Esercizi di Teoria ed Elaborazione dei Segnali - 02MOOOA

28 novembre 2022

Politecnico di Torino

Indice

1 Esercizi su segnali a tempo continuo

1.1 Esercizio 1

Si consideri un sistema LTI che ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j\pi f T} + 2\frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f} e^{-j\pi f \frac{7T}{2}}$$

al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$.

1. si ottenga $h(t)$ la risposta all'impulso del sistema LTI e si disegni il suo andamento nel dominio del tempo
2. si ottenga il segnale di uscita $y(t)$
3. si calcoli l'energia del segnale di uscita E_y

(N.B. Si ricorda che $p_\alpha(t) = 1$ per $-\frac{\alpha}{2} < t < \frac{\alpha}{2}$ e $p_\alpha(t) = 0$ altrove).

1.1.1 Svolgimento

Facendo uso delle tavole delle trasformate e della proprietá del ritardo si ottiene che

$$h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2 \cdot p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{7T}{4}\right)$$

il cui andamento è riportato in Figura 1

Il segnale in uscita $y(t)$ si può ottenere come convoluzione grafica di $x(t)$ e $h(t)$ ed è riportato in Figura 2.

L'energia del segnale di uscita è definita come

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2$$

ed è semplice da calcolare nel dominio del tempo, considerando il quadrato del segnale nei vari tratti. Nei due tratti obliqui del trapezio

$$2 \cdot \int_0^{T/2} t^2 dt = \frac{T^3}{12}$$

Nella parte costante

$$\int_{T/2}^{T} \frac{T^2}{4} dt = \frac{T^2}{4}\frac{T}{2} = \frac{T^3}{8}$$

per il tratto triangolare

$$2 \cdot \int_{3T/2}^{7T/4} (2t)^2 dt = \frac{T^3}{24}$$

Da cui $E_y = \frac{T^3}{4}$.

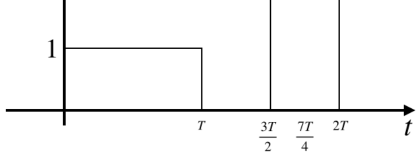


Figura 1: Risposta all'impulso $h(t)$

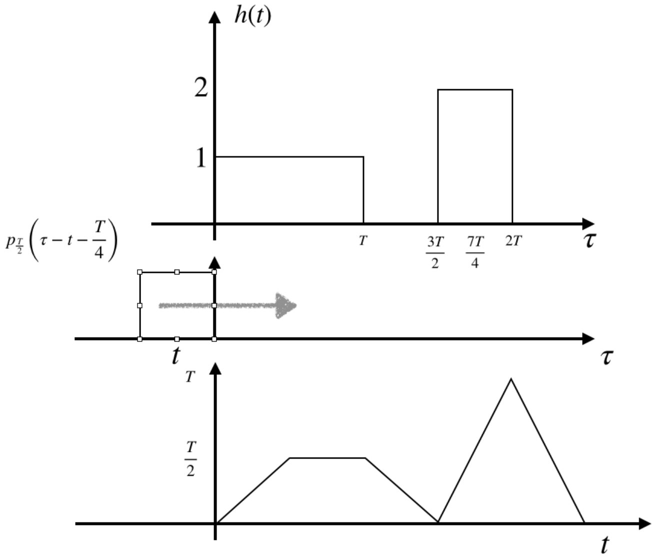


Figura 2: Segnale $y(t)$

1.2 Esercizio 2

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-2kT)^2}{8T^2}}.$$

per il quale $T = 1$.

Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema lineare e tempo invariante la cui funzione di trasferimento vale

$$H(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } |f| < \frac{0{,}7}{T} \\ 1 & \text{se } \frac{0{,}7}{T} \leq |f| \leq \frac{0{,}9}{T} \\ 0 & \text{se } |f| > \frac{0{,}9}{T} \end{cases} \tag{1}$$

1. Si verifichi che $x(t)$ è un segnale periodico e se ne determini il periodo T_x.
2. Si calcoli la trasformata di Fourier di $x(t)$ e se ne disegni il modulo, quotando gli assi.
3. Si valuti il segnale $y(t)$ all'uscita del filtro e la sua potenza media.

1.2.1 Svolgimento

1. Il segnale ha periodo $T_x = 2T$.
   Verifica:

$$x(t+T_x) = x(t+2T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+2T-2kT)^2}{8T^2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-(k-1)2T)^2}{8T^2}}.$$

   Ponendo $n = k-1$ si ottiene

$$x(t+2T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-n2T)^2}{8T^2}} = x(t).$$

2. La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ricava ricordando che

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-2kT)^2}{8T^2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t-kT_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t) * \delta(t-kT_x).$$

   con $z(t) = e^{-\frac{t^2}{2T_x^2}}$, da cui si ricava la trasformata

$$X(f) = \frac{1}{T_x}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{k}{T_x}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_x}\right) = \frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z\left(\frac{k}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

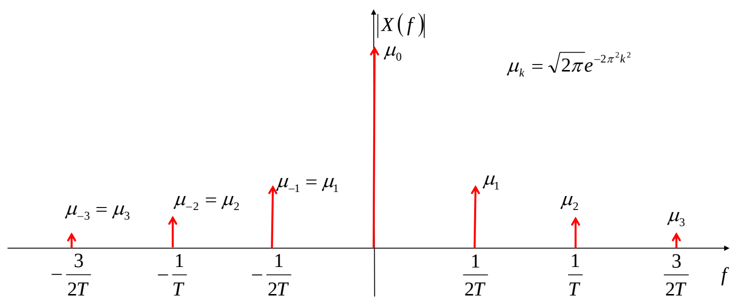
   Dalle tavole si ottiene che

$$Z(f) = T_x\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 f^2 T_x^2} = 2T\sqrt{2\pi}e^{-8\pi^2 f^2 T^2}$$

   da cui lo spettro del segnale periodico (a righe)

$$X(f) = \frac{1}{2T}2T\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-8\pi^2\left(\frac{k}{2T}\right)^2 T^2}\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right) = \sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2 k^2}\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

   Grafico del modulo di $X(f)$:



3. Il filtro ha banda finita e azzera tutte le componenti spettrali per $|f| > \frac{0{,}9}{T}$ per cui $Y(f) = X(f)\cdot H(f)$ contiene solo le componenti per $k = -1, 0, 1$ e vale

$$Y(f) = H(0)\sqrt{2\pi}\delta(f) + H\left(-\frac{1}{2T}\right)\sqrt{2\pi}\left(e^{-2\pi^2}\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right) + H\left(-\frac{1}{2T}\right)\sqrt{2\pi}\left(e^{-2\pi^2}\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2\pi}\delta(f) + 2\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\delta\left(f + \frac{1}{2T}\right) + 2\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right)$$

Antitrasformando:

$$y(t) = 2\sqrt{2\pi} + 4\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\cos\left(\pi t/T\right)$$

La potenza media vale

$$P_x = (2\sqrt{2\pi})^2 + \left(2\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2}\right)^2 = 8\pi + 16\pi e^{-4\pi^2}$$

1.3 Esercizio 3

Si consideri il segnale

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 z(t) \cos(2\pi f_1 t),$$

in cui $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$, $f_1 = \frac{5}{2} f_0$ e

$$z(t) = \frac{\sin(\pi t f_0)}{\pi t}.$$

Il segnale viene campionato da un campionatore ideale ad una frequenza di campionamento $f_s = 3f_0$ e filtrato attraverso un filtro passabasso ideale con funzione di trasferimento $H(f)$ e banda $B = \frac{3}{2} f_0$.Si calcoli:

1. lo spettro $Y(f)$ del segnale all'uscita del filtro passabasso,
2. l'espressione nel dominio del tempo di $y(t)$,
3. la minima frequenza di campionamento necessaria per campionare il segnale $y(t)$ in modo da garantire la sua possibile perfetta ricostruzione.

1.3.1 Svolgimento

Lo spettro del seganle $x(t)$ per le proprietá di lineritá ha due componenti: lo spettro a righe del coseno a frequenza f_0 e lo spettro del segnale $z(t)$ modulato alla frequenza $f_1 = 2,5f_0$. Lo spettro $Z(f)$ si ricava dalle tavole

$$\frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\pi t} \quad \longrightarrow \quad p_{\frac{1}{T}}(f)$$

in cui nel nostro caso $\frac{1}{T} = f_0$. Lo spettro é dunque:

$$X(f) = \frac{a_1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{a_1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{a_2}{2}p_{f_0}(f - 2,5f_0) + \frac{a_2}{2}p_{f_0}(f + 2,5f_0).$$

come rappresentato in Figura 3 (a).

A seguito del campionamento lo spettro viene periodicizzato, come rappresentato in Figura 3 (b). Poiché il filtro passabasso ideale taglia tutte le frequenze per $|f| > 1,5f_0$, lo spettro risultante sará

$$Y(f) = \frac{a_1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{a_1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{a_2}{2}p_{2f_0}(f)$$

da cui si ricava antitrasformando,

$$y(t) = a_1 \cos(2\pi f_0) + \frac{a_2}{2}\frac{\sin(2\pi t f_0)}{\pi t}$$

La massima frequenza presente nello spettro del segnale (banda) é f_0 da cui per il criterio di Nyquist la minima frequenza di campionamento necessaria é

$$f_s = 2f_0$$

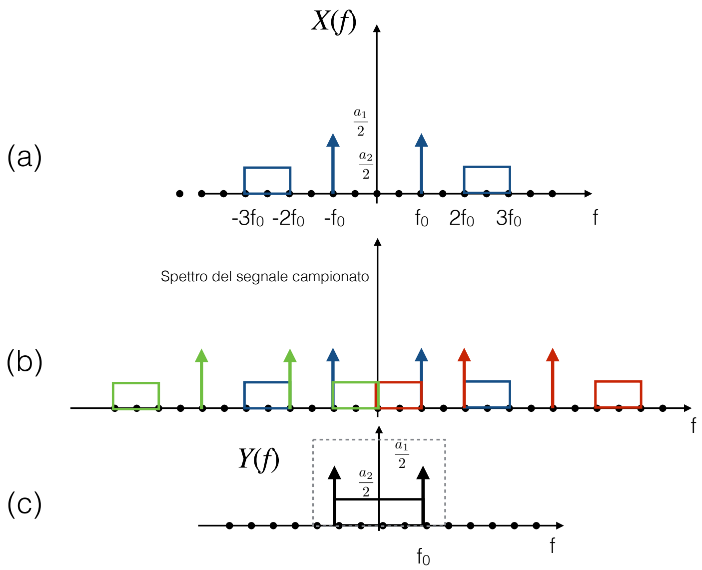


Figura 3: Spettri dei segnali dell'esercizio 3

1.4 Esercizio 4

Si consideri il segnale $z(t) = z_1(t) + z_2(t) + z_3(t)$ in cui le diverse componenti valgono:

$$z_1(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_1 t), \quad x_1(t) = B_1 \frac{\sin^2(\pi t B_1)}{(\pi t)^2}$$

$$z_2(t) = x_2(t)\cos(2\pi f_2 t), \quad x_2(t) = \frac{\sin(2\pi B_2 t)}{\pi t}$$

$$z_3(t) = x_3(t)\cos(2\pi f_3 t), \quad x_3(t) = \frac{\sin(4\pi B_2 t)}{\pi t}$$

per i quali:

$f_1 = 2$ MHz	$B_1 = 250$ kHz
$f_2 = 3$ MHz	$B_2 = 100$ kHz
$f_3 = 4$ MHz	

Il segnale $z(t)$ viene elaborato dal sistema rappresentato in Figura 4 dove $H(f)$ è la funzione di trasferimento di un filtro passabanda ideale

$$H(f) = Ap_B(f - f_0) + Ap_B(f + f_0)$$

in cui $f_0 = 1$ MHz e $p_\alpha(f)$ vale 1 per $|f| < \alpha/2$ e zero altrove.

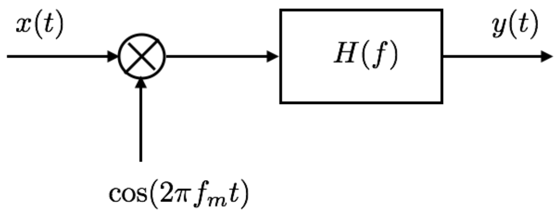


Figura 4: Esercizio 4

1. Si disegni, quotandolo, lo spettro di ampiezza del segnale $z(t)$
2. Si determini il valore di f_m, il valore A di $H(f)$ e i valori minimo e massimo della banda B, affinché $y(t) = x_2(t)\cos(2\pi f_0 t)$
3. Si determini la minima frequenza di campionamento necessaria per campionare il segnale $y(t)$ che ne consente la perfetta ricostruzione

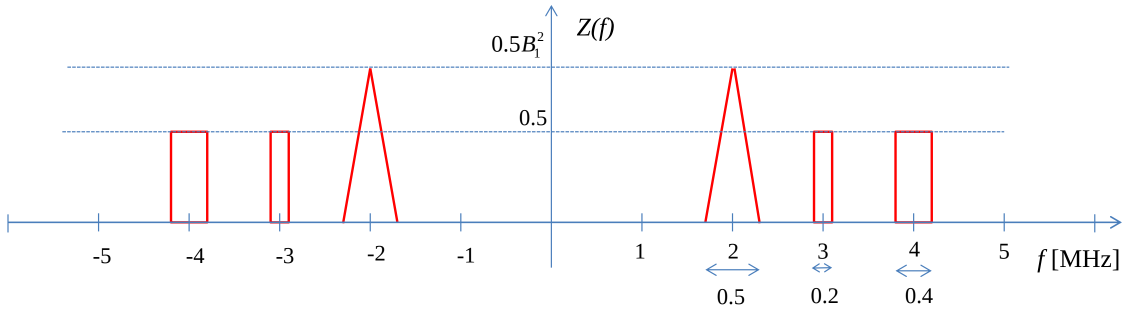
1.4.1 Svolgimento

1. La trasformata di Fourier di $z(t)$ è pari a:

$$Z(f) = \frac{1}{2}\left[X_1(f-f_1)+X_1(f+f_1)\right]+\frac{1}{2}\left[X_2(f-f_2)+X_2(f+f_2)\right]+\frac{1}{2}\left[X_3(f-f_3)+X_3(f+f_3)\right]$$

dove:

$$X_1(f) = B_1^2 \text{tri}\left(\frac{f}{B_1}\right); \quad X_2(f) = p_{2B_2}(f); \quad X_3(f) = p_{4B_2}(f)$$



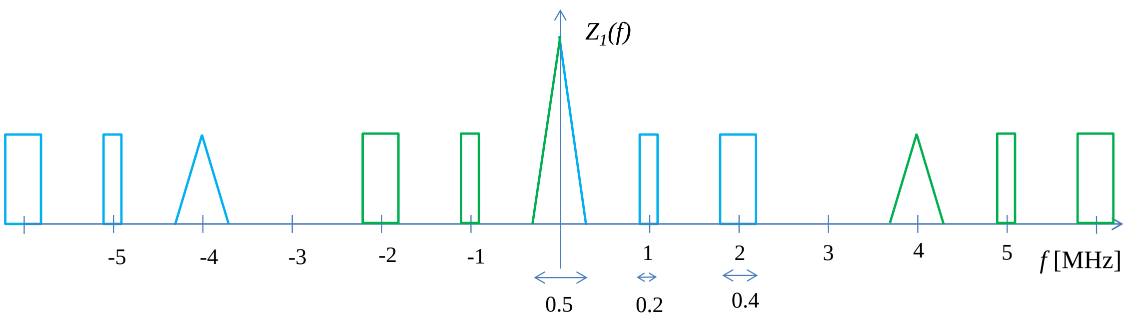
2. Se $z_1(f)$ è il segnale ottenuto dopo la moltiplicazione di $z(f)$ con $\cos(2\pi f_m t)$, allora:

$$\begin{aligned}
Z_1(f) &= \tfrac{1}{2}\left[Z(f-f_m)+Z(f+f_m)\right] = \\
&= \tfrac{1}{4}\left[X_1(f-f_1-f_m)+X_1(f-f_1+f_m)+X_1(f+f_1-f_m)+X_1(f+f_1+f_m)\right]+ \\
&+ \tfrac{1}{4}\left[X_2(f-f_2-f_m)+X_2(f-f_2+f_m)+X_2(f+f_2-f_m)+X_2(f+f_2+f_m)\right]+ \\
&+ \tfrac{1}{4}\left[X_3(f-f_3-f_m)+X_3(f-f_3+f_m)+X_3(f+f_3-f_m)+X_3(f+f_3+f_m)\right]
\end{aligned}$$

All'uscita del filtro bisogna ottenere un segnale del tipo $y(t) = x_2(t)\cos(2\pi f_0 t)$, ossia:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[X_2(f-f_0)+X_2(f+f_0)\right]$$

Si può ottenere questo risultato facendo in modo che due delle componenti della versione straslata dello spettro di $X_2(t)$ finiscano all'interno della banda del filtro (ossia alle frequenze $+f_0$ e $-f_0$, e tutte le altre componenti cadano al di fuori della banda del filtro. Ponendo $f_m = 2$ MHz, le componenti di $X_1(f)$ centrate in $f_1 - f_m$ e $-f_1 + f_m$ cadono proprio in $+f_0$ e $-f_0$. Il valore massimo della banda del filtro che assicura che tutte le altre componenti vengono cancellate è $B = 1.5$ MHz. Il valore minimo della banda è $B = 2B_2 = 200$ kHz. La costante A deve essere pari a 2.



3. La massima frequenza di $y(t)$ è $B_y = f_0 + B_2$=1.1 MHz. La minima frequenza di campionamento necessaria per consentire la perfetta ricostruzione del segnale è quindi $f_N = 2.2$ MHz.

1.5 Esercizio 5

Si consideri il segnale

$$x(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) + p_T\left(t - 2T\right)$$

posto all'ingresso di un filtro la cui risposta all'impulso vale

$$h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right),$$

per ottenere in uscita il segnale $y(t)$.

(N.B. Si ricorda che $p_T(t) = 1$ per $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ e $p_T(t) = 0$ altrove).

L'uscita del filtro $y(t)$ viene campionata moltiplicandola per il segnale $c_\delta(t)$, e il segnale campionato $y_\delta(t)$ così ottenuto viene passato attraverso un filtro con risposta all'impulso $h_R(t) = h(t)$ per ottenere un segnale ricostruito $z(t)$.

Il segnale di campionamento vale:

$$c_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{T}{2} + 2kT\right)$$

1. Calcolare e disegnare, quotando gli assi, l'uscita $y(t)$ dal primo filtro.
2. Disegnare, quotando gli assi, il segnale campionato $y_\delta(t)$.
3. Calcolare e disegnare, quotando gli assi, il segnale ricostruito $z(t)$.
4. Calcolare lo spettro di ampiezza del segnale $y(t)$.

1.5.1 Svolgimento

1. I segnali $x(t)$ e $h(t)$ sono riportati nella Figura 5.

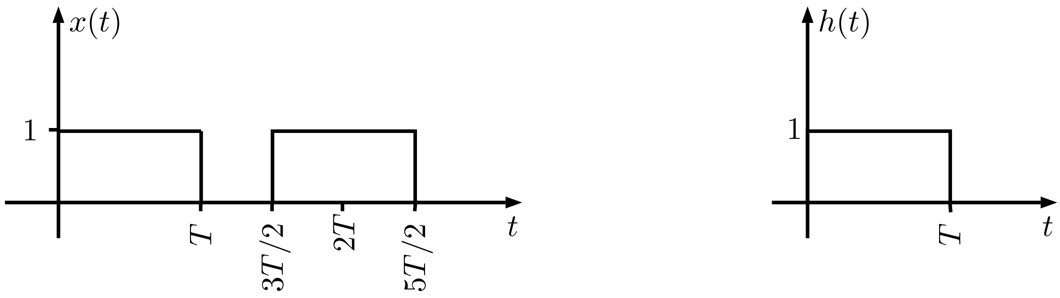


Figura 5: Segnali $x(t)$ e $h(t)$ per l'esercizio 5.

Il segnale $x(t)$ può essere scritto come

$$x(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) * \left[\delta(t) + \delta\left(t - \frac{3T}{2}\right)\right]$$

A lezione si è visto che

$$h(t) * h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) * p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = T\mathrm{tri}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

per cui

$$y(t) = x(t) * h(t) = T\mathrm{tri}\left(\frac{t-T}{T}\right) * \left[\delta(t) + \delta\left(t - \frac{3T}{2}\right)\right]$$

Il segnale $y(t)$ è costruito e disegnato nella Figura 6

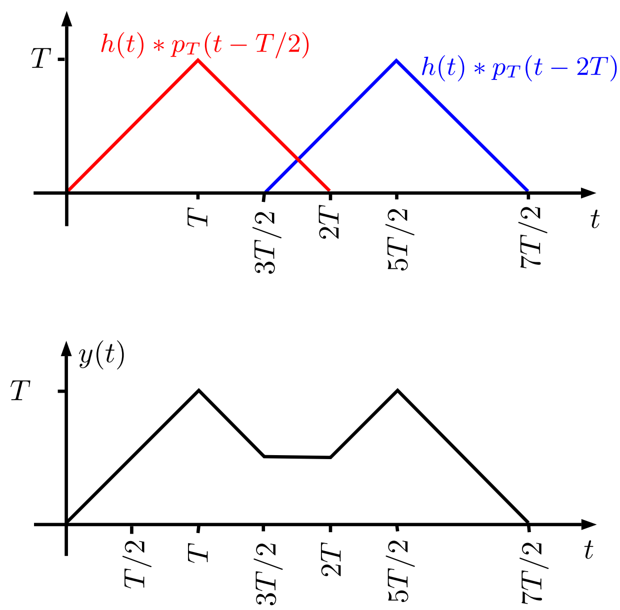


Figura 6: Segnale $y(t)$ per l'esercizio 5.

2. La figura 7 mostra il campionamento di $y(t)$:

$$y_\delta(t) = y(t)c_\delta(t) = \frac{T}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right) + T\delta\left(t-\frac{5T}{2}\right)$$

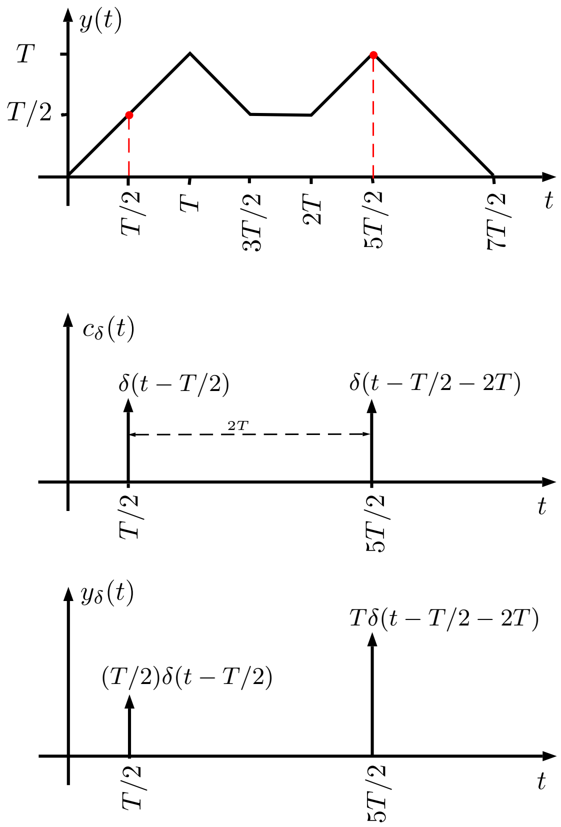


Figura 7: Il campionamento di $y(t)$ per l'esercizio 5.

3. Il segnale ricostruito $z(t)$ è

$$z(t) = h_R(t) * y_\delta(t) = h(t) * \left[\frac{T}{2}\delta\left(t-\frac{T}{2}\right) + T\delta\left(t-\frac{5T}{2}\right)\right] = \frac{T}{2}h\left(t-\frac{T}{2}\right) + Th\left(t-\frac{5T}{2}\right)$$

ed è disegnato nella Figura 8.

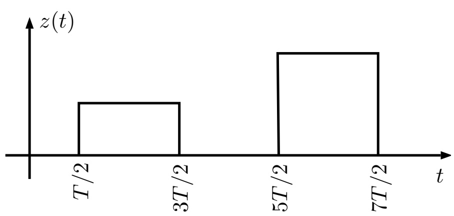


Figura 8: Il segnale $z(t)$ per l'esercizio 5.

4. Lo spettro di ampiezza di $y(t)$ è

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = \mathcal{F}\{h(t)\}\mathcal{F}\{x(t)\}$$

Possiamo scrivere

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{p_T(t - T/2)\} = \mathcal{F}\{p_T(t) * \delta(t - T/2)\} = \mathcal{F}\{p_T(t)\}e^{-j\pi fT} = T\text{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{p_T(t - T/2) + p_T(t - 2T)\} \\ &= \mathcal{F}\{p_T(t)\}\mathcal{F}\{[\delta(t - T/2) + \delta(t - 2T)]\} = T\text{sinc}(fT)\left[e^{-j\pi fT} + e^{-4j\pi fT}\right] \end{aligned}$$

Pertanto

$$Y(f) = X(f)H(f) = [T\text{sinc}(fT)]^2\left[e^{-j\pi fT} + e^{-2j\pi fT}\right]e^{-j\pi fT}$$

$$Y(f) = [T\text{sinc}(fT)]^2\left[e^{-j2\pi fT} + e^{-5j\pi fT}\right]$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto dall'espressione di $y(t)$ ricavata al punto 1.

1.6 Esercizio 6

1. Calcolare lo spettro di energia $S_x(f)$ del segnale $x(t) = K_1 e^{-K_2|t-t_0|}$ $(K2 > 0)$ e successivamente darne una rappresentazione grafica qualitativa.

2. Si calcoli la banda a -3dB del segnale $x(t)$, definita come quella frequenza B_{3dB} tale per cui $S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2} S_x^{max}$, dove S_x^{max} è il valore massimo assunto da $S_x(f)$.

3. Si consideri ora il segnale $y(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta) \cdot x(t)$. Calcolarne la trasformata di Fourier $Y(f)$.

4. Il segnale $y(t)$ ottenuto al punto precedente è inviato ad un sistema lineare e tempo invariante con risposta all'impulso $h(t) = \left(\frac{\sin(4\pi f_0 t)}{\pi t}\right)^2$ dando luogo in uscita al segnale $z(t)$. Calcolare la minima frequenza di campionamento necessaria sul segnale $z(t)$ per soddisfare il teorema di Nyquist (cioè il teorema del campionamento).

1.6.1 Svolgimento

1. Si può scrivere:
$$x(t) = K_1 e^{-K_2|t|} * \delta(t - t_0)$$
Dalle tavole:
$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$
Pertanto
$$X(f) = K_1 \frac{2K_2}{K_2^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0}$$
$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{4K_1^2K_2^2}{[K_2^2 + (2\pi f)^2]^2}$$

2. B_{3dB} risolve l'equazione
$$S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2} S_x(0)$$
$$\frac{4K_1^2K_2^2}{[K_2^2 + (2\pi B_{3dB})^2]^2} = \frac{1}{2}\frac{4K_1^2K_2^2}{K_2^4}$$
$$[K_2^2 + (2\pi B_{3dB})^2]^2 = 2K_2^4$$
$$K_2^2 + (2\pi B_{3dB})^2 = \sqrt{2}K_2^2$$
$$(2\pi B_{3dB})^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right) K_2^2$$
$$2\pi B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)} K_2$$
$$B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)} K_2$$

3. Il segnale $y(t)$ può essere riscritto come:
$$y(t) = Ax(t)\frac{1}{2j}\left(e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} - e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}\right)$$
Le sua trasformata di Fourier è quindi
$$Y(f) = \frac{A}{2j} X(f) * \left(e^{j\theta}\delta(f - f_0) - e^{-j\theta}\delta(f + f_0)\right)$$
$$Y(f) = \frac{A}{2j}\left(e^{j\theta}X(f - f_0) - e^{-j\theta}X(f + f_0)\right)$$
$$Y(f) = \frac{A}{2j}\left(\frac{2K_1K_1}{K_2^2 + (2\pi(f - f_0))^2} e^{-j2\pi(f - f_0)t_0 + j\theta} - \frac{2K_1K_1}{K_2^2 + (2\pi(f + f_0))^2} e^{-j2\pi(f + f_0)t_0 - j\theta}\right)$$

4. La trasformata di Fourier $Y(f)$ ha banda infinita dal punto di vista matematico. Il filtro ha funzione di trasferimento
$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = 4f_0 \mathrm{tr}(f/(4f_0))$$
ed è strettamente limitato in banda a $4f_0$. Il segnale all'uscita del filtro $z(t)$ ha dunque banda $4f_0$ e la minima frequenza di campionamento è $8f_0$

1.7 Esercizio 7

Si consideri un segnale $x(t)$ reale, pari e in banda base, con banda $B_x = 2$ kHz (si intenda che il segnale $x(t)$ abbia uno spettro generico in $[-B_x, +B_x]$ e nullo altrove). Si costruisca il segnale $y(t) = x^2(t) + x(t)\cos(2\pi f_0 t)$, dove $f_0 = 17$ kHz.

1. si calcoli l'espressione della trasformata di Fourier $Y(f)$, rappresentando il risultato graficamente;
2. si calcoli la minima frequenza di campionamento necessaria per campionare correttamente il segnale $y(t)$;
3. Si supponga ora di campionare $y(t)$ con una frequenza di campionamento pari a $f_{c,wrong} =$ 10 kHz e poi di ricostruire un segnale analogico $z(t)$ utilizzando un filtro ideale con funzione di trasferimento $H(f) = 1$ per $|f| < f_{c,wrong}/2$ e nulla altrove. Valutare il segnale ricostruito $z(t)$ in funzione del tempo, mettendone in evidenza la dipendenza da $x(t)$.

Suggerimento: si consiglia, ma non è ovviamente obbligatorio, di svolgere l'esercizio disegnando qualitativamente gli spettri dei vari segnali coinvolti.

1.7.1 Svolgimento

1. Sia $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$; si ha

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x^2(t)+x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = X(f)*X(f)+X(f)*\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$Y(f) = X(f)*X(f) + \frac{1}{2}[X(f-f_0)+X(f+f_0)]$$

Il grafico qualitativo di $Y(f)$ è mostrato nella figura 9

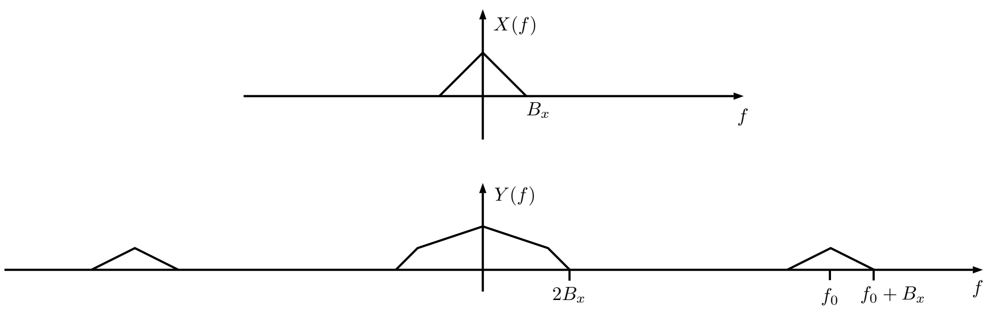


Figura 9: Grafico qualitativo di $Y(f)$

2. La banda di $Y(f)$ è $B_y = f_0 + B = 17 + 2 = 19$ kHz e quindi la minima frequenza di campionamento è

$$f_{c,min} = 2B_y = 2(f_0 + B) = 38 \text{ kHz}$$

3. La trasformata di Fourier di

$$y_c(t) = y(t)T_{c,wrong}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_{c,wrong})$$

è

$$Y_c(f) = Y(f)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f-kf_{c,wrong}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}Y(f-kf_{c,wrong})$$

$$Y_c(f) = Y(f)+Y(f-f_{c,wrong})+Y(f-2f_{c,wrong})+Y(f+f_{c,wrong})+Y(f+2f_{c,wrong})+\cdots$$

La trasformata di Fourier $Y_c(f)$ è indicata qualitativamente nella figura 10, dove sono stati separati (per chiarezza) i contributi di

$$Y_1(f) = X(f)*X(f) = \mathcal{F}\{x^2(t)\}$$

e di

$$Y_2(f) = \frac{1}{2}[X(f-f_0)+X(f+f_0)] = \mathcal{F}\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}.$$

Inoltre, può ancora convenire distinguere

$$Y_{2+}(f) = \frac{1}{2}X(f-f_0)$$

$$Y_{2-}(f) = \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

	f_{ini} (kHz)	f_{fine} (kHz)
$Y_1(f)$	-4	4
$Y_1(f-10)$	6	14
$Y_1(f-20)$	16	24
$Y_1(f+10)$	-14	-6
$Y_1(f+20)$	-24	-16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabella 1: Frequenze di inizio f_{ini} e fine f_{fine} delle repliche di $Y_1(f)$

	f_{ini} (kHz)	f_{fine} (kHz)
$Y_{2+}(f)$	15	19
$Y_{2+}(f-10)$	25	29
$Y_{2+}(f-20)$	35	39
$Y_{2+}(f+10)$	5	9
$Y_{2+}(f+20)$	-5	-1
$Y_{2+}(f+30)$	-15	-11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabella 2: Frequenze di inizio f_{ini} e fine f_{fine} delle repliche di $Y_{2+}(f)$

	f_{ini} (kHz)	f_{fine} (kHz)
$Y_{2-}(f)$	-19	-15
$Y_{2-}(f-10)$	-9	-5
$Y_{2-}(f-20)$	1	5
$Y_{2-}(f-30)$	11	15
$Y_{2-}(f+10)$	-29	-25
$Y_{2-}(f+20)$	-39	-35
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabella 3: Frequenze di inizio f_{ini} e fine f_{fine} delle repliche di $Y_{2-}(f)$

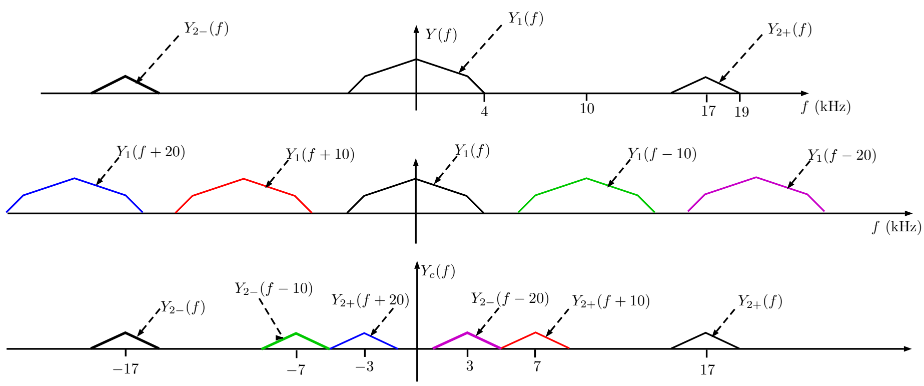


Figura 10: Trasformata di Fourier $Y_c(f)$ (qualitativa)

La tabella 1 riporta frequenze di inizio e fine delle varie repliche di $Y_1(f)$. La tabella 2 riporta frequenze di inizio e fine delle varie repliche di $Y_{2+}(f)$. La tabella 3 riporta frequenze di inizio e fine delle varie repliche di $Y_{2-}(f)$.

Interessa conoscere la parte di $Y_c(f)$ che cade nell'intervallo di frequenze $[-f_{c,wrong}/2, f_{c,wrong}/2] = [-5, 5]$ kHz:

$$Z(f) = Y_1(f) + Y_{2+}(f+20) + Y_{2-}(f-20) = Y_1(f) + \frac{1}{2}X(f - f_0 + 20) + \frac{1}{2}X(f + f_0 - 20)$$

$$Z(f) = Y_1(f) + \frac{1}{2}X(f-3) + \frac{1}{2}X(f+3)$$

$$z(t) = x^2(t) + x(t)\cos(2\pi f_z t)$$

con $f_z = 3$ kHz

1.8 Esercizio 8

Si consideri il segnale periodico

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(t - kT)$$

dove

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n q(t - nT_c), \quad NT_c = T, \quad q(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T_c] \\ 0 & t \notin [0, T_c] \end{cases}$$

La sequenza $[c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}]$ è costituita da valori ± 1 noti (non casuali).

1. Si calcoli la trasformata di Fourier di $x(t)$ per c_n e N generici. Nello svolgimento dei calcoli, si usi la seguente definizione

$$C(k) \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-j2\pi kn/N}$$

2. Nel caso $N = 4$ con $c_0 = c_2 = c_3 = 1$ e $c_1 = -1$,

   (a) si disegni qualitativamente l'andamento di $x(t)$

   (b) si calcoli e si disegni qualitativamente la trasformata di Fourier $X(f)$

   (c) si calcolino i coefficienti che, in $X(f)$, moltiplicano $\delta(f), \delta(f-1/T), \delta(f-2/T), \delta(f-3/T), \delta(f-4/T)$

1.8.1 Svolgimento

1. La trasformata $X(f)$ è

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$R(f) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n Q(f) e^{-j2\pi f n T_c} = Q(f) \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-j2\pi f n T_c}$$

$$R\left(\frac{k}{T}\right) = Q\left(\frac{k}{T}\right) \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-j2\pi k n T_c/T} = Q\left(\frac{k}{T}\right) \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-j2\pi k n/N}$$

Pertanto $R(k/T)$ è il prodotto di $Q(k/T)$ e la DFT $C(k)$ della sequenza $[c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}]$

$$C(k) \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-j2\pi k n/N}$$

In particolare, $C(k)$ è una funzione periodica in k di periodo N (cioè $C(k+N) = C(k)$) e gode delle proprietà di simmetria $C(k) = C^*(-k) = C^*(N-k)$, essendo la DFT di un segnale numerico reale. Inoltre

$$Q(f) = e^{-j\pi f T_c} \frac{\sin(\pi f T_c}{\pi f} = T_c \operatorname{sinc}(f T_c) e^{-j\pi f T_c}$$

e

$$Q\left(\frac{k}{T}\right) = T_c \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{N}\right) e^{-j\pi k/N}$$

Pertanto

$$R\left(\frac{k}{T}\right) = T_c C(k) \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{N}\right) e^{-j\pi k/N}$$

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{N}\right) e^{-j\pi k/N} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

2. Nel caso della sequenza data, si ha

$$C(k) = c_0 + c_1 e^{-j2\pi k/4} + c_2 e^{-j2\pi 2k/4} + c_3 e^{-j2\pi 3k/4} = \left(1 + e^{-jk\pi} + e^{-j\pi 3k/2}\right) - e^{-jk\pi/2}$$

$$C(k) = \left(1 + (-1)^k + j^k\right) - (-j)^k$$

$$C(0) = 2,\ C(1) = 2j,\ C(2) = 2,\ C(3) = -2j$$

Si può notare che $|C(k)| = 2$ per ogni k.

   (a) Si veda la Figura 11.

   (b) La trasformata di Fourier $X(f)$ è :

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{4}\right) e^{-j\pi k/4} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

   Nel grafico viene rappresentato il modulo di $X(f)$:

$$|X(f)| = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{4}\right) \right| \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

   Si veda la Figura 12.

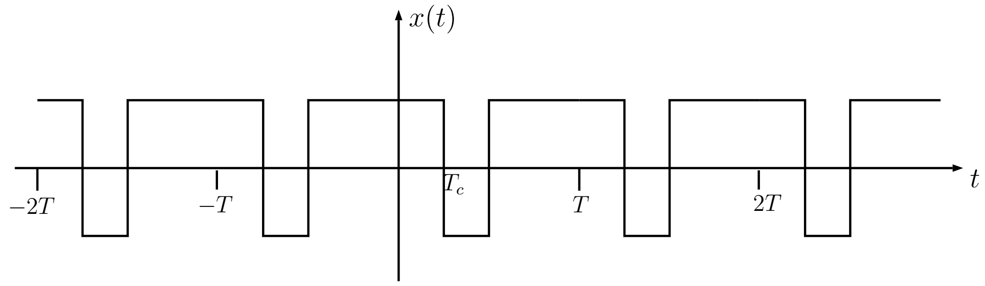


Figura 11: Grafico di $x(t)$

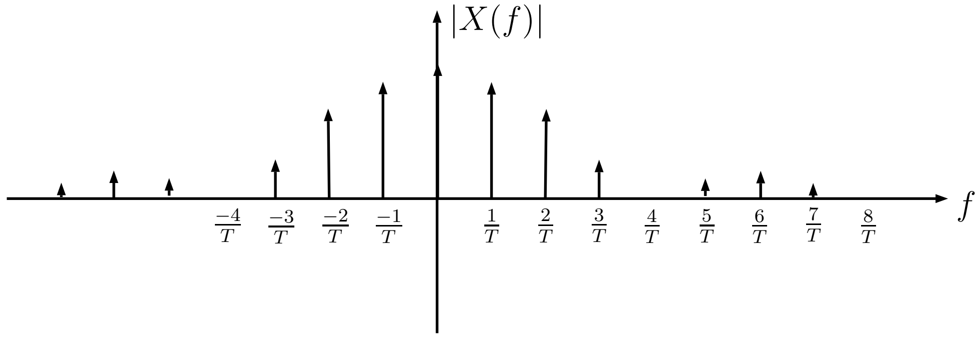


Figura 12: Grafico di $|X(f)|$

(c) I coefficienti richiesti sono

$$g(k) = \frac{1}{T} R\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{4} C(k) \text{ sinc}\left(\frac{k}{4}\right) e^{-j\pi k/4}$$

per $k = 0, \ldots, 4$. I valori sono:

$$\begin{aligned}
g(0) &= \frac{1}{4} C(0) = 2 \\
g(1) &= \frac{1}{4} C(1) \text{ sinc}\left(\frac{1}{4}\right) e^{-j\pi/4} = \frac{j}{2} \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} \frac{1-j}{\sqrt{2}} = \frac{1+j}{\pi} \\
g(2) &= \frac{1}{4} C(2) \text{ sinc}\left(\frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/2} = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} (-j) = \frac{-j}{\pi} \\
g(3) &= \frac{1}{4} C(3) \text{ sinc}\left(\frac{3}{4}\right) e^{-j3\pi/4} = \frac{-j}{2} \frac{\sin(3\pi/4)}{3\pi/4} \frac{-1-j}{\sqrt{2}} = \frac{-1+j}{3\pi} \\
g(4) &= \frac{1}{4} C(0) \text{ sinc}\,(1)\, e^{-j\pi} = 0
\end{aligned}$$

1.9 Esercizio 9

Si consideri il segnale reale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(f)$ indicata nella Figura 13. Si generano in successione i seguenti segnali:

1. $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 1000$ Hz
2. $z(t) = y(t) * h(t)$, con $h(t) = 2f_0 \text{ sinc } (2f_0 t)$ ($f_0 = 1000$ Hz, come al punto precedente)
3. $w(t) = z(t)\cos(2\pi f_1 t)$ con $f_1 = f_0 - 80$ Hz
4. $s(t) = w(t) * h(t)$ (stesso $h(t)$ del punto 2)

Si chiede di:

1. disegnare lo schema a blocchi del sistema che ha come ingresso $x(t)$ e come uscita $s(t)$
2. disegnare la trasformata di Fourier di $s(t)$
3. descrivere a parole la relazione che esiste tra $X(f)$ e $S(f)$

Nota: questa tecnica veniva usata per criptare la voce negli anni '50.

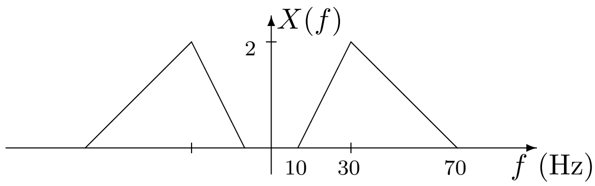


Figura 13: $X(f)$

1.9.1 Svolgimento

Lo schema a blocchi del sistema è mostrato nella Figura 14

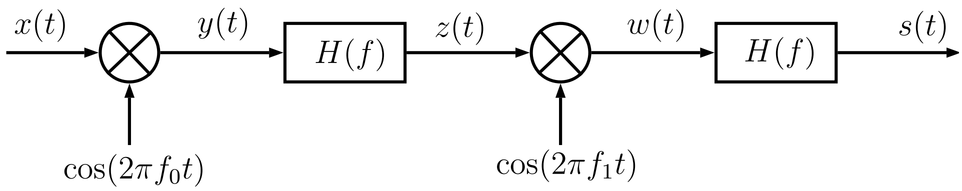


Figura 14: Schema a blocchi del sistema

1. Il segnale $y(t)$ ha trasformata di Fourier (Fig. 15)

$$Y(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

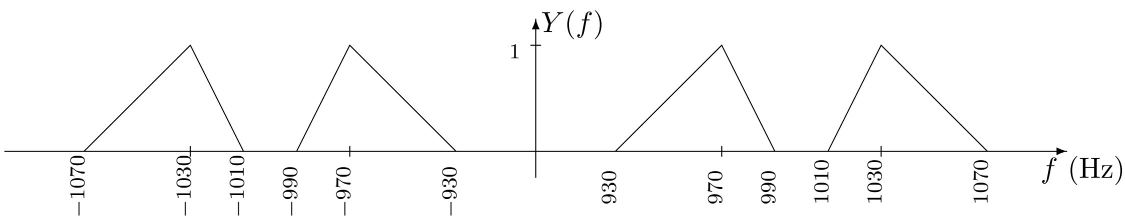


Figura 15: Trasformata di Fourier $Y(f)$ del segnale $y(t)$

2. (a) Il segnale $z(t)$ ha trasformata di Fourier

$$Z(f) = Y(f)H(f)$$

dove $H(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro. dalle tavole si ha

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\ \text{sinc}\ (t/T)\right\} = p_{1/T}(f)$$

e quindi, ponendo $1/T = 2f_0$, si ha (Fig. 16)

$$H(f) = \mathcal{F}\left\{2f_0\ \text{sinc}\ (2f_0 t)\right\} = p_{2f_0}(f)$$

di conseguenza $z(t)$ ha trasformata di Fourier come nella Figura 17.

(b) Il segnale $w(t)$ ha trasformata di Fourier $W(f)$

$$W(f) = \frac{1}{2}[Z(f - f_1) + Z(f + f_1)]$$

con $f_1 = f_0 - 80 = 920$ Hz (Fig. 18)

(c) Il segnale $s(t)$ ha trasformata di Fourier

$$S(f) = W(f)H(f)$$

ed è mostrata nella Figura 19.

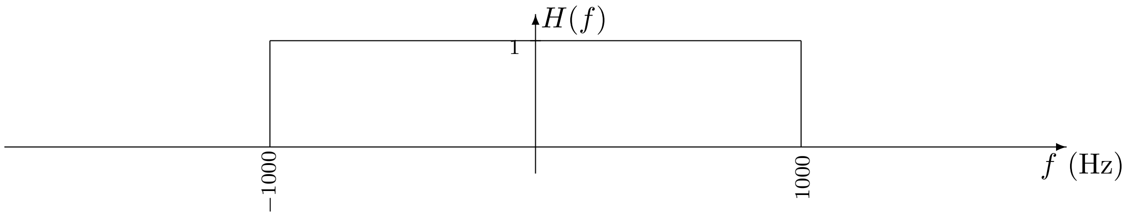


Figura 16: Funzione di trasferimento $H(f)$ del filtro

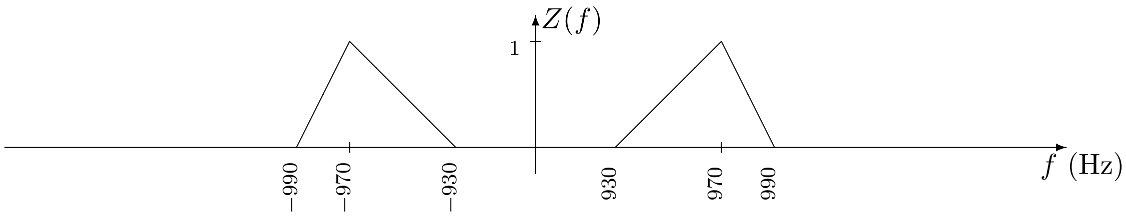


Figura 17: Trasformata di Fourier $Z(f)$ del segnale $z(t)$

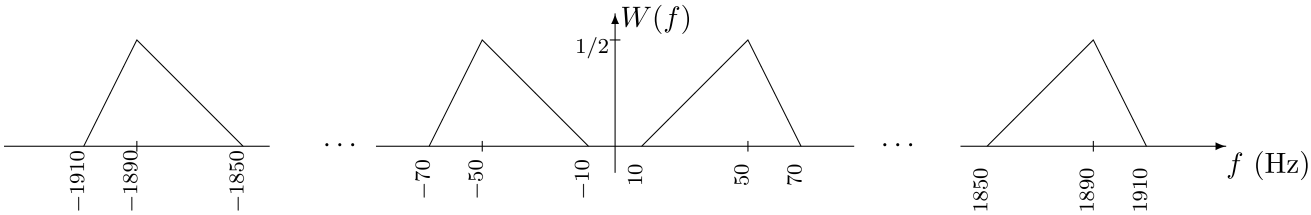


Figura 18: Trasformata di Fourier $W(f)$ del segnale $w(t)$

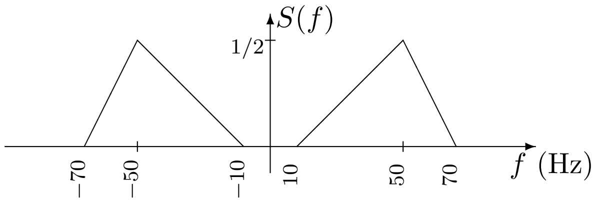


Figura 19: Trasformata di Fourier $S(f)$ del segnale $s(t)$

3. Rispetto a $X(f)$, si può notare che la trasformata $S(f)$ è ridotta di un fattore 4 e risulta "ribaltata". Si può scrivere $X(f) = X_{(+)}(f) + X_{(-)}(f)$, dove $X_{(+)}(f)$ è la parte a frequenza positiva di $X(f)$ e $X_{(-)}(f)$ è la parte a frequenza negativa. Parimenti, si può scrivere $S(f) = S_{(+)}(f) + S_{(-)}(f)$ e $S_{(+)}(f) = X_{(+)}(-f + 80)$.

1.10 Esercizio 10

Sia $z(t)$ un segnale reale a banda limitata pari a B_z e sia dato

$$w(t) = z(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \Lambda_{T/N}(t - nT)$$

dove $N \in \mathbb{N}$ e $\Lambda_{T/N}(t)$ è la funzione triangolare simmetrica di ampiezza unitaria e durata $2T/N$ e dove $1/T > 2B_z$.

1. Calcolare $W(f)$, la trasformata di Fourier di $w(t)$
2. È possibile possibile ricostruire $z(t)$ a partire da $w(t)$ mediante un sistema reale? In caso affermativo, descrivere il sistema lineare che consente di ricostruire $z(t)$.
3. Si consideri ora il segnale $y(t) = w(t) * \text{sinc}^2(tB)$. Si disegni qualitativamente $Y(f)$. Quali sono le condizioni su B affinché si possa ricostruire $z(t)$ a partire da $y(t)$?

1.10.1 Svolgimento

$$w(t) = z(t) \cdot \left[\Lambda_{T/N}(t) * \left[\sum_n \delta(t - 2nT) - \sum_n \delta(t - 2nT - T) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
W(f) &= Z(f) * \left[\frac{T}{N} \mathrm{sinc}^2(fT/N) \left[\frac{1}{2T} \sum_n \delta(f - n/2T) - e^{-j2\pi fT} \frac{1}{2T} \sum_n \delta(f - n/2T) \right] \right] \\
&= Z(f) * \left[\frac{1}{2N} \mathrm{sinc}^2(fT/N)(1 - e^{-j2\pi fT}) \sum_n \delta(f - n/2T) \right] \\
&= Z(f) * \left[\frac{1}{2N} \sum_n \mathrm{sinc}^2(n/2N)(1 - e^{-jn\pi}) \delta(f - n/2T) \right] \\
&= Z(f) * \left[\frac{1}{N} \sum_{n \mathrm{dispari}} \mathrm{sinc}^2(n/2N) \delta(f - n/2T) \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n \mathrm{dispari}} \mathrm{sinc}^2(n/2N) Z(f - n/2T)
\end{aligned}$$

$\mathrm{sinc}^2(n/2N) \neq 0$ per n dispari, in particolare $n = 1$, le repliche, spaziate di $1/T$, non si sovrappongono perche $B_z < 1/2T$. Per ricostruire il segnale serve riportare in banda base le prime repliche (moltiplicazione per $\cos(2\pi(2n+1)t/2T)$ e filtrare con un filtro passabasso ideale di banda unilatera B_z. Con $n = 1$ otteniamo in in frequenza:

$$Z(f) = \frac{N}{\mathrm{sinc}^2(1/2N)} \frac{1}{2} \left[W\left(f - \frac{1}{2T}\right) + W\left(f + \frac{1}{2T}\right) \right] \Pi_{2B_z}(f)$$

nel tempo

$$z(t) = \frac{N}{\mathrm{sinc}^2(1/2N)} \left(w(t) \cos(2\pi t/2T) \right) * 2B_z \mathrm{sinc}(2B_z t)$$

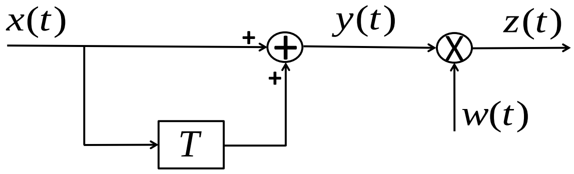
Nel secondo caso tutto procede come prima, ma nella ricostruzione bisogna prima introdurre un filtro equalizzatore che inverta la distorsione nella banda del segnale $w(t)$ almeno fino alla prima replica:

$$H_e(f) = \frac{B}{\Lambda(f/B)} \quad \forall 1/2T - B_z < |f| < 1/2T + B_z$$

La condizione quindi è che $\Lambda(f/B)$ sia non nulla per $|f| < 1/2T + B_z$, quindi $B > 1/2T + B_z$.

1.11 Esercizio 11

Si consideri il sistema riportato nella seguente figura:



dove $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, con $f_0 = \frac{1}{4T}$ e $\phi = \frac{3}{4}\pi$, e $w(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$.

1. Ricavare l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del sommatore.
2. Calcolare lo spettro di potenza o lo spettro di energia (a seconda della tipologia del segnale) di $y(t)$ e $z(t)$.
3. Calcolare il valore della potenza o dell'energia (a seconda della tipologia) di $y(t)$ e $z(t)$.
4. Per quali valori di f_0 e ϕ il segnale $y(t)$ è identicamente nullo, ossia $y(t) = 0 \;\; \forall t$?

1.11.1 Svolgimento

1. I segnali $y(t)$ e $x(t)$ sono legati dalla relazione:
$$y(t) = x(t) + x(t-T)$$
Il sistema tra $x(t)$ e $y(t)$ è LTI, con risposta all'impulso reale:
$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$
La risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale è quindi a sua volta una sinusoide:
$$y(t) = |H(f_0)| \cos\left(2\pi f_0 t + \phi + \arg\{H(f_0)\}\right)$$
La funzione di trasferimento del sistema (trasformata di Fourier della risposta all'impulso) vale:
$$H(f) = 1 + \mathrm{e}^{-j2\pi fT} = \mathrm{e}^{-j\pi fT}\left(\mathrm{e}^{j2\pi fT} + \mathrm{e}^{-j2\pi fT}\right) = 2\mathrm{e}^{-j\pi fT}\cos(\pi fT)$$
Calcolata in $f_0 = \frac{1}{4T}$:
$$H(f_0) = 2\mathrm{e}^{-j\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\pi/4}$$
$H(f_0)$ ha quindi modulo pari a $\sqrt{2}$ e fase pari a -$\pi/4$:
$$y(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$$

2. Il segnale $y(t)$ è una sinusoide (segnale periodico a potenza media finita). Trasformata di Fourier e spettro di potenza valgono:
$$Y(f) = -\frac{\sqrt{2}}{2\jmath}\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$
$$G_y(f) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$
Il segnale $z(t) = y(t)\cdot w(t) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2T}t\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$ è invece un segnale ad energia finita, con trasformata di Fourier pari a:
$$Z(f) = -\frac{\sqrt{2}}{2\jmath}\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right] * 4Tp_{\frac{1}{4T}}(f) = 2\jmath\sqrt{2}T\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) - p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$
Le due porte sono separate spettralmente.Lo spettro di energia vale quindi:
$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = 8T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$

3. La potenza di $y(t)$ vale (somma dei coefficienti delle delta nello spettro di potenza):
$$P(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
L'energia di $z(t)$ vale:
$$E(z) = \int S_z(f)df = 2\cdot 8T^2 \cdot \frac{1}{4T} = 4T$$

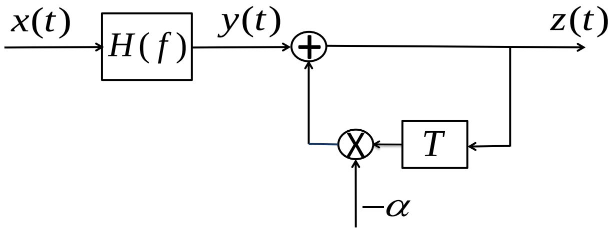
4. Il segnale $y(t)$ è nullo se $|H(f_0)| = 0$, dove:
$$|H(f_0)| = 2|\cos(\pi f_0 T)|$$
Il coseno si annulla se: $\pi f_0 T = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ossia $f_0 = \frac{2k+1}{2T}$ con $k = 0, 1, 2, ...$
Quindi il segnale $y(t)$ è identicamente nullo se f_0 è un multiplo dispari di $\frac{1}{2T}$ (indipendentemente dal valore di ϕ).

1.12 Esercizio 12

Si consideri il seguente segnale:

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t-2nT) \qquad \text{con} \quad p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{se } |t| < T \\ 0 & \text{se } |t| > T \end{cases}$$

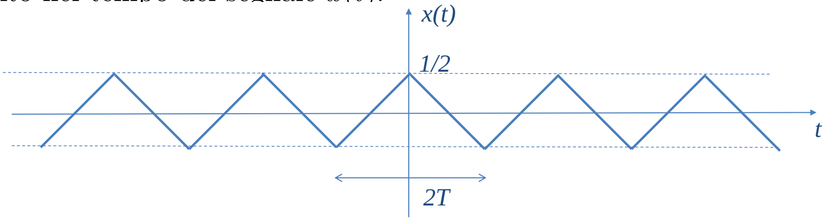
dove T è un numero reale positivo. Il segnale $x(t)$ passa attraverso un filtro passa-basso ideale $H(f)$ di ampiezza unitaria e banda B, generando il segnale $y(t)$ e successivamente il segnale $z(t)$, come descritto nella seguente figura.



1. Disegnare l'andamento nel tempo del segnale $x(t)$.
2. Calcolare la potenza P_x e lo spettro di potenza $G_x(f)$ del segnale $x(t)$.
3. Calcolare il valore che deve assumere la banda B del filtro passbasso ideale affinché il segnale $y(t)$ sia una sinusoide e scrivere l'espressione di $y(t)$.
4. Scrivere l'espressione del segnale $z(t)$ quando il segnale $y(t)$ ha l'espressione ricavata al punto 3.

1.12.1 Svolgimento

1. Andamento nel tempo del segnale $x(t)$:



2. La potenza di $x(t)$ (segnale periodico di periodo $2T$) può essere calcolata come:

$$P_x = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$x(t)$ è una funzione reale e pari, quindi:

$$P_x = 2\frac{1}{2T}\int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2}-\frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{4}+\frac{t^2}{T^2}-\frac{t}{T}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{4}t+\frac{t^3}{3T^2}-\frac{t^2}{2T}\right]_0^T = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{4}T+\frac{T}{3}-\frac{T}{2}\right] = \frac{1}{12}$$

La trasformata di Fourier di $x(t)$ è pari a:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{n}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

dove:

$$P(f) = T\text{sinc}^2(fT)$$
$$P\left(\frac{n}{2T}\right) = T\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

Sostituendo:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

La funzione $\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$ è diversa da zero solamente se n è dispari ($n = 2k+1$) oppure se $n = 0$:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{2k+1}{2}\right)\delta\left(f-\frac{2k+1}{2T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\pi\frac{2k+1}{2}\right)}{\left(\pi\frac{2k+1}{2}\right)^2}\delta\left(f-\frac{2k+1}{2T}\right) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\delta\left(f-\frac{2k+1}{2T}\right)$$

Lo spettro di potenza vale quindi:

$$G_x(f) = \frac{4}{\pi^4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\delta\left(f-\frac{2k+1}{2T}\right)$$

3. La trasformata $X(f)$ è composta da una serie di delta alle frequenze $f_k = \frac{2k+1}{2T}$. Le due delta attorno all'origine hanno frequenza $\pm\frac{1}{2T}$, le successive hanno frequenza $\pm\frac{3}{2T}$. Per selezionare solamente le due delta centrali, la banda del filtro passabasso deve quindi essere compresa tra $\frac{1}{2T}$ e $\frac{3}{2T}$, ossia $\frac{1}{2T} < B < \frac{3}{2T}$.
   La trasformata di Fourier di $y(t)$ è pari a:

$$Y(f) = \frac{2}{\pi^2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]$$

   La sua antitrasformata vale:

$$y(t) = \frac{4}{\pi^2}\cos\left(2\pi\frac{1}{2T}t\right) = \frac{4}{\pi^2}\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

4. La relazione tra $z(t)$ e $y(t)$ è:

$$z(t) = y(t) - \alpha z(t - T)$$

   Applicando la trasformata di Fourier:

$$Z(f) = Y(f) - \alpha Z(f)\mathrm{e}^{-j2\pi fT}$$

   Da qui si ricava che la funzione di trasferimento del sistema che ha all'ingresso $y(t)$ e in uscita $z(t)$ è pari a:

$$H_2(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{1}{1 + \alpha\mathrm{e}^{-j2\pi fT}}$$

   All'ingresso del sistema è posta una sinusoide di frequenza $f_0 = \frac{1}{2T}$. Il segnale in uscita sar à ancora una sinusoide con la stessa frequenza:

$$z(t) = |H_2(f_0)|\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\pi\frac{t}{T} + \arg\{\mathrm{H_2(f_0)}\}\right)$$

   con:

$$H_2(f_0) = \frac{1}{1 + \alpha\mathrm{e}^{-j2\pi\frac{1}{2T}T}} = \frac{1}{1 + \alpha\mathrm{e}^{-j\pi}} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

   Quindi:

$$z(t) = \frac{4}{\pi^2(1 - \alpha)}\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

1.13 Esercizio 13

Si consideri un segnale $x(t)$ a banda limitata con banda B_x ed il segnale

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)q(t - nT)$$

con $q(t)$ funzione pari positiva di tipo triangolare non nulla nell'intervallo $-T_q < t < T_q$, e $f_c = 1/T = 2B_x$. Il segnale $y(t)$ viene filtrato con un filtro ricostruttore con funzione di trasferimento $K(f)$ e si ottiene in uscita il segnale $w(t)$.

1. Scrivere un'espressione per la trasformata di Fourier di $y(t)$. Disegnarne qualitativamente l'andamento.
2. Scrivere un'espressione per la trasformata di Fourier di $w(t)$. Disegnarne qualitativamente l'andamento.
3. Sotto quali condizioni su T_q esiste un filtro ricostruttore $K_1(f)$ tale per cui $w(t) = x(t)$?
4. Scrivere l'espressione del filtro ricostruttore $K_1(f)$ in questo caso e disegnarne l'andamento qualitativo.
5. Sotto quali condizioni su T_q esiste un filtro ricostruttore $K_2(f)$ tale per cui $w(t) = \alpha x(t)\cos(4\pi B_x t)$, con $\alpha \neq 0$?
6. Scrivere l'espressione del filtro ricostruttore $K_2(f)$ in questo caso e disegnarne l'andamento qualitativo.

1.13.1 Svolgimento

1.

$$
y(t) = q(t) * \sum_n x(nT)\delta(t-nT) = q(t) * \left(x(t) \cdot \sum_n \delta(t-nT) \right)
$$

$$
Y(f) = Q(f) \cdot \left(X(f) * \frac{1}{T} \sum_n \delta(f-n/T) \right) = Q(f)\frac{1}{T}\sum_n X(f-n/T) = T_q \mathrm{sinc}^2(fT_q)\frac{1}{T}\sum_n X(f-n/T)
$$

2.

$$
W(f) = K(f) \cdot Y(f) = K(f) \cdot Q(f) \cdot \frac{1}{T} X(f-nT)
$$

3. Siccome $1/T = 2B_x$ le repliche non si sovrappongono e la ricostruzione è possibile se $Q(f)$ non presenta zeri nella replica che si vuole ricostruire ed equalizzare.

4. Siccome $Q(f) = T_q \mathrm{sinc}^2(fT_q)$, nel primo caso abbiamo $1/T_q \geq B_x \rightarrow T_q \leq 1/B_x$,

$$
K_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{Q(f)}, & |f| < B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
$$

5. Nel secondo caso il filtro ricostruttore deve lasciare passare ed equalizzare le repliche centrate in $f = \pm 2B_x = \pm f_c$. Quindi la condizione è che $1/T_q > 3B_x$ ed il filtro ricostruttore è:

$$
K_2(f) = \begin{cases} \frac{1}{Q(f)}, & B_x < |f| < 3B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
$$

1.14 Esercizio 14

1. E' possibile rappresentare $x(t)$ con la serie di Fourier? In caso affermatico si scriva l'espressione della serie.

2. Il segnale $x(t)$ viene campionato da un convertitore analogico/digitale ideale che produce la sequenza $x[n] = x(nT_c)$. Per quali valori di T_c si puó ricostruire $x(t)$ dalla sequenza $x[n]$

3. Nell'ipotesi del punto precedente, si consideri la formula di ricostruzione

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{R}(t - nT_c) \tag{2}$$

   dove $R(t)$ è una funzione regolarizzata e $\mathrm{R}(t) = 1$ per $t \in [-T_c/8, T_c/8]$ e zero altrove. $y(t)$ è uguale a $x(t)$?

4. Nel caso non lo sia, come possiamo ricostruire $x(t)$ a partire da $y(t)$?

1.14.1 Svolgimento

1. Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(t - nT)$$

lo si può quindi rappresentare con la serie di Fourier. I coefficienti della serie di Fourier si ottengono come segue

$$\mu_n = \frac{1}{T} X_p\left(\frac{n}{T}\right)$$

$$x_p(t) = 11\text{sinc}\left(\frac{11}{T}t\right) \rightarrow X_p(f) = Tp_{11/T}(f)$$
$$\mu_n = p_{11/T}(n/T)$$

I coefficienti della serie di Fourier sono quindi pari a 1 per $|n| \leq 5$ e zero altrove.

La serie di Fourier è quindi:

$$x(t) = \sum_{n=-5}^{5} \exp\left(j2\pi\frac{n}{T}t\right).$$

2. La frequenza di campionamento minima è il doppio della frequenza massima di $x(t)$, pari a $5/T$. Quindi $f_c > \frac{5}{T} \times 2 = \frac{10}{T}$, da cui, $T_c < \frac{T}{10}$.

3. Il segnale interpolante $R(t) = p_{T_c/4}(t)$ ha trasformata di Fourier $R(f) = \frac{T_c}{4}\text{sinc}\left(\frac{T_c}{4}f\right)$ e non soddisfa le condizioni del filtro ricostruttore:

$$K(f) = T_c \quad |f| < \frac{1}{2T_c}$$
$$K(f) = 0 \quad \forall|f| \geq \frac{1}{2T_c}$$

Il segnale $y(t)$ non ricostruisce fedelmente $x(t)$

4. Per ricostruire fedelmente $x(t)$ basta filtrare $y(t)$ con un filtro che compensi le distorsioni all'interno della banda $|f| < \frac{1}{2T_c}$ e sia nullo altove

$$K_y(f) = \frac{T_c}{R(f)} = \frac{4}{\text{sinc}\left(\frac{T_c}{4}f\right)} \quad |f| < \frac{1}{2T_c}$$
$$K_y(f) = 0 \quad \forall|f| \geq \frac{1}{2T_c}$$

Si noti che $R(f) = \text{sinc}\left(\frac{T_c}{4}f\right) \neq 0 \quad |f| < \frac{1}{2T_c}$

1.15 Esercizio 15

Si consideri il segnale $x(t) = e^{-t/T}u(t)$, con T=3 ms. Si vuole campionare $x(t)$ usando un campionatore ideale che moltiplica l'ingresso per $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$. Poiché la banda di $x(t)$ è infinita, si filtra inizialmente $x(t)$ con un filtro anti-aliasing passabasso ideale di banda B e guadagno unitario, poi si campiona il segnale $x_a(t)$ all'uscita del filtro anti-aliasing.

1. Si calcoli la banda B (espressa in hertz) tale che $x_a(t)$ abbia un'energia pari al 95% dell'energia di $x(t)$.
2. Qual è la minima frequenza di campionamento f_N (in hertz) affinchè sia possibile ricostruire perfettamente $x_a(t)$ dai suoi campioni?
3. Assumendo di usare una frequenza di campionamento pari a $f_s = 2f_N$ (con f_N ricavata al punto 2), si diano le specifiche (in termini di banda e guadagno) del filtro ricostruttore da usare per ricostruire $x_a(t)$ dai suoi campioni.
4. Scrivere l'espressione dello spettro di potenza del segnale $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 2kT)$.

1.15.1 Svolgimento

1. Dalle tavole si ricava che la trasformata di Fourier di $x(t)$ è:

$$X(f) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f} = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

   Il segnale all'uscita del filtro anti-aliasing ha trasformata:

$$X_a(f) = X(f) \cdot p_{2B}(f) = \frac{T}{1 + j2\pi fT} \cdot p_{2B}(f)$$

   dove $p_{2B}(f)$ è una funzione rettangolare con supporto $[-B, B]$ e ampiezza unitaria.
   L'energia di $x(t)$ è:

$$E(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t/T} dt = \frac{T}{2}.$$

   L'energia di $x_a(t)$ si può trovare usando l'eguaglianza di Parseval:

$$E(x_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_a(f)|^2 df = \int_{-B}^{+B} \left| \frac{T}{1 + j2\pi fT} \right|^2 df$$

   Siccome $X_a(f)$ è pari:

$$E(x_a) = 2 \int_0^{+B} \frac{T^2}{1 + (2\pi fT)^2} df$$

   Con il cambio di variabile $u = 2\pi fT$ si ottiene:

$$E(x_a) = 2 \int_0^{+2\pi BT} \frac{T^2}{1 + u^2} \frac{1}{2\pi T} du = \frac{T}{\pi} \mathrm{atan}(u) \Big|_0^{2\pi BT} = \frac{T}{\pi} \mathrm{atan}(2\pi BT)$$

   Imponendo la condizione sull'energia di $x_a(t)$ ($E(x_a) = \alpha E(x)$ con $\alpha = 0.95$), si ottiene:

$$\frac{T}{\pi} \mathrm{atan}(2\pi BT) = \alpha \frac{T}{2}$$

   ossia:

$$B = \frac{1}{2\pi T} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) = 0.674\mathrm{kHz} = 674\mathrm{Hz}.$$

2. In base al teorema del campionamento, $f_N = 2B$=1.34 kHz.

3. La trasformata di Fourier del segnale campionato $x_c(t)$ è:

$$X_c(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(f - \frac{k}{T_s}\right).$$

   con $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4B}$.
   Il filtro ricostruttore ideale, nel caso di campionamento di $x_a(t)$ con un treno di delta con periodo $T_s = 1/f_s$, è un filtro passabasso ideale con banda B_F compresa tra B ed $f_s - B$. Siccome $f_s = 2f_N = 4B$, la condizione sulla banda del filtro è: $B < B_F < 3B$, con B=674 Hz. Affinché il segnale ricostruito sia esattamente uguale ad $x_a(t)$, il guadagno K_F del filtro deve essere pari a T_s, ossia $K_F = \frac{1}{4B}$, con B=674 Hz.

4. La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ è:

$$Y(f) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{2T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{T}{1 + j2\pi \frac{k}{2T} T} \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right).$$

Il su ospettro di potenza vale quindi:

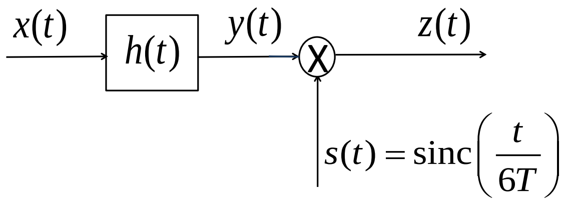
$$G_Y(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \pi^2 k^2} \delta\left(f - \frac{k}{2T}\right).$$

1.16 Esercizio 16

Si consideri il seguente segnale:

$$x(t) = -1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q(t - 3nT) \qquad \text{con} \quad q(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}.$$

dove T è un numero reale positivo. Il segnale $x(t)$ passa attraverso un filtro con risposta all'impulso $h(t) = \frac{1}{3T}\text{sinc}^2\left(\frac{2t}{3T}\right)$, generando il segnale $y(t)$ e successivamente il segnale $z(t)$, come descritto nella seguente figura.



1. Calcolare lo spettro di potenza $G_x(f)$ del segnale $x(t)$.
2. Scrivere l'espressione del segnale $y(t)$.
3. Scrivere l'espressione di $Z(f)$ (trasfomata di Fourier di $z(t)$).
4. Calcolare la potenza e l'energia dei segnali $y(t)$ e $z(t)$.

1.16.1 Svolgimento

1. La trasformata di Fourier di $x(t)$ è pari a:

$$X(f) = -\delta(f) + \frac{1}{3T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{n}{3T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

dove:

$$Q(f) = \frac{2/T}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2}$$

$$Q\left(\frac{n}{3T}\right) = \frac{2/T}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 \frac{n^2}{9T^2}} = \frac{18T}{9 + 4\pi^2 n^2}$$

Sostituendo:

$$X(f) = -\delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6}{9+4\pi^2 n^2}\delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

Raccogliendo i coefficienti che moltiplicano la delta in zero:

$$X(f) = \left(-1 + \frac{2}{3}\right)\delta(f) + \sum_{n\neq 0} \frac{6}{9+4\pi^2 n^2}\delta\left(f - \frac{n}{3T}\right) = -\frac{1}{3}\delta(f) + \sum_{n\neq 0} \frac{6}{9+4\pi^2 n^2}\delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

Lo spettro di potenza vale quindi:

$$G_x(f) = \frac{1}{9}\delta(f) + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{6}{9+4\pi^2 n^2}\right)^2 \delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

2. La funzione di trasferimento $H(f)$ si trova calcolando la trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(t)$:

$$H(f) = \frac{1}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{3}{2}Tf\right)$$

La funzione triangolare $H(f)$ ha supporto $[-\frac{2}{3T}, \frac{2}{3T}]$ e quindi seleziona solo le 3 delta centrali della funzione $X(f)$. Tenendo conto dell'attenuazione del filtraggio tramite la funzione triangolare, la trasformata di Fourier del segnale in uscita dal filtro vale quindi:

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\delta(f) + \frac{1}{4}\frac{6}{9+4\pi^2}\delta\left(f - \frac{1}{3T}\right) + \frac{1}{4}\frac{6}{9+4\pi^2}\delta\left(f + \frac{1}{3T}\right)$$

$$Y(f) = -\frac{1}{6}\delta(f) + \frac{3}{9+4\pi^2}\frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right]$$

La sua antitrasformata vale:

$$y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{9+4\pi^2}\cos\left(2\pi\frac{1}{3T}t\right)$$

3. La trasformata di Fourier di $z(t) = y(t)\cdot s(t)$ è pari a:

$$Z(f) = Y(f) * S(f) = -\frac{1}{6}S(f) + \frac{1}{2}\frac{3}{9+4\pi^2}\left[S\left(f - \frac{1}{3T}\right) + S\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right]$$

con $S(f) = 6T \cdot p_{\frac{1}{6T}}(f)$.

4. Il segnale $y(t)$ è periodico, e quindi a potenza media finita. La sua potenza si calcola come la somma del modulo quadro dei coefficienti delle delta nella sua trasformata di Fourier, ossia:
$$P(y) = \frac{1}{36} + 2\left(\frac{1}{2}\frac{3}{9+4\pi^2}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{9/2}{(9+4\pi^2)^2}$$
Il segnale $z(t)$ è a energia finita e la sua energia si può calcolare come l'integrale del modulo quadro della sua trasformata di Fourier. Poichè le tre repliche di $S(f)$ che compaiono nell'espressione di $Z(f)$ sono separate in frequenza:
$$|Z(f)|^2 = \frac{1}{36}36T^2 p_{\frac{1}{6T}}(f) + \frac{9/4}{(9+4\pi^2)^2}36T^2\left[p_{\frac{1}{6T}}\left(f-\frac{1}{3T}\right) + p_{\frac{1}{6T}}\left(f+\frac{1}{3T}\right)\right]$$
L'energia vale quindi:
$$E(z) = \frac{1}{6T}T^2 + 2\cdot 6T\frac{9/4}{(9+4\pi^2)^2} = \frac{T}{6} + \frac{27T}{(9+4\pi^2)^2}$$

1.17 Esercizio 17

Si consideri l'insieme di segnali $\mathcal{B} = \{\psi_i(t)\},\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= \frac{1}{2}\Pi_4(t-2) \\
\psi_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\Pi_2(t-1) - \Pi_2(t-3)\right) \\
\psi_3(t) &= \frac{1}{2}\left(\Pi_1(t-0.5) - \Pi_2(t-2) + \Pi_1(t-3.5)\right),
\end{aligned}$$

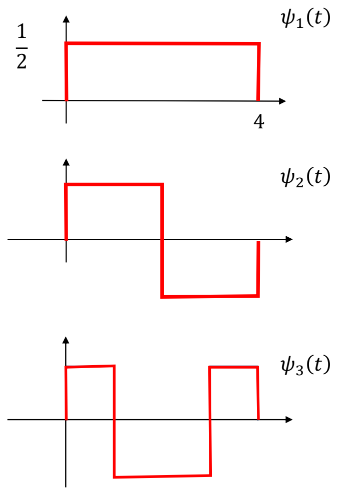
dove $\Pi_B(t)$ è una porta simmetrica di ampiezza unitaria e supporto B, ed il segnale

$$y(t) = \Pi_4(t-2)\cos(\pi t/4).$$

1. Disegnare l'insieme di segnali $\mathcal{B}$ ed il segnale $y(t)$.
2. $\mathcal{B}$ è un insieme di segnali ortonormali?
3. Si approssimi il segnale $y(t)$ con un segnale $\hat{y}(t)$ appartenente all'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$
4. Determinare l'errore quadratico residuo $E = ||y(t) - \hat{y}(t)||^2$
5. Verificare la diseguaglianza di Bessel
6. Verificare che il segnale errore $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ sia ortogonale al segnale approssimante $\hat{y}(t)$

1.17.1 Svolgimento

1. Disegnare l'insieme di segnali $\mathcal{B}$ ed il segnale $y(t)$. Si veda figura sottostante.



2. Bisogna dimostrare che
$$< \psi_i(t), \psi_j(t) >= \delta_{ij}$$
Calcoliamo i prodotti scalari:
$$\begin{aligned}
< \psi_i(t), \psi_i(t) > &= \int_0^4 \psi_i^2(t) = \frac{1}{4}\int_0^4 1dt = 1 \\
< \psi_1(t), \psi_2(t) > &= \int_0^4 \psi_1(t)\psi_2(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 dt - \int_2^4 dt\right) = 0 \\
< \psi_1(t), \psi_3(t) > &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 dt - \int_1^3 dt + \int_3^4 dt\right) = 0 \\
< \psi_2(t), \psi_3(t) > &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 dt - \int_1^2 dt + \int_2^3 dt - \int_3^4 dt\right) = 0
\end{aligned}$$

3. Si approssimi il segnale $y(t)$ con un segnale $\hat{y}(t)$ appartenente all'insieme delle combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$.

   L'approssimazione
$$\hat{y}(t) = \alpha_1\psi_2(t) + \alpha_2\psi_2(t) + \alpha_3\psi_3(t)$$

che minimizza l'errore quadratico medio usa come coefficienti i prodotti scalari:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \int_0^4 y(t)\psi_1(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^4 \cos(\pi t/4)dt = \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}[\sin(\pi t/4)]_0^4 = 0,\\
\alpha_2 &= \int_0^4 y(t)\psi_2(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 \cos(\pi t/4)dt - \int_2^4 \cos(\pi t/4)dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left([\sin(\pi t/4)]_0^2 - [\sin(\pi t/4)]_2^4\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left(2\sin(\pi/2)\right) = \frac{4}{\pi},\\
\alpha_3 &= \int_0^4 y(t)\psi_3(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \cos(\pi t/4)dt - \int_1^3 \cos(\pi t/4)dt + \int_3^4 \cos(\pi t/4)dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left([\sin(\pi t/4)]_0^1 - [\sin(\pi t/4)]_1^3 + [\sin(\pi t/4)]_3^4\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\left(\sin(\pi/4) - \sin(\pi 3/4) + \sin(\pi/4) - \sin(\pi 3/4)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi otteniamo:

$$\hat{y}(t) = \frac{4}{\pi}\psi_2(t) = \frac{2}{\pi}\left(\Pi_2(t-1) - \Pi_2(t-3)\right)$$

4. Determinare l'errore quadratico residuo $E_{\min} = ||y(t) - \hat{y}(t)||^2$. Possiamo calcolare

$$E_Y = ||y(t)||^2 = \int_0^4 \cos^2(\pi t/4)dt = 2$$

e scrivere direttamente:

$$E_{\min} = ||y(t)||^2 - ||\hat{y}(t)||^2 = 2 - \alpha_2^2 = 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 0.3788$$

5. Verificare la diseguaglianza di Bessel. $E_{\min}$ è maggiore di zero, quindi

$$||\hat{y}(t)||^2 \leq ||y(t)||^2$$

6. Verificare che il segnale errore $e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ sia ortogonale al segnale approssimante $\hat{y}(t)$.

Calcolo il prodotto scalare e verifico che sia nullo:

$$\begin{aligned}
< e(t), \hat{y}(t) > &= \int_0^4 \left(\cos(\pi t/4) - \frac{4}{\pi}\psi_2(t)\right)\frac{4}{\pi}\psi_2(t)dt\\
&= \int_0^4 \frac{4}{\pi}\psi_2(t)\cos(\pi t/4) - \frac{16}{\pi^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{\pi}\frac{4}{\pi}\left([\sin(\pi t/4)]_0^2 - [\sin(\pi t/4)]_2^4\right) - \frac{16}{\pi^2}\\
&= \frac{16}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^2} = 0
\end{aligned}$$

2 Esercizi su processi casuali

2.1 Esercizio 1

Si consideri il processo

$$X(t) = \cos(4\pi t + \theta) + N(t),$$

dove $N(t)$ è un processo Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_N(f) = N_0/2$, e θ una variabile casuale.

Sia $Y(t)$ il processo ottenuto passando $X(t)$ attraverso un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = u(t) \cdot \exp(-t).$$

1. Quali condizioni deve soddisfare la densità di probabilità di θ affinché $X(t)$ sia stazionario WSS?

2. Nelle condizioni trovate al punto precedente, calcolare media, valore quadratico medio, e la varianza di $X(t)$

3. Calcolare la funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza di $X(t)$

4. Calcolare la media, il valore quadratico medio e la varianza di $Y(t)$

5. Calcolare la funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza $Y(t)$

6. Calcolare la media del processo $A(t) = X(t)Y(t + 2)$

2.1.1 Svolgimento

1. Scrivo $X(t) = Z(t) + N(t)$. $N(t)$ è stazionario. Se assumo la v.c. θ indipendente da $N(t)$ con $f_\theta(x) = \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(x)$ (uniforme in $[-\pi, \pi]$), allora $Z(t)$ è stazionario WSS (visto a lezione) e indipendente da $N(t)$. Quindi anche $X(t)$ è stazionario WSS.

2. Scrivo caratteristiche statistiche di $Z(t)$ e $N(t)$.

$$\begin{aligned} \mu_Z &= E\{Z(t)\} = 0 \\ \mu_N &= 0 \end{aligned}$$

Funzioni di autocorrelazione, e varianza.

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) \\ R_N(\tau) &= \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \\ \sigma_Z^2 &= R_Z(0) - \mu_Z^2 = \frac{1}{2} \\ \sigma_N^2 &= R_N(0) - \mu_N^2 \to \infty \end{aligned}$$

Siccome $Z(t)$ e $N(t)$ sono indipendenti e a media nulla:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \mu_Z + \mu_N = 0 \\ R_X(\tau) &= R_Z(\tau) + R_N(\tau) = \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \\ \sigma_X^2 &= \sigma_Z^2 + \sigma_N^2 \to \infty \\ S_X(f) &= \mathcal{F}(R_X(\tau)) = \frac{1}{4}\left(\delta(f-2) + \delta(f+2)\right) + \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

3. Vedi sopra.

4. Per un sistema LTI usiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \mu_X H(0) \\ S_Y(f) &= S_X(f)|H(f)|^2 \\ R_Y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}(S_Y(\tau)) \end{aligned}$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento e lo spettro di energia del sistema:

$$\begin{aligned} H(f) &= \mathcal{F}(h(t)) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \\ |H(f)|^2 &= \frac{1}{1 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \mu_X = 0 \\ S_Y(\tau) &= \left(\frac{1}{4}\left(\delta(f-2) + \delta(f+2)\right) + \frac{N_0}{2}\right)\frac{1}{1 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

Per la proprietà di campionamento della delta

$$\begin{aligned} S_Y(\tau) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+(4\pi)^2} \cdot (\delta(f-2) + \delta(f+2)) + \frac{N_0}{2} \frac{1}{1+(2\pi f)^2} \\ R_Y(\tau) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(4\pi)^2} \cdot \cos(4\pi\tau) + \frac{N_0}{4} \cdot \exp(-|\tau|) \\ \sigma_Y^2 &= R_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(4\pi)^2} + \frac{N_0}{4} \end{aligned}$$

5. Vedi sopra.
6. Usiamo la relazione:

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= E\{X(t)Y(t+\tau)\} = R_X(\tau) * h(\tau) = \left(\frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right) * u(\tau)e^{-\tau} = \\ &= |H(2)|\frac{1}{2}\cos(4\pi\tau + \arg(H(2)) + \frac{N_0}{2}u(\tau)e^{-\tau}, \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato la relazione tra sinusoidi all'ingresso e all'uscita di un sistema LTI. Esplicitiamo

$$\begin{aligned} |H(2)| &= \frac{1}{\sqrt{1+(4\pi)^2}} \\ \arg(H(2)) &= -\arctan(4\pi) \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$E\{A(t)\} = R_{XY}(2) = |H(2)|\frac{1}{2}\cos(\arg(H(2)) + \frac{N_0}{2}\mathrm{e}^{-2}.$$

2.2 Esercizio 2

Un rumore gaussiano bianco $N(t)$ con $S_N(f) = N_0/2$ è posto in ingresso ad un sistema LTI la cui risposta all'impulso $h(t)$ è mostrata nella Fig. 20. Sia $Y(t)$ il processo all'uscita del sistema LTI.

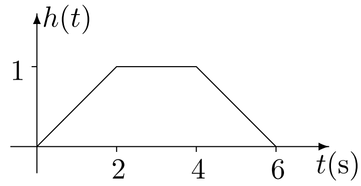


Figura 20: Risposta all'impulso del sistema LTI

1. Il processo di uscita $Y(t)$ è stazionario?
2. Se $Y(t)$ è stazionario, calcolare il suo spettro di potenza.
3. Calcolare la varianza $\sigma_Y^2(t)$ ed il valor medio $\mu_Y(t)$ del processo di uscita.
4. Calcolare il coefficiente di correlazione tra $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$, con $t_1 = 10$ s e $t_2 = 12$ s.

2.2.1 Svolgimento

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario, in quanto si ottiene filtrando un rumore bianco, che è un processo stazionario. In particolare, $N(t)$ è stazionario in senso stretto, e $Y(t)$ è stazionario in senso stretto. (nota: per l'esistenza dello spettro di potenza di cui al punto 2 è sufficiente che $Y(t)$ sia stazionario in senso lato)

2. Lo spettro di potenza $S_Y(f)$ di $Y(t)$ è

$$S_Y(f) = S_N(f)|H(f)|^2$$

dove $H(f)$ è la funzione di trasferimento del sistema, cioè la trasformata di Fourier di $h(t)$. Occorre dunque calcolare

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\},$$

e ci sono (almeno) due metodi, riportati nel seguito e totalmente equivalenti.

(a) Il segnale $h(t)$ **può** essere visto come il risultato della convoluzione di due segnali rettangolari $s_1(t)$ (di valore $a_1 \neq 0$ tra 0 e T_1, di valore 0 per $t \neq [0, T_1]$) e $s_2(t)$ (di valore $a_2 \neq 0$ tra 0 e T_2, di valore 0 per $t \neq [0, T_2]$). Si supponga che sia $T_2 > T_1$. La convoluzione $s_1(t) * s_2(t)$ dà infatti come risultato un segnale a forma di trapezio, con base maggiore di durata $T_1 + T_2$, base minore $T_2 - T_1$ e valore massimo $a_1 a_2 T_1$ (risultato visto a lezione/esercitazione). Imponendo $T_1 + T_2 = 3T$, $T_2 - T_1 = T$, si ottiene $T_1 = T$, $T_2 = 2T$; imponendo $a_1 a_2 T = 1$, si ottiene $a_1 a_2 = 1/T$ e si può scegliere ad esempio $a_1 = 1$ e $a_2 = 1/T$. Si noti che $s_1(t) = p_T(t - T/2)$ e $s_2(t) = p_{2T}(t - T)/T$. Dalle tavole delle trasformate di Fourier si ha

$$S_1(f) = e^{-j\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f}$$

$$S_2(f) = e^{-j2\pi fT} \frac{\sin(\pi f2T)}{\pi fT}$$

e quindi

$$H(f) = S_1(f)S_2(f) = e^{-j3\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \frac{\sin(\pi f2T)}{\pi fT} = e^{-j3\pi fT} 2T \text{sinc}(fT)\text{sinc}(2fT)$$

e

$$|H(f)|^2 = 4T^2 \text{sinc}^2(fT)\text{sinc}^2(2fT)$$

Si ottiene dunque

$$S_Y(f) = S_N(f)|H(f)|^2 = \frac{2N_0}{T} \text{sinc}^2(fT)\text{sinc}^2(2fT)$$

(b) In alternativa, $h(t)$ può essere visto come la differenza di due segnali triangolari $p_1(t)$ e $p_2(t)$, con $p_1(t)$ di base $3T$ e altezza 1.5 e $p_2(t)$ di base T e altezza 0.5. Usando la notazione delle tavole delle trasformate,

$$p_1(t) = 1.5\text{tri}\left(\frac{t}{1.5T}\right) * \delta(t - 1.5T)$$

$$p_2(t) = 0.5\text{tri}\left(\frac{t}{0.5T}\right) * \delta(t - 1.5T)$$

$$h(t) = p_1(t) - p_2(t)$$

$$H(f) = P_1(f) - P_2(f) = e^{-j3\pi fT} \left[1.5^2 T \text{sinc}^2(1.5fT) - 0.5^2 T \text{sinc}^2(0.5fT)\right]$$

$$S_Y(f) = S_N(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \left[1.5^2 T \text{sinc}^2(1.5fT) - 0.5^2 T \text{sinc}^2(0.5fT)\right]^2$$

3. Il processo $Y(t)$ è stazionario e quindi la varianza ed il valor medio non dipendono dal tempo. Si ha

$$\mu_Y(t) = \mu_Y = \mu_N H(0) = 0, \quad \text{perché } \mu_N = 0$$

$$\sigma_Y^2(t) = \sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} = \int S_Y(f)df = \frac{N_0}{2}\int |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int |h(t)|^2 dt$$

(nell'ultimo passaggio si è usata l'uguaglianza di Parseval). In questo caso è sicuramente più facile calcolare l'integrale nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza. In particolare, si ha

$$\int_0^{3T} |h(t)|^2 dt = 2\int_0^T |h(t)|^2 dt + \int_T^{2T} |h(t)|^2 dt = 2\int \left(\frac{t}{T}\right)^2 dt + 1^2 T = \frac{2}{T^2}\frac{T^3}{3} + T = \frac{5}{3}T$$

e quindi

$$\sigma_Y^2(t) = \frac{N_0}{2}\frac{5}{3}T = \frac{5N_0T}{6}$$

4. Il coefficiente di correlazione è definito come

$$\rho_{Y(t_1),Y(t_2)} = \frac{E\{[Y(t_1) - \mu_Y(t_1)][Y(t_2) - \mu_Y(t_2)]\}}{\sigma_Y(t_1)\sigma_Y(t_2)}$$

che si riduce a

$$\rho_{Y(t_1),Y(t_2)} = \frac{E\{Y(t_1)Y(t_2)\}}{\sigma_Y^2} = \frac{R_Y(t_2 - t_1)}{\sigma_Y^2}$$

dove $R_Y(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $Y(t)$, che può essere calcolata o come antitrasformata di $S_Y(f)$ (ma chiaramente questo calcolo è difficile) o come

$$R_Y(\tau) = R_N(\tau) * R_h(\tau)$$

dove $R_N(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $N(t)$ e $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $h(t)$:

$$R_h(\tau) = \int h(t)h(t+\tau)dt$$

Riassumendo,

$$\rho_{Y(t_1),Y(t_2)} = \left.\frac{R_Y(\tau)}{\sigma_Y^2}\right|_{\tau=t_2-t_1=T} = \left.\frac{N_0}{2\sigma_Y^2}\delta(\tau) * R_h(\tau)\right|_{\tau=T} = \left.\frac{N_0}{2\sigma_Y^2}R_h(\tau)\right|_{\tau=T} = \frac{N_0}{2\sigma_Y^2}R_h(T)$$

$$\rho_{Y(t_1),Y(t_2)} = \frac{N_0}{2\sigma_Y^2}\int h(t)h(t+T)dt$$

Osservando la Fig. 21, si nota che l'integrale da calcolare è banale e vale T (triangolo di base $2T$ e altezza 1):

$$\rho_{Y(t_1),Y(t_2)} = \frac{N_0}{2\sigma_Y^2}\int h(t)h(t+T)dt = \frac{N_0}{2\sigma_Y^2}T$$

Sostituendo il valore di σ_Y^2, si ottiene il valore finale:

$$\rho_{Y(t_1),Y(t_2)} = \frac{N_0T}{2\sigma_Y^2} = \frac{6N_0T}{10N_0T} = \frac{3}{5}$$

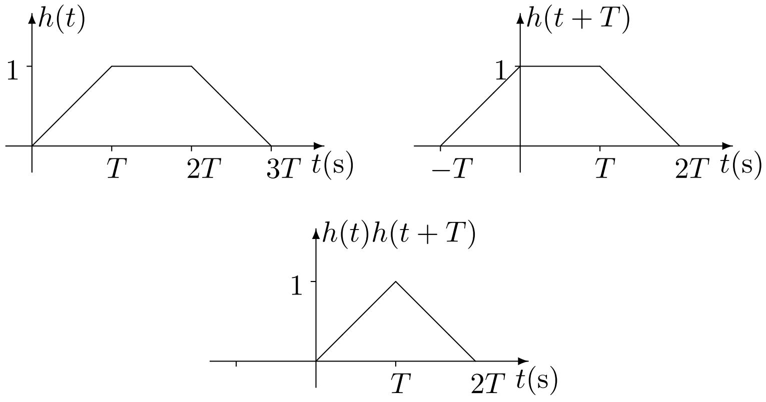


Figura 21: Segnali $h(t)$, $h(t+T)$ e $h(t)h(t+T)$.

2.3 Esercizio 3

Si consideri un rumore gaussiano bianco $N(t)$, con densità spettrale di potenza $G_N(f) = N_0/2$, posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ indicata nella figura 22.

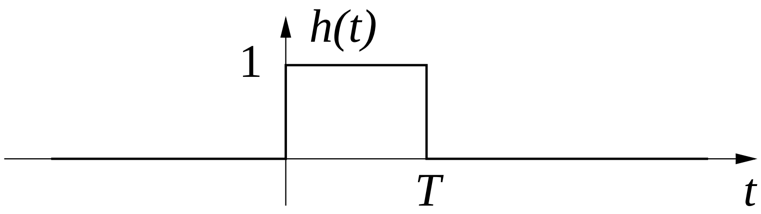


Figura 22: Risposta all'impulso

Si indichi con $Y(t)$ il processo in uscita. Si considerino le due variabili casuali

$$Z = \alpha Y(t_1) + \beta Y(t_2)$$

$$W = \alpha Y(t_1) - \beta Y(t_2)$$

con $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

1. Si calcolino le varianze σ_Z^2 e σ_W^2 di Z e W.
2. Qual è il valore massimo di σ_Z^2? Per quali valori di t_1 e t_2 σ_Z^2 è massima?
3. Qual è il valore massimo di σ_W^2? Per quali valori di t_1 e t_2 σ_W^2 è massima?

2.3.1 Svolgimento

Il processo di uscita $Y(t)$ è stazionario perchè lo è quello di ingresso $N(t)$ ed il sistema è LTI.

La media di $Y(t)$ è nulla perchè il rumore bianco ha media nulla ($\mu_Y = \mu_N H(0)$).

Calcoliamo ora il valore quadratico medio di Z, che coincide con la sua varianza:

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 = E\{Z^2\} &= E\{\alpha^2 Y^2(t_1)\} + E\{\beta^2 Y^2(t_2)\} + 2\alpha\beta E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ &= (\alpha^2+\beta^2)R_Y(0) + 2\alpha\beta R_Y(t_2-t_1),\end{aligned}$$

dove R_Y è la funzione di autocorrelazione Y, che si può calcolare come segue:

$$R_Y(\tau) = R_N(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}R_h(\tau),$$

perchè il rumore è bianco ($R_N(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$).

La funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso è una forma d'onda triangolare di supporto $[-T, T]$:

$$R_h(\tau) \triangleq \int h(t)h(t+\tau)dt = T\Lambda_T(\tau).$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= \frac{TN_0}{2}\big((\alpha^2+\beta^2)\Lambda_T(0) + 2\alpha\beta\Lambda_T(t_2-t_1)\big) \\ &= \frac{TN_0}{2}\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\Lambda_T(t_2-t_1)\right).\end{aligned}$$

Il valore della differenza $t_1 - t_2$ cha massimizza la varianza dipende dal segno del prodotto $\alpha\beta$.

Se $\alpha\beta$ è positivo bisogna trovare il valore che **massimizza** $\Lambda_T(t_2-t_1)$, corrispondente a $t_1 = t_2$ per il quale $\Lambda_T(t_2-t_1) = 1$.

$$\sigma_Z^2 = \frac{TN_0}{2}\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right) = \frac{TN_0}{2}(\alpha+\beta)^2$$

Se $\alpha\beta$ è negativo bisogna trovare il valore che **minimizza** $\Lambda_T(t_2-t_1)$, corrispondente a ogni coppia $(t_1,t_2) : |t_1-t_2| \geq T$ per il quale $\Lambda_T(t_2-t_1) = 0$.

$$\sigma_Z^2 = \frac{TN_0}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right).$$

Si noti inoltre che la variabile W si ottiene cambiando segno a β.

In questo caso abbiamo $\alpha\beta = 2\cdot 3 = 6 > 0$.

$$\sigma_Z^{2,\max} = \frac{TN_0}{2}(\alpha+\beta)^2 = \frac{TN_0}{2}\cdot 25 \ \ \forall t_1 = t_2.$$

Per massimizzare la varianza di W, cambiamo il segno a β, e quindi al prodotto $\alpha\beta$, ottenendo la soluzione opposta:

$$\sigma_W^{2,\max} = \frac{TN_0}{2}\left(\alpha^2+(-\beta)^2\right) = \frac{TN_0}{2}\cdot 13 \ \ \forall |t_1-t_2| \geq T.$$

2.4 Esercizio 4

Si consideri il sistema mostrato in figura 23, dove $x(t) = -1$ (segnale costante), $n(t)$ è un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_n(f) = N_0/2$, $h(t)$ è un impulso rettangolare causale di durata T_b e ampiezza massima unitaria. Gli istanti di lettura t_k sono del tipo $t_k = kT_b$. Il decisore D produce in uscita una variabile casuale β_k con la regola: $\beta_k = 1$ quando la variabile in ingresso al decisore Z_k è positiva, $\beta_k = -1$ quando la variabile in ingresso al decisore è negativa o nulla.

1. Scrivere l'espressione della media, del valore quadratico medio, e della varianza dei campioni del processo $z(t)$
2. Scrivere l'espressione della funzione di autocorrelazione del processo $z(t)$
3. Scrivere l'espressione della probabilità che sia $\beta_k = 1$, cioè $P(\beta_k = 1)$
4. Scrivere l'espressione della probabilità congiunta $P(\beta_k = 1, \beta_{k+1} = 1)$

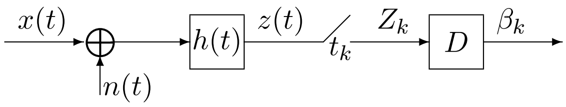


Figura 23: Sistema per il problema 4

2.4.1 Svolgimento

1. Il segnale all'uscita del filtro è:

$$z(t) = x(t) * h(t) + n(t) * h(t),$$

ed è costituito da un segnale deterministico $w(t) = x(t) * h(t)$ e da un processo casuale filtrato $m(t) = n(t) * h(t)$. Per quanto riguarda $w(t)$, si ha

$$w(t) = x(t) * h(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int h(\tau)[-1]d\tau = -T_b,$$

in quanto $x(t)$ vale sempre -1, e quindi anche $x(t-\tau) = -1$ per ogni τ. Il processo causale $m(t)$ è stazionario, ha media nulla, e ha spettro di potenza $|H(f)|^2 N_0/2$; la varianza di $m(t)$ si ottiene come

$$\sigma_m^2 = \int \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int |h(t)|^2 dt = \frac{N_0 T_b}{2}.$$

Pertanto $z(t) = -T_b + m(t)$ è un processo casuale Gaussiano che ha valor medio

$$\mu_z = -T_b,$$

varianza

$$\sigma_z^2 = \sigma_m^2 = \frac{N_0 T_b}{2}$$

e valor quadratico medio

$$E\{z^2(t)\} = \sigma_z^2 + \mu_z^2 = \frac{N_0 T_b}{2} + T_b^2$$

2. La funzione di autocorrelazione di $z(t)$ è

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{[-T_b + m(t)][-T_b + m(t+\tau)]\} \\ &= T_b^2 - T_b E\{m(t)\} - T_b E\{m(t+\tau)\} + E\{m(t)m(t+\tau)\} \\ &= T_b^2 + R_m(\tau) \end{aligned}$$

(la media di $m(t) = n(t) * h(t)$ è nulla). La funzione di autocorrelazione di $m(t)$, $R_m(\tau)$, è

$$R_m(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}R_h(\tau)$$

dove $\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione del processo Gaussiano bianco $n(t)$ e $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $h(t)$; quest'ultima è stata calcolata a lezione ed è una funzione triangolare, nulla per $|\tau| \geq T_b$ e con valore massimo in $\tau = 0$, pari all'energia di $h(t)$, cioè T_b:

$$R_h(\tau) = T_b \mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{T_b}\right)$$

Si ha dunque

$$R_z(\tau) = T_b^2 + \frac{N_0 T_b}{2}\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{T_b}\right)$$

3. L'uscita β_k vale 1 se l'ingresso Z_k è positivo, ma Z_k è un campione del processo $z(t)$ ed è quindi una variabile aleatoria Gaussiana con media $\mu_z = -T_b$ e varianza $\sigma_z^2 = \frac{N_0 T_b}{2}$. Si ha dunque
$$P(\beta_k = 1) = P(Z_k > 0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{T_b}{\sqrt{2\sigma_z^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{T_b}{N_0}}$$

4. Per calcolare la probabilità congiunta che sia $\beta_k = 1$ e $\beta_{k+1} = 1$, occorre prima stabilire se le due variabili aleatorie sono statisticamente indipendenti o no. Visto che β_k è funzione solo di Z_k (il decisore D non introduce memoria), allora è sufficiente stabilire se le due variabili aleatorie Gaussiane Z_k e Z_{k+1} sono statisticamente indipendenti e ciò si verifica se il coefficiente di correlazione tra Z_k e Z_{k+1}
$$\rho_{Z_k, Z_{k+1}} = \frac{E\{[Z_k - \mu_{Z_k}][Z_{k+1} - \mu_{Z_{k+1}}]\}}{\sigma_{Z_k}\sigma_{Z_{k+1}}}$$
è nullo. Poiché Z_k e Z_{k+1} sono campioni del processo causale <u>stazionario</u> $z(t)$, si ha
$$\mu_{Z_k} = \mu_{Z_{k+1}} = -T_b, \quad \sigma_{Z_k} = \sigma_{Z_{k+1}} = \sqrt{\frac{N_0 T_b}{2}}$$
e quindi
$$\begin{aligned} E\{[Z_k - \mu_{Z_k}][Z_{k+1} - \mu_{Z_{k+1}}]\} &= E\{[z(kT_b) + T_b][z(kT_b + T_b) + T_b]\} \\ &= E\{z(kT_b)z(kT_b + T_b)\} + T_b E\{z(kT_b)\} + T_b E\{z(kT_b + T_b)\} + T_b^2 \\ &= R_z(T_b) - T_b^2 = T_b^2 + \frac{N_0 T_b}{2} \operatorname{tri}\left(\frac{T_b}{T_b}\right) - T_b^2 = 0 \end{aligned}$$
(infatti $\operatorname{tri}(\tau/T_b)$ è nullo per $\tau = T_b$), e ciò vuol dire che $\rho_{Z_k, Z_{k+1}} = 0$ e quindi che Z_k e Z_{k+1} sono effettivamente indipendenti dal punto di vista statistico.

Più semplicemente, si ha $Z_k - \mu_{Z_k} = z(kT_b) + T_b = [m(kT_b) - T_b] + T_b = m(kT_b)$, e $m(kT_b)$ è una variabile aleatoria Gaussiana con media nulla e varianza $N_0 T_b/2$. Pertanto
$$\rho_{Z_k, Z_{k+1}} = \frac{2E\{m(kT_b)m(kT_b + T_b)\}}{N_0 T_b} = \frac{2}{N_0 T_b} R_m(T_b) = 0$$
Poichè abbiamo dimostrato che il coefficiente di correlazione è nullo, allora Z_k e Z_{k+1} sono statisticamente indipendenti e ciò vuole dire che anche β_k e β_{k+1} sono statisticamente indipendenti. Come risultato si ha
$$P(\beta_k = 1, \beta_{k+1} = 1) = (\beta_k = 1)(\beta_{k+1} = 1) = \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{T_b}{N_0}}\right]^2$$

2.5 Esercizio 5

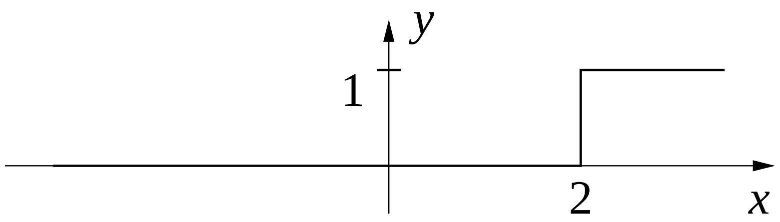


Figura 24: Sistema non lineare

Un processo casuale $x(t)$ WSS ha una densità di probabilità del primo ordine uniforme simmetrica e varianza σ_x^2. Il processo è posto all'ingresso del sistema non lineare indicato nella Figura 24, producendo in uscita il processo $y(t)$. Caratterizzare statisticamente il processo $y(t)$, in funzione della varianza di $x(t)$.

2.5.1 Svolgimento

Il sistema è **non lineare** e **senza memoria**. Dobbiamo caratterizzare la statistica del primo ordine del processo di uscita $y(t)$, $f_y(z)$.

La distribuzione di $x(t)$ (uniforme e simmetrica in $[-A, A]$) è $f_x(z) = \Pi_{2A}(z)\frac{1}{2A}$.

Il valore medio μ_x è nullo e la varianza coincide con il valore quadratico medio:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_x(z)dz = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} z^2 dx = \frac{2}{2A}\frac{A^3}{3} = \frac{A^2}{3} \rightarrow A = \sqrt{3\sigma_x^2}$$

y assume il valore 1 se $x \geq 2$, altrimenti vale 0. La distribuzione è dunque:

$$f_y(z) = P(x \geq 2)\delta(z-1) + (1 - P(x \geq 2))\delta(z).$$

Rimane da calcolare $P(x \geq 2)$. Questa è diversa da zero solo se $A > 2 \rightarrow \sigma_x^2 \geq 4/3$. In questo caso:

$$P(x \geq 2) = \frac{1}{2A}\int_{2}^{A} dz = \frac{A-2}{2A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3\sigma_x^2}}.$$

Volendo si possono calcolare valor medio e varianza di questa distribuzione.

$$\begin{aligned}
\mu_y &= 1 \cdot P(y=1) + 0 \cdot P(y=0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3\sigma_x^2}}, \\
\sigma_y^2 &= 1^2 \cdot P(y=1) + 0^2 \cdot P(y=0) - \mu_y^2 = \mu_y - \mu_y^2 = \mu_y(1-\mu_y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\sigma_x^2}.
\end{aligned}$$

2.6 Esercizio 6

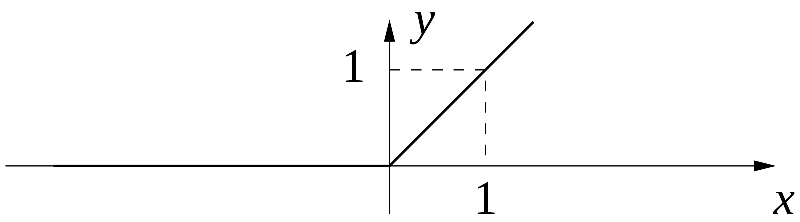


Figura 25: Sistema non lineare

Un processo casuale $x(t)$ WSS ha una densità di probabilità del primo ordine uniforme simmetrica e varianza σ_x^2. Il processo è posto all'ingresso del sistema non lineare indicato in Figura 25, producendo in uscita il processo $y(t)$. Caratterizzare statisticamente il processo $y(t)$, in funzione della varianza di $x(t)$

2.6.1 Svolgimento

Il sistema è **non lineare** e **senza memoria**. Dobbiamo caratterizzare la statistica del primo ordine del processo di uscita $y(t)$, $f_y(z)$.

La distribuzione di $x(t)$ (uniforme e simmetrica in $[-A, A]$) è $f_x(z) = \Pi_{2A}(z)\frac{1}{2A}$.

Il valore medio μ_x è nullo e la varianza coincide con il valore quadratico medio:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_x(z) dz = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} z^2 dx = \frac{2}{2A}\frac{A^3}{3} = \frac{A^2}{3} \to A = \sqrt{3\sigma_x^2}$$

y è uguale a x se $x \geq 0$, altrimenti vale 0. Dunque:

$$f_y(z) = f_y(z|x \leq 0)P(x \leq 0) + f_y(z|x > 0)P(x > 0) = \frac{1}{2}\delta(z) + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\Pi_A\left(z - \frac{A}{2}\right),$$

una delta nell'origine più una distribuzione uniforme in $[0, A]$.

Volendo si possono calcolare valor medio e varianza di questa distribuzione:

$$\begin{aligned}
\mu_y &= \int z f_y(z) = \frac{1}{2A}\int_0^A z dz = \frac{1}{2A}\frac{A^2}{2} = \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{3\sigma_x^2}}{4}, \\
\sigma_y^2 &= \int z^2 f_y(z) - \mu_y^2 = \frac{1}{2A}\frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{16} = \frac{10}{96}A^2 = \frac{5}{16}\sigma_x^2.
\end{aligned}$$

2.7 Esercizio 7

Sia $x(t)$ un processo casuale gaussiano stazionario con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$. Si consideri il processo $y(t) = x(t) + x(t-T) + x(t-2T)$ dove $T > 0$ è un ritardo fisso.

Si calcoli:

1. media, varianza e statistica del primo ordine del processo $y(t)$
2. l'autocorrelazione e $E\{y(t)y(t-T/2)\}$.

2.7.1 Svolgimento

1. Per quanto riguarda la media di $y(t)$:

$$\mu_y = E\{y(t)\} = E\{x(t) + x(t-T) + x(t-2T)\} = 3\mu_x$$

dove μ_x è la media di $x(t)$ (indipendente dal tempo visto che il processo è stazionario). Non viene detto esplicitamente quanto valga μ_x, ma lo spettro di potenza di $x(t)$ (cioè la trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$) non contiene delta di Dirac a frequenza 0, e ciò vuol dire che il processo è a media nulla. In alternativa, il processo è a media nulla perché

$$\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = 0$$

Si ricava dunque $\mu_y = 0$.

Per quanto riguarda la varianza di $y(t)$ (uguale al valor quadratico medio essendo $\mu_y = 0$), si ha

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= E\{y^2(t)\} = E\{[x(t) + x(t-T) + x(t-2T)]^2\} \\
&= E\{[x^2(t) + x^2(t-T) + x^2(t-2T) + 2x(t)x(t-T) + 2x(t)x(t-2T) + 2x(t-T)x(t-2T)]\} \\
&= R_x(0) + R_x(0) + R_x(0) + 2R_x(t) + 2R_x(2T) + 2R_x(t) \\
&= 3R_x(0) + 4R_x(T) + 2R_x(2T) \\
&= 3 + 4e^{-T} + 2e^{-2T}
\end{aligned}$$

La statistica del primo ordine di $y(t)$ è la densità di probabilità della variabile aleatoria $y(t_0)$ che si ottiene campionando il processo $y(t)$ al tempo t_0. Essendo $y(t)$ una trasformazione lineare di $x(t)$, ed essendo $x(t)$ un processo gaussiano, allora anche $y(t)$ è un processo gaussiano, di cui sono state calcolate media e varianza. La statistica richiesta è dunque:

$$f_x(u;t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_y^2}}$$

(indipendente dall'istante t_0).

2. La funzione di autocorrelazione di $y(t)$ può essere calcolata nel dominio del tempo o nel dominio della frequenza. Di seguito vengo riportati tre metodi, ovviamente è sufficiente utilizzare uno solo dei tre metodi proposti.

Nel dominio del tempo, metodo diretto:

$$\begin{aligned}
R_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} \\
&= E\{[x(t) + x(t-T) + x(t-2T)][x(t+\tau) + x(t-T+\tau) + x(t-2T+\tau)]\} \\
&= E\{x(t)x(t+\tau) + x(t)x(t-T+\tau) + x(t)x(t-2T+\tau) + x(t-T)x(t+\tau)\} \\
&+ E\{x(t-T)x(t-T+\tau) + x(t-T)x(t-2T+\tau) + x(t-2T)x(t+\tau)\} \\
&+ E\{x(t-2T)x(t-T+\tau) + x(t-2T)x(\tau)\} \\
&= R_x(\tau) + R_x(\tau-T) + R_x(\tau-2T) + R_x(\tau+T) + R_x(\tau) \\
&+ R_x(\tau-T) + R_x(\tau+2T) + R_x(\tau-T) + R_x(\tau) \\
&= 3R_x(\tau) + 2R_x(\tau-T) + 2R_x(\tau+T) + R_x(\tau-2T) + R_x(\tau+2T)
\end{aligned}$$

In alternativa, sempre **nel dominio del tempo**, si può ottenere $R_y(\tau)$ utilizzando la risposta all'impulso $h(t)$ del sistema LTI che ha come ingresso $x(t)$ e come uscita $y(t)$:

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T).$$

Si usa poi la formula $R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$. Per quanto riguarda $R_h(\tau)$, si ha (si ricordi che $\delta(t) = \delta(-t)$):

$$\begin{aligned}
R_h(\tau) &= h(\tau) * h(-\tau) \\
&= [\delta(\tau) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau - 2T)] * [\delta(-\tau) + \delta(-\tau - T) + \delta(-\tau - 2T)] \\
&= [\delta(\tau) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau - 2T)] * [\delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau + 2T)] \\
&= \delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau + 2T) + \delta(\tau - T) * [\delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau + 2T)] \\
&+ \delta(\tau - 2T) * [\delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau + 2T)] \\
&= \delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau + 2T) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau) + \delta(\tau + T) + \delta(\tau - 2T) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau)] \\
&+ 3\delta(\tau) + 2\delta(\tau - T) + 2\delta(\tau + T) + \delta(\tau - 2T) + \delta(\tau + 2T)
\end{aligned}$$

Ovviamente $R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$ fornisce lo stesso risultato ottenuto con il metodo diretto.

In alternativa si può lavorare **nel dominio della frequenza**:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

dove

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = 1 + e^{-j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
|H(f)|^2 &= H(f)H^*(f) = \left(1 + e^{-j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT}\right)\left(1 + e^{j2\pi fT} + e^{j4\pi fT}\right) \\
&= 1 + e^{-j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT} + e^{j2\pi fT} + 1 + e^{-j2\pi fT} + e^{j4\pi fT} + e^{j2\pi fT} + 1 \\
&= 3 + 2e^{-j2\pi fT} + 2e^{j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT} + e^{j4\pi fT}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
S_y(f) &= S_x(f)|H(f)|^2 \\
&= 3S_x(f) + 2S_x(f)e^{-j2\pi fT} + 2S_x(f)e^{j2\pi fT} + S_x(f)e^{-j4\pi fT} + S_x(f)e^{j4\pi fT}
\end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene nuovamente

$$R_y(\tau) = 3R_x(\tau) + 2R_x(\tau - T) + 2R_x(\tau + T) + R_x(\tau - 2T) + R_x(\tau + 2T)$$

Verifica dei risultati ottenuti: deve risultare $R_y(0) = \sigma_y^2$; si ottiene

$$R_y(0) = 3R_x(0) + 2R_x(-T) + 2R_x(T) + R_x(-2T) + R_x(2T) = 3R_x(0) + 4R_x(T) + 2R_x(2T)$$

pari a quanto calcolato al punto 1.

Per quanto riguarda l'ultima domanda, la media richiesta $E\{y(t)y(t-T/2)\}$ è pari a $R_y(T/2)$:

$$\begin{aligned}
E\{y(t)y(t - T/2)\} &= R_y(T/2) = 3R_x(T/2) + 2R_x(-T/2) + 2R_x(3T/2) + R_x(-3T/2) + R_x(5T/2) \\
&= 5R_x(T/2) + 3R_x(3T/2) + R_x(5T/2)
\end{aligned}$$

2.8 Esercizio 8

Un processo casuale $x(t)$ WSS con $R_x(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|}$, è posto in ingresso ad un sistema LTI con $h(t) = \mathrm{e}^{-t/T}u(t)$. Sia $y(t)$ l'uscita del sistema LTI. Quanto vale la il valore quadratico medio di $y(7T)$?

2.8.1 Svolgimento

Il processo è stazionario, quindi il suo valore quadratico medio non dipende dall'istante di tempo e coincide con la funzione di autocorrelazione calcolata nell'origine. Il valore quadratico medio è

$$E\{y^2(7T)\} = R_y(0) = |R_x(\tau) * R_h(\tau)|_{\tau=0}$$

Per $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} R_h(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t/T} u(t) \mathrm{e}^{-(t-\tau)/T} u(t-\tau) dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} \mathrm{e}^{-t/T} \mathrm{e}^{-(t-\tau)/T} dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2t-\tau)/T} dt \\ &= \frac{T}{2} \mathrm{e}^{-\tau/T} \end{aligned}$$

E quindi sfruttando la simmetria

$$R_h(\tau) \quad = \quad \frac{T}{2} \mathrm{e}^{-|\tau|/T}$$

Calcolo la convoluzione nell'origine

$$\begin{aligned} |R_x(\tau) * R_h(\tau)|_{\tau=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) R_h(-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|\tau|} \frac{T}{2} \mathrm{e}^{-|\tau|/T} d\tau \\ &= 2\frac{T}{2} \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau} \mathrm{e}^{-\tau/T} d\tau \\ &= T \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau(1+1/T)} d\tau \\ &= -\frac{T}{1+1/T}[0-1] = \frac{T^2}{T+1} \end{aligned}$$

La risoluzione nel dominio della frequenza è più laboriosa. Sia $G_y(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$ lo spettro di potenza di $x(t)$; lo spettro di potenza di $y(t)$ è $G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2$.

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{\frac{1}{T^2} + (2\pi f)^2}$$

$$G_x(f) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$$

$$G_y(f) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2} \ \frac{1}{\frac{1}{T^2} + (2\pi f)^2}$$

$$\begin{aligned}
E\{y^2(7T)\} &= R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)\, df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+(2\pi f)^2}\ \frac{1}{\frac{1}{T^2}+(2\pi f)^2}\, df \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \frac{1}{\frac{1}{T^2}+x^2}\, dx
\end{aligned}$$

La funzione integranda può essere riscritta in questo modo (fratti semplici):

$$\frac{1}{(1+x^2)\left(\frac{1}{T^2}+x^2\right)} = \frac{A}{1+x^2} + \frac{B}{\frac{1}{T^2}+x^2} = \frac{A\left(\frac{1}{T^2}+x^2\right)+B(1+x^2)}{(1+x^2)\left(\frac{1}{T^2}+x^2\right)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A/T^2+B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-A \\ A(1/T^2-1)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{T^2}{1-T^2} \\ B=-\frac{T^2}{1-T^2} \end{cases}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
E\{y^2(7T)\} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{1+x^2} + \frac{B}{\frac{1}{T^2}+x^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[A\tan^{-1}(x) + BT\tan^{-1}(Tx)\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= A+BT = \frac{T^2}{1-T^2} - T\frac{T^2}{1-T^2} = \frac{T^2}{1-T^2}[1-T] = \frac{T^2}{1+T}
\end{aligned}$$

2.9 Esercizio 9

Si consideri un insieme di processi casuali $X_i(t)$ stazionari, a media nulla, a varianza unitaria e statisticamente indipendenti. Si costruisca il processo

$$Y(t) = \sum_{i=-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\alpha|i|} X_i(t - iT),$$

dove α è una costante positiva. Calcolare la varianza di $Y(t)$.

2.9.1 Svolgimento

Essendo la combinazione lineare di processi WSS il processo è anch'esso WSS.

$$
\begin{aligned}
E\{Y^2(t)\} &= E\left\{\sum_{i=-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\alpha|i|} X_i(t-iT) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|j|} X_j(t-jT)\right\} \\
&= \sum_{i=-1}^{+1}\sum_{j=-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\alpha|i|}\mathrm{e}^{-\alpha|j|} E\left\{X_i(t-iT)X_j(t-jT)\right\} \\
&= \sum_{i=-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\alpha|i|}\mathrm{e}^{-\alpha|i|} E\left\{X_i^2(t-iT)\right\} \\
&= \sum_{i=-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\alpha 2|i|} \\
&= 1+\mathrm{e}^{-2\alpha}+\mathrm{e}^{-2\alpha} = 1+2\mathrm{e}^{-2\alpha}
\end{aligned}
$$

2.10 Esercizio 10

Si consideri un processo casuale $X(t)$ WSS a media nulla e con autocorrelazione $R_X(\tau) = A[1 - |\tau|/(4T)]$ per $|\tau| < 4T$ e nulla altrove. Si ottenga da esso il processo campionato e mantenuto $Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} X(iT)h(t - iT)$, dove $h(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria non nullo nell'intervallo $[0, T]$.

Calcolare $E\{Y(T/4)Y(1.5T)\}$.

2.10.1 Svolgimento

$$
\begin{aligned}
E\{Y(T/4)Y(3T/2)\} &= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} X(iT)h(T/4-iT)\sum_{j=-\infty}^{+\infty} X(jT)h(3T/2-jT)\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} X(iT)h(T/4-iT)\sum_{j=-\infty}^{+\infty} X((j+1)T)h(3T/2-jT-T)\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} X(iT)h(T/4-iT)\sum_{j=-\infty}^{+\infty} X((j+1)T)h(T/2-jT)\right\} \\
&= E\left\{X(0)h(T/4)X((1)T)h(T/2)\right\} \\
&= E\left\{X(0)X(T)\right\} \\
&= R_X(T) \\
&= A[1-|T|/(3T)] = 2/3A
\end{aligned}
$$

1. Definizione $R_Y(\tau) = E\left\{Y(t)Y(t+\tau)\right\}$
2. Cambio di variabile sommatoria $j \to j+1$
3. Passaggio algebrico
4. $h(t)$ è diverso da zero solo in $[0,T]$. Scompaiono $i,j \neq 0$
5. Definizione $h(T/4) = h(T/2) = 1$
6. Definizione funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = E\left\{X(t)X(t+\tau)\right\}$

2.11 Esercizio 11

Un processo casuale $N(t)$ gaussiano con densità spettrale di potenza $S_N(f) = N_0/2$ è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = u(t)\mathrm{e}^{-at}$ con a reale e positivo. Si indichi con $X(t)$ il processo in uscita. Si consideri anche il processo $Y(t) = X(t) \cdot h(t)$.

1. $X(t)$ è stazionario (WSS)? Si calcoli la media e la varianza di $X(t)$
2. Si calcoli la funzione di autocorrelazione ed eventualmente lo spettro di potenza.
3. $Y(t)$ è stazionario (WSS)? Si calcoli la media e la varianza di $Y(t)$
4. Si calcoli la funzione di autocorrelazione ed eventualmente lo spettro di potenza di $Y(t)$.

2.11.1 Svolgimento

Punto 1 e 2

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_N(f)|H(f)|^2\} \\
&= \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau) \\
&= \frac{N_0}{2}R_h(\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \frac{N_0}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\left|\frac{1}{a+j2\pi f}\right|^2\right\} \\
&= \frac{N_0}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2a}\left|\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}\right|\right\} \\
&= \frac{N_0}{4a}\exp(-a|\tau|) \\
S_X(f) &= \frac{N_0}{2}\left|\frac{1}{a+j2\pi f}\right|^2
\end{aligned}
$$

$X(t)$ è stazionario. Il valor medio è nullo e la varianza coincide con il valore quadratico medio

$$
\sigma_X^2(t) = R_X(0) = \frac{N_0}{4a}
$$

Punto 3 e 4

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E\{X(t_1)h(t_1)X(t_2)h(t_2)\} \\
&= E\{X(t_1)X(t_2)\}h(t_1)h(t_2) \\
&= R_X(t_2-t_1)h(t_1)h(t_2)
\end{aligned}
$$

Non è dunque stazionario.

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= \frac{N_0}{4a}e^{-a|t_2-t_1|}u(t_1)u(t_2)e^{-at_1}e^{-at_2} \\
R_Y(t_1,t_2) &= \frac{N_0}{4a}e^{-a(\max(t_1,t_2)-\min(t_1,t_2)+\max(t_1,t_2)+\min(t_1,t_2))}u(t_1)u(t_2) \\
R_Y(t_1,t_2) &= \frac{N_0}{4a}e^{-2a\max(t_1,t_2)}u(t_1)u(t_2)
\end{aligned}
$$

$Y(t)$ ha valor medio nullo perche $X(t)$ è a valor medio nullo. La varianza coincide dunque con il valore quadratico medio:

$$
\sigma_Y^2(t) = R_Y(t,t) = \frac{N_0}{4a}e^{-2at}u(t)
$$

2.12 Esercizio 12

Un processo $X(t) = \sin(2\pi f_0 t) + N(t)$, con $N(t)$ rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza pari a $S_N(f) = \beta$, è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = u(t)e^{-t}$. Calcolare:

1. La media di $Y(t)$, la varianza di $Y(t)$ ed il valore quadratico medio di $Y(t)$

2. La funzione di autocorrelazione di $Y(t)$

Il processo $Y(t)$ è stazionario WSS? In caso affermativo calcolare la sua densita spettrale di potenza $S_Y(f)$.

Considerare adesso all'ingresso dello stesso sistema il processo $X'(t) = \sin(2\pi f_0 t + \theta) + N(t)$, con θ variabile casuale uniforme in $[-\pi, \pi]$ e statisticamente indipendente da $N(t)$. Sia $Y'(t)$ il corrispondente processo in uscita dal sistema.Calcolare:

1. La media di $Y'(t)$, la varianza di $Y'(t)$ ed il valore quadratico medio di $Y'(t)$

2. La funzione di autocorrelazione di $Y'(t)$

Il processo $Y'(t)$ è stazionario WSS? In caso affermativo calcolare la sua densita spettrale di potenza.

2.12.1 Svolgimento

Funzione di trasferimento del sistema:

$$H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi f)^2}, \quad \arg(H(f)) = -\tan^{-1}(2\pi f)$$

Funzione di autocorrelazione risposta all'impulso:

$$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(|H(f)|^2) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

Il processo di ingresso non è stazionario, il suo valor medio è $\mu_X(t) = E\{\sin(2\pi f_0 t) + N(t)\} = \sin(2\pi f_0 t)$. Per la sovrapposizione degli effetti nei sistemi lineari posso scrivere:

$$Y(t) = \mu_Y(t) + W(t)$$

Dove $W(t)$ è un rumore gaussiano colorato a valor medio nullo con $S_W(f) = \beta|H(f)|^2 = \frac{\beta}{1+(2\pi f)^2}$.

1. Calcolo la media di $Y(t)$

   $$E\{Y(t)\} = \mu_Y(t) = E\{\sin(2\pi f_0 t) * u(t)e^{-t} + W(t)\} = |H(f_0)|\sin(2\pi f_0 t + \arg(H(f_0)) + 0$$

   Dalla formula della sinusoide che passa per un sistema LTI.

2. Calcolo funzione di autocorrelazione di $Y(t)$

   $$\begin{aligned} R_Y(t,\tau) = E\{Y(t)Y(t+\tau)\} &= E\{(\mu_Y(t) + W(t))(\mu_Y(t+\tau) + W(t+\tau))\} \\ &= \mu_Y(t)\mu_Y(t+\tau) + 0 + 0 + R_W(\tau) \end{aligned}$$

   $$R_W(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_W(f)) = \frac{\beta}{2}e^{-|\tau|}$$

3. Il valore quadratico medio di $Y(t)$ si ottiene come segue

   $$E\{Y^2(t)\} = R_Y(t,0) = \mu_Y^2(t) + \frac{\beta}{2}$$

4. La varianza di $Y(t)$

   $$E\{(Y(t) - \mu_Y(t)\})^2\} = E\{Y^2(t)\} - \mu_Y^2(t) = \frac{\beta}{2}$$

Il processo $Y(t)$ non è stazionario e quindi non posso calcolare il suo spettro
L'aggiunta della variabile casuale θ rende $X'(t)$ stazionario. Come visto a lezione

$$R_{X'}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) + \beta\delta(\tau)$$

ed il suo valor medio è nullo. I conti sono dunque più facili:

1. La media di $Y'(t)$ è nulla

2. La funzione di autocorrelazione è

   $$R_{Y'}(\tau) = R_{X'}(\tau) * R_h(\tau) = \frac{1}{2}|H(f_0)|^2\cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{\beta}{2}e^{-|\tau|}.$$

   Si noti che siccome lo spettro di energia è reale e positivo la sua fase è sempre nulla

3. La varianza ed il valore quadratico medio di $Y'(t)$ coincidono

$$\sigma_{Y'}^2 = E\{Y'^2(t)\} = R_{Y'}(0) = \frac{1}{2}|H(f_0)|^2 + \frac{\beta}{2}$$

Il processo $Y'(t)$ è stazionario, il suo spettro è

$$S_{Y'}(f) = \mathcal{F}(R_{Y'}(\tau)) = \frac{1}{4}|H(f_0)|^2(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{\beta}{1 + (2\pi f)^2}$$

2.13 Esercizio 13

Si consideri un processo casuale $X(t)$ stazionario in senso stretto del secondo ordine con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $(0, +1)$ e autocovarianza $K_X(\tau)$ a supporto limitato in $[-T, T]$. Si consideri ora il processo

$$Y(t) = \int_{t}^{t+2} X(\theta) d\theta$$

1. Calcolare media, varianza e potenza di $X(t)$
2. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato? è stazionario in senso stretto?
3. La relazione ingresso uscita è causale? rappresenta un sistema LTI?
4. Calcolare media, varianza e potenza di $Y(t)$ in funzione di $K_X(\tau)$
5. La statistica del prim'ordine di $Y(t)$, $f_Y(y; t)$, è a supporto limitato?
6. Calcolare a funzione di autocorrelazione di $Y(t)$ in funzione di $K_X(\tau)$.
7. Se il processo $Y(t)$ è stazionario, calcolare la densità spettrale di potenza $G_Y(f)$
8. E' possibile estrarre da $Y(t)$ due campioni $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ non correlati? Se la risposta è positiva indicare la distanza tra i due campioni.

2.13.1 Svolgimento

1. Essendo $X(t)$ stazionario, media, potenza e varianza sono costanti. Media:

$$m_X = E(X(t)) = \int_0^1 x f_X(x)dx = \frac{1}{2}$$

Potenza coincide con il valore quadratico medio

$$P_X = E(X^2(t)) = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{3}.$$

La varianza si ottiene sottraendo alla potenza il quadrato della media:

$$\sigma_X^2 = P_x - m_X^2 = \frac{1}{12}$$

2. Siccome la relazione ingresso-uscita rappresenta un sistema LTI (vedi punto successivo) il processo $Y(t)$ è anch'esso stazionario del second'ordine in senso stretto.

3. Possiamo scrivere:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_2(\theta - (t+1))X(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_2(t+1-\theta)X(\theta)d\theta = \Pi_2(t+1) * X(t)$$

dove $\Pi_2(t)$ è la porta simmetrica di supporto 2. Il sistema dunque è LTI con risposta all'impulso $h(t) = \Pi_2(t+1)$. Siccome $h(t) \neq 0 \ \forall t < 0$ il sistema *non* è causale.

4. La media $Y(t)$ si ottiene come segue

$$m_Y = H(0)m_X = m_X \int h(t)dt = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Non possiamo calcolare la varianza e la potenza esplicitamente, ma possiamo scrivere.

$$P_Y = R_Y(\tau)|_{\tau=0} = [R_X(\tau) * R_h(\tau)]_{\tau=0} = m_Y^2 + [K_X(\tau) * R_h(\tau)]_{\tau=0}$$

dove $R_X(\tau) = K_X(\tau) + m_X^2$ e $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso $h(t) = \Pi_2(t+1)$:

$$R_h(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) = 2\Lambda_2(\tau) = 2\Lambda_1(\tau/2).$$

Quindi $\sigma_Y^2 = P_Y - m_Y^2 = P_Y - 1$

5. I valori che $Y(t)$ può assumere sono limitati, infatti

$$Y(t) = \int_t^{t+2} X(\theta)d\theta \leq \int_t^{t+2} \max_\theta(X(\theta))d\theta = \int_t^{t+2} 1 d\theta = 2$$

e

$$Y(t) = \int_t^{t+2} X(\theta)d\theta \geq \int_t^{t+2} \min_\theta(X(\theta))d\theta = \int_t^{t+2} 0 d\theta = 0$$

quindi $f_Y(y)$ ha supporto limitato in $[0, 2]$.

6. Vedi punto 4.

7.

$$
\begin{aligned}
G_Y(f) &= G_X(f)|H(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}|H(f)|^2 \\
&= 4\mathrm{sinc}^2(2f)\mathcal{F}\{R_X(\tau)\} \\
&= 4\mathrm{sinc}^2(2f)\left(m_X^2\delta(f) + \mathcal{F}\{K_X(\tau)\}\right)
\end{aligned}
$$

8. Benchè $K_X(\tau)$ non sia nota, sappiamo che è a supporto limitato. Siccome la convoluzione somma i supporti la autocovarianza K_Y ha supporto limitato in $[-2-T, 2+T]$. Affinché $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ siano non correlati la loro covarianza deve essere nulla. Quindi $K_Y(t_2-t_1)$ deve essere nullo. Questo accade $\forall |t_2-t_1| \geq T+2$.

2.14 Esercizio 14

Si consideri un processo gaussiano bianco $N(t)$ con densità spettrale di potenza $N_0/2$, filtrato attraverso un filtro con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

Sia $Y(t)$ il processo di uscita dal sistema.

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato? è stazionario in senso stretto?
2. Calcolare valor medio e la varianza di $Y(t)$
3. Scrivere la statistica del prim'ordine del processo di uscita $f_Y(y;t)$
4. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.
5. Se il processo è stazionario, calcolare la densità spettrale di potenza $G_Y(f)$
6. E' possibile estrarre da $Y(t)$ due campioni $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ statisticamente indipendenti? Se la risposta è positiva indicare la distanza tra i due campioni.

2.14.1 Svolgimento

1. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso stretto perchè lo è quello in ingresso (processo gaussiano bianco) e passa per un sistema LTI

2. Media μ_Y:
$$\mu_Y = E[Y(t)] = H(0)\mu_N = T \cdot 0 = 0.$$
la varianza σ_Y^2 è uguale al valore quadratico medio
$$\sigma_Y^2 = E[Y^2(t)] = R_Y(0) \quad R_Y(\tau) = R_N(\tau) * R_h(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * R_h(\tau)$$
Funzione di autocorrelazione:
$$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(|H(f)|^2) = \mathcal{F}^{-1}(T^2\text{sinc}^2(fT)) = T\Lambda(\tau/T)$$
da cui:
$$R_Y(\tau) = \frac{TN_0}{2}\Lambda(\tau/T) \to \sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{TN_0}{2}$$

3. Il processo È Gaussiano, quindi la statistica del prim'ordine è:
$$f_Y(y;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}|y-\mu_Y|^2\right),$$
non dipende da t.

4. Si veda il punto 2.

5. Spettro di potenza:
$$G_Y(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0T^2}{2}\text{sinc}^2(fT)$$

6. Siccome due campioni di un processo Gaussiano $Y(t)$ hanno statistica congiuntamente gaussiana, l'indipendenza statistica coincide con la scorrelazione (indipendenza lineare). Basta quindi determinare dove è nulla la funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$.
$$R_Y(\tau) = \frac{TN_0}{2}\Lambda(\tau/T) \to R_Y(\tau) = 0 \quad \forall|\tau| = |t_1 - t_2| \geq T$$
Perciò $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ sono s.i. se e solo se $|t_1 - t_2| \geq T$.

2.15 Esercizio 15

Si consideri un processo casuale stazionario $N(t)$ gaussiano bianco (spettro $G_N(f) = N_0/2$) all'ingresso di un sistema composto dalla cascata di due filtri passa-basso ideali con banda unilatera B e $B/2$ e guadagni G_1 e G_2, rispettivamente. Sia $W(t)$ l'uscita del primo sistema e $Y(t)$ l'uscita del secondo sistema.

1. Calcolare media e varianza di $Y(t)$ e $W(t)$ in funzione di N_0, B, G_1 e G_2.
2. Calcolare lo densità spettrale di potenza di $Y(t)$ e $W(t)$.
3. Calcolare lo funzione di autocorrelazione di $Y(t)$ e $W(t)$.
4. Calcolare la funzione di mutua correlazione tra $Y(t)$ e $W(t)$.
5. Calcolare la distributione di probabilita' della variabile casuale $Z = W(t_1) + 2Y(t_2)$ in funzione di t_1 e t_2.
6. Per quale valore di t_1 e t_2 la varianza di Z è minima?

2.15.1 Svolgimento

1. $W(t)$ e $Y(t)$ hanno valor medio nullo perchè $N(t)$ ha valor medio nullo. La varianza coincide con il valore quadratico medio $\sigma_W^2 = R_W(0) = N_0 G_1^2 B$, $\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 B$. Si veda punto 3.

2. $$\begin{aligned} G_W(f) &= \frac{N_0}{2} G_1^2 |\Pi_{2B}(f)|^2 \\ &= \frac{N_0}{2} G_1^2 \Pi_{2B}(f) \\ G_Y(f) &= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 |\Pi_{2B}(f)|^2 \cdot |\Pi_B(f)|^2 \\ &= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 |\Pi_B(f)|^2 \\ &= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 \Pi_B(f) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} R_W(\tau) &= F^{-1}(G_W(f)) = N_0 G_1^2 B \mathrm{sinc}(2B\tau) \\ R_Y(\tau) &= F^{-1}(G_Y(f)) = \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 B \mathrm{sinc}(B\tau) \end{aligned}$$

   .

4. $$\begin{aligned} R_{WY}(t_1, t_2) &= E\{W(t_1)Y(t_2)\} = E\{W(t)Y(t+\tau)\} \\ &= R_W(\tau) * h_2(\tau) \\ &= F^{-1}\{G_W(f) G_2 \Pi_B(f)\} \\ &= F^{-1}\left\{\frac{N_0}{2} G_1^2 \Pi_{2B}(f) \cdot G_2 \Pi_B(f)\right\} \\ &= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2 B \mathrm{sinc}(B\tau) \end{aligned}$$

   .

5. Z è la somma di due variabili gaussiane ed è quindi gaussiana. Il suo valor medio è nullo ed il valore quadratico medio è

$$\begin{aligned} E\{Z^2\} &= E\{(W(t_1) + 2Y(t_2))^2\} = E\{W^2(t_1)\} + 4E\{Y^2(t_2)\} + 4E\{W(t_1)Y(t_2)\} \\ &= R_W(0) + 4R_Y(0) + 4R_{WY}(t_1 - t_2) \\ &= \frac{N_0}{2} G_1^2 2B + 4\frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 B + 4\frac{N_0}{2} G_1^2 G_2 B \mathrm{sinc}(B(t_1 - t_2)) \\ &= N_0 G_1^2 B \left(1 + 2G_2^2 + 2G_2 \mathrm{sinc}(B(t_1 - t_2))\right) \end{aligned}$$

6. La varianza è minima quando $\mathrm{sinc}(B(t_1 - t_2))$ è minimo. $B(t_1 - t_2) = \pm z^* \approx \pm 1.5 \to \tau = \pm\frac{3}{2B}$. La soluzione esatta z^* risolve l'equazione $\pi z^* = \tan(\pi z^*) = 1.43$.

2.16 Esercizio 16

Un processo $N(t)$ WSS con distribuzione uniforme e densità spettrale di potenza $S_N(f) = 2\Pi_2(f) + 9\delta(f)$ è posto in ingresso ad un blocco derivatore, generando il processo:

$$Y(t) = \frac{d}{dt}N(t).$$

1. Calcolare media e varianza di $N(t)$
2. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $N(t)$
3. Il processo $Y(t)$ è Gaussiano? è stazionario?
4. Calcolare media e varianza di $Y(t)$
5. Calcolare la densità spettrale di potenza di $Y(t)$
6. Calcolare la funzione di mutua correlazione tra $Y(t)$ e $N(t)$

2.16.1 Svolgimento

1. Il valore quadratico medio coincide con l'integrale della densita' spettrale di potenza:
$$E\{N^2\} = m_N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [2\Pi_2(f) + 9\delta(f)]df = 2 \times 2 + 9 = 13$$
L'ampiezza della delta nell'origine coincide con la media al quadrato
$$\mu_N^2 = 9 \to \mu_N = 3$$
La varianza è dunque
$$\sigma_N^2 = m_N^2 - \mu_N^2 = 4$$

2. La funzione di autocorrelazione è l'antitrasformata dello spettro di potenza
$$R_N(\tau) = F^{-1}\{2\Pi_2(f) + 9\delta(f)\} = 2 \times 2\text{sinc}(2\tau) + 9$$

3. Il derivatore è un sistema LTI, quindi $Y(t)$ e' stazionario WSS perchè l'ingresso lo è. $Y(t)$ non è Gaussiano perchè l'ingresso non lo è.

4. La risposta all'impulso del derivatore è la derivata della delta, la sua funzione di trasferimento è $H(f) = j2\pi f$. Possiamo dunque calcolare media e varianza con le solite formule:
$$\begin{aligned}
\mu_Y &= H(0)\mu_N = 0 \times 3 = 0 \\
S_Y(f) &= |H(f)|^2[2\Pi_2(f) + 9\delta(f)] = (2\pi f)^2[2\Pi_2(f) + 9\delta(f)] = (2\pi f)^2 2\Pi_2(f) \\
&= 8\pi^2\Pi_2(f)f^2 \\
m_Y^2 &= \int S_Y(f)df = 8\pi^2 \int_{-1}^{1} f^2 df = 8\pi^2\frac{2}{3} = \pi^2\frac{16}{3} \\
\sigma_Y^2 &= m_Y^2 - \mu_Y^2 = \pi^2\frac{16}{3}
\end{aligned}$$

5. vedi 4

6. La funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$ sarebbe
$$R_Y(\tau) = F^{-1}\{S_Y(f)\} = F^{-1}\{8\pi^2\Pi_2(f)f^2\}$$
ma non è richiesta.

   La mutua correlazione tra Y e N invece si ottiene come segue
$$\begin{aligned}
R_{N,Y}(\tau) &= R_N(\tau) * h(\tau) = \frac{d}{d\tau}F^{-1}\{S_N(f)\} \\
&= \frac{d}{d\tau}[4\text{sinc}(2\tau) + 9] \\
&= \frac{d}{d\tau}\left[4\frac{\sin(2\pi\tau)}{(2\pi\tau)} + 9\right] \\
&= 4\frac{(2\pi)^2\tau\cos(2\pi\tau) - 2\pi\sin(2\pi\tau)}{(2\pi\tau)^2} \\
&= 4\frac{2\pi\tau\cos(2\pi\tau) - \sin(2\pi\tau)}{2\pi\tau^2} \\
&= 4\frac{2\pi\tau}{2\pi\tau^2}\left[\cos(2\pi\tau) - \frac{\sin(2\pi\tau)}{2\pi\tau}\right] \\
&= \frac{4}{\tau}[\cos(2\pi\tau) - \text{sinc}(2\tau)]
\end{aligned}$$

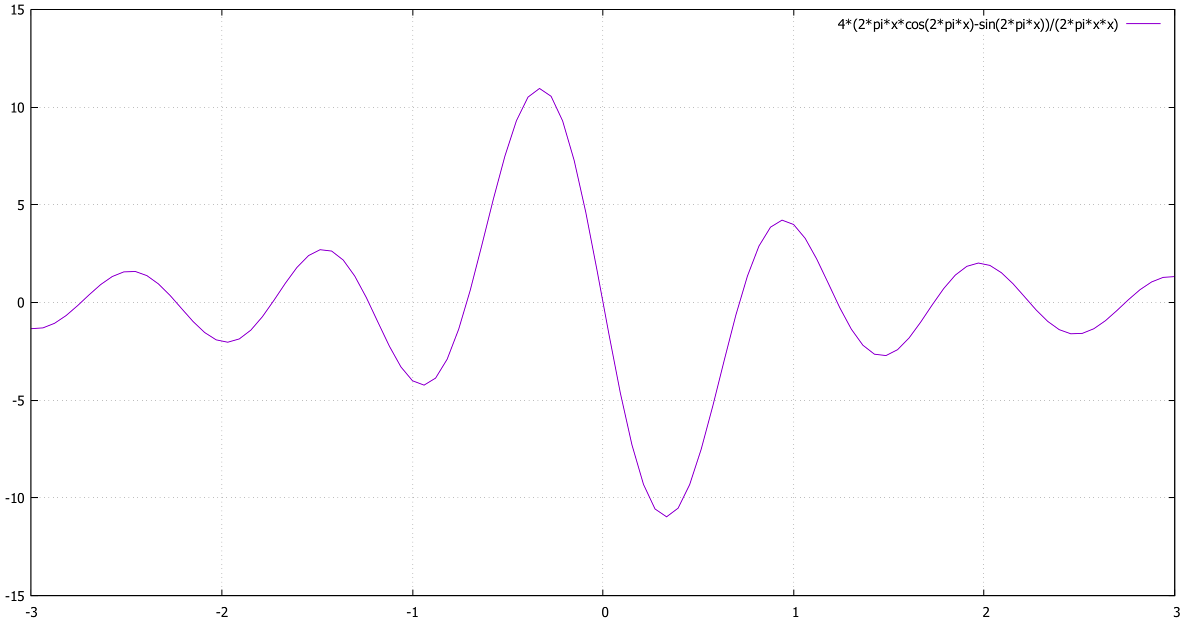


Figura 26: $R_{N,Y}(\tau)$

2.17 Esercizio 17

Si consideri il processo casuale

$$X(t) = \alpha r(t - \theta_1) + \beta r(t - \theta_2)$$

dove $r(t)$ è una funzione pari a 1 per $0 \leq t < T$ e nulla altrove (porta causale); α e β sono due variabili casuali che assumono i valori 0 e 1 in modo equiprobabile; θ_1 è una variabile casuale uniformemente distribuita in $[0, 2T]$ e θ_2 è una variabile casuale uniformemente distribuita in $[T, 4T]$. Tutte le variabili casuali sono tra loro indipendenti.

1. Il processo è stazionario?
2. Il processo è quasi determinato?
3. Calcolare media e valore quadratico medio di $X(t)$
4. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $X(t)$
5. Calcolare media e varianza della variabile casuale $Z = X(T) + X(3T)$

2.17.1 Svolgimento

1. Il processo è stazionario? NO. Vedi punto successivo. Media e varianza funzioni del tempo.
2. Il processo è quasi determinato? Si. E' infatti funzione di quattro variabili casuali.
3. Calcolare media e valore quadratico medio di $X(t)$

$$\begin{aligned} m_X(t) = E\{X(t)\} &= E\{\alpha r(t-\theta_1) + \beta r(t-\theta_2)\} \\ &= E\{\alpha\}E\{r(t-\theta_1)\} + E\{\beta\}E\{r(t-\theta_2)\} \\ &= \frac{1}{2}E\{r(t-\theta_1)\} + \frac{1}{2}E\{r(t-\theta_2)\} \\ &= \frac{1}{2}m_1(t) + \frac{1}{2}m_2(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo media e valore quadratico medio del primo termine:

$$\begin{aligned} m_1(t) = E\{r(t-\theta_1)\} &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} r(t-x)dx \\ &= \int_{\max(0,t-T)}^{\min(2T,t)} \frac{1}{2T}1dx \\ &= \frac{1}{2T}\left(\min(2T,t) - \max(0,t-T)\right)^+ \\ s_1(t) = E\{r^2(t-\theta_1)\} &= m_1(t) \end{aligned}$$

Il simbolo $(\cdot)^+$ coincide con l'argomento solo se questo è positivo, altrimenti è nullo.

La funzione $r(t-x)$ è infatti nulla per $x \notin [t, t-T]$ e vale 1 altrimenti. La funzione $m_1(t) = s_1(t)$ è un trapezio regolare con base maggiore $[0, 3T]$, base minore $[T, 2T]$, e altezza $\frac{1}{2}$.

Analogamente per il secondo termine:

$$\begin{aligned} m_2(t) = E\{r(t-\theta_2)\} &= \frac{1}{3T}\int_T^{4T} r(t-x)dx \\ &= \int_{\max(T,t-T)}^{\min(4T,t)} \frac{1}{3T}\cdot 1dx \\ &= \frac{1}{3T}\left(\min(4T,t) - \max(T,t-T)\right)^+ \\ s_2(t) = E\{r^2(t-\theta_2)\} &= m_2(t) \end{aligned}$$

La funzione ottenuta $m_2(t)$ è un trapezio regolare con base maggiore $[T, 5T]$, base minore $[2T, 4T]$ e altezza $\frac{1}{3}$.

Per il valore quadratico medio si veda il punto successivo, ponendo $t_1 = t_2 = t$

$$s_X(t) = E\{X^2(t)\} = R_X(t,t) = \frac{1}{2}\left[m_1(t) + m_2(t) + m_1(t)m_2(t)\right]$$

Si noti infatti che $a_1(t,t) = m_1(t)$ e $a_2(t,t) = m_2(t)$.

4. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $X(t)$

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} &= E\{[\alpha r(t_1-\theta_1)+\beta r(t_1-\theta_2)]\,[\alpha r(t_2-\theta_1)+\beta r(t_2-\theta_2)]\} \\
&= E\{\alpha^2 r(t_1-\theta_1)r(t_2-\theta_1)+\beta^2 r(t_1-\theta_2)r(t_2-\theta_2)+ \\
&\alpha\beta r(t_1-\theta_1)r(t_2-\theta_2)+\beta\alpha r(t_1-\theta_2)r(t_2-\theta_1)\} \\
&= \frac{1}{2}a_1(t_1,t_2)+\frac{1}{2}a_2(t_1,t_2)+\frac{1}{4}m_1(t_1)m_2(t_2)+\frac{1}{4}m_1(t_2)m_2(t_1)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
a_1(t_1,t_2) = E\{r(t_1-\theta_1)r(t_2-\theta_1)\} &= \int_0^{2T}\frac{1}{2T}r(t_1-x)r(t_2-x)dx \\
&= \frac{1}{2T}\left(\min(2T,t_1,t_2)-\max(0,t_1-T,t_2-T)\right)^+ \\
a_2(t_1,t_2) = E\{r(t_1-\theta_2)r(t_2-\theta_2)\} &= \frac{1}{3T}\int_T^{4T} r(t_1-x)r(t_2-x)dx \\
&= \frac{1}{3T}\left(\min(4T,t_1,t_2)-\max(T,t_1-T,t_2-T)\right)^+
\end{aligned}$$

5. Calcolare media e varianza della variabile casuale $Z = X(T)+X(3T)$.

$$\begin{aligned}
E\{Z\} &= m_X(T)+m_X(3T) = \\
&= \frac{1}{2}m_1(T)+\frac{1}{2}m_2(T)+\frac{1}{2}m_1(3T)+\frac{1}{2}m_2(3T) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}0+\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{12}} \\
E\{Z^2\} &= E\{X^2(T)+X^2(3T)+2X(T)X(3T)\} \\
&= s_X(T)+s_X(3T)+2R_X(T,3T) \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+2R_X(T,3T) \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Per il calcolo del terzo termine, dal punto 3:

$$\begin{aligned}
R_X(T,3T) &= \frac{1}{2}\left[a_1(T,3T)+a_2(T,3T)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\right] = \frac{1}{24} \\
a_1(T,3T) &= \frac{1}{2T}\left(\min(2T,T,3T)-\max(0,0,2T)\right)^+ = 0 \\
a_2(T,3T) &= \frac{1}{3T}\left(\min(4T,T,3T)-\max(T,0,2T)\right)^+ = 0
\end{aligned}$$

2.18 Esercizio 18

Si consideri un rumore gaussiano bianco $N_1(t)$ con densità spettrale di potenza $N_{0,1}$, un altro rumore gaussiano bianco $N_2(t)$, indipendente da $N_1(t)$, con densità spettrale di potenza $N_{0,2}$, ed il processo $Y(t) = h(t) * N_1(t) - h(t) * N_2(t)$, dove $h(t)$ è la risposta all'impulso di un sistema LTI stabile.

1. Rappresentare con un diagramma a blocchi un sistema che genera il processo di uscita $Y(t)$.

2. Dare la definizione di processo stazionario in senso lato. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato?

3. Scrivere l'espressione della funzione di autocorrelazione di $Y(t)$.

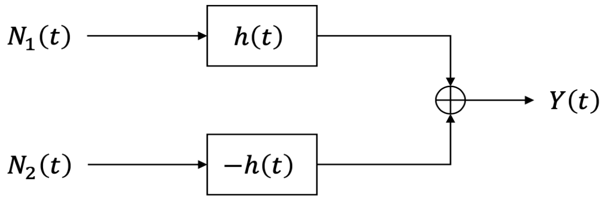
4. Scrivere l'espressione della densità spettrale di potenza di $Y(t)$, $G_Y(f)$.

5. Ponendo $h(t) = 2\Pi_3(t)$, $N_{0,1} = 2$, $N_{0,2} = 2$, calcolare valor medio e potenza di $Y(t)$.

6. È possibile semplificare il sistema per generare un processo $Y'(t)$ con le stesse caratteristiche statistiche di $Y(t)$?

2.18.1 Svolgimento

1. Si veda la figura sottostante



Sistemi LTI

2. Un processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato se la sua media è costante nel tempo ($m_Y(t) = E\{Y(t)\} = m_Y$) e la funzione di autocorrelazione $R_Y(t_1, t_2) = E\{Y(t_1)Y^*(t_2)\}$ dipende solo dalla differenza $\tau = t_1 - t_2$.
Il processo $Y(t)$ considerato è stazionario perchè i processi di ingresso lo sono e passano attraverso sistemi LTI.

3. Sia $N_1'(t) = h(t) * N_1(t)$ e $N_2'(t) = h(t) * N_2(t)$.

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{(N_1'(t) - N_2'(t))(N_1'(t+\tau) - N_2'(t+\tau))\} \\ &= E\{N_1'(t)N_1'(t+\tau)\} + E\{N_2'(t)N_2'(t+\tau)\} + \text{termini misti nulli} \\ &= R_{N_1'}(\tau) + R_{N_2'}(\tau) \\ &= R_h(\tau) * N_{0,1}\delta(\tau) + R_h(\tau) * N_{0,2}\delta(\tau) \\ &= R_h(\tau) * (N_{0,1} + N_{0,2})\,\delta(\tau) \\ &= R_h(\tau)\,(N_{0,1} + N_{0,2}) \end{aligned}$$

I termini misti si annullano perchè i due processi sono indipendenti e a media nulla. Si noti che il segno meno scompare. $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione di $h(t)$.

4. Densità spettrale di potenza di $Y(t)$,

$$G_Y(f) \triangleq \mathcal{F}(R_Y(\tau)) = |H(f)|^2\,(N_{0,1} + N_{0,2})$$

5. Ponendo $h(t) = 2\Pi_3(t)$, $N_{0,1} = 2$, $N_{0,2} = 2$, calcolare valor medio e potenza di $Y(t)$.
La media è nulla perchè i processi di ingresso hanno media nulla.

La potenza media coincide con la funzione di autocorrelazione nell'origine:

$$P_Y = R_Y(0) = R_h(0)\,(N_{0,1} + N_{0,2}) = 12 \cdot (2+2) = 48$$

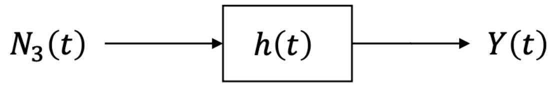
Infatti:

$$R_h(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) = 4 \cdot 3\Lambda_3(\tau).$$

Senza calcolare la funzione di autocorrelazione possiamo scrivere:

$$R_h(0) = ||h(t)||^2 = 12$$

6. Dall'espressione della funzione di autocorrelazione o della densità spettrale di potenza si puó notare come un processo $Y'(t)$ con le stesse caratteristiche statistiche possa essere generato ponendo un unico processo gaussiano bianco $N_3(t)$ con densità spettrale di potenza $N_{0,3} = (N_{0,1} + N_{0,2})$ all'ingressso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$.



$$G_{N_3}(f) = N_{0,1} + N_{0,2}$$

3 Esercizi su segnali a tempo discreto

3.1 Esercizio 1

Si consideri il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta all'impulso:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{2}{3}\delta(n),$$

1. Scrivere l'espressione della relazione ingresso/uscita in termini dell'equazione alle differenze e disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Indicare la regione di convergenza di $H(z)$ (trasformata zeta di $h(n)$). Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)
3. Calcolare i segnali $y_1(n)$, $y_2(n)$ e $y_3(n)$ in uscita dal sistema quando all'ingresso sono presenti i seguenti segnali:

$$x_1(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad x_2(n) = \delta(n) - \frac{2}{3}\delta(n-1) \qquad x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n).$$

3.1.1 Svolgimento

1. La funzione di trasferimento $H(z)$ si ottiene calcolando la trasformata zeta di $h(n)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{2}{3} = \frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

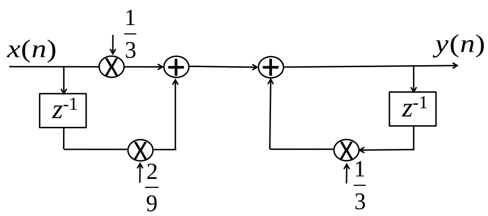
Dall'espressione precedente si ricava la seguente relazione tra $Y(z)$ e $X(z)$:

$$Y(z)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right) = X(z)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}z^{-1}\right) \rightarrow Y(z) = \frac{1}{3}X(z) + \frac{2}{9}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{2}{9}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

Il diagramma a blocchi del sistema è quindi:



2. Dalla risposta all'impulso si vede che il sistema è causale (infatti $h(n) = 0 \quad \forall \quad n < 0$). La regione di convergenza è quindi l'esterno di una circonferenza avente raggio uguale al modulo del polo più esterno. I poli di $H(z)$ sono le radici del denominatore: $1-\frac{1}{3}z^{-1} = 0$. C'è quindi un unico polo in $z = \frac{1}{3}$ e la regione di convergenza è: $|z| > \frac{1}{3}$.
Un sistema causale è stabile se il modulo di tutti i poli è minore di 1, quindi il sistema è stabile. Un sistema causale è a fase minima se il modulo dei poli e degli zeri è minore di 1, quindi il sistema è anche a fase minima, in quanto ha un unico zero in $z = -\frac{2}{3}$.

3. Le trasformate zeta dei segnali in ingresso valgono:

$$X_1(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad X_2(z) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} \qquad X_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Moltiplicando per $H(z)$ si ottengono le trasformate zeta dei segnali in uscita dal sistema:

$$Y_1(x) = \frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad Y_2(z) = \frac{\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad Y_3(z) = \frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}.$$

Antitrasformando, si ottengono i segnali nel dominio del tempo.

Per il primo segnale, si può applicare il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y_1(z) = \frac{R_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{R_1}{1-p_2z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = \frac{1}{3}\frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1+2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$R_2 = \frac{1}{3}\frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{1}{15}$$

$$Y_1(z) = \frac{2/5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1/15}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \rightarrow \quad y_1(n) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{1}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

La trasformata del secondo segnale si può scrivere come:

$$Y_2(z) = \frac{\left(1-\frac{4}{9}z^{-2}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} - \frac{4}{27}z^{-2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

L'antitrasformata vale quindi:

$$y_2(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{4}{27}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u(n-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}[u(n) - 4u(n-2)]$$

La trasformata del terzo segnale si può scrivere come:

$$Y_3(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} + \frac{2}{9}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

Usando le tavole delle trasformate si ottiene:

$$y_3(n) = \frac{1}{3}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{2}{9}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(3n+1)\,u(n)$$

3.2 Esercizio 2

Si consideri il sistema a tempo discreto indicato in Figura 27, dove $h_1(n)$ e $h_2(n)$ sono risposte all'impulso tali che $h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ e $h_2(n)$=$(-1)^n \cdot h_1(n)$.

1. Calcolare la funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$ del sistema complessivo.
2. Calcolare la risposta all'impulso $h_{eq}(n)$ del sistema complessivo.
3. Dire se il sistema è di tipo FIR o IIR e discuterne causalità e stabilità.
4. Ricavare l'espressione della relazione ingresso/uscita tra $y(n)$ e $x(n)$, sotto forma di equazione alle differenze.

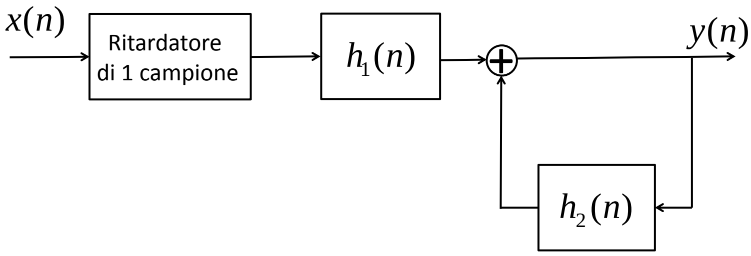


Figura 27: Sistema a tempo discreto per l'esercizio 2.

3.2.1 Svolgimento

1. Relazione ingresso/uscita nel dominio del tempo discreto:
$$y(n) = x(n-1) * h_1(n) + y(n) * h_2(n)$$
Calcolo la trasformata zeta:
$$Y(z) = X(z)z^{-1}H_1(z) + Y(z)H_2(z)$$
dove:
$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \rightarrow H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$
$$h_2(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \rightarrow H_2(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$
La funzione di trasferimento vale quindi:
$$H_{eq}(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{z^{-1}H_1(z)}{1-H_2(z)} = \frac{z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}} = 2\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

2. $$H_{eq}(z) = 2\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$
L'antitrasformata di $H_{eq}(z)$ vale:
$$h_{eq}(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$
L'espressione precedente può essere semplificata ad esempio ricordando che $u(n) = u(n-1) + \delta(n)$:
$$\begin{aligned} h_{eq}(n) &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} (u(n-1) + \delta(n) + u(n-1)) = \\ &= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \delta(n) = \\ &= 2\delta(n) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-1) \end{aligned}$$

3. Il sistema è di tipo IIR. La sua funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$ ha uno zero in $z = -\frac{1}{2}$ e un polo in $z = -\frac{1}{2}$.
Il sistema è stabile perché è causale (composto da tutti blocchi causali) e il modulo del polo è minore di 1.

4. $$H_{eq}(z) = 2\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$
Dall'equazione precedente si ricava:
$$Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) = 2X(z)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$
Antitrasformando:
$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2x(n) + x(n-1)$$
$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + 2x(n) + x(n-1)$$

3.3 Esercizio 3

Si consideri il sistema LTI tempo-discreto mostrato nella seguente figura, dove $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

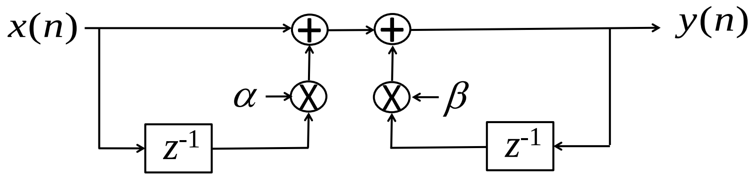


Figura 28: Sistema lineare a tempo discreto.

1. Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema.
2. Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.
3. Calcolare l'uscita $y(n)$ del sistema quando all'ingresso viene posto il segnale

$$x(n) = (-\alpha)^n \, u(n) + u(-n-1)$$

4. Indicare le regioni di convergenza di $H(z)$, $X(z)$ e $Y(z)$, dove $X(z)$ e $Y(z)$ sono le trasformate zeta dei segnali $y(n)$ e $x(n)$.

3.3.1 Svolgimento

1. La relazione ingresso/uscita del sistema è:

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n-1) + \beta y(n-1)$$

Calcolando la trasformata zeta si ottiene:

$$Y(z) = X(x) + \alpha X(z)z^{-1} + \beta Y(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1 - \beta z^{-1}\right] = X(x)\left[1 + \alpha z^{-1}\right]$$

La funzione di trasferimento è quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Il sistema è causale (si vede dall'espressione della relazione ingresso/uscita), quindi la regione di convergenza di $H(z)$ è:
ROC$_H$=$\{z : |z| > |\beta|\}$=$\{z : |z| > \frac{1}{2}\}$

2.
$$H(z) = \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} + \alpha z^{-1}\frac{1}{1 - \beta z^{-1}}$$

Antistrasformando:

$$h(n) = \beta^n u(n) + \alpha\beta^{n-1}u(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Altre modi in cui si può scrivere $h(n)$:

$$h(n) = \delta(n) + (\alpha + \beta)\beta^{n-1}u(n-1) = \delta(n) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$h(n) = -\frac{\alpha}{\beta}\delta(n) + \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\beta^n u(n) = -\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

3. La trasformata zeta di $x(n)$ (che è la somma di un termine casusale e uno anticausale) vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 + \alpha z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1} - 1 - \alpha z^{-1}}{\left(1 + \alpha z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{-\left(1 + \alpha\right) z^{-1}}{\left(1 + \alpha z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

La regione di convergenza di $X(z)$ è:
ROC$_X$=$\{z : |\alpha| < |z| < 1\}$=$\{z : \frac{1}{4} < |z| < 1\}$
La trasformata zeta del segnale in uscita dal sistema vale:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{-\left(1 + \alpha\right) z^{-1}}{\left(1 + \alpha z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}\frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{-\left(1 + \alpha\right) z^{-1}}{\left(1 - \beta z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Il polo e lo zero in $z = \alpha$ si cancellano. La regione di convergenza di $Y(z)$ è quindi:
ROC$_Y$=$\{z : |\beta| < |z| < 1\}$=$\{z : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$

$Y(z)$ ha due poli semplici in $z = 1$ e $z = \beta$. I residui nei due poli sono:

$$R_1 = \left. \frac{-(1+\alpha) z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} \right|_{z=1} = -\frac{1+\alpha}{1-\beta} = -\frac{5}{2}$$

$$R_2 = \left. \frac{-(1+\alpha) z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right|_{z=\beta} = \frac{1+\alpha}{1-\beta} = \frac{5}{2}$$

Quindi:

$$Y(z) = -\frac{5}{2}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Il primo termine è anticausale, il secondo causale, quindi l'antitrasformata vale:

$$y(n) = \frac{5}{2}u(-n-1) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

4. ROC$_H$=$\{z : |z| > |\beta|\}$=$\{z : |z| > \frac{1}{2}\}$
   ROC$_X$=$\{z : |\alpha| < |z| < 1\}$=$\{z : \frac{1}{4} < |z| < 1\}$
   ROC$_Y$=$\{z : |\beta| < |z| < 1\}$=$\{z : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$

3.4 Esercizio 4

Data la funzione di trasferimento:

$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j2\pi f}}{1 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-j2\pi f} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-j4\pi f}} \tag{3}$$

1. Scrivere l'equazione alle differenze finite del sistema, discutendone linearità e tempo-invarianza.
2. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
3. Trovare poli e zeri della funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema e discutere causalità e stabilità del sistema.
4. Determinare l'espressione del segnale $y(n)$ in uscita dal sistema quando all'ingresso è presente la sequenza:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

3.4.1 Svolgimento

1. La funzione di trasferimento di un sistema LTI è legata alla DTFT dei segnali in ingresso e in uscita dalla relazione:
$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{Y(\mathrm{e}^{j2\pi f})}{X(\mathrm{e}^{j2\pi f})}$$
Quindi:
$$Y(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) \cdot X(\mathrm{e}^{j2\pi f})$$
Sostituendo l'espressione di $H(\mathrm{e}^{j2\pi f})$:
$$\left(1 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-j2\pi f} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-j4\pi f}\right) Y(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j2\pi f}\right) X(\mathrm{e}^{j2\pi f})$$
La IDTFT dell'espressione precedente è pari a:
$$y(n) + \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$
ossia:
$$y(n) = -\frac{1}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$
Il sistema è di tipo LTI (lineare e tempo invariante).

2. La funzione di trasferimento nel dominio della trasfrmata zeta, che si può ottere sostituendo $\mathrm{e}^{j2\pi f}$ con z nell'equazione (3), è pari a:
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}{z^2 + \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}}$$
Gli zeri, ossia le radici del numeratore, sono: $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$. I poli, ossia le radici del denominatore, sono: $z = -\frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{3}$.

   Dalla relazione ingresso/uscita si evince che il sistema è causale. Essendo tutti poli contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, il sistema è anche stabile.

3. La trasformata zeta di x(n) è:
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$
La trasformata zeta dell'uscita y(n) è quindi pari a:
$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}$$
L'antitrasformata può essere calcolata con il metodo dei residui:
$$Y(z) = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$
con:
$$R_1 = Y(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$
$$R_2 = Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$$

Quindi:

$$Y(z) = \frac{3/5}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2/5}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

3.5 Esercizio 5

Si considerino tre filtri numerici con le seguenti risposte all'impulso:

$h_1(n) = \frac{1}{2}$ per $n = 0, 1$ e zero altrove ,

$h_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$,

$h_3(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

I tre filtri sono concatenati come indicato in Figura 29.

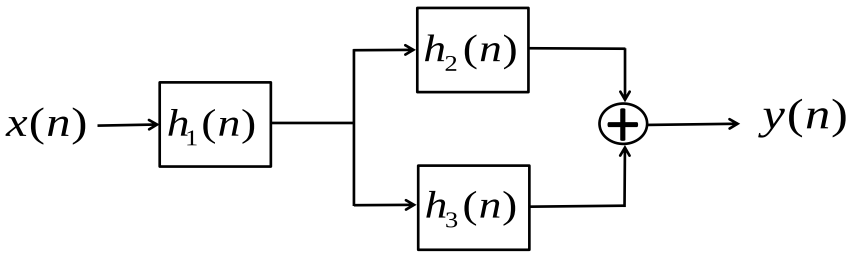


Figura 29: Sistema numerico per l'esercizio 5.

1. Ricavare la funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$ del sistema di Figura 29.
2. Calcolare la corrispondente risposta all'impulso $h_{eq}(n)$.
3. Calcolare la relazione ingresso–uscita del sistema di Figura 29 (espressa tramite l'equazione alle differenze nel dominio del tempo discreto).
4. Discutere la causalità e la stabilità di $H_{eq}(z)$.

3.5.1 Svolgimento

1. La funzione di trasferimento del sistema di Fig. 29 è pari a:

$$H_{eq}(z) = H_1(z) \cdot (H_2(z) + H_3(z))$$

con:

$$H_1(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad H_3(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Sostituendo e svolgendo i conti si ottiene:

$$H_{eq}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}.$$

2. La risposta all'impulso è l'antitrasformata della funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$. Usando il metodo dei residui per scomporre $H_{eq}(z)$, si ottiene:

$$H_{eq}(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = \frac{1+2}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{3}{2}, \quad R_2 = \frac{1-2}{1 - \frac{1}{2} \cdot (-2)} = -\frac{1}{2}$$

L'antitrasformata di $H_{eq}(z)$ vale quindi:

$$H_{eq}(n) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

3. La relazione ingresso–uscita nel dominio della trasformata zeta si scrive come:

$$Y(z) = X(z) \cdot H_{eq}(z)$$

Sostituendo l'espressione di $H_{eq}(z)$ ricavata al punto 1:

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}.$$

Quindi:

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z) = \left(1 + z^{-1}\right)X(z).$$

$$\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)Y(z) = \left(1 + z^{-1}\right)X(z)$$

$$Y(z) - \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

Antitrasformando:

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

4. Il sistema di Figura 29 è causale e stabile. La causalità si può a esempio ricavare dal fatto che la risposta all'impulso ricavata al punto 2 è nulla per valori di n minori di zero. La stabilità è garantita dal fatto che il sistema è causale e i poli di $H_{eq}(z)$ ($\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$) cadono tutti all'interno del cerchio di raggio unitario

3.6 Esercizio 6

Si consideri la seguente funzione di trasferimento $H(z)$ di un sistema LTI a tempo discreto:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

1. Determinare poli e zeri di $H(z)$ e rappresentarli sul piano.
2. Determinare tutte le possibili risposte all'impulso associabili alla funzione di trasferimento $H(z)$ data specificando, per ognuna di esse, le regioni di convergenza di $H(z)$. Discutere, inoltre, la stabilità di ogni sistema così determinato.
3. Calcolare la risposta $y(n)$ del sistema LTI <u>causale</u> alla sequenza di ingresso:

   $$x(n) = \delta(n) + \frac{3}{4}\delta(n-1)$$

   e discutere la causalità della sequenza $y(n)$ ottenuta analizzando la regione di convergenza di $Y(z) = Z\{Y(n)\}$.
4. Determinare l'equazione alle differenze del sistema LTI <u>causale</u> la cui funzione di trasferimento è la funzione $H(z)$ data sopra, e disegnarne una realizzazione circuitale.

3.6.1 Svolgimento

1. Moltiplicando numeratore e denominatore per z^2 si ottiene

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{3}{2}z}{\left(z - \frac{3}{8}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)}$$

Il sistema ha due poli ($p_1 = 3/8$, $p_2 = -3/4$) e due zeri ($z_1 = 0$, $z_2 = 3/2$)

2. Usando il metodo dei fratti semplici, si può scrivere:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{3}{8}z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

dove

$$A = \left.\frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{z + \frac{3}{4}}\right|_{z=3/8} = -1$$

$$B = \left.\frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{z - \frac{3}{8}}\right|_{z=-3/4} = 2$$

Pertanto

$$H(z) = -\frac{1}{1 - \frac{3}{8}z^{-1}} + 2\frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} = H_1(z) + 2H_2(z)$$

La risposta all'impulso è

$$h[n] = -h_1[n] + 2h_2[n].$$

Le regioni di convergenza possono essere le seguenti:

(a) $|z| > 3/4$ (che implica $|z| > 3/8$) e

$$h_1[n] = \left(\frac{3}{8}\right)^n u[n], \quad h_2[n] = \left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

La risposta all'impulso $h[n]$ è causale (filtro fisicamente realizzabile) e il sistema è stabile perché $\sum |h[n]| < \infty$ (oppure perché i poli sono all'interno della circonferenza di raggio unitario oppure perché la regione di convergenza include la circonferenza di raggio unitario).

(b) $|z| < 3/8$ (che implica $|z| < 3/4$) e

$$h_1[n] = -\left(\frac{3}{8}\right)^n u[-n-1], \quad h_2[n] = -\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1]$$

La risposta all'impulso $h[n]$ è anticausale (filtro NON fisicamente realizzabile) ed il sistema è instabile perché $\sum_n |h[n]| = \infty$ (oppure perché la regione di convergenza non include la circonferenza di raggio unitario)

(c) $3/8 < |z| < 3/4$

$$h_1[n] = \left(\frac{3}{8}\right)^n u[n], \quad h_2[n] = -\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1]$$

La risposta all'impulso $h[n]$ è non-nulla per ciascun valore di $n \in \mathbb{Z}$ (filtro NON fisicamente realizzabile) ed il sistema è instabile perché $\sum |h[n]| = \infty$ (oppure perché la regione di convergenza non include la circonferenza di raggio unitario)

3. La trasformata zeta di $x[n]$ è

$$X(z) = 1 + \frac{3}{4}z^{-1}$$

e quindi

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)} = \frac{z - \frac{3}{2}}{z - \frac{3}{8}}$$

La divisione tra polinomi (numeratore diviso denominatore) porta a

$$Y(z) = 1 - \frac{9}{8}\frac{1}{z - \frac{3}{8}} = 1 - \frac{9}{8}z^{-1}\frac{z}{z - \frac{3}{8}}$$

L'antitrasformata è dunque (sistema causale, quindi $|z| > 3/4$, quindi antitrasformata causale)

$$y[n] = \delta[n] - \frac{9}{8}\delta[n-1] * \left(\frac{3}{8}\right)^n u[n]$$

$$y[n] = \delta[n] - \frac{9}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(esistono altri metodi per ottenere lo stesso risultato).

4.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right) = X(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)$$

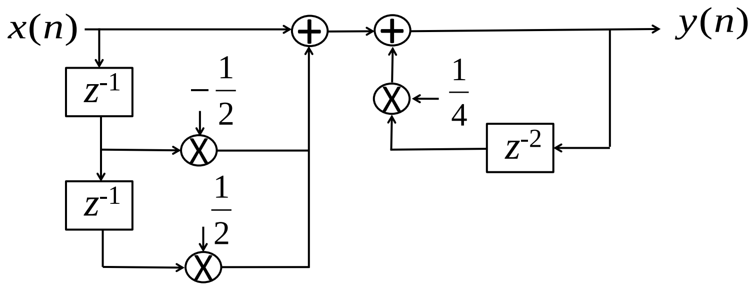
$$Y(z)\left(1 + \frac{3}{8}z^{-1} - \frac{9}{32}z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)$$

$$Y(z) = X(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right) - Y(z)\left(\frac{3}{8}z^{-1} - \frac{9}{32}z^{-2}\right)$$

$$y[n] = x[n] - \frac{3}{2}x[n-1] - \frac{3}{8}y[n-1] + \frac{9}{32}y[n-2]$$

3.7 Esercizio 7

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto, con risposta all'ipulso $h(n)$:



1. Scrivere la relazione ingresso/uscita nel dominio del tempo discreto.
2. Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$.
3. Calcolare la risposta in frequenza e $H(e^{j2\pi f})$ e calcolare l'uscita $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale $x(n) = \cos(2\pi f_0 n)$, con $f_0 = \frac{1}{4}$.
4. Ricavare l'espressione della risposta all'impulso $h(n)$.

3.7.1 Svolgimento

1. Dal diagramma a blocchi si ricava:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

Il sistema è causale, in quanto l'uscita al tempo n non dipende dai valori futuri degli ingressi e delle uscite.

2. Calcolo la trasformata zeta:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}X(z)z^{-2} - \frac{1}{4}Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right]$$

La funzione di trasferimento nel dominio della trasformata zeta vale quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

3. Sostituendo z con $e^{j2\pi f}$ nell'epressione di $H(z)$ si ottiene:

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j4\pi f}}$$

Se l'ingresso è una funzione sinusiodale, l'uscita può essere scritta come:

$$y(n) = |H(e^{j2\pi f_0})| \cos(2\pi f_0 n + \arg(H(e^{j2\pi f_0})))$$

La risposta in frequenza calcolata in f_0 vale:

$$H(e^{j2\pi f_0}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f_0}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j4\pi f_0}}$$

Sostituendo $f_0 = \frac{1}{4}$:

$$H(e^{j2\pi f_0}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\pi}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\pi}} = \frac{1 + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{2}{5}(1+j) = \frac{2}{5}\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Quindi:

$$y(n) = \frac{2}{5}\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 n + \frac{\pi}{4})).$$

4. Calcolo l'antitrasformata della funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Il numeratore ha grado uguale al denominatore, quindi non posso applicare direttamente il metodo dei residui. Una possibile soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{2}z^{-1}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \end{aligned}$$

Uso il metodo dei residui per calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$W(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$W(z)$ ha due poli semplici in $z = -1/2$ e $z = 1/2$. I residui nei due poli sono:

$$R_1 = \left.\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1+1} = -1 \quad R_2 = \left.\frac{z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

Quindi:

$$W(z) = -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Ricordando che il sistema è causale (ved. commento al punto 1), l'antitrasformata di $W(z)$ vale:

$$w(n) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
h(n) &= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + \tfrac{1}{2}\left[-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)\right] = \\
&= \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u(n-1) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u(n-1) = \\
&= \delta(n) + u(n-1)\left[2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

3.8 Esercizio 8

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto, descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

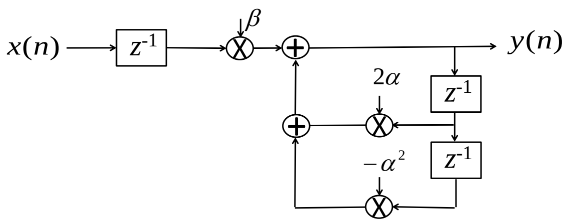
$$y(n) = \beta x(n-1) + 2\alpha y(n-1) - \alpha^2 y(n-2)$$

dove α e β sono numeri reali.

1. Disegnare lo schema circuitale del sistema.
2. Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ e discutere la stabilità del sistema al variare dei parametri α e β.
3. Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ e la risposta in frequenza $H(e^{j2\pi f})$.
4. Ponendo $\alpha = -1$ e $\beta = 2$, calcolare l'uscita l'uscita $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale $x(n)$ ottenuto dal campionamento della sinusoide analogica $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ con frequenza di campionamento pari al doppio della frequenza di Nyquist.

3.8.1 Svolgimento

1. Diagramma a blocchi:



2. Calcolo la trasformata zeta della relazione ingresso/uscita:

$$Y(z) = \beta X(z)z^{-1} + 2\alpha Y(z)z^{-1} - \alpha^2 Y(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left[1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}\right] = \beta X(z)z^{-1}$$

La funzione di trasferimento nel dominio della trasformata zeta vale quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$$

Il sistema è causale, in quanto l'uscita al tempo n non dipende dai valori futuri degli ingressi e delle uscite. Il sistema inoltre ha un polo doppio in $z = \alpha$.
Un sistema causale è stabile se tutti i poli sono contenuti all'interno del cerchio di raggio unitario, quindi in questo caso il sistema è stabile se $|\alpha| < 1$.

3. $H(z)$ si può scrivere come:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} = \frac{\beta z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$$

Dalle tavole delle trasformate si ricava:

$$h(n) = \beta \frac{1}{\alpha} n\alpha^n u(n) = \beta n \alpha^{n-1} u(n)$$

Sostituendo z con $e^{j2\pi f}$ nell'epressione di $H(z)$ si ottiene:

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{\beta e^{-j2\pi f}}{(1 - \alpha e^{-j2\pi f})^2}$$

4. La frequenza massima del segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ è pari a f_0, quindi la frequenza di Nyquist vale $2f_0$ e la frequenza di campionamento $f_c = 4f_0$. Il segnale numerico $x(n)$ può quindi essere scritto come:

$$x(n) = \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{4f_0}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right),$$

ossia una sinusoide numerica confrequenza $f_N = \frac{1}{4}$.

Se l'ingresso è una funzione sinusoidale con frequenza numerica f_N, l'uscita può essere scritta come:

$$y(n) = |H(e^{j2\pi f_N})| \sin(2\pi f_N n + \arg(H(e^{j2\pi f_N})))$$

La risposta in frequenza calcolata in $f_N = \frac{1}{4}$ vale:

$$H(e^{j2\pi f_N}) = \frac{\beta e^{-j2\pi f_N}}{(1 - \alpha e^{-j2\pi f_N})^2} = \frac{\beta e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\left(1 - \alpha e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^2} = \frac{-j\beta}{(1 + j\alpha)^2}$$

Sostituendo $\alpha = 1$ e $\beta = 2$:

$$H(e^{j2\pi f_N}) = \frac{-2j}{(1 + j)^2}$$

Modulo e fase di $H(e^{j2\pi f_N})$ sono pari a:

$$|H(e^{j2\pi f_N})| = \frac{2}{\left(\sqrt{1+1}\right)^2} = 1 \quad \arg\left(H(e^{j2\pi f_N})\right) = \frac{3\pi}{2} - 2\frac{-\pi}{4} = \pi$$

Quindi:

$$y(n) = \sin(2\pi f_N n + \pi) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

3.9 Esercizio 9

La funzione di trasferimento di un sistema numerico fisicamente realizzabile vale:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} \tag{4}$$

Al sistema viene posto in ingresso il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n-1) \tag{5}$$

1. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Calcolare la risposta all'impulso del sistema.
3. Calcolare l'uscita $y(n)$.
4. Indicare le regioni di convergenza di $H(z)$, $X(z)$ e $Y(z)$. Il sistema è stabile? Perchè?

3.9.1 Svolgimento

1. $$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} \cdot X(z) \tag{6}$$

   Dall'equazione precedente si ricava:

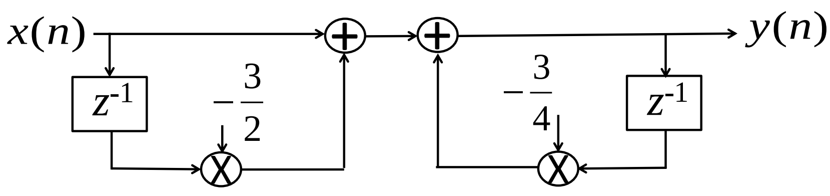
   $$\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right) \cdot Y(z) = \left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right) \cdot X(z) \tag{7}$$

   $$Y(z) = X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) \tag{8}$$

   Antitrasformando:

   $$y(n) = x(n) - \frac{3}{2}x(n-1) - \frac{3}{4}y(n-1) \tag{9}$$

   Lo schema a blocchi del sistema è quindi:

2. La funzione di trasferimento del sistema può essere scritta come:

   $$H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{3}{2}z^{-1}\frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} \tag{10}$$

   La sua antitrasformata vale:

   $$h(n) = \left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1) \tag{11}$$

3. La trasformata z dell'uscita si può trovare moltiplicando $H(z)$ per $X(z)$, dove:

   $$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}} \tag{12}$$

   $$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{-z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)} \tag{13}$$

   (il polo in z=3/2 di X(z) viene cancellato dallo zero di H(z)).
   La funzione $Y(z)$ si può antitrasformare usando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

   $$Y(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

   con:

   $$R_1 = Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1 + \frac{3}{4} \cdot 2} = -\frac{4}{5}$$

$$R_2 = Y(z) \cdot \left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)\bigg|_{z=-\frac{3}{4}} = \frac{\cdot \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{4}{5}$$

Quindi:

$$Y(z) = -\frac{4}{5}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{5}\frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{4}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

4. Le regioni di convergenza sono:
   ROC_H: $|z| > \frac{3}{4}$, ROC_X: $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$, ROC_Y: $|z| > \frac{3}{4}$

   Il sistema è stabile in quanto è causale e tutti i poli (polo singolo in $z = -3/4$) cadono all'interno della circonferenza di raggio unitario.

3.10 Esercizio 10

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta all'impulso:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right) u(n)$$

1. Calcolare la trasformata zeta di $h(n)$.
2. Calcolare poli e zeri. Il sistema è stabile? È fisicamente realizzabile? (giustificare le risposte)
3. Ricavare le relazione ingresso/uscita nel dominio del tempo.
4. Calcolare l'uscita del sistema quando all'ingresso è posto il segnale:

$$x(n) = 3 \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right)$$

3.10.1 Svolgimento

1. Dalle tavole delle trasformate si ricava:

$$Z\left\{\cos\left(2\pi f n\right)x(n)\right\} = \frac{1}{2}\left[X\left(z\mathrm{e}^{j2\pi f}\right) + X\left(z\mathrm{e}^{-j2\pi f}\right)\right].$$

   In questo caso, $f = 1/4$ e:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad , \quad X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

   Quindi:

$$H(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(z\mathrm{e}^{j2\pi\frac{1}{4}}\right)^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(z\mathrm{e}^{-j2\pi\frac{1}{4}}\right)^{-1}}\right].$$

$$H(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\jmath z\right)^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(-\jmath z\right)^{-1}}\right] = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}.$$

   La DTFT si ottiene sostituendo z con $\mathrm{e}^{2j\pi f}$:

$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4j\pi f}}$$

2. Moltiplicando numeratore e denominatore di $H(z)$ per z^2, $H(z)$ si può esprimere come:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + \frac{1}{4}}.$$

   $H(z)$ ha quindi uno zero doppio in $z = 0$ e due poli complessi coniugati in $z = j/2$ e $z = -j/2$.
   Il sistema è causale (poiché $h(n) = 0$ se $n < 0$), quindi, essendo i poli tutti contenuti all'interno della corconferenza di raggio unitario, il sistema è stabile.
   Il sistema è fisicamente realizzabile, poiché $h(n)$ è causale e reale.

3. Dall'espressione:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

   si ricava:

$$Y(z)\left[1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right] = X(z)$$

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{4}z^{-2}Y(z)$$

   Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{4}y(n-2)$$

4. La risposta di un sistema reale ad un ingresso sinusoidale di frequenza f_0 è una sinusoide con la stessa frequenza, con l'ampiezza moltiplicata per $|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})|$ e la fase incrementata di un valore pari alla fase di $H(\mathrm{e}^{2j\pi f_0})$. In questo caso:

$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4j\pi f}}$$

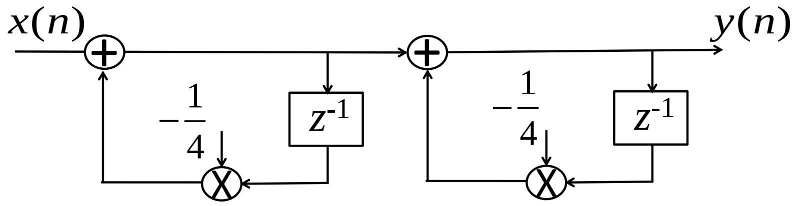
La frequenza della sinusoide è $f_0 = 1/4$:

$$H(\mathrm{e}^{j\pi f_0}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-j\pi}} = \frac{4}{3}.$$

Quindi: $y(n) = 4 \sin\left(\pi \frac{n}{2}\right)$.

3.11 Esercizio 11

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto riportato nella seguente figura:



1. Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ e la risposta all'impulso $h(n)$ del sistema.
2. Ricavare la relazione ingresso/uscita nel dominio del tempo (sotto forma di equazione alle differenze).
3. Calcolare l'uscita del sistema $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\delta(n)$$

3.11.1 Svolgimento

1. Il sistema nella figura è la cascata (connessione in serie) di due sistemi uguali con relazione ingresso/uscita:

$$w(n) = x(n) - \frac{1}{4}w(n-1)$$

Calcolando la trasformata zeta:

$$W(z) = X(z) - \frac{1}{4}W(z)z^{-1}$$

La funzione di trasferimento del singolo sistema è quindi:

$$H'(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo vale:

$$H(z) = H'(z)\cdot H'(z) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

Dalle tavole si ricava l'antitrasformata di $H(z)$, che corrisponde alla risposta all'impulso:

$$h(n) = (n+1)\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

2. La relazione ingresso/uscita del sistema complessivo si può ricavare dalla funzione di trasferimento:

$$Y(z) = X(z)H(z) = X(z)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} = X(z)\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}$$

$$Y(z)\left[1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}\right] = X(z)$$

$$Y(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{16}z^{-2}Y(z) + X(z)$$

Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{16}y(n-2)$$

3. La trasformata zeta di $x(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{1}{4} = \frac{4-1+\frac{3}{4}z^{-1}}{4\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)} = \frac{3}{4}\frac{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

La trasformata zeta dell'uscita vale:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{3}{4}\frac{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} = \frac{3/4}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

Calcolo l'antitrasformata usando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y(z) = \frac{R_1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{R_2}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

con:

$$R_1 = \left.\frac{3/4}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{3/4}{1+3} = \frac{3}{16}$$

$$R_2 = \left.\frac{3/4}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{3/4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{16}$$

Quindi:

$$Y(z) = \frac{3}{16}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{9}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{9}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

3.12 Esercizio 12

Si consideri il sistema a tempo discreto causale con funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{2\left(1 - \beta z^{-1}\right)}{1 - \frac{\alpha}{2} z^{-1} - \frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}}$$

1. Per quali valori di α e β il sistema è stabile? Per quali valori di α e β il sistema è a fase minima?
2. Scrivere la relazione ingresso/uscita in termini dell'equazione alle differenze.
3. Disegnare il diagramma a blocchi del sistema.
4. Calcolare la risposta all'impulso del sistema nel caso in cui $\alpha = +\frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$.

3.12.1 Svolgimento

1. $$H(z) = \frac{2\left(1-\beta z^{-1}\right)}{1-\frac{\alpha}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}} = \frac{2z\left(z-\beta\right)}{z^2-\frac{\alpha}{2}z-\frac{1}{2}\alpha^2}$$

   I poli di $H(z)$ sono le radici del denominatore:

   $$z^2 - \frac{\alpha}{2}z - \frac{1}{2}\alpha^2 = 0$$

   $$p_{1,2} = \frac{\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+2\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha}{4} \pm \frac{3}{4}\alpha$$

   $p_1 = \alpha$, $p_2 = -\frac{\alpha}{2}$.

   Gli zeri di $H(z)$ sono le radici del numeratore: $z(z-\beta) = 0 \rightarrow z_1 = \beta,\ z_2 = 0$.

   Un sistema causale è stabile se il modulo di tutti i poli è minore di 1, condizione verificata per $|\alpha| < 1$ nel caso in cui il polo in α non venga cancellato dallo zero in β. Se invece $\beta = \alpha$, allora il polo in α viene cancellato dallo zero e il sistema è stabile se $|\alpha| < 2$.

   Un sistema causale è a fase minima se il modulo dei poli e degli zeri è minore di 1, quindi se $|\alpha| < 1$ e $|\beta| < 1$ (se non avvengono cancellazioni tra poli e zeri).

2. $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2\left(1-\beta z^{-1}\right)}{1-\frac{\alpha}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}}$$

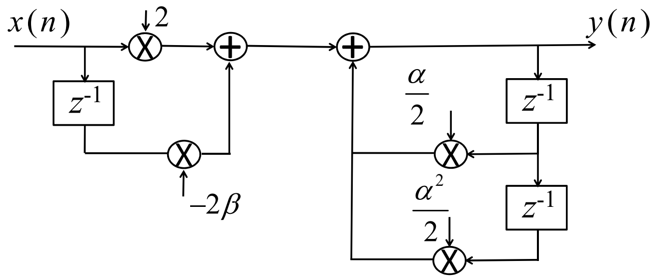
   $$Y(z)\left(1-\frac{\alpha}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}\right) = 2X(z)\left(1-\beta z^{-1}\right)$$

   $$Y(z) - \frac{\alpha}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}Y(z) = 2X(z) - 2\beta z^{-1}X(z)$$

   $$y(n) - \frac{\alpha}{2}y(n-1) - \frac{1}{2}\alpha^2 y(n-2) = 2x(n) - 2\beta x(n-1)$$

   $$y(n) = \frac{\alpha}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}\alpha^2 y(n-2) + 2x(n) - 2\beta x(n-1)$$

3. Diagramma a blocchi del sistema:



4. Nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, la funzione di trasferimento $H(z)$ vale:

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Poli:

$$p_1 = \frac{1}{2} \quad p_2 = -\frac{1}{4}$$

Applico il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{R_1}{1 - p_2 z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = \left. \frac{2 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2+2}{1 + \frac{1}{4} \cdot 2} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$R_2 = \left. \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{2-4}{1 - \frac{1}{2} \cdot (-4)} = -\frac{2}{3}$$

$$H(z) = \frac{8/3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2/3}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

3.13 Esercizio 13

La funzione di trasferimento di un sistema numerico fisicamente realizzabile vale:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{14}$$

Al sistema viene posto in ingresso il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \tag{15}$$

1. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Calcolare la risposta all'impulso del sistema.
3. Calcolare l'uscita $y(n)$.
4. Indicare le regioni di convergenza di $H(z)$, $X(z)$ e $Y(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)

3.13.1 Svolgimento

1.
$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot X(z) \tag{16}$$

   Dall'equazione precedente si ricava:

$$\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot Y(z) = \left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right) \cdot X(z) \tag{17}$$

$$Y(z) = X(z) + \frac{3}{4}z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) \tag{18}$$

   Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) + \frac{3}{4}x(n-1) - \frac{1}{2}y(n-1) \tag{19}$$

   Lo schema a blocchi del sistema è mostrato in Fig. 30.

2. La funzione di trasferimento del sistema può essere scritta come:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{4}z^{-1}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{20}$$

   La sua antitrasformata vale:

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \tag{21}$$

3. La trasformata z dell'uscita si può trovare moltiplicando $H(z)$ per $X(z)$, dove:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{22}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \tag{23}$$

   La funzione $Y(z)$ si può antitrasformare usando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

   con:

$$R_1 = Y(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{3}{4}\cdot(-2)}{1 - \frac{1}{3}\cdot(-2)} = -\frac{3}{10}$$

$$R_2 = Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 + \frac{3}{4}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{13}{10}$$

   Quindi:

$$Y(z) = -\frac{3}{10}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{13}{10}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

   Antitrasformando:

$$y(n) = -\frac{3}{10}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{13}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

4. Le regioni di convergenza sono:
ROC$_H$: $|z| > \frac{1}{2}$, ROC$_X$: $|z| > \frac{1}{3}$, ROC$_Y$: $|z| > \frac{1}{2}$

Il sistema è stabile in quanto è causale e tutti i poli (polo singolo in $z = -1/2$) cadono all'interno della circonferenza di raggio unitario. Il sistema è a fase minima in quanto anche lo zero di $H(z)$ ($z = -3/4$) cade all'interno della circonferenza di raggio unitario.

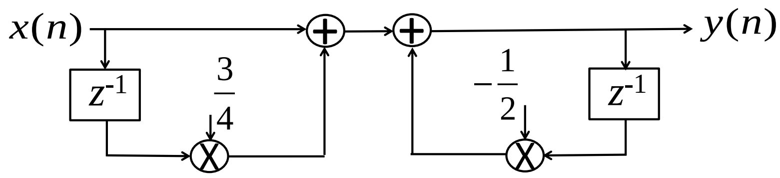


Figura 30: Schema a blocchi del sistema.

3.14 Esercizio 14

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto causale con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}$$

1. Scrivere l'equazione alle differenze finite del sistema.
2. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
3. Trovare poli e zeri della funzione di trasferimento $H(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)
4. Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$.
5. Il segnale $x(n) = \cos(2\pi f_0 n)$ viene posto all'ingresso del sistema. Esiste un valore della frequenza numerica f_0 tale per cui l'uscita $y(n)$ del sistema risulti identicamente nulla?

3.14.1 Svolgimento

1. La funzione di trasferimento di un sistema LTI è legata alla trasformata zeta dei segnali in ingresso e in uscita dalla relazione:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Quindi:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Sostituendo l'espressione di $H(z)$:

$$\left(1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}\right) Y(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) X(z)$$

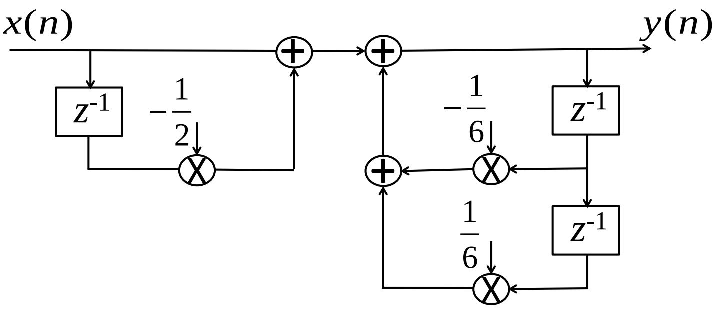
Antitrasformano l'espressione precedente si ottiene:

$$y(n) + \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$

ossia:

$$y(n) = -\frac{1}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$

2. Schema a blocchi del sistema LTI:



3. Gli zeri di $H(z)$, ossia le radici del numeratore, sono: $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$.
I poli di $H(z)$, ossia le radici del denominatore, sono: $z = -\frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{3}$.

Il sistema è causale e tutti poli sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, quindi il sistema è stabile.
Il sistema è causale e tutti poli e gli zeri sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, quindi il sistema è a fase minima.

4. La risposta all'impulso $h(n)$ può essere calcolata antitrasformando $H(z)$ con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1+1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}$$

$$R_2 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{6/5}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1/5}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

5. La risposta di un sistema reale ad un ingresso sinusoidale di frequenza f_0 è una sinusoide con la stessa frequenza, con l'ampiezza moltiplicata per $|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})|$ e la fase incrementata di un valore pari alla fase di $H(\mathrm{e}^{2j\pi f_0})$. L'uscita quindi è identicamente nulla se $|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})| = 0$ (o equivalentemente $|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})|^2 = 0$). In questo caso:

$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j2\pi f}}{1 + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-j2\pi f} - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-j4\pi f}}$$

$$|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})|^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j2\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j2\pi f}\right)^* = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-j2\pi f} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{j2\pi f} = \frac{5}{4} - \cos(2\pi f_0)$$

Non esiste nessun valore di f_0 per cui $\frac{5}{4} - \cos(2\pi f_0) = 0$.

3.15 Esercizio 15

Si considerino tre filtri numerici con le seguenti risposte all'impulso:

$h_1(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n),\ h_2(n) = \left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n),\ h_3(n) = \frac{1}{4}$ per $n = 0, 1$ e zero altrove.

I tre filtri sono concatenati come indicato in Fig. 31.

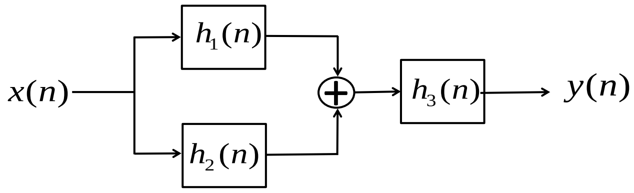


Figura 31: Sistema numerico per l'esercizio 2.

1. Ricavare la funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$ del sistema di Fig. 31.
2. Calcolare la corrispondente risposta all'impulso $h_{eq}(n)$.
3. Calcolare la relazione ingresso–uscita del sistema di Fig. 31 (espressa tramite l'equazione alle differenze nel dominio del tempo discreto) e disegnare il corrispondente diagramma a blocchi.
4. Discutere la tipologia (FIR o IIR), la causalità e la stabilità del sistema di Fig. 31.

3.15.1 Svolgimento

1. La funzione di trasferimento del sistema di Fig. 31 è pari a:

$$H_{eq}(z) = (H_1(z) + H_2(z)) \cdot H_3(z)$$

con:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} \quad (|z| > 2/3), \quad H_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}} \quad (|z| > 2/3), \quad H_3(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^{-1}$$

Sostituendo e svolgendo i conti si ottiene:

$$H_{eq}(z) = \frac{1}{2}\frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}.$$

con regione di convergenza $|z| > \frac{2}{3}$.

2. La risposta all'impulso è l'antitrasformata della funzione di trasferimento $H_{eq}(z)$. Usando il metodo dei residui per scomporre $H_{eq}(z)$, si ottiene:

$$H_{eq}(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}} =$$

con:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{8}, \quad R_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{8}$$

L'antitrasformata di $H_{eq}(z)$ vale quindi:

$$h_{eq}(n) = \frac{5}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n) - \frac{1}{8}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

3. La relazione ingresso–uscita nel dominio della trasformata zeta si scrive come:

$$Y(z) = X(z) \cdot H_{eq}(z)$$

Sostituendo l'espressione di $H_{eq}(z)$ ricavata al punto 1:

$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{1}{2}\frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}.$$

Quindi:

$$\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)Y(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right)X(z).$$

$$\left(1 - \frac{4}{9}z^{-2}\right)Y(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right)X(z)$$

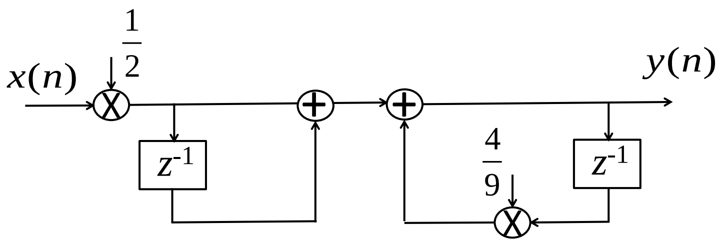
$$Y(z) - \frac{4}{9}z^{-2}Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

Antitrasformando:

$$y(n) - \frac{4}{9}y(n-2) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{4}{9}y(n-2)$$

Diagramma a blocchi:



4. Il sistema è di tipo IIR, poiché contiene una retroazione. È inoltre causale e stabile. La causalità si può a esempio ricavare dal fatto che la risposta all'impulso ricavata al punto 2 è nulla per valori di n minori di zero. La stabilità è garantita dal fatto che il sistema è causale e i poli di $H_{eq}(z)$ ($\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$) cadono tutti all'interno della circonferenza di raggio unitario.

3.16 Esercizio 16

La funzione di trasferimento di un sistema numerico fisicamente realizzabile vale:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

1. Scrivere l'espressione dell'equazione alle differenze e disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Indicare la regione di convergenza di $H(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)
3. Calcolare la risposta all'impulso del sistema.
4. Calcolare l'uscita del sistema quando all'ingresso viene posto il segnale $x(n) = \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right)$.

3.16.1 Svolgimento

1. $$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{4}{9}z^{-2}} \cdot X(z)$$

   Dall'equazione precedente si ricava:

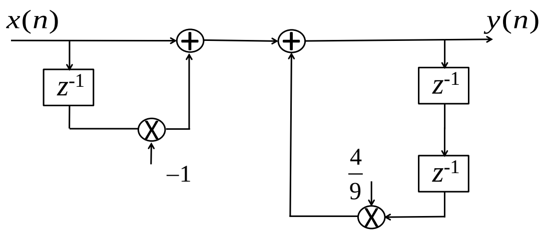
   $$\left(1 - \frac{4}{9}z^{-2}\right) \cdot Y(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot X(z)$$

   $$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) + \frac{4}{9}z^{-2}Y(z)$$

   Antitrasformando:

   $$y(n) = x(n) - x(n-1) + \frac{4}{9}y(n-2)$$

   Lo schema a blocchi del sistema è quindi:



2. La funzione $H(z)$ ha due zeri in $z = 1$ e $z = 0$ e due poli in $z = 2/3$ e $z = -2/3$.
   Essendo il sistema fisicamente realizzabile, il sistema è causale, quindi la regione di convergenza è l'esterno della circonferenza con raggio $2/3$.
   Siccome il sistema è causale e tutti poli sono contenuti all'interno dlela circonferenza di raggio unitario, il sistema è stabile. Non è a fase minima, in quanto lo zero in $z = 1$ ha modulo unitario (non è strettamente all'interno della circonferenza di raggio unitario).

3. La risposta all'impulso si può trovare invertendo la funzione di trasferimento con il metodo dei fratti semplici:

   $$H(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

   con:

   $$R_1 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}$$

   $$R_2 = H(z) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{5}{4}$$

   Quindi:

   $$H(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{5}{4}\frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

   Antitrasformando:

   $$h(n) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n) + \frac{5}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

4. La risposta di un sistema reale ad un ingresso sinusoidale di frequenza f_0 è una sinusoide con la stessa frequenza, con l'ampiezza moltiplicata per $|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})|$ e la fase incrementata di un valore pari alla fase di $H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})$. In questo caso:

$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2j\pi f}}{1 - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-4j\pi f}}$$

La frequenza della sinusoide è $f_0 = 1/4$:

$$H(\mathrm{e}^{j\pi f_0}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-j\pi/2}}{1 - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-j\pi}} = \frac{1 + j}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{9}{13}\,(1 + j)\,.$$

Il modulo di $(1 + j)$ è $\sqrt{2}$, mentre la fase vale $\pi/4$, quindi:

$$y(n) = \frac{9}{13}\sqrt{2}\cos\left(\pi\frac{n}{2} + \pi/4\right)$$

.

3.17 Esercizio 17

Dato il filtro numerico descritto dalla seguente relazioni ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) - \alpha x(n-1) + \left(\beta + \frac{1}{2}\right) y(n-1) - \frac{\beta}{2} y(n-2) \tag{24}$$

con α e β numeri reali non nulli.

1. Scrivere l'espressione dellla funzione di trasferimento $H(z)$ del filtro.
2. Indicare la regione di convergenza di $H(z)$ e discutere stabilità e tipologia (FIR o IIR) del filtro al variare dei parametri α e β.
3. Calcolare l'espressione del segnale $y(n)$ in uscita dal filtro quando all'ingresso viene posto il segnale: $x(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$.
4. Calcolare la risposta all'impulso del filtro quando α=1 e $\beta = \frac{1}{3}$.

3.17.1 Svolgimento

1. La trasformata zeta della relazione ingresso/uscita vale:

$$Y(z) = X(z) - \alpha X(z)z^{-1} + \left(\beta + \frac{1}{2}\right) Y(z)z^{-1} - \frac{\beta}{2} Y(z)z^{-2}$$

   Quindi:

$$Y(z)\left[1 - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) z^{-1} + \frac{\beta}{2} z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - \alpha z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) z^{-1} + \frac{\beta}{2} z^{-2}} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{\left(1 - \beta z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$

2. Il sistema è sempre causale, per qualunque valore di α e β, in quanto l'uscita all'istante di tempo n dipende solo dai valori dell'ingresso negli istanti di tempo precedenti. $H(z)$ ha due poli in $z = \beta$ e $z = \frac{1}{2}$ e due zeri in $z = \alpha$ e $z = 0$.
   Se $\alpha \neq \beta$, ROC: $|z| > \max\left\{|\beta|, \frac{1}{2}\right\}$.
   Se $\alpha = \beta$, il polo in $z = \beta$ viene cancellato dallo zero, quindi ROC: $|z| > \frac{1}{2}$.

   La tipologia del filtro è IIR per qualunque valore di α e β. Essendo causale, è stabile se tutti i poli sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, ossia se $|\beta| < 1$, quando $\alpha \neq \beta$. È sempre stabile se $\alpha = \beta$.

3. La trasformata zeta dell'ingresso vale:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1}$$

   La trasformata zeta dell'uscita vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \frac{1 - \alpha z^{-1}}{\left(1 - \beta z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{\left(1 - \beta z^{-1}\right)}$$

   Antitrasformando:

$$\begin{aligned} y(n) &= (\beta)^n u(n) - \alpha (\beta)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \delta(n) + \beta (\beta)^{n-1} u(n-1) - \alpha (\beta)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \delta(n) + (\beta - \alpha) (\beta)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

4. La risposta all'impulso si può trovare invertendo la funzione di trasferimento con il metodo dei fratti semplici:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

   con:

$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - 2}{1 - \frac{2}{3}} = -3$$

$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - 3}{1 - \frac{3}{2}} = 4$$

Quindi:

$$H(z) = -\frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$