi} \cos(\theta)$$

$$\psi = \text{atan} \left(\frac{\frac{A}{2} \sin(\theta)}{-\frac{A}{2} \cos(\theta) - \frac{2}{3\pi}} \right)$$

Con $A = 2$ e $\theta = \pi/6$, si ha

$$\alpha = -j e^{j\pi/6} + j \frac{2}{3\pi} = 0.5 - 0.65382 j$$

$$|\alpha|^2 = 0.6775, \psi = \text{atan} \frac{-0.65382}{0.5} = -0.9179 \text{ rad}$$

$$y(t) = 2|\alpha| \cos(2\pi f_0 t + \psi) = 1.6462 \cos(2\pi f_0 t - 0.9179)$$

La potenza media \mathcal{P}_y di $y(t)$ è

$$\mathcal{P}_y = \frac{M^2}{2} = 2|\alpha|^2 = 1.3550 \text{ watt}$$

Problema 2

Il processo di ingresso $z(t)$ ha media nulla e quindi il processo d'uscita $x(t)$ ha media nulla.

Lo spettro del valor quadratico medio (o spettro di potenza) del processo d'uscita $x(t)$ è

$$G_x(f) = |H(f)|^2 G_z(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

La varianza di $x(t)$ coincide con il valor quadratico medio (o potenza) e può essere calcolata come

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

L'integrale di $|H(f)|^2$ è pari all'area di un triangolo di base $2B$ e altezza 1. Si ha dunque

$$\sigma_x^2 = \frac{N_0}{2} \frac{2B}{2} = \frac{N_0 B}{2}$$

La funzione di autocorrelazione di $x(t)$ è l'antitrasformata di $G_x(f)$, cioè

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{B} \left[\frac{\sin(\pi\tau B)}{\pi\tau} \right]^2 = \frac{N_0 B}{2} \left[\frac{\sin(\pi\tau B)}{\pi\tau B} \right]^2$$

Si verifica che $\sigma_x^2 = R_x(0)$, cosa che consente di validare, almeno parzialmente, i risultati ottenuti.

Perché i due campioni $x(t_0)$ e $x(t_1)$, gaussiani, siano statisticamente indipendenti, è sufficiente che siano scorrelati, cioè

$$\rho_{t_0, t_1} = \frac{E\{x(t_0)x(t_1)\}}{\sigma_x^2} = 0$$

In sostanza, è necessario scegliere t_0 e t_1 tali per cui

$$R_x(t_0 - t_1) = E\{x(t)x(t - t_0 + t_1)\} = E\{x(t_0)x(t_1)\} = 0$$

La funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ è nulla per $\tau = K/B$ con K intero qualsiasi diverso da zero. Ad esempio, prendendo $K = 1$, si ha $R_x(1/B) = 0$; si può dunque scegliere $t_0 = 1/B$ e $t_1 = 0$ e si ottengono due campioni $x(1/B)$ e $x(0)$ che sono statisticamente indipendenti. Di fatto sono statisticamente indipendenti tutti i campioni $x(t_0)$ e $x(t_1)$ con qualsiasi valore di t_0 e t_1 vincolato, con $t_1 = t_0 + K/B$, K intero (positivo o negativo) non nullo. Nel caso in esame, essendo $t_0 = 1$ s, una possibile soluzione è usare $t_1 = 1 + 1/50 = 1.02$ s.

Problema 3

La convoluzione è data da

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{n-k}p_N[n-k]a^k p_N[k] \\ &= a^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_N[n-k]p_N[k] = a^n (p_N[n] * p_N[n]) \end{aligned}$$

In sostanza l'uscita al tempo n è pari al coefficiente a^n moltiplicato per il risultato della convoluzione al tempo n tra due segnali porta a tempo discreto. Di seguito vengono forniti i passaggi per il calcolo della convoluzione tra i due segnali porta:

$$w[n] = p_N[n] * p_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_N[n-k]p_N[k] = \sum_{k=0}^{N-1} p_N[n-k]$$

Il segnale $p_N[n-k]$ (funzione di k , n parametro) è pari a 1 nell'intervallo $0 \leq n-k \leq N-1$, cioè per $k \in [n-N+1, n]$. Se $n < 0$, si ha $w[n] = 0$. Se $n \in [0, N-1]$, si ha

$$w[n] = \sum_{k=0}^{N-1} p_N[n-k] = \sum_{k=0}^n 1 = n+1.$$

se $n \in [N - 1, 2N - 1]$, si ha invece

$$w[n] = \sum_{k=n-N+1}^{N-1} 1 = (N - 1) - (n - N + 1) + 1 = 2(N - 1) - n + 1$$

(verifica: per $n = N - 1$ i due valori di $w[n]$ devono coincidere ed in effetti coincidono e valgono entrambi N). Per $n > 2N - 1$, $w[n] = 0$. In sostanza $w[n]$ è un segnale triangolare a tempo discreto. Il segnale all'uscita del filtro è dunque

$$y[n] = a^n w[n].$$

Il filtro è di tipo FIR ed è BIBO stabile (lo sono tutti i filtri di tipo FIR). La verifica formale della stabilità è la seguente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n p_N[n] = \sum_0^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

e l'uguaglianza è corretta per ogni a (positivo o negativo, maggiore o minore di zero). Poiché $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ il sistema è BIBO stabile. Per $a = 4$ e $N = 12$, si ha, in particolare

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \frac{1 - 4^{12}}{1 - 4} = 5\,592\,405 < \infty$$

5.5 Appello del 1 settembre 2014

Domande di teoria

1. Si disegnino i grafici delle funzioni di trasferimento dei seguenti filtri ideali (tutti a guadagno unitario):
 - (a) passabasso di banda 100 Hz
 - (b) passabanda di banda 100 Hz e frequenza centrale 500 Hz
 - (c) passa-alto con frequenza di taglio 100 Hz
2. Si dimostri che $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ è una autofunzione della convoluzione a tempo continuo, si trovi il corrispondente autovalore e si dica a che cosa corrisponde (cioè si scriva il termine tecnico con cui l'autovalore in questione viene normalmente indicato dagli ingegneri).
3. Si scriva l'espressione generica del segnale $y(t)$ all'uscita di un filtro passabanda ideale centrato a frequenza $f_1 = 10/T$ e con banda $1/T$, quando l'ingresso $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T . In particolare, si scrivano le formule necessarie per calcolare **tutti** i parametri di $y(t)$ a partire da $x(t)$.
4. Si scrivano tutte le formule disponibili per il calcolo della funzione di autocorrelazione di $x(t)$ in tutti i seguenti casi:
 - (a) $x(t)$ segnale determinato ad energia finita
 - (b) $x(t)$ segnale periodico
 - (c) $x(t)$ processo casuale WSS

Problema 1

Il segnale elettrico generato da un ecografo è scrivibile come

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) p_T(t - T/2)$$

con $f_0 = 4/T = 8$ MHz. Il segnale elettrico viene convertito da un opportuno trasduttore (la sonda, usata come trasmettitore) in un'onda acustica che viene riflessa dalla superficie dell'organo che si desidera osservare; l'onda acustica riflessa viene captata (sempre dalla sonda, ma in modalità ricevitore) e viene riconvertita in un segnale elettrico che, per semplicità, può essere scritto come

$$y(t) = ax(t - t_0)$$

Il coefficiente $0 < a < 1$ viene usato per modellare l'attenuazione dell'onda acustica nel tessuto e t_0 per modellare il tempo necessario all'onda per percorrere la doppia distanza d da sonda a organo e da organo a sonda. Nell'espressione di $y(t)$ si sono trascurati alcuni effetti che sono realmente presenti nel sistema, ma renderebbero l'analisi molto più complicata.

1. Si calcolino le energie $\mathcal{E}(x)$ ed $\mathcal{E}(y)$ dei segnali $x(t)$ e $y(t)$.
2. Si calcoli il prodotto scalare s_1 tra $x(t)$ e $y(t)$, nel caso in cui sia $t_0 = T/4$
3. Si calcoli il prodotto scalare s_2 tra $z(t) = x(t - \tau)$ e $y(t)$, nel caso in cui sia $\tau = t_0 = T/4$

4. Si dica se s_1 è maggiore, uguale, o minore di s_2 .
5. La quantità

$$\eta = 10 \log_{10} \left[\frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{E}(y)} \right]$$

risulta proporzionale alla distanza d , cioè si ha $\eta = bd$ con $b = 1.5$ dB/cm nel caso di tessuti molli. Si calcoli il coefficiente a nel caso in cui l'organo sotto osservazione abbia $d = 6$ cm

6. La velocità di propagazione dell'onda acustica nei tessuti molli è circa 1500 m/s. Si calcoli t_0 nel caso in cui sia $d = 6$ cm. Si calcolino nuovamente i prodotti scalari s_1 e s_2 con il valore di t_0 appena trovato.

NOTA BENE: le risposte ai punti 5 e 6 sono facoltative; chi risponde correttamente avrà 2 punti in più, chi non risponde potrà comunque ottenere 30 se risolve correttamente tutto il resto del compito.

Problema 2

Si definisca

$$\text{tri} \left(\frac{t}{T} \right) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{per } |t| \leq T \\ 0 & \text{per } |t| \geq T \end{cases}$$

Il processo casuale SSS a media nulla $x(t)$ ha funzione di autocorrelazione

$$R_x(\tau) = 2 \text{tri} \left(\frac{\tau}{T} \right) + 3 \text{tri} \left(\frac{2\tau}{T} \right)$$

Si consideri ora il processo casuale

$$y(t) = x(t) - x(t - T) + x(t - 2T)$$

1. Si calcolino media e varianza di $y(t)$.
2. Si discuta la stazionarietà di $y(t)$.
3. È vero che $x(t)$ è un processo bianco? si motivi la risposta

Problema 3

Si consideri il sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{3(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}{z^2 - M\sqrt{3}z + M^2}$$

1. Per quali valori di M il sistema è stabile in senso BIBO?
2. Si calcoli la risposta all'impulso del sistema nel caso di $M = 1/\sqrt{2}$.
3. (Per la lode) Nel caso di sistema stabile, si può scegliere M positivo o negativo. Che tipo di filtro (passa-basso o passa-alto) si ottiene con M positivo? e con M negativo? Si disegni qualitativamente la risposta in **frequenza** del sistema nel caso M positivo, supponendo che al ritardatore di un passo del sistema tempo-discreto sia associato un ritardo fisico di 1 ms.

Soluzione del compito

Domande di teoria

1. Si vedano le figure 5.3–5.5.

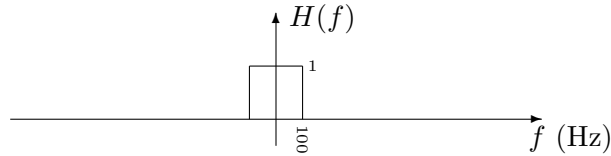


Figura 5.3: Funzione di trasferimento di un filtro passabasso ideale di banda 100 Hz

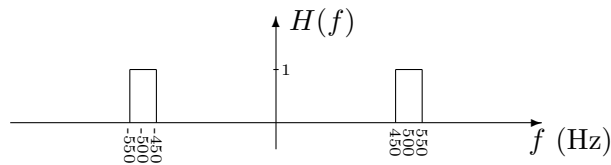


Figura 5.4: Funzione di trasferimento di un filtro passabanda ideale di banda 100 Hz

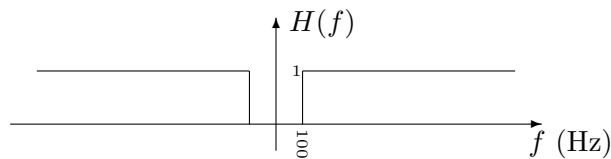


Figura 5.5: Funzione di trasferimento di un filtro passa-alto ideale con frequenza di taglio 100 Hz

2. Il segnale $x(t)$ è autofunzione della convoluzione a tempo continuo se $x(t) * h(t) = \lambda x(t)$, essendo λ l'autovalore (λ deve essere una costante, non una funzione del tempo). Con il segnale $x(t)$ assegnato, si ha

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 \tau}h(\tau)d\tau = x(t)\lambda$$

e $x(t)$ è dunque effettivamente autofunzione della convoluzione; l'autovalore è

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 \tau}h(\tau)d\tau$$

che è la funzione di trasferimento (o risposta in frequenza) del sistema alla frequenza f_0 .

3. Essendo $x(t)$ periodico di periodo T , la sua trasformata di Fourier $X(f)$ è composta da delta di Dirac (o righe) alle frequenze k/T , $k \in \mathbb{Z}$:

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k \delta(f - k/T)$$

Il filtro passabanda lascia passare un'unica coppia di delta, alle frequenze $\pm 10/T$, ed il segnale all'uscita del filtro passabanda ha dunque trasformata di Fourier

$$Y(f) = \mu_{10}\delta(f - 10/T) + \mu_{-10}\delta(f + 10/T)$$

dove

$$\mu_{10} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-j2\pi 10t/T} dt, \quad \mu_{-10} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{j2\pi 10t/T} dt$$

Il segnale $y(t)$ ha espressione

$$y(t) = \mu_{10}e^{j2\pi 10t/T} + \mu_{-10}e^{-j2\pi 10t/T}$$

Se $x(t)$ è un segnale reale, allora $\mu_{-10} = \mu_{10}^*$. In questo caso, conviene scrivere μ_{10} in modulo e fase, $\mu_{10} = Ae^{j\psi}$, cosa che consente di semplificare l'espressione di $y(t)$:

$$y(t) = 2A \cos(2\pi 10t/T + \psi)$$

In sostanza, l'uscita del filtro è un segnale sinusoidale a frequenza $10/T$ e ampiezza e fase che dipendono da $x(t)$.

4. (a) Per un segnale $x(t)$ a energia finita si ha

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt, \quad R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

dove $X(f)$ è la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

e $|X(f)|^2$ è lo spettro di energia di $x(t)$.

- (b) Per un segnale $x(t)$ periodico di periodo T si ha

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)^2\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(t - k/T)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 \delta(t - k/T) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 e^{j2\pi k\tau/T} \end{aligned}$$

dove μ_k è il k -esimo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier

$$\mu_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-j2\pi kt/T} dt$$

e $G_x(f)$ è lo spettro di potenza di $x(t)$.

(c) Per un processo casuale WSS,

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)^2\}$$

dove $S_x(f)$ è lo spettro di potenza di $x(t)$.

Problema 1

Il segnale $x(t)$ è nullo al di fuori dell'intervallo $[0, T]$, mentre ha andamento sinusoidale per $t \in [0, T]$. In particolare ci sono esattamente 4 periodi del segnale sinusoidale per $t \in [0, T]$: $T = 4T'$, essendo $T' = 1/f_0$. Il segnale $y(t)$ è una versione scalata e ritardata di $x(t)$.

1. L'energia di $x(t)$ è dunque:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_0^T A^2 \sin^2(2\pi f_0 t)dt \\ &= A^2 \int_0^T \frac{1 - \cos(2\pi f_0 t)}{2} dt \\ &= \frac{A^2}{2} \int_0^T dt - \frac{A^2}{2} \int_0^T \cos(2\pi f_0 t)dt \\ &= \frac{A^2 T}{2} - \frac{A^2}{2} \left. \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} \right|_0^T \\ &= \frac{A^2 T}{2} - \frac{A^2 \sin(2\pi f_0 T)}{2 \cdot 2\pi f_0} \\ &= \frac{A^2 T}{2}\end{aligned}$$

Si sono riportati tutti i passaggi, ma il risultato poteva essere ottenuto molto più brevemente ricordando che (a) la potenza del segnale periodico $A \sin(2\pi f_0 t)$ è $P' = A^2/2$, (b) l'energia della sinusoide in un suo periodo, di durata T' , è $P'T'$, (c) l'energia della sinusoide in 4 periodi è $P'4T' = P'T = A^2 T/2$.

L'energia di $y(t)$ è:

$$\mathcal{E}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t-t_0)dt = a^2 \mathcal{E}(x) = \frac{a^2 A^2 T}{2}$$

2. Essendo $t_0 = T/4$, il prodotto scalare tra $x(t)$ e $y(t)$ è

$$\begin{aligned}s_1 &= \langle x(t), y(t) \rangle = \langle x(t), ax(t-T/4) \rangle = a \langle x(t), x(t-T/4) \rangle \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi f_0 t) p_T(t-T/2) A \sin(2\pi f_0(t-T/4)) p_T(t-3T/4) dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi f_0 t) p_T(t-T/2) A \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 T/4) p_T(t-3T/4) dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi f_0 t) p_T(t-T/2) A \sin(2\pi f_0 t - 2\pi) p_T(t-3T/4) dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \sin^2(2\pi f_0 t) p_T(t-T/2) p_T(t-3T/4) dt \\ &= a \int_{T/4}^T A^2 \sin^2(2\pi f_0 t) dt \\ &= \frac{a A^2}{2} \frac{3T}{4}\end{aligned}$$

Si noti che il prodotto $p_T(t-T/2)p_T(t-3T/4)$ è diverso da zero (e pari a 1) nell'intersezione dei due intervalli $[0, T]$ e $[T/4, 5T/4]$, cioè nell'intervallo $[T/4, T]$. L'integrale di $\sin^2(2\pi f_0 t)$ in $[T/4, T]$ si svolge come nel punto 1 (in questo caso l'intervallo contiene esattamente 3 periodi della sinusoidale).

3. Il prodotto scalare tra $x(t-T/4)$ e $y(t)$ è

$$\begin{aligned}s_2 &= \langle x(t-T/4), y(t) \rangle = \langle x(t-T/4), ax(t-T/4) \rangle = a \langle x(t-T/4), x(t-T/4) \rangle \\ &= a\mathcal{E}(x) = \frac{aA^2T}{2}\end{aligned}$$

4. È evidente che si ha $s_2 > s_1$.

5. Essendo $b = 1.5$ dB/cm ed essendo $d = 6$ cm, si ha $\eta = bd = 1.5 \times 6 = 9$ dB, cioè si ha

$$\eta = 9 = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{E}(y)} = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{E}(x)}{a^2 \mathcal{E}(x)} = 10 \log_{10} \frac{1}{a^2} = -20 \log_{10} a$$

Si ha allora

$$a = 10^{-9/20} = 0.3548$$

6. Il ritardo t_0 vale

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{6 \times 10^{-2} \text{ m}}{1500 \text{ m/s}} = 4 \times 10^{-5} \text{ s} = 40 \text{ } \mu\text{s}$$

Poiché $t_0 \gg T$ ($T = 4/f_0 = 0.5 \text{ } \mu\text{s}$), il prodotto scalare s_1 tra $x(t)$ e $y(t)$ è nullo, mentre il prodotto scalare s_2 tra $x(t-t_0)$ e $y(t)$ continua a valere $\frac{aA^2T}{2}$.

Problema 2

1. Media di $y(t)$:

$$E\{y(t)\} = E\{x(t) - x(t-T) + x(t-2T)\} = E\{x(t)\} - E\{x(t-T)\} + E\{x(t-2T)\} = 0$$

(nota: poiché $x(t)$ è stazionario, $E\{x(t)\} = E\{x(t-T)\} = E\{x(t-2T)\} = E\{x(t-t_0)\}$ per ogni t_0 , e poiché $x(t)$ ha media nulla, anche $y(t)$ ha media nulla). Si può anche dire che $y(t)$ ha media nulla perché ottenuto filtrando un processo stazionario a media nulla con un sistema LTI, che ha risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T)$.

Varianza di $y(t)$:

$$\begin{aligned}E\{y^2(t)\} &= E\{[x(t) - x(t-T) + x(t-2T)]^2\} \\ &= E\{x^2(t) + x^2(t-T) + x^2(t-2T) - 2x(t)x(t-T) + 2x(t)x(t-2T) - 2x(t-T)x(t-2T)\} \\ &= R_x(0) + R_x(0) + R_x(0) - 2R_x(T) + 2R_x(2T) - 2R_x(T) \\ &= 3R_x(0) - 4R_x(T) + 2R_x(2T)\end{aligned}$$

Nei passaggi precedenti si è utilizzata ancora la stazionarietà di $x(t)$ ($R_x(0) = E\{x^2(t)\} = E\{x^2(t-t_0)\}$ per ogni t_0) e la definizione di funzione di autocorrelazione: $R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}$.

Dai dati, si ha che $R_x(0) = 5$ e $R_x(T) = R_x(2T) = 0$. Pertanto si ottiene $E\{y^2(t)\} = 15$. Poiché la media di $y(t)$ è nulla, la varianza è pari al valor quadratico medio e si ha

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} = 3R_x(0) = 15$$

2. Come già detto, $y(t)$ è l'uscita di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T)$, e ingresso $x(t)$, processo stazionario in senso stretto. In base a risultati teorici, anche $y(t)$ è stazionario in senso stretto. Volendo, si può calcolare la funzione di autocorrelazione di $y(t)$ per dimostrare che è almeno stazionario in senso lato (è superfluo, ma si riportano ugualmente i calcoli):

$$\begin{aligned}
E\{y(t)y(t+\tau)\} &= E\{[x(t) - x(t-T) + x(t-2T)][x(t+\tau) - x(t-T+\tau) + x(t-2T+\tau)]\} \\
&= E\{x(t)x(t+\tau)\} - E\{x(t)x(t-T+\tau)\} + E\{x(t)x(t-2T+\tau)\} \\
&\quad - E\{x(t-T)x(t+\tau)\} + E\{x(t-T)x(t-T+\tau)\} - E\{x(t-T)x(t-2T+\tau)\} \\
&\quad + E\{x(t-2T)x(t+\tau)\} - E\{x(t-2T)x(t-T+\tau)\} + E\{x(t-2T)x(t-2T+\tau)\} \\
&= R_x(\tau) - R_x(\tau-T) + R_x(\tau-2T) \\
&\quad - R_x(\tau+T) + R_x(\tau) - R_x(\tau-T) \\
&\quad + R_x(\tau+2T) - R_x(\tau+T) + R_x(\tau) \\
&= 3R_x(\tau) - 2R_x(\tau-T) - 2R_x(\tau+T) + R_x(\tau-2T) + R_x(\tau+2T)
\end{aligned}$$

Poiché $E\{y(t)y(t+\tau)\}$ non dipende da t ma solo da τ e $y(t)$ ha valor medio che non dipende da t (vale sempre zero, per ogni t), allora $y(t)$ è almeno stazionario in senso lato.

3. Il processo $x(t)$ NON è bianco. Un processo bianco $z(t)$ ha spettro del valor quadratico medio costante per ogni frequenza ($S_z(f) = c$) e funzione di autocorrelazione proporzionale alla delta di Dirac ($R_z(\tau) = c\delta(\tau)$). Nel caso in esame $R_x(\tau)$ non è proporzionale ad una delta di Dirac e quindi $x(t)$ non è un processo bianco.

Problema 3

1. Il sistema è BIBO stabile se $H(z)$ ha i poli all'interno del cerchio di raggio unitario. I poli p_1 e p_2 di $H(z)$ si ottengono trovando le radici del polinomio a denominatore:

$$z^2 - M\sqrt{3}z + M^2 = 0, \quad p_{1,2} = \frac{M\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{3M^2}{4} - M^2} = \frac{M\sqrt{3}}{2} \pm j\frac{M}{2}$$

Il modulo dei due poli è

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\frac{3M^2}{4} + \frac{M^2}{4}} = \sqrt{M^2} = |M|$$

Il sistema è BIBO stabile se $|M| < 1$ (nota: $M = \pm 1$ non va bene).

2. I due poli possono essere espressi in modulo e fase come

$$p_1 = Me^{j\pi/6}, \quad p_2 = p_1^* = Me^{-j\pi/6}$$

Per ottenere la risposta all'impulso del sistema conviene sviluppare in fratti semplici la funzione

$$H'(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{3(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}{z(z^2 - M\sqrt{3}z + M^2)} = \frac{3(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}{z(z - p_1)(z - p_1^*)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z - p_1} + \frac{b^*}{z - p_1^*}$$

$$a = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}{(z - p_1)(z - p_1^*)} = \frac{3}{M^2}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{z \rightarrow p_1} \frac{3(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}{z(z - p_1^*)} = \frac{3(p_1^2 - \sqrt{2}p_1 + 1)}{p_1(p_1 - p_1^*)} \\
&= \frac{3(p_1^2 - \sqrt{2}p_1 + 1)}{p_1^2 - M^2} = \frac{3(M^2 e^{j\pi/3} - \sqrt{2}M e^{j\pi/6} + 1)}{M^2 e^{j\pi/3} - M^2}
\end{aligned}$$

Per $M = 1/\sqrt{2}$, si ha $a = 6$ e $b = -1.5 - j 1.7942 = 2.3386 e^{-j 2.2671}$.
Si ha dunque

$$H(z) = zH'(z) = \frac{az}{z} + \frac{bz}{z - p_1} + \frac{b^*z}{z - p_1^*} = a + \frac{bz}{z - p_1} + \frac{b^*z}{z - p_1^*}$$

e

$$\begin{aligned}
h[n] &= a\delta[n] + b(p_1)^n u[n] + b^*(p_1^*)^n u[n] = a\delta[n] + bM^n e^{jn\pi/6} u[n] + b^*M^n e^{-jn\pi/6} u[n] \\
&= h[n] = a\delta[n] + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Re \left\{ b e^{jn\pi/6} \right\} u[n] \\
&= h[n] = 6\delta[n] + 2.3386 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{6} - 2.2671\right) u[n]
\end{aligned}$$

3. Con M positivo il filtro è di tipo passabasso, con M negativo è di tipo passabanda. La funzione di trasferimento richiesta si ottiene come

$$\mathcal{H}(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f \Delta_t}}$$

dove $\Delta_t = 1$ ms. Il sistema ha due zeri z_1 e z_2 tali che

$$z_{1,2}^2 - \sqrt{2}z_{1,2} + 1 = 0, \quad z_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{4} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{\pm j\pi/4}$$

I due zeri si trovano dunque sulla circonferenza di raggio unitario e hanno fase $\pi/4$ e $-\pi/4$. Dal punto di vista analitico, la risposta in frequenza richiesta è

$$\mathcal{H}(f) = \frac{3(e^{j4\pi f \Delta_t} - \sqrt{2}e^{j2\pi f \Delta_t} + 1)}{(e^{j4\pi f \Delta_t} - M\sqrt{3}e^{j2\pi f \Delta_t} + M^2)}$$

ma dal punto di vista qualitativo, si tratta di una funzione di trasferimento di tipo passabasso, che vale

- esattamente zero per f_1 tale che $2\pi f_1 \Delta_t = \pi/4$, cioè per $f_1 = 1/(8\Delta_t) = 125$ Hz e per $f_2 = -f_1 = -125$ Hz,
- $H(z)|_{z=1} = 6.3845$ per $f = 0$
- $H(z)|_{z=-1} = 3.7591$ per $f = \pm 1/(2\Delta_t) = \pm 500$ Hz.

Inoltre $\mathcal{H}(f)$ è periodica di periodo $1/\Delta_t = 1000$ Hz.

Indice analitico

- Calcolo di probabilità, 100, 108
- Delta di Dirac, 27, 79, 183
 - Proprietà, 146, 162, 167, 183, 193, 204
- DFT/FFT, 146, 178, 213, 238
- Formula di Eulero, 4
- Funzioni trigonometriche, 4
- Grafico di segnali/funzioni, 4
- Integrale, 4
- Numeri complessi, 4
- Processi casuali
 - Calcolo del coefficiente di correlazione, 152, 183
 - Calcolo del valor quadratico medio, 125
 - Calcolo della funzione di autocorrelazione, 125, 157, 162, 183, 193, 198
 - Calcolo della media, 125, 131, 167, 173, 178, 183, 193, 198, 205, 213, 226
 - Calcolo della varianza, 125, 131, 167, 173, 178, 183, 193, 198, 205, 213, 226, 238
 - Calcolo dello spettro di potenza, 125, 157, 162, 167
 - Calcolo proprietà del processo d'uscita di un sistema LTI, 125, 131, 139, 152, 167, 173, 178, 183, 193, 198, 205, 213, 226, 238, 242
 - Calcolo proprietà del processo d'uscita di un sistema non LTI, 198
 - Calcolo valor quadratico medio, 131, 167, 173, 178, 183, 193, 198, 205, 213, 226
 - Condizioni di stazionarietà in senso lato, 139, 146, 167, 183, 242
 - Densità di probabilità, 162
 - Indipendenza statistica, 157, 198
 - Rumore gaussiano bianco, 125
 - Stazionarietà, 167
 - Variabili aleatorie ottenute tramite campionamento, 115
- Proprietà della trasformata di Fourier, 131, 178, 198, 213, 238, 242
- Segnali a tempo continuo
 - Convoluzione, 27, 40, 146
- Segnali ad energia finita, 139
 - Calcolo del prodotto scalare, 63
 - Calcolo del segnale d'uscita di un sistema LTI, 139, 146, 162, 204
 - Calcolo dell'energia, 57, 157, 204
 - Calcolo della funzione di autocorrelazione, 57, 157, 198
 - Calcolo della trasformata di Fourier, 238
 - Ortogonalità, 204
 - Proprietà dell'energia, 139
 - Proprietà della funzione di autocorrelazione, 131
- Segnali periodici, 73, 139
 - Calcolo del periodo, 63
 - Calcolo del segnale d'uscita di un sistema LTI, 139, 167, 178, 198
 - Calcolo della funzione di autocorrelazione, 198, 204
 - Calcolo della potenza, 63, 131, 152, 167, 173, 226
 - Calcolo della trasformata di Fourier, 73, 79, 131, 162, 173, 178, 183, 193, 242
 - Calcolo dello spettro di potenza, 162, 204, 242
 - Proprietà della funzione di autocorrelazione, 146
 - Segnali sinusoidali, 63, 139, 167, 173, 178
- Segnali a tempo discreto, 239
 - Convoluzione, 19, 87, 162, 226, 242
 - Convoluzione circolare, 226
- Sistemi a tempo continuo
 - Banda a -3 dB, 57
 - Calcolo del segnale d'uscita, 27, 139, 162, 183, 226
 - Calcolo della funzione di trasferimento, 162, 167, 183, 213

- Calcolo della risposta all'impulso, 162, 167, 183, 213
- Calcolo della trasformata di Fourier, 40
- Condizioni di stabilità, 198, 213
- Condizioni di tempo-invarianza, 139
- Convoluzione, 157, 204
- Disegno dello schema a blocchi, 27
- Sistemi “notch”, 204
- Sistemi passabanda, 40, 73
- Sistemi passabasso, 40, 79, 146, 178, 213, 238
- Verifica linearità e tempo invarianza, 19, 162
- Sistemi a tempo discreto
 - Calcolo del segnale d'uscita, 87, 173, 178, 213, 227
 - Calcolo della funzione di trasferimento, 131, 139, 140, 146, 147, 152, 157, 200, 205, 213
 - Calcolo della risposta all'impulso, 19, 87, 139, 140, 146, 147, 152, 157, 162, 167, 184, 194
 - Calcolo equazione alle differenze, 19, 87
 - Condizioni di tempo-invarianza, 139
 - Disegno dello schema a blocchi, 146, 147, 157, 162, 167, 194, 213
 - Poli, 87, 131, 167
 - Stabilità, 87, 131, 157, 162, 167, 184, 200, 205, 238
- Teorema del campionamento, 79, 87, 146, 157, 173, 213, 238
- Teorema di Parseval, 157, 167, 183, 193
- Variabili aleatorie
 - Calcolo del coefficiente di correlazione, 115
 - Calcolo del valor quadratico medio, 115
 - Calcolo della densità di probabilità, 115
 - Calcolo della media, 115, 226
 - Calcolo della varianza, 115
 - Densità di probabilità gaussiana, 115
 - Densità di probabilità gaussiana congiunta, 124, 125
 - Densità di probabilità uniforme, 115