3. Integrali curvilinei

Vincenzo Recupero
Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino
`vincenzo.recupero@polito.it`

Versione: 14 giugno 2013
Revisione: 24 aprile 2020

Metodi Matematici per l'Ingegneria
05BQXMQ, 06BQXOA (Aaa-Ferr), 06BQXOD, 06BQXPC (Aaa-Ferr)

Dispense di Analisi

1 Curve in $\mathbb{C}$ (seconda parte)

Nel seguito considereremo esclusivamente curve C^1 a tratti.

Definizione 1.1. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva (C^1 a tratti).

(i) Si dice che γ è una *curva semplice* se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ per ogni $t \in [a, b]$ e per ogni $s \in \,]a, b[$ tale che $t \neq s$. In altre parole ogni punto della traiettoria $\gamma((a, b)) = \{\gamma(t) \ : \ t \in (a, b)\}$ è immagine di un unico parametro $t \in [a, b]$.

(ii) Si dice che γ è una *curva chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(iii) Si dice che γ è una *curva di Jordan* se è semplice e chiusa.

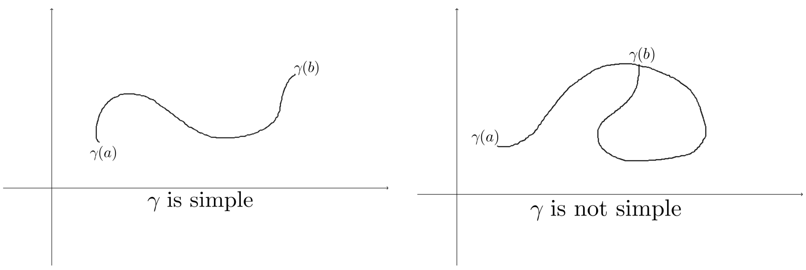

Figura 1: Sostegni di una curva semplice e di una curva che non è semplice

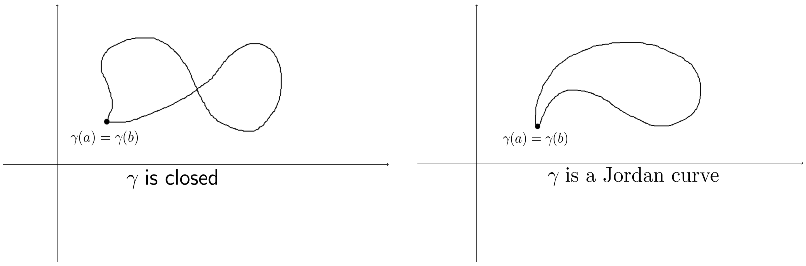

Figura 2: Sostegni di una curva chiusa e di una curva di Jordan

Definizione 1.2. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva. L'*integrale di* γ è definito da

$$\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re}\gamma(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \operatorname{Im}\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Proposizione 1.1.

(i) (Linearità) *Se* $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *e* $\beta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *sono curve e* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *allora*

$$\int_a^b (\lambda\alpha(t) + \mu\beta(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b \beta(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) (Additività sugli intervalli) *Se* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *è una curva e* $a < c < b$ *allora*

$$\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c \gamma(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) (Teorema fondamentale del calcolo per curve) *Se* $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *e* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *sono curve e* $\Gamma'(t) = \gamma(t)$ *per ogni* $t \in [a, b]$, *allora*

$$\Gamma(b) - \Gamma(a) = \int_a^b \Gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare le analoghe proprietà dell'integrale di funzioni reali di una variabile alle parti reale ed immaginaria separatamente. □

Esempio 1.1.

(i) Calcolare

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 2e^{3it}\,\mathrm{d}t.$$

Dalla regola di derivata di funzioni composte si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{3i}e^{3it}\right) = 2e^{3it}$, quindi grazie alla Proposizione 1.1-(iii) possiamo scrivere

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 2e^{3it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3i}e^{3it}\right]_{t=-\pi}^{t=2\pi} = \frac{2}{3i}(e^{6\pi i} - e^{-3\pi i}) = \frac{4}{3i}.$$

(ii) Calcolare

$$\int_1^2 (t^3 - i3t^2 + i)\,\mathrm{d}t.$$

Si trova

$$\int_1^2 (t^3 - i3t^2 + i)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} - it^3 + it\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{15}{4} - 6i.$$

♡

Definizione 1.3. Se $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ è una curva (C^1 a tratti) allora la *lunghezza di* γ è il numero reale definito da

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

È possibile mostrare che il numero $L(\gamma)$ corrisponde alla nozione intuitiva di lunghezza di una curva.

Esempio 1.2.

(i) Sia $\gamma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma_1(t) := i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Non è sorprendente trovare che

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} |ie^{it}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

(ii) Sia $\gamma_2 : [-\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma_2(t) := i + e^{it}$, $t \in [-\pi, 2\pi]$. Si ha

$$L(\gamma_2) = \int_{-\pi}^{2\pi} |ie^{it}|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 3\pi,$$

che tiene conto di quante volte il cerchio (la traiettoria) è percorso da $\gamma_2(t)$.

(iii) Sia $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := t^2 + it$, $t \in [-1, 1]$. Si trova

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 |2t + i|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Possiamo calcolare questo integrale utilizzando, ad esempio, la sostituzione $2t = \tan\theta$. Si trova, ponendo per semplicità $\theta_0 = \arctan 2$ e $x_0 = \sin(\theta_0)$,

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta} = \int_0^{\theta_0} \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{x_0} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+x_0}{1-x_0}\right| + \frac{2x_0}{1-x_0^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1+\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right|^2 + \frac{2\sin\theta_0}{\cos\theta_0^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\log\left|\frac{1}{\cos\theta_0} + \tan\theta_0\right|^2 + 2\frac{\tan\theta_0}{\cos\theta_0}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\log\left|\sqrt{\tan^2\theta_0+1} + \tan\theta_0\right|^2 + 2\sqrt{\tan^2\theta_0+1}\tan\theta_0\right) \\
&= \frac{1}{2}\log(\sqrt{5}+2) + \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Si osservi che il sostegno di γ è l'insieme $\{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ x = y^2,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

♡

Proposizione 1.2. *Sia* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *una curva e sia* $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *strettamente crescente, suriettiva e* C^1 *a tratti. Definiamo la curva* $\widetilde{\gamma} : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *ponendo* $\widetilde{\gamma}(s) := \gamma(\phi(s))$, $s \in [c,d]$. *Allora* $L(\widetilde{\gamma}) = L(\gamma)$.

Dimostrazione. Omessa. Segue effettuando il cambio di variabile $t = \phi(s)$ in (1.2). □

2 Integrali curvilinei

Definizione 2.1. Se $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ è una curva (C^1 a tratti) con sostegno contenuto in D, allora poniamo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

che è detto *integrale curvilineo di* f *su* γ.

Nella definizione precedente, essendo f continua, è sottointeso che D è composto esclusivamente da punti di accumulazione di D.

Osservazione 2.1. Ricordiamo che stiamo considerando curve C^1 a tratti, cioè curve $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ per cui esistono punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tali che γ è di classe C^1 su $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \ldots, m$. Perciò la formula (2.1) dovrebbe essere scritta come

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ad ogni modo vi è solo un numero finito di punti $t_1, \ldots, t_{m-1}$ dove γ non è derivabile, quindi questi punti non hanno alcun ruolo nell'integrazione su $[a,b]$ e (2.1) può essere interpretata propriamente definendo la funzione integranda in modo arbitrario nei punti t_k: il risultato sarà sempre lo stesso. ♢

Esempio 2.1. Si calcoli $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$, dove $\gamma : [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}$ è definito da $\gamma(t) := t^2 + it$, $t \in [0,2]$. Poiché $\gamma'(t) = 2t + i$ per ogni t si ha

$$\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \overline{(t^2+it)}(2t+i)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (t^2 - it)(2t+i)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\,\mathrm{d}t = 10 - i8/3.$$

♡

Proposizione 2.1. *Sia dato* $D \subseteq \mathbb{C}$.

(i) (Linearità) *Se* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *e* $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *sono continue,* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*, e* $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ *è una curva, allora*

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,\mathrm{d}z = \lambda \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \mu \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

(ii) (Additività sulle curve) *Se* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *è continua,* $\gamma_1 : [a,c] \longrightarrow D$ *e* $\gamma_2 : [c,b] \longrightarrow D$ *sono curve tali che* $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$*, e se* $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow D$ *è la curva definita da*

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{if } t \in [a,c] \\ \gamma_2(t) & \text{if } t \in [c,b] \end{cases}$$

allora

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(iii) (Curva inversa) *Se* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *è continua,* $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ *è una curva, e* $\gamma^- = -\gamma : [-b,-a] \longrightarrow \mathbb{C}$ *è definita da* $\gamma^-(t) = (-\gamma)(t) := \gamma(-t)$ *per ogni* $t \in [-b,-a]$*, allora*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(Avvertiamo che $-\gamma$ non *è la curva che assegna a* t *l'opposto di* $\gamma(t)$*. A tal proposito la notazione* γ^- *sarebbe meno ambigua, ma* $-\gamma$ *è usata più di frequente.)*

(iv) (Indipendenza dalla parametrizzazione) *Sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *continua, sia* $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ *una curva e si assuma che* $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *è strettamente crescente, suriettiva e* C^1 *a tratti. Definiamo la curva* $\widetilde{\gamma} : [c,d] \longrightarrow D$ *ponendo* $\widetilde{\gamma}(s) := \gamma(\phi(s))$*,* $s \in [c,d]$*. Allora*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando al secondo membro di (2.1) le varie proprietà dell'integrale di Riemann: linearità, additività sugli intervalli, e cambi di variabile. □

Proposizione 2.2. *Sia dato* $D \subseteq \mathbb{C}$*, sia* $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ *una curva e sia* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *continua. Allora*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \left(\sup_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \right) L(\gamma). \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|L(\gamma).$$

Si osservi che f e γ sono continue, perciò $|f(\gamma(t))|$ è continua in t e $\sup_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|$ è finito grazie al Teorema di Weierstrass. □

Esempio 2.2. Calcolare

$$I = \int_C \overline{iz}\,\mathrm{d}z$$

dove C è il segmento che va dal punto $1+i$ al punto 3 (se non specificato altrimenti, si sottointende percorso una sola volta). La domanda è ben posta perchè grazie al punto (iv) della Proposizione 2.1 l'integrale non dipende da come si parametrizza il segmento con punto iniziale $1+i$ e punto finale 3 (percorso una sola volta).
Usiamo ad esempio la parametrizzazione $\gamma(t) := 1+i+t(3-(1+i)) = 1+i+t(2-i)$, $t \in [0,1]$ (vedi Esempio 2.1 (d) del Capitolo 2). Troviamo che $\gamma'(t) = 2-i$ per cui

$$I = \int_0^1 (-i)\big[(1-i)+t(2+i)\big](2-i)\,\mathrm{d}t = -(1+2i)\Big[(1-i)t+(2+i)t^2/2\Big]_{t=0}^{t=1}$$
$$= -(1+2i)(2-i/2) = -3-i7/2.$$

Un'altra possibile parametrizzazione di C è $\widetilde{\gamma}(t) = 1-(t-1)/2$, $t \in [1,3]$, infatti il C è il grafico della funzione $y = f(x) = 1-(x-1)2$, $x \in [1,3]$ (vedi Esempio 2.1 (c) del Capitolo 2). Per esercizio si calcoli I usando la parametrizzazione $\widetilde{\gamma}$: la Proposizione 2.1-(iv) ci assicura che il risultato sarà $-3-i7/2$. ♡

Esempio 2.3. Calcolare

$$I = \int_C \overline{e^{\pi z}}\,\mathrm{d}z$$

dove C è il segmento che va dal punto $1+2i$ al punto $1+i$, un segmento verticale percorso dall'alto verso il basso.
Un modo possibile di procedere è parametrizzare innanzitutto il segmento percorso in senso inverso, cioè partendo dal punto $1+i$ e andando verso l'alto fino a $1+2i$: ciò è facile perché la prima componente è fissa, $x=1$, e la seconda componente y va da 1 a 2, per cui possiamo scegliere la parametrizzazione $\alpha(t) = 1+it$, $t \in [1,2]$. Grazie ai punti (iii) e (iv) della Proposizione 2.1 si avrà che I è l'opposto dell'integrale di $\overline{e^{\pi z}}$ lungo α, infatti il punto (iii) ci dice che percorrendo il segmento in senso inverso l'integrale cambia di segno, mentre dal punto (iv) deduciamo che qualunque parametrizzazione del segmento in senso inverso fornirà il risultato cercato. Abbiamo perciò

$$I = \int_C \overline{e^{\pi z}}\,\mathrm{d}z = -\int_\alpha \overline{e^{\pi z}}\,\mathrm{d}z = -\int_\alpha e^{\overline{\pi z}}\,\mathrm{d}z = -\int_\alpha e^{\pi\overline{z}}\,\mathrm{d}z$$
$$= -\int_1^2 e^{\pi(1-it)} i\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{\pi(1-it)}}{-\pi}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{\pi}(e^{\pi-2\pi i} - e^{\pi-i\pi}) = \frac{2e^\pi}{\pi}. \tag{2.3}$$

Alternativamente si può parametrizzare il segmento C con punto iniziale $1+2i$ e punto finale $1+i$ utilizzando la curva $\gamma(t) = 1+2i+t(1+i-(1+2i)) = 1+2i-it$, $t \in [0,1]$. Per esercizio si può effettuare il calcolo esplicito: grazie alla Proposizione 2.1 il risultato sarà uguale a $2e^\pi/\pi$. ♡

Esempio 2.4. Calcolare
$$I = \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$$
dove C è la semicirconferenza di centro il punto 1 e raggio 2 percorsa dal punto $2i+1$ al punto $-2i+1$ in senso orario (cioè la semicirconferenza $(x-1)^2+y^2=4$ con $x \geqslant 1$).
È conveniente parametrizzare la semicirconferenza percorsa in senso inverso e poi cambiare il segno all'integrale ottenuto, in altri termini: poniamo $\alpha(t) = 1+2e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, cioè percorriamo la semicirconferenza in senso antiorario, per cui
$$\begin{aligned}
I &= \int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z = -\int_\alpha \overline{z}\,\mathrm{d}z = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{(1+2e^{it})}2ie^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+2e^{-it})2ie^{it}\,\mathrm{d}t = -2i\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(e^{it}+2)\,\mathrm{d}t \\
&= -2i\left[-ie^{it}+2t\right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2} = -2i(-ie^{i\pi/2}+\pi+ie^{-i\pi/2}+\pi) \\
&= -2i(-ii+2\pi-ii) = -2i(2+2\pi) = -4(1+\pi)i.
\end{aligned}$$
♡

Esempio 2.5. Calcolare
$$I = \int_\gamma \overline{z-i}\,\mathrm{d}z,$$
dove γ è la curva semplice avente come sostegno l'insieme
$$C = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1,\ -1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2,\ \operatorname{Im} z = 1\}$$
percorso dal punto -1 fino al punto $2+i$.
Si tratta di una curva il cui sostegno è costituito dall'arco C_1 della circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorso in senso orario dal punto -1 al punto i, unito al segmento C_2 di punto iniziale i e punto finale $1+i$. Parametrizziamo quindi separatamente gli insiemi
$$\begin{gathered}
C_1 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1,\ -1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 0,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}, \\
C_2 = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2,\ \operatorname{Im} z = 1\},
\end{gathered}$$
integriamo $\overline{z-i}$ prima su C_1 e poi su C_2, e otteniamo I come somma dei due integrali grazie ai punti (ii) e (iv) della Proposizione 2.1 (il punto (iv) ci permette infatti di usare due parametrizzazioni definite su due intervalli non necessariamente contigui). L'insieme C_1 è l'arco della circonferenza di centro 0 e raggio 1 percorso dal punto -1 al punto i in senso orario, conviene quindi parametrizzare l'arco in senso inverso e poi cambiare il segno all'integrale calcolato, cioè definiamo $\alpha(t) = e^{it}$, $t \in [\pi/2, \pi]$, e troviamo che
$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{C_1} \overline{z-i}\,\mathrm{d}z = -\int_\alpha (\overline{z}+i)\,\mathrm{d}z = -\int_{\pi/2}^{\pi}(e^{-it}+i)ie^{it}\,\mathrm{d}t = -\int_{\pi/2}^{\pi}(i-e^{it})\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[it+ie^{it}\right]_{t=\pi/2}^{t=\pi} = -i(\pi+e^{i\pi}-\pi/2-e^{i\pi/2}) \\
&= -i(\pi/2-1-i) = -1+i(1-\pi/2).
\end{aligned}$$
Per l'insieme C_2 possiamo utilizzare la curva $\beta(t) = t+i$, $t \in [0,2]$ e troviamo
$$I_2 := \int_{C_2} \overline{z-i}\,\mathrm{d}z = \int_\beta (\overline{z}+i)\,\mathrm{d}z = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t^2/2\right]_{t=0}^{t=2} = 2.$$
Quindi $I = I_1 + I_2 = -1+i(1-\pi/2)+2 = 1+i(1-\pi/2)$. ♡

3 Integrale su frontiere

Definizione 3.1. Un insieme aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ viene detto *dominio*.

Definizione 3.2. Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è detto *dominio regolare (a tratti)* se Ω è un dominio e se $\partial\Omega$ è l'unione di un numero finito di sostegni di curve di Jordan a due a due disgiunte.

Un dominio regolare è anche chiamato *molteplicemente connesso*, se la sua frontiera è costituita da almeno due curve di Jordan.

Esempio 3.1.

(i) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ allora $\Omega = B_r(z_0)$ è un dominio. perché $\partial B_r(z_0)$ è il sotegno della curva di Jordan $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(ii) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 < r_1 < r_2$ allora la "corona circolare" $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ è un dominio regolare (volendo, molteplicemente connesso) , infatti $\partial\Omega = \partial B_{r_1}(z_0) \cup \partial B_{r_2}(z_0)$ e $\partial B_{r_1}(z_0) \cap \partial B_{r_2}(z_0) = \varnothing$.

♡

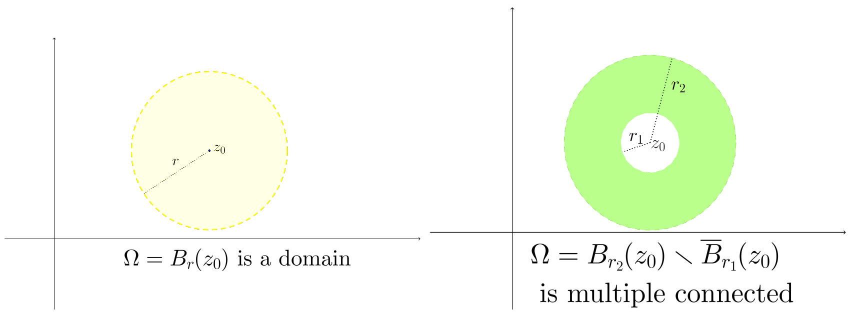

Figura 3: La palla e la corona circolare sono domini regolari

Figura 4: Un esempio di dominio regolare

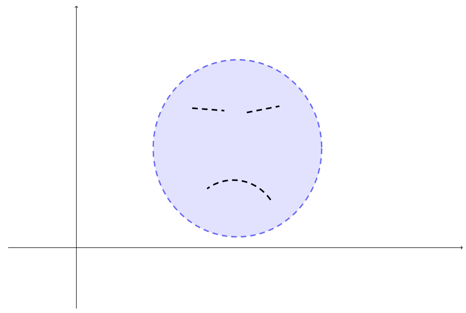

Figura 5: Questo dominio non è regolare

Definizione 3.3 (Definizione non rigorosa di orientazione)**.** Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio regolare, *l'orientazione positiva di* $\partial\Omega$ è definita in modo tale che se ci si muove lungo $\partial\Omega$, l'insieme Ω si trova alla propria sinistra.

Esempio 3.2.

(i) Se $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $\Omega = B_r(z_0)$, allora l'orientazione positiva di $\partial\Omega$ è quella in senso antiorario

(ii) Se $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r_1 < r_2$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \, : \, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, allora l'orientazione positiva di $\partial\Omega$ è quella in senso antiorario lungo $\partial B_{r_2}(z_0)$, mentre è quella in senso orario lungo $\partial B_{r_1}(z_0)$.

♡

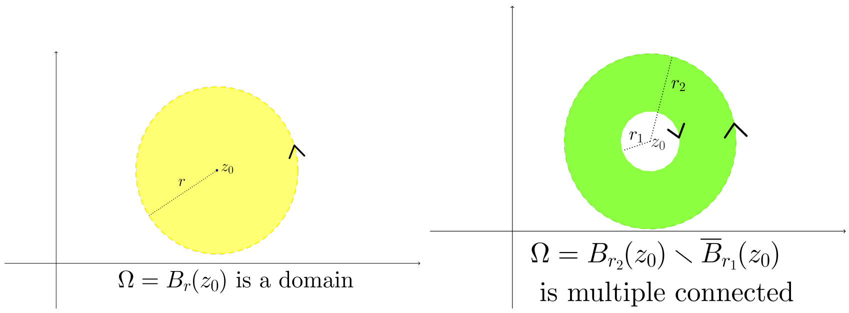

Figura 6: Orientazione per le frontiere della palla e della corona circolare

Definizione 3.4. Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un dominio regolare limitatoe siano $\gamma^1, \dots, \gamma^m$ le curve di Jordan che costituiscono la frontiera ∂A. Allora se $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua definiamo

$$\int_{\partial A} f(z) \, \mathrm{d}z := \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma^k} f(z) \, \mathrm{d}z, \tag{3.1}$$

dove l'orientazione di ogni γ^k è scelta secondo l'orientazione positiva di ∂A. Si osservi che (3.1) è ben definito: grazie alla Proposizione 2.1-(iv), l'integrale non dipende dalla parametrizzazione delle γ^k.

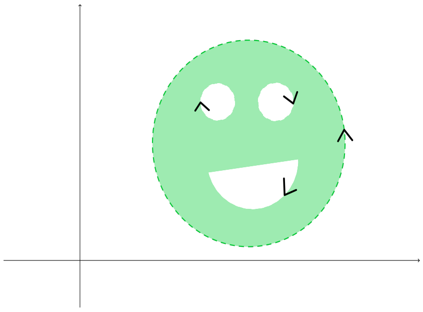

Figura 7: Orientazione della frontiera di un dominio regolare

Esempio 3.3.

(i) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ allora

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) rie^{it}\,\mathrm{d}t,$$

poiché $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ è una parametrizzazione "antioraria" di $\partial B_r(z_0)$.

(ii) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 < r_1 < r_2$ e $A = \{z \in \mathbb{C} \;:\; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ allora

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\partial B_{r_2}(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_2 e^{it}) r_2 ie^{it}\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{it}) r_1 ie^{it}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

♡

Esempio 3.4. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial A} \overline{z}\,\mathrm{d}z$, dove $A = \{z = x + iy \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2/2 < 1\}$.
Una parametrizzazione dell'ellisse ∂A è data da $\gamma(t) = \cos t + i\sqrt{2}\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, quindi

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} \overline{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sqrt{2}i \sin t)(-\sin t + \sqrt{2}i\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t + i\sqrt{2})\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin^2 t}{2} + i\sqrt{2}t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\sqrt{2}i\pi.\end{aligned}$$

♡

4 Il teorema di Cauchy-Goursat

Definizione 4.1 (Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$)**.** Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ allora una funzione $\mathbf{E} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è chiamata *campo vettoriale su* D. Se $E_1, E_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sono le componenti $\mathbf{E}$, cioè

$$\mathbf{E}(x,y) = (E_1(x,y), E_2(x,y)) \qquad \forall (x,y) \in D,$$

si usa anche la notazione $\mathbf{E} = (E_1, E_2)$. Se $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ è una curva $\mathbf{E} \in C(D)$ (cioè E_1 e E_2 sono continue) allora *l'integrale di* $\mathbf{E}$ *lungo* γ è definito da

$$\int_\gamma \mathbf{E} \bullet \mathrm{d}\mathbf{s} := \int_a^b \mathbf{E}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

dove $\bullet$ denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.

Richiamiamo ora un teorema fondamentale sull'integrazione in due variabili.

Teorema 4.1 (Formula di Gauss-Green)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ un dominio regolare limitato. Sia $\mathbf{E} = (E_1, E_2) : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale tale che $\mathbf{E} \in C^1(A;\mathbb{R}^2) \cap C(\overline{A};\mathbb{R}^2)$. Allora*

$$\int_A \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} \mathbf{E} \bullet \mathrm{d}\mathbf{s}, \tag{4.1}$$

dove l'ultimo integrale è definito da

$$\int_{\partial A} \mathbf{E} \bullet \mathrm{d}\mathbf{s} := \sum_{k=1}^m \int_{\gamma^k} \mathbf{E} \bullet \mathrm{d}\mathbf{s},$$

e $\gamma^k : [a_k, b_k] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sono le curve di Jordan i cui sostegni costituiscono ∂A (l'esistenza dell'integrale doppio fa parte dell'enunciato).

Dimostrazione (cenno). è una consequenza del teorema della divergenza:

$$\int_A \mathrm{div}\mathbf{W}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Se $W = (E_2, -E_1)$ troviamo

$$\int_A \mathrm{div}\mathbf{W}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

D'altra parte se $\gamma^k(t) = (\gamma_1^k(t), \gamma_2^k(t))$, allora il vettore normale unitario esterna è $\mathbf{n} = \frac{1}{|(\gamma^k)'|}((\gamma_2^k)', -(\gamma_1^k)')$, e $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|(\gamma^k)'|}(V_2(\gamma_2^k)' + V_1(\gamma_1^k)') = \frac{1}{|(\gamma^k)'|}(\mathbf{E} \bullet (\gamma^k)')$, per cui

$$\int_{\partial A} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{k=1}^m \int_a^b \frac{\mathbf{E}(\gamma^k(t)) \bullet (\gamma^k)'(t)}{|(\gamma^k)'(t)|} |(\gamma^k)'(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} \mathbf{E}(\gamma^k(t)) \bullet (\gamma^k)'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Scriviamo ora l'integrale curvilineo di una funzione complessa f utilizzando i campi vettoriali. Se $D \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ è una curva, con $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1 := \operatorname{Re}\gamma$, $\gamma_2 := \operatorname{Im}\gamma$, e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua con $f = u + iv$, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, allora (omettendo per semplicità la variabile t) otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\Big)\Big(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \Big(u(\gamma)\gamma_1' - v(\gamma)\gamma_2'\Big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Big(v(\gamma)\gamma_1' + u(\gamma)\gamma_2'\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (u(\gamma), -v(\gamma)) \bullet (\gamma_1', \gamma_2')\,\mathrm{d}t + i\int_a^b (v(\gamma), u(\gamma)) \bullet (\gamma_1', \gamma_2')\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma (u, -v) \bullet \mathbf{ds} + i\int_\gamma (v, u) \bullet \mathbf{ds}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo perciò ottenuto la seguente utile formula

$$
\boxed{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u, -v) \bullet \mathbf{ds} + i\int_\gamma (v, u) \bullet \mathbf{ds}} \tag{4.2}
$$

che vale per una funzione continua $f = u + iv : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$.

Teorema 4.2 (Cauchy-Goursat)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un dominio regolare limitato. Se $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e $f \in C(\overline{A})$ allora*

$$
\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4.3}
$$

Dimostrazione. Se $f = u + iv$, con $u, v : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ allora grazie a (4.2) si ha

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\partial A} (u, -v) \bullet \mathbf{ds} + i\int_{\partial A} (v, u) \bullet \mathbf{ds} \\
&\overset{\text{Gauss-Green}}{=} \int_A \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\text{C-R}}{=} 0.
\end{aligned}
$$

□

Esempio 4.1. Supponiamo che A sia un dominio regolare limitato, $z_0 \in A$, e che f sia olomorfa in $A \smallsetminus \{z_0\}$, continua in $\overline{A} \smallsetminus \{z_0\}$. Se $B_r(z_0) \subseteq A$ abbiamo allora che f è olomorfa in $\overline{\Omega} := A \smallsetminus \overline{B}_r(z_0)$ (ed f è continua su $\overline{\Omega} = \overline{A} \smallsetminus B_r(z_0)$). Allora per il Teorema di Cauchy-Goursat abbiamo che

$$
0 = \int_{\partial\Omega} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z,
$$

quindi

$$
\int_{\partial A} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z.
$$

♡

Il prossimo corollario è una consequenza diretta del Teorema di Cauchy-Goursat.

Corollario 4.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Siano $z_1, z_2 \in \Omega$ e siano α, β due curve semplici in Ω con punto iniziale z_1 e punto finale z_2. Se (il sostegno di) $\alpha \cup -\beta$ è la frontiera di un dominio limitato A contenuto in Ω allora*

$$\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dimostrazione. Dal teorema di Cauchy-Goursat abbiamo che $0 = \int_{\alpha\cup-\beta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\beta f(z)\,\mathrm{d}z$ da cui segue il risultato. □

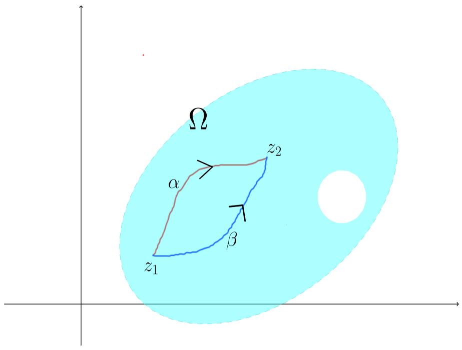

Figura 8: Indipendenza dal percorso

Esempio 4.2. Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := t + i(t - t^2)$, $t \in [0,1]$. Si calcoli $I := \int_\gamma (2 - iz)\,\mathrm{d}z$.
Il sostegno di γ è l'arco di parabola $y = x - x^2$ percorso da $(0,0)$ a $(1,0)$. Si noti che la funzione integranda $f(z) = 2 - iz$ è olomorfa in $\mathbb{C}$, quindi possiamo calcolare I integrando lungo una qualunque curva avente $(0,0)$ come punti iniziale e $(1,0)$ come punto finale. Se scegliamo $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\widetilde{\gamma}(t) := t$, i conti diventano più semplici e si trova

$$I = \int_{\widetilde{\gamma}} (2 - iz)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (2 - it)\,\mathrm{d}t = 2 - i/2.$$

♡

Esempio 4.3. Sia $\gamma : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := t + i(t^{100} + t)$, $t \in [-1,1]$. Calcolare $I := \int_\gamma iz\,\mathrm{d}z$.
Il sostegno di γ è il grafico delle funzione $y = x^{100} + x$, definita per $x \in [-1,1]$. Il punto iniziale è $(-1,0)$, il punto finale $(1,2)$. Poiché la funzione iz è olomorfa, possiamo integrare lungo un cammino più semplice: per esempio $\widetilde{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove $\gamma_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := t$, $t \in [-1,1]$, e $\gamma_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := 1 + it$, $t \in [0,2]$. Otteniamo

$$I = \int_{\gamma_1} iz\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} iz\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 it\,\mathrm{d}t + \int_0^2 i(1+it)i\,\mathrm{d}t = 0 - \left[(t + it^2/2)\right]_{t=0}^{t=2} = -2 - i2.$$

♡

5 L'indice di avvolgimento

Ora enunciamo un teorema di geometria che sembra evidente, ma la cui dimostrazione (che omettiamo) è del tutto non banale.

Teorema 5.1 (Il teorema della curva di Jordan)**.** *Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva di Jordan. Allora esistono due insiemi disgiunti aperti e connessi A e B tali che A è limitato, B è non limitato, e $\mathbb{C} \smallsetminus \gamma([a, b]) = A \cup B$, cioè il complemento del sostegno di γ è l'unione di due aperti connessi disgiunti, uno limitato, l'altro non limitato. L'insieme A è anche chiamato* "interno" *di γ e B è anche chiamato* "esterno" *di γ. Inoltre $\partial A = \partial B = \gamma([a, b])$, il sostegno di γ.*

Grazie al precedente teorema della curva di Jordan, è possibile definire il *verso antiorario di una curva di Jordan γ*: è l'orientazione positiva di γ considerata come frontiera del suo interno A.

Il teorema della curva di Jordan permette di riformulare il teorema di Cauchy-Goursat nel modo seguente. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Se $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ è una curva di Jordan il cui "interno" A è contenuto in Ω, allora*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5.1}$$

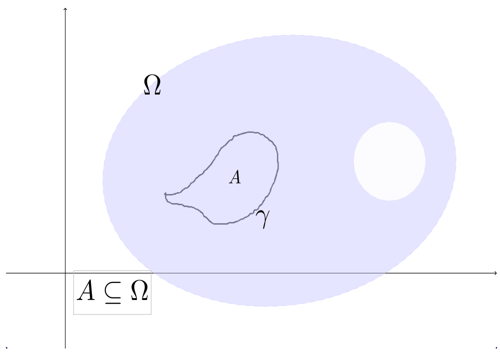

Figura 9: Teorema di Cauchy-Goursat rivisitato

Esempio 5.1. Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Si calcoli $I := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$.
Si trova

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 1. \tag{5.2}$$

Quindi

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 1.} \tag{5.3}$$

♡

Esempio 5.2. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva di Jordan orientata in senso antiorario e sia z_0 un punto nell'"interno" di γ. Calcoliamo $I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$.
Sia A l'"interno" di γ e sia $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq A$. Allora dal Teorema di Cauchy-Goursat e dalla formula (5.3) deduciamo che

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{\partial A} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i,$$

per cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 1. \tag{5.4}$$

♡

Esempio 5.3. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva di Jordan e sia z_0 un punto nell'"esterno" di γ. Allora per il Teorema di Cauchy-Goursat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 0.$$

♡

Esempio 5.4. Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva chiusa ottenuta percorrendo n volte una curva di Jordan γ_1 in senso antiorario. Allora abbiamo, usando il risultato del precedente esempio 5.2,

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = n\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = n2\pi i,$$

perciò

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = n. \tag{5.5}$$

♡

Definizione 5.1. Siano $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ tali che $z_0 \notin \gamma([a, b])$. L'*indice di avvolgimento di* γ *attorno a* z_0 è il numero definito da

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Gli esempi precedenti suggeriscono che $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ è il numero di volte che γ gira in senso antiorario attorno a z_0.

Concludiamo il paragrafo con la definizione di dominio semplicemente connesso.

Definizione 5.2. Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si dice *semplicemente connesso* se per ogni curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ in Ω, l'interno di γ è contenuto in Ω.

In sostanza un dominio Ω nel piano è semplicemente connesso se "non ha buchi". È possibile provare che se Ω è un dominio regolare limitato, allora è semplicemente connesso se e solo se la sua frontiera $\partial\Omega$ consiste di una singola curva di Jordan.

6 La formula integrale di Cauchy

Teorema 6.1 (Formula integrale di Cauchy)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un dominio regolare limitato e sia $z_0 \in A$. Se $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua ed è olomorfa in A allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z. \tag{6.1}$$

Dimostrazione. La funzione

$$g(z) := \frac{f(z)}{z - z_0}$$

è olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$. Poiché A è aperto esiste $r_0 > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq A$ per ogni $r \leqslant r_0$. Quindi per il teorema di Cauchy-Goursat abbiamo che

$$0 = \int_{\partial(A \setminus B_r(z_0))} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \qquad \forall r \in \,]0, r_0[\,,$$

perciò, prendendo il limite per $r \to 0+$ troviamo

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \lim_{r \to 0+} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z.$$

Per calcolare il limite nella precedente equazione, scriviamo (grazie anche a (5.3))

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z &= \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z + f(z_0) \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z + f(z_0) 2\pi i \;\to\; f(z_0) 2\pi i \quad \text{per } r \to 0+,
\end{aligned}$$

infatti

$$\lim_{r \to 0+} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = 0$$

poiché grazie alla Proposizione 2.2 si ha

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right| &\leqslant \sup_{|z - z_0| = r} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| 2\pi r \\
&= 2\pi \sup_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)| \to 0 \qquad \text{as } r \to 0+,
\end{aligned}$$

essendo f è continua in z_0. □

Esempio 6.1. Calcolare $I = \displaystyle\int_C \frac{e^{-5iz}}{z^2 + 4iz - 3} \, \mathrm{d}z$, dove $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = \sqrt{3}\}$.
Osserviamo che $z^2 + 4iz - 3 = (z + i)(z + 3i)$, $z = -i$ sta nell'interno della curva C, mentre $z = -3i$

è nell'esterno. La funzione $f(z) := \dfrac{e^{-5iz}}{z+3i}$ è olomorfa in $B_{\sqrt{3}}(0)$ e continua su $\overline{B}_{\sqrt{3}}(0)$. Perciò possiamo applicare la formula integrale di Cauchy e dedurre che

$$I = \int_C \frac{e^{-5iz}}{(z+i)(z+3i)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\frac{e^{-5iz}}{z+3i}\right)\bigg|_{z=-i} = 2\pi i \frac{e^{-5}}{2i} = \pi e^{-5}.$$

♡

Esempio 6.2. Calcoliamo $I = \int_C \frac{z}{(z+i)}\,\mathrm{d}z$, dove C è la frontiera di $A = \{z = x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ |x| < 2,\ |y+1| < 2\}$.
L'insieme A è il rettangolo aperto di vertici $2, -2, -2-2i, 2-2i$. La funzione $f(z) := z$ è olomorfa in $\mathbb{C}$, perciò, poiché $z = -i$ sta in A possiamo applicare la formula integrale di Cauchy ed ottenere che

$$I = \int_C \frac{z}{(z+i)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(-i) = 2\pi.$$

♡

Teorema 6.2 (Formula integrale di Cauchy per le derivate)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un dominio regolare limitato. Se $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e f è olomorfa in A, allora per ogni $z_0 \in A$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste la derivata n-esima*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z. \tag{6.2}$$

Dimostrazione (cenno). È possibile dimostrare che si può integrare sotto il segno di integrale la formula integrale di Cauchy, allora

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_0}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z.$$

Possiamo anche derivare sotto il segno di integrale nella formula precedente:

$$f''(z_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{2f(z)}{(z-z_0)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,\mathrm{d}z.$$

Ancora:

$$f^{(3)}(z_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_0}\frac{2}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{3f(z)}{(z-z_0)^4}\,\mathrm{d}z = \frac{2\cdot 3}{2\pi i}\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-z_0)^4}\,\mathrm{d}z.$$

Procedendo per induzione troviamo la formula (6.2). □

Esempio 6.3. Si calcoli $I = \int_C \frac{e^{z-2}}{(z+i)^4}\,\mathrm{d}z$, dove $C = \{z = x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ |x| + |y| = 2\}$.
Si osservi che C è un quadrato di vertici $2, 2i, -2, -2i$. Il punto $-i$ sta nell'interno di tale e la funzione e^{z-2i} è olomorfa in $\mathbb{C}$, quindi

$$I = \frac{2\pi i}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}e^{z-2i}\right)\bigg|_{z=-i} = \frac{\pi i}{3}\left(e^{z-2i}\right)\Big|_{z=-i} = \frac{\pi i}{3}e^{-3i}.$$

♡

Una consequenza diretta della formula integrale di Cauchy per le derivate è il fatto che ogni funzione olomorfa è derivabile in senso complesso infinite volte. Ecco i dettagli.

Corollario 6.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f è derivabile infinite volte. In particolare se $f = u + iv$ ($u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$) è olomorfa in Ω, allora $u, v \in C^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Se $z_0 \in \Omega$ è fissato arbitrariamente, esiste una palla $B_r(z_0) \subseteq \Omega$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

□

Teorema 6.3 (Liouville)**.** *Se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ ed f è limitata, allora f è costante.*

Dimostrazione. Ricordiamo che la limitatezza di f significa che esiste una costante $M > 0$ tale che $|f(z)| \leqslant M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Prendiamo un punto arbitrario $z_0 \in \mathbb{C}$. Essendo f olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, dalla formula integrale di Cauchy per la derivata prima, e grazie alla Proposizione 2.2, per ogni $r > 0$ si ha

$$\begin{aligned}|f'(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} L(\partial B_r(z_0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(z)|}{r^2} 2\pi r \leqslant \frac{M}{r}.\end{aligned}$$

Visto che $r > 0$ è arbitrario, se ne deduce che $|f'(z_0)| = 0$. Perciò l'arbitrarietà di z_0 implica che $f' = 0$ in $\mathbb{C}$, e così f è costante. □

Teorema 6.4 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Sia $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polinomio non costante, cioè $n \geqslant 1$, $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Supponiamo per assurdo che $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Ne segue che la funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) := \dfrac{1}{p(z)}$ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Si osservi che

$$\begin{aligned}\frac{1}{|p(z)|} &= \frac{1}{|a_n z^n + \cdots + a_0|} = \frac{1}{|z|^n \left| a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^n} \right|} \\ &\leqslant \frac{1}{|z|^n \left| |a_n| - \dfrac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \dfrac{|a_0|}{|z|^n} \right|} \to 0\end{aligned}$$

per $|z| \to +\infty$, quindi, poiché $p(z)$ è continua, $f(z)$ è limitata. Allora per il Teorema di Liouville $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ è costante, quindi $p(z)$ è constante e abbiamo trovato una contraddizione. □

7 Esercizi

Esercizi (tratti dalle dispense di Analisi Complessa (vecchio ordinamento)).

1. Calcolare, per mezzi della definizione, gli integrali curvilinei delle seguenti funzioni f lungo la curva C:

   a) $f(z) = z^2$, dove C è il segmento che va dall'origine a punto $2 + i$

   b) $f(z) = \overline{z}$, dove C è la corconferenza di centro 0 e raggio 1

   c) $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, dove C è la semicirconferenza superiore di centro 0 e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

   d) $f(z) = e^z$, dove C è il segmento che va da πi a 1

   e) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2+i)^2}$, dove C è la circonferenza di centro $-2-i$ e raggio 4

2. Sai C la curva il cui sostegno è la frontiera del quadrato di vertici $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = i$, percorso in senso antiorario. Calcolare
$$\int_C e^{\pi \bar{z}} \, \mathrm{d}z \,.$$

3. Sia C la frontiera del triangolo di vertici $z = 0$, $z = 3i$, $z = -4$, orientata in senso antiorari. Verificare che
$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) \, \mathrm{d}z \right| \leq 60 \,.$$

4. Calcolare i seguenti integrali curvilinei (orietati in senso antiorario, se le curve sono chiuse):

   a) $\displaystyle\int_C z e^{-z} \, \mathrm{d}z$, dove $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

   b) $\displaystyle\int_C e^{\pi z} \, \mathrm{d}z$, dove C è il segmento da i a $i/2$

   c) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} \, \mathrm{d}z$, dove $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

   d) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} \, \mathrm{d}z$, dove $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| = 2\}$

   e) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4} \, \mathrm{d}z$, dove C è la frontiera del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$

   f) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4 - 1} \, \mathrm{d}z$, dove $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 1\}$

   g) $\displaystyle\int_C \frac{e^z(z^2-3)}{2z^2+3} \, \mathrm{d}z$, dove $C = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + \frac{2}{3}\big(y - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\big)^2 = 1\}$

Risposte ed alcune soluzioni

1. a) $(2+i)^3/3 = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}$
   b) La circonferenza unitaria è parametrizzata da $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, quindi $\mathrm{d}z = ie^{it}\ \mathrm{d}t$ e
   $$\int_C \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-it} i\, e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i\,.$$
   c) La semicirconferenza superiore è parametrizzata da $z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Così $z'(t) = 2ie^{it}$ e
   $$\int_C \frac{z+2}{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{2e^{it}+2}{2e^{it}} 2ie^{it}\, dt = 2i \int_0^{\pi} (1 + e^{it})\, dt = 2\pi i - 4\,.$$
   d) $1 + e$
   e) 0
2. $\frac{4}{\pi}(e^{\pi} - 1)$
3. Utilizzando la Proposizione 2.2 si ottiene
   $$\left| \int_C (e^z - \overline{z})\ \mathrm{d}z \right| \leq ML$$
   dove $\sup_{z \in C} |e^z - \overline{z}| \leqslant M$, ed L è la lunghezza di C. Non è difficile controllare che $L = 12$, dal momento che le lunghezze dei lati del triangolo sono 3, 5 e 4. Per trovare M si osservi che
   $$|e^z - \overline{z}| \leq |e^z| + |z| = e^x + |z| \leq e^0 + 4 = 5\,.$$
   e abbiamo concluso.
4. a) 0
   b) $\frac{1}{\pi}(i+1)$
   c) $\frac{\pi}{4} i$
   d) Nell'interno di C c'è un unico punto dove la funzione $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ non è derivabile: $z = 2i$. Dalla formula integrale di Cauchy per le derivate con $n = 1$ e $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$, si ottiene
   $$\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\ \mathrm{d}z = 2\pi i\ \frac{d}{\mathrm{d}z} \frac{1}{(z+2i)^2}\bigg|_{z=2i} = \frac{\pi}{16}\,.$$
   e) Nel quadrato assegnato vi è un unico punto dove la funzione $g(z) = \frac{\cosh z}{z^4}$ non è derivabile: $z = 0$. Grazie la formula integrale di Cauchy per le derivate con $n = 3$ e $f(z) = \cosh z$, abbiamo
   $$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\ \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3!}\ \frac{d^3}{dz^3} \cosh z\bigg|_{z=0} = 0\,.$$
   f) $\frac{\pi}{2}$
   g) $-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\pi e^{\sqrt{\frac{3}{2}} i}$

Modifiche dalla revisione dell'8 aprile 2016 alla revisione del 24 aprile 2020:

1. L'Esempio 1.2-(iii) è stato corretto.

2. Gli Esempi 2.2-3-4-5 sono stati corretti.

3. I domini regolari introdotti nella Definizione 3.2 sono i "domini con bordo" dei nostri corsi di Analisi 2. In queste dispense però è stata omessa la condizione che le curve di Jordan coinvolte abbiano derivata non nulla ovunque tranne che in un numero finito di punti: le dimostrazioni di questo caso più generale richiedono alcune modifiche che di fatto non intervengono nell'esposizione dell'Analisi Complessa qui trattata.

4. La formula di Green del Teorema 4.1 è enunciata qui in una forma più generale di quanto fatto nei nostri corsi di Analisi 2 (al tempo della stesura di queste dispense, la Formula di Green non veniva svolta in numerosi corsi di Analisi 2 del PoliTO). In particolare il Teorema 4.1 comprende come caso particolare il caso in cui il campo E è definito in un più grande insieme "ambiente" Ω aperto e A è un dominio regolare (cioè "con bordo") tale che $\overline{A} \subseteq \Omega$.

   Questa generalità si riflette sugli enunciati del Teorema di Cauchy-Goursat e delle Formule integrali di Cauchy seguenti dove appunto ci si concentra sul solo insieme A il cui bordo è la curva di integrazione di f. Ciò rende gli enunciati un pó più brevi di quanto fatto a lezione, dove $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in un più grande insieme "ambiente" Ω e A è un "dominio con bordo" (o "regolare") tale che $\overline{A} \subseteq \Omega$. L'approccio seguito a lezione è dovuto al fatto che si vuole utilizzare invece la formula di Green come svolta nei nostri corsi di Analisi 2. Dal punto di vista operativo non cambia nulla.