

19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

NOTA: Il tempo totale assegnato per la soluzione è di 2 ore. Al termine dei primi 30 minuti verrà ritirato il foglio con i quiz a risposta multipla.

Consegnare il testo completo di tutti i fogli, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola (in STAMPATELLO MAIUSCOLO). Nella tabellina qui sotto riportare al più una risposta per ogni quiz di teoria usando LETTERE MAIUSCOLE. Spiegazioni o commenti (opzionali) sulla risposta selezionata possono essere aggiunti nel campo COMMENTI che segue ogni quiz di teoria.

19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Si consideri un processo gaussiano bianco $N(t)$ con densità spettrale di potenza $N_0/2$, filtrato attraverso un filtro con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

Sia $Y(t)$ il processo di uscita dal sistema.

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato? è stazionario in senso stretto?
2. Calcolare valor medio e la varianza di $Y(t)$
3. Scrivere la statistica del prim'ordine del processo di uscita $f_Y(y; t)$
4. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.
5. Se il processo è stazionario, calcolare la densità spettrale di potenza $G_Y(f)$
6. E' possibile estrarre da $Y(t)$ due campioni $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ statisticamente indipendenti? Se la risposta è positiva indicare la distanza tra i due campioni.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso stretto perchè lo è quello in ingresso (processo gaussiano bianco) e passa per un sistema LTI
2. Media μ_Y :

$$\mu_Y = E[Y(t)] = H(0)\mu_N = T \cdot 0 = 0.$$

la varianza σ_Y^2 è uguale al valore quadratico medio

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2(t)] = R_Y(0) \quad R_Y(\tau) = R_N(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * R_h(\tau)$$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(|H(f)|^2) = \mathcal{F}^{-1}(T^2 \text{sinc}^2(fT)) = T \Lambda(\tau/T)$$

da cui:

$$R_Y(\tau) = \frac{TN_0}{2} \Lambda(\tau/T) \rightarrow \sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{TN_0}{2}$$

3. Il processo Gaussiano, quindi la statistica del prim'ordine è:

$$f_Y(y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}|y - \mu_Y|^2\right),$$

non dipende da t .

4. Si veda il punto 2.

5. Spettro di potenza:

$$G_Y(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0 T^2}{2} \text{sinc}^2(fT)$$

6. Siccome due campioni di un processo Gaussiano $Y(t)$ hanno statistica congiuntamente gaussiana, l'indipendenza statistica coincide con la scorrelazione (indipendenza lineare). Basta quindi determinare dove è nulla la funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$.

$$R_Y(\tau) = \frac{TN_0}{2}\Lambda(\tau/T) \rightarrow R_Y(\tau) = 0 \quad \forall |\tau| = |t_1 - t_2| \geq T$$

Perciò $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ sono s.i. se e solo se $|t_1 - t_2| \geq T$.

19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

Si consideri un segnale $x(t)$ a banda limitata con banda B_x ed il segnale

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)q(t-nT)$$

con $q(t)$ funzione pari positiva di tipo triangolare non nulla nell'intervallo $-T_q < t < T_q$, e $f_c = 1/T = 2B_x$. Il segnale $y(t)$ viene filtrato con un filtro ricostruttore con funzione di trasferimento $K(f)$ e si ottiene in uscita il segnale $w(t)$.

1. Scrivere un'espressione per la trasformata di Fourier di $y(t)$. Disegnarne qualitativamente l'andamento.
2. Scrivere un'espressione per la trasformata di Fourier di $w(t)$. Disegnarne qualitativamente l'andamento.
3. Sotto quali condizioni su T_q esiste un filtro ricostruttore $K_1(f)$ tale per cui $w(t) = x(t)$?
4. Scrivere l'espressione del filtro ricostruttore $K_1(f)$ in questo caso e disegnarne l'andamento qualitativo.
5. Sotto quali condizioni su T_q esiste un filtro ricostruttore $K_2(f)$ tale per cui $w(t) = \alpha x(t) \cos(4\pi B_x t)$, con $\alpha \neq 0$?
6. Scrivere l'espressione del filtro ricostruttore $K_2(f)$ in questo caso e disegnarne l'andamento qualitativo.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1.

$$y(t) = q(t) * \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = q(t) * \left(x(t) \cdot \sum_n \delta(t-nT) \right)$$

$$Y(f) = Q(f) \cdot \left(X(f) * \frac{1}{T} \sum_n \delta(f-n/T) \right) = Q(f) \frac{1}{T} \sum_n X(f-n/T) = T_q \text{sinc}^2(fT_q) \frac{1}{T} \sum_n X(f-n/T)$$

2.

$$W(f) = K(f) \cdot Y(f) = K(f) \cdot Q(f) \cdot \frac{1}{T} X(f-nT)$$

3. Siccome $1/T = 2B_x$ le repliche non si sovrappongono e la ricostruzione è possibile se $Q(f)$ non presenta zeri nella replica che si vuole ricostruire ed equalizzare.
4. Siccome $Q(f) = T_q \text{sinc}^2(fT_q)$, nel primo caso abbiamo $1/T_q \geq B_x \rightarrow T_q \leq 1/B_x$,

$$K_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{Q(f)}, & |f| < B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

5. Nel secondo caso il filtro ricostruttore deve lasciare passare ed equalizzare le repliche centrate in $f = \pm 2B_x = \pm f_c$. Quindi la condizione è che $1/T_q > 3B_x$ ed il filtro ricostruttore è:

$$K_2(f) = \begin{cases} \frac{1}{Q(f)}, & B_x < |f| < 3B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

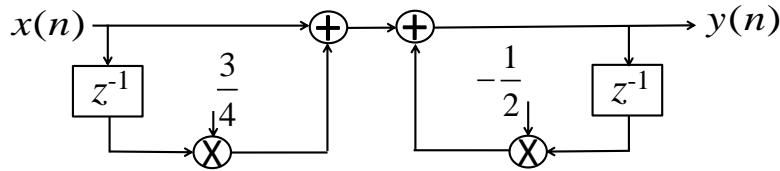


Figura 1: Schema a blocchi del sistema.

19 Giugno 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

La funzione di trasferimento di un sistema numerico fisicamente realizzabile vale:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (1)$$

Al sistema viene posto in ingresso il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \quad (2)$$

1. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Calcolare la risposta all'impulso del sistema.
3. Calcolare l'uscita $y(n)$.
4. Indicare le regioni di convergenza di $H(z)$, $X(z)$ e $Y(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot X(z) \quad (3)$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot Y(z) = \left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right) \cdot X(z) \quad (4)$$

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{4}z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) \quad (5)$$

Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) + \frac{3}{4}x(n-1) - \frac{1}{2}y(n-1) \quad (6)$$

Lo schema a blocchi del sistema è mostrato in Fig.1.

2. La funzione di trasferimento del sistema può essere scritta come:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{4}z^{-1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (7)$$

La sua antitrasformata vale:

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \quad (8)$$

3. La trasformata z dell'uscita si può trovare moltiplicando $H(z)$ per $X(z)$, dove:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (9)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad (10)$$

La funzione $Y(z)$ si può antitrasformare usando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{3}{4} \cdot (-2)}{1 - \frac{1}{3} \cdot (-2)} = -\frac{3}{10}$$

$$R_2 = Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) \Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 + \frac{3}{4} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = \frac{13}{10}$$

Quindi:

$$Y(z) = -\frac{3}{10} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{13}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = -\frac{3}{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{13}{10} \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

4. Le regioni di convergenza sono:

$$\text{ROC}_H: |z| > \frac{1}{2}, \quad \text{ROC}_X: |z| > \frac{1}{3}, \quad \text{ROC}_Y: |z| > \frac{1}{2}$$

Il sistema è stabile in quanto è causale e tutti i poli (polo singolo in $z = -1/2$) cadono all'interno della circonferenza di raggio unitario. Il sistema è a fase minima in quanto anche lo zero di $H(z)$ ($z = -3/4$) cade all'interno della circonferenza di raggio unitario.