

Cognome e Nome..... Matricola.....
Docente

ANALISI COMPLESSA
Appello del 1 FEBBRAIO 2013 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)

Trovare gli zeri della funzione complessa

$$f(z) = \frac{\sin(2\pi z)}{(z^4 - 16)^2},$$

nel suo naturale dominio di definizione $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$.

Esercizio 2 (3 punti)

Stabilire se la funzione

$$f(x + iy) := (x^2 - y^2) + i(x^2 + y^2), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

è analitica in \mathbb{C} .

Esercizio 3 (5 punti)

Si determini e si disegni l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(in)^5} e^{n\bar{z}}.$$

Esercizio 4 (4 punti)

Si calcoli

$$I := \int_{\gamma} \frac{dz}{z^3 - 2iz^2 + z - 2i},$$

dove γ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario avente come sostegno l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$.

Esercizio 5 (5 punti)

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) := \frac{\sin(z^4)}{z^{13}} - \frac{\alpha - 9}{z^9} + \frac{\alpha}{z}.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Esercizio 6 (4 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |2x| - \operatorname{sgn}(3x) + \operatorname{sgn}(4x^2 + 1).$$

Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f .

Esercizio 7 (4 punti)

Posto

$$f(x) = x^2 \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

verificare che la distribuzione T_f è temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

Esercizio 8 (5 punti)

- a) Siano date una distribuzione T ed una successione di distribuzioni T_n . Scrivere cosa significa che T_n converge a T nel senso delle distribuzioni.
- b) Dire se esiste il limite nel senso delle distribuzioni della successione $T_n = \delta_{n-n \log n}$, $n \geq 1$. In caso affermativo calcolare tale limite.