La trasformata di Laplace

Vincenzo Recupero
Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino
vincenzo.recupero@polito.it

Versione: 14 giugno 2012
Revisione: 8 giugno 2016

Metodi Matematici per l'Ingegneria
05BQXMQ, 06BQXOA (Aaa-Ferr), 06BQXOD, 06BQXPC (Aaa-Ferr)

Dispense di Analisi

Avvertenza: Solo alcune parti di questo capitolo saranno svolte a lezione (si veda il programma dettagliato presentato a fine corso).

1 Trasformata di Laplace di funzioni

Definizione 1.1. Sia $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile. Poniamo

$$\Omega_f := \{s \in \mathbb{C} \ : \ f(t)e^{-st} \text{ è sommabile nella variabile } t \in [0, +\infty[\} \subseteq \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Si dice *trasformata di Laplace di* f la funzione $\mathcal{L}(f) : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t, \qquad s \in \Omega_f. \tag{1.2}$$

Spesso si definisce la trasformata di Laplace $\mathcal{L}(f)$ per funzioni f definite in tutto $\mathbb{R}$ con la condizione che siano nulle in $]-\infty, 0[$ e si scrive $\mathcal{L}(f)(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$. Per evitare ambiguità, nel caso ci serva estendere l'integrale a tutto $\mathbb{R}$ noi scriveremo invece

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Si osservi che l'integrale in (1.2) può convergere anche se la funzione $f(t)e^{-st}$ non è sommabile (in t). Non è difficile dimostrare la seguente

Proposizione 1.1. *Sia $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile. Poniamo*

$$\lambda_f := \inf \left\{ \operatorname{Re} s \ : \ f(t)e^{-st} \text{ è sommabile nella variabile } t \in [0, +\infty[\right\} \tag{1.3}$$

(per convenzione si pone $\inf \varnothing = +\infty$). Allora può verificarsi solo una delle seguenti possibilità

(i) $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > \lambda_f\}$ *(λ_f è finito)*

(ii) $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s \geqslant \lambda_f\}$ *(λ_f è finito)*

(iii) $\Omega_f = \mathbb{C}$

(iv) $\Omega_f = \varnothing$.

Definizione 1.2. Una funzione $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile si dice *$\mathcal{L}$-trasformabile* (o *Laplace (assolutamente) trasformabile*) se $\Omega \neq \varnothing$. Il numero λ_f è detto *ascissa di (assoluta) $\mathcal{L}$-trasformabilità*. L'insieme Ω_f *insieme di (assoluta) $\mathcal{L}$-trasformabilità*.

La proposizione precedente ci dice quindi che l'insieme di $\mathcal{L}$-trasformabilità è sempre un semipiano avente come frontiera una retta verticale (semipiano eventualmente "degenere", quando si riduce all'insieme vuoto oppure è tutto il piano).

Esempio 1.1. Calcoliamo la trasformata di Laplace di $H(t)$. Si ha

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=+\infty}.$$

Ora $|e^{-st}| = e^{-(\operatorname{Re} s)t}$, quindi $\lim_{t\to+\infty} e^{-st}$ esiste (in $\mathbb{C}$) se e solo se $\operatorname{Re} s > 0$. In tal caso il limite vale zero, per cui abbiamo trovato che $\lambda_H = 0$ e Ω_H è il semipiano aperto delle ascisse strettamente positive. Si ha allora

$$\boxed{\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.} \tag{1.4}$$

♡

Nella prossima proposizione è comodo utilizzare le seguenti notazioni:

$$\Omega_f + s_0 := \{s_1 + s_0 \ : \ s_1 \in \Omega_f\},$$
$$a\Omega_f := \{as_1 \ : \ s_1 \in \Omega_f\}.$$

valide per $s_0 \in \mathbb{C}$ e $a > 0$. Nel primo caso Ω_f viene traslato da 0 al punto s_0, essendo Ω_f un semipiano, ciò vuol dire che viene traslato orizzontalmente di $\operatorname{Re} s_0$; nel secondo caso Ω_f si dilata (o comprime) di un fattore reale a.

Proposizione 1.2. *Siano* $f, g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$*-trasformabili e siano* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $s_0 \in \mathbb{C}$, $t_0, a > 0$. *Allora*

(i) $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g) \qquad \text{in } \Omega_f \cap \Omega_g$

(ii) $\mathcal{L}(e^{s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - s_0) \qquad \text{per ogni } s \in \Omega_f + s_0$

(iii) $\mathcal{L}(f(t - t_0) H(t - t_0))(s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}(f(t))(s) \qquad \text{per ogni } s \in \Omega_f$

(iv) $\mathcal{L}(f(at))(s) = \dfrac{1}{a} \mathcal{L}(f(t)) \left(\dfrac{s}{a}\right) \qquad \text{per ogni } s \in a\Omega_f$

(v) $\exists [\mathcal{L}(f(t))]'(s) = -\mathcal{L}(tf(t))(s) \qquad \text{per ogni } s \text{ interno a } \Omega_f$

(vi) *se* $f \in C([0, +\infty[)$ *è derivabile in* $]0, +\infty[$ *e* f' *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile, allora* f *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile e*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0+) \text{ per ogni } s \in \Omega_{f'}.$$

Si noti che la (v) della Proposizione precedente 1.2 implica che $\mathcal{L}(f)(s)$ è una funzione analitica nell'interno di Ω_f.

Esempio 1.2. Calcoliamo ora $\mathcal{L}(tH(t))$ usando la proprietà (v) della Proposizione 1.2. Si ha

$$\mathcal{L}(tH(t))(s) = -[\mathcal{L}(H(t))]'(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

per $\operatorname{Re} s > 0$. Allo stesso modo, sempre per $\operatorname{Re} s > 0$, si ha

$$\mathcal{L}(t^2 H(t))(s) = \mathcal{L}(ttH(t))(s) = -[\mathcal{L}(tH(t))]'(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3},$$

e iterando il procedimento otteniamo

$$\boxed{\mathcal{L}(t^k H(t))(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.} \tag{1.5}$$

♡

Più generalmente di quanto si è fatto nel precedente esempio, è possibile iterare la formula della Proposizione 1.2(v): si ha $[\mathcal{L}(f(t))]''(s) = [-\mathcal{L}(tf(t))]'(s) = +\mathcal{L}(t^2 f(t))(s)$. In generale si trova

$$\boxed{[\mathcal{L}(f(t))]^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k f(t))(s), \qquad k \in \mathbb{N}.} \tag{1.6}$$

Esempio 1.3. Fissato $s_0 \in \mathbb{C}$, calcolare $\mathcal{L}(e^{s_0 t} H(t))$.
Evidentemente è possibile procedere con un calcolo diretto tramite la definizione di trasformata. Usiamo però la Proposizione 1.2(ii), che comunque si prova proprio tramite la definizione. Si ha $\mathcal{L} = (e^{s_0 t} H(t))(s) = \mathcal{L}(H(t))(s - s_0) = \frac{1}{s - s_0}$ per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$:

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{s_0 t} H(t))(s) = \frac{1}{s - s_0}, \qquad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0.} \tag{1.7}$$

♡

Esempio 1.4. Calcolare $\mathcal{L}(\cos(\omega t)H(t))$, dove $\omega \in \mathbb{R}$.
Grazie ai punti (i) e (ii) della Proposizione 1.2

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\cos(\omega t)H(t))(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}H(t)\right)(s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{i\omega t}H(t))(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-i\omega t}H(t))(s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t))(s-i\omega) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t))(s+i\omega) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio vale per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} i\omega = 0$ e $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} -i\omega = 0$. Riassumendo

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos(\omega t)H(t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.} \tag{1.8}$$

Per esercizio si verifichi in modo simile che

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin(\omega t)H(t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.} \tag{1.9}$$

♡

Esempio 1.5. Calcolare $\mathcal{L}(\sinh(\omega t)H(t))$, dove $\omega \in \mathbb{R}$.
Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sinh(\omega t)H(t))(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{\omega t}-e^{\omega t}}{2}H(t)\right)(s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{\omega t}H(t))(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-\omega t}H(t))(s) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t))(s-\omega) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t))(s+\omega) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio vale per $\operatorname{Re} s > \omega$ e $\operatorname{Re} s > -\omega$. Riassumendo

$$\boxed{\mathcal{L}(\sinh(\omega t)H(t))(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{Re} s > |\omega|.} \tag{1.10}$$

Per esercizio si calcoli che

$$\boxed{\mathcal{L}(\cosh(\omega t)H(t))(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{Re} s > |\omega|.} \tag{1.11}$$

♡

Dalla Proposizione 1.2 è possibile dedurre le seguenti proprietà.

Proposizione 1.3. *Sia f una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora*

(i) *($\mathcal{L}$-trasformata di una primitiva) Ogni primitiva di f è $\mathcal{L}$-trasformabile e*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s}, \quad s \in \Omega_f,\ \operatorname{Re} s > 0.$$

(ii) *Se $f(t)/t$ è $\mathcal{L}$-trasformabile, allora*

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}(f)(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \quad s \in \Omega_f \cap \mathbb{R},\ s > 0.$$

(iii) *Se f è T-periodica, allora*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Prima di passare in rassegna alcuni esercizi, presentiamo altre proprietà delle quali omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 1.4. *Sia f una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora*

(i) $\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

(ii) *(Teorema del valore iniziale) Se esiste $f(0+)$ finito, allora*

$$f(0+) = \lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} s\mathcal{L}(f)(s).$$

(iii) *(Teorema del valore finale) Se esiste $f(+\infty) := \lim_{t \to +\infty} f(t)$ finito, allora*

$$f(+\infty) = \lim_{s \to 0+} s\mathcal{L}(f)(s).$$

Esempio 1.6. Calcolare $\mathcal{L}(H(t-2))$.
Si ha

$$\mathcal{L}(H(t-2))(s) = \mathcal{L}(H(t-2)H(t-2))(s) = e^{-2s}\mathcal{L}(H(t))(s) = e^{-2s}\frac{1}{s}$$

per $\operatorname{Re} s > 0$. ♡

Esempio 1.7. Calcolare $\mathcal{L}(p_1(t-2))$.
Si ha $p_1(t-2) = H(t-3/2) - H(t-5/2)$, quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(p_1(t-2))(s) &= \mathcal{L}(H(t-3/2))(s) - \mathcal{L}(H(t-5/2))(s) \\
&= \mathcal{L}(H(t-3/2)H(t-3/2))(s) - \mathcal{L}(H(t-5/2)H(t-5/2))(s) \\
&= e^{-3s/2}\mathcal{L}(H(t))(s) - e^{-5s/2}\mathcal{L}(H(t))(s) \\
&= e^{-3s/2}\frac{1}{s} - e^{-5s/2}\frac{1}{s} = \frac{e^{-3s/2} - e^{-5s/2}}{s}
\end{aligned}$$

per $\operatorname{Re} s > 0$. ♡

Esempio 1.8. Calcolare $\mathcal{L}(f)$, dove

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2-t & \text{se } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si ha $f(t) = [H(t)-H(t-1)]+(2-t)[H(t-1)-H(t-2)] = H(t)-(t-1)H(t-1)+(t-2)H(t-2)$, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(H(t))(s) - \mathcal{L}((t-1)H(t-1))(s) + \mathcal{L}((t-2)H(t-2))(s) \\ &= \mathcal{L}(H(t))(s) - e^{-s}\mathcal{L}(tH(t))(s) + e^{-2s}\mathcal{L}(tH(t))(s) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{s-e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

per $\operatorname{Re} s > 0$. ♡

Esempio 1.9. Calcolare $\mathcal{L}(tp_1(t-1/2))$.
Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(tp_1(t-1/2))(s) &= -[\mathcal{L}(p_1(t-1/2))]'(s) = -[\mathcal{L}(H(t)-H(t-1))]'(s) \\ &= -\mathcal{L}(H(t))'(s) + \mathcal{L}(H(t-1))'(s) \\ &= -\mathcal{L}(H(t))'(s) + \mathcal{L}(H(t-1)H(t-1))'(s) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{e^{-s}}{s} = \frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

per $\operatorname{Re} s > 0$. ♡

Esempio 1.10. Calcoliamo $\mathcal{L}(e^{-it}t^7H(t))$.
Si ha

$$\mathcal{L}(e^{-it}t^7H(t))(s) = \mathcal{L}(t^7H(t))(s+i) = \frac{7!}{(s+i)^8} \tag{1.12}$$

per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}(-i) = 0$. ♡

Esempio 1.11. Calcoliamo $\mathcal{L}((t-4)H(t-5))$.
Si ha $(t-4)H(t-5) = (t-5)H(t-5) + H(t-5)$, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((t-4)H(t-5))(s) &= \mathcal{L}((t-5)H(t-5))(s) + \mathcal{L}(H(t-5))(s) \\ &= e^{-5s}\mathcal{L}(tH(t))(s) + e^{-5s}\mathcal{L}(H(t))(s) \\ &= e^{-5s}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right]. \end{aligned}$$

♡

2 Formula di inversione

Supponiamo ora che $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ sia continua e $\mathcal{L}$-trasformabile e che

$$\mathcal{L}(f)(s_1+is_2) \text{ è sommabile in } s_2 \in \mathbb{R} \text{ per un certo } s_1 > \lambda_f \text{ fissato.} \tag{2.1}$$

Estendiamo la definizione di f per t negativi ponendo $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s_1+is_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-s_1t}e^{-2\pi i(s_2/2\pi)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{F}(H(t)f(t)e^{-s_1t})\left(\frac{s_2}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

per ogni $s_2 \in \mathbb{R}$. Quindi la formula trovata vale anche con $2\pi s_2$ al posto di s_2, per cui

$$\mathcal{L}(f)(s_1 + i2\pi s_2) = \mathcal{F}(H(t)f(t)e^{-s_1 t})(s_2) \qquad \forall s_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

L'ipotesi (2.1) permette di applicare la formula di inversione puntuale di Fourier (Corollario 5.1 delle dispense sulla Trasformata di Fourier e osservazioni seguenti[1]) ai due membri di questa equazione come funzioni di s_2. Otteniamo perciò che per ogni $t > 0$

$$\begin{aligned} f(t)e^{-s_1 t} &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{L}(f)(s_1 + 2\pi i s_2))(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(f)(s_1 + 2\pi i s_2)e^{2\pi i t s_2}\,\mathrm{d}s_2 \quad (\tau = 2\pi s_2,\ \mathrm{d}\tau = 2\pi\,\mathrm{d}s_2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(f)(s_1 + i\tau)e^{it\tau}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Abbiamo trovato allora che

$$f(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \mathcal{L}(f)(s_1 + i\tau)e^{(s_1+i\tau)t}\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall t > 0. \tag{2.3}$$

Ricordandoci della definizione di integrale curvilineo complesso, consideriamo ora la curva $\gamma_{R,s_1} : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\gamma_{R,s_1}(\tau) = s_1 + i\tau, \qquad \tau \in [-R, R]$$

che parametrizza il segmento verticale che va da $s_1 - iR$ a $s_1 + iR$. Poiché $\gamma'_{R,s_1}(\tau) = i$ si trova che

$$f(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R,s_1}} \mathcal{L}(f)(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \qquad \forall t > 0. \tag{2.4}$$

Passando al limite per $R \to +\infty$ si potrebbe dire che si sta integrando in senso improprio su tutta la retta verticale passante per s_1. È uso comune adottare la notazione

$$\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} \mathcal{L}(f)(s)e^{st}\,\mathrm{d}s := \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{R,s_1}} \mathcal{L}(f)(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \tag{2.5}$$

per cui l'equazione (2.4) diventa

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} \mathcal{L}(f)(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \qquad \forall t > 0,} \tag{2.6}$$

nota come *formula di Riemann-Fourier*. Riepilogando abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 2.1. *Supponiamo che $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ sia continua e $\mathcal{L}$-trasformabile e che*

$$\mathcal{L}(f)(s_1 + is_2) \text{ è sommabile in } s_2 \in \mathbb{R} \text{ per un certo } s_1 > \lambda_f \text{ fissato.} \tag{2.7}$$

Allora vale la formula di Riemann-Fourier (2.6) *per ogni $t > 0$.*

[1] non sappiamo se la funzione $H(t)f(t)e^{-s_1 t}$ è continua in $t = 0$

Osservazione 2.1. Usando strumenti più sofisticati di teoria dell'integrazione, si potrebbe mostrare che l'ipotesi che f *è continua* è in qualche modo ridondante: se non la si assume si dimostra comunque a posteriori che, tranne che in un insieme "piccolo" che non altera il valore del suo integrale, f (anzi $H(t)f(t)$) è uguale a una funzione continua: *di fatto f è continua*, anzi lo è $H(t)f(t)$ per cui si trova addirittura $f(0) = 0$. Ciò restringe di molto l'applicabilità del Teorema 2.1, ma non impedisce di provare il seguente fondamentale Teorema 2.2. $\diamondsuit$

Il teorema precedente vale sotto un'ipotesi molto forte, la sommabilità di $\mathcal{L}(f)(s_1 + is_2)$ nella variabile s_2, che non è soddisfatta da funzioni molto semplici come ad esempio $f(t) = H(t)$ per cui $F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = 1/s$. Tuttavia ha una consequenza molto importante: l'invertibilità della trasformata di Laplace. Si ha infatti il seguente

Teorema 2.2. *La trasformata di Laplace è iniettiva sull'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili continue, cioè se $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ allora $f = g$ per ogni coppia di funzioni continue $\mathcal{L}$-trasformabili f, g.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ allora $\mathcal{L}(f - g) = \mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g) = 0$, quindi $\mathcal{L}(f - g)$ è sommabile. Quindi possiamo applicare la formula di Riemann-Fourier e troviamo che $f(t) - g(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{s_1 - i\infty}^{s_1 + i\infty} \mathcal{L}(f - g)(s) e^{st}\, \mathrm{d}s = 0$ per ogni $t > 0$. $\square$

Osservazione 2.2. Tenendo presente l'Osservazione 2.1, si vede che anche per il Teorema 2.2 la continuità di f e g è un'ipotesi ridondante. $\diamondsuit$

Il Teorema 2.2 dice appunto che $\mathcal{L}$ è invertibile, quindi se è data una funzione $F(s)$ che è la trasformata di Laplace di una qualche funzione (continua in $[0, +\infty[$), allora questa funzione è unica, cioè esiste un'unica $f(t)$ tale che $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$. Tale f viene detta *antitrasformata di Laplace di* F e si denota con $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Esempio 2.1. Si calcoli l'antitrasformata della funzione $F(s) = \dfrac{s}{4s^2 + 9}$.
Si ha

$$F(s) = \frac{s}{4s^2 + 9} = \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + 9/4}$$

quindi dalla (1.8) si ottiene che

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{4} \cos(3t/2) H(t).$$

$\heartsuit$

Esempio 2.2. Si calcoli l'antitrasformata della funzione $F(s) = \dfrac{e^{-3s} s}{4s^2 + 9}$.
Siccome $\mathcal{L}(f(t - t_0)H(t - t_0))(s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}(f(t))(s)$ si ha $\mathcal{L}^{-1}(e^{-t_0 s} \mathcal{L}(f(t))(s)) = f(t - t_0)H(t - t_0)$, in altri termini se $G(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ allora $\mathcal{L}^{-1}(e^{-t_0 s} G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))(t - t_0)$. Quindi, utilizzando anche il risultato dell'esercizio precedente (qui $G(s) = \dfrac{s}{4s^2 + 9}$ e $t_0 = 3$) si trova

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{4s^2 + 9}\right)(t - 3) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3}{2}(t - 3)\right) H(t - 3)$$

$\heartsuit$

Esempio 2.3. Si calcoli l'antitrasformata della funzione $F(s) = \dfrac{1}{(s - 3)^2}$.
Poiché $\mathcal{L}(e^{s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - s_0)$ si ha

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = e^{3t} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) = e^{3t} t H(t)$$

$\heartsuit$

Esempio 2.4. Si calcoli l'antitrasformata della funzione $F(s) = \dfrac{1}{(2s-1)^2}$.
Si ha $F(s) = \dfrac{1}{4(s-1/2)^2}$, quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{4} e^{t/2} t H(t).$$

♡

Esempio 2.5. Si calcoli l'antitrasformata della funzione $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2+4}$.
Si ha

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = e^{-t}\sin(2t)H(t).$$

♡

Vediamo ora una condizione sufficiente affinché una data $F(s)$ sia una trasformata di Laplace e la sua antitrasformata sia fornita dalla formula di Riemann-Fourier. Ne omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.3. *Sia $F(s)$ una funzione analitica nell'insieme $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda_0\}$ per un certo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo poi che esista $M > 0$ tale che $|F(s)| \leqslant M/|s|^2$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_0$. Allora F è la trasformata di Laplace della funzione $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$ data dalla formula di Riemann-Fourier* (2.6) *(con $s_1 > \lambda_0$) per $t > 0$.*

Questo Teorema si applica ad esempio a funzioni del tipo $F(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2}$, infatti se $\operatorname{Re} s > \omega > 0$, si ha (si ricordi che $||z| - |w|| \leqslant |z-w|$)

$$\left|\frac{1}{s^2+\omega^2}\right| \leqslant \frac{1}{||s|^2-\omega^2|} = \frac{1}{|s|^2-\omega^2} \sim \frac{1}{|s|^2} \quad \text{per } |s| \to +\infty.^2$$

Vale quindi anche per potenze positive di $\frac{1}{s^2+\omega^2}$. In modo simile si vede che le ipotesi sono soddisfatte per funzioni del tipo $1/(s-s_0)^m$ com $m \geqslant 2$. Il teorema non è invece applicabile al caso $F(s) = 1/s$ (o $F(s) = 1/(s-s_0)$). Per queste semplici, ma importanti funzioni tuttavia la validità della formula di Riemann-Fourier si può verificare con un calcolo diretto che fa uso del teorema dei residui. Mettendo queste considerazioni insieme alla decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici, per linearità si trova che ogni funzione razionale

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \qquad \text{con } P, Q \text{ polinomi}, \quad \text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$$

ha come antitrasformata la funzione data dalla formula di Riemann-Fourier per t positivi, cioè

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st}\,\mathrm{d}s = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-iR}^{s_1+iR} \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st}\,\mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

Poniamoci ora nella condizione che P e Q non abbiamo radici comuni (altrimenti ci si riconduce a questo caso semplicando la frazione). Se scegliamo s_1 a destra di

[2] quindi esiste $A > 0$ tale che $|F(s)| \leqslant 2/|s|^2$ se $|s| > A$; se invece $|s| \leqslant A$ per il Teorema di Weierstrass si ha esiste $C > 0$ tale che $|F(s)| \leqslant C \leqslant CA^2/|s|^2$. Si prenda allora $M = \max\{2, CA^2\}$.

tutti i poli $z_1, \ldots, z_N$ della funzione $F = P/Q$ e consideriamo R abbastanza grande tale che tutti questi poli sono contenuti nel rettangolo C_R di vertici $s_1 - iR$, $s_1 + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$ allora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)(t) &= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-iR}^{s_1+iR}\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\,\mathrm{d}s\\ &= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\,\mathrm{d}s - \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{D_R}\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

dove D_R è la spezzata che congiunge nell'ordine i punti $s_1 + iR$, $-R + iR$, $-R - iR, s_1 - iR$. È possibile verificare che $\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{D_R}\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\,\mathrm{d}s = 0$, per cui abbiamo, grazie al teorema dei residui, che

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)(t) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{P(s)}{Q(s)}e^{st}\,\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}_{\frac{P(s)}{Q(s)}e^{ts}}(z_k). \tag{2.9}$$

per $t > 0$. Se poi i poli sono tutti semplici si può scrivere, sempre per tali t,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)(t) = \sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}_{\frac{P(s)}{Q(s)}e^{ts}}(z_k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}e^{z_k t} \tag{2.10}$$

detta *formula di Heaviside.* Riassumiamo in un teorema quello che abbiamo trovato

Teorema 2.4. *Siano $P(s), Q(s)$ due polinomi con* grado$(P) <$ grado(Q) *(senza radici comuni), e siano $z_1, \ldots, z_N$ i poli di $F(s) := P(s)/Q(s)$. Allora*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)(t) = H(t)\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}_{F(s)e^{ts}}(z_k) = H(t)\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res}_{\frac{P(s)}{Q(s)}e^{ts}}(z_k). \tag{2.11}$$

Se i poli di F sono tutti semplici si ha anche la formula di Heaviside

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)(t) = H(t)\sum_{k=1}^{N}\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}e^{z_k t} \tag{2.12}$$

Esempio 2.6. Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+3)(s-2)}$. Se decomponiamo F in fratti semplici otteniamo

$$F(s) = \frac{1}{7}\left(\frac{-s-2}{s^2+3} + \frac{1}{s-2}\right),$$

(abbiamo usato la decomposizione reale, ma nulla vieta di utilizzare quella complessa), quindi per linearità

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) &= -\frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right)(t) - \frac{2}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+3}\right)(t) + \frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t)\\ &= -\frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right)(t) - \frac{2}{7\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right)(t) + \frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(t)\\ &= -\frac{1}{7}\cos(\sqrt{3}t)H(t) - \frac{2}{7\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)H(t) + e^{2t}H(t).\end{aligned}$$

L'esercizio si risolve anche applicando direttamente il Teorema 2.4. Poiché i poli sono tutti semplici si può usare la (2.12) ottenendo

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = H(t)\left[\frac{e^{i\sqrt{3}t}}{2i\sqrt{3}(i\sqrt{3}-2)} + \frac{e^{-i\sqrt{3}t}}{-2i\sqrt{3}(i\sqrt{3}+2)} + \frac{e^{2t}}{7}\right]. \tag{2.13}$$

Si verifichi, tramite le formule di Eulero che questa funzione coindice con quella trovata col primo metodo. ♡

Esempio 2.7. Calcolare l'antitrasformata di Laplace di $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2(s^2+2)}$.

Calcoliamo prima l'antitrasformata di $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+2)}$, il risultato finale si otterrà poi tramite una traslazione. Se vogliamo avvalerci del Teorema 2.4, dobbiamo usare la formula 2.11, perché non tutti i poli sono semplici. Troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) &= H(t)\left[\mathrm{Res}_{G(s)e^{st}}(0) + \mathrm{Res}_{G(s)e^{st}}(i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}_{G(s)e^{st}}(-i\sqrt{2})\right] \\ &= H(t)\left[\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{e^{ts}}{s^2+2}\right)\bigg|_{s=0} + \left(\frac{e^{ts}}{s^2(s+i\sqrt{2})}\right)\bigg|_{s=i\sqrt{2}} + \left(\frac{e^{ts}}{s^2(s-i\sqrt{2})}\right)\bigg|_{s=-i\sqrt{2}}\right]\end{aligned}$$

(si osservi che le formule per il calcolo dei residui si possono usare perché $e^{ts} \neq 0$ per $s = 0$ e $s = \pm i\sqrt{2}$ (anzi per ogni s!), numeratore e denominatore non hanno radici comuni). Completando i calcoli si trova

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s))(t) = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\sqrt{2}i}(e^{i\sqrt{2}t} - e^{-i\sqrt{2}i})\right]H(t) = \frac{1}{2}tH(t) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)H(t)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo voluto usare le formule di Eulero. Possiamo allora finalmente terminare l'esercizio ricordando la formula $\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}(f(t))(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2}(t-1)H(t-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}(t-1))H(t-1).$$

Si poteva arrivare alla soluzione ignorando la formula di Riemann-Fourier e passando per la decomposizione in fratti semplici di $G(s)$:

$$G(s) = \frac{2}{2s^2(s^2+2)} = \frac{2+s^2-s^2}{2s^2(s^2+2)} = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2+2)}$$

(vi sono ovviamente altri metodi per decomporre G in fratti semplici). ♡

3 $\mathcal{L}$-trasformata di distribuzioni

Per estendere la trasformata di Laplace alle distribuzioni, consideriamo come al solito il caso classico delle funzioni, e vediamo se ciò ci suggerisce come generalizzare la definizione. Se $f(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile, dopo averla definita uguale a zero per $t < 0$, si potrebbe scrivere

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \langle T_{f(t)}, e^{-st}\rangle.$$

Tuttavia la funzione $\varphi(t) = e^{-st} \in C^\infty$ non ha supporto compatto, per cui l'ultimo membro dell'equazione precedente ha senso solo se f ha supporto compatto, cioè $\mathrm{supp}(T_f)$ compatto. In tal caso l'equazione vale per ogni $s \in \mathbb{C}$. Cominciamo allora col dare la seguente

Definizione 3.1. Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a supporto compatto contenuto in $[0, +\infty[$. Definiamo la funzione $\mathcal{L}(T)(s) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\mathcal{L}(T)(s) := \langle T(t), e^{-st} \rangle, \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Si osservi ora che se $\operatorname{Re} s > 0$ allora $\varphi(t) = e^{-st}$ pur non essendo a supporto compatto decresce a zero rapidamente[3] per $t \to +\infty$. Invece per $t \to -\infty$ la funzione test $\varphi(t) = e^{-st}$ tende in modulo a $+\infty$, se $\operatorname{Re} s > 0$. Tuttavia stiamo assumendo che $\operatorname{supp}(T) \subseteq [0, +\infty[$, per cui si può pensare che il comportamento delle funzioni test per t negativi sia ininfluente, e che allora la definizione data prima si estenda sostanzialmente alle distribuzioni temperate. Per farlo in modo appropriato abbiamo però bisogno di introdurre una funzione ausiliaria $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\xi \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ \begin{cases} \xi(t) = 0 & \text{se } t \leqslant -1 \\ \xi(t) \in [0,1] & \text{se } -1 < t < 0 \\ \xi(t) = 1 & \text{se } t \leqslant 0 \end{cases} \ {}^{4} \tag{3.2}$$

Sostituendo e^{-st} con $\xi(t)e^{-st} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si riesce quindi a dare in modo coerente la seguente

Definizione 3.2. Sia $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tale che $\operatorname{supp}(T) \subseteq [0, +\infty[$ e sia $\Omega := \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 0\}$. Definiamo la funzione $\mathcal{L}(T)(s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\mathcal{L}(T)(s) := \langle T(t), \xi(t)e^{-st} \rangle, \qquad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{3.3}$$

Si noti che $\psi(t) := \xi(t)e^{-st} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, quindi il "bracket" in (3.3) ha senso perché ora T è temperata. È possibile dimostrare che la Definizione 3.2 non dipende da come si sceglie ξ soddisfacente (3.2). Si verifica anche che se T ha supporto compatto, questa definizione è compatibile con la precedente Definizione 3.1

Abbiamo fino ad ora definito la trasformata di Laplace di una distribuzione temperata. Questa definizione però non è ancora soddisfacente: infatti sappiamo già $\mathcal{L}$-trasformare, tramite la classica Definizione 1.1, funzioni come e^t; ma se consideriamo la distribuzione associata T_{e^t}, essa non è contemplata né nella Definizione 3.1, né nella Definizione 3.2. L'idea per estendere $\mathcal{L}$ a tutto $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è quella di imitare la definizione classica sostituendo la locuzione "$e^{-st}f(t)$ è sommabile" con la frase "$e^{-st}T(t)$ è temperata". Vediamo come si fa. Cominciamo con la seguente

Definizione 3.3. Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tale che $\operatorname{supp}(T) \subseteq [0, +\infty[$. Si dice che T è *$\mathcal{L}$-trasformabile* se esiste $s_0 \in \mathbb{C}$ tale che $e^{-s_0 t}T(t) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Si pone quindi

$$\lambda_T := \inf\{\operatorname{Re} s \ : \ s \in \mathbb{C}, \ e^{-st}T(t) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})\}, \tag{3.4}$$

$$\Omega_T := \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > \lambda_T\}. \tag{3.5}$$

[3] dicendo questo intendiamo più rapidamente di $1/t^p$, cioè $\lim_{t\to+\infty} t^p\varphi(t) = 0$, così come le derivate di φ, cioè $\lim_{t\to+\infty} t^p\varphi^{(q)}(t) = 0$ per ogni $p, q \in \mathbb{N}$.

[4] è ragionevole pensare che una tale funzione esista, per mostrarlo rigorosamente si può definirla direttamente partendo da una funzione "a campana" $\rho \in C^\infty$ tale che $\rho \geqslant 0$, $\operatorname{supp}(\rho) = [-1, 0]$ e $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Allora è chiaro che $\xi(t) := \int_{-\infty}^{t} \rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ soddisfa le condizioni richieste.

È facile verificare che, nelle ipotesi della precedente definizione,

$$\operatorname{Re} s > \lambda_T \quad \Longrightarrow \quad e^{-st}T(t) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}), \tag{3.6}$$

allora possiamo finalmente porre la

Definizione 3.4. Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ $\mathcal{L}$-trasformabile. Si dice *trasformata di Laplace di* T la funzione $\mathcal{L}(T) : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\mathcal{L}(T)(s) := \langle e^{-\lambda_0 t}T(t), \xi(t)e^{-(s-\lambda_0)t}\rangle, \qquad s \in \Omega_T, \tag{3.7}$$

dove si sceglie $\lambda_0 \in \left]\lambda_T, \operatorname{Re} s\right[$ e $\xi(t)$ è una funzione che soddisfa (3.2).

Si noti che poiché $\lambda_T < \lambda_0 < \operatorname{Re} s$ allora $\operatorname{Re}(s - \lambda_0) < 0$ e quindi $\xi(t)e^{-(s-\lambda_0)t} \in \mathscr{S}$. Inoltre grazie a (3.6) $e^{-\lambda_0 t}T(t) \in \mathscr{S}'$, quindi il "bracket" in (3.7) ha senso. Anche in questo caso si dimostra che la Definizione 3.4 non dipende da come si sceglie $\lambda_0 \in \left]\lambda_T, \operatorname{Re} s\right[$ e ξ soddisfacente (3.2). Infine se $T \in \mathscr{S}'$ quest'ultima definizione è compatibile con le due precedenti Definizioni 3.1 e 3.2. Un modo per comprendere la definizione precedente consiste nel ricordare che $\operatorname{supp}(T) \subseteq [0, +\infty[$ e nello scrivere il seguente calcolo formale, ma non giustificato: $\langle e^{-\lambda_0 t}T(t), \xi(t)e^{-(s-\lambda_0)t}\rangle = \langle T(t), e^{-\lambda_0 t}\xi(t)e^{-(s-\lambda_0)t}\rangle = \langle T(t), \xi(t)e^{-st}\rangle = \langle T(t), e^{-st}\rangle$ (perché questi passaggi non sono leciti?).

Si ha la seguente

Proposizione 3.1. *Se* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *è* $\mathcal{L}$*-trasformabile allora, dopo averla prolungata ponendo* $f(t) = 0$ *per* $t < 0$*, si ha*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(T_f)(s) \qquad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > \lambda_f.$$

Lasciamo per esercizio la verifica di questa proposizione: è infatti utile per familiarizzare con le definizioni precedenti e per verificare la conoscenza di varie operazioni sulle distribuzioni.

Osserviamo anche che in generale se f è $\mathcal{L}$-trasformabile si ha solo $\lambda_{T_f} \leqslant \lambda_f$ e che a volte accade che $\lambda_{T_f} < \lambda_f$.

Esempio 3.1. Calcoliamo $\mathcal{L}(\delta_{x_0})$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Poiché δ_{x_0} ha supporto compatto possiamo usare direttamente la prima Definizione 3.1:

$$\mathcal{L}(\delta_{x_0})(s) = \langle \delta_{x_0}(t), e^{-st}\rangle = e^{-sx_0}.$$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta_{x_0})(s) = e^{-sx_0}, \qquad s \in \mathbb{C}.} \tag{3.8}$$

In particolare per $x_0 = 0$

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta_0)(s) = 1, \qquad s \in \mathbb{C}.} \tag{3.9}$$

♡

Valgono proprietà analoghe a quelle per la trasformata di funzioni.

Proposizione 3.2. *Siano* $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ $\mathcal{L}$*-trasformabili e siano* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $s_0 \in \mathbb{C}$, $t_0, a > 0$. *Allora*

(i) $\mathcal{L}(\lambda T + \mu S) = \lambda \mathcal{L}(T) + \mu \mathcal{L}(S) \qquad$ *in* $\Omega_T \cap \Omega_S$

(ii) $\mathcal{L}(e^{s_0 t} T(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - s_0) \qquad$ *per ogni* $s \in \Omega_T + s_0$

(iii) $\mathcal{L}(T(t - t_0))(s) = e^{-t_0 s} \mathcal{L}(T(t))(s) \qquad$ *per ogni* $s \in \Omega_T$

(iv) $\mathcal{L}(T(at))(s) = \dfrac{1}{a} \mathcal{L}(T(t)) \left(\dfrac{s}{a}\right) \qquad$ *per ogni* $s \in a\Omega_T$

(v) $\exists [\mathcal{L}(T(t))]'(s) = -\mathcal{L}(tT(t))(s) \qquad$ *per ogni* $s \in \Omega_T$

(vi) $\mathcal{L}(T'(t))(s) = s\mathcal{L}(T(t))(s)$ *per ogni* $s \in \Omega_T$.

La derivata in (vi) *è intesa nel senso delle distribuzioni.*

Non tutte le proprietà precedenti sono banali da verificare. Noi omettiamo le dimostrazioni osservando che la (v) dice che $\mathcal{L}(T)(s)$ è una funzione analitica in Ω_T. Ciò che è doveroso verificare è che la (vi) non è in contraddizione con l'omologa (vi) della Proposizione 1.2 (si noti la differenza tra le due formule). La differenza apparente è dovuta al fatto che per passare alla trasformata di T_f si deve prima prolungare f ponendola uguale a zero in $]-\infty, 0[$, per cui la funzione risultante ha un salto in $t = 0$ che dà luogo a una delta quando si deriva nel senso delle distribuzioni. Vediamo il conto preciso. Sia $f \in C([0, +\infty[)$, derivabile in $]0, +\infty[$ con f' $\mathcal{L}$-trasformabile. Prolunghiamo f ponendo $f(t) = 0$ per ogni $t < 0$. Allora si ha $T'_f = T_{f'} + f(0+)\delta_0$, per cui

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(T'_f)(s) &= \mathcal{L}(T_{f'} + f(0+)\delta_0)(s) = \mathcal{L}(T_{f'})(s) + f(0+)\mathcal{L}(\delta_0)(s) \\ &= \mathcal{L}(f')(s) + f(0+) = [s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+)] + f(0+) \\ &= s\mathcal{L}(f)(s) = s\mathcal{L}(T)(s).\end{aligned}$$

Esempio 3.2. Calcoliamo $\mathcal{L}(\delta'_{x_0})$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
Grazie alla Proposizione 3.2(vi) si trova

$$\mathcal{L}(\delta'_{x_0})(s) = s\mathcal{L}(\delta_{x_0})(s) = se^{-sx_0}.$$

Iterando tale formula si ottiene

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta_{x_0}^{(p)})(s) = s^p e^{-sx_0}, \qquad s \in \mathbb{C}.} \tag{3.10}$$

In particolare per $x_0 = 0$

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta_0^{(p)})(s) = s^p, \qquad s \in \mathbb{C}.} \tag{3.11}$$

♡

Esempio 3.3. Calcoliamo la $\mathcal{L}$-trasformata del cosiddetto *treno di impulsi per tempi positivi* $T = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$, la distribuzione temperata definita da

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k, \varphi \right\rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k), \qquad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Usando la seconda Definizione 3.2:

$$\mathcal{L}(T)(s) = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k, \xi(t)e^{-st} \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \xi(k)e^{-sk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s})^k = \frac{1}{1 - e^{-s}}.$$

♡

Ora accenniamo brevemente all'importante legame tra convoluzione trasformata di Laplace. Innanzitutto osserviamo che per ogni coppia di funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili f, g la convoluzione ammette la scrittura alternativa

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

infatti $f(x) = g(x) = 0$ per ogni $x < 0$, quindi se $t \in \mathbb{R}$ è fissato si ha $f(t-x) = 0$ se $x > t$, e allora

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

In particolare $(f * g)(t) = 0$ per ogni $t < 0$ e si prova che $f * g$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e che

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g), \qquad s \in \Omega_f \cap \Omega_g. \tag{3.13}$$

Invece per quanto riguarda la convoluzione di distribuzioni, si dimostra che se $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ sono $\mathcal{L}$-trasformabili allora $T * S$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha

$$\mathcal{L}(T * S) = \mathcal{L}(T)\mathcal{L}(S), \qquad s \in \Omega_T \cap \Omega_S. \tag{3.14}$$

Si osservi solo che noi abbiamo definito la convoluzione $T * S$ quando una delle due distribuzioni ha il supporto compatto. Tuttavia nel caso in cui entrambi i supporti sono contenuti in $[0, +\infty[$ si può verificare che $T * S$ è comunque definita.

Concludiamo dicendo che anche nell'ambito delle distribuzioni la trasformata di Laplace risulta invertibile, nel senso che se $F(s)$ è la trasformata di una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, allora tale T è anche l'unica distribuzione per cui $\mathcal{L}(T)(s) = F(s)$. Quindi è ben definita l'antitrasformata $\mathcal{L}^{-1}(F)$ per un'opportuna classe di funzioni $F(s)$. In particolare si possono antitrasformare i polinomi e, grazie alla formula (3.11) e alla linearità si ottiene

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) = a_n \delta_0^{(n)} + \cdots + a_1 \delta_0' + a_0 \delta_0, \qquad s \in \mathbb{C}.} \tag{3.15}$$

per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Esempio 3.4. Calcolare l'antitrasformata di Laplace di $F(s) = \dfrac{s^2 - 3s - 3}{s - 4}$.
Il grado del polinomio a numeratore è *maggiore o uguale* a quello del polinomio a denominatore. Allora dopo aver effettuato la divisione troviamo $s^2 - 3s - 3 = (s+1)(s-4) + 1$, per cui

$$F(s) = s + 1 + \frac{1}{s-4}.$$

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}(s)(t) + \mathcal{L}^{-1}(1)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-4}\right)(t) = \delta_0' + \delta_0 + e^{4t}H(t).$$

♡

4 Esercizi

a) Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni.

1. $f(t) = p_a(t - t_0)$ dove $a, t_0 > 0$ e $a/2 < t_0$.
2. $f(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ dove $0 \leqslant a < b$.
3. $f(t) = p_4(t - 1)H(t)$
4. $f(t) = \mathbb{1}_{[-1,2]}(t)H(t)$
5. $$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 - t & \text{se } 1 < t < 2 \\ t - 2 & \text{se } t \geqslant 2 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$
6. $$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -2 & \text{se } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
7. $f(t) = H(t)e^{t-1} + H(t - 2)\cos t$
8. $f(t) = e^{3t} \int_0^t \frac{\sin(2x)}{x}\, dx$ (calcolare $\mathcal{L}(f)(s)$ solo per s reali).
9. $f(t) = e^{s_0 t} t^k H(t)$, dove $s_0 \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$.
10. $f(t) = \cos^2 t H(t)$
11. $f(t) = (t-3)H(t-2)e^{t+1}$ (suggerimento: $(t-3)H(t-2)e^{t+1} = [(t-2)-1]H(t-2)e^{t-2}e^3$)

b) Calcolare l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni.

1. $F(s) = \dfrac{1}{(s+5)^3}$
2. $F(s) = \dfrac{2e^{-3s}\cosh s}{s^2 + s^3}$ (suggerimento: $\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$)
3. $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 1}$
4. $F(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + s - 1}{s^2 + 2s + 1}$
5. $F(s) = \dfrac{s^2 + 3}{(s+1)(s^2 + 6s + 9)}$
6. $F(s) = \dfrac{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 4}{(s+3)(s^2+1)}$

Risposte

a)

1. $\dfrac{e^{-t_0 s} 2\sinh(as/2)}{s}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
2. $\dfrac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
3. $\dfrac{1 - e^{-3s}}{s}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
4. $\dfrac{1 - e^{-2s}}{s}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
5. $\dfrac{1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s}}{s^2}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
6. $\dfrac{1 - 3e^{-s} + 2e^{-2s}}{s}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
7. $\dfrac{e^{-1}}{s-1} + \dfrac{e^{2(i-s)}}{2(s-i)} + \dfrac{e^{-2(i+s)}}{2(s+i)}$ per $\operatorname{Re} s > 1$.
8. $\dfrac{1}{s-3}\left[\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{s-3}{2}\right)\right]$ per $s > 3$.
9. $\dfrac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}$ per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.
10. $\dfrac{4s^2+8}{4s^3+16s}$ per $\operatorname{Re} s > 0$.
11. $e^{3-2s}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2} - \dfrac{1}{s-1}\right]$ per $\operatorname{Re} s > 0$.

b)
1. $\dfrac{e^{-5t}}{2} t^2 H(t)$
2. $(t-2)H(t-2) - H(t-2) - e^{-(t-2)}H(t-2) + (t-4)H(t-4) - H(t-4) - e^{-(t-4)}H(t-4)$
3. $e^{-(t-\pi)}(1 - 3(t-\pi))H(t-\pi)$
4. $\delta_0' - te^{-t}H(t)$
5. $e^{-t}H(t) - 6te^{-3t}H(t)$
6. $\delta_0' + e^{-3t}H(t) + \sin t H(t)$

5 Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie

La trasformata di Laplace è uno strumento efficace per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti, in un certo senso è lo strumento naturale per tali equazioni poiché le trasforma in equazioni algebriche. Vediamo come opera in alcuni semplici ma fondamentali esempi.

5.1 Equazione dell'oscillatore armonico con termine forzante sinusoidale.

Assumiamo che $\omega > 0$, $\beta > 0$, $F > 0$ con $\omega \neq \beta$. Cerchiamo la funzione $y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = F\cos(\beta t) & \forall t \geqslant 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1. \end{cases} \tag{5.1}$$

La prima equazione è detta *equazione dell'oscillatore armonico con termine forzante sinusoidale*: notiamo che $\beta \neq \omega$, Prendiamo la $\mathcal{L}$-trasformata di ambo i membri dell'equazione. Se $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$, dalla Proposizione 1.2-(vi) otteniamo

$$s^2 Y(s) - sy(0+) - y'(0+) + \omega^2 Y(s) = F\mathcal{L}(H(t)\cos(\beta t))(s),$$

quindi utilizzando le condizioni iniziali ed il fatto che $y \in C^1([0, +\infty[)$ deduciamo che

$$s^2 Y(s) - sy_0 - y_1 + \omega^2 Y(s) = \frac{Fs}{s^2 + \beta^2},$$

cioè

$$Y(s) = \frac{sy_0}{s^2 + \omega^2} + \frac{y_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{Fs}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \omega^2)}. \tag{5.2}$$

Se decomponiamo l'ultimo addendo dell'equazione precedente in fratti semplici (esercizio), otteniamo

$$\frac{Fs}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{Fs}{(\omega^2 - \beta^2)(s^2 + \beta^2)} - \frac{Fs}{(\omega^2 - \beta^2)(s^2 + \omega^2)},$$

perciò

$$\mathcal{L}^1 \left(\frac{Fs}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \omega^2)} \right)(t) = \frac{F}{\omega^2 - \beta^2} H(t)\cos(\beta t) - \frac{F}{\omega^2 - \beta^2} H(t)\cos(\omega t),$$

quindi, applicando $\mathcal{L}^{-1}$ all'equazione (5.2) troviamo la soluzione di (5.1)

$$y(t) = y_0 H(t)\cos(\omega t) + \frac{y_1 H(t)}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F}{\omega^2 - \beta^2} H(t)\cos(\beta t) - \frac{F}{\omega^2 - \beta^2} H(t)\cos(\omega t)$$

in altri termini

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{F}{\omega^2 - \beta^2} \right)\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F}{\omega^2 - \beta^2}\cos(\beta t) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

5.2 Equazione dell'oscillatore armonico con termine forzante continuo arbitrario

Più generalmente possiamo considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t) & \forall t \geqslant 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \end{cases} \tag{5.3}$$

dove sono assegnati $\omega > 0$ e $f \in C([0, +\infty[)$, un arbitrario termine forzante. Per trovare la soluzione $y \in C^1([0, +\infty[)$ adottiamo la stessa procedura dell'esempio precedente e applichiamo $\mathcal{L}$ ad ambo i membri dell'equazione differenziale. Utilizzando le condizioni iniziali deduciamo che

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{sy_0}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2} + \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{(s^2+\omega^2)} \\ &= \frac{sy_0}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}(f(t))(s)\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) \\ &= \frac{sy_0}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}(f(t) * \sin(\omega t))(s), \end{aligned}$$

per cui applicando $\mathcal{L}^{-1}$ troviamo che

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} f(t) * \sin(\omega t) \\ &= y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(x)\sin(\omega(t-x))\,\mathrm{d}x \quad \forall t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Se consideriamo il caso particolare $f(t) = F\cos(\omega t)$ con $F > 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x)\sin(\omega(t-x))\,\mathrm{d}x &= F\int_0^t \cos(\omega x)\sin(\omega(t-x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{F}{2}\int_0^t (\sin(\omega t) + \sin(\omega(2x-t))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{F}{2}\left[x\sin(\omega t) - \frac{\cos(\omega(2x-t))}{2\omega}\right]_{x=0}^{x=t} \\ &= \frac{F}{2} t\sin(\omega t), \end{aligned}$$

perciò

$$y(t) = y_0\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F}{2\omega} t\sin(\omega t) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Si noti il fenomeno di risonanza dovuto al fatto che la frequenza del termine forzante è esattamente ω.

Osservazione 5.1. Il caso particolare $f(t) = F\cos(\omega t)$ con $F > 0$ può essere trattato anche senza l'uso della convoluzione, infatti possiamo utilizzare la decomposizione in fratti semplici complessa e scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{(s^2+\omega^2)} &= \frac{Fs}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{Fs}{(s-i\omega)^2(s+i\omega)^2} \\ &= -\frac{Fi}{4\omega(s-i\omega)^2} + \frac{Fi}{4\omega(s+i\omega)^2} \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{sy_0}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2} + \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{sy_0}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2} - \frac{Fi}{4\omega(s-i\omega)^2} + \frac{Fi}{4\omega(s+i\omega)^2}
\end{aligned}$$

e applicando $\mathcal{L}^{-1}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{Fi}{4\omega}te^{i\omega t} + \frac{Fi}{4\omega}te^{-i\omega t} \\
&= y_0\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F}{2\omega}\frac{1}{2i}te^{i\omega t} - \frac{F}{2\omega}\frac{1}{2i}te^{-i\omega t} \\
&= y_0\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{F}{2\omega}t\sin(\omega t) \qquad \forall t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

♢

5.3 Equazione dell'oscillatore armonico con termine forzante impulsivo

Sia $\omega > 0$ fissato. Cerchiamo una funzione $y : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi l'equazione dell'oscillatore armonico con un termine forzante F dato da un impulso unitario ad esempio all'istante $t = 1$, cioè $F = \delta_1$, con condizioni iniziali per y e y' assegnate. È necessario ambientare il problema in ambito distribuzionale $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, per cui estendiamo ad $\mathbb{R}$ il dominio della soluzione incognita y e cerchiamo $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $y(t) := 0$ per $t < 0$ (equivalentemente $\mathrm{supp}(y) \subseteq [0, +\infty[$) e per cui

$$T_{y''} + \omega^2 T_y = \delta_1 \qquad \text{nel senso delle distribuzioni} \tag{5.4}$$

con

$$y(0+) = y_0, \tag{5.5}$$
$$y'(0+) = y_1. \tag{5.6}$$

L'equazione (5.4) conduce ad un'equazione distribuzionale della forma $T''+\omega^2 T = G$ dove $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è l'incognita e $G \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è data, e non ha senso assegnare condizioni iniziali per T, perché a priori T non è una funzione. Quindi le condizioni iniziali (5.5)–(5.6) vanno inserite *nell'equazione*, piè precisamente nel secondo membro G nel modo seguente: $T_y'' = T_{y''} + y'(0+)\delta_0 + y(0+)\delta_0'$, quindi (5.4) si riscrive come

$$T_y'' + \omega^2 T_y = \delta_1 + y'(0+)\delta_0 + y(0+)\delta_0',$$

perciò il problema di Cauchy distribuzionale che vogliamo studiare è il seguente:

$$T'' + \omega^2 T = \delta_1 + y_0\delta_0' + y_1\delta_0 \qquad \text{in } \mathscr{D}'(\mathbb{R}). \tag{5.7}$$

Applichiamo $\mathcal{L}$ ad ambo i membri. Se $Y := \mathcal{L}(T)$, dalla Proposizione 3.2-(vi) segue che

$$s^2Y(s) + \omega^2 Y(s) = e^{-s} + y_0 s + y_1$$

quindi

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+\omega^2} + \frac{y_0 s}{s^2+\omega^2} + \frac{y_1}{s^2+\omega^2}.$$

Tornando indietro con $\mathcal{L}^{-1}$ troviamo la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{\omega}H(t-1)\sin(\omega(t-1)) + y_0 H(t)\cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}H(t)\sin(\omega t)$$

cioè

$$y(t) = \frac{1}{\omega}H(t-1)\sin(\omega(t-1)) + y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_1}{\omega}\sin(\omega t) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Notiamo che per $0 < t < 1$ si ha che $y(t)$ è la soluzione dell'equazione omogenea $y'' + \omega^2 y = 0$ soddisfacente (5.5)–(5.6); all'istante $t = 1$ la forza impulsiva δ_1 agisce sul sistema e per $t > 1$ la soluzione $y(t)$ presenta il termine addizionale $\frac{1}{\omega}H(t-1)\sin(\omega(t-1))$.

Modifiche dalla revisione del 13 giugno 2014 alla revisione dell'8 giugno 2016:

1. Esempio 2.6: Una $H(t)$ mancante è stata aggiunta.
2. Suggerimenti aggiunti agli Esercizi a)-11 e b)-2.
3. È stata aggiunta un'appendice sulle equazioni differenziali (parzialmente svolta a lezione). Questa sezione *non* è richiesta all'esame.