4. Serie di Taylor e di Laurent

Vincenzo Recupero
Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino
vincenzo.recupero@polito.it

Versione: 13 giugno 2013
Revisione: 24 aprile 2020

Metodi Matematici per l'Ingegneria
05BQXMQ, 06BQXOA (Aaa-Ferr), 06BQXOD, 06BQXPC (Aaa-Ferr)

Dispense di Analisi

1 Serie e successioni complesse

La definizione di successione complessa convergente è del tutto analoga a quella per successioni reali.

Definizione 1.1. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi Diciamo che (z_n) *converge* $\ell \in \mathbb{C}$ *per* $n \to \infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad [\ n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |z_n - \ell| < \varepsilon\ ]$$

cioè se

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - l| = 0.$$

In tal caso scriviamo $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$ or $z_n \to \ell$ per $n \to \infty$.

Grazie alla seguente proposizione lo studio delle successioni complesse si può ridurre a quello delle successioni reali.

Lemma 1.1. *Sia* $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, *per* $n \in \mathbb{N}$, *una successione complessa. Allora*

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \\ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = y \end{cases}$$

In particolare se il limite esiste è unico.

Dimostrazione. È una proprietà del calcolo di funzioni vettoriali di più variabili reali. □

Questa analogia sussiste anche per le serie numeriche.

Definizione 1.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa. La *serie complessa di termine generale* a_n è definita da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

se tale limite esiste in $\mathbb{C}$. In questo caso si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge (a s)* e s è detto *somma della serie*. Altrimenti la serie non è definita e diciamo che *non converge*. La somma finita $s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ è chiamata *somma parziale della serie*.

La seguente proposizione è molto utile.

Proposizione 1.1.

1. *Se* $a_n = u_n + iv_n$, $u_n, v_n \in \mathbb{R}$, *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge a } s = u + iv,\ u, v \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n = v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
3. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *converge allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge (*la convergenza assoluta implica la convergenza*).*

Dimostrazione. Le affermazioni seguono dal Lemma 1.1. □

2 Serie di potenze complesse

Definiamo ora le serie di potenze complesse. Proveremo in seguito che ogni funzione olomorfa è localmente una serie di potenze.

Definizione 2.1. Sia (c_n) una successione complessa. La *serie di potenze di centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e coefficienti* $c_n \in \mathbb{C}$ è la funzione $S(z)$ definita da

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots . \tag{2.1}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che la serie converge. Si osservi che in (2.1) poniamo $0^0 := 1$ (per $z = z_0$ e $n = 0$).

Si osservi che una serie di potenze è sempre convergente nel punto $z = z_0$. Grazie alla traslazione $z \longmapsto z - z_0$ non è restrittivo limitarsi a studiare le serie di potenze di centro $z_0 = 0$.

Il prossimo teorema descrive la struttura dell'insieme di convergenza di una serie di potenze complessa.

Teorema 2.1. *Se $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ è una serie di potenze allora esiste $R \in [0, \infty]$ tale che*

(i) $S(z)$ converge se $|z| < R$;

(ii) $S(z)$ non converge se $|z| > R$.

Inoltre si ha

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

se tale limite esiste, e

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

se tale limite esiste, dove in entrambi i casi si pone $1/R = +\infty$ per $R = 0$ e $1/R = 0$ per $R = +\infty$. Si dice che R è il raggio di convergenza *della serie di potenze. In generale nulla si può dire sulla convergenza nei punti z tali che $|z| = R$.*

Dimostrazione. Si dimostra come l'analogo risultato per le serie di potenze reali. □

Esempio 2.1.

a) Si trovi l'insieme di convergenza della serie complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(z+i)^n}{\log(n+1)}$.

Si tratta di una serie di potenze di centro $z_0 = -i$ e termine generale $c_n = (n+2)/\log(n+1)$. Troviamo il raggio di convergenza.

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+3)\log(n+1)}{(n+2)\log(n+2)}\right| \sim \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \frac{\log(n(1+1/n))}{\log(n(1+2/n))}$$
$$= \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n + \log(1+2/n)} = \frac{1 + \dfrac{\log(1+1/n)}{\log n}}{1 + \dfrac{\log(1+2/n)}{\log n}} \to 1 \qquad \text{per } n \to \infty$$

quindi il raggio di convergenza è $R = 1/1 = 1$. Grazie al Teorema 2.1 sappiamo che la serie converge se $|z - i| < 1$ mentre non converge se $|z - i| > 1$. Studiamo ora la convergenza sul cerchio $|z - i| = 1$. Se $|z - i| = 1$ il modulo del termine ennesimo della serie data è

$$\left|\frac{(n+2)(z+i)^n}{\log(n+1)}\right| = \frac{(n+2)|(z+i)^n|}{\log(n+1)} = \frac{(n+2)|z+i|^n}{\log(n+1)} = \frac{(n+2)}{\log(n+1)} \to +\infty \neq 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Quindi grazie alla Proposizione 1.1-(2.) la serie non converge se $|z - i| = 1$, perciò l'insieme di convergenza è $B_1(-i) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z + i| < 1\}$.

b) Trovare l'insieme di convergenza della serie complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n}}{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)}$.

Ponendo $w = (z - 2i)^2$ ci riconduciamo alla serie di potenze di centro $w_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

dove $c_n = 1/((-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3))$. Troviamone il raggio di convergenza:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)}{(-i)^{2n+3}e^{-n-1}((n+1)^3+3)}\right| = \frac{|-i|^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)}{|-i|^{2n+3}e^{-n-1}((n+1)^3+3)}$$
$$= \frac{(n^3+3)}{e^{-1}((n+1)^3+3)} \to e \quad \text{per } n\to\infty$$

quindi il raggio di convergenza è $R = 1/e = e^{-1}$. Se $|w| = e^{-1}$ il modulo del termine ennesimo della serie data è

$$\left|\frac{w^n}{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)}\right| = \frac{|w|^n}{|(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)|} = \frac{1}{(n^3+3)} \sim \frac{1}{n^3} \qquad \text{per } n\to\infty.$$

Dal momento che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ è convergente, segue che $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{w^n}{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)}\right|$ è anche convergente, così per la Proposizione 1.1 la serie data è (assolutamente) convergente per $|w| = |(z-2i)^2| = e^{-1}$. Per trovare l'insieme di convergenza osserviamo che

$$|w| \leqslant e^{-1} \iff |(z-2i)^2| < e^{-1} \iff |z-2i|^2 < e^{-1} \iff |z-2i| < e^{-1/2}$$

quindi l'insieme di convergenza $\overline{B}_{e^{-1/2}}(2i) = \{z\in\mathbb{C} \ : \ |z-2i| \leqslant e^{-1/2}\}$.

♡

Proposizione 2.1 (Serie geometrica)**.** *L'insieme di convergenza della* serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *è $B_1(0)$ e si ha che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \textit{se } |z|<1. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Il raggio di convergenza è 1, perciò la serie geometrica converge se $|z|<1$ mentre non converge se $|z|>1$. Se $|z|=1$ la serie non converge perché

$$\lim_{n\to\infty}|z^n| = \lim_{n\to\infty}|z|^n = \lim_{n\to\infty}1^n = \lim_{n\to\infty}1 = 1 \neq 0.$$

Quindi l'insieme di convergenza è $B_1(0) = \{z\in\mathbb{C} \ : \ |z|<1\}$. È possibile calcolare la somma della serie geometrica: se $|z|<1$ abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n := \lim_{n\to\infty} 1+z+\cdots+z^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} \qquad (\text{se } |z|<1)$$

poiché per $|z|<1$ si ha $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, infatti $\lim_{n\to\infty}|z^n| = \lim_{n\to\infty}|z|^n = 0$. □

Esempio 2.2. Trovare l'insieme di convergenza e la somma della serie complessa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-i}{9}\right)^n(z+2i)^{2n+1}$.

Si osservi che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-i/9)^n(z+2i)^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}[(-i/9)(z+2i)^2]^n(z+2i) = (z+2i)\sum_{n=1}^{\infty}w^n$$

dove $w = (-i/9)(z+2i)^2$. Ci siamo così ricondotti alla serie geometrica: la serie converge se e solo se $|w|<1$ e la somma è

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-i/9)^n(z+2i)^{2n+1} = (z+2i)\sum_{n=1}^{\infty}w^n = (z+2i)\left(\frac{1}{1-w}-1\right) = (z+2i)\frac{w}{1-w}$$
$$= (z+2i)\frac{(-i/9)(z+2i)^2}{1-(-i/9)(z+2i)^2} = \frac{-i(z+2i)^3}{9+i(z+2i)^2}.$$

Dal momento che

$$|w| < 1 \iff |(-i/9)(z+2i)^2| < 1 \iff |z+2i|^2 < 9 \iff |z+2i| < 3,$$

l'insieme di convergenza è $B_3(-2i)$. ♡

Teorema 2.2 (Le serie di potenze sono olomorfe)**.** *Se $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$ allora $S(z)$ è olomorfa in $B_R(0)$ e*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \qquad \forall z \in B_R(0). \tag{2.3}$$

Inoltre la serie in (2.3) ha raggio di convergenza R.

Dimostrazione. Si dimostra come l'analogo risultato per le serie di potenze reali. □

In altre parole è lecito derivare termine a termine le serie di potenze. Il teorema precedente permette di ricavare una formula per i coefficienti c_n. Se $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$ allora anche $S'(z)$ è una serie di potenze e possiamo applicare ad essa il teorema ottenendo

$$S''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} \qquad \forall z \in B_R(0).$$

Procedendo per induzione troviamo

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n z^{n-k} \qquad \forall z \in B_R(0). \tag{2.4}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se prendiamo $z = 0$ $(= z_0)$ in (2.4) otteniamo

$$S^{(k)}(0) = k! c_k$$

e traslando da 0 a z_0

$$\boxed{c_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}} \tag{2.5}$$

3 Serie di Taylor

Il prossimo importante teorema afferma che ogni funzione olomorfa è localmente una serie di potenze.

Teorema 3.1 (Serie di Taylor di una funzione olomorfa)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$ e $B_{r_0}(z_0) \subseteq \Omega$ allora*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \forall z \in B_r(z_0), \tag{3.1}$$

in altri termini f è localmente una serie di potenze.

Dimostrazione. Non è restrittivo assumere che $z_0 = 0$. Consideriamo $z \in B_{r_0}(z_0)$ e prendiamo $r \in \,]0, r_0[$ tale che $|z| < r$. Grazie alla formula integrale di Cauchy abbiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w, \tag{3.2}$$

Osserviamo che se $w \in \partial B_r(0)$ (cioè $|w| = r$) allora $|z| < |w|$, per cui $|z/w| < 1$ e usando la serie geometrica si ha $\frac{1}{1-z/w} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{w})^n$. Perciò

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w(1 - \frac{z}{w})} \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} \, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w} \frac{z^n}{w^n} \, \mathrm{d}w \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) z^n, \end{aligned}$$

dove lo scambio tra il segno di integrale e di serie è lecito in virtù di un teorema che non citiamo esplicitamente (e che è essenzialmente dovuto alla convergenza uniforme della serie nel cerchio di raggio $|z|$). Allora la sviluppabilità in serie di potenze centrata in $z_0 = 0$ è dimostrata con $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w$ che risulta indipendente da r grazie al Teorema di Cauchy-Goursat. La formula (3.1) è quindi consequenza di (2.5) e della formula integrale di Cauchy per le derivate. □

Sotto le ipotesi del precedente teorema dalla sua dimostrazione, o facendo appello alla formula integrale di Cauchy per le derivate, segue che

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad \forall r \in \,]0, r_0[} \tag{3.3}$$

in particolare questo integrale è indipendente da $r \in \,]0, r_0[$.

Consideriamo la funzione $f(z) = e^z$. Si ha $f^{(n)}(z) = e^z$ per ogni n, quindi $f^{(n)}(0) = 1$. Essendo f olomorfa in tutto il piano $\mathbb{C}$, deduciamo dal Teorema 3.1 che

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{3.4}$$

In modo simile, o ricavandole dalla serie precendente, si trovano le seguenti serie di Taylor:

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{3.6}$$

$$\boxed{\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{3.7}$$

$$\boxed{\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.} \tag{3.8}$$

Esempio 3.1.

a) Si trovi l'insieme di convergenza della serie complessa $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2niz}}{n^3 + (-i)^n}$.

Se si pone $w = e^{-2iz}$ ci si riduce ad una serie di potenze di centro $w_0 = 0$, infatti

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2niz}}{n^3 + (-i)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^n}{n^3 + (-i)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n w^n$$

con $c_n = (n^3 + (-i)^n)^{-1}$. Troviamone il raggio di convergenza.

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|n^3 + (-i)^n|}{|(n+1)^3 + (-i)^{n+1}|} \sim \frac{n^3}{(n+1)^3} \to 1 \quad \text{per } n \to \infty,$$

infatti $(-i)^n = o(n^3)$ per $n \to \infty$, perché $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-i)^n}{n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} 1/n^3 = 0$. Allora il raggio di convergenza è $R = 1/1 = 1$. Studiamo ora la convergenza sulla circonferenza $|w| = 1$. Se $|w| = 1$ il modulo del termine generale della serie data è

$$\left|\frac{w^n}{n^3 + (-i)^n}\right| = \frac{|w|^n}{|n^3 + (-i)^n|} = \frac{1}{|n^3 + (-i)^n|} \sim \frac{1}{n^3} \qquad \text{as } n \to \infty.$$

Essendo $\sum_{n=1} \dfrac{1}{n^3}$ convergente, dalla Proposizione 1.1-(3) deduciamo che la serie data è (assolutamente) convergente per $|w| = 1$. Perciò per il Teorema 2.1 abbiamo che l'insieme di convergenza in termini di w is $\{w \ : \ |w| \leqslant 1\}$. Traduciamo questa condizione in termini di $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |w| \leqslant 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad |e^{-2iz}| \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\mathrm{Re}(-2iz)} \leqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2y-2ix} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y \leqslant 0, \end{aligned}$$

quindi l'insieme di convergenza è il semipiano chiuso

$$\{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R} \ : \ y \leqslant 0\}.$$

♡

Esempio 3.2. Supponiamo che f e g siano olomorfe in tutto $\mathbb{C}$ e che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in B_1(0)$. Proviamo che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Dal momento che f e g sono olomorfe in tutto il piano complesso, per il Teorema 3.1 le loro serie di Taylor in $z_0 = 0$ hanno raggio di convergenza $R = +\infty$[1]. Quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ora $f = g$ in $B_1(0)$, quindi $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui le due serie di Taylor della formula precedente coincidono, e ciò implica $f = g$. ♡

Il precedente esercizio è anche una caso particolare di un importante teorema che si può dedurre dal Teorema di Taylor 3.1. Ne omettiamo la dimostrazione.

Teorema 3.2 (Principio d'identità per funzioni analitiche)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio e siano f e g olomorfe in Ω. Supponiamo che $D \subseteq \Omega$ è un insieme contenente almeno un suo punto di accumulazione, e che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in D$. Allora $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in \Omega$.*

[1] se $z \in \mathbb{C}$ è fissato arbitrariamente e se $r_0 > |z|$, allora $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ che è indipendente da r_0.

Dimostrazione. $\square$

Esempio 3.3. Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Provare che $f(z) = z^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$:
La funzione $g(z) = z^2$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ e coincide con $f(x)$ per $x \in D = \mathbb{R}$. Siccome tutti i punti di $D = \mathbb{R}$ sono di accumulazione per $\mathbb{R}$, per il principio di identità $f(z) = g(z) = z^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. $\heartsuit$

4 Serie di Laurent e residui

Nel prossimo teorema vediamo che una funzione olomorfa in una corona circolare di centro z_0 ammette una sorta di rappresentazione in serie di potenze attorno alla singolarità z_0. Dobbiamo però ammettere potenze negative di $(z - z_0)$.

Teorema 4.1 (Serie di Laurent). *Se $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant +\infty$, e f è olomorfa nella "corona circolare" $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, allora esistono $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, tali che*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in \Omega, \tag{4.1}$$

e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \qquad \forall r \in \,]r_1, r_2[\, . \tag{4.2}$$

Inoltre questo sviluppo in serie "doppia" è unico ed è detto serie di Laurent di f centrata in z_0 in Ω.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $z_0 = 0$. Sia $z \in \Omega$ e siano ρ_1, ρ_2 tali che $r_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < r_2$. Allora utilizzando la formula integrale di Cauchy e procedendo come nella dimostrazione della serie di Taylor si trova

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_2}(0)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_1}(0)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_2}(0)} \frac{f(w)}{w(1 - z/w)} \, \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_1}(0)} \frac{f(w)}{z(1 - w/z)} \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_2}(0)} \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_2}(0)} \frac{f(w)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n \mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_2}(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho_2}(0)} f(w) w^{n+1} \right) \frac{1}{z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} f(w) w^{n+1} \right) \frac{1}{z^n}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera per ogni $r \in]r_1, r_2[$ grazie al al Teorema di Cauchy-Goursat. Quindi è provata l'esistenza di uno sviluppo di Laurent di f in Ω centrato in $z_0 = 0$. Supponiamo ora viceversa che f ammetta uno sviluppo in serie doppia in Ω centrato in z_0 con coefficienti d_n. Allora se $r \in]r_1, r_2[$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k (w-z_0)^n}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{d_k (w-z_0)^k}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d_k}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}w}{(w-z_0)^{n-k+1}} = d_n,$$

e ciò prova in particolare l'unicità dello sviluppo in serie di Laurent. □

Esempio 4.1. Trovare tutte le serie di Laurent in $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \dfrac{1}{iz^2 - z^5}$.
Essendo $iz^2 - z^5 = z^2(i - z^3)$ si ha che $z_0 = 0$ è una singolarità e le altre tre singolarità stanno sulla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine. Così per il Teorema di Laurent esistono due serie di Laurent di centro $z_0 = 0$: la prima nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - 0| < 1\}$ ($r_1 = 0,\ r_2 = 1$); la seconda in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 < |z|\}$ ($r_1 = 1,\ r_2 = +\infty$). Cominciamo dal primo sviluppo.
1. Serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z| < 1\}$:
Possiamo scrivere

$$\frac{1}{iz^2 - z^5} = \frac{1}{iz^2\left(1 - \dfrac{z^3}{i}\right)} = \frac{1}{iz^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^3}{i}\right)^n \quad \left(\text{infatti } \left|\frac{z^3}{i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z|^3 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1\right),$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n-2}}{i^{n+1}} = \frac{1}{iz^2} + (-z + \cdots) = \frac{1}{iz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n-2}}{i^{n+1}} \tag{4.3}$$

2. Serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > 1\}$:
Si ha

$$\frac{1}{iz^2 - z^5} = \frac{-1}{z^5\left(1 - \dfrac{i}{z^3}\right)} = \frac{-1}{z^5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z^3}\right)^n \quad \left(\text{infatti } \left|\frac{i}{z^3}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|^3} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1\right),$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{3n+5}} = \left(-\frac{1}{z^5} - \frac{i}{z^8} - \cdots\right) + 0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{3n+5}}.$$

♡

Definizione 4.1. Siano dati $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Si dice che $z_0 \notin D$ è una *singolarità isolata per* f se esiste $r_0 > 0$ tale che f è olomorfa in $B_{r_0}(z_0) \setminus \{z_0\}$.

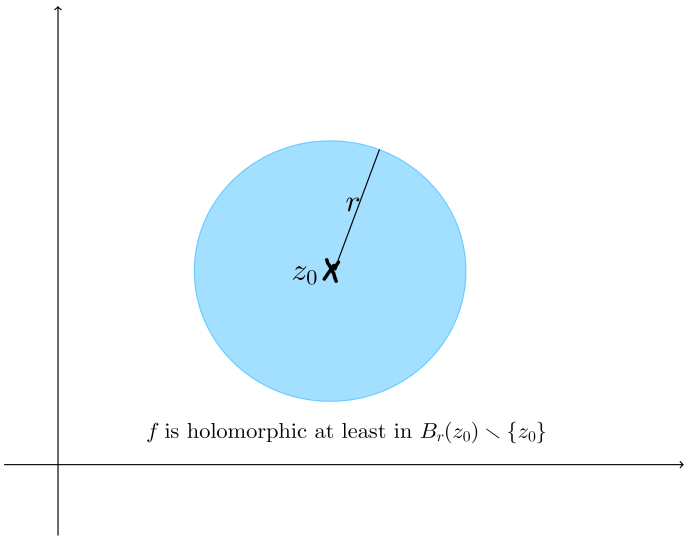


Figura 1: z_0 singolarità isolata di f

Definizione 4.2. Sia z_0 una singolarità isolata di una funzione f e sia $r_0 > 0$ tale che in $B_{r_0}(z_0) \setminus \{z_0\}$ la serie di Laurent di f sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \text{se } 0 < |z-z_0| < r_0$$

(un tale r_0 esiste per definizione di singolarità isolata). Allora diamo le seguenti definizioni:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ si dice *parte principale di f in z_0*.

(ii) Se la parte principale di f in z_0 è zero allora z_0 è chiamato *singolarità eliminabile di f*.

(iii) Se esiste $m \geqslant 1$ tale che $c_{-m} \neq 0$ e $c_{-n} = 0$ per ogni $n > m$, cioè se

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{con } c_{-m} \neq 0,\ m \geqslant 1,$$

allora z_0 si dice *polo di ordine m per f*. Se $m = 1$ diciamo anche che z_0 è un *polo semplice*; se $m = 2$ la singolarità z_0 si dice anche *polo doppio*.

(iv) Se la parte principale di f in z_0 ha infiniti termini diversi da zero, allora z_0 viene detto *singolarità essenziale*.

Definizione 4.3. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ per cui esista $r_0 > 0$ tale che f è olomorfa in $B_{r_0}(z_0)\smallsetminus\{z_0\}$. Sia allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \text{se } 0 < |z-z_0| < r_0$$

lo sviluppo di Laurent di f in $B_{r_0}(z_0)\smallsetminus\{z_0\}$. Si dice *residuo di f in z_0* il numero

$$\mathrm{Res}_f(z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (r \in\,]0, r_0[). \tag{4.4}$$

Esempio 4.2. Trovare la serie di Laurent di $f(z) = \dfrac{5}{3z^3+z^4}$ di centro $z_0 = 0$ nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < 3\}$. Classificare la singolarità $z_0 = 0$ e calcolare il residuo di f in questo punto.
Le singolarità di f sono $z_0 = 0$ e $z_1 = -3$ quindi f è olomorfa in $\{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < 3\}$. Se $0 < |z| < 3$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3z^3+z^4} &= \frac{5}{3z^3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{5}{3z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n \text{ (infatti } |-z/3| < 1 \Leftrightarrow |z|/3 < 1 \Leftrightarrow |z| < 3),\\
&= 5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-3}}{3^{n+1}} = 5\left(\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{3^2z^2} + \frac{1}{3^3z}\right) + 5\left(-\frac{1}{3^4} + \frac{z}{3^5} - \cdots\right)\\
&= \left(\frac{5}{3z^3} - \frac{5}{9z^2} + \frac{5}{27z}\right) + 5\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-3}}{3^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Quindi $z_0 = 0$ è un polo di ordine 3 e $\mathrm{Res}_f(0) = 5/27$. ♡

Esempio 4.3. Trovare la serie di Laurent di $f(z) = z^9 e^{2/z^5}$ di centro $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$. Classificare la singolarità $z_0 = 0$ e calcolare il residuo di f in questo punto.
Poiché il raggio di convergenza della serie di Taylor di e^w è $+\infty$, abbiamo

$$\begin{aligned}
z^9 e^{2/z^5} &= z^9\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{2}{z^5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{2^n}{z^{5n-9}} = \left(z^9 + 2z^4\right) + \left(\frac{2}{z} + \frac{4}{3z^6} + \cdots\right)\\
&= \left(\cdots + \frac{4}{3z^6} + \frac{2}{z}\right) + \left(2z^4 + z^9\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{2^n}{z^{5n-9}} + \left(2z^4 + z^9\right).
\end{aligned}$$

Quindi $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale e $\mathrm{Res}_f(0) = 2$. ♡

Esempio 4.4. Si trovino tutte le serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \dfrac{1}{z^{15} - z^{16}}$. Classificare la singolarità z_0 e calcolare $\mathrm{Res}_f(0)$.
Poiché $z^{15} - z^{16} = z^{15}(1-z)$ si ha che $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$ sono le uniche singolarità. Quindi per il Teorema di Laurent troviamo due serie di Laurent di centro $z_0 = 0$: la prima nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < 1\}$ ($r_1 = 0,\ r_2 = 1$); la seconda in $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| > 1\}$ ($r_1 = 1,\ r_2 = +\infty$):
1. Serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < 1\}$:
Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^{15} - z^{16}} &= \frac{1}{z^{15}(1-z)} = \frac{1}{z^{15}}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{(infatti } |z| < 1),\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-15} = \left(\frac{1}{z^{15}} + \cdots + \frac{1}{z}\right) + (1 + z + \cdots) = \left(\frac{1}{z^{15}} + \cdots + \frac{1}{z}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.
\end{aligned}$$

2. Serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| > 1\}$:

Si ha

$$\frac{1}{z^{15}-z^{16}} = \frac{-1}{z^{16}\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{-1}{z^{16}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n} \qquad \left(\text{infatti } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1\right),$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+16}} = \left(-\frac{1}{z^{16}} - \frac{1}{z^{17}} - \cdots\right) + 0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+16}}.$$

Classificazione della singolarità $z_0 = 0$:
Se vogliamo classificare la singolarità $z_0 = 0$ e calcolare il residuo di f in questo punto, per definizione, dobbiamo considerare la serie di Laurent $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z| < 1\}$. Per cui $z_0 = 0$ è un polo di ordine 15 e $\mathrm{Res}_f(0) = 1$. ♡

Vediamo ora alcune utili regole di calcolo dei residui.

Proposizione 4.1.

$$z_0 \textit{ è un polo semplice per } f \iff \begin{cases} f(z) = \dfrac{g(z)}{z-z_0}, \ g(z_0) \neq 0 \\ g \textit{ olomorfa in un intorno di } z_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

In questo caso

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = g(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Dimostrazione. (ma è un caso particolare della prossima Proposizione) Ricordiamo che z_0 è un polo semplice di f, quindi esistono $r > 0$ e $c_n \in \mathbb{C}$, $n \geqslant -1$, tali che per ogni $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ si ha

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad c_{-1} \neq 0.$$

Equivalentemente, scrivendo il fattore comune $1/(z-z_0)$, se e solo se

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}\left[c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+1}\right] = \frac{g(z)}{z-z_0}, \qquad c_{-1} \neq 0,$$

dove $g(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+1}$ è una funzione olomorfa in $B_r(z_0)$ e $g(z_0) = c_{-1} \neq 0$. □

Proposizione 4.2.

$$z_0 \textit{ è un polo di ordine } m \geqslant 1 \textit{ per } f \iff \begin{cases} f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \ g(z_0) \neq 0 \\ g \textit{ olomorfa in un intorno di } z_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

In tal caso

$$\mathrm{Res}_f(z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\right]_{z=z_0}.$$

Dimostrazione. Il numero z_0 è un polo di ordine $m \geqslant 1$ se e solo se

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad c_{-m} \neq 0,$$

per ogni $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, per qualche $r > 0$ e $c_n \in \mathbb{C}$. Equivalentemente

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m+n}(z-z_0)^n = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \qquad c_{-m} \neq 0,$$

dove

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m+n}(z-z_0)^n = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \cdots$$

è una funzione olomorfa in $B_r(z_0)$ e $g(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Quindi il residuo di f è

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

□

È utile anche la seguente regola per poli semplici:

Proposizione 4.3.

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{n(z)}{d(z)}, \ n(z_0) \neq 0 \\ n, d \text{ olomorfe in un intorno di } z_0 \\ d(z_0) = 0, \ d'(z_0) \neq 0 \end{cases} \implies z_0 \text{ è un polo semplice per } f$$

In questo caso

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che esiste una funzione h, olomorfa in un intorno di z_0, tale che $h(z_0) \neq 0$ e $d(z) = (z-z_0)h(z)$; perciò

$$\frac{n(z)}{d(z)} = \frac{n(z)}{(z-z_0)h(z)}$$

e z_0 è un polo semplice e

$$\operatorname{Res}_f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} n(z) \frac{(z-z_0)}{d(z)} = \lim_{z \to z_0} n(z) \frac{(z-z_0)}{d(z) - d(z_0)} = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}.$$

□

Esempio 4.5.

a) Calcoliamo il residuo di $f(z) = \dfrac{\cosh z}{3 + 2iz}$ in $z_0 = i3/2$, che è l'unica singolaità di f. Si ha

$$f(z) = \frac{\cosh z}{2i(z - i3/2)} = \frac{g(z)}{z - i3/2},$$

dove $g(z) = (\cosh z)/2i$ è olomorfa e

$$g(i3/2) = \frac{\cosh(i3/2)}{2i} = \frac{e^{i3/2} + e^{-i3/2}}{4i} = \frac{\cos(3/2)}{2i} \neq 0.$$

Allora per la Proposizione 4.1 $z_0 = i3/2$ è un polo semplice

$$\mathrm{Res}_f(i3/2) = g(z_0) = \frac{\cos(3/2)}{2i}.$$

b) Sia $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Classifichiamo la singolarità $z_0 = i$ e calcoliamo il residuo di f in questo punto. Possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{g(z)}{(z-i)^2},$$

dove $g(z) := \dfrac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$ è olomorfa in un intorno di $z_0 = i$ e $g(i) = \dfrac{e^{-1}}{i(2i)^2} \neq 0$. Quindi possiamo applicare la Proposizione 4.2 e dedurre che $z_0 = i$ è un polo doppio e

$$\mathrm{Res}_f(i) = \frac{1}{1!}g'(i) = \left(\frac{ie^{iz}z(z+i)^2 - e^{iz}[(z+i)^2 + 2z(z+i)]}{z^2(z+i)^4}\right)\Bigg|_{z=i} = -\frac{3}{4}e^{-1}.$$

c) Calcoliamo i residui di $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+3z}$ in tutte le singolarità $z_0 = 0$ e $z_1 = -3$. È chiaro che z_0 e z_1 sono poli semplici, perciò si può usare la Proposizione 4.1. Comunque in questa situazione la regola fornita dalla Proposizione 4.3 è conveniente, e se denotiamo con D l'operazione di derivazione, abbiamo

$$\frac{z-1}{\mathrm{D}(z^2+3z)} = \frac{z-1}{2z+3},$$

per cui

$$\mathrm{Res}_f(0) = \left(\frac{z-1}{2z+3}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{3},$$
$$\mathrm{Res}_f(-3) = \left(\frac{z-1}{2z+3}\right)\Bigg|_{z=-3} = \frac{4}{3}.$$

♡

Vediamo alcuni esempi dove le regole precedenti non si possono applicare.

Esempio 4.6.

a) Supponiamo che $z_0 \in \mathbb{C}$ e che

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0} \qquad \text{dove } g(z_0) = 0,\ g \text{ olomorfa in un intorno di } z_0.$$

Allora per il Teorema di Taylor si ha che $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ in un certo intorno $B_r(z_0)$. Inoltre per ipotesi $c_0 = g(z_0) = 0$, per cui troviamo

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0} &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-1} \\ &= c_0(z-z_0)^{-1} + c_1 + \cdots \\ &= c_1 + c_2(z-z_0) + \cdots \qquad \forall z \in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}, \end{aligned}$$

quindi z_0 è una singolarità eliminabile e $\mathrm{Res}_f(0) = 0$.

b) Utilizzando il precedente punto a) troviamo che $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile di $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, quindi $\mathrm{Res}_f(0) = 0$.

c) L'unica singolarità di $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ è $z_0 = 0$ e $\sin(0) = 0$, quindi non è possibile applicare nessuna delle regole precedente. Poiché

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \cdots ,$$

il polo è semplice e

$$\mathrm{Res}_f(0) = 1.$$

d) Consideriamo $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2 - \pi^2/4)^2}$ e classifichiamo la singolarità $z_0 = \pi/2$. Si ha

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2(z+\pi/2)^2} = \frac{g(z)}{(z-\pi/2)^2}$$

dove $g(z) = \dfrac{\cos z}{(z+\pi/2)^2}$. Visto che $g(\pi/2) = 0$ non possiamo applicare nessuna regola nota, per cui scriviamo la serie di Taylor di $\cos z$ in $z_0 = \pi/2$. Troviamo

$$\begin{aligned} &\cos(\pi/2) = 0, \\ &[D(\cos z)]|_{z=\pi/2} = [-\sin z]|_{z=\pi/2} = -1, \end{aligned}$$

fermiamoci qui e osserviamo che questi due termini sono sufficienti per classificare la singolarità, infatti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2(z+\pi/2)^2} = \frac{0 - 1(z-\pi/2) + c_2(z-\pi/2)^2 + \cdots}{(z-\pi/2)^2(z+\pi/2)^2} \\ &= \frac{-1 + c_2(z-\pi/2) + \cdots}{(z-\pi/2)(z+\pi/2)^2} = \frac{\widetilde{g}(z)}{(z-\pi/2)}, \end{aligned}$$

dove

$$\widetilde{g}(z) = \frac{-1 + c_2(z-\pi/2) + \cdots}{(z+\pi/2)^2} \text{ è olomorfa intorno a } \pi/2 \text{ e } \widetilde{g}(\pi/2) = \frac{-1}{\pi^2} \neq 0.$$

Ora possiamo quindi applicare la Proposizione 4.1 con $\widetilde{g}$ in luogo di g e dedurre che $z_0 = \pi/2$ è un polo semplice.

♡

Concludiamo con il Teorema dei Residui, un utile strumento per il calcolo di integrali.

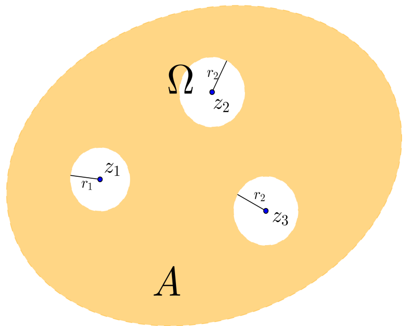
Teorema 4.2 (Teorema dei Residui)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio regolare limitato. Se $z_1, \ldots, z_N \in \Omega$ e $f : \overline{\Omega} \setminus \{z_1, \ldots, z_N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua, f olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$, allora*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_f(z_k). \tag{4.7}$$

Dimostrazione. Consideriamo N intorni a due a due disgiunti $B_{r_k}(z_0) \subseteq A$, $k = 1, \ldots, m$. Allora $A := \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \overline{B}_{r_k}(z_k)$ è un dominio regolare limitato e f è continua su $\overline{E}$, olomorfa in E. Quindi per il Teorema di Cauchy-Goursat

$$0 = \int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial B_{r_k}(z_k)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{N} 2\pi i\, \mathrm{Res}_f(z_k)$$

dove l'ultima uguaglianza è vera in virtù della formula (4.4). □



$A = \Omega \setminus \bigcup_{r=1}^{3} \overline{B}_{r_k}(z_k)$ is the orange zone

Figura 2: Teorema dei Residui

Esempio 4.7.

a) Calcolare $I := \displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-3)(z^2-2z+2)}\,\mathrm{d}z$ dove γ è la curva di Jordan orientata in senso antiorario il cui sostegno è $E = \{z = x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ (x^2/4) + (y^2/9) = 1\}$.
Il sostegno E è un'ellisse di centro l'origine e semiassi di lunghezza 2 e 3. La funzione integranda

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-3)(z^2-2z+2)} = \frac{e^z}{(z-3)(z-1-i)(z-1+i)}$$

ha il polo $z = 3$ che sta all'esterno E, gli altri poli $z = 1 \pm i$ sono semplici e stanno nell'interno. Allora per il Teorema dei Residui

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}_f(1+i) + \operatorname{Res}_f(1-i)\right] \\ &= 2\pi i \left[\left(\frac{e^z}{(z-3)(z-1+i)} \right)\Bigg|_{z=1+i} + \left(\frac{e^z}{(z-3)(z-1-i)} \right)\Bigg|_{z=1-i} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{ee^i}{2i(i-2)} + \frac{ee^{-i}}{2i(i+2)} \right] = \pi e \left[\frac{e^i}{(i-2)} + \frac{e^{-i}}{(i+2)} \right]. \end{aligned}$$

b) Calcolare $I := \displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}\,\mathrm{d}z$ dove C è la frontiera dell'insieme $R = \{z = x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ |y-x| < 2,\ |x| < 2\}$.
L'insieme R è un parallelogramma di vertici $2, 2+4i, -2, -2-4i$. La funzione integranda $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}$ ha due singolarità: il polo semplice $z_0 = 0$ e il polo doppio $z_1 = i$ che stanno entrambi nell'interno di C. Possiamo quindi utilizzare il Teorema dei Residui e ottenere

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}_f(0) + \operatorname{Res}_f(i)\right] = 2\pi i \left[\left(\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2} \right)\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{1!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{e^{\pi z}}{z} \right)\Bigg|_{z=i} \right] \\ &= 2\pi i \left[-1 + \left(\frac{\pi e^{\pi z} z - e^{\pi z}}{z^2} \right)\Bigg|_{z=i} \right] = 2\pi i(\pi i - 2). \end{aligned}$$

♡

5 Decomposizione in fratti semplici

Vediamo in questo paragrafo una connessione tra la decomposizione in fratti semplici e la nozione di residuo. Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi senza radici comuni e sia $f(z) := p(z)/q(z)$. Assumiamo anche che $q(z)$ non è costante, cioè $q(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $a_k \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra $q(z)$ ha r radici, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant r \leqslant n$, e ci sono $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$, $m_k > 0$, tali che

$$q(z) = q_n (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}.$$

Allora per ogni $k = 1, \ldots, r$, la serie di Laurent di f in z_k ha la forma

$$f(z) = \frac{c_{-m_k}^{(k)}}{(z - z_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{c_{-1}^{(k)}}{(z - z_k)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - z_k)^n \qquad z \in B_{r_k}(z_k), \tag{5.1}$$

con opportuni coefficienti $c_n^{(k)} \in \mathbb{C}$, $r_k > 0$ (la serie a secondo membro è in realtà una somma finita, perché f è razionale). Osserviamo che

$$\begin{aligned}
&c_{-1}^{(k)} = \operatorname{Res}_{f(z)}(z_k), \\
&c_{-2}^{(k)} = \operatorname{Res}_{(z-z_k)f(z)}(z_k), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_{-n}^{(k)} = \operatorname{Res}_{(z-z_k)^{n-1}f(z)}(z_k), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&c_{-m_k}^{(k)} = \operatorname{Res}_{(z-z_k)^{m_k-1}f(z)}(z_k).
\end{aligned}$$

Quindi se poniamo

$$g(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{c_{-m_{(k)}}^{k}}{(z - z_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{c_{-1}^{(k)}}{(z - z_k)} \right) = f(z) - \sum_{k=1}^{r} \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{-n}^{(k)}}{(z - z_k)^n}$$

abbiamo che g è una funzione razionale, perché è differenza di due funzioni razionali. Inoltre, scrivendo la serie di Laurent di g in ogni z_k, grazie a (5.1) si deduce che g non ha singolarità (o meglio sono eliminabili), per cui $g(z)$ è un polinomio. Abbiamo allora provato la seguente

Proposizione 5.1. *Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi senza radici comuni e siano $z_1, \dots, z_r$ le radici di $q(z)$, con molteplicità $m_1, \dots, m_r$. Allora esiste un polinomio $g(z)$ tale che*

$$\begin{aligned}\frac{p(z)}{q(z)} &= g(z) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{-n}^{(k)}}{(z-z_k)^n} = g(z) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{n=1}^{m_k} \frac{\mathrm{Res}_{(z-z_k)^{n-1}f(z)}(z_k)}{(z-z_k)^n}\\ &= g(z) + \frac{\mathrm{Res}_{f(z)}(z_1)}{(z-z_1)} + \frac{\mathrm{Res}_{(z-z_1)f(z)}(z_1)}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{Res}_{(z-z_1)^{m_1-1}f(z)}(z_1)}{(z-z_1)^{m_1}}\\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad + \frac{\mathrm{Res}_{f(z)}(z_r)}{(z-z_r)} + \frac{\mathrm{Res}_{(z-z_r)f(z)}(z_r)}{(z-z_r)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{Res}_{(z-z_r)^{m_r-1}f(z)}(z_r)}{(z-z_r)^{m_r}}\end{aligned}$$

dove $g(z)$ è il polinomio che si ottiene dividendo $p(z)$ per $q(z)$, in particolare $g(z) = 0$ se il grado di p è strettamente minore del grado di q.

La decomposizione ha una forma semplice se i poli di p/q sono semplici. In questo caso

$$\frac{p(z)}{q(z)} = g(z) + \frac{\mathrm{Res}_f(z_1)}{(z-z_1)} + \cdots + \frac{\mathrm{Res}_f(z_r)}{(z-z_r)}, \qquad z_1, \dots, z_k \text{ poli semplici.}$$

Per comprendere meglio quanto visto consideriamo alcuni esempi.

Esempio 5.1.

a) Troviamo la decomposizione in fratti semplici di $f(z) = \dfrac{z^4+z^3+1}{z^3+z}$. Abbiamo che $g(z) = z+1$, inoltre $z^3+z = z(z^2+1) = z(z-i)(z+i)$, quindi tutti i poli sono semplici. Usando le regole per il calcolo dei residui troviamo

$$\mathrm{Res}_f(0) = 1, \qquad \mathrm{Res}_f(i) = -\frac{2-i}{2}, \qquad \mathrm{Res}_f(-i) = -\frac{2+i}{2},$$

per cui

$$\frac{z^4+z^3+1}{z^3+z} = z+1+\frac{1}{z} - \frac{2-i}{2(z-i)} - \frac{2+i}{2(z+i)}.$$

Essendo i coefficienti di f reali, possiamo anche trovare la decomposizione in fratti semplici *reali* (quella studiata in Analisi 1). Possiamo seguire la procedure nota dall'Analisi 1 oppure dedurre la decomposizione dalla formula precedente scrivendo

$$\begin{aligned}\frac{z^4+z^3+1}{z^3+z} &= z+1+\frac{1}{z} - \frac{2-i}{2(z-i)} - \frac{2+i}{2(z+i)}\\ &= z+1+\frac{1}{z} - \frac{(2-i)(z+i)+(2+i)(z-i)}{2(z^2+1)}\\ &= z+1+\frac{1}{z} - \frac{2z+1}{(z^2+1)}.\end{aligned}$$

b) Troviamo la decomposizione in fratti semplici di $f(z) = \dfrac{2z^3+4z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1}$. Prima di tutto abbiamo $g(z) = 2$. Per fattorizzare il denominatore scriviamo, per esempio, $z^3+z^2-z-1 = z(z^2-1)+z^2-1 = (z^2-1)(z+1) = (z-1)(z+1)^2$. Visto che il numeratore non si annulla in $z=1$ e in $z=-1$, abbiamo un polo semplice e un polo doppio

$$\mathrm{Res}_{f(z)}(1) = \left.\frac{2z^2+4z^2+3z-1}{(z+1)^2}\right|_{z=1} = 2,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{f(z)}(-1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2z^3+4z^2+3z-1}{z-1}\right)\bigg|_{z=-1} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(6z^2+8z+3)(z+1)-2z^3-4z^2-3z+1}{(z+1)^2}\right)\bigg|_{z=-1} = 0,\end{aligned}$$

e, poiché $z=-1$ è un polo semplice di $(z+1)f(z)$,

$$\mathrm{Res}_{(z+1)f(z)}(-1) = \frac{2z^2+4z^2+3z-1}{z+1}\bigg|_{z=-1} = 1.$$

Perciò

$$\frac{2z^3+4z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1} = 2 + \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

♡

6 Esercizi

Esercizi (tratti dalle dispense di Analisi Complessa (vecchio ordinamento)).

1. Trovare l'insieme di convergenza delle seguenti serie complesse:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

2. Verificare che:

   a) $\displaystyle\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$ in $\{0<|z|<4\}$

   b) $\displaystyle\frac{\sin z^2}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots$ se $z \neq 0$

3. Trovare le serie di Taylor delle funzioni:

   a) $f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ at $z_0 = 2$

   b) $f(z) = z\,e^{2z}$ at $z_0 = -1$

   c) $f(z) = (z^2+1)\cos 3z^3$ at $z_0 = 0$

4. Trovare le serie di Laurent in $z_0 = 0$ delle funzioni:

   a) $\displaystyle f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ in $\{|z|<1\}$ and in $\{|z|>1\}$

   b) $\displaystyle f(z) = \frac{\cos 2z^2}{z^5}$ in $\{|z|>0\}$

   c) $\displaystyle f(z) = \frac{6iz^2}{z^2+9}$ in $\{|z|<3\}$ and in $\{|z|>3\}$

d) $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$ in $\{|z| < 1\}$ e in $\{1 < |z| < 3\}$

5. Verificare che $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale della funzione $f(z) = \cosh(1/z)$.

6. Classificare tutte le singolarità di

$$f(z) = \frac{\cos z \cosh z}{z^3 \left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2 \left(z^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

(suggerimento: ragionare come nell'Esempio 4.6-d)).

7. Trovare le singolarità a calcolare i residui delle funzioni

a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$

b) $f(z) = \dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$

c) $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{3 + 2iz}$

8. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\, \mathrm{d}z$ where $C = \{|z| = 2\}$

b) $\displaystyle\int_C e^{1/z^2}\, \mathrm{d}z$ where $C = \{|z| = 1\}$

c) $\displaystyle\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\, \mathrm{d}z$ where $C = \{|z| = 3\}$

d) $\displaystyle\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\, \mathrm{d}z$ where $C = \{|z-2| = 2\}$

e) $\displaystyle\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\, \mathrm{d}z$ where $C = \{|z| = 4\}$

Risposte

1. a) $\mathbb{C}$

   b) $\{|z| \leq 1\}$

   c) $\{0\}$

2. Usare la serie geometrica in a) e lo sviluppo di Taylor di $\sin z$ in b)

3. a) $f(z) = 2 + 4(z-2) + 3(z-2)^2 + (z-2)^3$

   b) $f(z) = -e^{-2} + \dfrac{e^{-2}}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n!} 2^n (z+1)^n$

   c) $f(z) = 1 + z^2 - \dfrac{9}{2} z^6 - \dfrac{9}{2} z^8 + \dfrac{81}{4!} z^{12} + \dfrac{81}{4!} z^{14} - \cdots$

4. a) $f(z) = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ in $\{|z| < 1\}$;

   $f(z) = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ in $\{|z| > 1\}$

   b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{4n-5}}{(2n)!}$

   c) $f(z) = 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+2}}{9^{n+1}}$ in $\{|z| < 3\}$;

   $f(z) = 6i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n}}$ in $\{|z| > 3\}$

   d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1}} z^n$ in $\{|z| < 1\}$;

   $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$ se $1 < |z| < 3$

5. Si tratta di una verifica diretta.

6. $z = 0$ è un polo di ordine 3 ; $z = \pm\frac{\pi}{2}$ sono poli semplici; $z = \pm\frac{\pi}{2}i$ sono sigolarità eliminabili.

7. a) $\mathrm{Res}_f(0) = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{Res}_f(2) = \frac{3}{2}$

   b) $\mathrm{Res}_f(0) = -\frac{4}{3}$

   c) $\mathrm{Res}_f(0) = -\frac{1}{2}$;

   d) $\mathrm{Res}_f\left(\frac{3}{2}i\right) = -\frac{i}{2}$

8. a) $-\frac{2\pi i}{e}$

   b) 0

   c) $10\pi i$

   d) πi

   e) $6\pi i$

7 Appendice

Prima di enunciare il prossimo teorema introduciamo la seguente terminologia: un numero $w_0 \in \mathbb{C}$ si dice *zero di molteplicità (* o *ordine) $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ per una funzione f* se esiste un intorno $B_r(w_0)$ ed una successione $c_{n_0}, c_{n_0+1}, \ldots \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} c(z - w_0)^n = c_{n_0}(z - w_0)^{n_0} + c_{n_0+1}(z - w_0)^{n_0+1} + \cdots \quad \forall z \in B_r(w_0)$$

with $c_{n_0} \neq 0$.

Ciò è equivalente a dire che esiste una funzione $h(z)$ olomorfa in $B_r(w_0)$ tale che

$$f(z) = (z - w_0)^{n_0} h(z) \qquad \forall z \in B_r(w_0), \qquad h(w_0) \neq 0.$$

Questa terminologia è coerente con la nota nozione di molteplicità di una radice di un polinomio. A volte è pure convenienete usare il termine "molteplicità" per denotare l'ordine di un polo, cioè se z_0 è un polo di ordine $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ per f, diciamo allora che *m è la molteplicità del polo z_0 per f*.

Teorema 7.1 (Principio dell'argomento)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia f una funzione olomorfa in Ω eccetto un numero finito di punti. Sia γ una curva di Jordan in Ω orientata in senso antiorario e supponiamo che*

(a) *non esistono né zeri né poli di f sul sostegno di γ;*

(b) *esistono esattamente N zeri $w_1, \dots, w_N$ di f nell'interno di γ e*

$$w_k \text{ è uno zero di molteplicità } n_k \text{ per } f, \qquad k = 1, \dots, N;$$

(c) *esistono esattamente M singolarità $z_1, \dots, z_M$ di f nell'interno di γ e*

$$z_k \text{ è un polo di molteplicità (ordine) } m_k \text{ per } f, \qquad k = 1, \dots, M.$$

Allora

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{N} n_k - \sum_{k=1}^{M} m_k \right),$$

in altri termini

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} \text{numero di zeri} \\ \text{di } f \text{ all'interno di } \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{numero di poli} \\ \text{di } f \text{ all'interno di } \gamma \end{bmatrix}}_{\textit{contati con molteplicità}} \Bigg).$$

Dimostrazione. Osserviamo che l'insieme delle singolarità f'/f nell'interno di γ è $\{w_1, \dots, w_N, z_1, \dots, z_M\}$. Per ogni zero w_k di f esiste un intorno di w_k ed una funzione h_k olomorfa in tale intorno dove $h_k(z) \neq 0$ e $f(z) = (z - w_k)^{n_k} h_k(z)$, per cui

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n_k (z - w_k)^{n_k - 1} h_k(z) + (z - w_k)^{n_k} h_k'(z)}{(z - w_k)^{n_k} h_k(z)} \\ &= \frac{n_k}{(z - w_k)} + \frac{h_k'(z)}{h_k(z)}, \end{aligned}$$

quindi w_k è un polo semplice di f'/f e $\mathrm{Res}_{f'/f}(w_k) = n_k$. Per ogni singolarità z_k di f esiste un intorno di z_k ed una funzione g_k olomorfa in tale intorno dove $g_k(z) \neq 0$

e $f(z) = (z - z_k)^{-m_k} g_k(z)$

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-m_k(z - z_k)^{-m_k-1} g_k(z) + (z - z_k)^{-n_k} g'_k(z)}{(z - w_k)^{-m_k} g_k(z)} \\ &= \frac{-m_k}{(z - w_k)} + \frac{g'_k(z)}{g_k(z)},\end{aligned}$$

per cui w_k è un polo semplice di f'/f e $\mathrm{Res}_{f'/f}(z_k) = -m_k$. Allora per il teorema dei residui si ha che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{f/f'}(w_k) + \sum_{k=1}^{M} \mathrm{Res}_{f/f'}(z_k) = \sum_{k=1}^{N} n_k - \sum_{k=1}^{M} m_k.$$

□

Modifiche dalla revisione 23 maggio 2016 alla revisione del 24 aprile 2020:

1. Teorema 2.2: è stato ampliato leggermente l'enunciato.
2. La parte conclusiva della dimostrazione del Teorema 3.1 è stata leggermente rivista. Si osservi che è possibile anche procedere senza la traslazione in $z = 0$ con conti solo leggermente piu' complicati, ed è possibile dedurre dalla dimostrazione la formula (3.3), cioè la formula integrale di Cauchy per le derivate.
3. Nell'enunciato del Teorema di Laurent è stata corretta la variabilità della r tra $]r_1, r_2[$ nella formula per c_n.
4. Per i più curiosi è stata inserita una sintetica dimostrazione del Teorema di Laurent.
5. I concetto di residuo è stata isolato nella Definizione 4.3.
6. Esempio 4.3: è stato corretto il coefficiente di z^{-6}.
7. Nell'esempio 4.6-a) è stato corretto "essenziale" con "eliminabile".
8. È stato corretto il risultato dell'Esercizio 4a).
9. Si osservi che il Teorema dei Residui (come anche i Teoremi di Cauchy-Goursat e la Formula integrale di Cauchy) sono enunciati qui in una forma più generale di quanto fatto a lezione. Infatti se $\widetilde{\Omega}$ è aperto in $\mathbb{C}$, $z_1, \ldots, z_N \in \widetilde{\Omega}$, $f : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e se A è un "dominio con bordo" (o "regolare") tale che $z_1, \ldots, z_N \in \overline{A} \subseteq \Omega$, allora le ipotesi del Teorema 4.2 sono sodddisfatte con A al posto di Ω. Nelle dispense si omette l'insieme "ambiente" $\widetilde{\Omega}$ dove la f è definita e ci si concentra sul solo insieme A il cui bordo è la curva di integrazione di f. Ciò è possibile in quanto il Teorema di Cauchy-Goursat del Capitolo 3 viene dedotto da una Formula di Green molto generale. L'approccio seguito a lezione è dovuto al fatto che si vuole utilizzare invece la formula di Green come svolta nei nostri corsi di Analisi 2. Dal punto di vista operativo non cambia nulla.