1) Gf=1/(Kd*Gs)
nu+p>0

Loop-Shaping Controller Design

L = Gc(s)*Gp(s)*Ga*Gs*Gf -traduco le funz in s->   s->0 -> {Gp = Kp/s^p; Gc = Kc/s^nu}

Funzione di trasferimento del controllore

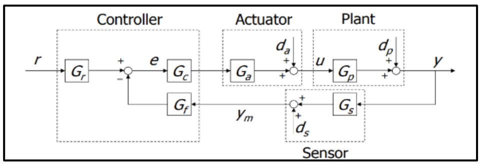
$$G_c(s) = \frac{K_c}{s^\nu} \prod_i \left(\frac{1 + \frac{s}{z_{di}}}{1 + \frac{s}{m_{di} z_{di}}} \right) \prod_j \left(\frac{1 + \frac{s}{m_{ij} p_{ij}}}{1 + \frac{s}{p_{ij}}} \right)$$

LEAD NETWORK **LAG NETWORK**

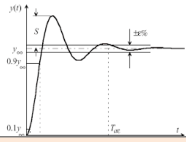
$K_c = \lim_{s \to 0} s^\nu G_c(s)$ | 2) $K_p = \lim_{s \to 0} s^p G_p(s)$

verificare prima che $\nu + p > 0$

$$\frac{1}{G_s G_f} = K_d$$



$$S(s) = \frac{1}{1+L} \qquad T(s) = \frac{L}{1+L}$$



$$\lim_{t\to\infty} x(t) \underbrace{=}_{se\ \exists} \lim_{s\to 0} s \cdot X(s)$$

$$\lim_{k\to\infty} x(k) \underbrace{=}_{se\ \exists} \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot X(z)$$

$$r(t) = R_0 \cdot \frac{t^h}{h!} \to r(s) = \frac{R_0}{s^{h+1}}$$

Specifiche di progetto - Regime permanente (Robustezza)

Inseguimento di segnali polinomiali in regime permanente

$$\begin{cases} 0 \leftarrow (\nu + p > h) \\ \dfrac{K_d^2 R_0}{\beta K_d + K_c K_p G_a} \leftarrow (\nu + p = h) \end{cases}$$

where β = 1 (if $\nu + p = 0$)

ν_{max} che soddisfa tutte le specifiche
$|K_c|$ relativo a ν che soddisfa tutto

$$G_{d_p y}(s) = S(s) \qquad G_{d_a y}(s) = G_p(s) \cdot S(s)$$

Attenuazione di disturbi polinomiali in regime permanente

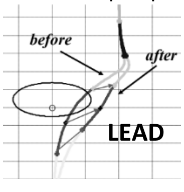
$$\left|e_\infty^{d_p}\right| = \left|\lim_{t\to\infty} e_{d_p}(t)\right| = \left|\lim_{t\to\infty} y_{d_p}(t)\right| = \left|\lim_{s\to 0} s G_{d_p y}(s) d_p(s)\right|$$

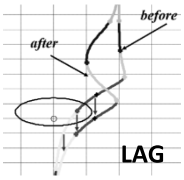
$$\left|e_\infty^{d_a}\right| = \left|\lim_{t\to\infty} e_{d_a}(t)\right| = \left|\lim_{t\to\infty} y_{d_a}(t)\right| = \left|\lim_{s\to 0} s G_{d_a y}(s) d_a(s)\right|$$

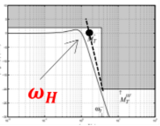
Attenuazione di disturbi sinusoidali

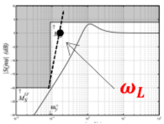
$$\left|e_\infty^{d_s}\right| = \left|G_{d_s y}(j\omega_s)\, a_s \sin(\omega t + \varphi_s)\right| \le |T(j\omega_s)| \le \frac{\rho_s G_s}{a_s}$$

$$\left|e_\infty^{d_p}\right| = \left|G_{d_p y}(j\omega_p)\, a_p \sin(\omega t + \varphi_p)\right| \le |S(j\omega_p)| \le \frac{\rho_p}{a_p}$$









$d_s = a_s \sin(\omega t)$ $(\log \omega_s, M_{T,dB}^{HF})$ e $(\log \omega_H, 0)$	$d_p = a_p \sin(\omega t)$ $(\log \omega_p, M_{S,dB}^{LF})$ e $(\log \omega_L, 0)$
$\lvert T(j\omega_s)\rvert \leftarrow M_T^{HF} = \frac{\rho_s G_s}{a_s}$	$\lvert S(j\omega_p)\rvert \leftarrow M_S^{LF} = \frac{\rho_p}{a_p}$
$\omega_H = \omega_s 10^{\frac{M_{T,dB}^{HF}}{40}}$	$\omega_L = \omega_p 10^{-\frac{M_{S,dB}^{LF}}{40}}$
$\omega_c \in \left[2\omega_L, \frac{\omega_H}{2}\right]$	

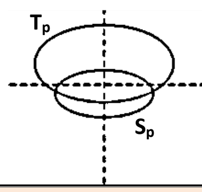
Prototipo II ordine

$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

```
[m,p]=bode(S,wc)
[m,p]=nichols(L,wc)
myngridst(Tp,Sp)
nyquist1(num, den)
```

Specifiche di progetto – Transitorio (Velocità)

$\zeta \ge \frac{\lvert\ln(\hat{s}_{\%})\rvert}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{s}_{\%})}}$	$T_p \le \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$	$S_p \le \frac{2\zeta\sqrt{2 + 4\zeta^2 + 2\sqrt{1+8\zeta^2}}}{\sqrt{1+8\zeta^2} + 4\zeta^2 - 1}$	regione proibita	N.B.: angoli in radianti!
$\omega_c \ge \max\left(\omega_c^{t_{s,\alpha\%}}, \omega_c^{t_r}\right)$	$\omega_c^{t_{s,\alpha\%}} \ge \frac{-\frac{\ln \alpha_{\%}}{\zeta} \cdot \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{t_{s,\alpha\%}}$	$\omega_c^{t_r} \ge \frac{\frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{t_r}$		



Progetto del controllore

Lin=(Kc/s^nu)*Gp(s)*Ga*Gs*Gf

1. **Studio del segno di K_c e stabilizzabilità**
   a. Scelgo un segno e calcolo $L_{in}(s)$
   b. Tracciare il diagramma di Nyquist di $L_{in}(s)$, **calcolo P_{cl}=N+P_{ol}:**
      i. P_{cl} pari → Stabilizzabile
      ii. P_{cl} dispari → cambio segno di Kc
   c. Scelgo K_c poco più grande del vincolo (se c'è)

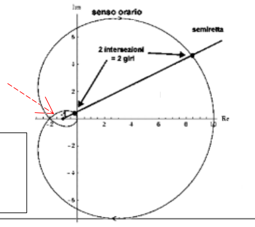
$$P_{cl} = N + P_{ol} \qquad \textit{Goal: } P_{cl} = 0$$

N: intersezioni semiretta   *punto critico*

P_{ol}: poli $Re(p_i) > 0$ (di solito nullo)

ν+p → system type
h → Input order

senso orario → N+1
senso antiorario → N-1



2. **Scelta di $\omega_{c.des}$ rispettando i vincoli imposti**
3. Plot di $L_{in}(s)$ sul piano di Nichols e individuo $\omega_{c.des}$ scegliendo il tipo di azione da fare con le **reti di compensazione** per:
   a. portare la $\omega_{c.des}$ in corrispondenza di 0 dB
   b. portare il diagramma fuori dalla regione proibita
4. Simulare con `step(T/(Gs*Gf), <#sec>)` per assicurarsi di soddisfare le specifiche in transitorio. (Le altre su inseguimento e disturbi sono verificate se K_c e ν sono OK).
5. Tracciare i diagrammi di Bode di **T** ed **S** per verificare che stiano sotto i relativi spigoli.
   a. Taglia spigolo **T**? → aggiungo un polo $(1 + s/\omega_s)^{-1}$
   b. Taglia spigolo **S**? → Alzo K_c
6. In caso di specifiche non soddisfatte si procede a compensare con un altro tipo di azione. (Attenzione **effetto coda**: massima fase usata per la rete zero o $\omega_{norm} \gg$ nella LAG **(alzo un po' alla volta)**

ν+p \ h	order 0 Step	order 1 Ramp	order 2 Parabola
0	$\frac{K_d^2 R_0}{K_d + K_p K_c G_a}$	∞	∞
1	0	$\frac{K_d^2 R_0}{K_p K_c G_a}$	∞
2	0	0	$\frac{K_d^2 R_0}{K_p K_c G_a}$

Tecniche di sintesi digitale

- ✓ $G_p(s) \to G_c(s) \to$ scelta $T_s \to G_c(z)$ (matched)
- ✓ $G_p'(s) = G_p(s) G_{ZOH}(s) \to$ come (1)
- ✓ $G_p(z)$=c2d(Gp, T_s, 'zoh') scelta T_s in base a ω_{cdes}
  - `dnichols(Lin_z)` e per ogni rete
  - $R_d(s) \leftrightarrow R_d(z)$ $R_i(s) \leftrightarrow R_i(z)$ $R_z(s) \leftrightarrow R_z(z)$

Sistemi di controllo digitale

`c2d(Gc, Ts, ['matched' | 'zoh'])`	$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \cong \frac{T}{1 + \frac{sT}{2}}$	$z = e^{sT_s}$	$\frac{0.1}{\omega_c} < T_s < \frac{0.2}{\omega_c}$

Principali reti di compensazione

Soluzione	Formule utili	Alternativa	
Rete **LEAD** *aumento di modulo* *aumento di fase*	$\omega_{norm} = \frac{\omega_{cdes}}{z_d}$	Rete **ZERO**	Da usare solo nel caso in cui $\upsilon > 0$
Rete **LAG** *diminuzione modulo*	$m_i = 10^{\frac{R_{db}}{20}}$ $\omega_{norm} = \frac{\omega_{cdes}}{p_i}$	Diminuzione di $\lvert K_c\rvert$	Solo quando ho K_c libero ($\lvert K_C\rvert = 1$)
Aumento di $\lvert K_c\rvert$ *aumento di modulo*	$K_c = K_{c,in} 10^{\frac{\lvert K_{c,dB}^{add}\rvert}{20}}$	$K_c = K_{c,in} 10^{\frac{-\lvert K_{c,dB}^{sub}\rvert}{20}}$	$G_{ry}(s) = \frac{T(s)}{G_s G_f} r(t) + S(s) d_p(t) + S(s) G_p d_a(t) - \frac{T(s)}{G_s} d_s(t)$

```
%progetto
Lin = minreal(zpk((Kc/s) * Gp * Ga * Gs * Gf));
%bodeplot(Lin)
figure(1)
[numLin,denLin] = tfdata(Lin,'v');
nyquist1(numLin,denLin)

figure(2)
myngridst(Tp,Sp)
nichols(Lin);

wc_des = 1.2;
%Zero network
wnorm_z = 90;
z = wc_des/wnorm_z;
Rz = (1+s/z);

%Lead network
wnorm_lead1 = 1.4;
md1 = 3;
zd1 = wc_des/wnorm_lead1;
Rd1 = (1+s/zd1)/(1+s/(md1*zd1));

% Lag network
wnorm_lag1 = 100 ; %final 500
pi1 = wc_des/wnorm_lag1;
mi1 = 10^(3/20); % final value 22dB
Ri1 = (1+s/(mi1*pi1))/(1+s/pi1);

% Controller
hold on
L = Lin*Rz*Rd1;
nichols(L)
% Step resonse
T = minreal(zpk(L/(1+L)));
figure(3)
step(T/(Gf*Gs),15)

figure(4)
bodemag(T)
S = minreal(zpk(1/(1+L)));
figure(5);
bodemag(S);
```

H(s) BIBO = C * inv(s*eye(2) - A) * B + D

Teoria dei Sistemi Dinamici

Sistemi LTI – Rappresentazione, stabilità, proprietà strutturali

Rappresentazione nello **spazio di stato** (descrizione completa)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) \overset{\text{LTI TC}}{\triangleq} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) \overset{\text{LTI TC}}{\triangleq} \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) \overset{\text{LTI TD}}{\triangleq} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) \overset{\text{LTI TD}}{\triangleq} \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})$$

```
S = ss(A,B,C,D)
s=tf('s')  z=tf('z')
H = tf(S)
phase = angle(z) mod=abs(z)
[num, den] = tfdata(S, 'v')
[R, P] = residue(num, den)
minreal(zpk(S))
rank(A)
```

Funzione di trasferimento (descr parziale: parte completamente osservabile e controllabile)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}) \triangleq \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{x(0)=0} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) \triangleq \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{x(0)=0} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{zI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

$(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-1}$, $(\boldsymbol{zI}-\boldsymbol{A})^{-1}$ *polinomio minimo*

$y(t) = y_{tr}(t) + y_{ss}(t)$ se il sistema è: **asintoticamente stabile** o **BIBO stabile + condizioni iniziali nulle**

Tavole L-transform: part 3.1 pag 9
Tavole Z-transform: part 9 pag. 22-23

Soluzioni delle equazioni di stato

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}_{zi}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{x}_{zs}(\boldsymbol{t}) \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{x}_{zi}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{x}_{zs}(\boldsymbol{k})$$

$\boldsymbol{X}_{zi}(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})$	$\boldsymbol{X}_{zs}(\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})$
$\boldsymbol{X}_{zi}(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{zI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})$	$\boldsymbol{X}_{zs}(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{zI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}_{zi}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{y}_{zs}(\boldsymbol{t}) \quad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{y}_{zi}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{y}_{zs}(\boldsymbol{k})$$

$\boldsymbol{Y}_{zi}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{sI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})$	$\boldsymbol{Y}_{zs}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})$
$\boldsymbol{Y}_{zi}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{zI}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0})$	$\boldsymbol{Y}_{zs}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{z})$

formule utili

contributo poli complessi e coniugati (TC) $2\|R\|e^{Re(p_i)t} \cdot cos(Im(p_i)t + \angle R)$	$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n e^{-\lambda t}}{n!}\right\} = \frac{1}{(s+\lambda)^{n+1}}$
contributo poli complessi e coniugati (TD) $2\|R\|\|a\|^k \cdot cos(\angle a\, k + \angle R)$	$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$
$\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}, \tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z}$	$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0)$
$\tau_i = \left\|\frac{1}{Re(p_i)}\right\|$ (costanti di tempo poli)	$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \quad \mathcal{Z}\{\varepsilon(t)\} = \frac{z}{z-1}$

Stabilità $\boldsymbol{Spec(A)} = \{\boldsymbol{\lambda_i} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{p_A(\lambda_i)} = \boldsymbol{0}\}$=autovalori **A** `e = eig(A); [V, D]=eig(A)`

	TEMPO CONTINUO (vedi Criterio di Routh)		**TEMPO DISCRETO** (vedi Criterio di Jury)	
asintoticamente stabile	$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{zi}(t)$ *limitata*	$Re(\lambda_i) < 0\ \forall\ i$	$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{zi}(k)$ *limitata*	$\|\lambda_i\| < 1\ \forall\ i$
internamente stabile	$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{zi}(t)$ *limitata* $\lim_{t\to\infty} x_{zi}(t) = 0$	$Re(\lambda_i) \le 0\ \forall\ i$ $Re(\lambda_i) = 0, \mu_g = 1$	$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{zi}(k)$ *limitata* $\lim_{k\to\infty} x_{zi}(k) = 0$	$\|\lambda_i\| \le 1\ \forall\ i$ $\|\lambda_i\| = 1, \mu_g = 1$
BIBO stabile	$x_0 = 0$ $\forall u(t)$ *limitato* $y_{zs}(t)$ *limitato*	$Re(p_i) < 0\ \forall\ i$ p_i *poli del sistema*	$x_0 = 0$ $\forall u(k)$ *limitato* $y_{zs}(k)$ *limitato*	$\|p_i\| < 1\ \forall\ i$ p_i *poli del sistema*
instabile	$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{zi}(t)$ *illimitata*	$\exists\ \lambda_i \mid Re(\lambda_i) < 0\ \vee$ $\exists\ \lambda_i \mid Re(\lambda_i) = 0,$ $\mu_g > 1$	$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{zi}(k)$ *illimitata*	$\exists\ \lambda_i \mid \|\lambda_i\| > 1\ \vee$ $\exists\ \lambda_i \mid \|\lambda_i\| = 1,$ $\mu_g > 1$

dominio	**dominio trasformato**
TC x(t)	$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$ **Trasformata di Laplace**
TD x(k)	$X(z) = \sum_0^\infty x(k)z^{-k}$ **Trasformata Zeta**

RAGGIUNGIBILITÀ (Controllabilità)

Possibilità di modificare lo stato a partire dall'ingresso.

$$\boldsymbol{M_R} = \left[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{AB} \ldots \boldsymbol{A^{n-b}B}\right], \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B})$$

$\mathbf{dim}(\boldsymbol{X_R}) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M_R}) = \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n}$ sottospazio di raggiungibilità

$\mathbf{dim}(\boldsymbol{X_{NR}}) = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$ sottospazio di non raggiungibilità

MATLAB®: `Mr = ctrb(A,B)`

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k})$	***legge di controllo***
$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$	

Retroazione statica dallo stato (Hp: stato totalmente misurabile)

se $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M_R}) = n$ → sistema **completamente raggiungibile** → posso progettare la **legge di controllo** in modo da assegnare arbitrariamente gli autovalori.

MATLAB®: `K = place (A, B,[...])` autovalori distinti

`K = acker (A, B,[...])` autovalori uguali

rango max

Problema della regolazione

$\overline{y} = \overline{r} \to TC\ \alpha = [-(C-DK)(A-BK)^{-1}B + D]^{-1}$=`1/dcgain(H)`

$\overline{y} = \overline{r} \to TD\ \alpha = [(C-DK)[I-(A-BK)]^{-1}B + D]^{-1}$

OSSERVABILITÀ (Rilevabilità)

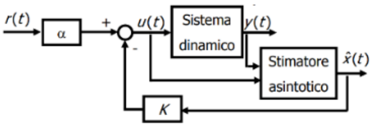
Possibilità di stimare lo stato a partire dagli ingressi e dalle uscite.

$$\boldsymbol{M_O} = [\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{CA} \ldots \boldsymbol{CA^{n-c}}]^T, \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{C})$$

$\mathbf{dim}(\boldsymbol{X_O}) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M_O}) = \boldsymbol{o} \le \boldsymbol{n}$ sottospazio di osservabilità

$\mathbf{dim}(\boldsymbol{X_{NO}}) = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{o}$ sottospazio di non osservabilità

MATLAB®: `Mo = obsv(A,C)`



$$\boldsymbol{x_{tot}^{II}} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

se sistema completamente osservabile e raggiungibile

REGOLATORE DINAMICO
per la **proprietà di separazione**:
1. progetto matrice **K**
2. progetto matrice **L**

$$A_{reg}^{II} = \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0_{n\times n} & A-LC \end{bmatrix} \quad B_{reg}^{II} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix}\alpha$$

$$C_{reg}^{II} = \begin{bmatrix} C-DK & -DK \end{bmatrix} \quad D_{reg}^{II} = [D]\alpha$$

Osservatore dello stato (Stimatore di Lüemberger)

se $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{M_R}) = n$ → sistema **completamente osservabile** → posso progettare un osservatore asintotico dello stato.

*Modello dello **stimatore***

$$\hat{x}'(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t)$$

errore di stima

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$
$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

MATLAB®: `L = (place (A', C',[...]))'`

Tabella di Jury (TdJ)

n	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$n-1$	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	
$n-2$	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}		
$n-2$	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_0		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$				
2	z_0	z_1	z_2				
2	z_2	z_1	z_0				

Tabella di Routh (TdR)

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\cdots$
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	a_0	0	0	$\cdots$

Linearizzazione nell'intorno di un punto di equilibrio

$(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{u}}) \mid \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{0}$ ***punto di equilibrio***

$\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) - \overline{\boldsymbol{x}}$ ***perturbazione*** $\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) - \overline{\boldsymbol{x}}$

Sistema linearizzato

$$\begin{cases} \underbrace{\boldsymbol{\delta\dot{x}(t)}}_{\text{TC}} = \underbrace{\boldsymbol{\delta\dot{x}(k+1)}}_{\text{TD}} = \overbrace{\left|\frac{\boldsymbol{\partial f(x,u)}}{\boldsymbol{\partial x}}\right|_{(\overline{x},\overline{u})}}^{\delta A} + \overbrace{\left|\frac{\boldsymbol{\partial f(x,u)}}{\boldsymbol{\partial u}}\right|_{(\overline{x},\overline{u})}}^{\delta B} \\ \underbrace{\boldsymbol{\delta y(t)}}_{\text{TC}} = \underbrace{\boldsymbol{\delta y(k)}}_{\text{TD}} = \overbrace{\left|\frac{\boldsymbol{\partial g(x,u)}}{\boldsymbol{\partial x}}\right|_{(\overline{x},\overline{u})}}^{\delta C} + \overbrace{\left|\frac{\boldsymbol{\partial g(x,u)}}{\boldsymbol{\partial u}}\right|_{(\overline{x},\overline{u})}}^{\delta D} \end{cases}$$

Grandezze sistema approssimato $\widetilde{(*)} = \overline{(*)} + \boldsymbol{\delta}(*)$

$$\boldsymbol{\delta A} = \left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{(\overline{x},\overline{u})} \text{ stabile TC } \boldsymbol{Re}(\boldsymbol{\lambda_{i,\delta A}}) < \boldsymbol{0}\ \forall\ \boldsymbol{i} \quad \text{TD } |\boldsymbol{\lambda_{i,\delta A}}| < \boldsymbol{1}\ \forall\ \boldsymbol{i}$$

Criteri di stabilità LTI $\quad p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$

✓ **Regola dei segni di Cartesio (condizione solo necessaria)**

Asintoticamente Stabile ⇒ nessuna variazione di segno tra coefficienti consecutivi non nulli.

✓ **Criterio di Routh (cond. necessaria e sufficiente)**

Asintot. Stabile **TC** ⇔ Tutti gli elementi della prima colonna della TdR sono di segno concorde. ***Compilazione TdR***

$$\boldsymbol{b_{n-2}} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \boldsymbol{b_{n-4}} = -\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} / a_{n-1}, \ldots$$

$$\boldsymbol{c_{n-3}} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} / b_{n-2}, \boldsymbol{c_{n-5}} = -\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix} / b_{n-2}, \ldots$$

✓ **Criterio di Jury (cond. necessaria e sufficiente)**

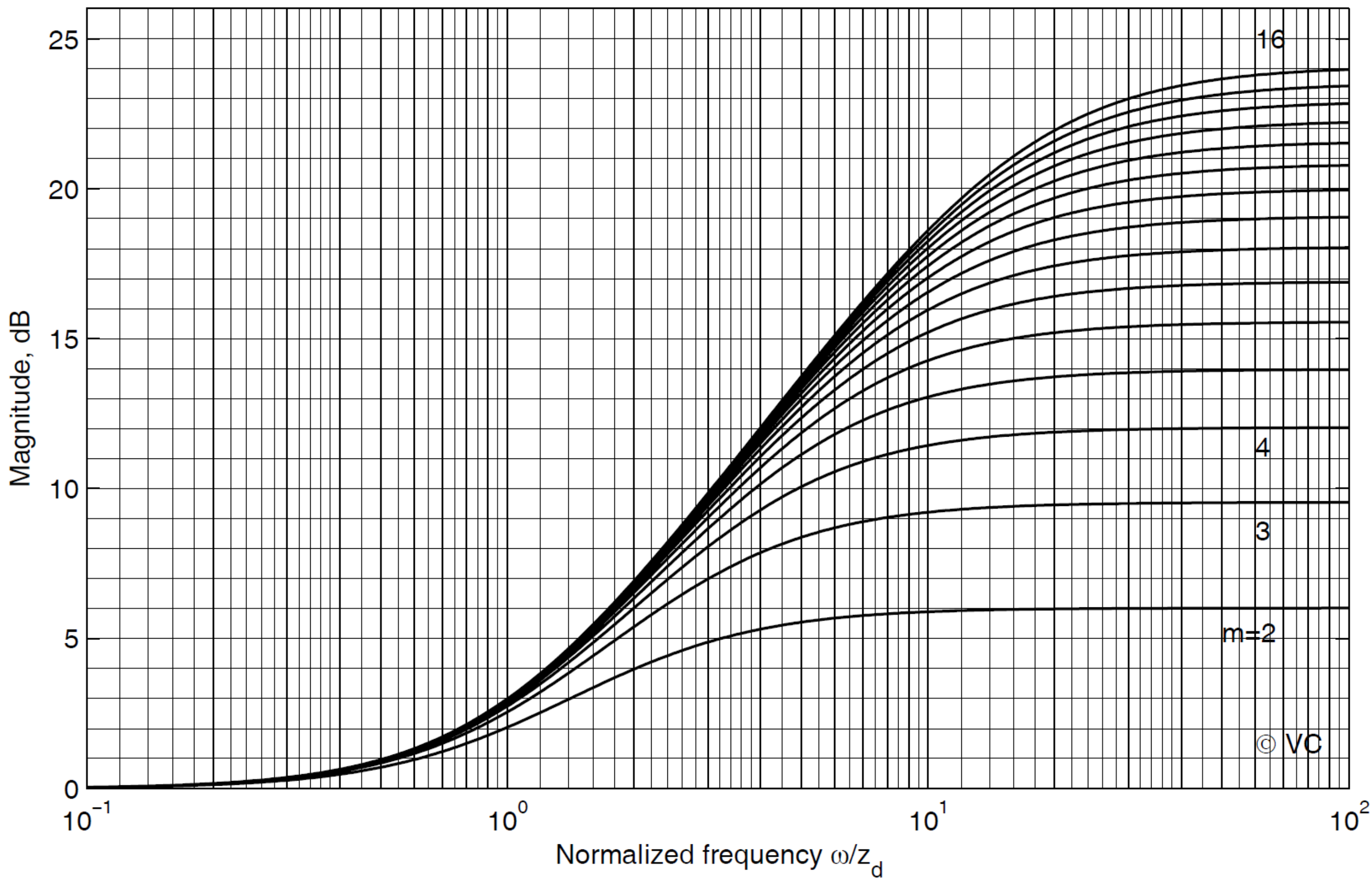
Asintot. Stabile TD ⇔ $p(\lambda = 1) > 0, (-1)^n p(\lambda = -1) > 0, |a_n| > |a_0|$ **(n=2)**

$|b_0| > |b_{n-1}|,\ |c_0| > |c_{n-2}|,\ \ldots,\ |z_0| > |z_2|$ **(n>2)**

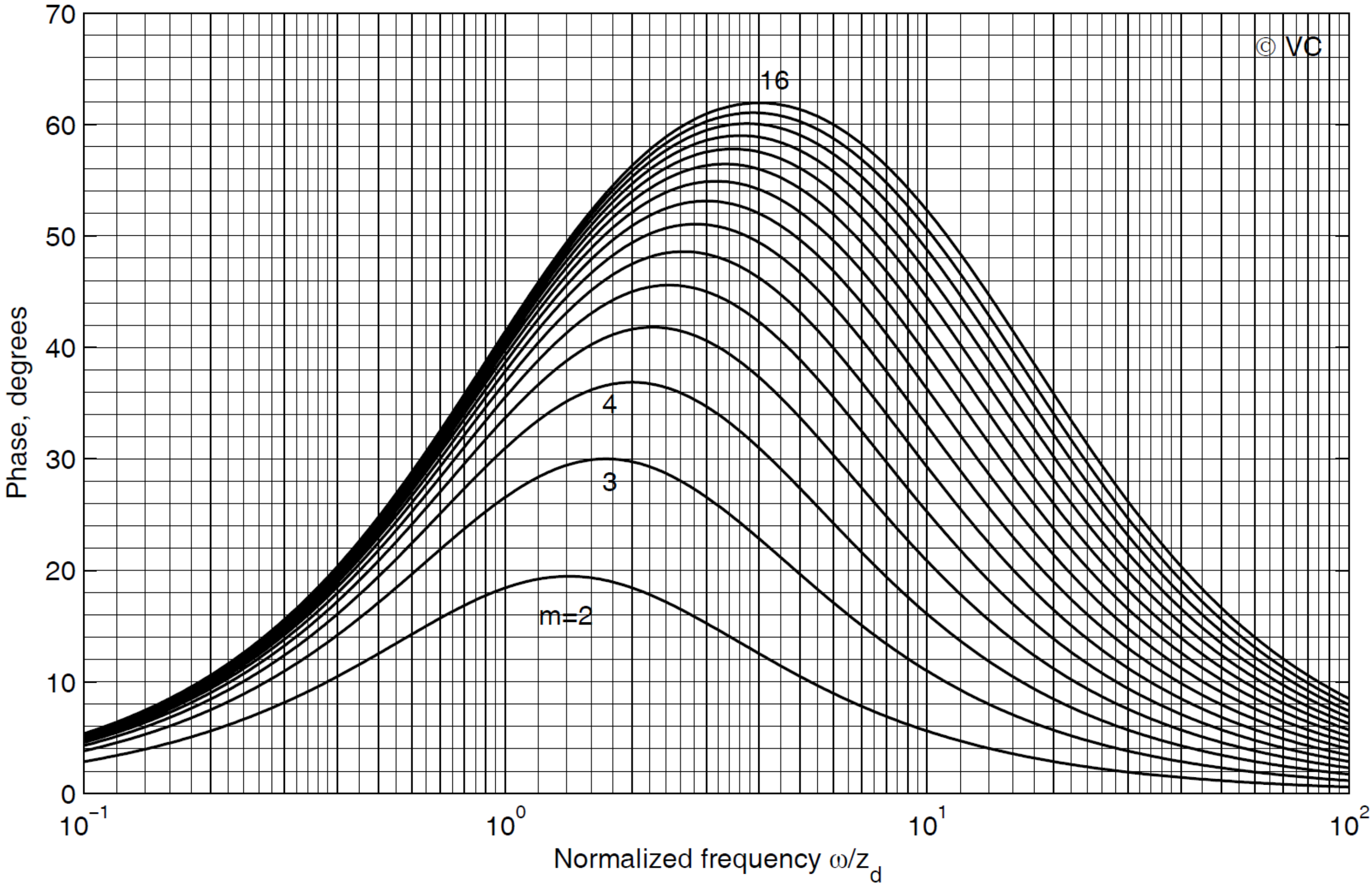
Compilare TdJ

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \ldots, c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix} \ldots$$

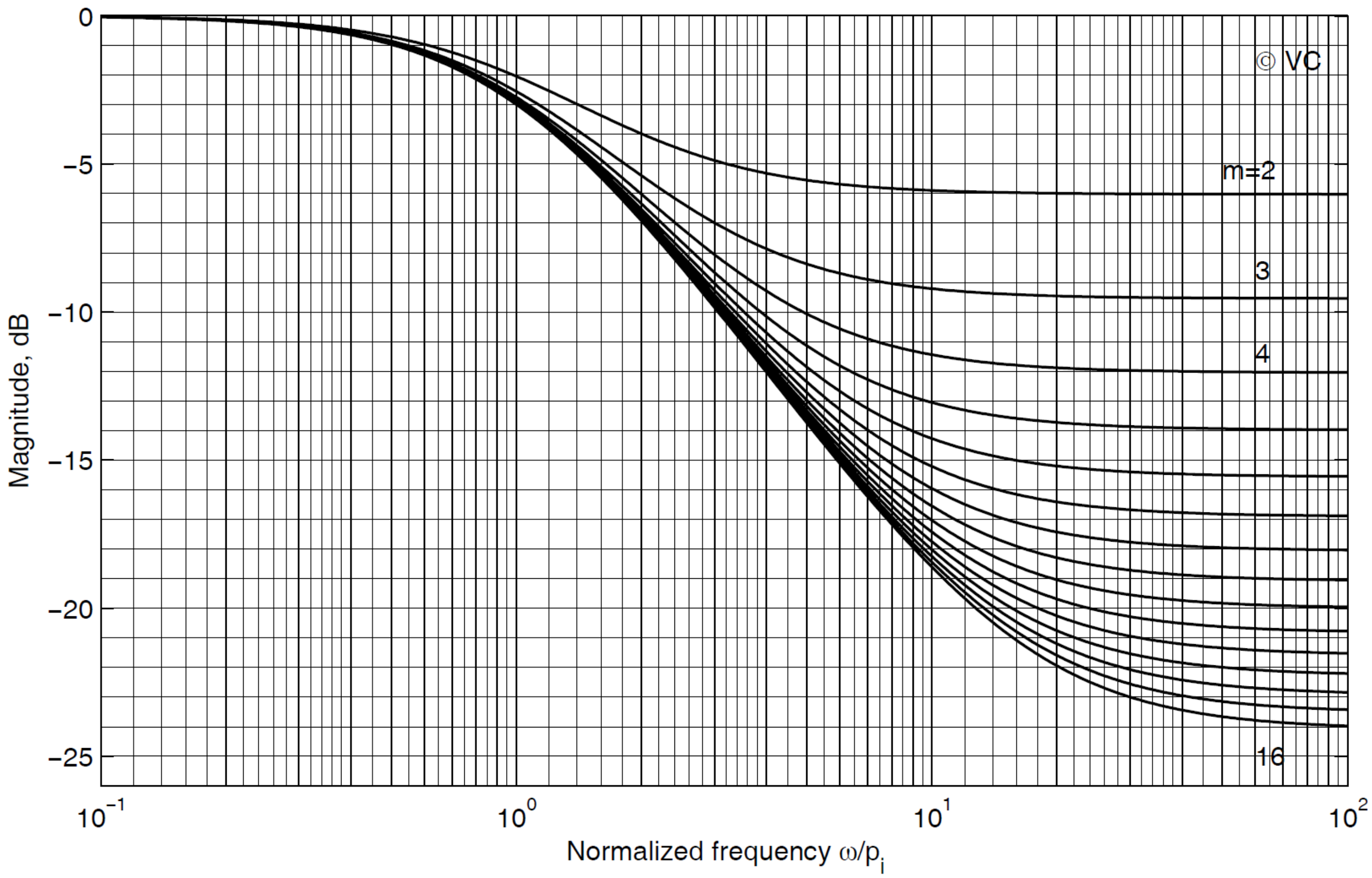
Phase LEAD network

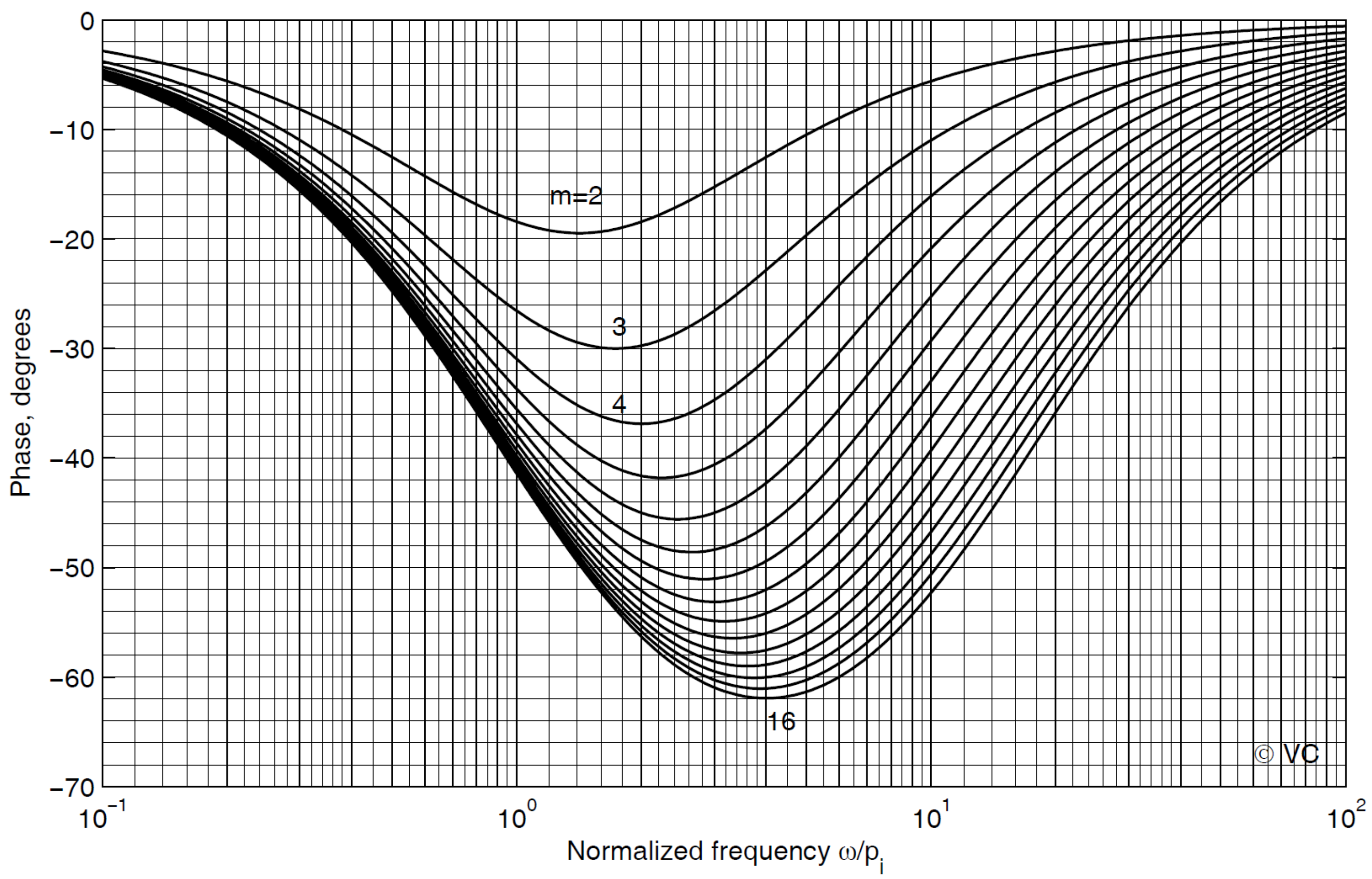


0.



Phase LAG network





Zero network