Soluzioni appello del 21 febbraio 2022

1. **21 febbraio 2022 QTCa**

   Si consideri un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = f^2 \cdot e^{-j4\pi f}$, al cui ingresso sia inviato il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Sia $y(t)$ il corrispondente segnale di uscita. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $y(t) = A\ f^2\ \cos(2\pi f_0 t)$
   (b) $y(t) = A\ f_0^2\ \cos(2\pi f_0 (t-2))$ ✓
   (c) $y(t) = A\ f_0^2\ \cos(2\pi f_0 (t+2))$
   (d) $y(t) = A\ f_0^2\ e^{-j2\pi f_0} \cos(2\pi f_0 t)$

   Soluzione
   La trasformata di Fourier di $x(t)$ vale:

   $$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

   La trasformata di Fourier del segnale in uscita dal filtro è quindi pari a:

   $$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]\cdot f^2 \cdot e^{-j4\pi f} = \frac{A}{2} f_0^2 \cdot e^{-j4\pi f_0}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}(-f_0^2)\cdot e^{-j4\pi(-f_0)}\delta(f+f_0) =$$

   $$= \frac{A}{2} f_0^2 \left[e^{-j4\pi f_0}\delta(f-f_0) + e^{+j4\pi(f_0)}\delta(f+f_0)\right]$$

   Antitrasformando:

   $$y(n) = \frac{A}{2} f_0^2 \left[e^{-j4\pi f_0} e^{j2\pi t} + e^{+j4\pi(f_0)} e^{-j2\pi t}\right] = A f_0^2 \frac{e^{-j2\pi f_0(t-2)} + e^{j2\pi f_0(t-2)}}{2} = A\ f_0^2\ \cos(2\pi f_0(t-2))$$

2. **21 febbraio 2022 QTCb**

   Si consideri un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = f^2 \cdot e^{+j2\pi f}$, al cui ingresso sia inviato il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Sia $y(t)$ il corrispondente segnale di uscita. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $y(t) = A\ f^2\ \cos(2\pi f_0 t)$
   (b) $y(t) = A\ f_0^2\ \cos(2\pi f_0 (t-1))$
   (c) $y(t) = A\ f_0^2\ \cos(2\pi f_0 (t+1))$ ✓
   (d) $y(t) = A\ f_0^2\ e^{-j2\pi f_0} \cos(2\pi f_0 t)$

   Soluzione
   La trasformata di Fourier di $x(t)$ vale:

   $$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

   La trasformata di Fourier del segnale in uscita dal filtro è quindi pari a:

   $$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]\cdot f^2 \cdot e^{j2\pi f} = \frac{A}{2} f_0^2 \cdot e^{j2\pi f_0}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}(-f_0^2)\cdot e^{j2\pi(-f_0)}\delta(f+f_0) =$$

   $$= \frac{A}{2} f_0^2 \left[e^{j2\pi f_0}\delta(f-f_0) + e^{-j2\pi f_0}\delta(f+f_0)\right]$$

   Antitrasformando:

   $$y(n) = \frac{A}{2} f_0^2 \left[e^{j2\pi f_0} e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi f_0} e^{-j2\pi t}\right] = A f_0^2 \frac{e^{j2\pi f_0(t+1)} + e^{-j2\pi f_0(t+1)}}{2} = A\ f_0^2\ \cos(2\pi f_0(t+1))$$

3. **21 febbraio 2022 QPCa**

   Si consideri un processo casuale $x(t) = \psi \cdot t$ dove ψ è una variabile casuale continua con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[-1, +1]$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

   (a) il processo $x(t)$ ha media nulla e autocorrelazione pari a $\frac{t^2+t\tau}{3}$, e dunque non è stazionario. ✓
   (b) il processo $x(t)$ ha media nulla e autocorrelazione pari a $\frac{t^2+t\tau}{3}$, e dunque è stazionario in senso lato.
   (c) il processo $x(t)$ ha media nulla e autocorrelazione che dipende solo da τ, e dunque è stazionario in senso lato.
   (d) nessuna delle altre risposte.

Soluzione
Media e varianza di ψ valgono:

$$\mu_\psi = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x dx = 0$$

$$\sigma_\psi^2 = E\{\psi^2\} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Media e autocorrelazione di $x(t)$ valgono quindi:

$$\mu_x = E\{\psi \cdot t\} = E\{\psi\} \cdot t = 0$$

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{\psi \cdot t \cdot \psi \cdot (t+\tau)\} = E\{\psi^2\} t(t+\tau) = \frac{t^2 + t\tau}{3}$$

L'autocorrelazione dipende anche da t, quindi il processo non è stazionario in senso lato.

4. **21 febbraio 2022 QPCb**

   Si consideri un processo casuale $x(t) = \psi \cdot t$ dove ψ è una variabile casuale continua con densità di probabilità gaussiana a media nulla e varianza pari a 1/2. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

   (a) il processo $x(t)$ ha media nulla e autocorrelazione pari a $\frac{t^2+t\tau}{2}$, e dunque non è stazionario. ✓
   (b) il processo $x(t)$ ha media nulla e autocorrelazione pari a $\frac{t^2+t\tau}{2}$, e dunque è stazionario in senso lato.
   (c) il processo $x(t)$ ha media nulla e autocorrelazione che dipende solo da τ, e dunque è stazionario in senso lato.
   (d) nessuna delle altre risposte.

   Soluzione

   Media e autocorrelazione di $x(t)$ valgono:

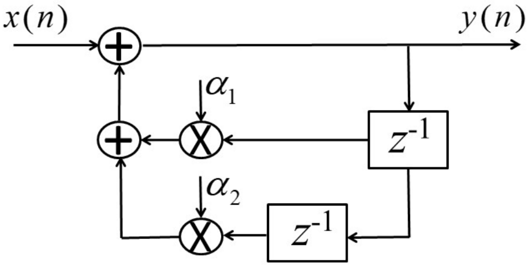
$$\mu_x = E\{\psi \cdot t\} = E\{\psi\} \cdot t = 0$$

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{\psi \cdot t \cdot \psi \cdot (t+\tau)\} = E\{\psi^2\} t(t+\tau) = \frac{t^2 + t\tau}{2}$$

   L'autocorrelazione dipende anche da t, quindi il processo non è stazionario in senso lato.

5. **Febbraio 2022 TD1a**

Si calcoli la risposta all'impulso del sistema a tempo discreto schematizzato in figura, dove $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \frac{3}{4}$:



(a) $h(n) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ ✓
(b) $h(n) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^n u(n) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$
(c) $h(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n u(n)$
(d) $h(n)$ non è definita perché il sistema non è stabile.
(e) $h(n) = \delta(n) + u(n-1) + \frac{3}{4}u(n-2)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 y(n-1) + \alpha_1 y(n-2)$$

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + \alpha_1 Y(z) z^{-1} + \alpha_2 Y(z) z^{-2}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}\right] = X(z)$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\cdot(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$R_2 = H(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

Quindi:

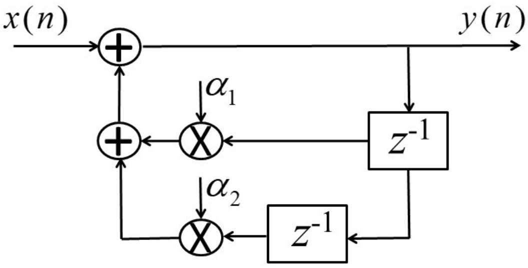
$$H(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando (sistema causale):

$$h(n) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^n u(n)$$

6. **Febbraio 2022 TD1b**

Si calcoli la risposta all'impulso del sistema a tempo discreto schematizzato in figura, dove $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -\frac{3}{4}$:



(a) $h(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n)$ ✓
(b) $h(n) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^{n} u(n) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$
(c) $h(n) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} u(n) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$
(d) $h(n) = \delta(n) + 2u(n-1) - \frac{3}{4}u(n-2)$
(e) $h(n)$ non è definita perché il sistema non è stabile.
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 y(n-1) + \alpha_1 y(n-2)$$

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + \alpha_1 Y(z) z^{-1} + \alpha_2 Y(z) z^{-2}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}\right] = X(z)$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$R_2 = H(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Quindi:

$$H(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{2}\frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando (sistema causale):

$$h(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} u(n)$$

7. **Febbraio 2022 TD2a**

Sia consideri un sistema LTI a tempo discreto causale caratterizzato dall'avere un polo (e uno solo) in $p_1 = -\frac{3}{4}$, uno zero (e uno solo) in $z_1 = \frac{5}{4}$ e una risposta all'impulso $h(n)$ che vale $\frac{2}{5}$ in $n = 0$. Si calcoli l'uscita del sistema $y(n)$ quando all'ingresso viene posto il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{5}{4}\right)^n u(n) - \delta(n)$$

(a) $y(n) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$ ✓
(b) $y(n) = \frac{2}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n} u(n-1)$
(c) $y(n) = \frac{2}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n} u(n) - \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$
(d) $y(n) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n} u(n-1) + \left(-\frac{5}{4}\right)^{n} u(n)$
(e) L'uscita diverge perché il sistema è causale e il modulo dello zero della funzione di trasferimento è maggiore di 1
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione
La funzione di trasferimento del sistema è:

$$H(z) = k\frac{z - z_1}{z - p_1} = k\frac{z - \frac{5}{4}}{z + \frac{3}{4}}$$

Per il teorema del valore finale, in un sistema LTI casuale $h(0)$ coincide con il limite per $z \to +\infty$ di $H(z)$. Siccome $h(0) = \frac{2}{5}$ e il limite per $z \to +\infty$ di $H(z)$ è pari a k, allora $k = \frac{2}{5}$:

$$H(z) = \frac{2}{5}\frac{z - \frac{5}{4}}{z + \frac{3}{4}} = \frac{2}{5}\frac{1 - \frac{5}{4}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

La trasformata zeta di $X(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{4}z^{-1}} - 1 = \frac{1 - 1 + \frac{5}{4}z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1}} = \frac{\frac{5}{4}z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1}}$$

La trasformata zeta del segnale in uscita dl sistema vale quindi:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{2}{5}\frac{1 - \frac{5}{4}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} \cdot \frac{\frac{5}{4}z^{-1}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1}} = \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

L'antitrasformata di $Y(z)$ vale:

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

8. **Febbraio 2022 TD2b**

Sia consideri un sistema LTI a tempo discreto causale caratterizzato dall'avere un polo (e uno solo) in $p_1 = -\frac{4}{5}$, uno zero (e uno solo) in $z_1 = -\frac{6}{5}$ e una risposta all'impulso $h(n)$ che vale $\frac{5}{4}$ in $n = 0$. Si calcoli l'uscita del sistema $y(n)$ quando all'ingresso viene posto il segnale:

$$x(n) = \left(-\frac{6}{5}\right)^n u(n) - \delta(n)$$

(a) $y(n) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} u(n-1)$ ✓
(b) $y(n) = \frac{5}{4}\left(-\frac{4}{5}\right)^n u(n-1)$
(c) $y(n) = \frac{5}{4}\left(-\frac{4}{5}\right)^n u(n) - \frac{3}{2}\left(-\frac{6}{5}\right)^{n-1} u(n-1)$
(d) $y(n) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)^n u(n) + \frac{5}{4}\left(-\frac{6}{5}\right)^n u(n)$
(e) L'uscita diverge perché il sistema è causale e il modulo dello zero della funzione di trasferimento è maggiore di 1
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione
La funzione di trasferimento del sistema è:

$$H(z) = k\frac{z - z_1}{z - p_1} = k\frac{z + \frac{6}{5}}{z + \frac{4}{5}}$$

Per il teorema del valore finale, in un sistema LTI casuale $h(0)$ coincide con il limite per $z \to +\infty$ di $H(z)$. Siccome $h(0) = \frac{5}{4}$ e il limite per $z \to +\infty$ di $H(z)$ è pari a k, allora $k = \frac{5}{4}$:

$$H(z) = \frac{5}{4}\frac{z + \frac{6}{5}}{z + \frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\frac{1 + \frac{6}{5}z^{-1}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}}$$

La trasformata zeta di $X(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{6}{5}z^{-1}} - 1 = \frac{1 - 1 - \frac{6}{5}z^{-1}}{1 + \frac{6}{5}z^{-1}} = \frac{-\frac{6}{5}z^{-1}}{1 + \frac{6}{5}z^{-1}}$$

La trasformata zeta del segnale in uscita dl sistema vale quindi:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{5}{4}\frac{1 + \frac{6}{5}z^{-1}}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}} \cdot \frac{-\frac{6}{5}z^{-1}}{1 + \frac{6}{5}z^{-1}} = -\frac{3}{2}z^{-1}\frac{1}{1 + \frac{4}{5}z^{-1}}$$

L'antitrasformata di $Y(z)$ vale:

$$y(n) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} u(n-1)$$

9. **781**

Un processo casuale WSS $x(t)$ caratterizzato da uno spettro di potenza $S_x(f) = e^{-\pi^2 f^2}$, passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f) = e^{-2\pi^2 f^2}$. Sia $y(t)$ il processo casuale all'uscita di tale sistema LTI. La varianza di $y(t)$ vale:

(a) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}$ ✓
(b) $\sigma_y^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{5\pi}}$
(c) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$
(d) $\sigma_y^2 = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}$
(e) σ_y^2 non può essere determinata con i dati del problema.
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

10. **782**

Un processo casuale WSS $x(t)$ caratterizzato da uno spettro di potenza $S_x(f) = e^{-2\pi^2 f^2}$, passa attraverso un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f) = e^{-\pi^2 f^2}$. Sia $y(t)$ il processo casuale all'uscita di tale sistema LTI. La varianza di $y(t)$ vale:

(a) $\sigma_y^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ ✓
(b) $\sigma_y^2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
(c) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
(d) $\sigma_y^2 = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$
(e) σ_y^2 non può essere determinata con i dati del problema.
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione 781:
Lo spettro di potenza di Y è dato da:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= S_X(f)|H(f)|^2 = (e^{-\pi^2 f^2})e^{-4\pi^2 f^2} \\ &= e^{-5\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

Il valore quadratico medio si ottiene integrando lo spettro

$$\begin{aligned} \mu_Y^2 + \sigma_Y^2 &= \int S_Y(f)df = \int e^{-5\pi^2 f^2} df \\ &= \sqrt{\pi/(5\pi^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi/(5\pi^2)}} \int e^{-5\pi^2 f^2} df \right) \\ &= \sqrt{1/(5\pi)} \cdot 1 \end{aligned}$$

Dove abbiamo riconosciuto nell'ultima parte dell'espressione l'integrale, sempre unitario, di una gaussiana con varianza $1/10\pi^2$. Siccome la media è nulla $\sigma_Y^2 = \sqrt{1/(5\pi)}$.

Fine Soluzione.

---

11. **710**

Si consideri un processo casuale $X(t)$ con media $E\{X(t)\} = 1 + 0.5\sin(2\pi t/T)$ e autocovarianza $K_X(\tau) = 1 - |\tau|/T$ per $|\tau| < T$ e nulla altrove. Si ricorda la definizione di autocovarianza:

$$K_X(\tau) \triangleq E\{(X(t) - \mu_X(t))(X(t+\tau) - \mu_X(t+\tau))\} = E\{X(t)X(t+\tau)\} - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)$$

Si ottenga da esso il processo $Y(t) = X(t) - X(0)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(a) $Y(t)$ è un processo non stazionario del primo ordine e con varianza massima per $|t| \geq T$. ✓
(b) $Y(t)$ è un processo stazionario del primo ordine e con varianza massima per $|t| \geq T$.
(c) $Y(t)$ è un processo non stazionario del primo ordine e con varianza costante al variare di t.
(d) $Y(t)$ è un processo non stazionario del primo ordine e con varianza costante per $|t| < T$ e decrescente per $|t| \geq T$.
(e) $Y(t)$ è un processo non WSS e con varianza del tipo $k\sin^2(2\pi t/T)$, con k costante di proporzionalità.

12. **711**

Si consideri un processo casuale $X(t)$ con media $E\{X(t)\} = 1 - 0.1\sin(2\pi t/T)$ e autocovarianza $K_X(\tau) = 1 - |\tau|/T$ per $|\tau| < T$ e nulla altrove. Si ricorda la definizione di autocovarianza:

$$K_X(\tau) \triangleq E\{(X(t) - \mu_X(t))(X(t+\tau) - \mu_X(t+\tau))\} = E\{X(t)X(t+\tau)\} - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)$$

Si ottenga da esso il processo $Y(t) = X(t) - X(0)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(a) $Y(t)$ è un processo non WSS, con varianza crescente per $0 < t < T$ e costante per $|t| \geq T$. ✓
(b) $Y(t)$ è un processo con media costante e con varianza massima per $|t| \geq T$.
(c) $Y(t)$ è un processo non stazionario del primo ordine e con varianza costante al variare di t.
(d) $Y(t)$ è un processo con media $E\{Y(t)\} = -0.1\sin(2\pi t/T)$ e con varianza costante per $|t| < T$ e decrescente per $|t| \geq T$.
(e) $Y(t)$ è un processo non WSS e con varianza del tipo $k\sin^2(2\pi t/T)$, con k costante di proporzionalità.

Soluzione 710:
Il valore medio di Y é dato da:

$$E\{Y(t)\} \quad = \quad \mu_Y(t) = E\{X(t)\} - E\{X(0)\} = 0.5\sin(2\pi t/T)$$

La media non è costante quindi il processo non è stazionario.

Calcoliamo il valore quadratico medio:

$$\begin{aligned}
E\{(Y(t) - \mu_Y(t))^2\} &= E\{Y^2(t)\} - \mu_Y^2(t) = E\{X^2(t)\} + E\{X^2(0)\} - 2E\{X(t)X(0)\} - \mu_x^2(t) - \mu_x^2(0) + 2\mu_x(t)\mu_x(0) \\
&= K_X(0) + K_x(0) - 2K_x(t) \\
&= 2K_X(0) - 2K_x(t) = 2(K_X(0) - K_x(t)) \\
&= 2(1 - (1 - |t|/T)) = 2|t|/T \quad \forall |t| < T \quad \text{,e } 2 \text{ altrove.}
\end{aligned}$$

La varianza dunque è nulla nell'origine, cresce linearmente fino a T e poi rimane costante.

Ricordiamo la definizione di autocovarianza

$$K_X(t,\tau) = E\{(X(t) - \mu_x(t))(X(t+\tau) - \mu_x(t+\tau))\} = E\{X(t)X(t+\tau)\} - \mu_x(t)\mu_x(t+\tau)$$

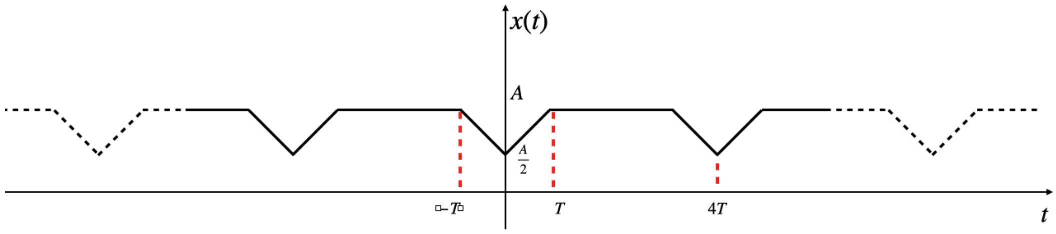
che in questo caso non dipende da t.

Fine Soluzione.

---

13. **TC-01a**

Si consideri il segnale $x(t)$ mostrato in figura



La sua trasformata di Fourier, $X(f)$ vale:

(a) $X(f) = \frac{7A}{8}\delta(f) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{8}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$ ✓

(b) $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{8}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$

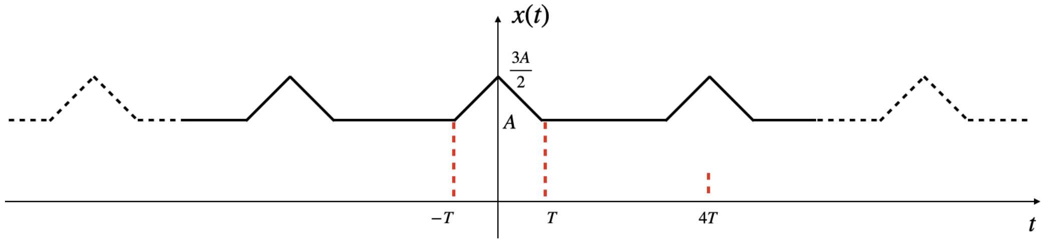
(c) $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[2A\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\pi} - \frac{A}{4}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{(n\frac{\pi}{2})^2}\right]\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$

(d) $X(f) = \frac{3A}{4}\delta(f) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{4}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{(n\frac{\pi}{2})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$

(e) nessuna delle altre risposte

14. **TC-01b**

Si consideri il segnale $x(t)$ mostrato in figura



La sua trasformata di Fourier, $X(f)$ vale:

(a) $X(f) = \frac{9A}{8}\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{8}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$ ✓

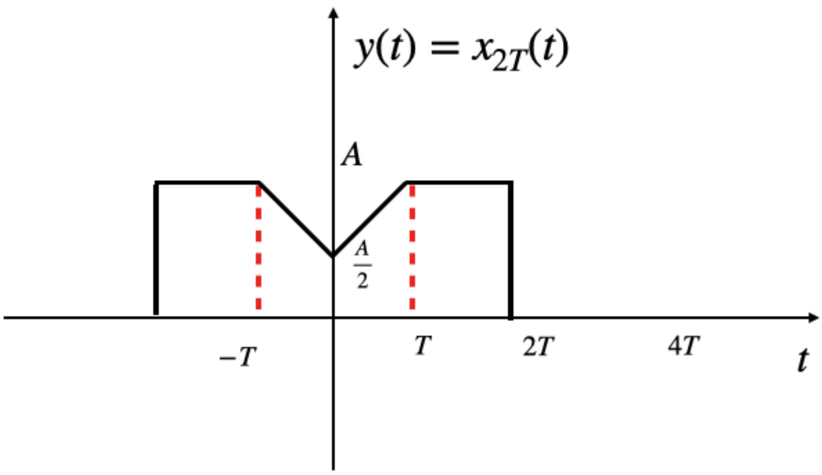
(b) $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{8}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$

(c) $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[2A\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\pi} + \frac{A}{4}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{(n\frac{\pi}{2})^2}\right]\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$

(d) $X(f) = \frac{3A}{4}\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{4}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2})}{(n\frac{\pi}{2})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$

(e) nessuna delle altre risposte

Solution



The signal is periodic of period $4T$ and considering the signal $y(t)$ in the figure can be written as

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(t - 4nT)$$

from which we obtain

$$X(f) = \frac{1}{4T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y\left(\frac{n}{4T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$$

As it can be seen in the Figure

$$y(t) = Ap_{4T}(t) - \frac{A}{2} tri(t/T)$$

from which we obtain

$$Y(f) = A\frac{\sin(4\pi fT)}{\pi f} - \frac{AT}{2}\frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$$

$$Y\left(\frac{n}{4T}\right) = A\frac{\sin(4\pi \frac{n}{4T} T)}{\pi \frac{n}{4T}} - \frac{AT}{2}\frac{\sin^2(\pi \frac{n}{4T} T)}{(\pi \frac{n}{4T} T)^2} = 4AT\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} - \frac{AT}{2}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}$$

The Fourier transform is

$$X(f) = \frac{1}{4T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [4AT\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} - \frac{AT}{2}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}]\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[A\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} - \frac{A}{8}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}\right] \delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$$

Observing that $\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}$ is always zero unless $n = 0$ we can lit the case $n = 0$ from the other ones

$$Y(0) = A - \frac{A}{8} = \frac{7A}{8}$$

from which we obtain the result

$$X(f) = \frac{7A}{8}\delta(f) - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{A}{8}\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{4})}{(n\frac{\pi}{4})^2}\delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$$

The solution can also be obtained considering

$$x(t) = A - \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} tri\left(\frac{t - 4nT}{T}\right)$$

$$X(f) = A\delta(f) - \frac{A}{2}\frac{1}{4T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\left.\frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}\right|_{f=n/4T} \delta\left(f - \frac{n}{4T}\right)$$

TC-02

1. **TC-02a**

   Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-2k)^2}{8}}.$$

   .

   Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema lineare e tempo invariante la cui funzione di trasferimento vale

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| < 0,75 \\ 2 & \text{se } 0,75 \leq |f| < 1,2 \\ 0,5 & \text{se } 1,2 \leq |f| < 1,4 \\ 0 & \text{se } |f| > 1,4 \end{cases}$$

   La potenza del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro vale:

   (a) $P_y = 2\pi\left(1 + 8e^{-4\pi^2} + \frac{1}{2}e^{-16\pi^2}\right)$
   (b) $P_y = 2\pi\left(4 + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2} + 2e^{-16\pi^2}\right)$
   (c) $P_y = 2\pi\left(e^{-4\pi^2} + 2e^{-16\pi^2}\right)$
   (d) nessuna delle altre risposte ✓

   NOTA: Le risposte (a) e (b) sono state considerate come parzialmente corrette nella valutazione del compito.

2. **TC-02b**

   Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-2k)^2}{8}}.$$

   .

   Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema lineare e tempo invariante la cui funzione di trasferimento vale

$$H(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } |f| < 0,75 \\ 0,5 & \text{se } 0,75 \leq |f| < 1,2 \\ 1 & \text{se } 1,2 \leq |f| < 1,4 \\ 0 & \text{se } |f| > 1,4 \end{cases}$$

   La potenza del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro vale:

   (a) $P_y = 2\pi\left(4 + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2} + 2e^{-16\pi^2}\right)$
   (b) $P_y = 2\pi\left(1 + 8e^{-4\pi^2} + \frac{1}{2}e^{-16\pi^2}\right)$
   (c) $P_y = 2\pi\left(e^{-4\pi^2} + 2e^{-16\pi^2}\right)$
   (d) nessuna delle altre risposte ✓

   NOTA: Le risposte (a) e (b) sono state considerate come parzialmente corrette nella valutazione del compito.

Soluzione

(a) Il segnale ha periodo $T_x = 2$.

(b) La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ricava ricordando che

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-2k)^2}{8}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t-kT_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t) * \delta(t-kT_x).$$

con $z(t) = e^{-\frac{t^2}{2T_x^2}}$, da cui si ricava la trasformata

$$X(f) = \frac{1}{T_x}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{k}{T_x}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_x}\right) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{k}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

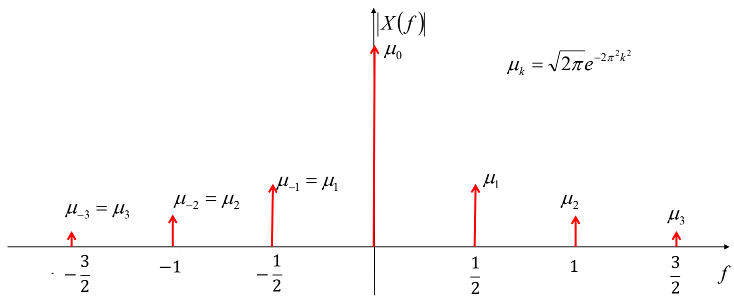
Dalle tavole si ottiene che

$$Z(f) = T_x\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 f^2 T_x^2} = 2\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2 f^2}$$

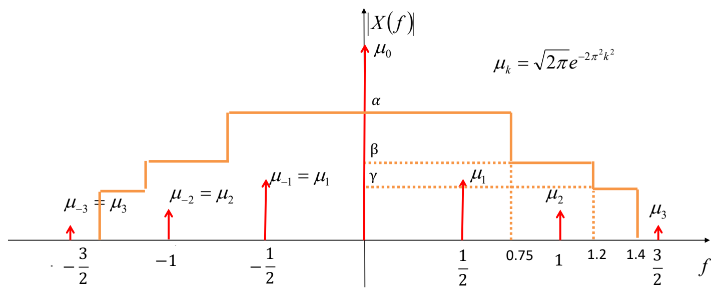
da cui lo spettro del segnale periodico (a righe)

$$X(f) = \frac{1}{2}2\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-8\pi^2(\frac{k}{2})^2}\delta\left(f-\frac{k}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2 k^2}\delta\left(f-\frac{k}{2}\right)$$

Grafico del modulo si $X(f)$:



(c) Il filtro ha banda finita e azzera tutte le componenti spettrali per $|f| > 1,4$. Inoltre come si vede in Figura modifica le diverse componenti spettrali in ampiezza



Considerando la generica funzione di trasferimento rappresentata in figura

$$H(f) = \begin{cases} \alpha & \text{se } |f| < 0,75 \\ \beta & \text{se } 0,75 \leq |f| < 1,2 \\ \gamma & \text{se } 1,2 \leq |f| < 1,4 \\ 0 & \text{se } |f| > 1,4 \end{cases}$$

si vede che $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$ contiene solo le componenti per $k = -2, -1, 0, 1, 2$ e vale

$$\begin{aligned}
Y(f) &= H(0)\sqrt{2\pi}\delta(f) + && (1)\\
&+ H\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right) + H\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right) + && (2)\\
&+ H(-1)\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2}\delta(f+1) + H(-1)\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2}\delta(f-1) && (3)
\end{aligned}$$

Considerando la simmetria pari della funzione di trasferimento

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \alpha\sqrt{2\pi}\delta(f) + && (4)\\
&+ \alpha\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\delta\left(f+\frac{1}{2}\right) + \alpha\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\delta\left(f-\frac{1}{2}\right) + && (5)\\
&+ \beta\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2}\delta(f+1) + \beta\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2}\delta(f-1) && (6)
\end{aligned}$$

La potenza media vale

$$P_y = (\alpha\sqrt{2\pi})^2 + 2\cdot\left(\alpha\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\right)^2 + 2\cdot\left(\beta\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2}\right)^2 = 2\pi\left(\alpha^2 + 2\alpha^2e^{-4\pi^2} + 2\beta^2e^{-16\pi^2}\right)$$

versione 01

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| < 0,75 \\ 2 & \text{se } 0,75 \le |f| < 1,2 \\ 0,5 & \text{se } 1,2 \le |f| < 1,4 \\ 0 & \text{se } |f| > 1,4 \end{cases}$$

$$P_y = 2\pi\left(1 + 2e^{-4\pi^2} + 8e^{-16\pi^2}\right)$$

versione 02

$$H(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } |f| < 0,75 \\ 0,5 & \text{se } 0,75 \le |f| < 1,2 \\ 1 & \text{se } 1,2 \le |f| < 1,4 \\ 0 & \text{se } |f| > 1,4 \end{cases}$$

$$P_y = 2\pi\left(4 + 8e^{-4\pi^2} + \frac{1}{2}e^{-16\pi^2}\right)$$

TC-03

1. **TC-03a**

   Si consideri il segnale $x(t) = \sqrt{2}e^{-2\pi|t-t_0|}$ in cui t_0 è una costante reale, e sia $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$. Si calcoli la banda a -3dB del segnale, definita come quella frequenza B_{3dB} tale per cui $S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2}S_x^{max}$, dove $S_x(f) = |X(f)|^2$ e S_x^{max} è il valore massimo assunto da $S_x(f)$. Essa vale:

   (a) $B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$ ✓
   (b) $B_{3dB} = \sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$
   (c) $B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
   (d) $B_{3dB} = 2\pi\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
   (e) nessuna delle aaltre risposte

2. **TC-03b**

   Si consideri il segnale $x(t) = \sqrt{\pi}e^{-4\pi^2|t-t_0|}$ in cui t_0 è una costante reale, e sia $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$. Si calcoli la banda a -3dB del segnale, definita come quella frequenza B_{3dB} tale per cui $S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2}S_x^{max}$, dove $S_x(f) = |X(f)|^2$ e S_x^{max} è il valore massimo assunto da $S_x(f)$. Essa vale:

   (a) $B_{3dB} = 2\pi\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$ ✓
   (b) $B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
   (c) $B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
   (d) $B_{3dB} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
   (e) nessuna delle altre risposte

Soluzione

(a) Si può scrivere:

$$x(t) = K_1 e^{-K_2|t|} * \delta(t-t_0)$$

Dalle tavole:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

Pertanto

$$X(f) = K_1\frac{2K_2}{K_2^2+(2\pi f)^2}e^{-j2\pi f t_0}$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{4K_1^2K_2^2}{[K_2^2+(2\pi f)^2]^2}$$

(b) B_{3dB} risolve l'equazione

$$S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2}S_x(0)$$

$$\frac{4K_1^2K_2^2}{[K_2^2+(2\pi B_{3dB})^2]^2} = \frac{1}{2}\frac{4K_1^2K_2^2}{K_2^4}$$

$$[K_2^2+(2\pi B_{3dB})^2]^2 = 2K_2^4$$

$$K_2^2+(2\pi B_{3dB})^2 = \sqrt{2}K_2^2$$

$$(2\pi B_{3dB})^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)K_2^2$$

$$2\pi B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}K_2$$

$$B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}K_2$$

versione a $K_2 = 2\pi \longrightarrow B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$

versione b $K_2 = 4\pi^2 \longrightarrow B_{3dB} = 2\pi\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$