28 Gennaio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Il tempo totale assegnato per la soluzione è di 2 ore. Al termine dei primi 30 minuti verrà ritirato il foglio con i quiz a risposta multipla.**
Consegnare il testo completo di tutti i fogli, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola (in STAMPATELLO MAIUSCOLO). Nella tabellina qui sotto riportare al più una risposta per ogni quiz di teoria usando LETTERE MAIUSCOLE. Spiegazioni o commenti (opzionali) sulla risposta selezionata possono essere aggiunti nel campo COMMENTI che segue ogni quiz di teoria.

Quiz	1	2	3
Risposta	A	A	B

1. Sia $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$ la funzione di autocorrelazione di un segnale $x(t)$ non nullo a energia finita. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   (A) $R_x(\tau)$ ha una trasformata di Fourier sempre positiva
   (B) $R_x(\tau)$ deve essere reale $\forall\tau$
   (C) $R_x(\tau)$ può avere parte reale nulla
   (D) $R_x(\tau)$ può essere nulla $\forall\tau$

2. Il processo casuale $x(t)$, reale, stazionario in senso lato e con densità di probabilità uniforme, è posto all'ingresso di un sistema LTI con funzione di trasferimento $H(f)$. Il processo d'uscita $y(t)$ ha spettro di potenza
   (A) $G_y(f) = G_x(f)|H(f)|^2$, essendo $G_x(f)$ lo spettro di potenza di $x(t)$
   (B) $P_y = P_x|H(0)|^2$, essendo $P_x = E\{x^2(t)\}$
   (C) Il processo $x(t)$ non ammette spettro di potenza perché non è stazionario in senso stretto, e quindi non è possibile scrivere un'espressione per lo spettro di potenza di $y(t)$
   (D) $G_y(f) = G_x(f)H^2(f)$, essendo $G_x(f)$ lo spettro di potenza di $x(t)$

3. Si consideri il segnale a tempo discreto $x(n) = 2\cos(4\pi n/5)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.
   (A) $x(n)$ è periodico di periodo 5/2.
   (B) $x(n)$ è periodico di periodo 5.
   (C) $x(n)$ è periodico di periodo 2.
   (D) $x(n)$ non è periodico.

28 Gennaio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Consegnare il testo completo di tutti i fogli e con lo svolgimento completo degli esercizi, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola.**

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Si consideri un processo casuale stazionario $N(t)$ gaussiano bianco (spettro $G_N(f) = N_0/2$) all'ingresso di un sistema composto dalla cascata di due filtri passa-basso ideali con banda unilatera B e $B/2$ e guadagni G_1 e G_2, rispettivamente. Sia $W(t)$ l'uscita del primo sistema e $Y(t)$ l'uscita del secondo sistema.

1. Calcolare media e varianza di $Y(t)$ e $W(t)$ in funzione di N_0, B, G_1 e G_2.
2. Calcolare lo densità spettrale di potenza di $Y(t)$ e $W(t)$.
3. Calcolare lo funzione di autocorrelazione di $Y(t)$ e $W(t)$.
4. Calcolare la funzione di mutua correlazione tra $Y(t)$ e $W(t)$.
5. Calcolare la distributione di probabilita' della variabile casuale $Z = W(t_1) + 2Y(t_2)$ in funzione di t_1 e t_2.
6. Per quale valore di t_1 e t_2 la varianza di Z è minima?

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. $W(t)$ e $Y(t)$ hanno valor medio nullo perchè $N(t)$ ha valor medio nullo. La varianza coincide con il valore quadratico medio $\sigma_W^2 = R_W(0) = N_0 G_1^2 B$, $\sigma_Y^2 = R_Y(0) = \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 B$. Si veda punto 3.

2.
$$\begin{aligned}
G_W(f) &= \frac{N_0}{2} G_1^2 |\Pi_{2B}(f)|^2 \\
&= \frac{N_0}{2} G_1^2 \Pi_{2B}(f) \\
G_Y(f) &= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 |\Pi_{2B}(f)|^2 \cdot |\Pi_B(f)|^2 \\
&= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 |\Pi_B(f)|^2 \\
&= \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 \Pi_B(f)
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
R_W(\tau) &= F^{-1}(G_W(f)) = N_0 G_1^2 B \mathrm{sinc}(2B\tau) \\
R_Y(\tau) &= F^{-1}(G_Y(f)) = \frac{N_0}{2} G_1^2 G_2^2 B \mathrm{sinc}(B\tau)
\end{aligned}$$

.

4.

$$
\begin{aligned}
R_{WY}(t_1, t_2) &= E\{W(t_1)Y(t_2)\} = E\{W(t)Y(t+\tau)\} \\
&= R_W(\tau) * h_2(\tau) \\
&= F^{-1}\left\{G_W(f)G_2\Pi_B(f)\right\} \\
&= F^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}G_1^2\Pi_{2B}(f) \cdot G_2\Pi_B(f)\right\} \\
&= \frac{N_0}{2}G_1^2 G_2 B\,\mathrm{sinc}(B\tau)
\end{aligned}
$$

.

5. Z è la somma di due variabili gaussiane ed è quindi gaussiana. Il suo valor medio è nullo ed il valore quadratico medio è

$$
\begin{aligned}
E\{Z^2\} &= E\{(W(t_1) + 2Y(t_2))^2\} = E\{W^2(t_1)\} + 4E\{Y^2(t_2)\} + 4E\{W(t_1)Y(t_2)\} \\
&= R_W(0) + 4R_Y(0) + 4R_{WY}(t_1 - t_2) \\
&= \frac{N_0}{2}G_1^2 2B + 4\frac{N_0}{2}G_1^2 G_2^2 B + 4\frac{N_0}{2}G_1^2 G_2 B\,\mathrm{sinc}(B(t_1 - t_2)) \\
&= N_0 G_1^2 B\left(1 + 2G_2^2 + 2G_2\,\mathrm{sinc}(B(t_1 - t_2))\right)
\end{aligned}
$$

6. La varianza è minima quando $\mathrm{sinc}(B(t_1 - t_2))$ è minimo. $B(t_1 - t_2) = \pm z^* \approx \pm 1.5 \rightarrow \tau = \pm\frac{3}{2B}$. La soluzione esatta z^* risolve l'equazione $\pi z^* = \tan(\pi z^*) = 1.43$.

28 Gennaio 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

Si consideri il segnale

$$x(t) = 11 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{11}{T}(t-nT)\right).$$

1. E' possibile rappresentare $x(t)$ con la serie di Fourier? In caso affermatico si scriva l'espressione della serie.

2. Il segnale $x(t)$ viene campionato da un convertitore analogico/digitale ideale che produce la sequenza $x[n] = x(nT_c)$. Per quali valori di T_c si puó ricostruire $x(t)$ dalla sequenza $x[n]$

3. Nell'ipotesi del punto precedente, si consideri la formula di ricostruzione

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{R}(t-nT_c) \qquad (1)$$

dove $R(t)$ è una funzione regolarizzata e $\mathrm{R}(t) = 1$ per $t \in [-T_c/8, T_c/8]$ e zero altrove. $y(t)$ è uguale a $x(t)$?

4. Nel caso non lo sia, come possiamo ricostruire $x(t)$ a partire da $y(t)$?

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1. Il segnale $x(t)$ è periodico di periodo T.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(t-nT)$$

lo si può quindi rappresentare con la serie di Fourier. I coefficienti della serie di Fourier si ottengono come segue

$$\mu_n = \frac{1}{T} X_p\left(\frac{n}{T}\right)$$

$$x_p(t) = 11\text{sinc}\left(\frac{11}{T}t\right) \to X_p(f) = Tp_{11/T}(f)$$

$$\mu_n = p_{11/T}(n/T)$$

I coefficienti della serie di Fourier sono quindi pari a 1 per $|n| \leq 5$ e zero altrove.

La serie di Fourier è quindi:

$$x(t) = \sum_{n=-5}^{5} \exp\left(j2\pi\frac{n}{T}t\right).$$

2. La frequenza di campionamento minima è il doppio della frequenza massima di $x(t)$, pari a $5/T$. Quindi $f_c > \frac{5}{T} \times 2 = \frac{10}{T}$, da cui, $T_c < \frac{T}{10}$.

3. Il segnale interpolante $R(t) = p_{T_c/4}(t)$ ha trasformata di Fourier $R(f) = \frac{T_c}{4}\text{sinc}\left(\frac{T_c}{4}f\right)$ e non soddisfa le condizioni del filtro ricostruttore:

$$K(f) = T_c \quad |f| < \frac{1}{2T_c}$$
$$K(f) = 0 \quad \forall |f| \geq \frac{1}{2T_c}$$

   Il segnale $y(t)$ non ricostruisce fedelmente $x(t)$

4. Per ricostruire fedelmente $x(t)$ basta filtrare $y(t)$ con un filtro che compensi le distorsioni all'interno della banda $|f| < \frac{1}{2T_c}$ e sia nullo altove

$$K_y(f) = \frac{T_c}{R(f)} = \frac{4}{\text{sinc}\left(\frac{T_c}{4}f\right)} \quad |f| < \frac{1}{2T_c}$$
$$K_y(f) = 0 \quad \forall |f| \geq \frac{1}{2T_c}$$

   Si noti che $R(f) = \text{sinc}\left(\frac{T_c}{4}f\right) \neq 0 \quad |f| < \frac{1}{2T_c}$

28 Gennaio 2019

Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto causale con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}$$

1. Scrivere l'equazione alle differenze finite del sistema.
2. Disegnare lo schema a blocchi del sistema.
3. Trovare poli e zeri della funzione di trasferimento $H(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)
4. Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$.
5. Il segnale $x(n) = \cos(2\pi f_0 n)$ viene posto all'ingresso del sistema. Esiste un valore della frequenza numerica f_0 tale per cui l'uscita $y(n)$ del sistema risulti identicamente nulla?

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1. La funzione di trasferimento di un sistema LTI è legata alla trasformata zeta dei segnali in ingresso e in uscita dalla relazione:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Quindi:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

Sostituendo l'espressione di $H(z)$:

$$\left(1 + \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}\right) Y(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) X(z)$$

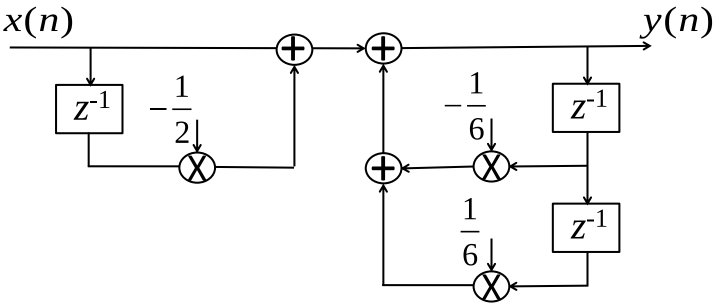
Antitrasformano l'espressione precedente si ottiene:

$$y(n) + \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$

ossia:

$$y(n) = -\frac{1}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) + x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$

2. Schema a blocchi del sistema LTI:



3. Gli zeri di $H(z)$, ossia le radici del numeratore, sono: $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$.
I poli di $H(z)$, ossia le radici del denominatore, sono: $z = -\frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{3}$.

Il sistema è causale e tutti poli sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, quindi il sistema è stabile.
Il sistema è causale e tutti poli e gli zeri sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitario, quindi il sistema è a fase minima.

4. La risposta all'impulso $h(n)$ può essere calcolata antitrasformando $H(z)$ con il metodo dei residui:
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$
con:
$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1+1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}$$
$$R_2 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}$$
Quindi:
$$H(z) = \frac{6/5}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1/5}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$
Antitrasformando:
$$h(n) = \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

5. La risposta di un sistema reale ad un ingresso sinusoidale di frequenza f_0 è una sinusoide con la stessa frequenza, con l'ampiezza moltiplicata per $|H(e^{j2\pi f_0})|$ e la fase incrementata di un valore pari alla fase di $H(e^{2j\pi f_0})$. L'uscita quindi è identicamente nulla se $|H(e^{j2\pi f_0})| = 0$ (o equivalentemente $|H(e^{j2\pi f_0})|^2 = 0$). In questo caso:
$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j2\pi f} - \frac{1}{6}e^{-j4\pi f}}$$
$$|H(e^{j2\pi f_0})|^2 = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right)^* = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} - \frac{1}{2}e^{j2\pi f} = \frac{5}{4} - \cos(2\pi f_0)$$
Non esiste nessun valore di f_0 per cui $\frac{5}{4} - \cos(2\pi f_0) = 0$.