Cognome e Nome.. Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 21 SETTEMBRE 2011 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Trovare gli zeri della funzione

$$f(z) = \frac{\overline{z}^2 - 4}{z - 3\overline{z}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

nel suo naturale dominio di definizione dom(f).

$$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 3\bar{z}\} = \{z = x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ x+iy \neq 3x - 3iy\}$$
$$= \{z = x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ x - i2y \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

$$\bar{z}^2 - 4 = 0 \iff (\bar{z}-2)(\bar{z}+2) = 0 \iff \bar{z} = 2 \cup \bar{z} = -2$$
$$\iff z = 2 \iff z = -2 \qquad (2, -2 \in \mathbb{R})$$

Quindi l'insieme degli zeri di f è

$$S = \{2, -2\}$$

Esercizio 2 (3 punti)
Stabilire se la funzione

$$f(x+iy) := \sin(x-y) + i\cos(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

è analitica nel piano complesso.

$u(x,y) := \mathrm{Re}\, f(x,y) = \sin(x-y)$, $\quad v(x,y) := \mathrm{Im}\, f(x,y) = \cos(x-y)$

$$\text{C-R}: \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x-y) = \sin(x-y) \\[2ex] -\cos(x-y) = \sin(x-y) \end{cases}$$

ma <u>non</u> esiste nessun numero reale $\alpha = x-y$ tale che queste equazioni siano entrambe soddisfatte, quindi f <u>non</u> è analitica in $\Omega = \mathbb{C}$.

<u>Osservazione</u>: si ha $|f(z)| = 1$ costante, ma $f(z)$ non è costante, ed è possibile provare che se il modulo di una funzione analitica è costante (in un dominio), allora f è costante.

Esercizio 3 (5 punti)
Si determini e si disegni l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}(z+i)^{4n}}{2in^2+(i+3)\log n}. = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \text{ con}$$

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{2in^2+(i+3)\log n} \quad \text{e} \quad w = (z+i)^4.$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2in^2+(i+3)\log n}{2i(n+1)^2+(i+3)\log(n+1)}\right| \sim \left|\frac{2in^2}{2i(n+1)^2}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1 \text{ per } n\to\infty$$

$\Rightarrow R = 1/1 = 1$ raggio di convergenza.

Se $|w| = 1$ allora $|a_n w^n| = |a_n||w|^n = \left|\frac{\sqrt[3]{n}}{2in^2+(i+3)\log n}\right| \sim \frac{1}{2n^{5/3}}$,

ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{5/3}} < \infty$, quindi la serie data converge se $|w| = 1$.

Allora l'insieme di convergenza è $\{z \in \mathbb{C} : |w| \le 1\} =$

$= \{z : |z+i|^4 \le 1\} = \{z : |z+i| \le 1\} = \overline{B_1(-i)}$

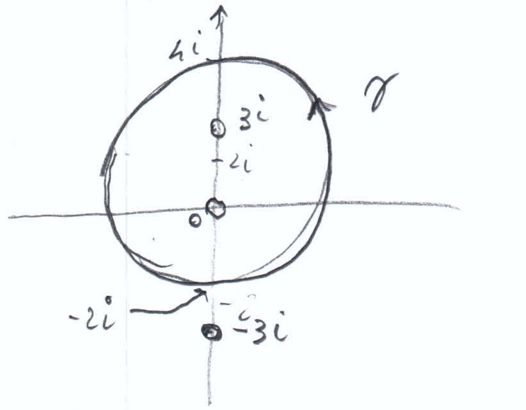
Esercizio 4 (4 punti)
Si calcoli

$$I := \int_\gamma \frac{dz}{z^3+9z},$$

dove γ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario avente come sostegno l'insieme $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| = 4\}$.

$$f(z) := \frac{1}{z^3+9z} = \frac{1}{z(z^2+9)}$$

$$= \frac{1}{z(z-3i)(z+3i)}.$$



Dal Teorema dei Residui segue che

$$I = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}_f(0) + \operatorname{Res}_f(3i) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left(\frac{1}{z^2+9}\right)\Big|_{z=0} + \left(\frac{1}{z(z+3i)}\right)\Big|_{z=3i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1}{9} - \frac{1}{18} \right\} = \frac{\pi i}{9}$$

Esercizio 5 (5 punti)
Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) := \frac{\cosh(z^3)}{z^5} - \frac{3}{z} + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^5}.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Se $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^3)^{2n}}{(2n)!} - \frac{3}{z} + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^5} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{6n-5}}{(2n)!} - \frac{3}{z} + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^5} = \left(\frac{1}{z^5} + \frac{z}{2} + \dots\right) - \frac{3}{z} + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^5}$$

$$= \left(\frac{2}{z^3} - \frac{3}{z}\right) + \frac{z}{2} + \dots = \left(\frac{2}{z^3} - \frac{3}{z}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n-5}}{(2n)!}$$

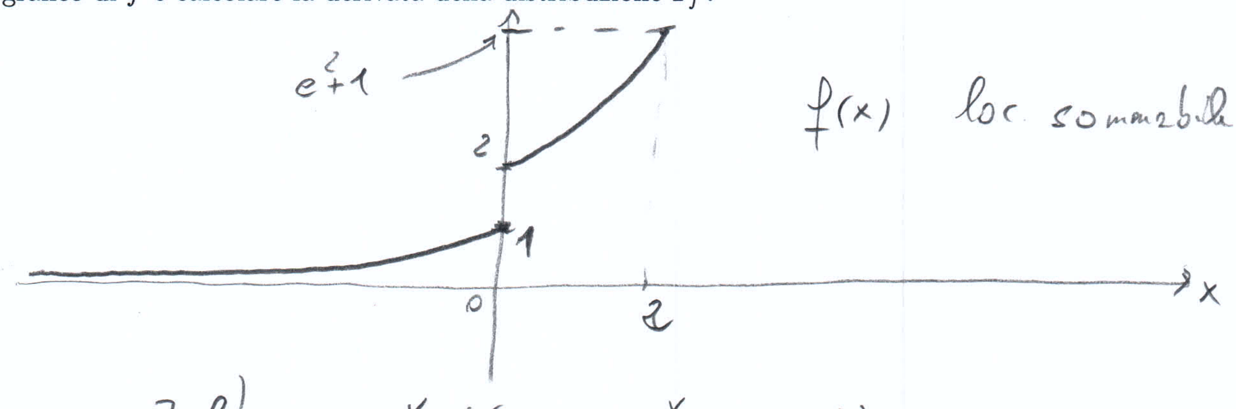
$$\mathrm{Res}_f(0) = -3$$

$z_0 = 0$ è un polo di ordine 3

Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^x H(-x) + (e^x + 1)p_2(x-1),$$

dove H denota la funzione di Heaviside e p_2 la funzione porta di ampiezza 2. Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f.



$f(x)$ loc. sommabile

$$\forall x \neq 0,2 \quad \exists\, f'(x) = e^x H(-x) + e^x p_2(x-1)$$

$$= e^x [H(-x) + p_2(x-1)]$$ loc. sommabile in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow (T_f)' = T_{e^x(H(-x)+p_2(x-1))} + \delta_0 - (e^2+1)\,\delta_2$$

Esercizio 7 (4 punti)
Sia $f(x) := (x^2 - i)\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Provare che T_f è una distribuzione temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

$|f(x)| = |x^2 - i||\sin x| \le |x^2 - i|$ che è il modulo di un polinomio, quindi f è a crescita lenta, perciò $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(T_f)(\nu) = \mathcal{F}(x^2 \sin x)(\nu) - i\,\mathcal{F}(\sin x)(\nu)$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\right]''(\nu) - i\,\mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)(\nu)$$

$$= \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}\left(e^{2\pi i \frac{1}{2\pi} x}\right)(\nu) - \mathcal{F}\left(e^{2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi}\right)x}\right)\right]''(\nu) - i\,\mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)(\nu)$$

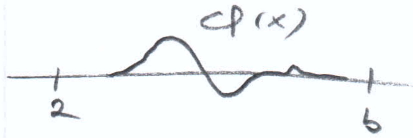
$$= \frac{1}{8\pi^2}\left(\delta''_{\frac{1}{2\pi}} - \delta''_{-\frac{1}{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$$

Esercizio 8 (5 punti)
a) Siano date una distribuzione T ed una successione di distribuzioni T_n. Scrivere cosa significa che T_n converge a T nel senso delle distribuzioni.

b) Dire se esiste il limite nel senso delle distribuzioni della successione $T_n = n\delta_{-n}$. In caso affermativo calcolare tale limite.

(b) Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\text{supp}(\varphi) \subseteq [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ allora

$\langle T_n, \varphi \rangle = n \langle \delta_{-n}, \varphi \rangle = n\varphi(-n)$,



per ogni n sufficientemente grande $(n > -a)$,
si ha che $-n \notin [a, b]$, quindi $\varphi(-n) = 0$, quindi $n\varphi(-n) = 0$
Allora $\langle T_n, \varphi \rangle = 0$ $\forall n$ grande abbastanza, per cui
$\langle T_n, \varphi \rangle \to 0 = \langle 0, \varphi \rangle$, cioè $T_n \to 0$ in $\mathcal{D}'$