

Soluzioni Appello Teoria ed Elaborazione dei Segnali del 17-02-2021

1.

Si considerino i 4 segnali determinati a tempo continuo $x_1(t) = a(t)$; $x_2(t) = b(t)$; $x_3(t) = 13 \cdot a(t) + b(t)$; $x_4(t) = a(t) - 4 \cdot b(t)$, dove $a(t)$ e $b(t)$ sono due segnali tra di loro ortogonali ed entrambi non nulli. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

- (a) l'insieme dei 4 segnali determinati $x_i(t)$ è rappresentabile su una base completa con cardinalità pari a 4.
- (b) l'insieme dei 4 segnali determinati $x_i(t)$ è rappresentabile su una base completa con cardinalità pari a 2. ✓
- (c) l'insieme dei 4 segnali determinati $x_i(t)$ è rappresentabile su una base completa con cardinalità pari a 3.
- (d) l'insieme dei 4 segnali determinati $x_i(t)$ non ammette una base completa di cardinalità finita

Soluzione

Ognuno dei 4 segnali è una combinazione lineare dei due segnali ortogonali $a(t)$ e $b(t)$. Una base completa per i 4 segnali è quindi costituita dai due segnali $\frac{a(t)}{\|a(t)\|}$ e $\frac{b(t)}{\|b(t)\|}$, che ha una cardinalità pari a 2.

2.

Si consideri un generico processo casuale $x(t)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) la stazionarietà in senso lato implica anche la stazionarietà in senso stretto
- (b) la stazionarietà in senso stretto implica anche l'ergodicità
- (c) la stazionarietà in senso stretto implica anche la stazionarietà in senso lato ✓
- (d) la stazionarietà in senso lato implica anche l'ergodicità

Soluzione

Un processo ergodico è sempre stazionario, ma non vale il viceversa. Quindi le risposte (b) e (d) sono errate. Per un processo stazionario in senso stretto, la statistica del primo ordine non dipende dal tempo e le statistiche congiunte tra campioni non dipendono dall'origine dell'asse dei tempi ma solo dalla differenza di tempo tra i vari campioni. Un processo si dice stazionario in senso lato quando le precedenti proprietà valgono per la media e l'autocorrelazione. Di conseguenza, se un processo è stazionario in senso stretto, lo è anche in senso lato (e non viceversa), quindi la risposta corretta è la (c).

3.

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- (a) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo minimo
- (b) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo massimo
- (c) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo massimo
- (d) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo minimo ✓

Soluzione

Per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza (ROC) è l'interno di una circonferenza, mentre per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'esterno di una circonferenza. Le risposte (a) e (b) sono quindi errate. Per un segnale anti-causale, il raggio della ROC deve essere pari al modulo del polo di modulo minimo, in modo che tutti gli altri poli siano all'esterno della circonferenza e quindi al di fuori della ROC. La risposta corretta è quindi la (d).

4.

Un segnale discreto $x[n]$, che vale 3 per $n=0$, vale 2 per $n=1$ vale 1 per $n=2$ e vale 0 altrove, viene posto in ingresso ad un sistema LTI discreto con risposta all'impulso $h[n]$ che vale 1 per $n=0,1,2$, vale -1 per $n=3,4$ e vale 0 altrove. Sia $y[n]$ il segnale all'uscita.

- (a) $y[1] = 1, y[3] = 0, y[5] = -1$
- (b) $y[1] = 5, y[3] = 0, y[5] = -3$ ✓
- (c) $y[1] = 2, y[3] = 1, y[5] = 2$
- (d) $y[1] = 5, y[3] = 2, y[5] = 3$

Soluzione

L'uscita del sistema è data dalla convoluzione tra $x(n)$ e $h(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Reappresentando i due segnali $x(n)$ e $h(n)$ come vettori di campioni:

$$\begin{aligned} x(n) &= \{ \underline{3}, 2, 1 \} & h(n) &= \{ \underline{1}, 1, 1, -1, -1 \} \\ & & h(k) &= \{ 0, 0, \underline{1}, 1, 1, -1, -1, 0, 0 \} \\ y(0) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(-k) = 3 & x(-k) &= \{ 1, 2, \underline{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \} \\ y(1) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(1-k) = 5 & x(1-k) &= \{ 0, 1, 2, \underline{3}, 0, 0, 0, 0, 0 \} \\ y(2) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(2-k) = 6 & x(2-k) &= \{ 0, 0, 1, 2, \underline{3}, 0, 0, 0, 0 \} \\ y(3) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(3-k) = 0 & x(3-k) &= \{ 0, 0, 0, 1, 2, \underline{3}, 0, 0, 0 \} \\ y(4) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(4-k) = -4 & x(4-k) &= \{ 0, 0, 0, 0, 1, 2, \underline{3}, 0, 0 \} \\ y(5) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(5-k) = -3 & x(5-k) &= \{ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, \underline{3}, 0 \} \\ y(6) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(6-k) = -1 & x(6-k) &= \{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, \underline{3} \} \end{aligned}$$

La soluzione corretta è quindi la (b).

5.

Ricavare la risposta all'impulso del filtro numerico specificato dalla seguente equazione ricorsiva:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{3}{2}y[n-1]$$

- (a) $h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}u[n-1] \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ✓
- (b) $h[n] = \frac{1}{2}u[n] \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- (c) $h[n] = \delta[n] + u[n-1] \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
- (d) nessuna delle altre risposte è corretta
- (e) $h[n] = u[n] - \frac{3}{2}u[n-1]$

Soluzione

La trasformata zeta della relazione ingresso uscita è:

$$Y(z) = X(z) - X(z)z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z)z^{-1} \rightarrow \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right]Y(z) = [1 - z^{-1}]X(z)$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ vale quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}} - z^{-1} \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Sostituendo $u(n)$ con $\delta(n) + u(n-1)$:

$$\begin{aligned} h(n) &= \left(\frac{3}{2}\right)^n [\delta(n) + u(n-1)] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \delta(n) + \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \\ &= \delta(n) + \left[\frac{3}{2} - 1\right] \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \delta(n) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \end{aligned}$$

6.

E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x, t)$ uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$ e autocorrelazione $R_X(t_1, t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t_1) = X(t_1) + 2X(t_1 + 2T)$.

- (a) $\frac{5}{3}$ ✓
- (b) $\frac{T}{3}$
- (c) $\frac{1}{2}$
- (d) 1

Soluzione

$X(t)$ è un processo casuale stazionario del primo ordine (siccome la sua d.d.p. non dipende dal tempo) e a media nulla, in quanto:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^{+1} x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

Anche la media di $Y(t_1)$ è quindi nulla:

$$E[Y(t_1)] = E[X(t_1) + 2X(t_1 + 2T)] = E[X(t_1)] + 2E[X(t_1 + 2T)] = 0$$

Di conseguenza, la varianza di $Y(t_1)$ coincide con il suo valore quadratico medio:

$$\sigma^2 = E[Y^2(t_1)] = E\{(X(t_1) + 2X(t_1 + 2T))^2\} = E[(X^2(t_1)) + 4E[X^2(t_1 + 2T)] + 4E[(X(t_1)X(t_1 + 2T))]]$$

Il valore quadratico medio di $X(t)$ non dipende dal tempo e vale:

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Inoltre $E[(X(t_1)X(t_1 + 2T))] = R_X(t_1, t_1 + 2T) = 0$, poiché $|t_1 + 2T - t_1| = 2T > T$. Quindi:

$$\sigma^2 = E[Y^2(t_1)] = \frac{1}{3} + 4\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

7.

Un segnale determinato $x(t)$, che vale 1 per $0 < t < T$ e 0 altrove, viene sommato ad un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza pari a $N_0/2$. Il processo casuale così ottenuto viene posto in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante con risposta all'impulso $h(t) = x(t/\alpha)$, dove α è una costante reale maggiore di 1. Sia $y(t)$ il segnale in uscita. La probabilità $P\{y(T) < 0\}$

- (a) cresce al crescere di α ✓
- (b) non dipende da α
- (c) decresce al crescere di α
- (d) non ha un andamento monotono al variare di α

Soluzione

Il segnale all'uscita del sistema lineare può essere scritto come $y(t) = z(t) + m(t)$, con $z(t) = x(t) * h(t)$ e $m(t) = n(t) * h(t)$, dove $x(t) = p_T(t - \frac{T}{2})$, $h(t) = p_{\alpha T}(t - \frac{\alpha T}{2})$ e $n(t)$ è un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza pari a $N_0/2$.

$m(t) = n(t) * h(t)$ è un processo casuale gaussiano, con media nulla e densità spettrale di potenza $S_m(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$, quindi $m(T)$ è una variabile casuale gaussiana, con media nulla e varianza $\sigma_m^2 = E[m^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df$.

$y(T) = z(T) + m(T)$ è una variabile casuale gaussiana con media pari a $z(T)$ e varianza pari a σ_m^2 .

$z(t)$ è la convoluzione tra due porte causali di supporto T e αT (con $\alpha T > T$). È quindi pari ad un trapezio con base maggiore pari ad $(\alpha + 1)T$, base minore pari a $(\alpha - 1)T$ e altezza pari a T . Il valore di $z(t)$ in $t = T$ è pari a T , qualunque sia il valore di α .

La varianza di $m(t)$ vale:

$$\sigma_m^2 = E[m^2(t)] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{\alpha T} dt = \frac{N_0}{2} \alpha T.$$

La d.d.p. di $y(T)$ è quindi una gaussiana centrata in $m(T) = T$, con varianza che cresce al crescere di α . La probabilità che $y(T)$ sia minore di 0 cresce al crescere della varianza, ossia al crescere di α .

8.

Si consideri il segnale

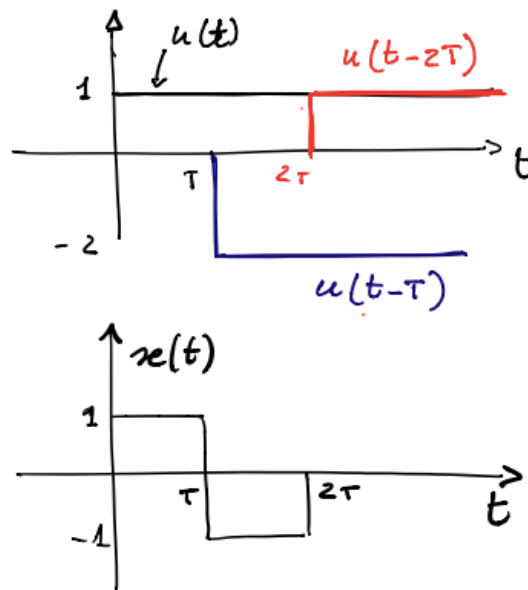
$$x(t) = u(t) - 2u(t - T) + u(t - 2T)$$

in cui T è una costante reale positiva e $u(t) = 1$ per $t \geq 0$ e 0 altrove. Si calcoli la sua funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ e si dica quale delle seguenti risposte è VERA

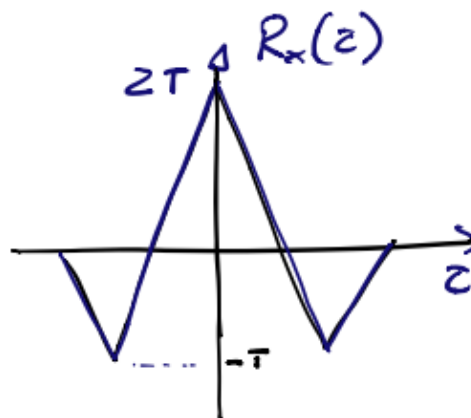
- (a) $\max\{R_x(\tau)\} = 2T$ e $\min\{R_x(\tau)\} = -T$ ✓
- (b) $\max\{R_x(\tau)\} = 2T$ e $R_x(\tau)$ è sempre positiva
- (c) $\max\{R_x(\tau)\} = 1$ e $\min\{R_x(\tau)\} = -1$
- (d) $\max\{R_x(\tau)\} = T$ e $\min\{R_x(\tau)\} = -\frac{T}{2}$
- (e) nessuna delle altre risposte

Soluzione

La soluzione si ottiene facilmente per via grafica. Occorre innanzitutto osservare la forma di $x(t)$.



Da cui si ottiene per via grafica la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$.



Si vede immediatamente che $\max\{R_x(\tau)\} = 2T$ e $\min\{R_x(\tau)\} = -T$

9.

Il segnale

$$x(t) = \frac{\sin(\pi B t)}{\pi t} - \frac{2}{B} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi B t}{2}\right)}{\pi^2 t^2}$$

in cui B è una costante reale positiva, viene campionato alla frequenza $f_c = B$ e filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = P_{2B}(f)$$

dove $P_\alpha(t)$ vale 1 per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove. Il segnale $y(t)$ all'uscita del filtro vale

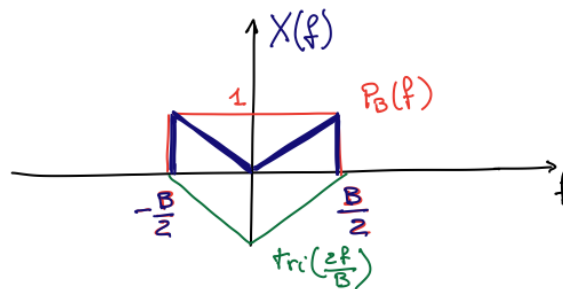
- (a) $y(t) = \frac{4}{B} \frac{\sin^2(\frac{\pi B t}{2}) \cos(\pi B t)}{\pi^2 t^2}$ ✓
- (b) $y(t) = \frac{1}{B} \frac{\sin^2(\pi B t) \cos(2\pi B t)}{\pi^2 t^2}$
- (c) $y(t) = \frac{4}{B} \frac{\sin^2(\frac{\pi B t}{2})}{\pi^2 t^2}$
- (d) $y(t) = \frac{2}{B} \frac{\sin^2(\frac{\pi B(t-T)}{2})}{\pi^2 t^2}$
- (e) nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dalle tavole si possono ottenere le trasformate dei due termini che compongono il segnale $x(t)$

$$X(f) = p_B(f) - \text{tri}(2f/B)$$

Disegnando la trasformata del segnale



si vede che si ottiene un segnale di banda $B/2$. Il segnale viene quindi campionato alla frequenza di Nyquist (quindi replicando lo spettro a multipli di B e filtrando con un passabasso ideale di banda $2B$ restano solo due componenti in frequenza di tipo triangolare centrate in $\pm B/2$. Il segnale quindi si può scrivere come il segnale che ha spettro triangolare con supporto B e modulato da un coseno con frequenza $B/2$. Da cui $y(t) = \frac{4}{B} \frac{\sin^2(\frac{\pi B t}{2}) \cos(\pi B t)}{\pi^2 t^2}$

10.

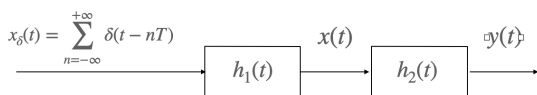
Il segnale *treno di delta* $x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ viene posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h_1(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$$

e successivamente filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H_2(f) = P_{\frac{3}{T}}(f)$$

,dove $P_\alpha(f)$ vale 1 per $|f| < \alpha/2$ e 0 altrove.



La potenza del segnale in uscita $y(t)$ dal sistema vale:

- (a) $\frac{8}{(1+4\pi^2)^2} + 4$ ✓
- (b) $\frac{8}{(1+4\pi^2)^2}$
- (c) 0
- (d) nessuna delle altre risposte
- (e) $\frac{6}{(1+4\pi^2)^2} + 4$

Soluzione

Il segnale all'uscita del filtro è la convoluzione del treno di delta con la risposta all'impulso del filtro stesso, quindi

$$x(t) = x_\delta(t) * h_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|t-nT|}{T}}$$

trattandosi di un segnale periodico ha spettro a righe spaziate di $1/T$. Il filtro $H_2(f)$ ha banda $B = \frac{3}{2T}$ quindi all'uscita del filtro si avrà un segnale con le sole righe per $n = 0, \pm 1$. Lo spettro $X(f)$ vale

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_1\left(\frac{n}{T}\right) \delta(f - n/T)$$

in cui, usando le tavole

$$H_1(f) = \frac{\frac{2}{T}}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2}$$

lo spettro all'uscita ha le sole tre componenti

$$Y(f) = \frac{1}{T} 2T \delta(f) + \frac{1}{T} \frac{\frac{2}{T}}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 \frac{1}{T^2}} \delta(f - 1/T) + \frac{1}{T} \frac{\frac{2}{T}}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 \frac{1}{T^2}} \delta(f + 1/T)$$

La potenza vale dunque

$$P_y = \sum_{n=-1}^1 \mu_n^2 = 2^2 + 2 \cdot \frac{4}{(1 + 4\pi^2)^2} = 4 + \frac{8}{(1 + 4\pi^2)^2}$$