Esempi di domande a risposta multipla
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, CIN, MAT)

1. Il segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t}$$

viene campionato per una conversione A/D. Indicare qual è la minima frequenza di campionamento che consente un'esatta ricostruzione del segnale a partire dai suoi campioni.

A) f_0
B) $2f_0$
C) $3f_0$
D) non esiste tale frequenza

SOLUZIONE
Per determinare la minima frequenza di campionamento è necessario calcolare la banda del segnale, quindi è necessario calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$. Dalle tavole si ottiene che

$$F\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$F\left\{\frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi t}\right\} = p_{f_0}(f)$$

in cui $p_{f_0}(f)$ è la funzione porta pari a 1 in $(-f_0/2, f_0/2)$ e nulla altrove. Dalle proprietà delle trasformate di Fourier sappiamo che al prodotto tra due segnali corrisponde la convoluzione nel dominio trasformato, da cui

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \star p_{f_0}(f)$$

e ricordando la proprietà della modulazione o che la convoluzione con una delta trasla lo spettro dove è centrata la delta stessa, otteniamo

$$X(f) = \frac{1}{2}[p_{f_0}(f - f_0) + p_{f_0}(f + f_0)].$$

Disegnando tale funzione si ottiene chiaramente che la banda del segnale (massima frequenza dello spettro) è

$$B = f_0 + \frac{f_0}{2} = \frac{3f_0}{2}$$

da cui si ottiene che la minima frequenza di campionamento è pari a $2B = 3f_0$.

■ ■ ■

2. Si consideri un segnale determinato del tipo

$$x(t) = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \phi(t)\right]$$

dove $\phi(t)$ è un'onda quadra definita, nel suo periodo, come segue:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < t \leq T \\ \pi & \text{per } T < t \leq 2T \end{cases}$$

A) Lo spettro di $x(t)$ ha righe non nulle in k/T, con k intero.

B) Lo spettro di $x(t)$ è a righe, con riga in $f = 0$ non nulla.

C) Lo spettro di $x(t)$ è a righe, con le righe in $f = \pm 1/T$ non nulle.

D) Lo spettro di $x(t)$ è a righe equispaziate di $1/T$.

SOLUZIONE

Per risolvere l'esercizio è necessario capire quale sia il periodo del segnale $x(t)$. Per fare questo e comprendere come sia fatto tale segnale conviene disegnarlo. Si tratta di un segnale coseno la cui fase cambia in corrispondenza dei multipli di T (si vedano i segnali e il segnale risultante $x(t)$ in Figura 1).

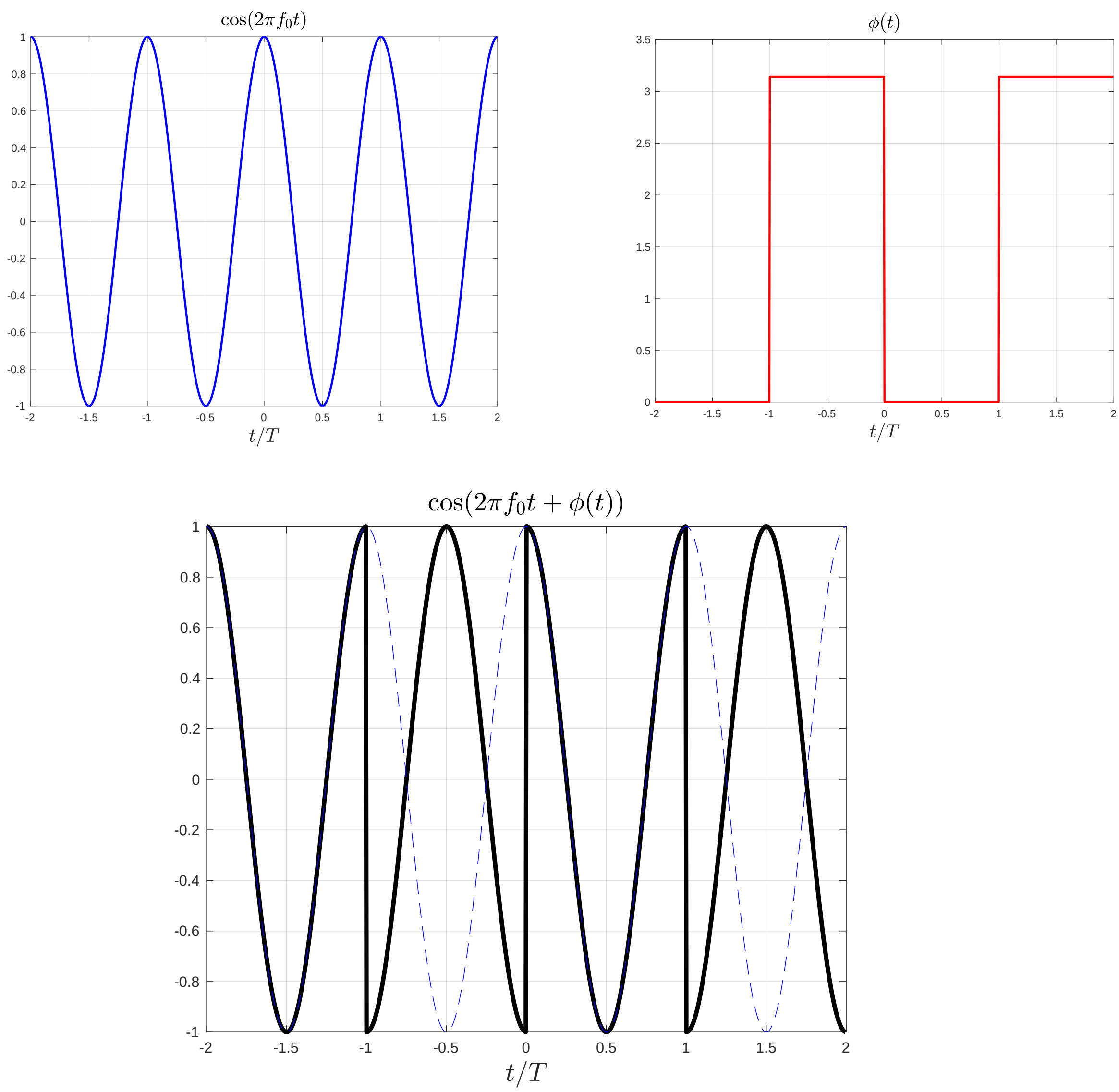


Figura 1: Esercizio 2 - Segnali 'elementari' e segnale risultante $x(t)$

Il segnale di Figura 1 ha dunque un periodo $T' = 2T$ e si può anche scrivere come

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot w(t)$$

in cui $w(t)$ è un'onda quadra di periodo $2T$

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - 2nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [p_T(t - T/2 - 2nT) - p_T(t - 3T/2 - 2nT)]$$

Bisogna dunque calcolare la trasformata del segnale $w(t)$ che sarà uno spettro a righe trattandosi di un segnale periodico. Lo spettro è del tipo

$$W(f) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R\left(\frac{n}{2T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

$$R(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{j2\pi f T/2} - \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{j6\pi f T/2} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \left[e^{j\pi f T} - e^{j3\pi f T}\right]$$

Ricordando che

$$\frac{e^{+j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} = \sin(\pi f T)$$

raccolgo un termine opportuno per ricondurmi alla formula della funzione seno

$$R(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{j2\pi f T} [e^{-j\pi f T} - e^{+j\pi f T}]$$

$$R(f) = j\frac{\sin(\pi f T)}{2\pi f} \sin(\pi f T) e^{j2\pi f T}$$

da cui si ottiene che

$$R\left(\frac{n}{2T}\right) = j\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \sin(n\pi/2) e^{jn\pi}$$

Questi coefficienti sono nulli per tutti gli n pari in quanto per $n = 0$ si annulla il secondo fattore e per $n \neq 0$ e pari, nel primo fattore, i numeratori si annullano (e il denominatore è diverso da zero).

Le righe dello spettro quindi diverse da zero in $\pm\frac{1}{2T}, \pm\frac{3}{2T}, \ldots$

La moltiplicazione di $w(t)$ per $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ corrisponde alla traslazione in frequenza dello spettro che viene centrato in $\pm\frac{1}{T}$. Le righe di $X(f)$ continuano ad essere non nulle per i valori $\pm\frac{1}{2T}, \pm\frac{3}{2T}, \ldots$ e sono dunque spaziate di $\frac{1}{T}$ (risposta D). Si noti che la risposta A è errata in quanto pur essendo spaziate di $\frac{1}{T}$ le righe non sono centrate in k/T, con k intero.

■ ■ ■

3. Il segnale $x(t) = 2 + \cos(2\pi f_0 t)$ con f_0 costante, passa attraverso un filtro passabasso di tipo RC con costante di tempo

$$RC = \frac{1}{2\pi f_0}$$

e con risposta all'impulso $h(t) = \frac{1}{RC} \mathrm{e}^{-t/RC} u(t)$. La potenza del segnale in uscita dal filtro vale:

A) 4

B) $\frac{17}{4}$

C) 0

D) altro

SOLUZIONE

Il segnale di ingresso è la combinazione lineare di due segnali sinusoidali, uno a frequenza nulla (costante) e uno a frequenza f_0. Un segnale sinusoidale filtrato viene modificato in modulo e fase dal valore assunto dalla funzione di trasferimento in corrispondenza della sua frequenza. Quindi è necessario calcolare la trasformata di Fourier della risposta all'impulso del filtro per ottenere la funzione di trasferimento $H(f)$ e vedere che valori assume in corrispondenza delle componenti sinusoidali del segnale di ingresso. La trasformata di Fourier del segnale di ingresso è:

$$X(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

e lo spettro del segnale di uscita

$$X(f) = 2\delta(f)H(0) + \frac{1}{2} [\delta(f - f_0)H(-f_0) + \delta(f + f_0)H(f_0)]$$

Trattandosi di un segnale periodico che ha dunque spettro a righe, e solo 3 righe sono non nulle, la potenza si può calcolare come

$$P_y = \sum_n |\mu_n|^2 = |\mu_{-1}|^2 + |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2$$

Non resta che calcolare $H(f)$ facendo uso delle tavole

$$H(f) = \frac{1/RC}{j2\pi f + 1/RC}$$

da cui

$$|\mu_0|^2 = |2H(0)|^2 = |2 \cdot 1|^2 = 4$$

$$|\mu_{-1}|^2 = |\mu_1|^2 = \left| \frac{1}{2} H(f_0) \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \frac{2\pi f_0}{j2\pi f_0 + 2\pi f_0} \right|^2$$

ricordando, come specificato dal testo, che $RC = \frac{1}{2\pi f_0}$.

Si ottiene quindi

$$|\mu_{-1}|^2 = \frac{1}{4} \left| \frac{1}{j+1} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{j+1} \frac{1}{-j+1} = \frac{1}{8}$$

e la potenza vale

$$P_y = 4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{17}{4}$$

■ ■ ■

4. Si consideri un sistema LTI causale a tempo continuo con ingresso $x(t)$ e uscita $y(t)$, dove

$$y(t) = y(t-T) + \frac{1}{2}[x(t) + x(t-T)]$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

A) Il sistema è reale e instabile

B) Il sistema è stabile con $h(t)$ di tipo sinusoidale smorzato.

C) Il sistema è stabile, con $h(t)$ monotona decrescente.

SOLUZIONE
La funzione di trasferimento del filtro si ottiene calcolando la trasformata di Fourier dell'uscita

$$Y(f) = Y(f)e^{-j2\pi fT} + \frac{1}{2}[X(f) + X(f)e^{-j2\pi fT}]$$

da cui

$$Y(f)(1 - e^{-j2\pi fT}) = \frac{1}{2}[1 + e^{-j2\pi fT}]X(f)$$

da cui

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-j2\pi fT}}{1-e^{-j2\pi fT}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-j2\pi fT}}{1-e^{-j2\pi fT}}\cdot\frac{1-e^{+j2\pi fT}}{1-e^{j2\pi fT}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-j4\pi fT}}{2-2\cos(2\pi fT)}$$

In $f = 0$ la funzione diverge e quindi si tratta di un sistema instabile perché a fronte di un ingresso limitato (una costante), l'uscita sarebbe illimitata (risposta A).

■ ■ ■

5. Ricavare la risposta all'impulso del filtro numerico specificato dalla seguente equazione ricorsiva:

$$y[n] = x[n] + \frac{3}{2}x[n-1] - x[n-2] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

A) $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

B) $h[n] = 2\delta[n] + u[n]\frac{1}{2^n}$

C) $h[n] = 2\delta[n] + \delta[n+1] + u[n]\frac{1}{2^n}$

D) nessuna delle altre risposte è corretta

SOLUZIONE
La trasformata zeta della relazione ingresso/uscita è:

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{2}X(z)z^{-1} - X(z)z^{-2} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}\right]=X(z)\left[1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}\right]$$

Quindi:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=1+2z^{-1}$$

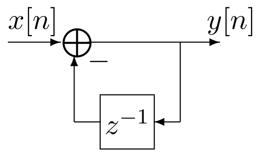
La sua antitrasformata vale:

$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)$$

Quindi la risposta corretta è la A.

■ ■ ■

6. Si desidera che il segnale all'uscita del sistema mostrato nella seguente figura sia $y[n]=u[n]$.



Quale deve essere l'ingresso $x[n]$?

A) $x[n]=2u[n]$
B) $x[n]=2u[n-1]$
C) $x[n]=2u[n-1]+\delta[n]$
D) nessuna delle altre risposte

SOLUZIONE
La relazione ingresso/uscita del sistema in figura è:

$$y(n)=x(n)-y(n-1)$$

La sua trasformata zeta è:

$$Y(z)=X(z)-Y(z)z^{-1}$$
$$Y(z)\left[1+z^{-1}\right]=X(z)$$

La trasformata zeta del segnale in uscita dal sistema è:

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Sostituendo l'espressione di $Y(z)$ nella relazione ingresso/uscita si ottiene:

$$X(z)=Y(z)\left[1+z^{-1}\right]=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}+z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$x(n)=u(n)+u(n-1)$$

Scrivendo $u(n)$ come $u(n) = u(n-1) + \delta(n)$ si ottiene:

$$x(n) = 2u(n-1) + \delta(n)$$

Quindi la risposta corretta è la C.

■ ■ ■

7. Un filtro numerico ha relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 0.5x[n] + 2x[n-2] + \frac{7}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] \ .$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A) Il sistema è instabile secondo il criterio di stabilità BIBO e non è realizzabile.

B) Il sistema è stabile secondo il criterio di stabilità BIBO ed è realizzabile.

C) Il sistema è stabile secondo il criterio di stabilità BIBO e non è realizzabile.

D) Il sistema è instabile secondo il criterio di stabilità BIBO ed è realizzabile.

SOLUZIONE

La trasformata zeta della relazione ingresso/uscita è:

$$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + 2X(z)z^{-2} + \frac{7}{4}Y(z)z^{-1} - \frac{3}{8}Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + 2z^{-2}\right]$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{1 + 2z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)}$$

Il sistema è causale e reale, e quindi fisicamente realizzabile. È instabile secondo il criterio BIBO in quanto è causale e uno dei poli ($z = 3/2$) cade fuori dalla circonferenza di raggio unitario.
Quindi la risposta corretta è la D.

■ ■ ■

8. Un segnale discreto $x[n]$ che vale 1 per $n = 0, 1, 2, 3$ e vale 0 altrove viene posto in ingresso ad un sistema LTI discreto con risposta all'impulso $h[n]$ che vale 1 per $n = 0, 1$, vale -1 per $n = 2, 3$ e vale 0 altrove. Sia $y[n]$ il segnale all'uscita.

A) $y[1] = 1$, $y[3] = 0$, $y[5] = -1$

B) $y[1] = 2$, $y[3] = 0$, $y[5] = -2$

C) $y[1] = 2$, $y[3] = 1$, $y[5] = 2$

D) $y[1] = 1$, $y[3] = 1$, $y[5] = 1$

SOLUZIONE
L'uscita di un sistema è data dalla convoluzione dell'ingresso con la risposta all'impulso:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_k x(k)h(n-k)$$

$x(k)$ e $h(k)$ sono sequenze a supporto limitato che possono essere rappresentate dai seguenti vettori:

$$x(k) = \{\underline{1}, 1, 1, 1\} \quad h(k) = \{\underline{1}, 1, -1, -1\}$$

Per $n < 0$ l'uscita è nulla, in quanto i supporti di $x(k)$ e $h(n-k)$ sono disgiunti.

Per $n = 0$:

$$y(0) = \sum_k x(k)h(-k)$$

$$x(k) = \{\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{1},\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

$$h(-k) = \{-1, -1,\ 1,\ \underline{1},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

Quindi $y(0) = 1$.

Per $n = 1$:

$$y(1) = \sum_k x(k)h(1-k)$$

$$x(k) = \{\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{1},\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

$$h(1-k) = \{\ 0, -1, -1,\ \underline{1},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

Quindi $y(1) = 1 + 1 = 2$.

Per $n = 3$:

$$y(3) = \sum_k x(k)h(3-k)$$

$$x(k) = \{\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{1},\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

$$h(3-k) = \{\ 0,\ 0,\ 0, \underline{-1}, -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

Quindi $y(3) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$.

Per $n = 5$:

$$y(5) = \sum_k x(k)h(5-k)$$

$$x(k) = \{\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{1},\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

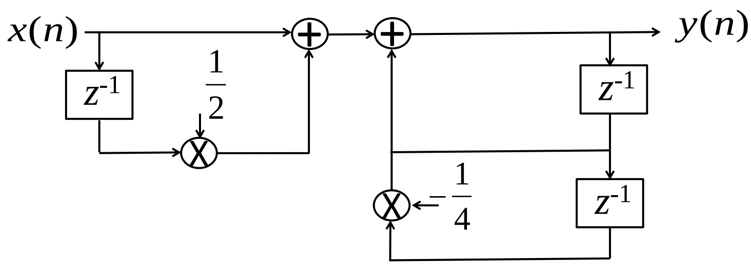
$$h(5-k) = \{\ 0,\ 0,\ 0,\ \underline{0},\ 0, -1, -1,\ 1,\ 1,\ 0\}$$

Quindi $y(5) = -1 - 1 = -2$.

Quindi la risposta corretta è la B.

■ ■ ■

9. Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto:



Qual è l'uscita del sistema quando all'ingresso viene posto il segnale $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$?

A) $y(n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right)^2$

B) $y(n) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n)$

C) $y(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} u(n)$

D) $y(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

SOLUZIONE

La relazione ingresso/uscita del sistema in figura è:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2)$$

La sua trasformata zeta vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + Y(z)z^{-1} - \frac{1}{4}Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left[1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right]$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

La trasformata zeta del segnale in ingresso è:

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Quindi la trasformata zeta del segnale in uscita vale:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

Dalle tavole si ricava:

$$y(n) = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Quindi la risposta corretta è la D.

■ ■ ■

10. Si consideri un processo casuale $x(t)$ con densità di probabilità del primo ordine pari a

$$f_\xi(x;t) = \frac{1}{a+|t|} p_{a+|t|}(x)$$

dove $p_y(x)$ vale 1 per $|x| < y/2$ e zero altrove. Quanto valgono la media e la varianza di $x(t)$?

A) $m_x(t) = 0$; $\sigma_x^2 = \frac{1}{12}(a+|t|)^2$

B) $m_x(t) = 1$; $\sigma_x^2 = 1$

C) $m_x(t) = |t|$; $\sigma_x^2 = 1$

D) $m_x(t) = 0$; $\sigma_x^2 = \frac{1}{3}a^2$

Soluzione. La ddp e' uniforme simmetrica con supporto $[-(a+|t|)/2, (a+|t|)/2]$ Il valor medio e' dunque sempre nullo e la varianza e'

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{a+|t|} \int_{-(a+|t|)/2}^{(a+|t|)/2} x^2 dx = \frac{1}{12}(a+|t|)^2$$

risposta A.

■ ■ ■

11. Sia $x(t)$ un processo casuale gaussiano stazionario con funzione di autocorrelazione

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T & \text{per } |\tau| \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si consideri il processo $y(t) = x(t) + x(t-T) + x(t-2T)$ dove $T > 0$ è un ritardo fisso. Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A) $y(t)$ è stazionario in senso lato e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana, a valor medio nullo e varianza 3.

B) $x(t)$ ed $y(t)$ sono processi gaussiani, stazionari in senso lato e fra loro statisticamente indipendenti.

C) Campioni di $y(t)$ distanti fra di loro T sono statisticamente indipendenti.

D) $y(t)$ non è stazionario in senso lato.

Soluzione. Possiamo scrivere:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

con $h(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T)$. quindi $y(t)$ é l'uscita di un sistema LTI. $x(t)$ gaussiano a v.m. nullo e stazionario implica $y(t)$ gaussiano v.m. nullo e stazionario. Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}
R_h(\tau) &= h(\tau) * h(-\tau) = 3\delta(\tau) + 2\delta(\tau - T) + \delta(\tau - 2T) + 2\delta(\tau + T) + \delta(\tau + 2T) \\
R_y(\tau) &= R_x(\tau) * R_h(\tau) = 3R_x(\tau) + 2R_x(\tau - T) + R_x(\tau - 2T) + 2R_x(\tau + T) + R_x(\tau + 2T). \\
R_{xy}(\tau) &= R_x(\tau) * h(\tau) = R_x(\tau) + R_x(\tau - T) + R_x(\tau - 2T)
\end{aligned}$$

A) $y(t)$ è stazionario in senso lato e la sua densità di probabilità del primo ordine è gaussiana, a valor medio nullo e varianza 3. **Vero:** $\sigma_Y^2 = R_y(0) = 3$

B) $x(t)$ ed $y(t)$ sono processi gaussiani, stazionari in senso lato e fra loro statisticamente indipendenti. **Falso.** $R_{xy}(\tau) \neq 0$

C) Campioni di $y(t)$ distanti fra di loro T sono statisticamente indipendenti. **Falso:=** $R_y(T) = 2 \neq 0$

D) $y(t)$ non è stazionario in senso lato. **Falso**

■ ■ ■

12. Si consideri un processo casuale $X(t)$ stazionario del primo ordine con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $(-1, +1)$. Si definisca la variabile casuale

$$Y = \int_0^2 X^2(t)dt$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

A) Y è una variabile casuale con densità di probabilità nulla per $|y| > 2$

B) Y è una variabile casuale con densità di probabilità a supporto illimitato.

C) Y è una variabile casuale con densità di probabilità non nulla per $y < 0$.

D) Y è una variabile casuale con densità di probabilità nulla per $|y| > 1$.

E) Y è una variabile casuale con densità di probabilità nulla per $|y| < 2$ e non nulla per $|y| > 2$.

Soluzione. Siccome $X(t)$ é stazionario del primo ordine con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $(-1, +1)$ allora $0 \leq X^2(t) \leq 1$ per ogni t e ogni $X(t)$

Quindi

$$Y = \int_0^2 X^2(t)dt \leq \int_0^2 1dt = 2$$

$$Y = \int_0^2 X^2(t)dt \geq \int_0^2 0dt = 0$$

Il supporto della ddp di Y é dunque incluso in $[0, 2]$. Quindi

A) Y è una variabile casuale con densità di probabilità nulla per $|y| > 2$. **Vero**

B) Y è una variabile casuale con densità di probabilità a supporto illimitato. **Falso**

C) Y è una variabile casuale con densità di probabilità non nulla per $y < 0$. **Falso**

D) Y è una variabile casuale con densità di probabilità nulla per $|y| > 1$.**Falso (in generale)**

E) Y è una variabile casuale con densità di probabilità nulla per $|y| < 2$ e non nulla per $|y| > 2$. **Falso**

Per escludere la D) bisogna dimostrare che esite **almeno un processo** $X(t)$ con le caratteristiche date per cui

$$P(Y>1) \quad = \quad P\left(\int_0^2 X^2(t)dt \geq 1\right) > 0.$$

Si consideri quindi il seguente processo stazionario:

$$X(t) = A,$$

con A v.c. distribuita uniformemente in $(-1,1)$. Quindi $f_A(x) = \frac{1}{2}\Pi_2(x)$. Il processo é stazionario (non ergodico) con statistica del primo ordine desiderata: $f_X(x;t) = f_A(x) = \frac{1}{2}\Pi_2(x)$.

Otteniamo:

$$\begin{aligned} P(Y>1) &= P\left(\int_0^2 A^2 dt > 1\right) = P(2A^2 > 1) = P\left(|A| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{2}\Pi_2(x)dx = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0. \end{aligned}$$

Si noti tuttavia che é anche possibile trovare processi con queste caratteristiche che soddisfano $P(|Y|>1) = 0$. Provate a trovarne uno.