Disuguaglianza triangolare

$$|z+w| \le |z| + |w| \qquad \forall\, z,w \in \mathbb{C}$$

<u>Sol</u> È equivalente verificare che

$$|z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(z+w)\overline{(z+w)} \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\cancel{|z|^2} + z\bar{w} + \bar{z}w + \cancel{|w|^2} \le \cancel{|z|^2} + \cancel{|w|^2} + 2|z||w| \qquad \Longleftrightarrow$$

$$z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} \le 2|z||w| \qquad \Longleftrightarrow$$

$$2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le 2|z||\bar{w}| \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le 2|z\bar{w}| \qquad \text{CHE È VERO.}$$

Altrimenti in coordinate; ponendo

$$z = x+iy, \quad w = a+ib, \quad x,y,a,b \in \mathbb{R},$$

$$|z+w|^2 \le (|z|+|w|)^2 \iff$$

$$(x+a)^2+(y+b)^2 \le x^2+y^2+a^2+b^2+2\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} \iff$$

$$\cancel{2}xa+\cancel{2}yb \le \cancel{2}\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} \iff$$

si può supporre $xa+yb \ge 0$

$$(xa+yb)^2 \le (x^2+y^2)(a^2+b^2) \iff$$

$$\cancel{x^2a^2}+\cancel{y^2b^2}+2xayb \le \cancel{x^2a^2}+x^2b^2+y^2a^2+\cancel{y^2b^2} \iff$$

$$2xayb \le x^2b^2+y^2a^2 \iff$$

$$0 \le (xb-ya)^2$$ SEMPRE VERO.