5. Teoria delle distribuzioni

Vincenzo Recupero
Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino
`vincenzo.recupero@polito.it`

Versione: 10 giugno 2013
Revisione: 1 giugno 2016

Metodi Matematici per l'Ingegneria
05BQXMQ, 06BQXOA (Aaa-Ferr), 06BQXOD, 06BQXPC (Aaa-Ferr)

Dispense di Analisi

1 Preliminari

1.1 Nozioni topologiche in $\mathbb{R}$

Le nozioni topologiche definite in $\mathbb{C}$ si possono definire in modo analogo in $\mathbb{R}$ se si sostituiscono le palle aperte $B_r(z_0)$ con gli intervalli aperti $(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < r\}$, $r > 0$. Anche per questi particolari intervalli possiamo usare il termine *intorno di x di raggio r*. Ad esempio, se $S \subseteq \mathbb{R}$ allora:

(i) si dice che S è *aperto* se ogni punto $x_0 \in S$ ha un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$, che è contenuto in S

(ii) si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un *punto di frontiera di S* se per ogni $r > 0$ e per ogni intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0 esistono $x \in S$ ed $y \in \mathbb{R} \smallsetminus S$ tali che $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ ed $y \in (x_0 - r, x_0 + r)$. L'insieme dei punti di frontiera di S si denota con ∂S ed è chiamato *frontiera (o bordo) di S*

(iii) l'insieme $\overline{S} := S \cup \partial S$ è chiamato *chiusura di S*

(iv) si dice che S *è chiuso* se $\overline{S} = S$

(v) l'insieme $\mathring{S} := S \smallsetminus \partial S$ si dice *interno di S*

Si noti che possiamo utilizzare la notazione $B_r(x_0) := \{x \ : \ |x - x_0| < r\}$ in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}^n$ e possiamo dare una sola definizione per le precedenti nozioni topologiche: in ogni caso particolare dobbiamo interpretare il simbolo $|x - x_0|$ come valore assoluto in $\mathbb{R}$, modulo in $\mathbb{C}$, o norma (o modulo) in $\mathbb{R}^n$.

È possibile provare la seguente

Proposizione 1.1. *Dato S, la sua chiusura $\overline{S}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente S.*

Dimostrazione. . □

La seguente terminologia è usata di frequente

Definizione 1.1. Si dice che un insieme S è *compatto* se è chiuso e limitato.

Esempio 1.1. Per i seguenti sottoinsiemi S di $\mathbb{R}$ si ha:

(a) $S =]0,1[$, $\partial S = \{0,1\}$, $\overline{S} = [0,1]$, $\mathring{S} = S$, S è aperto, S non è chiuso.

(b) $S = [2,+\infty[$, $\partial S = \{2\}$, $\overline{S} = S$, $\mathring{S} =]2,+\infty[$, S non è aperto, S è chiuso.

(c) $S = \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n > 1\}$, $\partial S = S \cup \{0\}$, $\overline{S} = S \cup \{0\}$, $\mathring{S} = \varnothing$, S non è aperto, S non è chiuso.

(d) $S = \mathbb{N}$, $\partial S = \mathbb{N}$, $\overline{S} = \mathbb{N}$, $\mathring{S} = \varnothing$, S non è aperto, S è chiuso.

(e) $S = \mathbb{R}$, $\partial S = \varnothing$, $\overline{S} = \mathbb{R}$, $\mathring{S} = \mathbb{R}$, S è aperto, S è chiuso.

(f) $S = \varnothing$, $\partial S = \varnothing$, $\overline{S} = \varnothing$, $\mathring{S} = \varnothing$, S è aperto, S è chiuso.

♡

1.2 Supporto di una funzione

Definizione 1.2. Il *supporto* di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è l'insieme

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \neq 0\}},$$

cioè è la chiusura dell'insieme dove f è diversa da zero.

Esempio 1.2.

(a) Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

allora $\operatorname{supp}(f) = \overline{]-1,1[} = [-1,1]$.

(b) Se $f(x) = x^2$ allora $\operatorname{supp}(f) = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$.

(c) Se $f(x) = \sin x$ allora $\operatorname{supp}(f) = \overline{\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}} = \mathbb{R}$.

(d) Se $f(x) = 0$ allora $\operatorname{supp}(f) = \overline{\varnothing} = \varnothing$.

♡

Osservazione 1.1. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione si ha che $\operatorname{supp}(f)$ è compatto, cioè chiuso e limitato in $\mathbb{R}$, se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad : \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b] \,.$$

♢

Osservazione 1.2. Supponiamo che $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è derivabile ad ha supporto compatto, cioè $\operatorname{supp}(f)$ è chiuso e limitato. Allora anche la derivata f' ha supporto compatto, infatti esistono $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tali che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b] \,,$$

quindi f è identicamente uguale a zero fuori da $[a, b]$, per cui

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b] \,.$$

♢

1.3 Funzioni localmente sommabili

Definizione 1.3. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo in $\mathbb{R}$ di estremi a e b ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f è *sommabile su I* se gli integrali

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

(intesi in senso improprio, se necessario) sono finiti (o convergenti).

Definizione 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Diciamo che f è *localmente sommabile (in $\mathbb{R}$)* se

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \quad \text{sono finiti per ogni } a, b \in \mathbb{R},\ -\infty < a < b < +\infty.$$

(intesi in senso improprio, se necessario).

Esempio 1.3.

a) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) := x^2$, allora per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x$ è finito perché f è continua su $[a, b]$, quindi integrabile.

b) Più generalmente ogni funzione continua $f \in C(\mathbb{R})$ è localmente sommabile.

c) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 1/\sqrt{|x|}$ per $x \neq 0$ ($f(0)$ definito arbitrariamente). Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 \notin [a, b]$ allora $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_a^b 1/\sqrt{|x|} \, \mathrm{d}x$ è finito perché f è continua su $[a, b]$. Se $0 \in [a, b]$ allora l'integrale improprio $\int_a^b 1/\sqrt{|x|} \, \mathrm{d}x$ è convergente. Quindi f è localmente sommabile.

d) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 1/x$ per $x \neq 0$ ($f(0)$ definito arbitrariamente). L'integrale $\int_0^1 1/x \, \mathrm{d}x$ non è convergente, perciò f non è localmente sommabile.

♡

A volte useremo il simbolo $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ per l'integrale di una funzione definita su tutta la retta reale, tuttavia la notazione $\int_{-\infty}^{+\infty}$ è consigliata quando si effettua un cambio di variabile.

Nell'esempio seguente definiamo alcune semplici ma importanti funzioni che useremo nel seguito.

Esempio 1.4.

(a) Se S è un sottoinsieme dato, la *funzione indicatrice di S* è la funzione $\mathbb{1}_S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbb{1}_S(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Alcuni autori usano il simbolo χ_S.

(b) La *funzione segno* $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è definita da

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(c) La *funzione di Heaviside* è la funzione $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$H(x) := \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(c) Se $a > 0$, la *funzione porta di ampiezza a* (o *funzione rettangolare*) è la funzione $p_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$p_a(x) := \mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leqslant a/2 \\ 0 & \text{se } x > a/2 \end{cases}$$

♡

1.4 Convergenza uniforme

Definizione 1.5. Siano dati $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. La *norma dell'estremo superiore di f su D* (o norma ∞ *di f su D*) è definita da

$$\|f\|_{\infty,D} := \sup_{x \in D} |f(x)| \in [0,\infty]\,.$$

Useremo anche il simbolo $\|f\|_\infty$ se l'insieme di definizione D è fissato e non c'è rischio di ambiguità.

Non è difficile verificare che

$$\begin{aligned} &\|f\|_\infty = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0, \\ &\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty, \\ &\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Definizione 1.6. Siano dati $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n, f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dice che f_n *converge uniformemente ad* f *su* I (o $f_n \to f$ *uniformemente su* I) se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad [\ n > n_\varepsilon, \quad x \in D \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ ]$$

cioè se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad \left[\ n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \right]$$

cioè se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : \quad [\ n > n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_{\infty, D} < \varepsilon\ ]$$

cioè se e solo se

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{\infty, D} = 0.$$

2 Funzioni test

Definizione 2.1. Si dice che $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una *funzione test* se

(i) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $\mathrm{supp}(\varphi)$ è compatto in $\mathbb{R}$, cioè $\mathrm{supp}(\varphi)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.

L'insieme delle funzioni test si denota con $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (o semplicemente con $\mathscr{D}$)

Osservazione 2.1. Ricordiamo che il fatto che $\mathrm{supp}(\varphi)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ significa che

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad : \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin [a, b]\,.$$

$\diamondsuit$

Proposizione 2.1. *L'insieme* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *è uno spazio vettoriale, cioè se* $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *e se* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *allora* $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Facile. $\square$

Definizione 2.2. Supponiamo che $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dice che φ_n *converge a* φ *in* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (o $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ per $n \to \infty$) se

(i) $\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad : \quad \mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\varphi_n^{(p)} \to \varphi^{(p)}$ uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Osservazione 2.2. Nella Definizione 2.2, la condizione (i) significa che tutti i supporti delle funzioni φ_n sono contenuti in un solo intervallo chiuso e limitato:

esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\varphi_n(x) = 0$ per ogni $x \notin [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La seconda condizione (ii) significa invece che la successione φ_n e le successioni $\varphi_n^{(p)}$ delle derivate di ogni ordine $p \in \mathbb{N}$ convergono uniformemente su $\mathbb{R}$ (in realtà su $[a, b]$) a φ ed a $\varphi^{(p)}$. ♢

Prima di proseguire con la teoria dovremmo verificare che l'insieme delle funzioni test $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ contiene almeno una funzione diversa da zero. Questo è il contenuto dell'esempio seguente.

Esempio 2.1. Sia $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Studiamo la funzione φ. Chiaramente $\operatorname{supp}(\varphi) = [-1, 1]$. Inoltre $\lim_{x\to\pm1} \varphi(x) = 0$, quindi φ è continua. Si ha

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x^2-1}} \dfrac{2x}{(x^2-1)^2} & \forall x \in \,]-1, 1[\\ \\ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus [-1, 1] \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to1-} \varphi'(x) = \lim_{x\to-1+} \varphi'(x) = 0.$$

per cui f è derivabile in $x = \pm1$ e $\varphi'(1) = \varphi'(-1) = 0$. Per induzione si può provare che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, per cui $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$: infatti

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= e^{\frac{1}{x^2-1}} \left(\frac{2x}{(x^2-1)^2} \right)^2 - e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2(x^2-1)[(x^2-1) - 4x^2]}{(x^2-1)^4} \\ &= e^{\frac{1}{x^2-1}} \left[\frac{4x^2 - 2(x^2-1)[(x^2-1) - 4x^2]}{(x^2-1)^4} \right] \qquad \forall x \in \,]-1, 1[\,, \end{aligned}$$

e se $p > 1$

$$\varphi^{(p)}(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{P(x)}{(x^2-1)^{2p}} \qquad \forall x \in \,]-1, 1[\tag{2.2}$$

dove $P(x)$ è un polinomio, infatti se assumiamo (2.2) come ipotesi induttiva allora

$$\varphi^{(p+1)}(x) = -e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2-1)^2} \frac{P(x)}{(x^2-1)^{2p}} + e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{P'(x)(x^2-1)^{2p} - P(x)4p(x^2-1)^{2p-1}2x}{(x^2-1)^{4p}}.$$

Perciò

$$\lim_{x\to1-} \varphi^{(p)}(x) = \lim_{x\to-1+} \varphi^{(p)}(x) = 0.$$

♡

Esempio 2.2. Sia $\varphi \in \mathscr{D}$ la funzione "a campana" dell'Esempio 2.1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, sia $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\rho_n(x) := \frac{\varphi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(nt)\,\mathrm{d}t}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Allora $\operatorname{supp}(\rho_n) = [-1/n, 1/n]$ e $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi $\rho_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Inoltre osserviamo che $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(nt)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(nt)\,\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(nx)\,\mathrm{d}x = 1.$$

. ♡

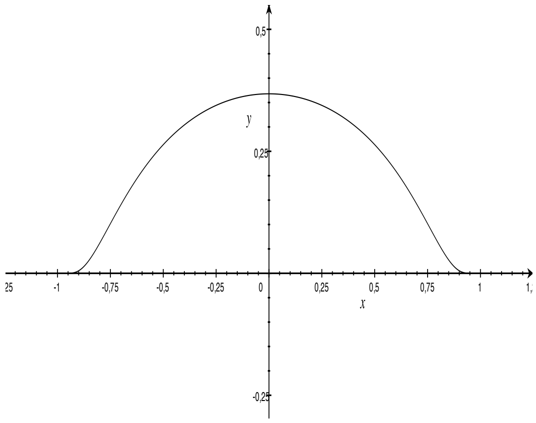

Figura 1: La funzione “a campana” dell’Esempio 2.1

3 Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Nel seguito di questo capitolo avremo a che fare frequentemente con funzioni il cui dominio è $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ e il cui codominio è $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$). Si tratta quindi di funzioni $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ che associano un numero $T(\varphi) \in \mathbb{C}$ ad ogni funzione $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Per enfatizzare il fatto che il dominio è un insieme che consiste a sua volta di funzioni, T sarà chiamato *funzionale*. Inoltre se T è lineare, utilizzeremo la notazione

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

che è molto comoda ed ampiamente usata. Riassumendo per T lineare:

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathscr{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle \end{array}$$

Si osservi che la variabile indipendente x della funzione test $\varphi(x)$ non appare nella notazione $\langle T, \varphi \rangle$, infatti non è necessaria. Tuttavia in alcune occasioni la notazione leggermente impropria

$$\langle T, \varphi(x) \rangle := \langle T, \varphi \rangle$$

sarà molto utile. Potrebbe anche essere conveniente usare la notazione (del tutto scorretta!)

$$\langle T(x), \varphi(x) \rangle$$

anche se x *non* è la variabile indipendente di T. In altre parole la notazione $T(x)$ non ha senso, ma vedremo che può essere utile scrivere $\langle T(x), \varphi(x) \rangle$ purché ricordiamo che il suo significato è semplicemente $\langle T, \varphi \rangle$.

Definizione 3.1. Un funzionale $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *distribuzione* (o *funzione generalizzata*) se

(i) T è lineare, cioè se per ogni $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ed ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle + \mu\langle T, \psi\rangle$$

(ii) T è *continuo* nel senso seguente: se $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,

$$\varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ in } \mathbb{C}$$

L'insieme delle distribuzioni si denota con $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (o semplicemente con $\mathscr{D}'$).

La condizione (ii) della definizione precedente ha una natura essenzialmente tecnica che permette lo sviluppo coerente della teoria.

Proposizione 3.1. *L'insieme $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, cioè se $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, allora $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, dove si pone*

$$\begin{aligned} \langle \lambda T, \varphi\rangle &:= \lambda\langle T, \varphi\rangle, & T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{C}, \\ \langle T + S, \varphi\rangle &:= \langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi\rangle & T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Facile. □

Il lemma seguente mostra una proprietà tipica delle funzioni lineari: è sufficiente verificarne la continuità solo in $\varphi = 0$.

Lemma 3.1. *Se $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ è lineare, allora per verificare la continuità di T è sufficiente provare che*

$$\varphi_n \to 0 \text{ in } \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi_n\rangle \to 0.$$

Dimostrazione. . Assume that $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, i.e. $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(p)} - \varphi^{(p)}\|_\infty = 0$ for every $p \in \mathbb{N}$ and there exist $a, b \in \mathbb{R}$ such that $\varphi_n(x) = 0$ for every $x \notin [a, b]$ and for every $n \in \mathbb{N}$. In particular $\varphi(x) = 0$ whenever $x \notin [a, b]$. Therefore $\psi_n := \varphi_n - \varphi \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ hence $|\langle T, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle| \to 0$, that is $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$. □

Definizione 3.2 (Distribuzioni regolari)**.** Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile, definiamo la distribuzione $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ponendo

$$\langle T_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

La distribuzione T_f è chiamata *distribuzione regolare associata ad f*.

Dobbiamo verificare che T_f è effettivamente una distribuzione. Cominciamo verificando che l'integrale in (3.1) è definito. Se $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ allora il suo supporto è contenuto in un intervallo limitato $[a,b]$, quindi $\varphi(x) = 0$ se $x \notin [a,b]$. Inoltre per il Teorema di Weierstrass

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x)| < \infty,$$

quindi

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b |f(x)| \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\|\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}x \\ &= \|\varphi\|_\infty \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,\end{aligned}$$

essendo f localmente sommabile. Abbiamo perciò provato che l'integrale è finito. Ora verifichiamo che T è una distribuzione.

a) T_f *è lineare*:
Per ogni $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ abbiamo, per la linearità dell'integrale,

$$\begin{aligned}\langle T_f, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x)(\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\langle T_f, \varphi\rangle + \mu\langle T_f, \psi\rangle\end{aligned}$$

b) T_f *è continuo*:
Usiamo il Lemma 3.1: se $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tali che $\varphi_n(x) = 0$ per ogni $x \notin [a,b]$. Inoltre $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente su $\mathbb{R}$, quindi

$$\begin{aligned}|\langle T_f, \varphi_n\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)||\varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ \leqslant \int_a^b |f(x)|\|\varphi_n\|_\infty\,\mathrm{d}x &= \|\varphi_n\|_\infty \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{as } n \to \infty\end{aligned}$$

perché $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$ e $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$ per la convergenza uniforme. Allora abbiamo mostrato che $\lim_{n\to\infty}\langle T_f, \varphi_n\rangle = 0$, per cui dal Lemma 3.1 deduciamo che T_f è continuo.

Definizione 3.3. Si dice che $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è una *distribuzione regolare* se esiste una funzione localmente sommabile $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ per cui $T = T_f$. In tal caso la distribuzione T_f è a volte denotata semplicemente con f, il simbolo della stessa funzione.

Proposizione 3.2. *Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sono continue $T_f = T_g$, allora $f = g$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) \neq g(x_0)$. Allora per la continuità di f e di g esiste $\delta > 0$ per cui $f(x) \neq g(x)$ per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Sia allora $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ una funzione test tale che $\varphi(x) > 0$ per $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ (è sufficiente riscalare e traslare il grafico della solita funzione a campana). Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (f(x) - g(x))\varphi(x) \,\mathrm{d}x \neq 0$$

cioè $T_f \neq T_g$. □

La proposizione precedente ci permette di identificare lo spazio delle funzioni continue $C(\mathbb{R})$ con un sottoinsieme dello spazio delle distribuzioni, perciò possiamo scrivere

$$\boxed{C(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R}).}$$

Più in generale, se f e g non sono continue e $T_f = T_g$, può accadere che $f \neq g$. Un semplice esempio è dato da $f(x) := 0$ e $g(x) := \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Tuttavia è possibile dimostrare che se $T_f = T_g$, allora l'insieme dei punti x per cui $f(x) \neq g(x)$ è "trascurabile" rispetto all'operazione di integrazione. Questa nozione potrebbe essere precisata e resa rigorosa, ma ciò che è importante per noi è sapere che se $T_f = T_g$, allora possiamo considerare le due funzioni localmente sommabili f e g essenzialmente come la stessa funzione. Da questo punto di vista l'insieme delle funzioni localmente sommabile può essere considerato (identificato con) un sottoinsieme di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Osservazione 3.1. Supponiamo che f e g siano due funzioni localmente sommabili che sono uguali ovunque tranne che in un numero finito di punti. Allora $T_f = T_g$, infatti l'integrale di una funzione non cambia se modifichiamo il valore di tale funzione in un numero finito di punti, quindi

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = \langle T_g, \varphi \rangle.$$

Allora se $h : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \longrightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile, essa genera una distribuzione regolare T_h tale che $\langle T_h, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x$, infatti $x_1, \dots, x_m$ non alterano il valore di questo integrale. ♢

Nel prossimo importante esempio definiamo una distribuzione che non è: la *delta di Dirac*.

Esempio 3.1. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ la *delta di Dirac di centro* x_0 è la distribuzione $\delta_{x_0} : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Se $x_0 = 0$ la notazione $\delta := \delta_0$ è anche usata. Verifichiamo che δ_{x_0} è una distribuzione:

a) δ_{x_0} *è lineare*:
Se $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ allora

$$\begin{aligned} \langle \delta_{x_0}, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle &= \lambda\varphi(x_0) + \mu\psi(x_0) \\ &= \lambda\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \mu\langle \delta_{x_0}, \psi \rangle. \end{aligned}$$

b) δ_{x_0} *è continuo*:
Supponiamo che $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Allora in particolare $\varphi_n(x_0) \to 0$ per $n \to \infty$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \langle \delta_{x_0}, \varphi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = 0$$

così δ_{x_0} è continuo.

È possibile dimostare che δ_{x_0} non è una distribuzione regolare. ♡

Esempio 3.2.

(a) Sia $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\langle T, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan x \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x$. Allora T è una distribuzione, infatti T è la distrbuzione regolare $T = T_f$ con $f(x) := \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, e f è localmente sommabile (perché è continua).

(b) Sia $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\langle T, \varphi \rangle := \int_0^1 x^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x$. Allora T è una distribuzione perché

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 x^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Quindi $T = T_f$ con $f(x) := \mathbb{1}_{[0,1]}(x) x^2$, $x \in \mathbb{R}$, che è una funzione localmente sommabile.

(c) Sia $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\langle T, \varphi \rangle := \int_{-2}^{+2} \varphi'(x) \, \mathrm{d}x$. Allora grazie al teorema fondamentale del calcolo otteniamo che

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-2}^{2} \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(2) - \varphi(-2) = \langle \delta_2, \varphi \rangle - \langle \delta_{-2}, \varphi \rangle$$

quindi $T = \delta_2 - \delta_{-2} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(d) Sia $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\langle T, \varphi \rangle := \int_0^2 x \varphi'(x) \, \mathrm{d}x$. Allora integrando per parti otteniamo

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^2 x \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = 2\varphi(2) - \int_0^2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \langle 2\delta_2, \varphi \rangle - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

per cui $T = 2\delta_2 - T_{\mathbb{1}_{[0,2]}} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

♡

Esempio 3.3.

(a) Definiamo il funzionale $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\langle T, \varphi \rangle := \|\varphi\|_2 = \|\varphi\|_{2,\mathbb{R}} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Allora T non è una distribuzione perché T non è lineare, infatti consideriamo $\varphi \in \mathscr{D}$ tale che $\varphi \neq 0$. Allora essendo φ continua abbiamo che

$$\langle T, \varphi \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} > 0.$$

D'altra parte

$$\langle T, -\varphi \rangle = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |-\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \|\varphi\|_2 = \langle T, \varphi \rangle,$$

ma ciò non è possibile, perché se $\varphi \neq 0$ e se T fosse lineare dovremmo trovare $\langle T, -\varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$.

(b) Definiamo il funzionale $T : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$\langle T, \varphi \rangle := 2014, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

Allora T non è una distribuzione perché T non è lineare, infatti se T fosse lineare si avrebbe $\langle T, 0 \rangle = 0 \neq 2014$.

♡

4 Operazioni sulle distribuzioni

4.1 Derivazione

Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1. Allora $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile. Vediamo come opera la distribuzione regolare $T_{f'}$. Per una funzione test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, se $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$, si ha

$$\begin{aligned}
\langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{per parti}}{=} [f(x)\varphi(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\varphi(a)=\varphi(b)=0}{=} -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\operatorname{supp}(\varphi')\subseteq[a,b]}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\langle T_f, \varphi' \rangle,
\end{aligned}$$

quindi abbiamo verificato che

$$\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})} \tag{4.1}$$

(in realtà la formula precedente è vera anche se f è continua e f' è solo localmente sommabile). Motivati da tale formula introduciamo la definizione di derivata di una distribuzione qualunque.

Definizione 4.1 (Derivata)**.** Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, diciamo che la *derivata (distribuzionale) di* T è la distribuzione $T' : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{4.2}$$

Osserviamo che dobbiamo ancora verificare che T' è effettivamente una distribuzione. Lo facciamo nella seguente

Proposizione 4.1. *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, allora il funzionale $T' : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definito in* (4.2) *è una distribuzione.*

Dimostrazione. Se $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ allora

$$\langle T', \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = -\langle T, \lambda\varphi' + \mu\psi' \rangle = -\lambda\langle T, \varphi' \rangle - \mu\langle T, \psi' \rangle = \lambda\langle T', \varphi \rangle + \mu\langle T', \psi \rangle$$

per cui T' è lineare. Quindi, per verificarne la continuità possiamo considerare $\varphi_n \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. In particolare $\varphi_n' \to 0$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \langle T', \varphi_n \rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n' \rangle = 0,$$

e la continuità segue dal Lemma 3.1. □

Dalla formula (4.1) e dalla definizione di derivata distribuzionale deduciamo che

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad (T_f)' = T_{f'}.$$

È anche facile controllare che se $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, allora

$$(\lambda T + \mu S)' = \lambda T' + \mu S'.$$

Esempio 4.1.

(a) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Allora se $\varphi \in \mathscr{D}$, integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} \langle T_f', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[x\varphi(x)\right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_H, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove H è la funzione di Heaviside. Così $T_f' = T_H$. Si osservi che la funzione f non è derivabile in $x = 0$ (nel senso dell'Analisi 1).

(b) Calcoliamo la derivata distribuzionale della funzione di Heaviside H, cioè la derivata di T_H. Se $\varphi \in \mathscr{D}$ otteiniamo

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \tag{4.4}$$

Quindi

$$\boxed{T_H' = \delta_0}$$

Potremmo considerare la funzione f del precedente esempio (a) come la legge del moto di una particella in quiete che subisce un impulso da una forza all'istante $x = 0$ e che dopo comincia a muoversi con velocità 1. La sua derivata prima (distribuzionale) è H, la velocità: ciò non è certo sorprendente. Più interessante è considerare la derivata seconda. Si ottiene $(T_f)'' = (T_H)' = \delta_0$, forza impulsiva di intensità 1.

♡

Esempio 4.2. Calcoliamo la derivata di δ_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}$. Per $\varphi \in \mathscr{D}$ si ha

$$\langle \delta_{x_0}', \varphi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, \varphi' \rangle = -\varphi'(x_0). \tag{4.5}$$

Più generalmente, se $p \in \mathbb{N}$, si ha

$$\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi \rangle = (-1)^p \langle \delta_{x_0}, \varphi^{(p)} \rangle = (-1)^{(p)} \varphi^{(p)}(x_0).$$

♡

Osservazione 4.1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $\varphi \in C^1([a,b])$ e sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\exists f(a+) := \lim_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R}, \qquad \exists f(b-) := \lim_{x\to b-} f(x) \in \mathbb{R}$$

(questi limiti devono essere finiti) ed esista $f'(x)$ per ogni $x \in (a,b)$, con f' sommabile su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f(b-)\varphi(b) - f(a+)\varphi(a) - \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

infatti per applicare la formula di integrazione per parti in modo corretto dobbiamo considerare $f(b-)$ e $f(a+)$ invece che $f(b)$ e $f(a)$. ♢

Possiamo ora dimostrare il seguente utile teorema sulla derivata distribuzionale di funzioni regolari a tratti.

Teorema 4.1. *Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Supponiamo che f abbia un punto di salto in ogni x_k (cioè $f(x_k-)$ e $f(x_k+)$ esistono finiti per ogni $k = 1, \ldots, m$). Assumiamo inoltre che $f' : \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \longrightarrow \mathbb{C}$ sia localmente sommabile in $\mathbb{R}$ (f' può essere definita arbitrariamente nei punti x_k). Allora*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{m} [f(x_k+) - f(x_k-)]\delta_{x_k} \tag{4.7}$$

Dimostrazione. Proviamo il Teorema nel caso $m = 1$, cioè quando f ha un solo punto di salto x_1. Allora, integrando per parti e ricordando l'Osservazione 4.1,

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{x=-\infty}^{x=x_1-} + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \left[f(x)\varphi(x)\right]_{x=x_1+}^{x=+\infty} + \int_{x_1}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -f(x_1-)\varphi(x_1) + \int_{-\infty}^{x_1} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + f(x_1+)\varphi(x_1) + \int_{x_1}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [f(x_1+) - f(x_1-)]\varphi(x_1) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [f(x_1+) - f(x_1-)]\langle \delta_{x_1}, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \langle [f(x_1+) - f(x_1-)]\delta_{x_1} + T_{f'}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

Dal teorema precedente segue che se $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{cases} f \in C(\mathbb{R}), \\ \exists f' \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\} \\ f' \text{ localmente summabile su } \mathbb{R} \end{cases} \implies (T_f)' = T_{f'} \tag{4.8}$$

Esempio 4.3.

(a) Calcoliamo la derivata di T_f, dove $f(x) = \mathbb{1}_{[-3,3]}(x)e^{-|2x|}$.
La funzione f è localmente sommabile ed ha due punti di salto $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Il salto in x_1 è $f(-3+) - f(-3-) = e^{-6}$, il salto in x_2 è $f(3+) - f(3-) = -e^{-6}$. Per quanto riguarda la derivata puntuale si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 3 \\ -e^{-|2x|}\,\mathrm{sign}(2x)2 = -2\,\mathrm{sign}(x)e^{-|2x|} & \text{se } |x| < 3,\ x \neq 0 \end{cases}$$

(nel punto $x = 0$ non esiste la derivata, e possiamo considerare $x = 0$ come un punto di salto con salto uguale a zero). Poiché $f' : \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è localmente sommabile si ha che

$$(T_f)' = T_{f'} + e^{-6}\delta_{-3} - e^{-6}\delta_3$$

(b) Calcoliamo la derivata di T_f, dove $f(x) = |x| - 1 + p_2(x)$.
f è localmente sommabile $f'(x) = \text{sign}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Visto che f' è localmente sommabile, si ha che

$$T'_f = T_{\text{sign}} + \delta_{-1} - \delta_1.$$

(c) Calcoliamo la derivata di T_f, dove $f(x) = e^x H(-x) + (e^x + 1)p_2(x-1)$.
Se $f_1(x) = e^x H(-x)$ allora $f_1'(x) = e^x H(-x)$ per $x \neq 0$. In $x = 0$ il salto di f_1 è -1, quindi $T'_{f_1} = T_{f_1'} - \delta_0$. Se $f_2(x) = (e^x + 1)p_2(x-1)$ allora $f_2'(x) = e^x p_2(x-1)$ per $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Vi sono due salti: in $x = 0$ il salto di f_2 è 2; in $x = 1$ il salto di f_2 è $-(e^2 + 1)$, per cui $T'_{f_2} = T_{f_2'} + 2\delta_0 - (e^2 + 1)\delta_2$. Allora

$$T'_f = T_{e^x H(-x) + e^x p_2(x-1)} + \delta_0 - (e^2 + 1)\delta_2.$$

♡

L'importante esempio che segue mostra che la classica derivata puntuale può essere diversa dalla derivata distribuzionale:

Esempio 4.4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \log|x|$ che è localmente sommabile.[1] Troviamo la derivata distribuzionale, cioè calcoliamo T'_f. Si osservi che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log|x| = 1/x$ per ogni $x \neq 0$, ma $1/x$ non è localmente sommabile $\mathbb{R}$. Così il simbolo $T_{1/x}$ <u>non</u> ha senso. Se $\varphi \in \mathscr{D}$, esiste $R > 0$ tale che $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]$, e troviamo

$$\begin{aligned}
\langle T'_{\log|x|}, \varphi \rangle &= -\langle T_{\log|x|}, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|x| \; \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \log|x| \; \varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{R} \log|x| \; \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&\overset{\text{per parti}}{=} -\lim_{\varepsilon \to 0+} \left([\log|x| \; \varphi(x)]_{x=-R}^{x=-\varepsilon} - \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + [\log|x| \; \varphi(x)]_{x=\varepsilon}^{x=R} - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\log\varepsilon \; \varphi(-\varepsilon) - \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \log\varepsilon \; \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\log\varepsilon \; (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right).
\end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \log\varepsilon \; (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon \log\varepsilon \; \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \cdot 2\varphi'(0) = 0.$$ [2]

Quindi troviamo che

$$\langle T'_{\log|x|}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

Ne segue che il membro di destra della formula precedente definisce una distribuzione che chiamiamo *valore principale di* $1/x$ e che denotiamo con $\text{p.v.}\frac{1}{x} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.} \tag{4.10}$$

Riassumendo si ha

$$\boxed{(T_{\log|x|})' = \text{p.v.}\frac{1}{x}.} \tag{4.11}$$

♡

[1] Poiché $\lim_{x \to 0} |x|^\alpha \log|x| = 0$ per ogni $\alpha > 0$, abbiamo che $|x|^\alpha |\log|x|| \leqslant 1$ in un intorno di $x = 0$, quindi $|\log|x|| \leqslant 1/|x|^\alpha$ in tale intorno. Prendendo $\alpha = 1/2$ otteniamo l'assoluta convergenza degli integrali impropri $\int_0^1 \log|x|\,\mathrm{d}x$, $\int_{-1}^0 \log|x|\,\mathrm{d}x$.

[2] $\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} = 2\varphi'(0)$, ma si può anche usare il teorema di De L'Hopital.

4.2 Traslazione

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile e $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $g(x) := f(x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di g è ottenuto traslando quello di f. Grazie ad un cambio di variabile, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle T_g, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x - x_0)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x + x_0)\,\mathrm{d}x = \langle T_f(x), \varphi(x + x_0)\rangle \quad (4.12)$$

dove abbiamo usato la notazione (non corretta, ma non ambigua) $\langle T_f(x), \varphi(x+x_0)\rangle$, che significa che stiamo valutando il funzionale T_f con la funzione test $\psi(x) := \varphi(x - x_0)$.

Questo esempio suggerisce di porre la seguente

Definizione 4.2 (Traslazione)**.** Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$, la *traslazione di T di a* è il funzionale $T(x - a) : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definito da

$$\langle T(x - a), \varphi\rangle := \langle T(x), \varphi(x + a)\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \quad (4.13)$$

È facile verificare che $T(x - a)$ è una distribuzione. Sottolineiamo il fatto che $T(x - a)$ è soltanto un simbolo, una notazione per la distribuzione definita da $\langle T(x), \varphi(x + a)\rangle$: $x - a$ non è la variabile indipendente di T, dal momento che T *non è* una funzione di variabile reale.

Esempio 4.5. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, allora

$$\langle \delta_{x_0}(x - a), \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, \varphi(x + a)\rangle = \varphi(x_0 + a) = \langle \delta_{x_0+a}, \varphi\rangle.$$

In particolare

$$\boxed{\delta_0(x - a) = \delta_a}$$

♡

4.3 Riscalamento

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile e sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $g(x) := f(ax)$, $x \in \mathbb{R}$. Grazie al cambio di variabile $y = ax$, per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned}\langle T_g, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y & \text{se } a > 0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y & \text{se } a < 0 \end{cases} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{|a|}\,\mathrm{d}y = \left\langle T_{f(x)}, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Quindi

$$\langle T_{f(xa)}, \varphi(x)\rangle = \left\langle T_{f(x)}, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle$$

Perciò è naturale porre la seguente

Definizione 4.3 (Riscalamento)**.** Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ ed $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si dice *riscalamento di T di un fattore a* la distribuzione $T(ax) : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\langle T(ax), \varphi \rangle := \left\langle T(x), \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{4.14}$$

Anche in questo caso è facile verificare che $T(ax)$ è in effetti una distribuzione. Un caso particolare rilevante è dato da $a = -1$:

$$\boxed{\langle T(-x), \varphi \rangle := \langle T(x), \varphi(-x) \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).} \tag{4.15}$$

Esempio 4.6. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ si ha

$$\langle \delta_{x_0}(ax), \varphi \rangle = \left\langle \delta_{x_0}, \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x_0}{a}\right) = \left\langle \frac{1}{|a|}\delta_{\frac{x_0}{a}}, \varphi \right\rangle$$

quindi

$$\delta_{x_0}(ax) = \frac{1}{|a|}\delta_{x_0/a}. \tag{4.16}$$

Se $a = -1$

$$\boxed{\delta_{x_0}(-x) = \delta_{-x_0}.} \tag{4.17}$$

♡

4.4 Moltiplicazione per una funzione C^∞

Consideriamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile ed $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sia $hf : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $hf(x) := h(x)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, localmente sommabile. Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\langle T_{hf}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_f, h\varphi \rangle \tag{4.18}$$

che ha senso perché $h\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ($\operatorname{supp}(h\varphi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)$ ed $h\varphi \in C^\infty$ per la formula di Leibniz per la derivata del prodotto di funzioni). La formula trovata per T_{hf} suggerisce la seguente

Definizione 4.4 (Moltiplicazione)**.** Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si dice *moltiplicazione di T per h* il funzionale $hT : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ definito da

$$\langle hT, \varphi \rangle := \langle T, h\varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{4.19}$$

Esempio 4.7. Se $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ otteniamo

$$\langle h\delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, h\varphi \rangle = h(x_0)\varphi(x_0) = \langle h(x_0)\delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

cioè

$$\boxed{h\delta_{x_0} = h(x_0)\delta_{x_0}.} \tag{4.20}$$

Ad esempio $\cos(x)\delta_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{\pi/4}$. ♡

Concludiamo il paragrafo mostrando alcune proprietà che collegano la derivata con le operazioni precedenti. Le dimostrazioni sono lasciate come utile esercizio.

Proposizione 4.2. *Se $T \in \mathscr{D}'$, $a \in \mathbb{R}$ ed $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora*

$$\begin{aligned} &(T(x-a))' = T'(x-a), \\ &(T(ax))' = aT'(ax) \qquad (a \neq 0), \\ &(hT)' = h'T + hT'. \end{aligned}$$

5 Convergenza di distribuzioni

Definizione 5.1 (Convergenza di distribuzioni)**.** Sia $T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ Una successione di distribuzioni. Diciamo che T_n *converge a* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *nel senso delle distribuzioni* (e scriviamo $T_n \to T$ *in* $\mathscr{D}'$) se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{as } n \to \infty, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{5.1}$$

È facile verificare il seguente

Proposizione 5.1. *Se $T_n \to T$ e $S_n \to S$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, allora $\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

Esempio 5.1.

(a) Supponiamo che $T_n = \delta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se $\varphi \in \mathscr{D}$ è fissata arbitrariamente, allora $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$, per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, e si ha

$$\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) \qquad \forall n.$$

Ora $\varphi(n) = 0$ per ogni $n > b$, così $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$ e

$$\langle \delta_n, \varphi \rangle \to 0 = \langle 0, \varphi \rangle \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Perciò $\delta_n \to 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(b) Definiamo $T_n = \delta_n - \delta_{1/n}$. Se $\varphi \in \mathscr{D}$ allora

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \delta_n, \varphi \rangle - \langle \delta_{1/n}, \varphi \rangle = \varphi(n) - \varphi(1/n) \to 0 - \varphi(0)$$

poiché φ è continua in $x = 0$. Perciò

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to -\varphi(0) = -\langle \delta_0, \varphi \rangle$$

cioè $\delta_n - \delta_{1/n} \to -\delta_0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(c) Sia $T_n = \delta_{(-2)^{3n}\log(2n)}$ per $n > 0$. Se $\varphi \in \mathscr{D}$ allora $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, e si ha

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi\left((-2)^{3n}\log(2n)\right).$$

Il limite della successione $(-2)^{3n}\log(2n)$ non esiste, ma $|(-2)^{3n}\log(2n)| \to +\infty$ per $n \to \infty$, perciò $(-2)^{3n}\log(2n) \notin \operatorname{supp}(\varphi)$ per ogni n maggiore di un opportuno n_0. Ne segue che $\varphi\left((-2)^{3n}\log(2n)\right) = 0$ per ogni $n > n_0$ e

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty$$

cioè $T_n \to 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(d) Se $T_n = \delta_{(-1)^n}$ allora per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ abbiamo

$$\langle \delta_{(-1)^n}, \varphi \rangle = \varphi((-1)^n).$$

Consideriamo ora una funzione test φ_0 tale che $\varphi_0(-1) = 1$ e $\varphi_0(1) = 0$. Ne segue che il limite di $\varphi_0((-1)^n)$ non esiste, quindi $\delta_{(-1)^n}$ non converge in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. ♡

Proposizione 5.2. *Supponiamo che $f_n, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ siano date per ogni n e che*

$$f_n \to f \qquad \textit{uniformemente su } [a,b] \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b$$

($[a,b]$ limitato). Allora $T_{f_n} \to T_f$ in $\mathscr{D}'$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \to \langle T_f, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, cioè che $\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle \to 0$ per $n \to \infty$. Perciò dobbiamo stimare $|\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle|$ con una successione convergente a zero. Se $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [c,d]$, allora

$$\begin{aligned} |\langle T_{f_n} - T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x) - f(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[c,d]} \|\varphi\|_\infty \,\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_{\infty,[c,d]} \|\varphi\|_\infty (d-c) \to 0 \end{aligned}$$

per $n \to \infty$ poiché $f_n \to f$ uniformemente su $[c,d]$. □

Esempio 5.2. Sia $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$, infatti

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n} \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi grazie al teorema precedente $T_{f_n} \to 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Naturalmente è facile trovare direttamente il limite distribuzionale: se $\varphi \in \mathscr{D}$ e $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a,b]$, allora

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle| = \left| \int_a^b \frac{\cos(nx)}{n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left| \frac{\cos(nx)}{n} \right| |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{n}(b-a) \to 0 \tag{5.2}$$

per $n \to \infty$ (sono gli stessi calcoli della dimostrazione precedente). ♡

Esempio 5.3. Se $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$ allora $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, infatti

$$\mathbb{1}_{[n,n+1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leqslant x \leqslant n+1 \\ 0 & \text{se } x \notin [n, n+1] \end{cases}$$

quindi $f_n(x) = 0$ per ogni $n > x$. Questa convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$, ma è uniforme su ogni intervallo limitato $[a,b]$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |\mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)| = 0 \qquad \forall n > b.$$

Quindi $T_{f_n} \to 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Anche in questo caso è forse più facile trovare il limite distribuzionale direttamente tramite la definizione. ♡

Esempio 5.4. Sia $f_n(x) = np_{1/n}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È facile vedere che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $f_n(0) = n \to +\infty$, per cui la convergenza non è uniforme. Verifichiamo che T_{f_n} converge in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Se $\varphi \in \mathscr{D}$ allora

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-1/2n}^{1/2n} n\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1/n} \int_{-1/2n}^{1/2n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x_n) \tag{5.3}$$

per un opportuno $x_n \in \,]-1/2n, 1/2n[$, in virtù del teorema della media integrale. Poiché $-1/2n < x_n < 1/2n$, abbiamo che $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, quindi per la continuità di φ in $x = 0$, troviamo che $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(0)$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

e $T_{np_{1/n}} \to \delta_0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. ♡

6 Distribuzioni a supporto compatto

Definizione 6.1. Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

(i) Si dice che T *è nulla su* $]a, b[\, \subseteq \mathbb{R}$, se $\langle T, \varphi\rangle = 0$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ con $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \,]a, b[$.

(ii) Chiamiamo *supporto di* T l'insieme $\mathrm{supp}(T) := \mathbb{R} \setminus N_T$, dove N_T è l'unione di tutti gli intervalli dove T è nulla.

Dalla definizione precedente segue che T ha supporto compatto se e solo se

$$\exists a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ :\ T \text{ è nulla su } \mathbb{R} \setminus [a, b]\,.$$

Esempio 6.1. Troviamo il supporto di δ_{x_0}, dove $x_0 \in \mathbb{R}$.
È chiaro che δ_{x_0} non è nulla su ogni intervallo aperto contenente x_0. Prendiamo ora $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Allora

$$]a, b[\, \subseteq \mathbb{R} \setminus \{x_0\},\ \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \,]a, b[\quad \Longrightarrow \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0) = 0,$$

quindi δ_{x_0} è nulla $]a, b[$. Allora $N_{\delta_{x_0}} = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e si ha

$$\mathrm{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\},$$

in particolare δ_{x_0} ha supporto compatto. ♡

Proposizione 6.1. *Se* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *allora* $\mathrm{supp}(T') \subseteq \mathrm{supp}(T)$.

Dimostrazione. Se T è nulla su $]a, b[$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \,]a, b[$ allora $\mathrm{supp}(\varphi') \subseteq \,]a, b[$, per cui $\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle = 0$. Ne segue che $N_T \subseteq N_{T'}$, perciò $\mathrm{supp}(T') = \mathbb{R} \setminus N_{T'} \subseteq \mathbb{R} \setminus N_T = \mathrm{supp}(T)$. □

Esempio 6.2. Dalla proposizione precedente si deduce che $\mathrm{supp}(\delta_{x_0}^{(p)}) \subseteq \{x_0\}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. D'altra parte se prendiamo una funzione test tale che $\varphi^{(p)}(x_0) \neq 0$ otteniamo che $\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \varphi\rangle = (-1)^p \varphi^{(p)}(x_0) \neq 0$, quindi $x_0 \notin N_{\delta_{x_0}^{(p)}}$. Perciò

$$\mathrm{supp}(\delta_{x_0}^{(p)}) = \{x_0\} \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

♡

Definizione 6.2. Si dice che $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *è a supporto compatto* se $\mathrm{supp}(T)$ è compatto.

Quando $T \in \mathscr{D}'$ e $\mathrm{supp}(T)$ è compatto, è possibile dare un significato alla scrittura $\langle T, \varphi \rangle$, dove $\varphi \in C^\infty$, ma il suo supporto non è compatto.

Definizione 6.3. Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a supporto compatto, e siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{supp}(T) \subseteq \,]a, b[$. Allora poniamo

$$\langle T, \psi \rangle := \langle T, \varphi_0 \psi \rangle \qquad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \tag{6.1}$$

dove $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ è una funzione test tale che $\varphi_0(x) = 1$ per ogni $x \in \,]a, b[$. In tal modo possiamo estendere la definizione di T all'insieme $C^\infty(\mathbb{R})$, in altri termini possiamo scrivere $T : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$.

La definizione precedente ha senso poiché è possibile provare che non dipende dalla scelta di φ_0.

7 Convoluzione

7.1 Convoluzione di funzioni

Definizione 7.1. Se $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sono localmente sommabili, chiamiamo *convoluzione di f e g* la funzione

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}y \tag{7.1}$$

definita per i numeri reali x tali che l'integrale è convergente.

Osserviamo che con un cambio di variabile si verifica che

$$\boxed{f * g = g * f} \tag{7.2}$$

infatti, se poniamo $t = x - y$, si ha $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}y$ e

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}y = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(t) g(x-t) \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) \,\mathrm{d}y = (g * f)(x).\end{aligned}$$

Diamo ora delle condizioni sufficienti che assicurino l'esistenza di $(f * g)(x)$.

Proposizione 7.1. *Siano date* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

(a) f *sommabile,* g *localmente sommabile,* g *limitata* $\implies$ $(f * g)(x)$ *esiste.*

(b) f *localmente sommabile,* $g \in C(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(g)$ *compatto* $\implies$ $(f * g)(x)$ *esiste.*

(c) $|f|^2, |g|^2$ *sommabili* $\implies$ $(f * g)(x)$ *esiste.*

Dimostrazione.

(a) Per ogni $y \in \mathbb{R}$ abbiamo $|f(x-y)g(y)| \leqslant |f(x-y)| \|g\|_\infty$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \|g\|_\infty \, \mathrm{d}y = \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty.$$

(b) Poiché g è continua e il suo supporto è contenuto in qualche intervallo $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, per il teorema di Weierstrass $\|g\|_\infty$ è finito, quindi $|f(x-y)g(y)| \leqslant |f(x-y)| \|g\|_\infty$. Inoltre il supporto della funzione $F(y) = f(x-y)g(y)$ è contenuto in $[a,b]$, quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y &= \int_a^b |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leqslant \int_a^b |f(x-y)| \|g\|_\infty \, \mathrm{d}y = \|g\|_\infty \int_{x-b}^{x-a} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty\end{aligned}$$

perché f è localmente sommabile.

(c) Osserviamo che f e g sono localmente sommabili, infatti $|f(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{1}{2}$ [3] e se $-\infty < a < b < +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b \left(\frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{2} \, \mathrm{d}x + \frac{b-a}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{b-a}{2} < \infty.\end{aligned}$$

Ne segue che $F(y) = f(x-y)g(y)$ è localmente sommabile. Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x-y)|^2}{2} \, \mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(y)|^2}{2} \, \mathrm{d}y < \infty.$$

$\square$

Proposizione 7.2. *Se* $p \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *è localmente sommabile,* $g \in C^p(\mathbb{R})$, *e* $\operatorname{supp}(g)$ *è compatto, allora* $f * g \in C^p(\mathbb{R})$ *e*

$$(f * g)^{(p)}(x) = (f * g^{(p)})(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad p \geqslant 1.$$

[3] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha\beta \leqslant (\alpha^2 + \beta^2)/2$, poiché $0 \leqslant (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 7.1-(b), la convoluzione esiste. È possibile provare che è lecito passare al limite sotto il segno di integrale, così per ogni $x_n \to x$ si ha, usando la continuità di g,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f*g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(g*f)(x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g(x_n-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} g(x_n-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = (g*f)(x) = (f*g)(x).\end{aligned}$$

Segue che $(f*g)$ è continua in x. È anche possibile derivare sotto il segno di integrale, quindi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f*g)(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g*f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g'(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = (g'*f)(x) = (f*g')(x).\end{aligned}$$

L'affermazione per $p \in \mathbb{N}$ segue ragionando per induzione. □

Lemma 7.1. *Sia $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'Esempio 2.2. Se $f \in C(\mathbb{R})$ allora per ogni $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\rho_n * f \to f \qquad \textit{uniformly on } [a,b].$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}(\rho_n*f)(x) - f(x) = (f*\rho_n)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}}\rho_n(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}}\rho_n(y)f(x)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\rho_n(y)(f(x-y)-f(x))\,\mathrm{d}y = \int_{-1/n}^{1/n}\rho_n(y)(f(x-y)-f(x))\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Poiché f è uniformemente continua su $[a,b]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ per $|y| < \delta$. Allora per $n > 1/\delta$ si ha

$$\begin{aligned}\|\rho_n * f - f\|_{\infty,[a,b]} &= \sup_{x\in[a,b]}|(\rho_n*f)(x) - f(x)| \\ &\leqslant \int_{-1/n}^{1/n}\rho_n(y)|f(x-y)-f(x)|\,\mathrm{d}y < \varepsilon\int_{-1/n}^{1/n}\rho_n(y) = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Corollario 7.1. *Se $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita nell'Esempio 2.2, allora $T_{\rho_n} \to \delta_0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Se $\varphi \in \mathscr{D}$ per il lemma precedente si ha che $\rho_n * \varphi \to \varphi$ uniformemente su ogni intervallo limitato, in particolare $(\rho_n * \varphi)(0) \to \varphi(0)$, quindi

$$\begin{aligned}\langle T_{\rho_n}, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_n(0-x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (\rho_n*\varphi)(0) \to \varphi(0) = \langle\delta_0, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

□

7.2 Convoluzione di distribuzioni

Consideriamo due funzioni f, g tali che la convoluzione $f * g$ è localmente sommabile e calcoliamo T_{f*g}. Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha (anche grazie al teorema di Fubini[4])

$$\begin{aligned}
\langle T_{f*g}, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\ \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\ \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)\ \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{t=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ \varphi(y+t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ \varphi(y+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big\langle T_f(y), \langle T_g(x), \varphi(x+y)\rangle\Big\rangle
\end{aligned}$$

Questo calcolo sembra suggerire la definizione di convoluzione di due distribuzioni $T, S \in \mathscr{D}'$ nel modo seguente:

$$\langle T * S, \varphi\rangle := \Big\langle T(y), \big\langle S(x), \varphi(x+y)\big\rangle\Big\rangle, \tag{7.3}$$

ma è necessario provare però che il membro di destra abbia senso. È possibile dimostrare la proposizione seguente.

Proposizione 7.3. *Se $x \in \mathbb{R}$ è fissato e $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è definita da*

$$\psi(y) := \big\langle S(x), \varphi(x+y)\big\rangle, \qquad y \in \mathbb{R}$$

allora

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \tag{7.4}$$

$$\operatorname{supp}(S) \text{ compatto} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{supp}(\psi) \text{ compatto.} \tag{7.5}$$

Dimostrazione. . □

Abbiamo così due possibilità:

(1.) Se $\operatorname{supp}(S)$ è compatto allora, grazie a (7.4)-(7.5), $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ e (7.3) hanno senso.

(2.) Se invece $\operatorname{supp}(T)$ è compatto, da (7.5), deduciamo che (7.3) ha senso secondo la Definition 6.3.

Perció possiamo finalmente dare la seguente

[4] Il teorema di Fubini permette di scambiare i due segni di integrale

Definizione 7.2. Supponiamo che $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e che almeno uno dei due supporti $\operatorname{supp}(T)$ o $\operatorname{supp}(S)$ è compatto. La *convoluzione di T e S* è la distribuzione $T * S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definita da

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \Big\langle T(y), \big\langle S(x), \varphi(x+y) \big\rangle \Big\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{7.6}$$

È possibile provare che $T * S$ è lineare e continuo, cioè è una distribuzione.

Proposizione 7.4. *Se $S, T, U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ allora*

(i) $S * T = T * S$

(ii) $S * (T * U) = (S * T) * U$

(iii) $S * (\lambda T + \mu U) = \lambda(S * T) + \mu(S * U)$

(iv) $(S * T)(x - a) = S(x - a) * T = S * T(x - a)$

(v) $(S * T)' = S' * T = S * T'$

quando la convoluzione ha senso.

Dimostrazione. □

Esempio 7.1. Se $T \in \mathscr{D}'$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ allora

$$\langle T * \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \Big\langle T(y), \big\langle \delta_{x_0}(x), \varphi(x+y) \big\rangle \Big\rangle = \langle T(y), \varphi(x_0 + y) \rangle = \langle T(y - x_0), \varphi(y) \rangle$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la definizione di $T(x - x_0)$, quindi

$$\boxed{T * \delta_{x_0} = T(x - x_0)}$$

in particolare per $x_0 = 0$

$$\boxed{T * \delta_0 = T}$$

♡

Esempio 7.2. Se $T \in \mathscr{D}'$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ allora

$$(T * \delta_{x_0})^{(p)} = T^{(p)} * \delta_{x_0} = T^{(p)}(x - x_0).$$

♡

Proposizione 7.5. *Se $T_n, T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$,* $\operatorname{supp}(S)$ *è compatto e $T_n \to T$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, allora $T_n * S \to T * S$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ abbiamo

$$\langle T_n * S, \varphi \rangle = \Big\langle T_n(y), \big\langle S(x), \varphi(x+y) \big\rangle \Big\rangle \to \Big\langle T(y), \big\langle S(x), \varphi(x+y) \big\rangle \Big\rangle = \langle T * S, \varphi \rangle$$

per $n \to \infty$. □

Proposizione 7.6. *Sia $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita nell'Esempio 2.2. Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, allora $T * \rho_n$ è una distribuzione regolare associata ad una funzione di classe C^∞ e $T * \rho_n \to T$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. □

Concludiamo il capitolo con due utili teoremi (ne omettiamo la dimostrazione)

Teorema 7.1. *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $xT(x) = 0$ allora esiste una costante c tale che $T = c\delta_0$.*

Teorema 7.2. *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ e $T' = 0$ allora T è costante, più precisamente esiste una costante c tale che $T = T_c$.*

8 Esercizi

Esercizi (tratti dalle dispense di Analisi Complessa (vecchio ordinamento)).

1. Quali tra i seguenti funzionali sono distribuzioni?

$$\langle T_1, \varphi\rangle = \int_0^1 \ln(x+1)\varphi(x)\,dx\,, \qquad \langle T_2, \varphi\rangle = \int_0^1 |\varphi(x)|^2\,dx\,,$$
$$\langle T_3, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi'(x)\,dx\,, \qquad \langle T_4, \varphi\rangle = |\varphi(5)|$$
$$\langle T_5, \varphi\rangle = \varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3) - \varphi(4)\,, \qquad \langle T_6, \varphi\rangle = \int_{-4}^4 \sin x\varphi(x)\,dx + 6\varphi(4)$$

2. Quali tra i seguenti funzionali sono distribuzioni?

$$\langle T_1, \varphi\rangle = \int_{-1}^1 x^2\varphi(x)\,dx + \int_{-2}^3 e^x\varphi(x)\,dx\,, \qquad \langle T_2, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(x)^3\,dx$$
$$\langle T_3, \varphi\rangle = \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx\,, \qquad \langle T_4, \varphi\rangle = \varphi(5)\varphi(3)$$
$$\langle T_5, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^\infty (\sinh x - 4x)\varphi(x)\,dx + e^{12}\varphi(e)\,, \qquad \langle T_6, \varphi\rangle = 1$$

3. Calcolare la derivata distribuzionale delle distribuzioni regolari associate alle seguenti funzioni localmente sommabili:

$$(5x+3)H(x)\,, \qquad \operatorname{sgn}(x) + 2x\,, \quad |x^2-1|$$
$$(x^2-1)H(-x)\,, \qquad \sin xH(x)\,, \quad \arctan\frac{1}{x-1}$$

4. Calcolare la derivata distribuzionale delle seguenti distribuzioni:

$$T_{H(2x)} + 5\delta_3(2x)\,, \quad e^{x^2}\delta_{-1} + T_{3\,\mathrm{sign}(-x)}\,, \quad x^2 T_{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}$$

5. Sia $\varphi \in \mathscr{D}$ una funzione test tale che $\varphi'(0) = -2$. Calcolare

$$\langle (\sin x)\delta_0'', \varphi \rangle\,.$$

6. Trovare tutte le distribuzioni $T \in \mathscr{D}'$ tali che $T' = \delta_0 + \delta_2 - 2\delta_1'$.

7. Mostrare che
$$n^n \delta_n \to 0\,, \quad \delta_n^{(n)} \to 0\,, \quad e^{-1/n}\delta_{1/n} \to \delta_0$$
in $\mathscr{D}'$ per $n \to \infty$.

8. Mostrare che
$$T_n = n(\delta_{1/n} + \delta_0)$$
non è convergente in $\mathscr{D}'$.

9. Trovare il limite, se esiste, delle seguenti successioni di distribuzioni:

$$n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,, \quad \sqrt{n}(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,, \quad n^2(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,.$$

10. Se
$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[2(-1)^n, 2(-1)^n+1]}(x)\,,$$
mostrare che T_{f_n} non converge nel senso delle distribuzioni.

11. Se
$$f_n(x) = n^2 p_{1/n}(x)\,,$$
mostrare che T_{f_n} non converge in $\mathscr{D}'$.

Risposte

1. T_1 è una distribuzione perché $T_1 = T_g$ con $g(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\ln(x+1)$. T_2 non è una distribuzione perché non è lineare (ad esempio $\langle T_2, -\varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$). T_3 è una distribuzione perché per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \langle \delta_1 - \delta_0, \varphi \rangle\,.$$

Quindi $T_3 = \delta_1 - \delta_0$. T_4 non è distribuzione perché non è lineare. T_5 è una distribuzione perché $T_5 = \delta_1 - \delta_2 + \delta - 3 - \delta_4$. T_6 è una distribuzione perché $T_6 = T_g + 6\delta_4$ con $g(x) = \mathbb{1}_{[-4,4]}(x)\sin x$.

2. T_1, T_3 e T_5 sono distribuzioni. Gli altri funzionali non lo sono.

3.
$$5T_H + 3\delta_0\,, \qquad 2\delta_0 + T_2\,, \quad T_{2x\ \operatorname{sign}(x^2-1)}$$
$$T_{2xH(-x)} + \delta_0\,, \qquad T_{\cos x H(x)}\,, \quad T_{\frac{-1}{(x-1)^2+1}} + \pi\delta_1$$

4.
$$\delta_0 + 5/2\delta'_{3/2}\,, \quad e\delta'_{-1} - 6\delta_0\,, \quad 2xT_{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)} + \delta_{-1} - \delta_1$$

5. -4.
6. $T = T_{H(x)} + T_{H(x-2)} - 2\delta_1 + T_c$ dove c è una costante.
7. La soluzione è simile agli esercizi studiati a lezione.
8. Se φ è una funzione test allora
$$\langle n(\delta_{1/n} + \delta_0), \varphi\rangle = n\varphi(1/n) + n\varphi(0).$$
Se scegliamo una particolare φ in modo tale che $\varphi(0) = 1$ otteniamo che $n\varphi(1/n) + n\varphi(0) \to +\infty$ per $n \to \infty$.
9. $-2\delta'_0$, 0, la terza successione non converge.
10. La successione f_n è $\mathbb{1}_{[-2,-1]},\ \mathbb{1}_{[2,3]},\ \mathbb{1}_{[-2,-1]},\ \mathbb{1}_{[2,3]}, \ldots$, Quindi se $\varphi \in \mathscr{D}$ allora la successione $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle$ è
$$\int_{-2}^{-1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{2}^{3} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{-2}^{-1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{2}^{3} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \ldots$$
Se scegliamo una funzione test $\varphi_0 \neq 0$ tale che $\operatorname{supp}\varphi_0 \subseteq [-2,-1]$ e, per esempio, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x = 1$, allora
$$\langle T_{f_n}, \varphi_0\rangle = 1, 0, 1, 0, \ldots$$
così T_{f_n} non converge nel senso delle distribuzioni.
11. Usare il teorema del valor medio integrale (vedi lezione in aula).

Modifiche dalla revisione del 23 maggio 2016 alla revisione del xx xxxx 2016:

1. Pag. 11, Esempio 3.2-d): $\varphi(2) \rightsquigarrow 2\varphi(2)$; $-\langle\delta_2, \varphi\rangle \rightsquigarrow \langle 2\delta_2, \varphi\rangle$; $\delta_2 \rightsquigarrow 2\delta_2$.
2. Dim. Teorema 4.1, righe 3, 4 della formula: $x = x_1+ \rightsquigarrow x = x_1-$; $x = x_1- \rightsquigarrow x = x_1+$
3. Esempio 4.4, riga 1 della prima formula: $\int_{-\infty}^{\infty} \rightsquigarrow -\int_{-\infty}^{\infty}$
4. Esempio 4.4, riga 4 della prima formula: $+\log\varepsilon\varphi(\varepsilon) \rightsquigarrow -\log\varepsilon\varphi(\varepsilon)$