Es. 6 CAP 1 Dispense

Verificare che $1+i$ è una radice di $z^4-5z^3-10z+4$ e trovare tutte le altre radici

Sol

Se $z = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \quad z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$$

$$= 4e^{i\pi} - 5\cdot 2\cdot\sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} + 10\cdot 2\, e^{i\frac{\pi}{2}} - 10\cdot\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} + 4$$

$$= \cancel{-4} - 10\cdot\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 20i - 10(1+i) \cancel{+4}$$

$$= -10i + 20i - 10i = 0$$

Quindi $1+i$ è radice del polinomio, quindi, essendo il polinomio a coefficienti reali, anche $\overline{1+i} = 1-i$ è una radice (questo fatto è dimostrato al termine dell'esercizio), quindi il polinomio è diviso da

$$\big(z-(1+i)\big)\big(z-(1-i)\big) = z^2 - (1-i)z - (1+i)z + 2$$

$$= z^2 - z + iz - z - iz + 2$$

$$= z^2 - 2z + 2$$

per cui

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
z^4 - 5z^3 & + 10z^2 & - 10z & + 4 & & z^2 - 2z + 2 \\
z^4 - 2z^3 & + 2z^2 & & & & \hline z^2 - 3z + 2 \\
\hline
// \quad -3z^3 & + 8z^2 & - 10z & + 4 & & \\
-3z^3 & + 6z^2 & - 6z & & & \\
\hline
// & 2z^2 & - 4z & + 4 & & \\
& 2z^2 & - 4z & + 4 & & \\
\hline
& // & // & // & &
\end{array}
$$

e

$$z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 3z + 2)$$

$$= \big(z - (1+i)\big)\big(z - (1-i)\big)(z^2 - 3z + 2)$$

$$= \big(z - (1+i)\big)\big(z - (1-i)\big)(z - 1)(z - 2)$$

quindi le radici sono

$$1+i, \quad 1-i, \quad 1, \quad 2$$

Prop Se $p(z)=a_n z^n+\dots+a_1 z+a_0$, con $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, e se $p(w)=0$, allora anche $p(\overline{w})=0$

Dim

$$
\begin{aligned}
p(\overline{w}) &= a_n \overline{w}^n+\dots+a_1\overline{w}+a_0\\
&= a_n\overline{w^n}+\dots+a_1\overline{w}+a_0\\
&\overset{a_k\in\mathbb{R}}{=} \overline{a_n}\,\overline{w^n}+\dots+\overline{a_1}\,\overline{w}+\overline{a_0}\\
&= \overline{a_n w^n}+\dots+\overline{a_1 w}+\overline{a_0}\\
&= \overline{a_n w^n+\dots+a_1 w+a_0}\\
&= \overline{p(w)} = \overline{0} = 0.
\end{aligned}
$$

$\boxtimes$