



POLITECNICO
DI TORINO

DET

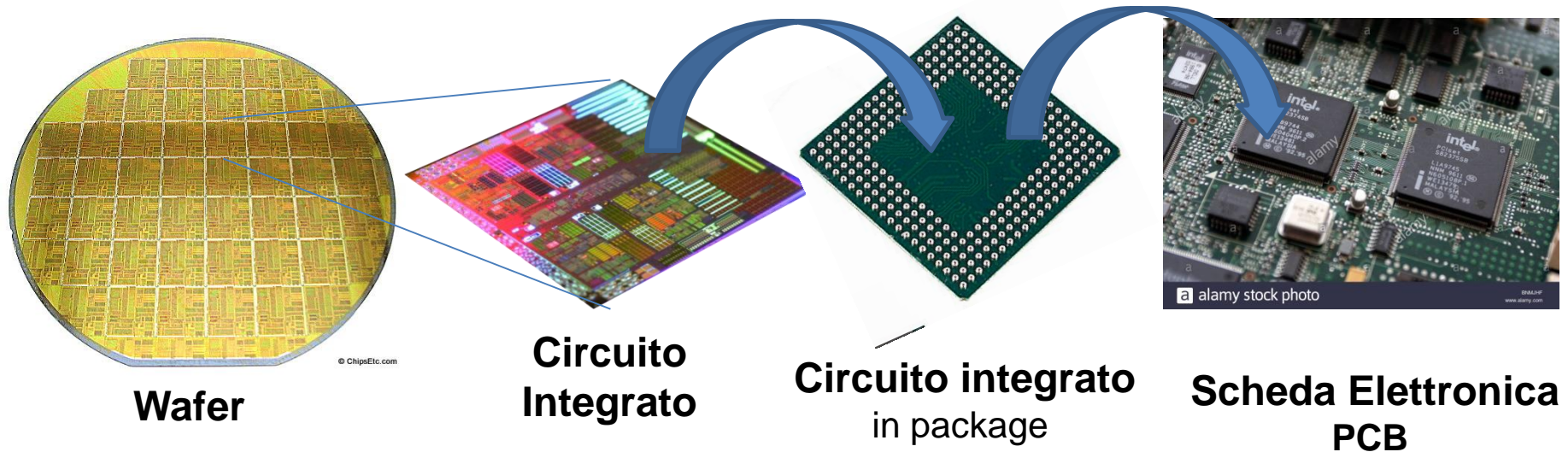
Department of Electronics and Telecommunications

Diodi: Caratteristiche e Tecniche di Analisi

Dispositivi Elettronici

- Il funzionamento dei sistemi elettronici si basa sulle caratteristiche dei ***dispositivi elettronici a semiconduttore***, fabbricabili in larghissima scala mediante la ***tecnologia dei circuiti integrati (Integrated Circuits, IC)***

Dimensioni dispositivi: ordine di 12nm
Dispositivi in un IC: $>10^8$
Frequenza di clock: $>10\text{GHz}$ (dig. clk)



POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Dispositivi Elettronici

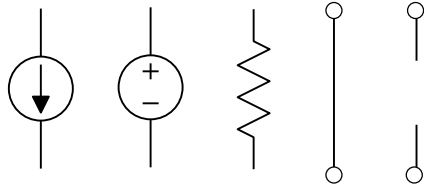
Relazione $v - i$

Numero terminali

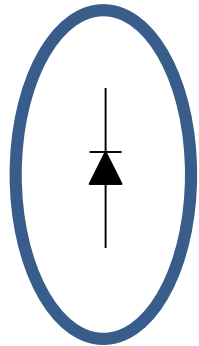


$n = 2$ (bipoli)

lineare



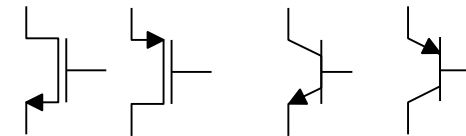
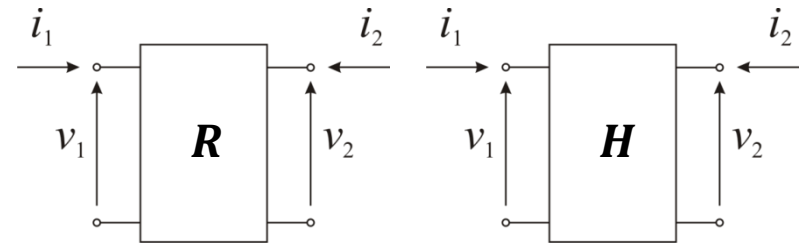
nonlineare



Diodo

$n > 2$ (multipoli),

In particolare: doppi bipoli



Transistori MOS e BJT

Dispositivi a 3 (o meglio 4) terminali
→ 2-porte non-lineari



POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

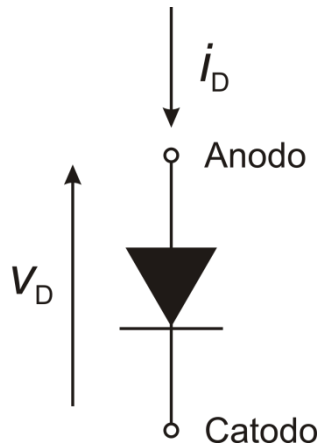
Concetti base

- **Diodo a giunzione e diodo Zener**
 - ***Caratteristiche tensione-corrente***
 - Caratteristica non-lineare
 - Dispositivi reali e Datasheet
 - ***Analisi di circuiti con diodi***
 - Analisi numerica, grafica e simulazione
 - Analisi di ampio segnale con ipotesi sullo stato di conduzione dei diodi
 - Approssimazione di diodo ideale
 - Approssimazione di diodo semi-ideale
 - Linearizzazione e analisi di piccolo segnale
 - Condizioni statiche
 - Condizioni dinamiche

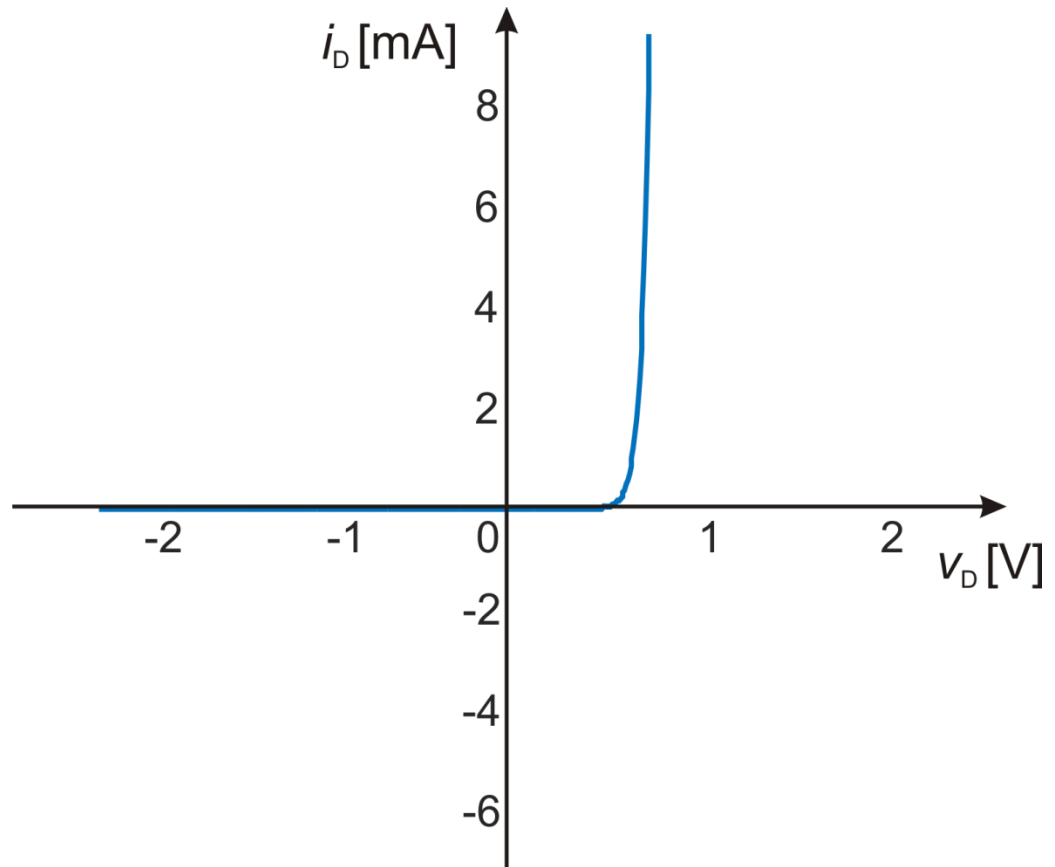


Diodo

Simbolo



Caratteristica Statica* $i_D(v_D)$



Espressione Analitica

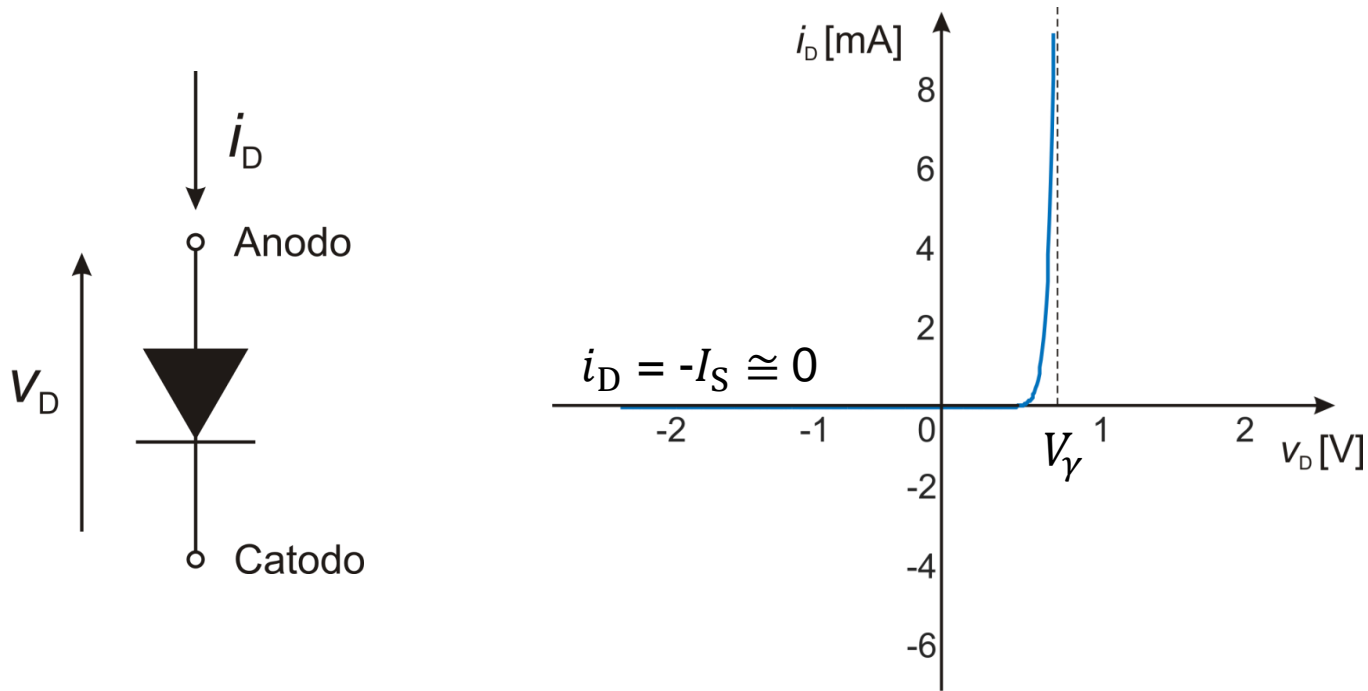
$$i_D = I_S(e^{v_D/\eta V_T} - 1)$$

* Corrente i_D in funzione della tensione v_D (costante nel tempo o variabile in modo *sufficientemente* lento, cioè in condizioni quasi-statiche) applicata al diodo.



Diodo a giunzione

- Per $v_D > 0$, **polarizzazione diretta**: la corrente cresce rapidamente con v_D . La curva è quasi verticale per $v_D = V_\gamma \cong 0.6\text{V}-0.7\text{V}$.
- Per $v_D < 0$, **polarizzazione inversa**: la corrente satura ad un valore negativo molto piccolo (pA-fA) in modulo ($-I_S$)



Diodo a giunzione

Espressione Analitica della Caratteristica Statica

$$i_D = I_S (e^{v_D / \eta V_T} - 1)$$

I_S : corrente di saturazione inversa
ordine dei pA, dipende da dimensioni,
tecnologia, temperatura...

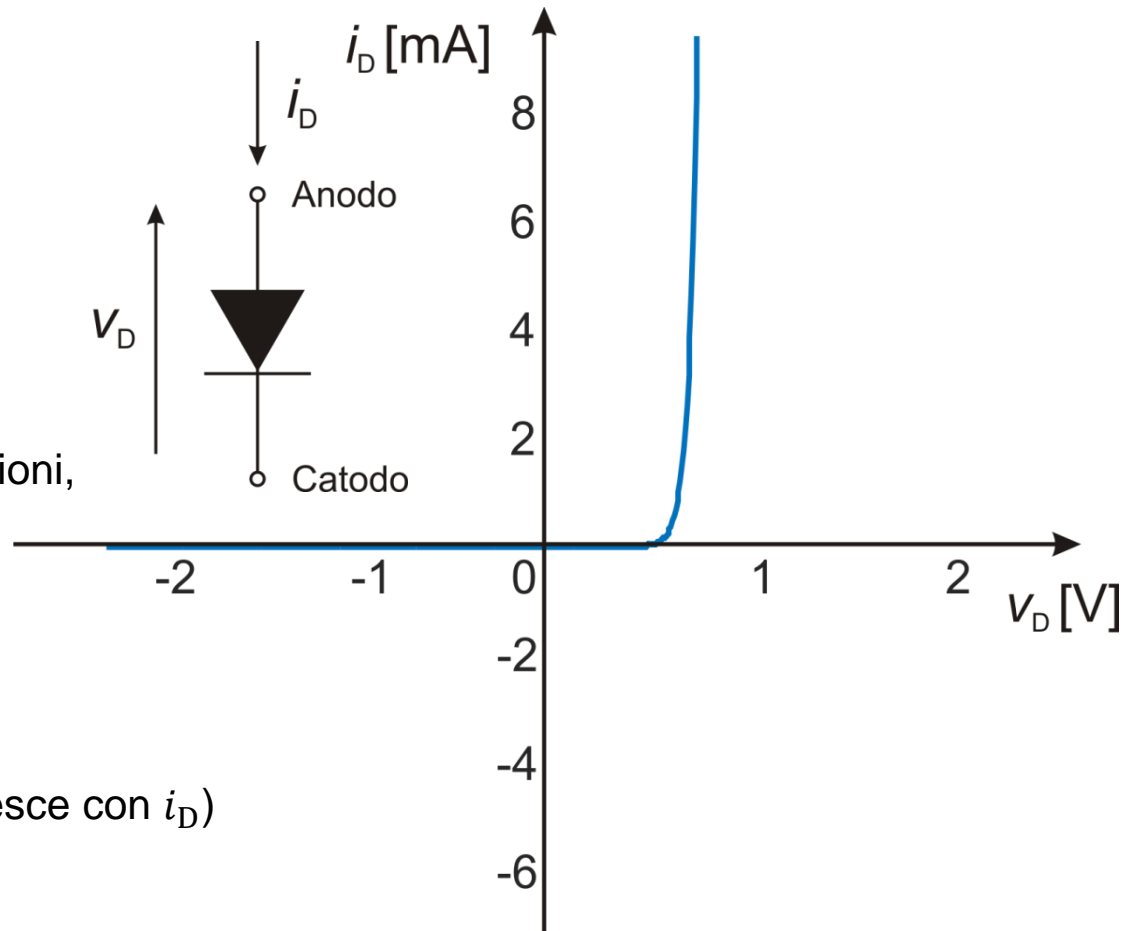
$$V_T = \frac{kT}{q} \text{ (circa 26mV @ 300K)}$$

T temperatura assoluta

k costante di Boltzmann

q carica elementare

η fattore di non-idealità ($1 \leq \eta \leq 2$, cresce con i_D)

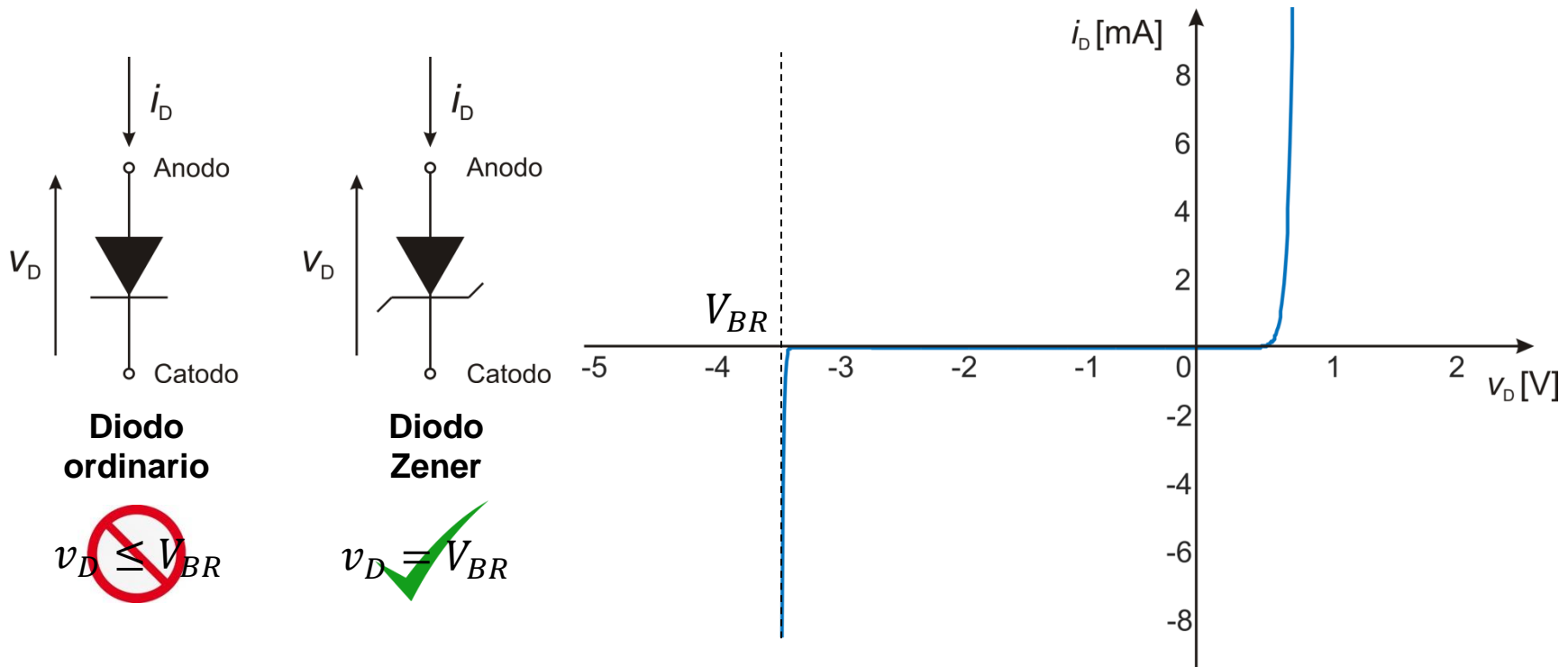


POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Diodo: Breakdown

- Applicando v_D ancora più negativa ($v_D \leq V_{BR} < 0$) il diodo conduce in direzione inversa (fenomeno della rottura o *breakdown*). La corrente cresce in modo verticale.
 - V_{BR} varia da diodo a diodo
 - Applicare $v_D \leq V_{BR}$ porta tipicamente al danneggiamento irreversibile del diodo
 - Alcuni diodi (**diodi Zener**) sono invece progettati appositamente per operare in breakdown



Diodo

- Il diodo è utilizzato nei circuiti integrati e come componente discreto

Small Signal Fast Switching Diodes



FEATURES

- Silicon epitaxial planar diode
- Electrically equivalent diodes: 1N4148 - 1N914
- Material categorization:
For definitions of compliance please see www.vishay.com/doc?99912

APPLICATIONS

- Extreme fast switches



RoHS
COMPLIANT
HALOGEN
FREE



- Nei diodi reali, la corrente diretta, la tensione inversa e la potenza dissipata non devono eccedere i valori massimi dichiarati dal costruttore per evitare il danneggiamento.

| ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS ($T_{amb} = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$, unless otherwise specified) | | | | |
|---|--|-------------|-------|------|
| PARAMETER | TEST CONDITION | SYMBOL | VALUE | UNIT |
| Repetitive peak reverse voltage | | V_{RRM} | 100 | V |
| Reverse voltage | | V_R | 75 | V |
| Peak forward surge current | $t_p = 1\text{ }\mu\text{s}$ | I_{FSM} | 2 | A |
| Repetitive peak forward current | | I_{FRM} | 500 | mA |
| Forward continuous current | | I_F | 300 | mA |
| Average forward current | $V_R = 0$ | $I_{F(AV)}$ | 150 | mA |
| Power dissipation | $I = 4\text{ mm}, T_L = 45\text{ }^{\circ}\text{C}$ | P_{tot} | 440 | mW |
| | $I = 4\text{ mm}, T_L \leq 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ | P_{tot} | 500 | mW |



POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Diodo

| ELECTRICAL CHARACTERISTICS ($T_{amb} = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$, unless otherwise specified) | | | | | | |
|---|---|------------|------|------|------|---------------|
| PARAMETER | TEST CONDITION | SYMBOL | MIN. | TYP. | MAX. | UNIT |
| Forward voltage | $I_F = 10\text{ mA}$ | V_F | | | 1 | V |
| Reverse current | $V_R = 20\text{ V}$ | I_R | | | 25 | nA |
| | $V_R = 20\text{ V}, T_J = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$ | I_R | | | 50 | μA |
| | $V_R = 75\text{ V}$ | I_R | | | 5 | μA |
| Breakdown voltage | $I_R = 100\text{ }\mu\text{A}, t_p/T = 0.01, t_p = 0.3\text{ ms}$ | $V_{(BR)}$ | 100 | | | V |

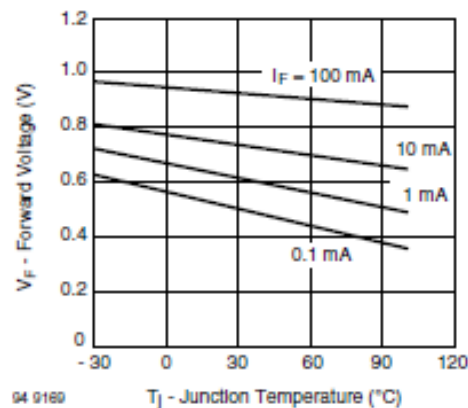


Fig. 1 - Forward Voltage vs. Junction Temperature

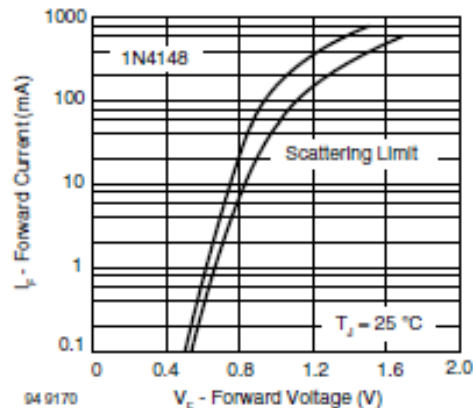


Fig. 2 - Forward Current vs. Forward Voltage

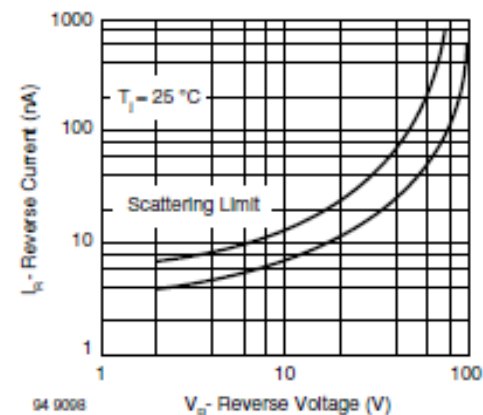


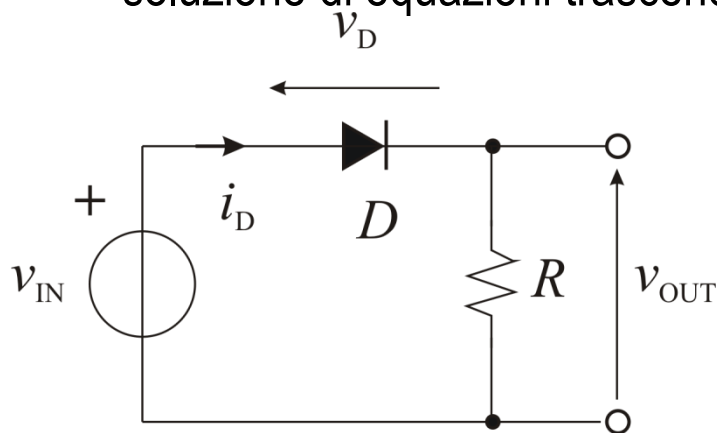
Fig. 3 - Reverse Current vs. Reverse Voltage

- Le caratteristiche misurate dei diodi reali:
 - Si possono discostare anche in modo significativo dai modelli teorici ☹
 - Variano da esemplare a esemplare per le tolleranze di fabbricazione: i costruttori garantiscono solo i valori massimi/minimi di alcuni parametri ☹
 - Good news: spesso quello che conta è l'andamento qualitativo e non serve una grande accuratezza nelle applicazioni ☺ !!



Analisi di Circuiti con Diodi

- Ipotesi: condizioni (quasi)-statiche.
- Il diodo è un elemento *non lineare*:
 - Non vale il principio di sovrapposizione degli effetti
 - Utilizzando il modello esponenziale, l'analisi di circuiti con diodi richiede la soluzione di equazioni trascendenti ☹



Caratt. Diodo $\left\{ \begin{array}{l} i_D = I_S(e^{v_D/\eta V_T} - 1) \\ v_{OUT} = v_{IN} - v_D \end{array} \right.$

KVL

Legge di Ohm $\left\{ \begin{array}{l} v_{OUT} = R i_D \end{array} \right.$

↓

$$v_{IN} - v_D = R I_S (e^{v_D/\eta V_T} - 1)$$

Equazione trascendente.

Per risolverla iterativamente, meglio riscriverla come:

$$v_D = \eta V_T \ln \left(\frac{v_{IN} - v_D}{R I_S} + 1 \right)$$



Analisi di Circuiti con Diodi – Soluzione Numerica

- Metodo iterativo:

- si parte da una stima iniziale $v_D^{(0)} = 0V$
- da $v_D^{(n)}$ si ricava $v_D^{(n+1)}$ come
$$v_D^{(n+1)} = \eta V_T \ln \left(\frac{v_{IN} - v_D^{(n)}}{R I_S} + 1 \right)$$
- la successione $v_D^{(n)}$ converge rapidamente alla soluzione

- Per esempio, per...

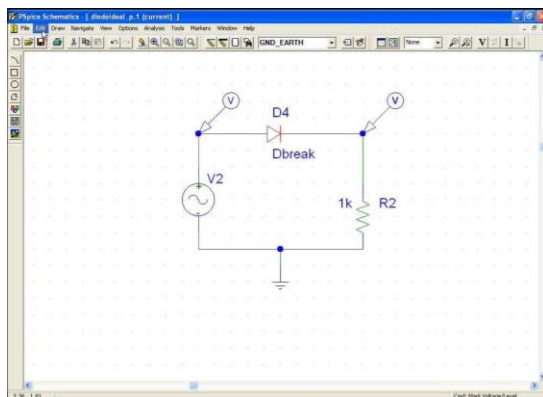
$$\begin{aligned} v_{IN} &= 5V \\ R &= 10k\Omega \\ I_S &= 1fA \\ V_T &= 26mV \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$

- ...si ottiene

$$v_D = 0.696V$$

- ...da cui

$$\begin{aligned} i_D &= 422\mu A \\ v_{OUT} &= 4.3V \end{aligned}$$



Per eseguire numericamente questo tipo di analisi si usa preferibilmente un simulatore SPICE-like (generatori: valore in DC, analisi: .OP o DC sweep) (e.g. LTSpice, available for free)

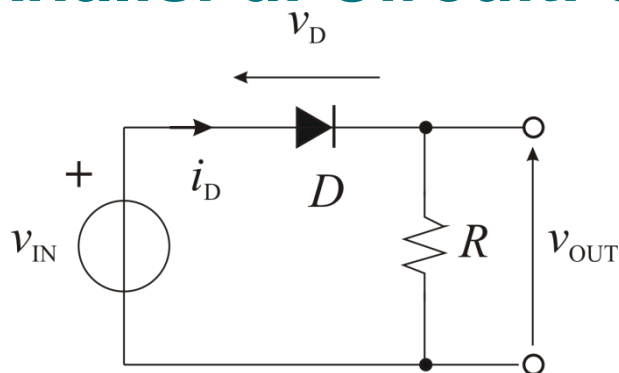
<http://www.linear.com/designtools/software/#LTspice>



POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Analisi di Circuiti con Diodi – Metodo Grafico



Caratt. Diodo
KVL
Legge di Ohm

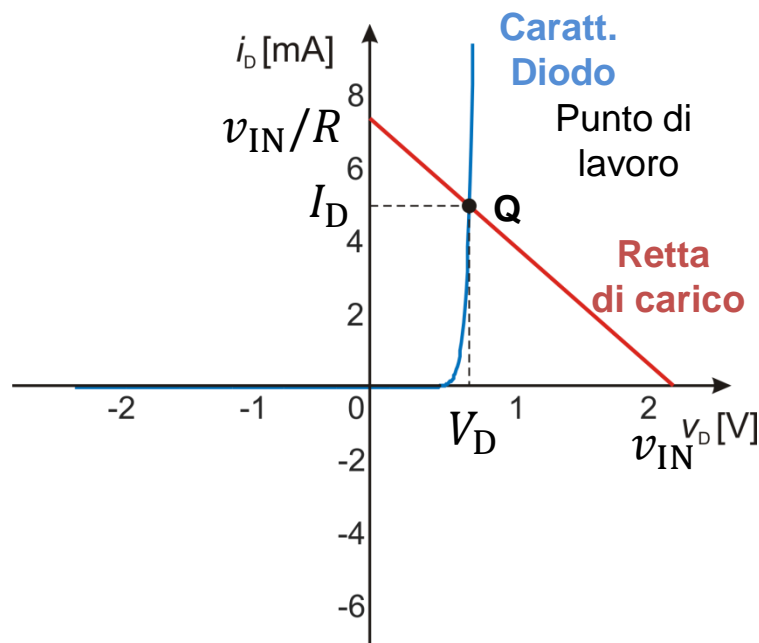
$$\begin{cases} i_D = I_S(e^{v_D/\eta V_T} - 1) \\ v_{OUT} = v_{IN} - v_D \\ v_{OUT} = R i_D \end{cases}$$



Caratt. Diodo
Retta di carico

$$\begin{cases} i_D = I_S(e^{v_D/\eta V_T} - 1) \\ R i_D = v_{IN} - v_D \end{cases}$$

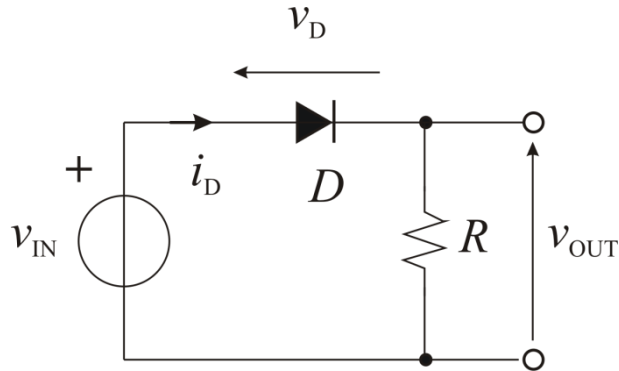
Sistema di due equazioni
nel piano v_D - i_D



Il **punto di lavoro Q**, cioè la soluzione (V_D, I_D) del sistema, è dato graficamente dall'intersezione della **caratteristica del diodo** con la **retta di carico**

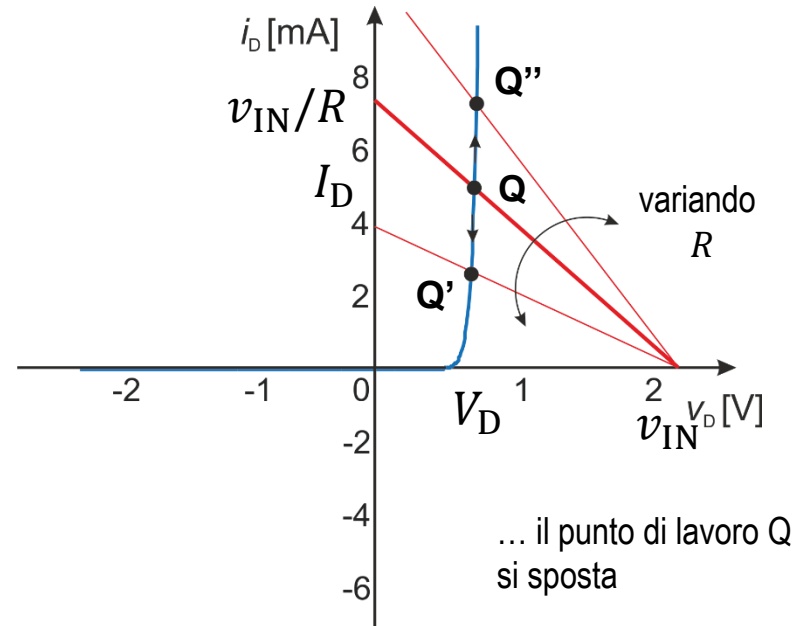
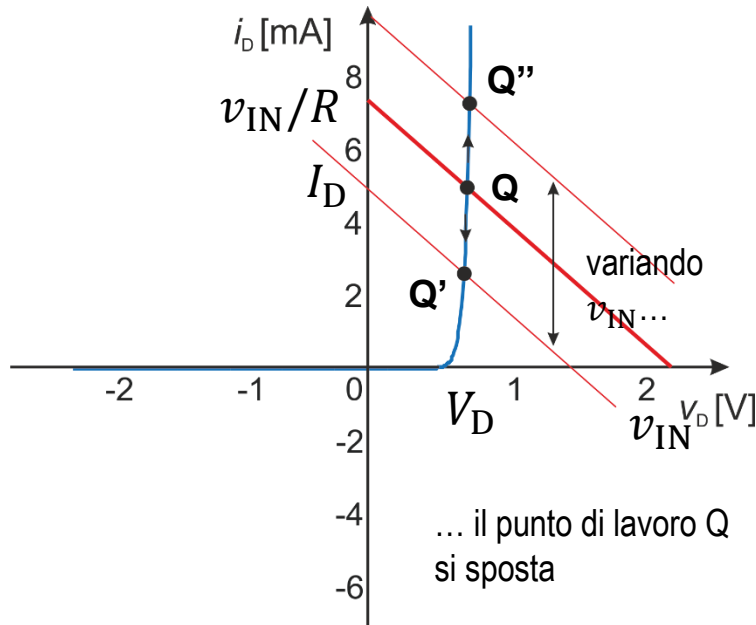


Analisi di Circuiti con Diodi – Metodo Grafico



Caratt. Diodo
KVL
Legge di Ohm

$$\begin{cases} i_D = I_S(e^{v_D/\eta V_T} - 1) \\ v_{OUT} = v_{IN} - v_D \\ v_{OUT} = R i_D \end{cases}$$



POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Analisi di Circuiti con Diodi

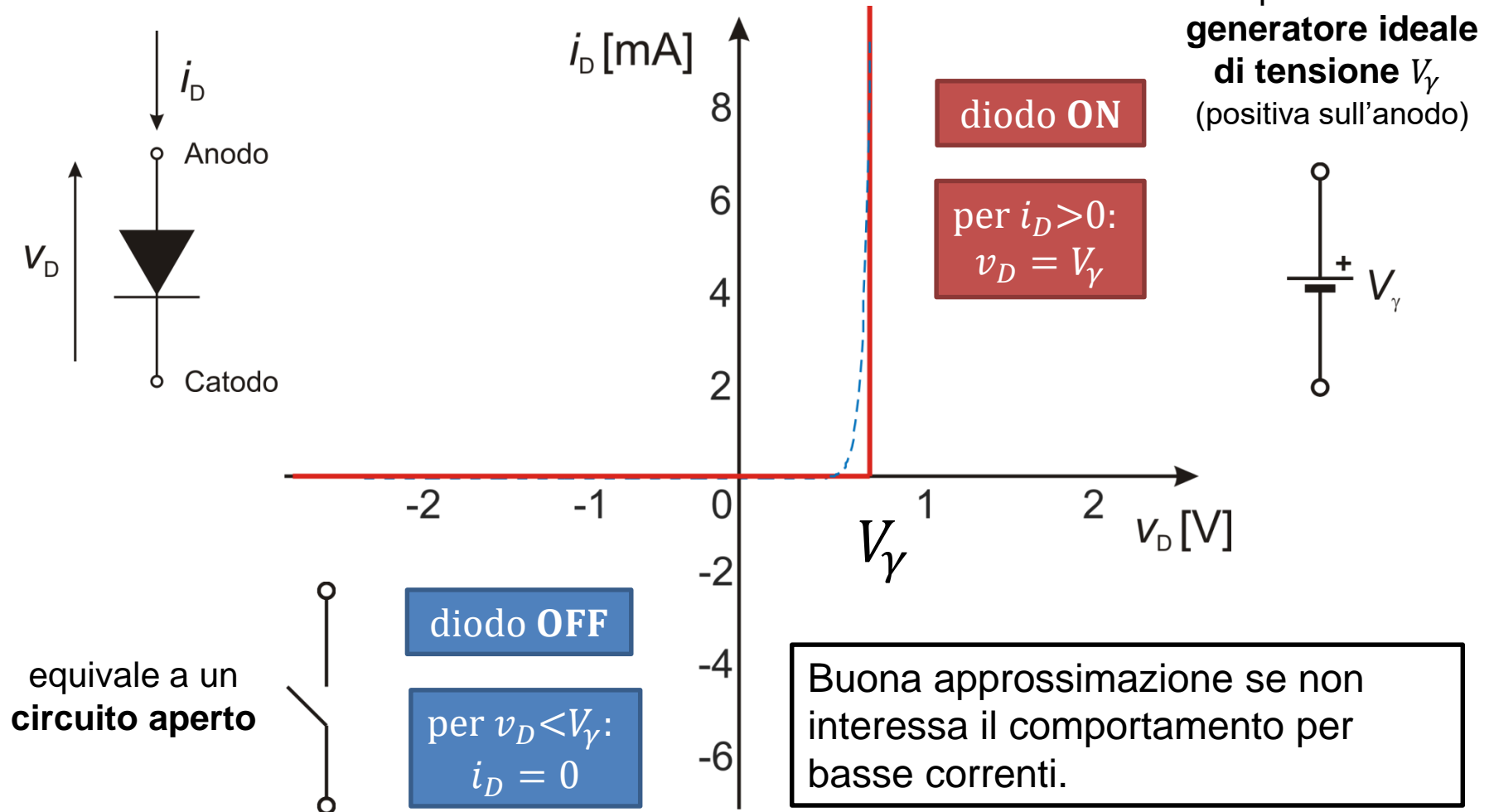
- Nelle applicazioni, spesso non è necessaria un'analisi numericamente molto accurata (=molte cifre significative) di un circuito
- E' spesso più utile disporre di tecniche di analisi approssimate che forniscano una migliore *comprensione del comportamento dei circuiti* ed una *discreta accuratezza*
- Nel seguito introdurremo diverse *approssimazioni*:
 - **per ampio segnale**
 - per piccolo segnale (condizioni statiche)
 - per piccolo segnale (condizioni dinamiche)

La scelta del tipo di approssimazione (o dell'eventuale soluzione numerica) dipende - come vedremo - dall'applicazione.



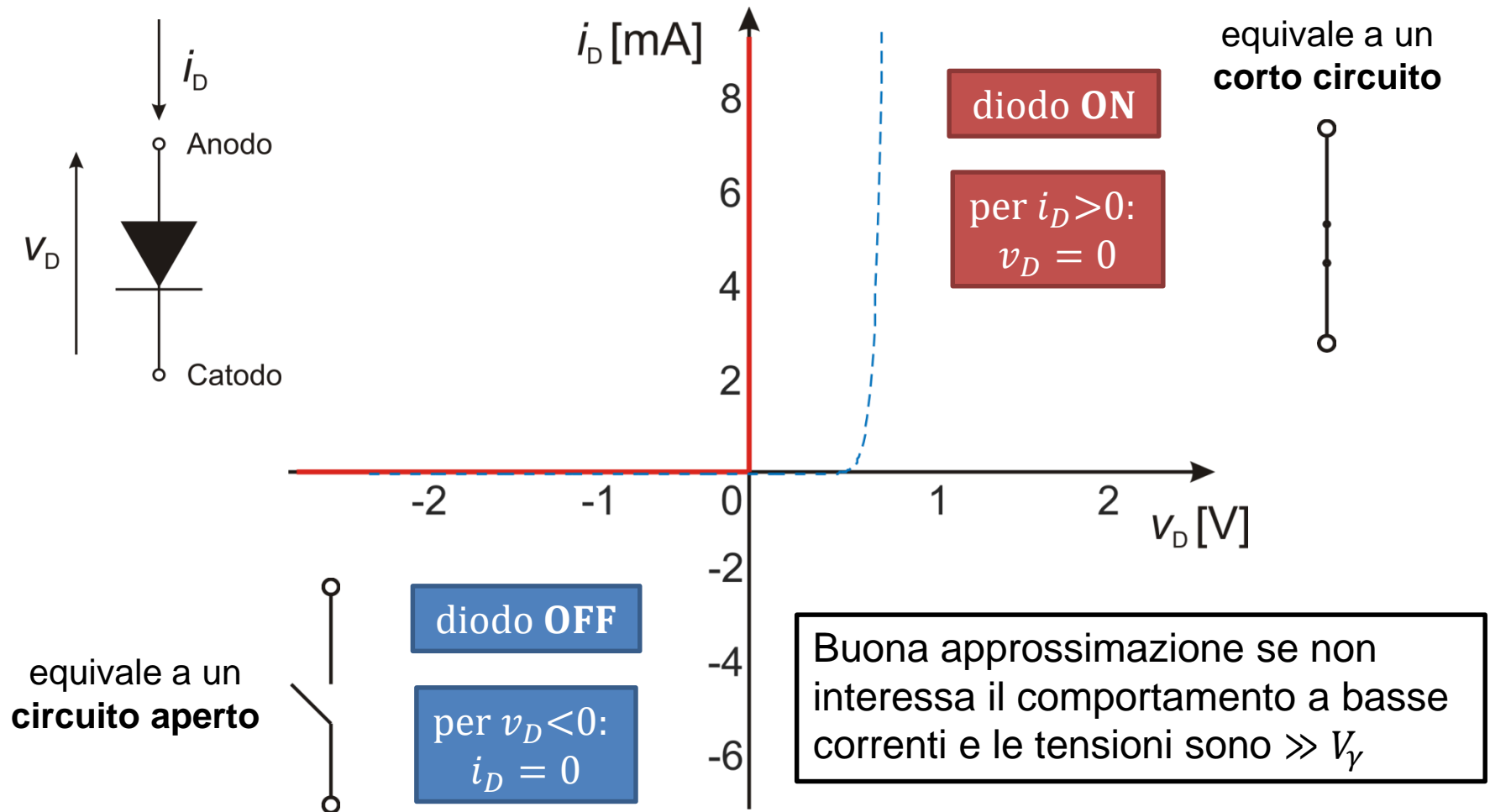
Ampio segnale: diodo semi-ideale

Caratteristica del diodo semi-ideale



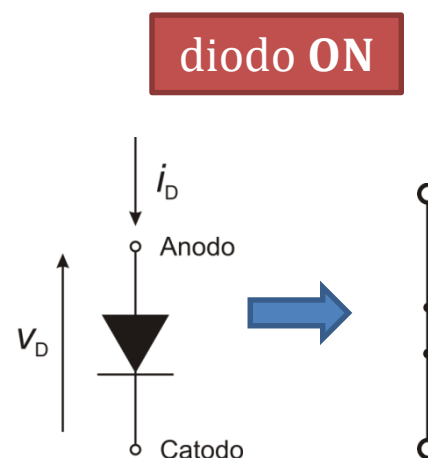
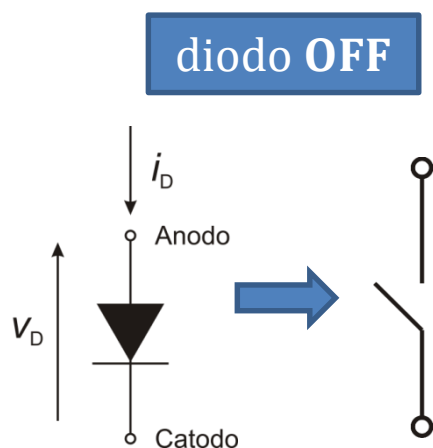
Ampio segnale: diodo ideale

Caratteristica del diodo ideale



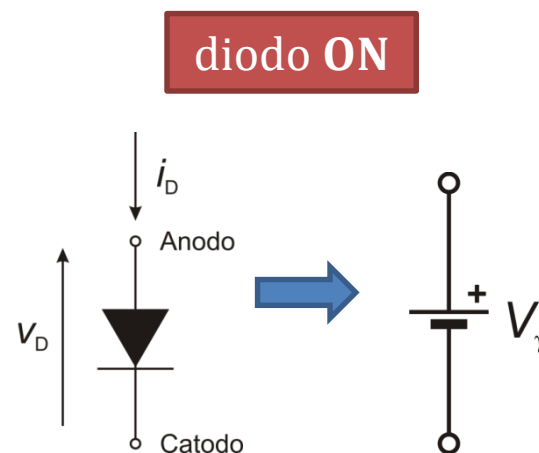
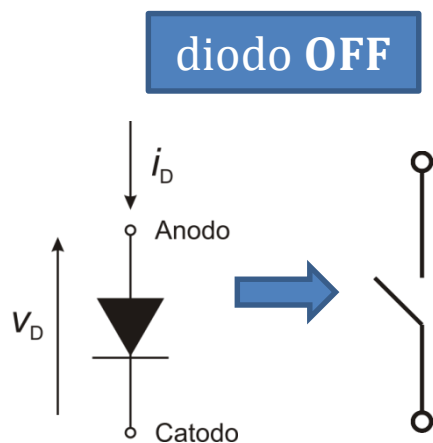
Analisi di Circuiti con Diodi Ideali

- Se l'approssimazione con diodo ideale/semi-ideale è accettabile, l'analisi è trattabile in modo molto più semplice.
- Considerazione di base: se in un circuito conosciamo a priori lo stato (ON o OFF) dei *diodi ideali* presenti, potremmo *sostituire i diodi OFF con circuiti aperti ed i diodi ON con corto circuiti*, senza alterare il circuito.
- Se non ci sono altri elementi non-lineari, *il circuito che si ottiene è lineare*.



Analisi di Circuiti con Diodi Semi-Ideali

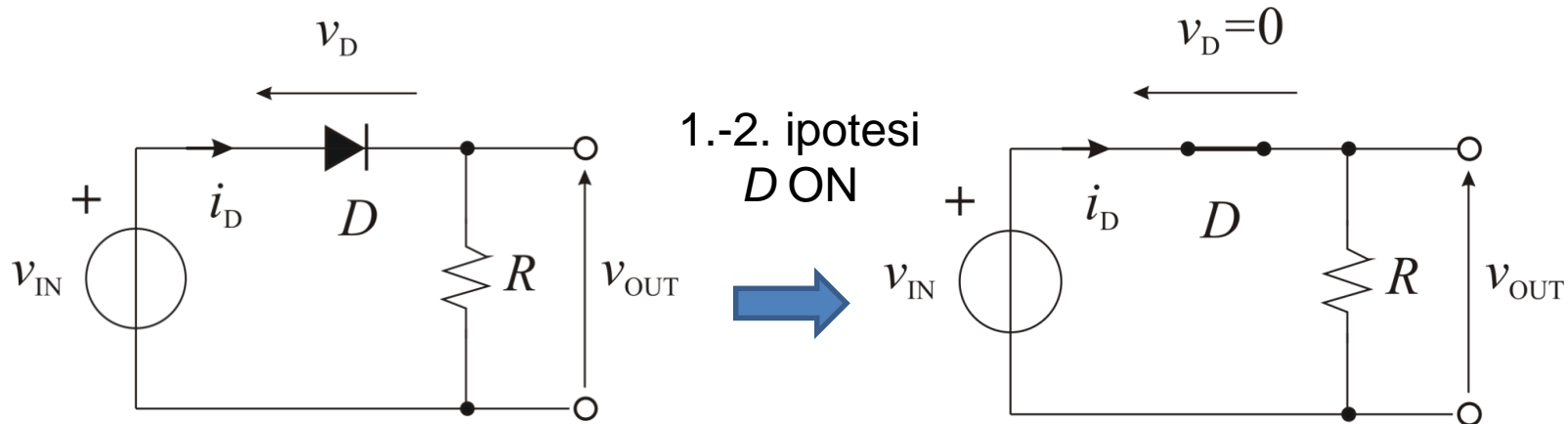
- Considerazione di base: se conoscessimo a priori lo stato di conduzione dei *diodi semi-ideali* presenti nel circuito (ON o OFF), potremmo sostituire i diodi OFF con circuiti aperti ed i diodi ON con generatori di tensione V_γ , senza alterare il circuito.
- Se non ci sono altri elementi non-lineari, *il circuito che si ottiene è lineare*.



Analisi di Circuiti con Diodi Ideali (o semi-ideali)

- Metodo di analisi:
 - Pur non conoscendo lo stato di conduzione reale dei diodi, si possono sempre formulare **ipotesi** sullo stato ON-OFF di ciascun diodo.
 - Si sostituiscono i diodi in base alle ipotesi formulate: OFF \rightarrow circuito aperto, ON \rightarrow corto circuito (diodo ideale) o gen. di tensione V_γ (diodo semi-ideale).

Es: determinare v_{OUT} al variare di v_{IN} , considerando il diodo D ideale.



Analisi di Circuiti con Diodi Ideali (o Semi-Ideali)

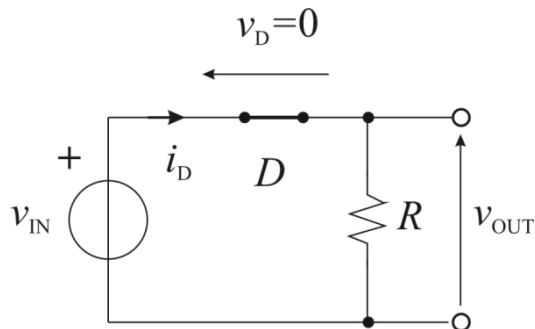
3. Si analizza il circuito in base alle ipotesi considerate, valutando:

- $v_D \rightarrow$ per i diodi che si sono ipotizzati OFF
- $i_D \rightarrow$ per i diodi che si sono ipotizzati ON

4. Si verifica la correttezza delle ipotesi:

- l'ipotesi OFF è verificata se $v_D < 0$ (per il diodo ideale) o se $v_D < V_\gamma$ (per il diodo semi-ideale)
- l'ipotesi ON è verificata se $i_D > 0$

3. Sotto l'ipotesi: D ON:



$$i_D = \frac{v_{IN}}{R}$$
$$v_{OUT} = v_{IN}$$



4. Verifica dell'ipotesi D ON

$$i_D = \frac{v_{IN}}{R} > 0$$



Verificata per $v_{IN} > 0$

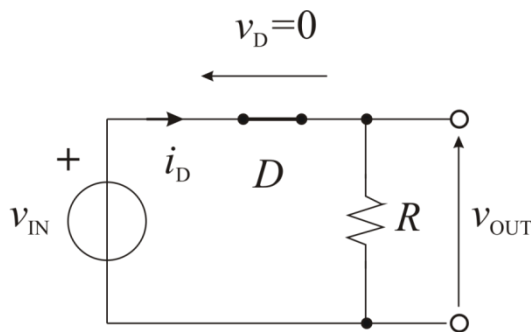
Non verificata per $v_{IN} < 0$



Analisi di Circuiti con Diodi Ideali (o Semi-Ideali)

5. Se le ipotesi sono verificate, le uscite del circuito si ottengono direttamente dal circuito semplificato sotto le ipotesi considerate.
6. Se le ipotesi non sono verificate, si considerano altre ipotesi fino ad esplorare tutti i casi possibili e si ripetono i passi 2.-5.
 - se c'è un diodo solo e non è verificata l'ipotesi iniziale (qualunque essa sia), quella complementare è sicuramente verificata.

5. per $v_{IN} > 0$
ipotesi D ON

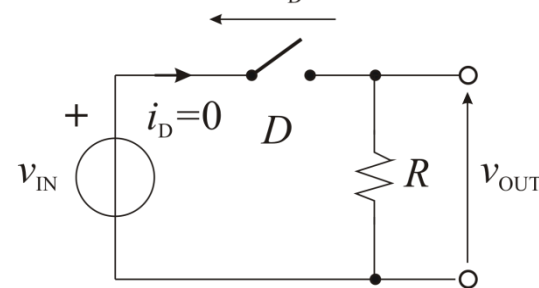


$$v_{IN} > 0: \\ v_{OUT} = v_{IN}$$

6. per $v_{IN} < 0$
ipotesi D ON



→ D è OFF (un diodo solo,
non ci sono altre opzioni)

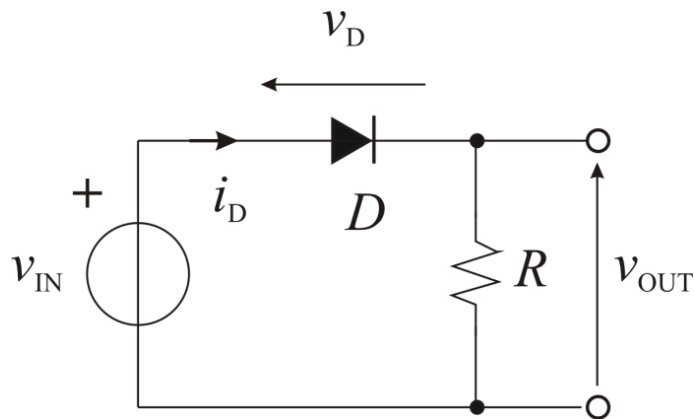


$$v_{IN} < 0: \\ v_{OUT} = 0$$

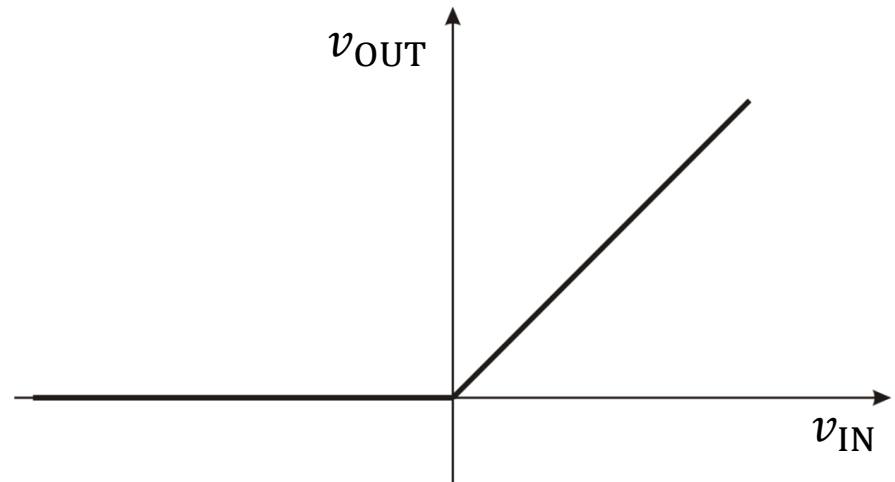


Raddrizzatore a semplice semionda

- Il circuito analizzato come esempio è di interesse pratico: si tratta di un *raddrizzatore a singola semionda*.



Transcaratteristica Statica



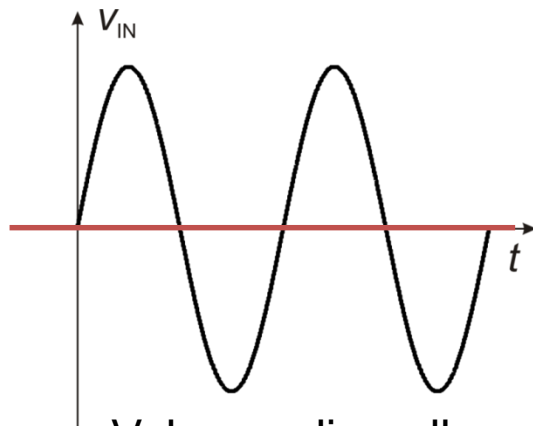
$$\begin{aligned} v_{IN} < 0: v_{OUT} &= 0 \\ v_{IN} > 0: v_{OUT} &= v_{IN} \end{aligned}$$



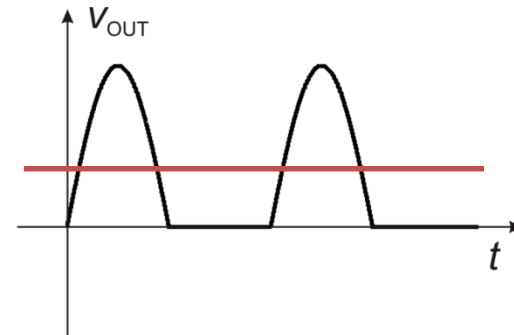
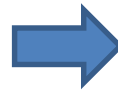
Raddrizzatore a semplice semionda

- Estrae la parte positiva della tensione in ingresso $v_{IN}(t)$.
- Se $v_{IN}(t)$ è a valor medio nullo (ad es., sinusoidale) $v_{OUT}(t)$ ha valor medio non-nullo. Filtrando passa-basso $v_{OUT}(t)$ si ricava una tensione continua.
- Il circuito (e sue varianti) è utilizzato nella conversione di una tensione alternata (AC) in continua (DC).

$$v_{IN} = V_{in} \sin(2\pi f_0 t) \quad V_{in} = 220V, f_0 = 50Hz$$



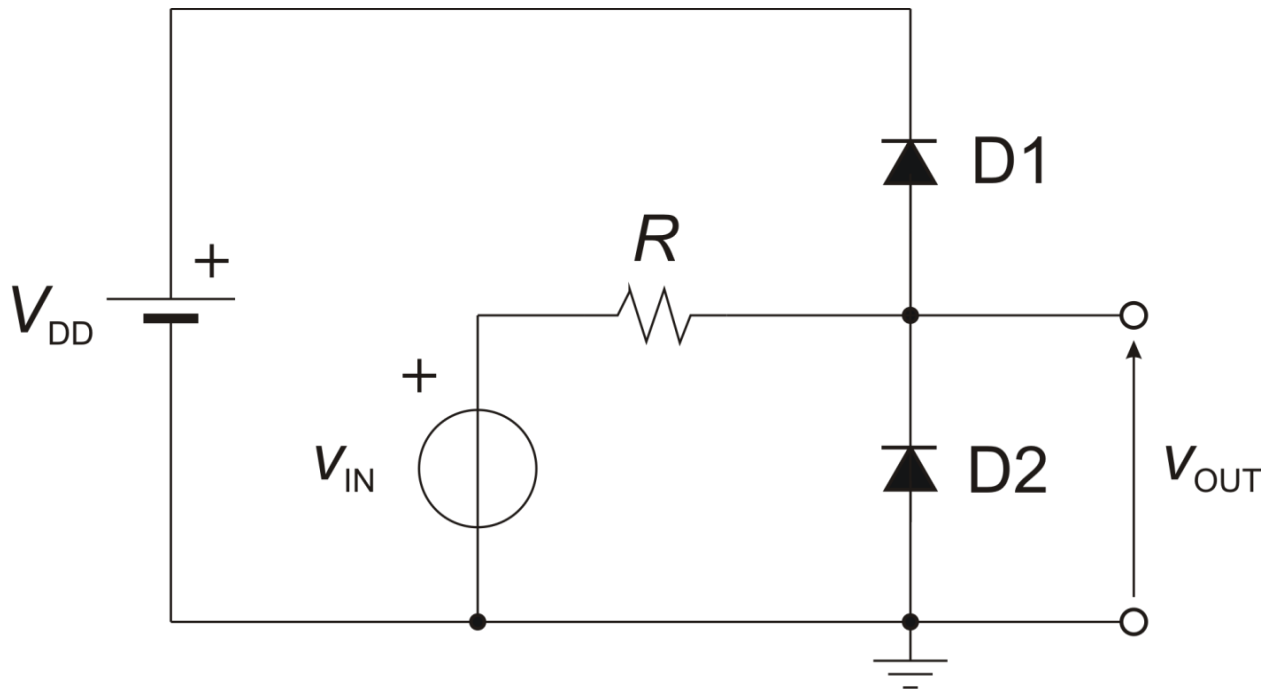
Valor medio nullo



Valor medio non-nullo: $\frac{V_{IN}}{\pi}$
(si può estrarre con un filtro passa-basso)

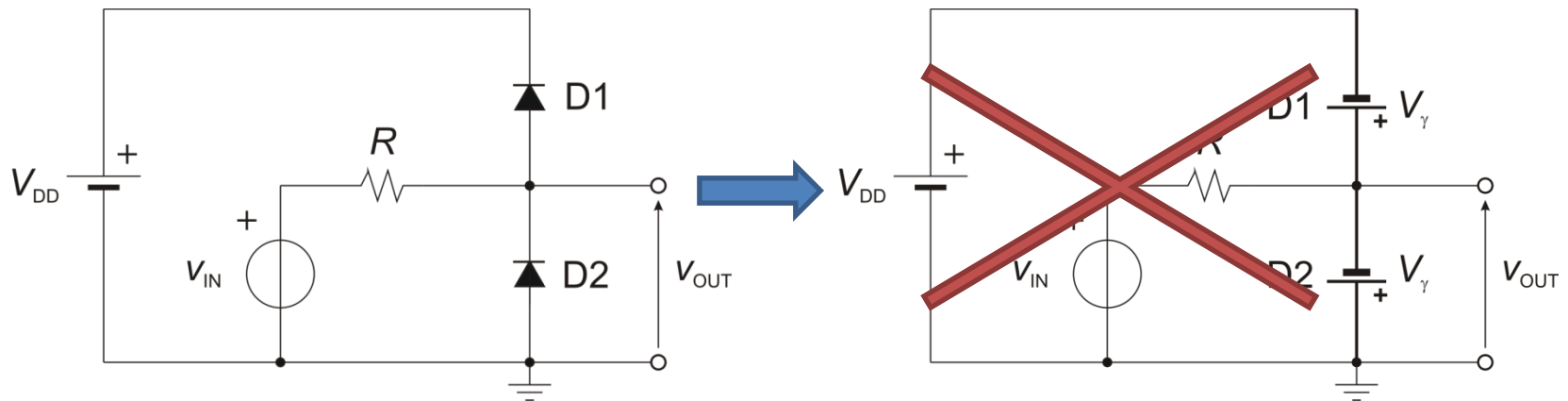
Esercizio

- E' dato il circuito in figura, dove $V_{DD} = 3.3V$ è una tensione costante e $R=1k\Omega$. Si determini v_{OUT} al variare di v_{IN} in condizioni quasi-statiche e si tracci $v_{OUT}(v_{IN})$ per $-10V < v_{IN} < 10V$. Si analizzi il circuito considerando i diodi semi-ideali con $V_\gamma=0.7V$



Esercizio

- Ipotesi: D1 ON, D2 ON
- KVL alla maglia contenente i due diodi e $V_{DD} \rightarrow V_{DD} + 2V_\gamma = 0$
il che è assurdo. L'ipotesi è quindi da scartare immediatamente

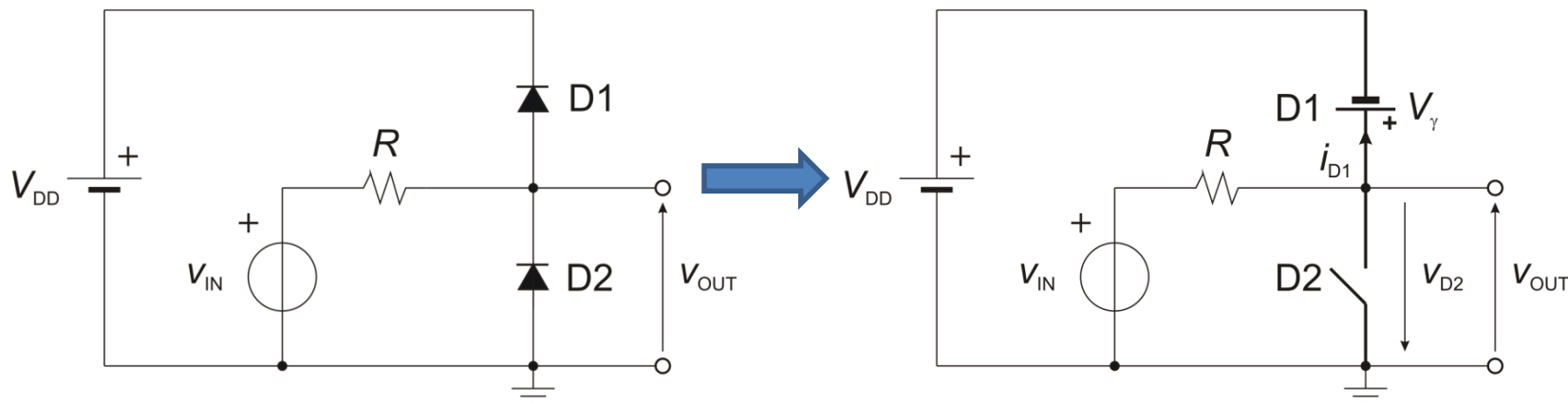


Esercizio

- Ipotesi: D1 ON, D2 OFF
- Per verificare l'ip., calcoliamo i_{D1} e v_{D2} con KVL e legge di Ohm:

$$i_{D1} = \frac{v_{IN} - V_{DD} - V_{\gamma}}{R}, \quad v_{D2} = -V_{DD} - V_{\gamma}$$

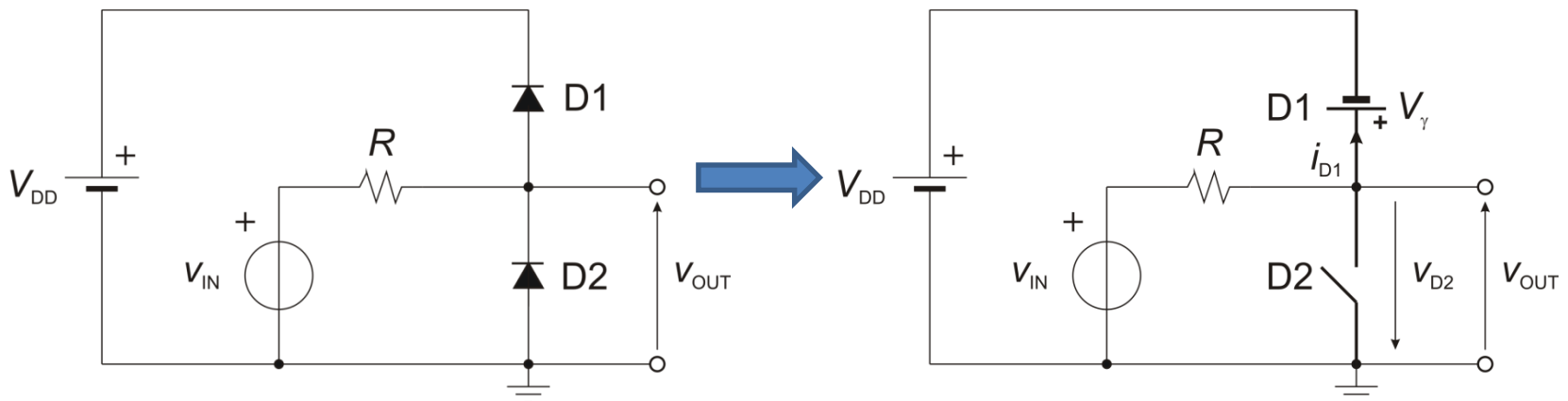
- Verifica ip. D1 ON: $i_{D1} > 0 \rightarrow \frac{v_{IN} - V_{DD} - V_{\gamma}}{R} > 0 \rightarrow v_{IN} > V_{DD} + V_{\gamma}$
- Verifica ip. D2 OFF: $v_{D2} < V_{\gamma} \rightarrow -V_{DD} - V_{\gamma} < V_{\gamma}$ sempre verificata



Esercizio

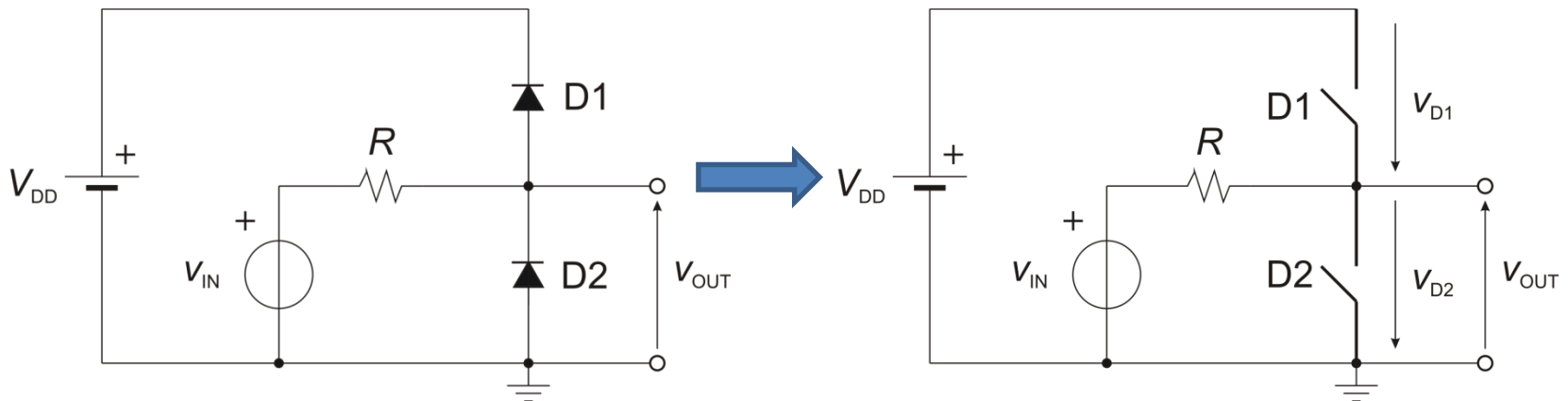
- Ipotesi: D1 ON, D2 OFF
- Verificata per $v_{IN} > V_{DD} + V_\gamma$
- Quando è verificata $v_{OUT} = V_{DD} + V_\gamma$ (KVL)

$$v_{OUT} = V_{DD} + V_\gamma \text{ per } v_{IN} > V_{DD} + V_\gamma$$



Esercizio

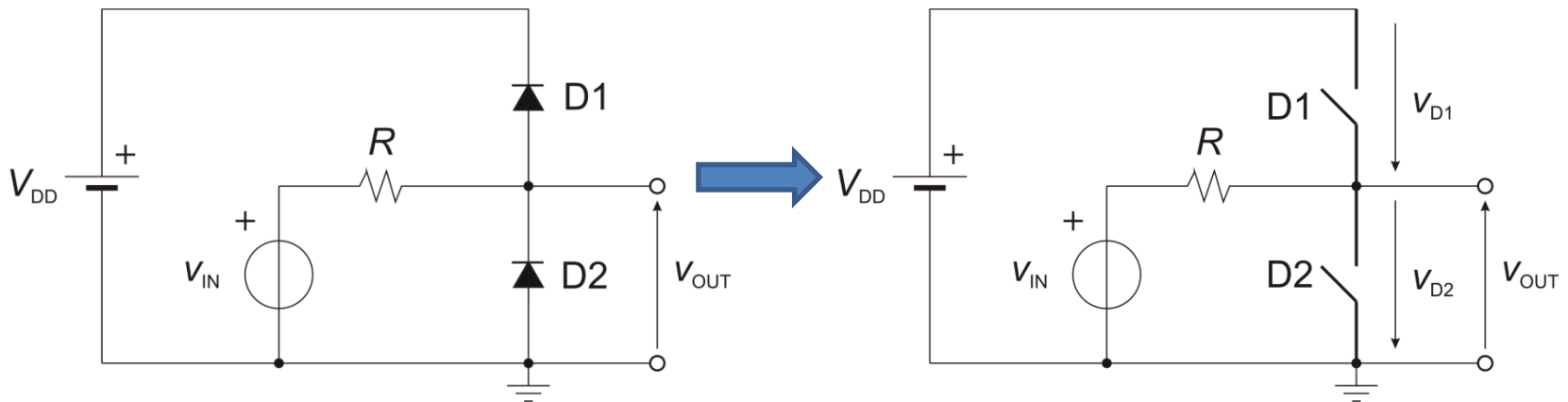
- Ipotesi: D1 OFF, D2 OFF
- Per verificare l'ip. calcoliamo v_{D1} e v_{D2} con KVL e legge di Ohm:
 $v_{D1} = v_{IN} - V_{DD}$, $v_{D2} = -v_{IN}$
- Verif. ip. D1 OFF: $v_{D1} < V_{\gamma} \rightarrow v_{IN} - V_{DD} < V_{\gamma} \rightarrow v_{IN} < V_{DD} + V_{\gamma}$
- Verif. ip. D2 OFF: $v_{D2} < V_{\gamma} \rightarrow -v_{IN} < V_{\gamma} \rightarrow v_{IN} > -V_{\gamma}$



Esercizio

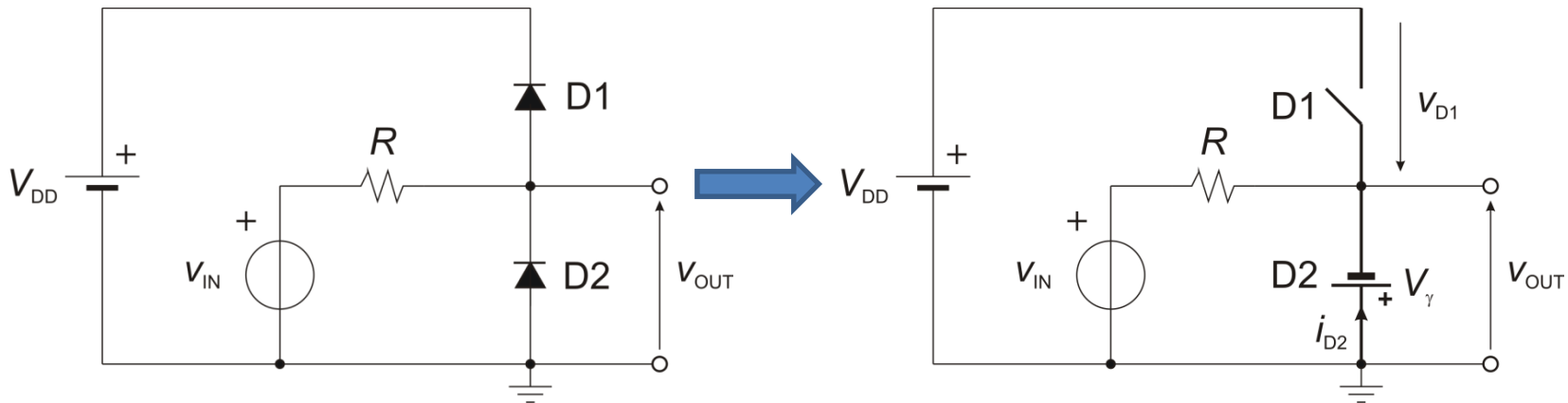
- Ipotesi: D1 OFF, D2 OFF
- Verificata per $-V_\gamma < v_{IN} < V_{DD} + V_\gamma$
- Quando è verificata $v_{OUT} = v_{IN}$

$$v_{OUT} = v_{IN} \text{ per } -V_\gamma < v_{IN} < V_{DD} + V_\gamma$$



Esercizio

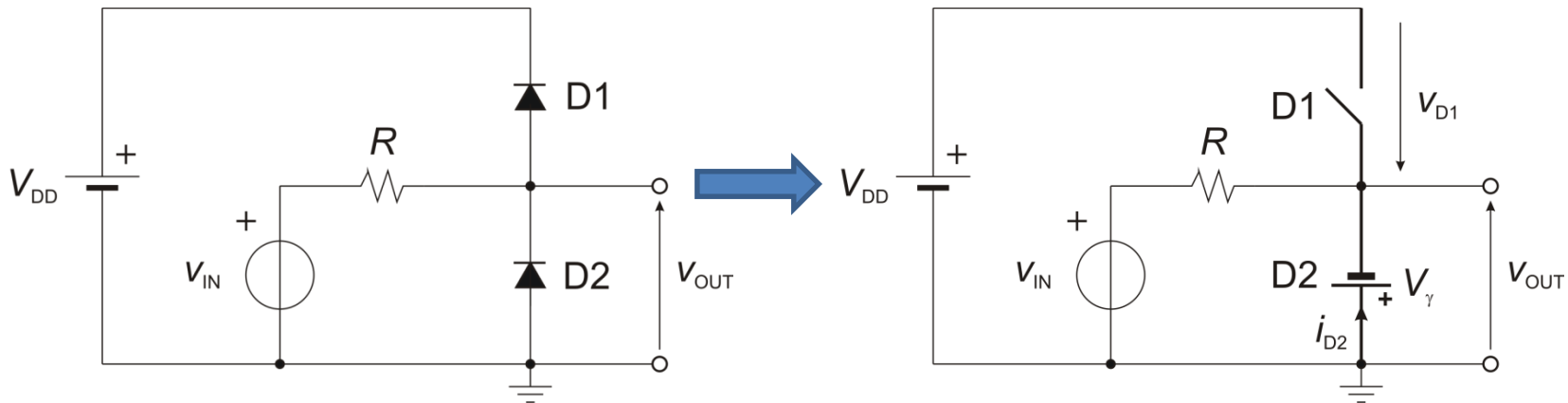
- Ipotesi: D1 OFF, D2 ON (si potrebbe procedere per esclusione...)
- Per verificare l'ipotesi calcoliamo v_{D1} e i_{D2} :
- $v_{D1} = -V_{DD} - V_\gamma$, $i_{D2} = \frac{-v_{IN} - V_\gamma}{R}$
- Verif. ip. D1 OFF: $v_{D1} < V_\gamma$ sempre verificata
- Verif. ip. D2 ON: $i_{D2} > 0 \rightarrow v_{IN} < -V_\gamma$



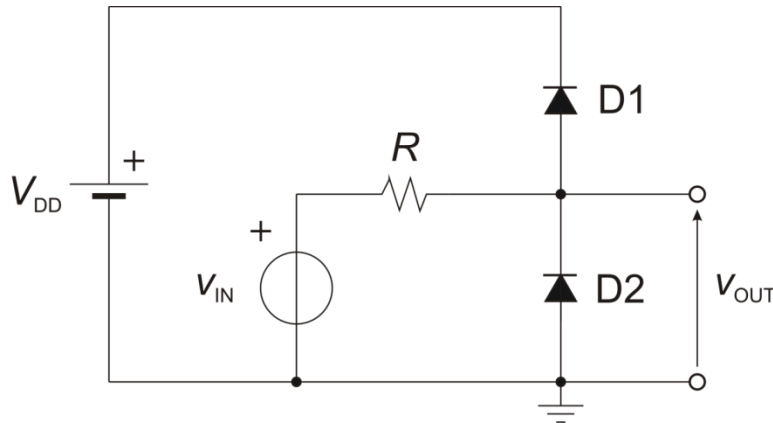
Esercizio

- Ipotesi: D1 OFF, D2 ON
- Verificata per $v_{IN} < -V_\gamma$
- Quando è verificata $v_{OUT} = -V_\gamma$

$$v_{OUT} = -V_\gamma \text{ per } v_{IN} < -V_\gamma$$



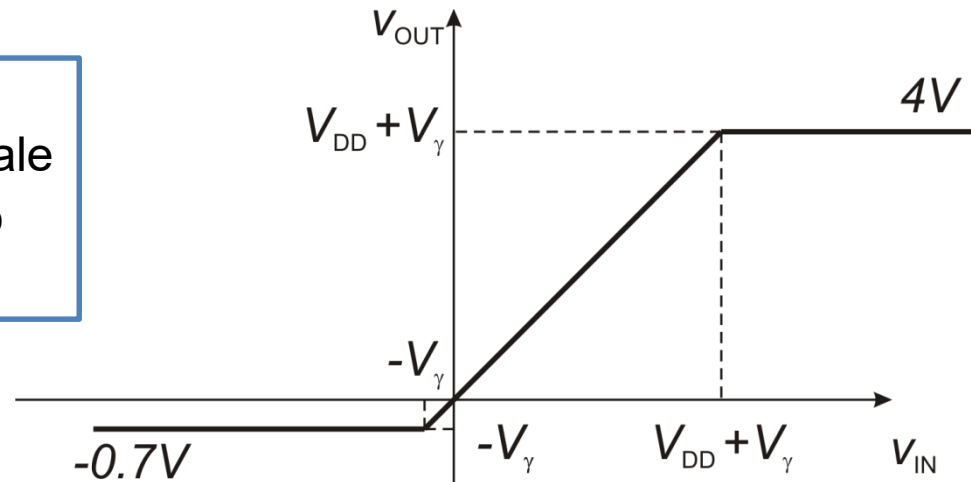
Esercizio: riepilogo soluzione



$$v_{OUT} = \begin{cases} -V_\gamma & v_{IN} < -V_\gamma \\ v_{IN} & -V_\gamma \leq v_{IN} \leq V_{DD} + V_\gamma \\ V_{DD} + V_\gamma & v_{IN} > V_{DD} + V_\gamma \end{cases}$$

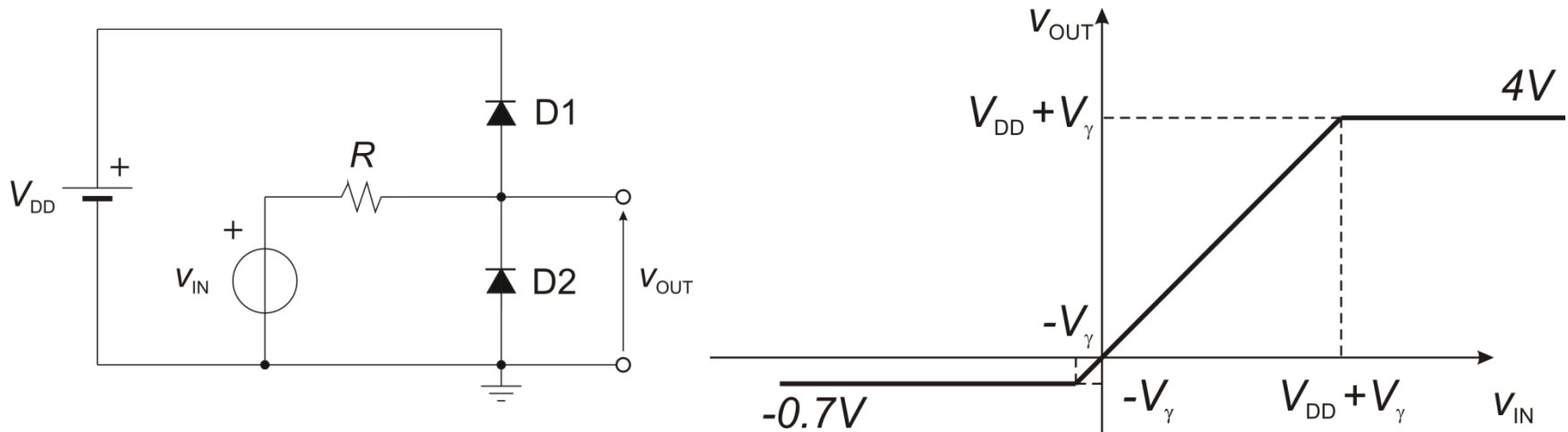
$$v_{OUT} = \begin{cases} -0.7V & v_{IN} < -0.7V \\ v_{IN} & -0.7V \leq v_{IN} \leq 4V \\ 4V & v_{IN} > 4V \end{cases}$$

In pratica: se v_{IN} è compresa tra $-V_\gamma$ e $V_{DD} + V_\gamma$ l'uscita è uguale all'ingresso, altrimenti il circuito limita v_{OUT} a $-V_\gamma$ o $V_{DD} + V_\gamma$



Protezione ESD (ElectroStatic Discharge)

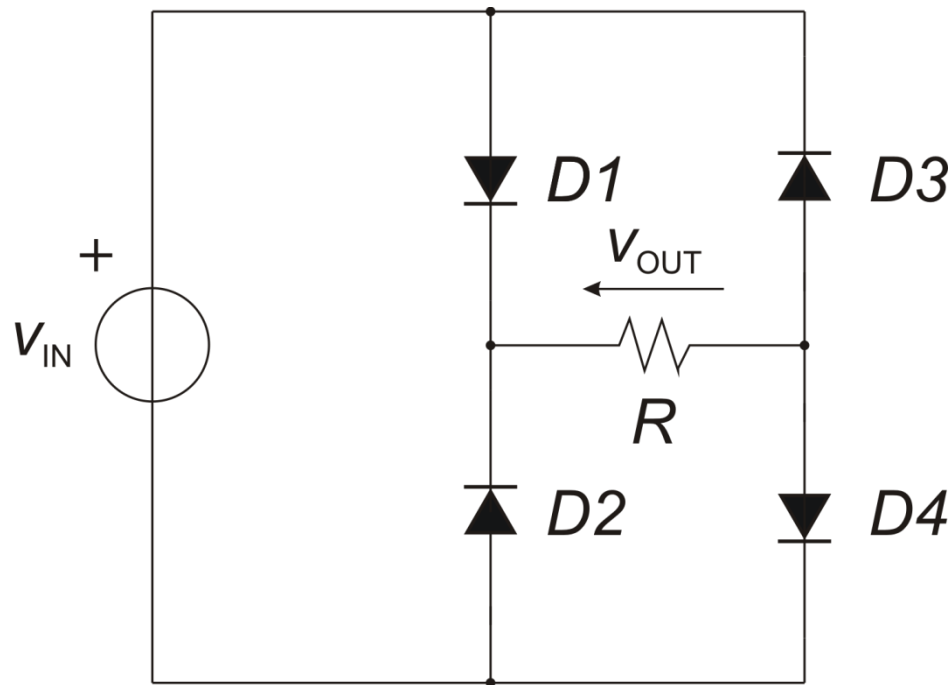
- L'applicazione di tensioni maggiori di quelle di progetto all'ingresso di un circuito integrato può comportarne l'immediato danneggiamento.
- Il circuito è utilizzato per proteggere gli ingressi di un circuito integrato da tensioni troppo positive/negative e potenzialmente distruttive, ad es. in caso di contatto con un corpo carico elettrostaticamente.



Esercizio

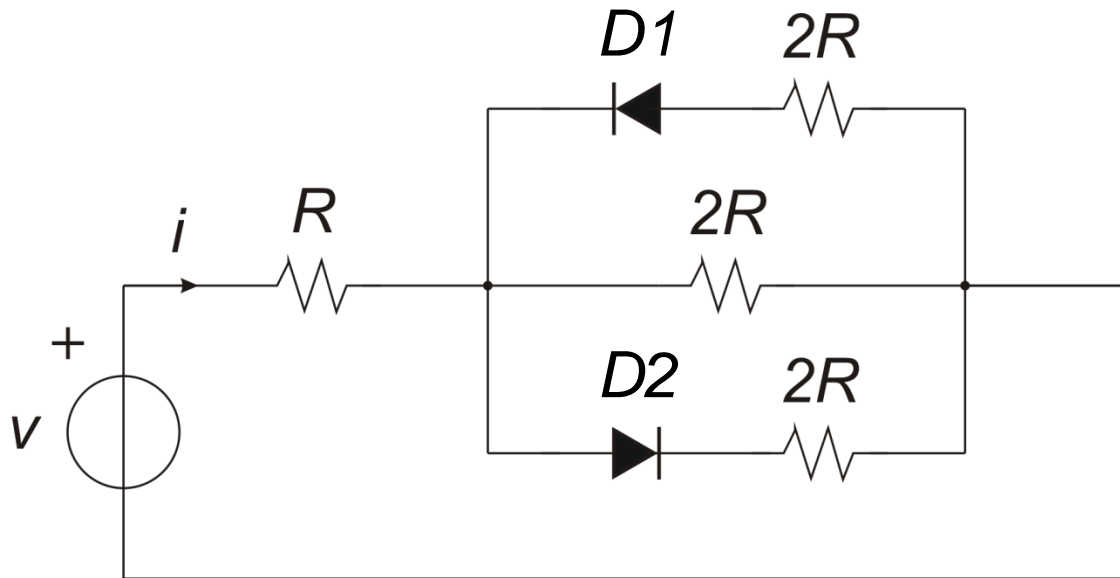
Determinare v_{OUT} al variare di v_{IN} , considerando i diodi ideali.

Assumendo $v_{IN} = V_{in}\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$, con $V_{in} = 220V$, $f_0 = 50Hz$ determinare poi l'andamento nel tempo di v_{OUT} .



Esercizio

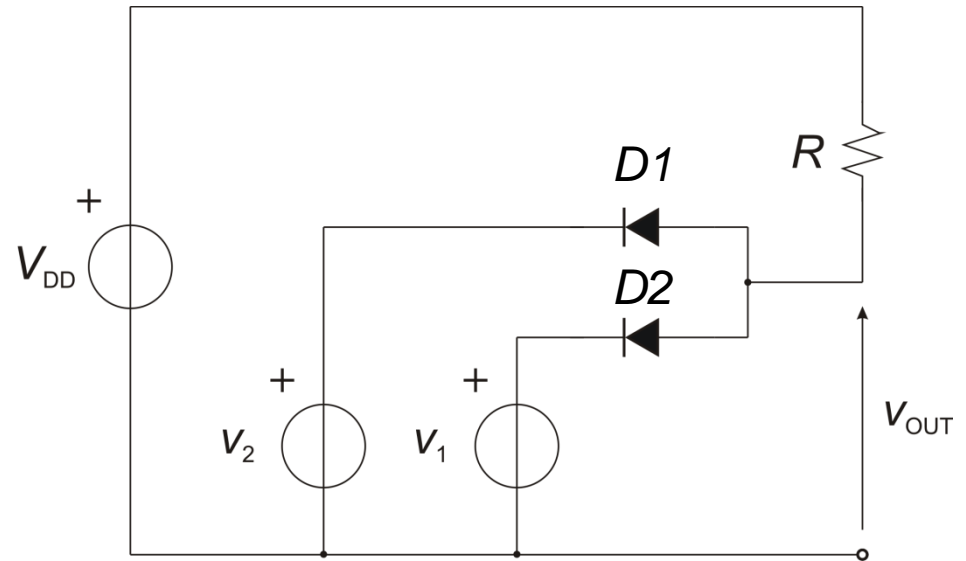
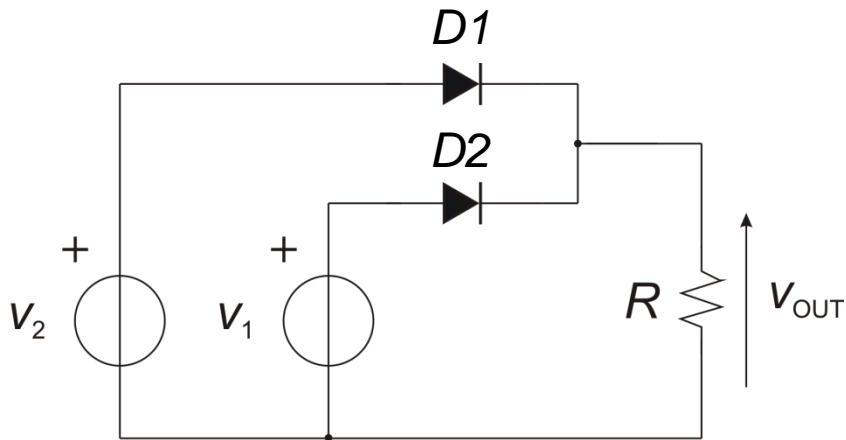
Determinare i al variare di v , considerando i diodi semi-ideali con $V_\gamma = 0.7\text{V}$ e tracciare $i(v)$ per $-2\text{V} < v < 2\text{V}$ e $R = 1\text{k}\Omega$



Esercizio

Determinare v_{OUT} nei due circuiti per i valori di v_1 e v_2 (costanti nel tempo) indicati in tabella, assumendo che i diodi siano ideali e che $V_{DD} = 5V$.

| v_1 | v_2 | v_{OUT} Circuito 1 | v_{OUT} Circuito 2 |
|-------|-------|-------------------------|-------------------------|
| 0V | 0V | | |
| 0V | 5V | | |
| 5V | 0V | | |
| 5V | 5V | | |



Analisi di Circuiti con Diodi

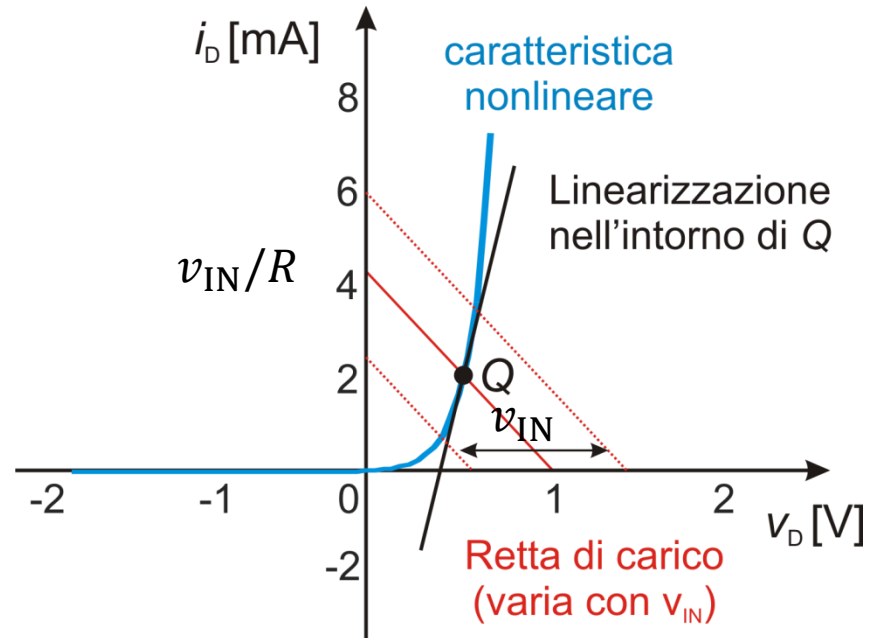
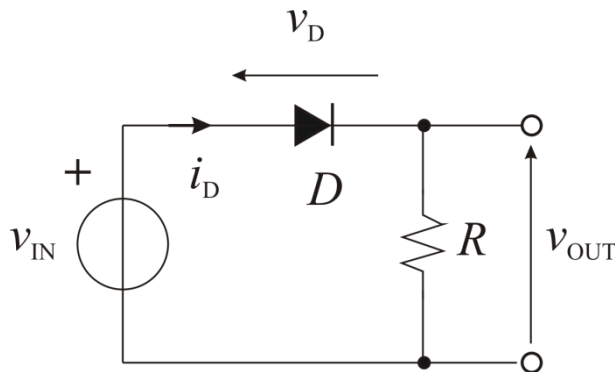
- Le approssimazioni che abbiamo considerato fino ad ora descrivono la caratteristica non-lineare del diodo nella sua interezza ma localmente possono essere significativamente non accurate.
- Quando non interessa il comportamento non-lineare nel suo complesso (perché l'ampiezza dei segnali in gioco è ridotta), ma è necessaria una maggiore accuratezza in una regione ristretta della caratteristica è opportuno un approccio completamente diverso:

Analisi di piccolo segnale

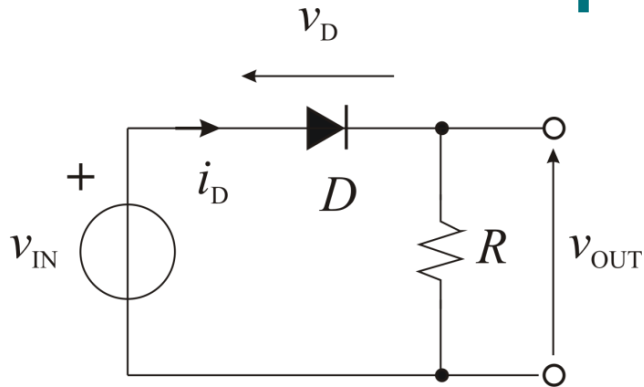


Linearizzazione e piccolo segnale

- Quando le grandezze di interesse in un dispositivo non-lineare variano di poco nell'intorno di un punto Q della caratteristica, detto **punto di lavoro** o **punto di funzionamento a riposo**, è possibile linearizzarne la caratteristica in quel punto.
- Si approssima la caratteristica non-lineare con la tangente in Q



Linearizzazione e piccolo segnale



**Caratteristica
non-lineare**

$$i_D = I_S(e^{v_D/\eta V_T} - 1)$$

**Approssimazione
lineare**

$$i_D \cong I_D + g_d (v_D - V_D)$$

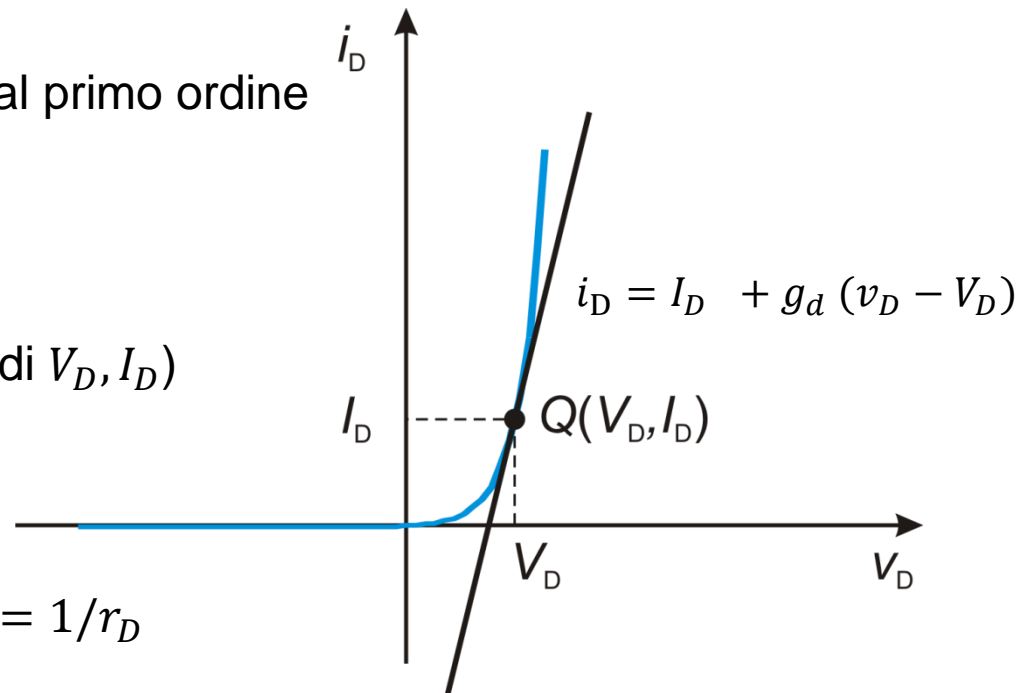
Sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine

$$i_D \cong i_D \Big|_{v_D=V_D} + \frac{\partial i_D}{\partial v_D} \Big|_{v_D=V_D} (v_D - V_D)$$

Coefficienti dello sviluppo (funzione di V_D, I_D)

$$i_D \Big|_{v_D=V_D} = I_S(e^{V_D/\eta V_T} - 1) = I_D$$

$$\frac{\partial i_D}{\partial v_D} \Big|_{v_D=V_D} = \frac{I_S}{\eta V_T} e^{V_D/\eta V_T} \cong \frac{I_D}{\eta V_T} = g_d = 1/r_D$$



Linearizzazione e piccolo segnale

- E' conveniente scomporre le grandezze elettriche in
 - **componenti nel punto di lavoro Q**, dette anche **di polarizzazione**;
 - e **variazioni**, dette anche **componenti di piccolo segnale**.
- Passare dalle grandezze totali alle variazioni corrisponde ad eseguire una traslazione degli assi che porta Q nell'origine

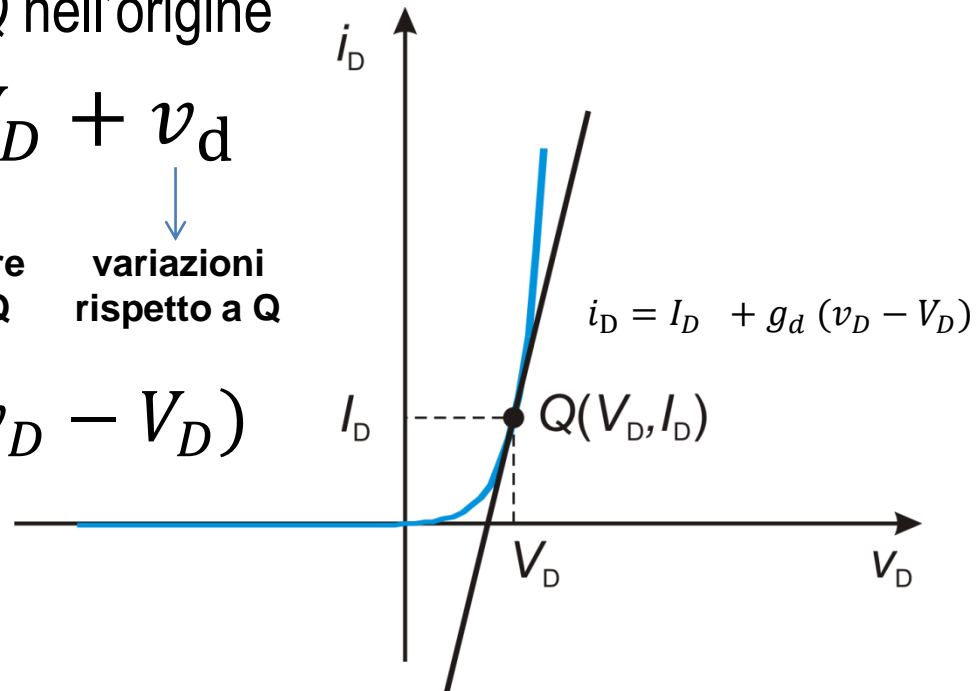
$$\begin{array}{ccccc} i_D = I_D + i_d & v_D = V_D + v_d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{corrente} & \text{valore} & \text{variazioni} & \text{tensione} & \text{valore} & \text{variazioni} \\ \text{totale} & \text{in Q} & \text{rispetto a Q} & \text{totale} & \text{in Q} & \text{rispetto a Q} \end{array}$$

relazione
linearizzata in Q:

$$i_D = I_D + g_d (v_D - V_D)$$

considerando
solo le variazioni:

$$i_d = g_d v_d$$



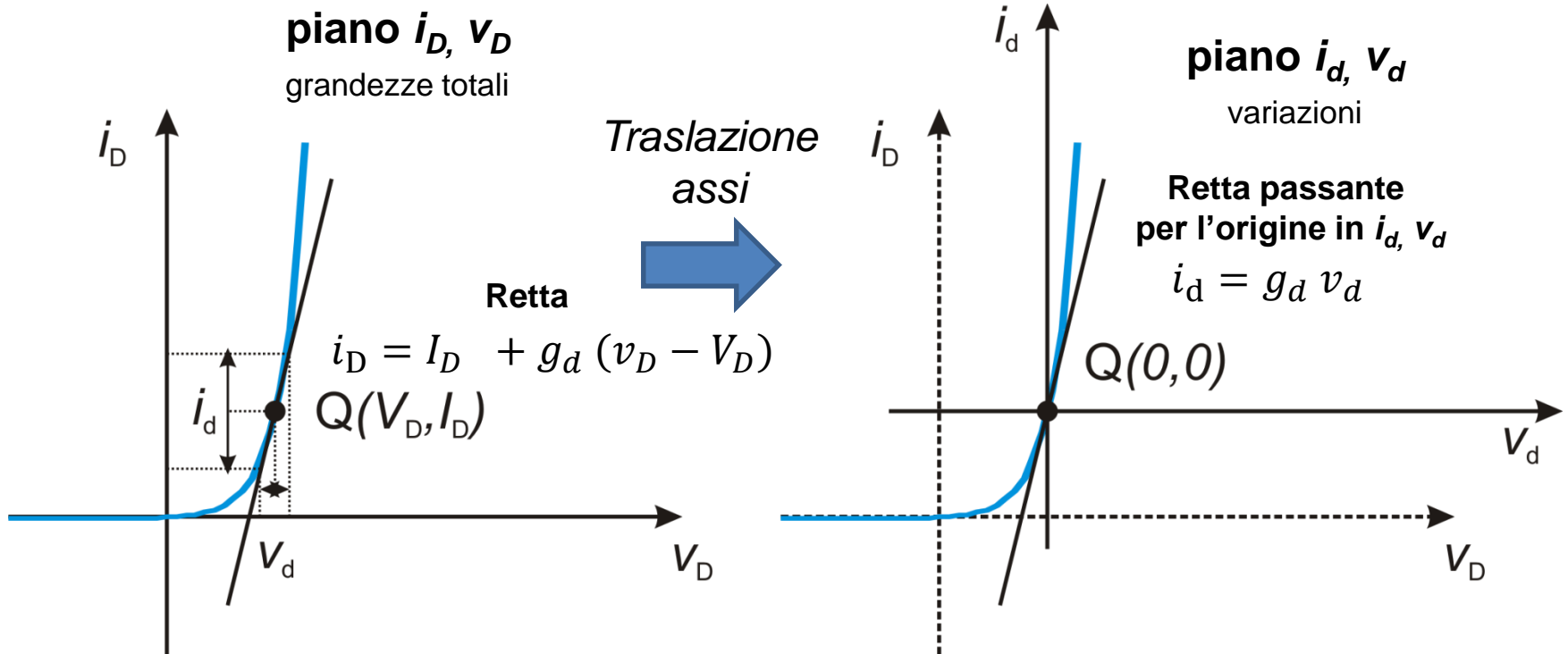
Linearizzazione e piccolo segnale

$$i_d = i_D - I_D$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 variazioni corrente valore
 rispetto a Q totale in Q

$$v_d = v_D - V_D$$

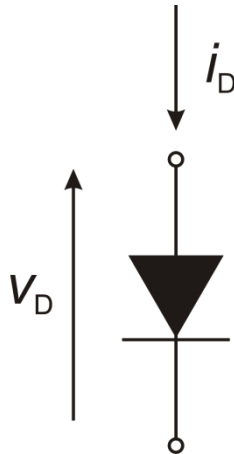
\downarrow \downarrow \downarrow
 variazioni tensione valore
 rispetto a Q totale in Q



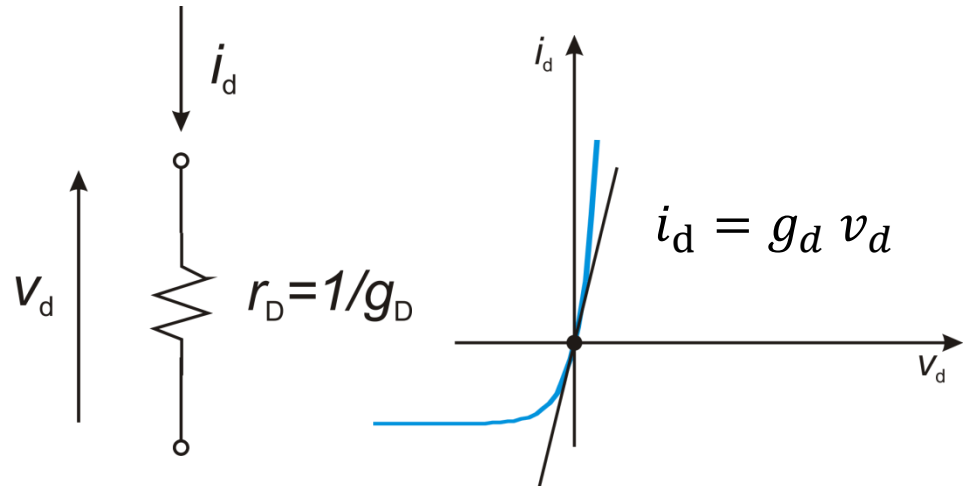
Linearizzazione e piccolo segnale

- In Elettronica spesso si è interessati solo alle *variazioni* (piccolo segnale) piuttosto che alle grandezze totali.
- Determinato il punto di lavoro, è possibile analizzare le sole variazioni (purchè piccole) facendo riferimento ad un circuito *lineare*.
- I dispositivi non-lineari sono sostituiti da un *circuito equivalente di piccolo segnale* valido in un intorno del punto di lavoro dato.

dispositivo nonlineare

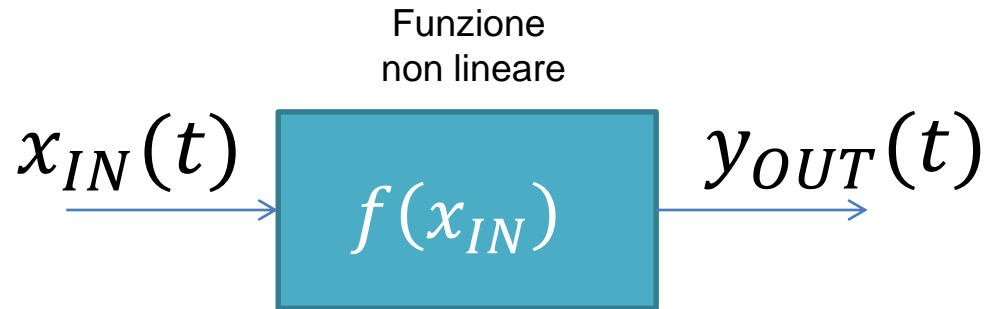


circuito equivalente per il piccolo segnale



Linearizzazione e piccolo segnale

- L'approccio, basato sullo sviluppo in serie di Taylor noto dai corsi di Analisi è generalizzabile a qualsiasi elemento circuitale che presenti relazioni costitutive non-lineari.



$$x_{IN}(t) = X_{IN} + x_{in}(t)$$

↓ ↓ ↓

grandezza componente variazioni
totale di polarizzazione

$$y_{OUT}(t) = Y_{OUT} + y_{out}(t)$$

↓ ↓ ↓

grandezza componente variazioni
totale di polarizzazione



Linearizzazione e piccolo segnale

$$y_{OUT}(t) = f(x_{IN}(t)) = f(X_{IN} + x_{in}(t))$$

Sviluppo in serie di Taylor
arrestato al primo ordine

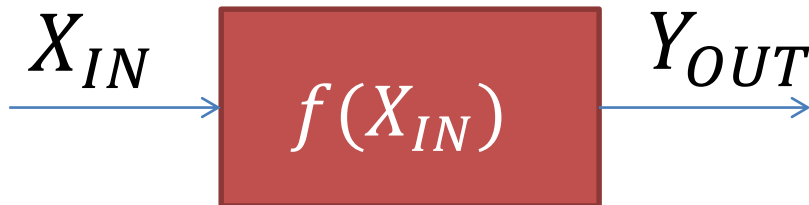
$$= f(X_{IN}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=X_{IN}} x_{in}(t) + o(|x_{in}|)$$

$$= Y_{OUT} + y_{out}(t)$$

per determinare il punto di lavoro:

$$Y_{OUT} = f(X_{IN})$$

sistema non-lineare statico



per studiare le variazioni:

$$y_{out}(t) = \alpha x_{in}$$

sistema linearizzato

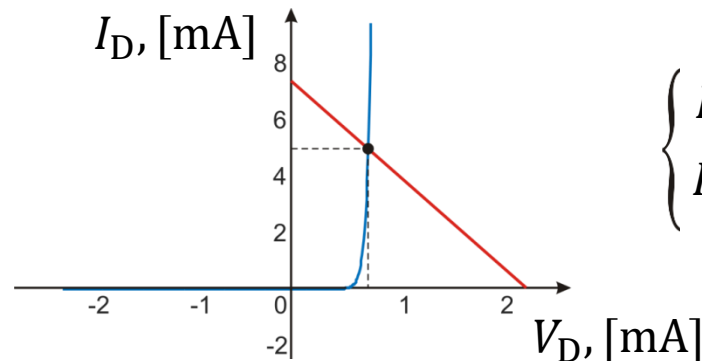
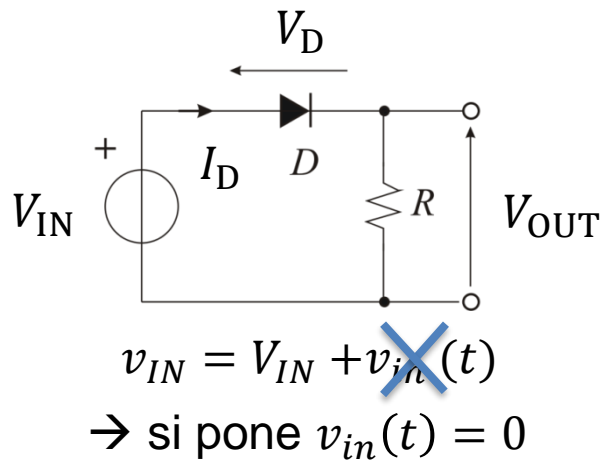
$\alpha = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=X_{IN}}$ dipende dal punto di lavoro



Analisi di Piccolo Segnale: passi operativi (I)

1) Si determina il *punto di lavoro* Q:

- Si considerano solo le grandezze elettriche **costanti nel tempo**, ossia:
 - si spengono i generatori variabili nel tempo (ma non la componente continua se è non nulla)
 - essendo $\partial/\partial t = 0$ per grandezze costanti nel tempo:
 - i condensatori si sostituiscono con circuiti aperti
 - gli induttori si sostituiscono con corto circuiti
 - si considerano le caratteristiche *non-lineari statiche* degli elementi non-lineari, eventualmente i modelli semplificati di ampio segnale.
 - si analizza il circuito e si determina **punto di lavoro Q** degli elementi non-lineari



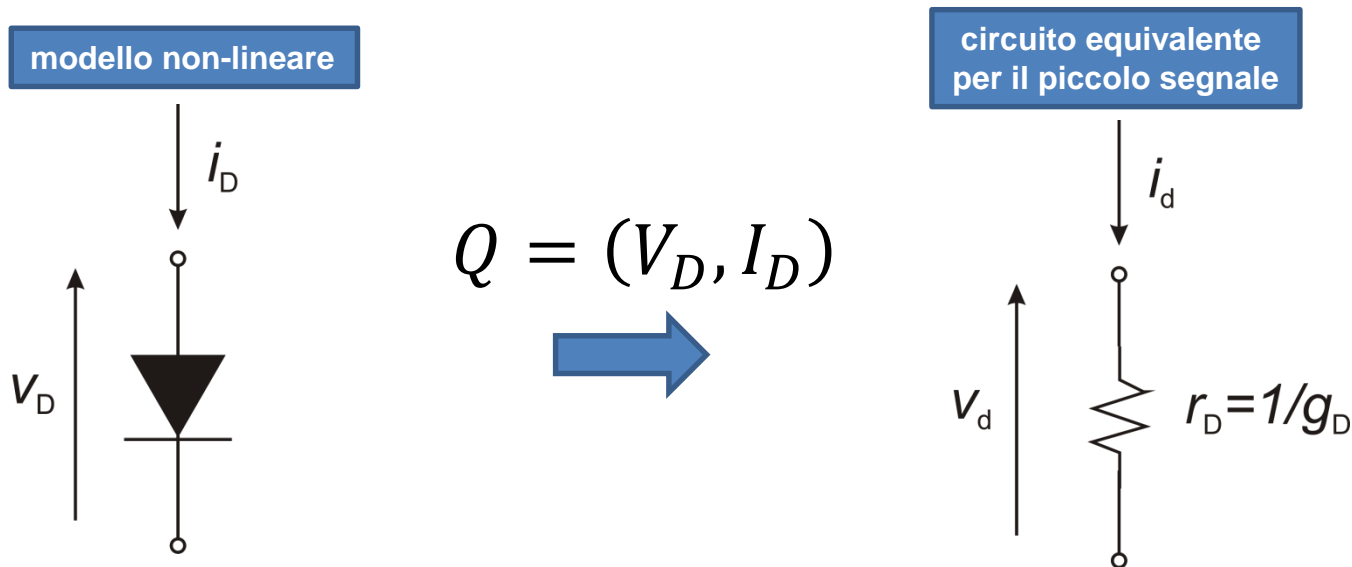
$$\begin{cases} I_D = I_S(e^{V_D/\eta V_T} - 1) \\ R I_D = V_{IN} - V_D \end{cases}$$



Analisi di Piccolo Segnale: passi operativi (II)

2) Si determina il *circuito equivalente per il piccolo segnale*:

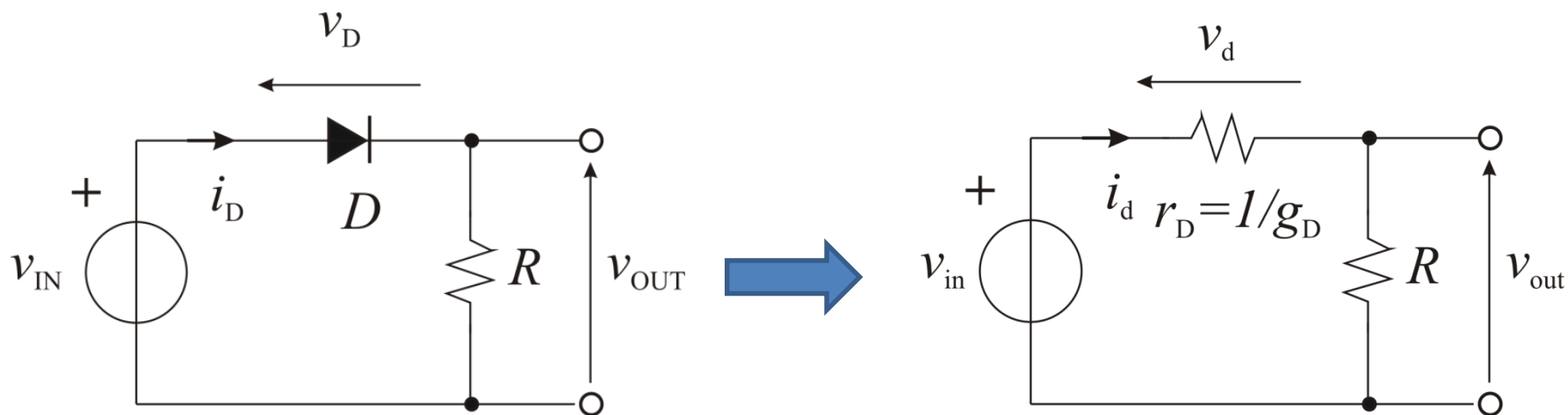
- Si considerano solo le grandezze elettriche **variabili nel tempo**, ossia:
 - si spengono i generatori costanti nel tempo, si considerano **solo le componenti di segnale**
 - si considerano gli elementi reattivi (condensatori e induttori), se presenti.
- Per gli elementi non-lineari:
 - si determinano i parametri di piccolo segnale **nel punto di lavoro trovato al passo 1).**
 - si sostituiscono con i relativi **circuiti equivalenti per il piccolo segnale**



Analisi di Piccolo Segnale: passi operativi (III)

3) Si valutano le uscite con riferimento al circuito per il piccolo segnale

- Fintanto che le assunzioni che hanno portato alla linearizzazione sono valide, il circuito da analizzare è **lineare**:
 - Vale il principio di sovrapposizione degli effetti
 - Se il circuito è dinamico, si può analizzare nel dominio della frequenza (Trasf. di Fourier o Trasf. di Laplace)



$$v_{IN} = \cancel{V_{IN}} + v_{in}(t)$$

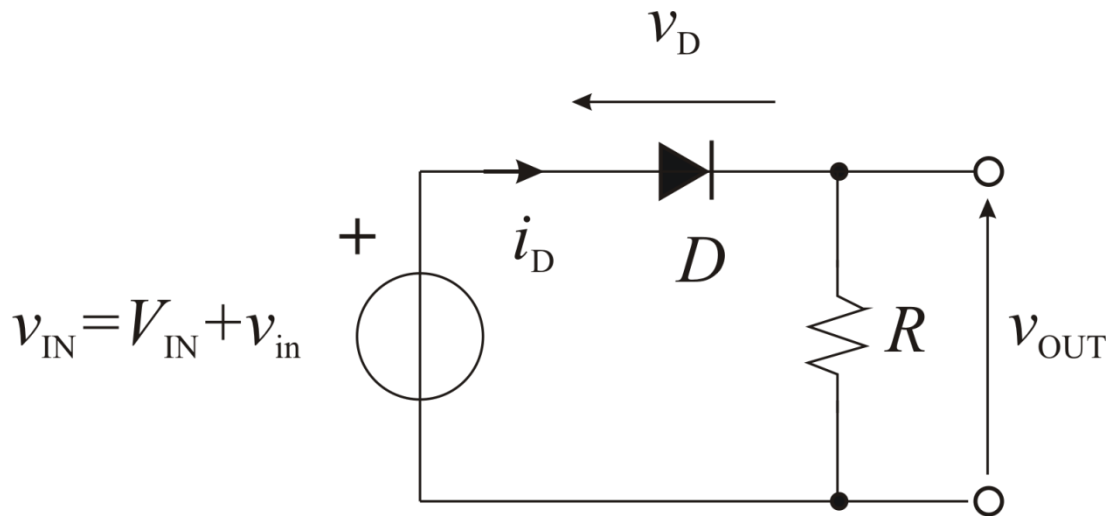
→ si pone $V_{IN} = 0$

$$v_{out}(t) = \frac{R}{R + r_D} v_{in}(t)$$



Esercizio

- E' dato il circuito in figura, in cui $v_{IN} = V_{IN} + v_{in}$ dove $v_{in} = V_{in} \sin(2\pi f_0 t)$ è una componente di piccolo segnale. Determinare la tensione di uscita v_{OUT} .

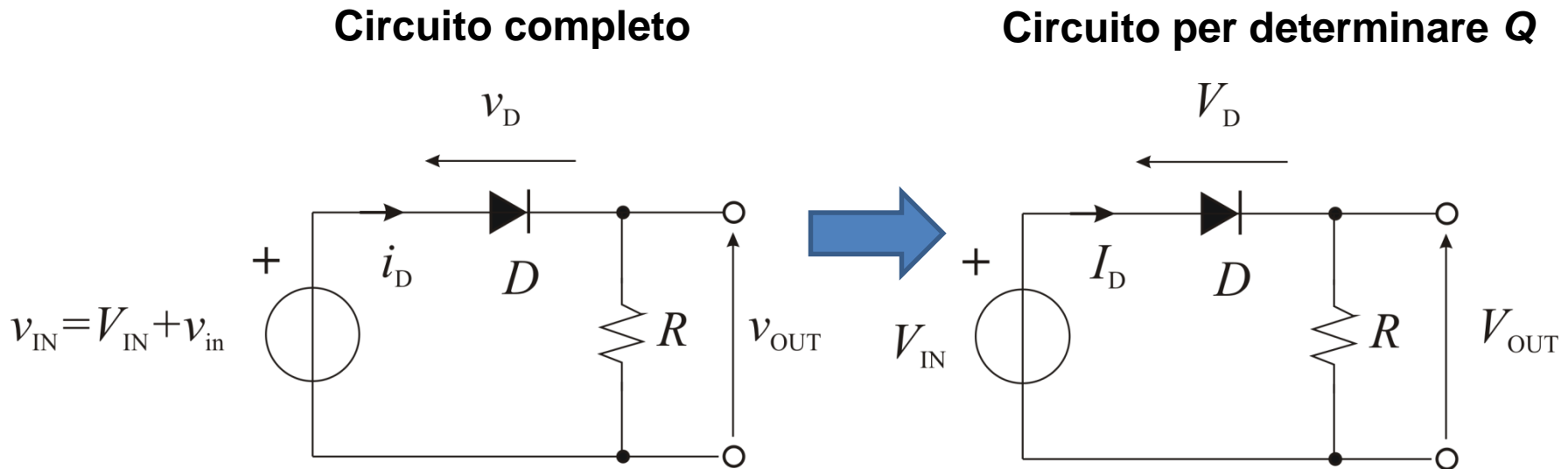


$$\begin{aligned} I_S &= 1\text{fA} \\ V_T &= 26\text{mV} \\ \eta &= 1 \\ V_{IN} &= 5\text{V} \\ V_{in} &= 50\text{mV} \\ f_0 &= 1\text{kHz} \\ R &= 10\text{k}\Omega \end{aligned}$$

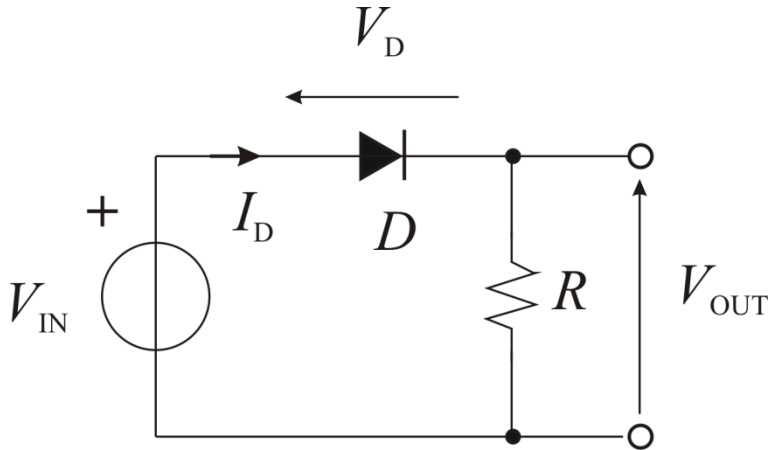


Esercizio

1. Si determina il *punto di lavoro* Q , con riferimento al circuito equivalente in condizioni statiche (detto anche *circuito per la polarizzazione*)
 - Generatori: si considerano le componenti costanti, le variazioni sono poste a zero
 - Elementi non-lineari (diodo): si analizzano con un modello non-lineare statico (eventualmente utilizzando approssimazioni per ampio segnale)



Esercizio



$$\begin{aligned} I_S &= 1\text{fA} \\ V_T &= 26\text{mV} \\ \eta &= 1 \\ V_{IN} &= 5\text{V} \\ V_{in} &= 50\text{mV} \\ R &= 10\text{k}\Omega \end{aligned}$$

Risolvendo numericamente:

$$V_{IN} - V_D = R I_S (e^{V_D / \eta V_T} - 1)$$

- si ottiene Q:

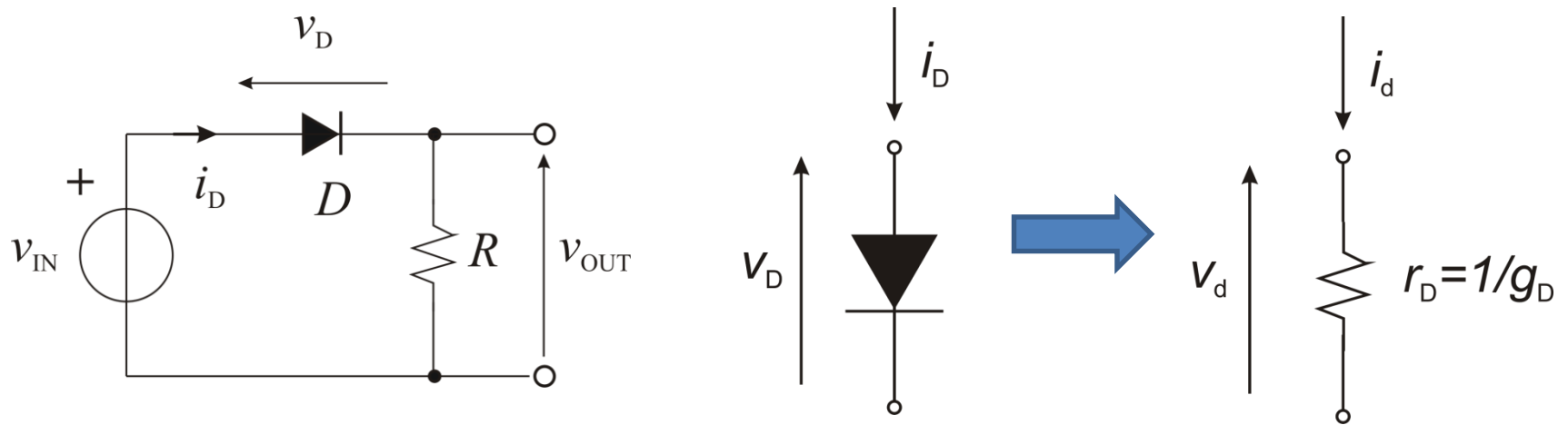
$$\begin{aligned} V_D &= 0.696\text{V} \\ I_D &= 430\mu\text{A} \\ V_{OUT} &= V_{IN} - V_D = 4.3\text{V} \end{aligned}$$

Dall'analisi per ampio segnale (diode semi-ideale), assumendo $V_\gamma = 0.7\text{V}$ si sarebbe ottenuto praticamente lo stesso risultato...



Esercizio

2. Noto il punto di lavoro Q , si determina il circuito equivalente per piccolo segnale del diodo in Q :



Punto di lavoro Q

$$V_D = 0.696V$$

$$I_D = 430\mu A$$

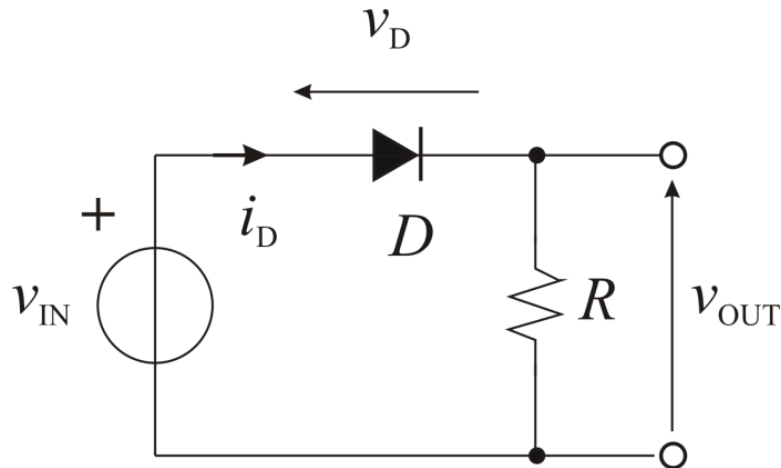
$$g_D = \frac{1}{r_D} = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_D} \right|_{v_D=V_D} = \frac{I_D}{\eta V_T} = \frac{430\mu A}{26mV} = 16mS \rightarrow r_D = \frac{1}{g_D} = 62\Omega$$



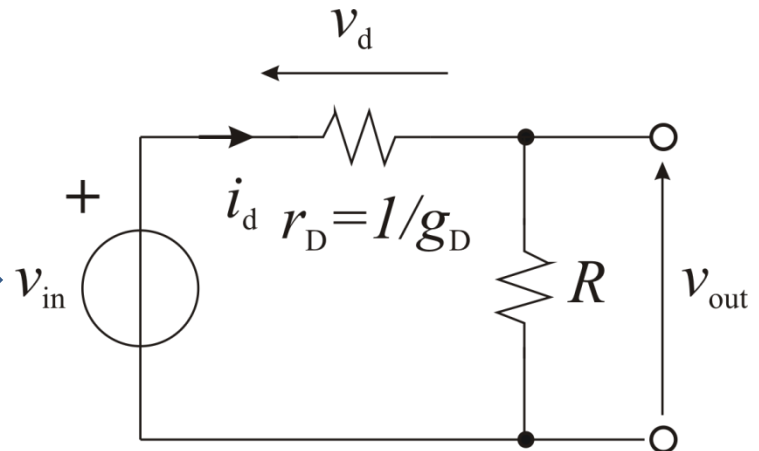
Esercizio

3. Si ricava il circuito lineare per le sole componenti di segnale, ossia:
- *Generatori: si considerano le variazioni, le componenti continue sono poste a zero.*
 - *Elementi non-lineari (diodo): si sostituiscono con il modello di piccolo segnale.*
 - *Elementi lineari: restano invariati.*

Circuito completo

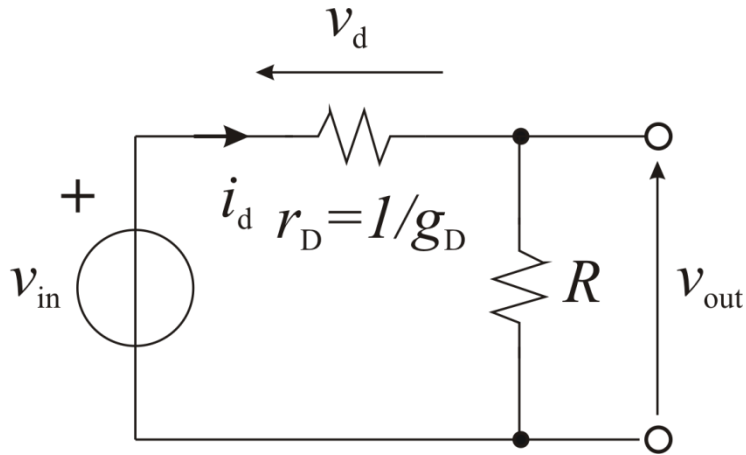


Circuito per il piccolo segnale



Esercizio

4. Si ricava la componente di piccolo segnale dell'uscita:



$$R = 10\text{k}\Omega$$

$$r_D = \frac{1}{g_D} = 62\Omega$$

$$v_{in} = V_{in} \sin(2\pi f_0 t)$$

$$V_{in} = 50\text{mV}$$

$$v_{out} = v_{in} \frac{R}{R+r_D} = V_{in} \frac{R}{R+r_D} \sin(2\pi f_0 t) = V_{out} \sin(2\pi f_0 t)$$

$$V_{out} = V_{in} \frac{R}{R+r_D} = 50\text{mV} * 0.993 = 49.6\text{mV}$$



Esercizio: soluzione

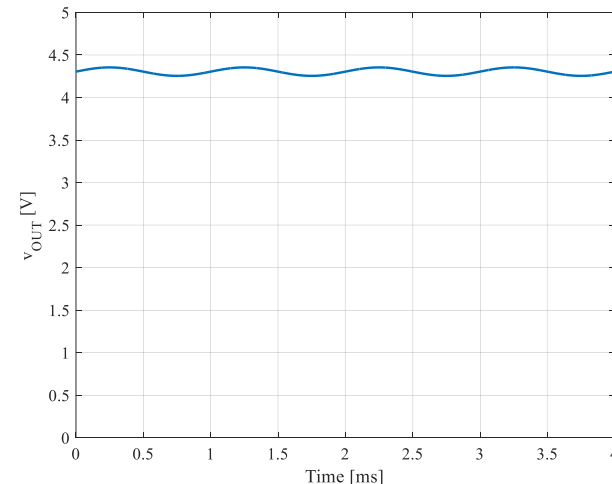
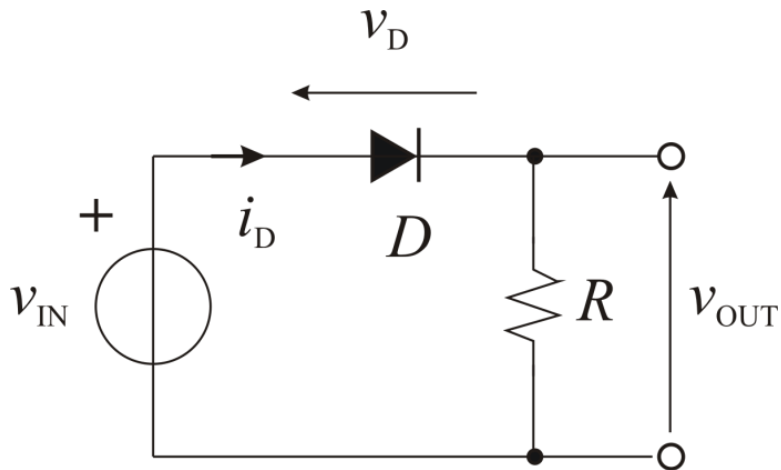
5. Si ricava la tensione totale sommando la componente continua nel punto di lavoro valutata precedentemente (punto 1) alla componente di segnale (punto 4).

$$v_{OUT} = V_{OUT} + v_{out}$$

$$v_{OUT} = V_{OUT} + V_{out} \sin(2\pi f_0 t)$$

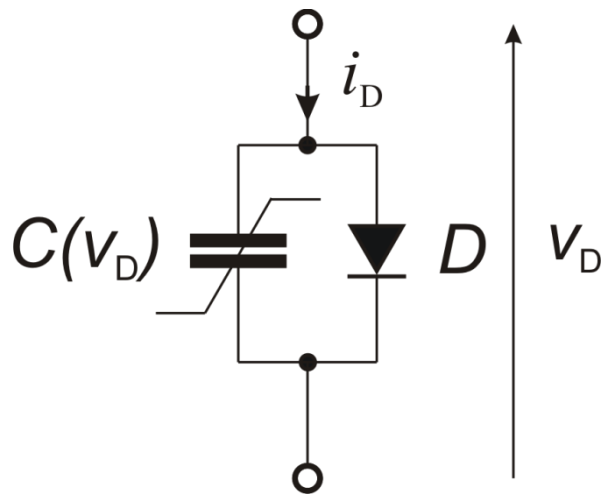
$$V_{out} = V_{in} \frac{R}{R + r_D} = 49.6 \text{ mV}$$

$$V_{OUT} = 4.3 \text{ V}$$



Analisi di Circuiti con Diodi – Condizioni Dinamiche

- Le tecniche di analisi presentate fino ad ora valgono in *condizioni statiche o quasi-statiche* (variazioni sufficientemente lente)
- Per variazioni rapide, il comportamento ad un dato istante non dipende solo dagli ingressi applicati a quell'istante, ma anche dalla storia passata.
- Questi effetti di memoria sono descritti da elementi reattivi. Per il diodo, capacità nonlineare



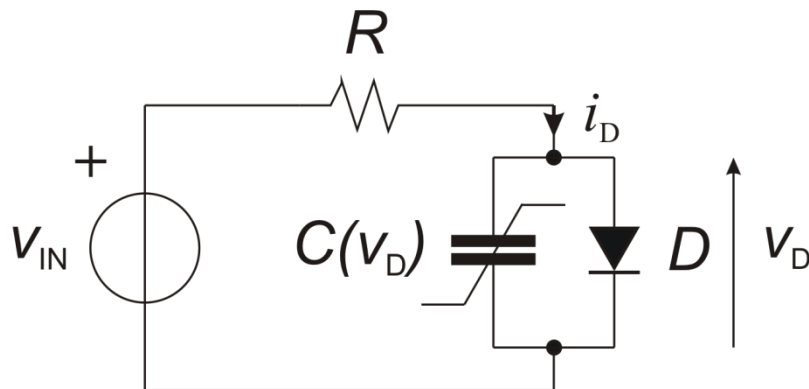
$$C(v_D) = \underbrace{\frac{C_{s0}}{\sqrt{V_{bi} - v_D}}}_{\text{Capacità di Svuotamento}} + \underbrace{C_{d0} e^{v_D/V_T}}_{\text{Capacità di Diffusione}}$$

Legata alle variazioni della carica nella regione svuotata, domina in pol. inversa

domina in pol. diretta

Analisi di Circuiti con Diodi – Condizioni Dinamiche

- L'analisi di circuiti non lineari in condizioni dinamiche richiede la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie (ODE) nonlineari, non trattabili analiticamente nemmeno in casi semplici. ☹
- In generale, non è possibile utilizzare l'analisi nel dominio della frequenza (trasformata di Fourier o di Laplace) ☹...



$$RC(v_D) \frac{dv_D}{dt} = v_{IN} - v_D - RI_S(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1)$$

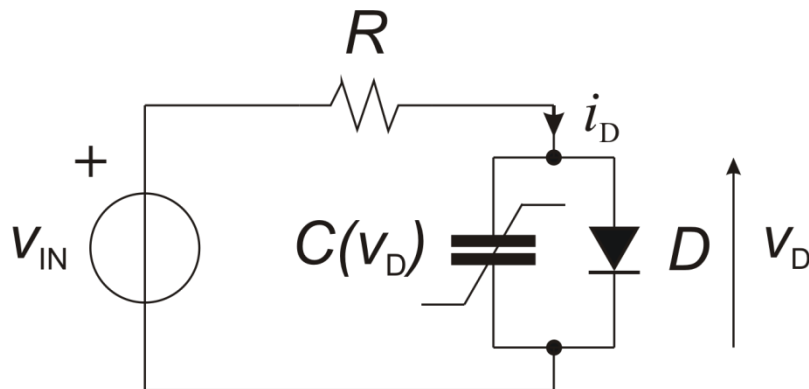
dove:

$$C(v_D) = \frac{C_{s0}}{\sqrt{V_{bi} - v_D}} + C_{d0}e^{v_D/V_T}$$



Analisi di Circuiti con Diodi – Condizioni Dinamiche

- L'analisi linearizzata permette di affrontare il problema in modo relativamente semplice nell'ipotesi di piccolo segnale.
 - Per il calcolo del punto di funzionamento a riposo: si considerano grandezze continue, quindi $d/dt=0 \rightarrow$ ci si riconduce al caso non-lineare statico
 - Nel circuito di piccolo segnale: il circuito è lineare ☺, si possono quindi utilizzare i metodi visti in Elettrotecnica ed in particolare l'analisi nel dominio della frequenza.



$$C(v_D) \frac{dv_D}{dt} \cong \left[C(V_D) + \left. \frac{\partial C}{\partial v_D} \right|_{v_D=V_D} (v_D - V_D) + \dots \right] \frac{dv_D}{dt}$$

prendendo solo il termine del primo ordine in v_D

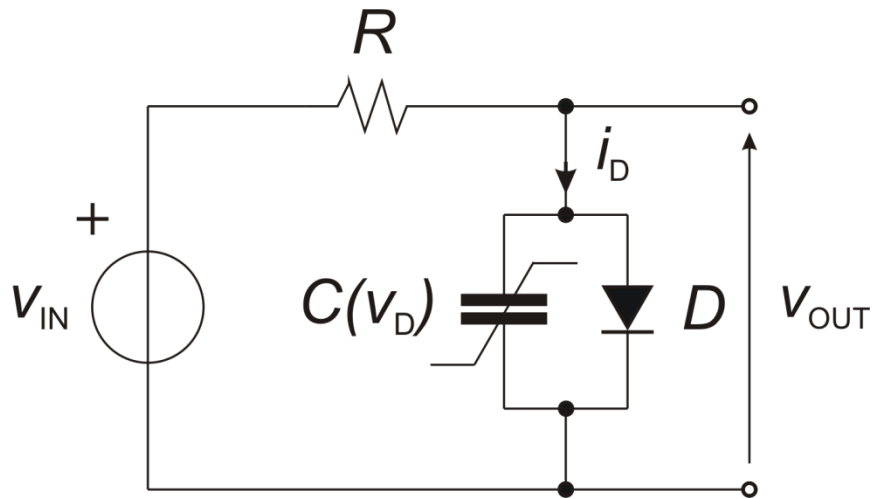
$$C(v_D) \frac{dv_D}{dt} \cong C(V_D) \frac{dv_D}{dt} = C(V_D) \frac{dv_d}{dt}$$

La capacità nel circuito linearizzato corrisponde al valore della capacità nonlineare valutato nel punto di lavoro Q



Esercizio

- E' dato il circuito in figura, dove $v_{IN} = V_{IN} + v_{in}$ dove $v_{in} = V_{in} \sin(2\pi f_{in} t)$. Si determini v_{OUT} .



$$C(V_D) = \frac{C_{s0}}{\sqrt{1 - V_D/V_0}}$$

$$C_{s0} = 20 \text{ pF}$$

$$V_0 = 1 \text{ V}$$

$$I_S = 1 \text{ fA}$$

$$V_T = 26 \text{ mV}$$

$$\eta = 1$$

$$V_{IN} = -5 \text{ V}$$

$$V_{in} = 100 \text{ mV}$$

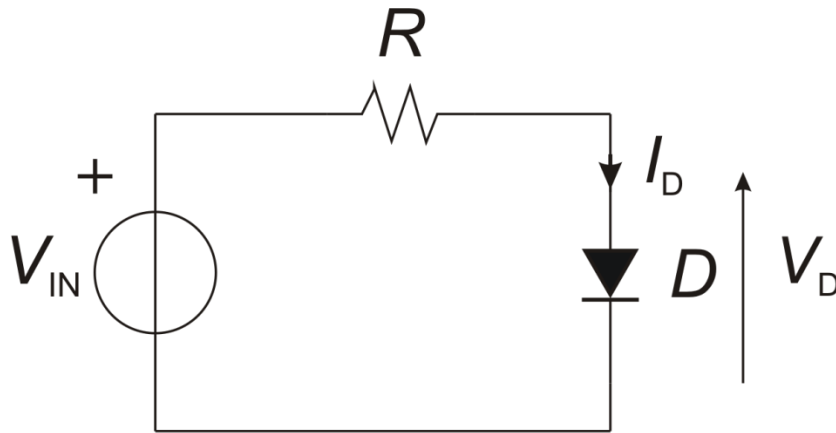
$$f_0 = 250 \text{ kHz}$$

$$R = 100 \text{ k}\Omega$$



Esercizio

- Punto di funzionamento a riposo: il diodo è in polarizzazione inversa, la corrente che vi fluisce è I_S , praticamente nulla.

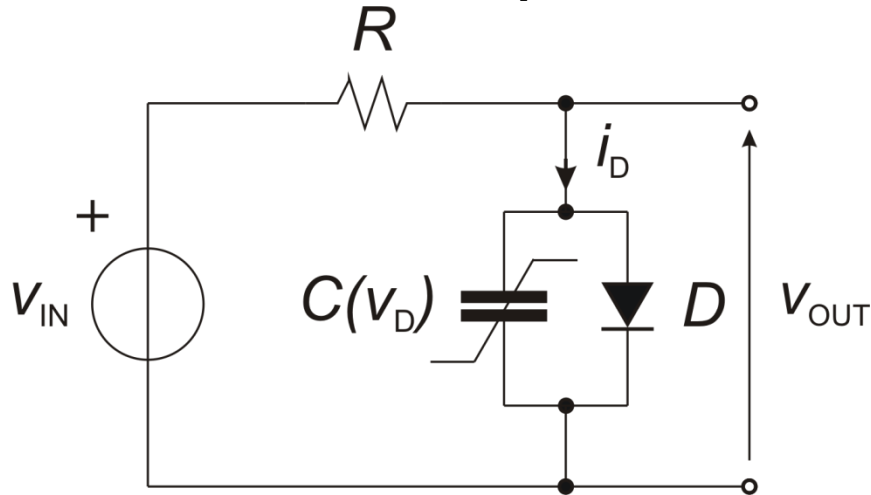


$$\begin{aligned} I_D &= 0 \\ V_D &= -5V \end{aligned}$$

Esercizio

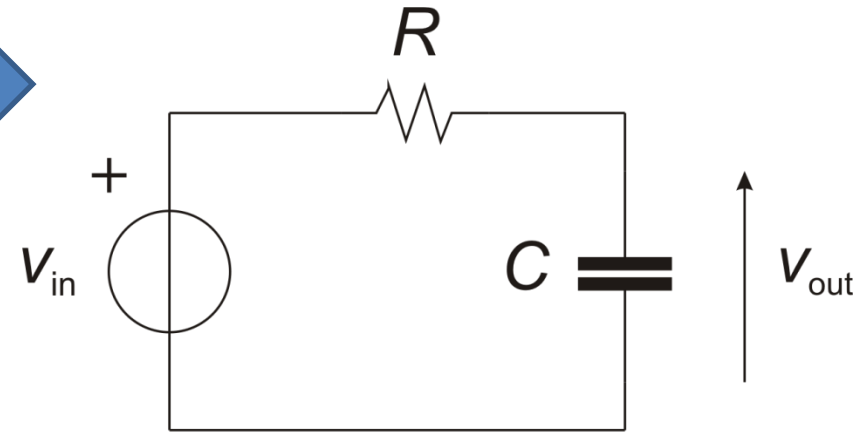
- Circuito equivalente per il piccolo segnale (la capacità è lineare)

Circuito completo



$$\begin{aligned} I_D &= 0 \\ V_D &= -5V \end{aligned}$$

Circuito per il piccolo segnale



$$C_{s0} = 20\text{pF}$$

$$V_0 = 1V$$

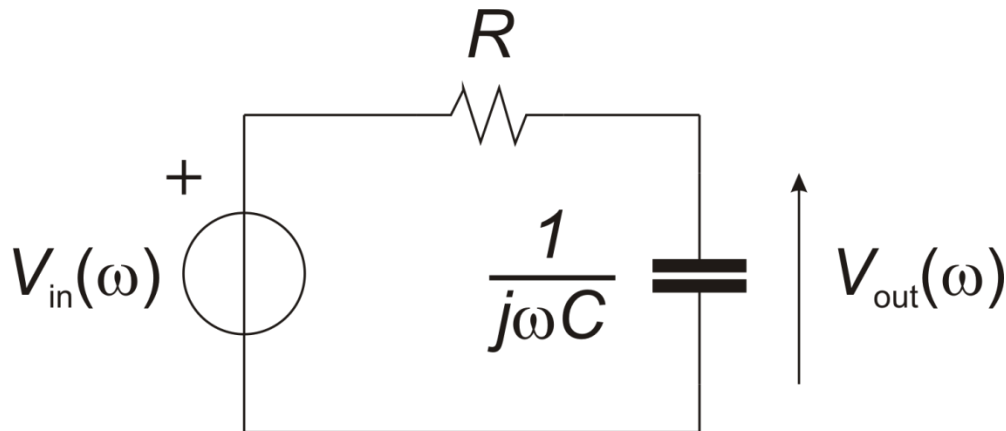
$$C = C(V_D) = \frac{C_{s0}}{\sqrt{1 - V_D/V_0}} = 8.1\text{pF}$$



Esercizio

- Il circuito equivalente per il piccolo segnale può essere analizzato nel dominio della frequenza

Circuito per il piccolo segnale nel dominio della frequenza



$$R = 100\text{k}\Omega$$
$$C = 8.1\text{pF}$$

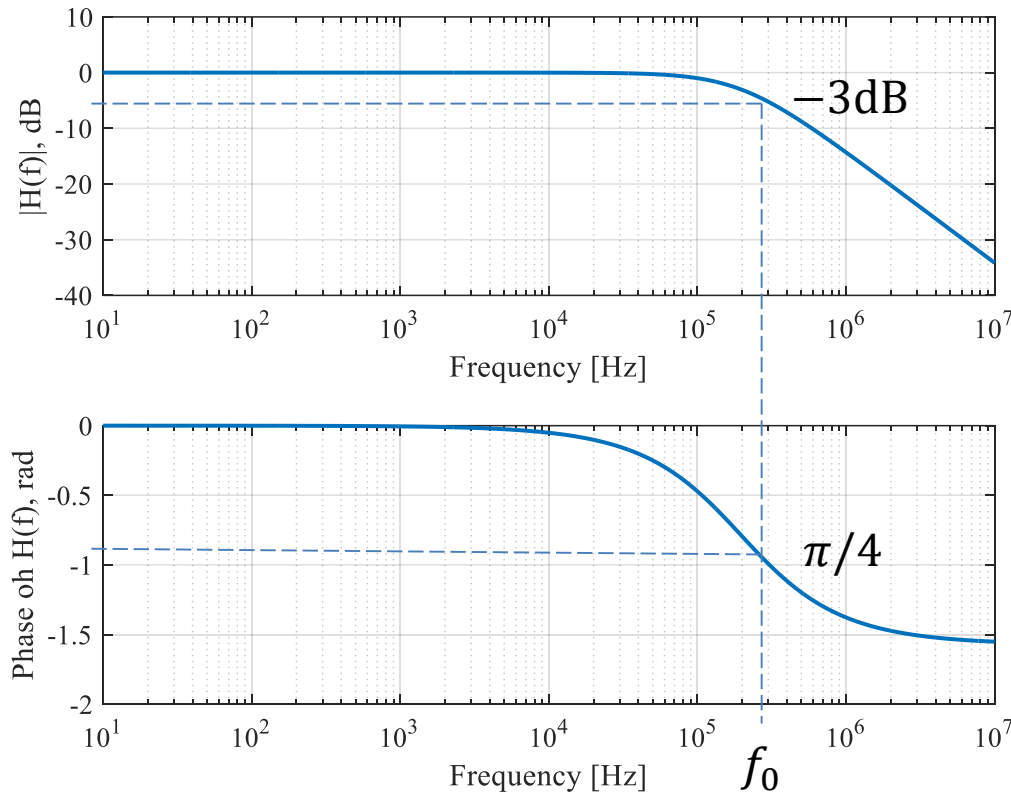
$$H(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 196\text{kHz}$$



Esercizio

■ Diagrammi di Bode



$$\frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 196\text{kHz}$$

$$@f_{in}=250\text{kHz}$$

$$|H(f_{in})| = 0.617 = -4.2\text{dB}$$

$$\angle H(f_{in}) = -0.906 \text{ rad}$$



Esercizio

- Dalla funzione di trasferimento si ricava la componente di segnale dell'uscita ed infine, aggiungendo V_{OUT} , l'uscita totale.

$$v_{OUT} = V_{OUT} + v_{out}$$

$$v_{OUT} = V_{OUT} + V_{out} \sin(2\pi f_{in} t + \varphi_{out})$$

$$V_{OUT} = V_{IN} = -5V$$

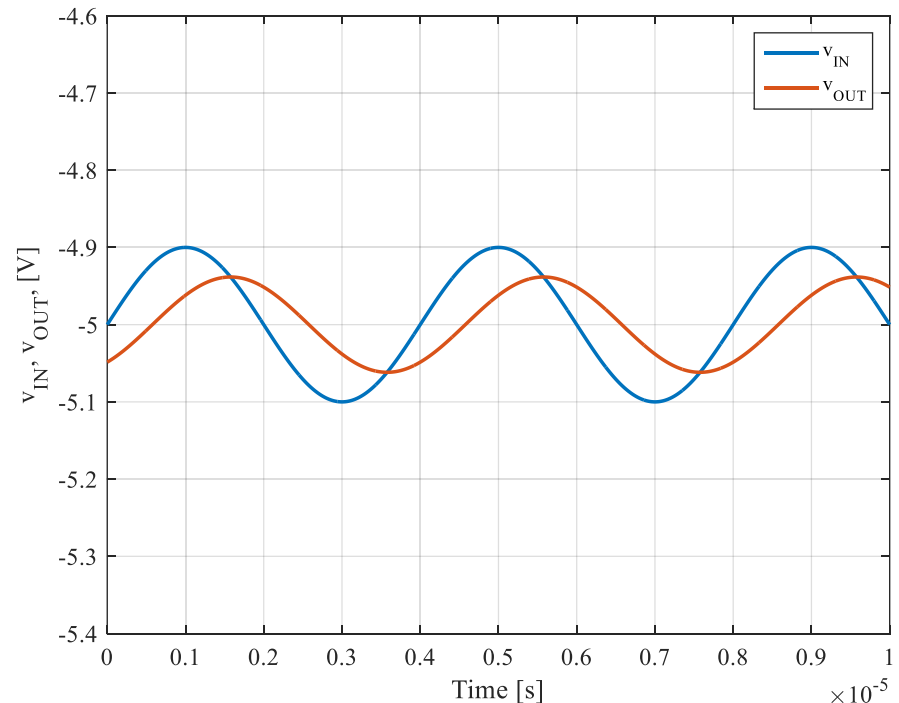
$$V_{in} = 100mV$$

$$|H(250kHz)| = 0.617 = -4.2dB$$

$$\angle H(250kHz) = -0.906 \text{ rad}$$

$$V_{out} = V_{in} |H(f_{in})| = 61.7mV$$

$$\varphi_{out} = \angle H(f_{in}) - 0.905 \text{ rad}$$



Varactor (Varicap)

- Il circuito analizzato si comporta come un filtro passa-basso RC
- Cambiando la tensione di polarizzazione (inversa), è possibile variare elettricamente la capacità di piccolo segnale in un certo intervallo (pF) e quindi la frequenza di taglio del filtro.
- Utilizzato nelle applicazioni come condensatore configurabile elettricamente (noto come *varactor*: *var*-iable re-*actor*, reattanza variabile o *varicap*: *vari*-able cap-*acitor*, condensatore variabile)

