2. Funzioni olomorfe

Vincenzo Recupero
Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino
vincenzo.recupero@polito.it

Versione: 14 giugno 2013
Revisione: 18 marzo 2016

Metodi Matematici per l'Ingegneria
05BQXMQ, 06BQXOA (Aa-Di), 06BQXOD, 06BQXPC (Aa-Di)

Dispense di Analisi

1 Nozioni topologiche

In questo paragrafo richiamiamo alcune nozioni topologiche del piano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Ricordiamo che anche dal punto di vista delle distanze gli insiemi $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ sono indistinguibili: se $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, allora

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|,$$

la distanza euclidea tra $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.

Definizione 1.1. Siano dati $z_0 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. Poniamo

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r\},$$

che è chiamato *intorno (sferico) di z_0 di raggio r* o *palla (aperta) di centro z_0 e raggio r*.

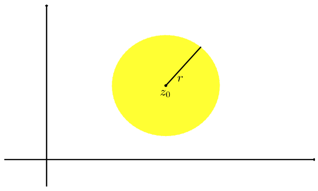

Figura 1: Intorno sferico di z_0 di raggio r

Definizione 1.2. Sia dato $S \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(i) Diciamo che S è *aperto* se ogni punto $z_0 \in S$ ha un intorno $B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r\}$ interamente contenuto in S.

(ii) Diciamo che $z_0 \in \mathbb{C}$ è un *punto di frontiera (*o *di bordo) di* S se ogni intorno $B_r(z_0)$ contiene sia punti di S che punti di $\mathbb{C} \setminus S$. L'insieme dei punti di frontiera di S si denota con ∂S è viene detto *frontiera (*o *bordo) di* S.

(iii) L'insieme $\overline{S} := S \cup \partial S$ è detto *chiusura di* S.

(iv) Si dice che S *è chiuso* se $\overline{S} = S$.

(v) L'insieme $\mathring{S} := S \setminus \partial S$ viene detto *interno di* S.

La seguente definizione descrive i punti nei quali considereremo i limiti di funzioni.

Definizione 1.3. Sia dato $S \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Diciamo che $z_0 \in \mathbb{C}$ è un *punto di accumulazione di* S se ogni intorno $B_r(z_0)$ di z_0 contiene infiniti punti di S.

Esempio 1.1.

(i) Se $r > 0$ e $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r\} = \{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\},$$
$$\partial B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = r\} = \{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\},$$
$$\overline{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leqslant r\} = \{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2\}.$$

Quindi $B_r(z_0)$ è aperto ma non è chiuso, $\overline{B}_r(z_0)$ è chiuso ma non è aperto. L'insieme dei punti di accumulazione di $B_r(z_0)$ è $\overline{B}_r(z_0)$.

(ii) Se $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ allora S non è aperto, $\partial S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z = 0\}$, e $\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$, quindi S è chiuso. In questo caso l'insieme dei punti di accumulazione di S è $\overline{S}$.

(iii) Se $S = \{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ y > -x\}$ allora S è aperto, $\partial S = \{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ y = -x\}$, e $\overline{S} = \{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ y \geqslant -x\}$, per cui S non è chiuso. L'insieme dei punti di accumulazione di S è $\overline{S}$.

(iv) Se $S = \{1\} \cup \{z \in \overline{B}_1(i) \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ allora S non è aperto, $\partial S = \{1\} \cup \partial B_1(i)$, $\overline{S} = \{1\} \cup \overline{B}_1(i)$. Perciò S non è chiuso. L'insieme dei punti di accumulazione di S è $\overline{B}_1(i)$.

(v) Se $S = \left\{z = \frac{1}{n} + i\frac{1}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n > 0\right\}$, allora S non è aperto, $\partial S = S \cup \{0\}$ e $\overline{S} = S \cup \{0\}$, quindi S non è chiuso. L'origine 0 è l'unico punto di accumulazione di S.

♡

2 Curve in $\mathbb{C}$ (prima parte)

Richiamiamo alcune nozioni sulle curve in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Definizione 2.1. Siano dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione definita da

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t) = \operatorname{Re}\gamma(t) + i \operatorname{Im}\gamma(t), \qquad t \in [a, b]\,,$$

dove $\gamma_1 := \operatorname{Re}\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma_2 := \operatorname{Im}\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(i) Diciamo che γ è *continua in* $t_0 \in [a, b]$ se γ_1 e γ_2 sono continue in t_0.
Diciamo che γ è *continua* se è continua in ogni punto di $[a, b]$.

(iii) Diciamo che γ è *derivabile in* $t_0 \in [a, b]$ se esistono $\gamma_1'(t_0)$ e $\gamma_2'(t_0)$.
Il numero complesso $\gamma'(t_0) = \gamma_1'(t_0) + i\gamma_2'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$ viene anche detto *vettore tangente a* γ *in* t_0.
Diciamo che γ è *derivabile* se è derivabile in ogni punto di $[a, b]$.

Osserviamo che nella definizione precedente la continuità e la derivabilità di una funzione di variabile reale a valori complessi sono ricondotte alla continuità ed alla derivabilità delle sue componenti (ma esistono altre definizioni equivalenti). Ora possiamo dare la definizione precisa di *curva*.

Definizione 2.2. Siano dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una funzione $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice *curva (in* $\mathbb{C}$*)* se γ è continua. Per una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ diamo le seguenti definizioni:

(i) Il *sostegno di* γ è l'insieme $\gamma([a, b]) := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \;:\; t \in [a, b]\}$. Diciamo anche che γ è una *parametrizzazione* dell'insieme $\gamma([a, b])$.

(ii) I punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ sono detti rispettivamente *punto iniziale* e *punto finale* di γ.

(iii) Diciamo che γ è *di classe* C^1 se $\operatorname{Re}\gamma \in C^1([a, b])$ e $\operatorname{Im}\gamma \in C^1([a, b])$.

(iv) Diciamo che γ è C^1 *a tratti* se esistono punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tali che γ è di classe C^1 su $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \ldots, m$.

Per farsi un'idea di cosa sia una curva dal punto di vista analitico, conviene pensare alla funzione continua (la curva) $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ come alla legge del moto di una particella: in questo modo il sostegno $\gamma([a, b])$ rappresenta la traiettoria delle particella.

Esempio 2.1. Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$.

(a) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma_1(t) := z_0 + re^{it}$ è una curva il cui sostegno è $\partial B_r(z_0)$.

(b) $\gamma_2 : [-2\pi, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma_2(t) := z_0 + re^{it}$ è un'altra curva diversa da quella del punto (a) avente ancora $\partial B_r(z_0)$ come sostegno.

(c) Se $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua allora $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := t + if(t)$, è una curva il cui sostegno è il grafico di f.

(d) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$ è la curva il cui sostegno è il segmento di estremi $z_1 \in \mathbb{C}$ and $z_2 \in \mathbb{C}$. Si verifica facilmente che $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ per ogni t.

♡

Definizione 2.3. Diciamo che un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ è *connesso* se per ogni coppia di punti $z_1, z_2 \in \Omega$ esiste una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ ed il sostegno di γ è contenuto in Ω.

Esempio 2.2.

(i) $B_1(0)$ è connesso.

(ii) $B_1(0) \cup B_1(3i)$ non è connesso.

(iii) $B_1(-i) \cup B_1(i)$ non è connesso.

♡

3 Limiti e continuità di funzioni da $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$

Definizione 3.1. Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) è un punto di accumulazione di D, e $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è data, allora diciamo che $\ell \in \mathbb{R}$ *è il limite di u per* $(x,y) \to (x_0,y_0)$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad [\ 0 < |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |u(x,y) - \ell| < \varepsilon\ ],$$

In tal caso scriviamo anche che $u(x,y) \to \ell$ per $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

È possibile verificare che se una funzione $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ come sopra ha un limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $(x,y) \to (x_0,y_0)$, allora tale limite è unico, perciò usiamo la notazione

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Definizione 3.2. Siano $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e (x_0,y_0) un punto di accumulazione di D tali che $(x_0,y_0) \in D$. Diciamo che $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è *continua in* (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0).$$

Dal momento che il dominio è contenuto in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ si potrebbero riscrivere le definizioni precedenti usando la notazione complessa $z = x + iy = (x,y)$ e $z_0 = x_0 + iy_0 = (x_0,y_0)$.

4 Limiti e continuità

Definizione 4.1. Se $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 è un punto di accumulazione di D e $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione, diciamo che $\ell \in \mathbb{C}$ *è il limite di f per $z \to z_0$* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad [\ 0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon\ ],$$

cioè

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - \ell| = 0.$$

In tal caso scriviamo anche che $f(z) \to \ell$ per $z \to z_0$.

Lemma 4.1. *Sotto le stesse ipotesi della definizione precedente, se $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ and $f = u + iv$, $u := \operatorname{Re} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v := \operatorname{Im} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, allora*

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \ell = a + ib,\ \ a, b \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \exists \lim\limits_{z \to z_0} u(z) = a \\ \exists \lim\limits_{z \to z_0} v(z) = b \end{cases}$$

In particolare il limite è unico, se esiste, e possiamo scrivere $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$.

Dimostrazione. Per provare " $\Longrightarrow$ " è sufficiente scrivere:

$$\begin{aligned} |u(z) - a| &= |\operatorname{Re}(f(z) - \ell)| \leqslant |f(z) - \ell| \to 0 \qquad \text{as } z \to z_0, \\ |v(z) - b| &= |\operatorname{Im}(f(z) - \ell)| \leqslant |f(z) - \ell| \to 0 \qquad \text{as } z \to z_0. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda " $\Longleftarrow$ ", dalla disuguaglianza triangolare deduciamo che

$$|f(z) - \ell| = |(u(z) - a) + i(v(z) - b)| \leqslant |u(z) - a| + |v(z) - b| \to 0 \qquad \text{per } z \to z_0.$$

□

Le solite regole algebriche dei limiti valgono anche nel caso complesso:

Proposizione 4.1. *Supponiamo che $D \subseteq \mathbb{C}$ e che z_0 è un punto di accumulazione di D. Siano $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = m$. Allora*

$$\begin{aligned} &\lim_{z \to z_0} f(z) + g(z) = \ell + m, \\ &\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = \ell m, \\ &\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\ell}{m}, \qquad \textit{se } m \neq 0 \textit{ e } g(z) \neq 0 \textit{ in qualche } B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \end{aligned}$$

Dimostrazione. È sufficiente imitare la dimostrazione per funzioni reali di variabile reale. □

Definizione 4.2. Se $D \subseteq \mathbb{C}$ e z_0 è un punto di accumulazione di D tale che $z_0 \in D$, diciamo che $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ è *continua in* z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Proposizione 4.2. *Supponiamo che $D \subseteq \mathbb{C}$ e z_0 sia un punto di accumulazione di D tale che $z_0 \in D$. Se $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con $f = u + iv$ e $u := \operatorname{Re} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v := \operatorname{Im} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, allora*

$$f \text{ è continua in } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ e } v \text{ sono continue in } z_0.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Proposizione 4.1. □

Esempio 4.1. Verificare che $f(z) = \bar{z} - z^2 \operatorname{Re} z$ è continua.
Se $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, allora $f(z) = f(x+iy) = x - iy - (x+iy)^2 x = (x - x^3 + xy^2) + i(-y - 2x^2 y)$, quindi $f = u + iv$ con $u(x,y) = x - x^3 + xy^2$ e $v(x,y) = -y - 2x^2 y$. Poiché u e v sono continue in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, segue dalla proposizione precedente che f è continua in $\mathbb{C}$. ♡

Proposizione 4.3. *La somma, il prodotto ed il quoziente di funzioni continue sono funzioni continue.*

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 4.1. □

Proposizione 4.4. *La composizione di funzioni continue è continua, cioè se $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ sono aperti, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega' \longrightarrow \Omega$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ sono continue, allora $f \circ g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ e $f \circ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sono continue (si ricordi che $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ e $(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$).*

Dimostrazione. Prendiamo un punto arbitrario $z_0 \in \Omega'$ e proviamo che $f \circ g$ è continua z_0. Per $\varepsilon > 0$ dato

$$\begin{aligned} \exists \delta_f > 0 \quad &: \quad [\ |w - g(z_0)| < \delta_f \quad \Longrightarrow \quad |f(w) - f(g(z_0))| < \varepsilon\ ] \\ \exists \delta_g > 0 \quad &: \quad [\ |z - z_0| < \delta_g \quad \Longrightarrow \quad |g(z) - g(z_0)| < \delta_f\ ]. \end{aligned}$$

Allora

$$|z - z_0| < \delta_g \quad \Longrightarrow \quad |g(z) - g(z_0)| < \delta_f \quad \Longrightarrow \quad |f(g(z)) - f(g(z_0))| < \varepsilon,$$

cioè $f \circ g$ è continua in z_0. Ora consideriamo $t_0 \in [a,b]$ e proviamo che $f \circ \gamma$ è continua in t_0. Per $\varepsilon > 0$ dato

$$\begin{aligned} \exists \delta_f > 0 \quad &: \quad [\ |w - \gamma(t_0)| < \delta_f \quad \Longrightarrow \quad |f(w) - f(\gamma(t_0))| < \varepsilon\ ] \\ \exists \delta_\gamma > 0 \quad &: \quad [\ |t - t_0| < \delta_\gamma \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \delta_f\ ]. \end{aligned}$$

Quindi

$$|t - t_0| < \delta_g \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \delta_f \quad \Longrightarrow \quad |f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))| < \varepsilon$$

e abbiamo concluso. □

5 Funzioni olomorfe

Definizione 5.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Diciamo che f *è derivabile in* z_0 *(in senso complesso)* se esiste in $\mathbb{C}$ il limite

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

In questo caso diciamo che $f'(z_0)$ è la *derivata (complessa) di* f *in* z_0. La derivata $f'(z_0)$ è anche denotata con

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0), \quad \left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}, \quad Df(z_0).$$

Si dice che f è *derivabile in* Ω se è derivabile in ogni punto di Ω.
Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in Ω e $f' : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in z_0, allora la derivata di f' in z_0 è chiamata *derivata seconda di* f *in* z_0 ed è denotata con $f''(z_0)$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}(z_0)$ o $\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(z)}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=z_0}$. Procedendo in questo modo si definisce la derivata n-esima di f e si denota con $f^{(n)}(z_0)$, $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z_0)$ o $\left.\frac{\mathrm{d}^n f(z)}{\mathrm{d}z^n}\right|_{z=z_0}$.

Si osservi che il rapporto incrementale in (5.1) si può anche scrivere come

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

dove $h \neq 0$ è complesso.

Proposizione 5.1. *Se* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *è aperto e* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *è derivabile in* $z_0 \in \Omega$, *allora* f *è continua in* z_0

Dimostrazione. Per ogni $z \in \Omega$, $z \neq z_0$, si ha che

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} (z - z_0) \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \right| |z - z_0| \to 0 \qquad \text{as } z \to z_0,$$

perché $|z - z_0| \to 0$ e $\frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} \to f'(z_0)$. Quindi $f(z) \to f(z_0)$ per $z \to z_0$, cioè f è continua in z_0. □

Proposizione 5.2. *Se* f *e* g *sono derivabili in* z_0 *allora*

$$\begin{aligned} &(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \\ &(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \\ &\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \qquad \textit{se } g(z) \neq 0 \textit{ in un intorno di } z_0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Come per le funzioni reali di variabile reale. □

Proposizione 5.3 (Derivata di funzione composta)**.** *Supponiamo che $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ siano aperti, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e $z_0 \in \Omega'$, $t_0 \in [a, b]$. Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega' \longrightarrow \Omega$ e $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ sono derivabili in $g(z_0)$, z_0 e t_0 rispettivamente, allora $f \circ g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ e $f \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sono derivabili in z_0 e t_0 rispettivamente e*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0),$$
$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0).$$

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le due affermazioni in una volta. Rappresentiamo entrambe le variabili z e t con p; invece p_0 denoterà z_0 o t_0. Usiamo la lettera α per entrambe le funzioni g e γ. Per ipotesi $f(w)$ è derivabile in $w_0 := \alpha(p_0)$, quindi esiste

$$\lim_{w \to w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = f'(w_0) \in \mathbb{C}.$$

In altre parole esiste una funzione $\sigma_f(w)$ tale che $\sigma_f(w) \to 0$ per $w \to w_0$, e

$$f(w) - f(w_0) = f'(w_0)(w - w_0) + \sigma_f(w)(w - w_0),$$

La derivabilità di $\alpha(p)$ in p_0 implica anche che

$$\alpha(p) - \alpha(p_0) = (p - p_0)\alpha'(p_0) + (p - p_0)\sigma_\alpha(p)$$

dove $\sigma_\alpha(p) \to 0$ per $p \to p_0$. Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\frac{f(\alpha(p)) - f(\alpha(p_0))}{p - p_0} = \frac{f'(\alpha(p_0))(\alpha(p) - \alpha(p_0)) + \sigma_f(\alpha(p))(\alpha(p) - \alpha(p_0))}{p - p_0} \\
&= \frac{f'(\alpha(p_0))(\alpha(p) - \alpha(p_0))}{p - p_0} + \frac{\sigma_f(\alpha(p))((p - p_0)\alpha'(p_0) + (p - p_0)\sigma_\alpha(p))}{p - p_0} \\
&= \frac{f'(\alpha(p_0))(\alpha(p) - \alpha(p_0))}{p - p_0} + \sigma_f(\alpha(p))\alpha'(p_0) + \sigma_f(\alpha(p))\sigma_\alpha(p) \to f'(\alpha(p_0))\alpha'(p_0),
\end{aligned}$$

per $p \to p_0$. □

Esempio 5.1.

(a) Se $c \in \mathbb{C}$ allora la funzione costante $f(z) = c$ è derivabile e $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, infatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

(b) La funzione $f(z) = z$ è derivabile e $f'(z) = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, infatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

(c) Se $c \in \mathbb{C}$, allora la funzione $f(z) = cz^2$ è derivabile e $f'(z) = 2cz$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, infatti grazie alla Proposizione 5.2 si ha

$$D(cz^2) = cD(z^2) = cD(z \cdot z) = c(1 \cdot z + z \cdot 1) = 2cz.$$

Per esercizio si calcoli questa derivata usando direttamente la definizione, cioè calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale.

(d) Applicando ripetutamente la Proposizione 5.2 si deduce che ogni polinomio è derivabile e che, per $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1.$$

♡

Teorema 5.1 (Equazioni di Cauchy-Riemann)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$, con $u := \operatorname{Re} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $v := \operatorname{Im} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $u, v \in C^1(\Omega)$, allora*

$$\boxed{f \text{ è derivabile in } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases}} \tag{5.3}$$

In questo caso

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)} \tag{5.4}$$

Le equazioni in (5.3) *sono dette* equazioni di Cauchy-Riemann *e saranno denotate brevemente con C-R.*

Dimostrazione.
"$\Longrightarrow$" Stiamo assumendo che f è derivabile in z_0 cioè esiste $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. Poiché questo limite non dipende dal modo in cui h tende a zero, otteniamo lo stesso risultato $f'(z_0)$ se scegliamo $h = (h_1, 0) = h_1$ con $h_1 \in \mathbb{R}$, o $h = (0, h_2) = ih_2$ con $h_2 \in \mathbb{R}$. Nel primo caso

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{[u(x_0+h_1, y_0) + iv(x_0+h_1, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{h_1} \\ &= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(x_0+h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} + i\frac{v(x_0+h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nel secondo caso, quando $h = ih_2$, si trova

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{ih_2\to 0} \frac{[u(x_0, y_0+h_2) + iv(x_0, y_0+h_2)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{ih_2} \\ &= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h_2) - u(x_0, y_0)}{ih_2} + \frac{v(x_0, y_0+h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dal momento che i due limiti sono uguali, le equazioni di Cauchy-Riemann sono valide in z_0. Il primo limite fornisce anche la formula (5.4).

"$\Longleftarrow$" Poiché $u, v \in C^1(\Omega)$, esiste il piano tangente al loro grafico in z_0, cioè, se $h = h_1 + ih_2$,

$$u(z_0 + h) = u(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)h_2 + o(|h|), \quad h \to 0,$$
$$v(z_0 + h) = v(z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)h_2 + o(|h|), \quad h \to 0.$$

Perciò (per semplicità scriviamo $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \partial_x u$, etc. etc.)

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{[u(z_0+h) - u(z_0)] + i[v(z_0+h) - v(z_0)]}{h}$$
$$= \frac{[(\partial_x u)h_1 + (\partial_y u)h_2] + i[(\partial_x v)h_1 + (\partial_y v)h_2]}{h} + \frac{o(|h|) + io(|h|)}{h}$$
$$= \frac{[\partial_x u + i\partial_x v]h_1 + [\partial_y u + i\partial_y v]h_2}{h} + \frac{o(|h|)}{h}$$
$$\overset{\text{C-R}}{=} \frac{[\partial_x u + i\partial_x v]h_1 + [-\partial_x v + i\partial_x u]h_2}{h} + \frac{o(|h|)}{h}$$
$$= \frac{[\partial_x u + i\partial_x v](h_1 + ih_2)}{h} + \frac{o(|h|)}{h} = \partial_x u + i\partial_x v + \frac{o(|h|)}{h} \to \partial_x u + i\partial_x v$$

epr $h \to 0$. Quindi la derivata di f in z_0 esiste ed è uguale a $\partial_x u(z_0) + i\partial_x v(z_0)$ □

Osservazione 5.1. Osserviamo che l'ipotesi $u, v \in C^1(\Omega)$ non è utilizzata nella dimostrazione della prima implicazione "$\Longrightarrow$" . Quindi possiamo affermare che

$$\boxed{f \text{ derivabile in } z_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).} \tag{5.7}$$

♢

Esempio 5.2. Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione espnenziale: $f(z) = e^z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = f(x+iy) = e^x e^{iy} = (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$$

così $u(x, y) = e^x \cos y$ and $v(x, y) = e^x \sin y$ e $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$. In questo caso le equazioni di Cauchy-Riemann si scrivono così

$$\begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos x \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y \end{cases}$$

e sono vere in tutto il piano $\mathbb{C}$. Quindi e^z è derivabile in ogni punto di $\mathbb{C}$ e

$$De^z = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z.$$

Questa formula è così importante che la riquadriamo:

$$\boxed{De^z = e^z} \tag{5.8}$$

♡

Esempio 5.3. La funzione $\cos z$ è derivabile, infatti $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, per cui è la composizione di funzioni derivabili. Allora troviamo

$$D\cos z = D\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

Il calcolo delle derivate di $\sin z$ e delle funzioni iperboliche è lasciato per esercizion, e si trovano le formule

$$\boxed{D\cos z = -\sin z} \tag{5.9}$$

$$\boxed{D\sin z = \cos z} \tag{5.10}$$

$$\boxed{D\cosh z = \sinh z} \tag{5.11}$$

$$\boxed{D\sinh z = \cosh z} \tag{5.12}$$

♡

Esempio 5.4. Trovare il naturale dominio di definizione di $f(z) = \left(\frac{\sinh z}{e^z}\right)^2$ e se ne calcoli la derivata, dove esiste.
Abbiamo che $\mathrm{dom} f = \{z \in \mathbb{C} \;:\; e^z \neq 0\} = \mathbb{C}$. Inoltre f è la composizione di funzioni derivabili, quindi f è derivabile in $\mathbb{C}$ e, dalle regole di derivazione,

$$f'(z) = 2\left(\frac{\sinh z}{e^z}\right)\left(\frac{(\cosh z)e^z - (\sinh z)e^z}{e^{2z}}\right) = \frac{\sinh z(\cosh z - \sinh z)}{e^{2z}}$$

♡

Esempio 5.5. Trovare l'insieme dove la funzione $f(z) = \overline{z}$ è derivabile.
Se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo $f(x+iy) = x - iy$, quindi in questo caso le parti reale ed immaginaria di f sono date dalle formule $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Ovviamente $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} 1 = -1, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

non sono mai soddisfatte. Ne segue che $f(z) = \overline{z}$ non è derivabile in ogni punto di $\mathbb{C}$. ♡

Esempio 5.6. Trovare l'insieme dove la funzione $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ è derivabile.
Se $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo $f(x+iy) = x^2+y^2$, quindi la parte reale di f è $u(x,y) = x^2+y^2$ e la parte immaginaria è $v(x,y) = 0$. Poiché $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e le equazioni di Cauchy-Riemann sono date da

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad z = 0,$$

si ha che f è derivabile solo nell'origine $z = 0$. ♡

I due esempi precedenti mostrano che funzioni semplici come $\overline{z}$ e $|z|^2$ non sono derivabili in senso complesso. Quindi la derivabilità complessa di una funzione f è una condizione molto più forte della derivabilità delle sue componenti u e v.

Esempio 5.7. Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(x+iy) = x(i-2x) + y(1-2y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Si trovi l'insieme dove f è derivabile.
Scriviamo f in forma algebrica $f = u + iv$ osservando che $f(x+iy) = (-2x^2+y-2y^2) + ix$, quindi

$u(x,y) = -2x^2 + y - 2y^2$, $v(x,y) = x$, $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e le equazioni di Cauchy-Riemann sono date da

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} -4x = 0 \\ \\ 1 - 4y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 1/2 \end{cases} \iff z = i/2$$

Allora ne deduciamo che f è derivabile solo nel punto $z = i/2$. Osserviamo che

$$f(x+iy) = ix + y - 2x^2 - 2y^2 = i(x - iy) - 2(x^2 + y^2) = i\bar{z} - 2|z|^2.$$

♡

Proposizione 5.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso. Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è derivabile $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Dal momento che $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, abbiamo che $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, quindi dalle equazioni di Cauchy-Riemann otteniamo che $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Ricapitolando $\nabla u = 0$ e $\nabla v = 0$ sull'insieme aperto connesso Ω. Ne segue che u e v sono costanti, per cui f è costante. □

Definizione 5.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ data da $f = u + iv$, $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$. Si dice che f è *olomorfa* (o *analitica*) *in* Ω se f è derivabile in ogni punto di Ω e se $u, v \in C^1(\Omega)$.

Oservazione 5.2. La condizione $u, v \in C^1(\Omega)$ della definizione precedente è ridondante, infatti è possibile dimostrare, ma non è facile, che se $f = u + iv$ è derivabile in ogni punto di Ω, allora $u, v \in C^1(\Omega)$. Perciò non è restrittivo assumere questa condizione nella definizione di funzione olomorfa. ♢

Definizione 5.3. Si dice che una funzione f è *intera* se è olomorfa in tutto il piano complesso $\mathbb{C}$.

Exercise 5.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Verificare che se $|f(z)|$ è costante allora f è costante (esercizio non facile). ♡

Proposizione 5.5. *La somma, il prodotto, il quoziente e la composizione di funzioni olomorfe sono funzioni olomorfe nel loro dominio di definizione.*

Dimostrazione. Dalle Proposizioni 5.2 e 5.3 segue che somma, prodotto, quoziente e composizione di funzioni olomorfe sono derivabili nel loro dominio di definizione. Il fatto che le parti reale ed immaginaria di tali funzioni somma, prodotto, quoziente e composizione siano di classe C^1 è allora consequenza del teorema citato nell'Osservazione 5.2. Se non si vuole usare tale teorema è sufficiente scrivere tutte queste funzioni in forma algebrica (non è difficile, ma un po' noioso) e si vede che sono somma, prodotto, quozionte e composizione delle parti reale ed immaginaria delle funzioni di partenza, per cui sono di classe C^1. □

6 Funzioni armoniche

Definizione 6.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia data $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che u è *armonica in* Ω se $u \in C^2(\Omega)$ e se $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ in Ω.

Le funzioni armoniche hanno un ruolo importante in molte situazioni fisiche. Ad esempio se u rappresenta la densità di una quantità fisica in equilibrio in una regione Ω, allora $\Delta u = 0$ in Ω.

Esempio 6.1. Calcolando le derivate parziali, verificare le seguenti affermazioni.

(a) La funzione $u(x, y) = x^2 - y^2$ è armonica in $\mathbb{R}^2$.
(b) Se $k \in \mathbb{R}$ allora $u(x, y) = kx$ è armonica in $\mathbb{R}^2$.
(c) Se $k \in \mathbb{R}$ allora $u(x, y) = ky$ è armonica in $\mathbb{R}^2$.
(d) La funzione $u(x, y) = x^2 + y^2$ non è armonica in $\mathbb{R}^2$.
(e) La funzione $u(x, y) = x^2$ non è armonica in $\mathbb{R}^2$.

♡

Esempio 6.2. Trovare tutti i polinomi armonici di secondo grado in $\mathbb{R}^2$.
Il generico polinomio di grado 2 in $\mathbb{R}^2$ (cioè nelle variabili x, y) si scrive nella forma $u(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Quindi si ha che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2a + 2b.$$

Allora $\Delta u = 0$ se e solo se $a = -b$. Quindi tutti i polinomi armonici di secondo grado in $\mathbb{R}^2$ sono i polinomi del tipo

$$u(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \qquad \text{con } a = -b$$

♡

Teorema 6.1. *Siano* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *aperto ed* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *olomorfa. Allora* $u := \operatorname{Re} f$ *e* $v := \operatorname{Im} f$ *sono funzioni armoniche.*

Dimostrazione. Proveremo in seguito che se f è olomorfa in Ω allora $u, v \in C^2(\Omega)$. Quindi per il Teorema di Schwarz si ha $\partial^2 u/\partial x \partial y = \partial^2 u/\partial y \partial x$ e $\partial^2 v/\partial x \partial y = \partial^2 v/\partial y \partial x$. Per cui

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \overset{\text{C-R}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \overset{\text{C-R}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

quindi $\Delta u = 0$. Analogamente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \overset{\text{C-R}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \overset{\text{Schwarz}}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \overset{\text{C-R}}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

per cui $\Delta v = 0$. □

Esempio 6.3. Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x+iy) := x+i(x^2+y^2)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Stabilire se f è olomorfa in tutto il piano complesso $\mathbb{C}$
La risposta è no, perché se f fosse olomorfa, allora la sua parte reale e quella immaginaria dovrebbero essere armoniche, but $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x,y) = x^2 + y^2$ non è armonica. Per esercizio si trovi i punti dove f è derivabile. ♡

Definizione 6.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ aperto e sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica. Una funzione $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *armonica coniugata di* u se la funzione $f = u + iv : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω.

Esempio 6.4. Trovare tutte le funzioni armoniche coniugate di $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
La funzione u è armonica. Dobbiamo trovare tutte le funzioni $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa in $\mathbb{R}^2$, per cui vogliamo che siano soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] -2y + 2x = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Ora integriamo la prima equazione, per esempio, rispetto ad y ed otteniamo che

$$v(x,y) = 2xy + y^2 + \phi(x)$$

per qualche funzione ϕ di classe C^1. Inseriamo questa formula nella rimanente equazione di C-R e troviamo che

$$-2y + 2x = -2y - \phi'(x),$$

quindi $\phi(x) = -x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Perciò tutte le funzioni armoniche coniugate di u sono

$$v(x,y) = 2xy + y^2 - x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

♡

Oservazione 6.1. Se u è armonica v è un'armonica coniugata di u, allora, in generale, u *non* è un'armonica coniugata di v. Vediamo un semplice controesempio. La funzione $u(x,y) = x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è armonica in $\mathbb{R}^2$, ed è evidente che $v(x,y) = y$ è un'armonica coniugata di u (per esercizio si trovino tutte le altre), infatti $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = x + iy = z$ è olomorfa in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo quindi la funzione complessa $g(x+iy) := v(x,y) + iu(x,y) = y + ix$, $x, y \in \mathbb{R}$. Si ha $g(z) = y + ix = i(x - iy) = i\overline{z}$ che non è olomorfa, quindi u *non* è un'armonica coniugata di v. ♢

Esempio 6.5. Supponiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto connesso e che u e v sono armoniche in Ω. Si provi che se v è un'armonica coniugata di u e se u è un'armonica coniugata di v, allora u e v asono funzioni costanti.
Dalle ipotesi segue che $f = u + iv$ è olomorfa e che anche $g = v + iu$ è olomorfa. Allora sia per f sia per g valgono le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{(per } f = u + iv\text{)}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \text{(per } g = v + iu\text{)}$$

Questi due sistemi implicano che $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, quindi $\nabla u = 0$ in Ω. Abbiamo anche che $\nabla v = 0$ in Ω. Essendo Ω connesso, otteniamo che u e v sono funzioni costanti. ♡

Esercizi

Esercizi (tratti dalle dispense di Analisi Complessa (vecchio ordinamento)).

1. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ e dire se sono aperti, chiusi, connessi, e trovare la loro frontiera.

   a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 2 + i| \leqslant 1\}$
   b) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |2z + 3| > 4\}$
   c) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\operatorname{Im} z| > 2\}$
   d) $\Omega_4 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 0, \pi/6 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi/3\}$

2. Trovare il naturale dominio di definizione delle seguenti funzioni.

   a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$
   b) $f(z) = \arg(1/z)$
   c) $f(z) = \dfrac{z}{z + \overline{z}}$
   d) $f(z) = \dfrac{1}{9 - |z|^2}$

3. Quali delle seguenti funzioni soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann nel loro naturale dominio di definizione?

   a) $f(z) = |z|$
   b) $f(z) = 1/z$
   c) $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$

4. Trovare l'insieme dove le seguenti funzioni complesse sono derivabili e calcolarne la derivata.

   a) $f(z) = 1/z$
   b) $f(x + iy) = x^2 + iy^2$
   c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$

5. Se $f(x+iy) = x^3 - i(y-1)^3$ allora $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2$. Spiegare perché $f'(x+iy) = 3x^2$ solo nel punto $z = i$.

6. Quali delle seguenti funzioni sono olomorfe nel loro naturale dominio di definizione?

   a) $f(x + iy) = 3x + y + i(3y - x)$
   b) $f(x + iy) = xy + iy$
   c) $f(x + iy) = e^{-y}e^{ix}$
   d) $f(x + iy) = e^{y}e^{ix}$
   e) $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$

f) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

7. Sia f olomorfa in un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Provare le seguenti affermazioni:
   a) Se $\overline{f(z)}$ è olomorfa in Ω allora f è costante in Ω.
   b) Se $\operatorname{Im} f(z) = 0$ in Ω allora f è costante in Ω.

8. Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro dominio di definizione e trovarne le funzioni armoniche coniugate.
   a) $u(x,y) = 2x(1-y)$
   b) $u(x,y) = y^2 - x^2$
   c) $u(x,y) = \sinh x \sin y$
   d) $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

Risposte ed alcune soluzioni

1. a) Ω_1 è un disco di centro $2-i$ e raggio 1. È chiuso, connesso e la sua frontiera è il circonferenza di $2-i$ e raggio 1.
   b) Ω_2 è il complementare del disco chiuso di centro $-3/2$ e raggio 2. È aperto, connesso e il suo bordo è la circonferenza di centro $-3/2$ e raggio 2.
   c) Ω_3 è l'unione di due semipiani aperti con bordo le rette $y = 2$ e $y = -2$. È aperto ma non è connesso.
   d) Ω_4 è il settore di vertice 0 delimitato dalle semirette $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$, $x \geqslant 0$. Non è aperto, non è chiuso e la sua frontiera è l'unione delle due semirette suddette.

2. a) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$
   b) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
   c) $\operatorname{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z \neq 0\}$
   d) $\operatorname{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \neq 3\}$

3. a) No
   b) Soluzione: Per $z = x + iy \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
   $$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$
   quindi le equazioni C-R sono
   $$\begin{cases} \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$
   e sono soddisfatte in ogni $z \neq 0$. Naturalmente il risultato può essere dedotto più semplicemente dal fatto che il quoziente di due funzioni olomorfe è olomorfo dove è definito.

c) Soluzione: f è un polinomio, quindi soddisfa C-R in tutto $\mathbb{C}$.

4. a) f è derivabile nel suo dominio $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f'(z) = -1/z^2$ per $z \neq 0$.
   b) Soluzione: $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = y^2$, $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Le equazioni di Cauchy-Riemann per f sono
$$\begin{cases} 2x = 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$
   quindi f è derivabile nell'insieme $\{z = x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ x = y\}$. Si ha $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$ per ogni $z = x + iy$ tale che $x = y$.
   c) Soluzione: $f(x+iy) = (x+iy)y = xy+iy^2$, quindi $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = y^2$, $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e C-R sono date da
$$\begin{cases} y = 2y \\ x = 0 \end{cases}$$
   per cui f è derivabile solo in $z = 0$ e si ha $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0) = y|_{(x,y)=(0,0)} + i\ 0|_{(x,y)=(0,0)} = 0$.
5. Soluzione: Poiché $u(x, y) = x^3$, $v(x, y) = -(y-1)^3$, $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, le equazioni C-R sono date da
$$\begin{cases} 3x^2 = -3(y - 1)^2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
   e sono soddisfatte se e solo se $x^2 + (y-1)^2 = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ e $y = 1$. Ne segue che f è derivabile solo in $z = i$.
6. a) Sì
   b) No
   c) Sì
   d) No
   e) Sì
   f) Sì
7. a) Soluzione: Se $f = u + iv$ è analitica, allora le equazioni C-R sono
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$
   Inoltre $\overline{f} = u - iv$ è anche olomorfa, quindi le sue equazioni C-R sono date da
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Segue che $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, così $\nabla u = 0$ e u è costante. Esatamente allo stesso modo si deduce che $\nabla v = 0$ e v è costante. Allora f è costante.

8. a) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + c$
   b) $v(x, y) = -2xy + c$
   c) $v(x, y) = -\cosh x \cos y + c$
   d) Un conto diretto mostra che u è armonica. Troviamo $v(x, y)$. Scriviamo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Integrando la prima equazione rispetto a y si trova $v(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \phi(x)$, quindi, sostituendo $v(x, y)$ nella seconda equazione C-R troviamo

$$\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \phi'(x) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

cioè $\phi'(x) = 0$, per cui $\phi(x) = c \in \mathbb{R}$. Allora $v(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Modifiche dalla revisione del 30 marzo 2015 alla revisione del 18 marzo 2016:

1. Esempio 2.1, p. 3: ho aggiunto l'esempio (d).
2. Esempio 5.1 (b), p. 8: ho corretto il rapporto incrementale.
3. Esempio 5.3 (b), p. 11: ho aggiunto un fattore 1/2 mancante nel calcolo di $D \cos z$.