Appello TES del 30 giugno 2021.

1.

Si considerino i due segnali:

- $x(t) = A\,t$ in $[0,1]$ e nullo altrove;
- $y(t) = B\,t^2$ in $[0,1]$ e nullo altrove;

dove A e B sono due constanti positive. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

(a) la distanza tra i due segnali è pari a $\frac{A^2}{3} + \frac{B^2}{5} - \frac{AB}{2}$
(b) la distanza tra i due segnali è pari a $\sqrt{\frac{A^2}{3} + \frac{B^2}{5} - \frac{AB}{2}}$ ✓
(c) la distanza tra i due segnali è pari a $\sqrt{\frac{A^2}{3} + \frac{B^2}{5} + \frac{AB}{2}}$
(d) la distanza tra i due segnali è pari a $-\frac{A^2}{3} - \frac{B^2}{5} - \frac{AB}{2}$

Soluzione
La distanza tra due segnali a tempo continuo è pari a:

$$d = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

Nel nostro caso abbiamo dunque

$$d = \sqrt{\int_{0}^{+1} (At - Bt^2)^2 dt} = \sqrt{\int_{0}^{+1} (A^2t^2 + B^2t^4 - 2ABt^3) dt} = \sqrt{[(A^2t^3/3 + B^2t^5/5 - 2ABt^4/4)]_0^1}$$

$$d = \sqrt{(A^2/3 + B^2/5 - AB/2)}$$

2.

Si consideri il processo casuale che durante il corso abbiamo denominato "segnale per trasmissione numerica", dato da:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - i\,T)$$

Si assuma che α_i assuma i valori 0 e 2 con uguale probabilità. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

(a) il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso stretto
(b) il processo casuale $x(t)$ ha media che dipende dalla forma di $r(t)$ e non è stazionario ✓
(c) il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso lato
(d) il processo casuale $x(t)$ ha media pari a 1 e non è stazionario

Soluzione
Come analizzato a lezione, il processo in questione non è stazionario (nè in senso lato nè in senso stretto) e questa considerazione esclude dunque due delle risposte. Per quanto riguarda la media, abbiamo che

$$E[x(t)] = E[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - i\,T)]$$

e per linearità

$$E[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E[\alpha_i] r(t - i\,T)$$

Dato che in questo caso $E[\alpha_i] = 1$ abbiamo dunque

$$E[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r(t - i\,T)$$

In conclusione, la risposta corretta è "il processo casuale $x(t)$ ha media che dipende dalla forma di $r(t)$ e non è stazionario"

3.

Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [3,5]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2,4]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

(a) $y[n]$ assume (al massimo) 4 valori non nulli
(b) $y[n]$ assume (al massimo) 5 valori non nulli ✓
(c) $y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli
(d) $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 1$

Soluzione
I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno entrambi tre valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporto meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a cinque. La risposta corretta è dunque " $y[n]$ assume (al massimo) 5 valori non nulli"

4.

Si consideri il segnale

$$x(t) = 9 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{9}{T}(t - nT)\right).$$

Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1, \text{se } \ |f| < \frac{9}{4T} \\ 0, \text{altrove} \end{cases}$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$ che vale:

(a) $y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$ ✓
(b) $y(t) = 2\cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t\right)$
(c) $y(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$
(d) $y(t) = 0 \ \ \forall t$
(e) $y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
(f) $y(t) = 2\cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right)$

Soluzione
Il segnale periodico $x(t)$ ha come trasformata

$$X(f) = p_{9/T}(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

che é non nulla per $|f| < \frac{9}{2T}$ $X(f)$ si puó scrivere come

$$X(f) = \sum_{n=-4}^{+4} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Poiché $H(f)$ é un filtro passabasso che annulla tutte le componenti per $|f| > \frac{9}{4T}$ restano in uscita solo le delta per $n = -2, -1, 0, 1, 2$ da cui

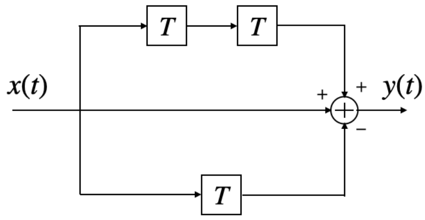
$$y(t) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$$

5.

Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui il blocco etichettato con T rappresenta un ritardatore di T secondi del segnale al suo ingresso, e se ne calcoli la funzione di trasferimento.

Ponendo all'ingresso del sistema un segnale sinusoidale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = \frac{3}{T}$ e A una costante reale, si ottiene il segnale di uscita $y(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta :

(a) $y(t)$ è ancora un segnale sinusoidale con la stessa ampiezza del segnale di ingresso e stessa fase ✓
(b) $y(t)$ è ancora un segnale sinusoidale con la stessa ampiezza del segnale di ingresso e fase $\phi = \pi/2$
(c) $y(t)$ è un segnale identicamente nullo



(d) nessuna delle altre risposte
(e) $y(t)$ è ancora un segnale sinusoidale ma con diversa ampiezza e la stessa fase del segnale di ingresso

Soluzione

Trattandosi di un sistema lineare, quindi che ammette funzione di trasferimento $H(f)$, ponendo in ingresso un segnale di tipo sinusoidale $x(t) = x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ a frequenza f_0, il segnale di uscita $y(t) = |H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))$ in quanto la funzione di trasferimento rappresenta proprio di quanto si modifica in modulo e fase ciascuna componente sinusoidale del segnale di ingresso.

Calcoliamo dunque la risposta all'impulso:

$$h(t) = 3\delta(t) - \delta(t-T) + \delta(t-2T)$$

da cui

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT} + e^{-j4\pi fT} = 1 - e^{-j3\pi fT}[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] = 1 - 2je^{-j3\pi fT}\sin(\pi fT)$$

Calcolando $H(f_0)$ con $f_0 = \frac{3}{T}$ si ottiene

$$H\left(\frac{3}{T}\right) = 1 - 2je^{-j6\pi}\sin(3\pi) = 1$$

Si puó arrivare allo stesso risultato ragionando sui segnali nel dominio del tempo e andando a valutare come si combinano il segnale e le sue le repliche ritardate di T e $2T$

6.

Si consideri il segnale

$$r(t) = A\mathrm{p}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

in cui $\mathrm{p}_\alpha(t)$ é pari a 1 se $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove, e A e T assumono valori costanti reali positivi. Tale segnale viene filtrato da un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = r(T-t)$ per ottenere il segnale $w(t)$, il quale viene poi ulteriormente trattato attraverso un sistema non lineare la cui relazione ingresso-uscita è descritta come

$$\mathrm{y} = \begin{cases} \frac{A^2T}{4}, \text{per } \mathrm{x} \geq \frac{A^2T}{4} \\ \mathrm{x}, \text{per } \mathrm{x} < \frac{A^2T}{4} \end{cases}$$

in cui x é l'ingresso del sistema e y l'uscita.

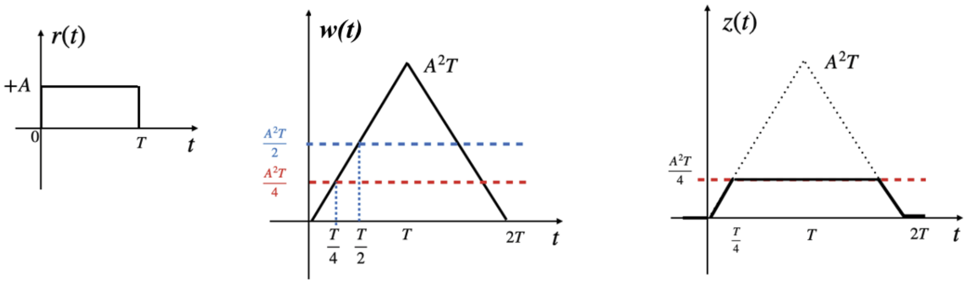
L'energia del segnale $z(t)$ all'uscita del sistema non-lineare vale

(a) $E_z = \frac{5A^4T^3}{48}$ ✓
(b) $E_z = \frac{A^2T}{4}$
(c) $E_z = \frac{A^4T}{2}$
(d) $E_z = \frac{3A^2T^2}{16}$
(e) $E_z = \frac{7A^4T^3}{12}$
(f) nessuna delle altre risposte

Soluzione
I segnali coinvolti si possono rappresentare come in figura.

$$E_z = 2\cdot\int_0^{T/4}\left|\frac{A^2T}{T}t\right|^2 dt + \int_{T/4}^{7T/4}\left|\frac{A^2T}{4}\right|^2 dt = 2\cdot\int_0^{T/4}\left|A^2t\right|^2 dt + \frac{3T}{2}\frac{A^4T^2}{16} =$$

$$E_z = 2\cdot A^4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4} + \frac{3}{32}A^4T^3 = \frac{2}{3}A^4\frac{T^3}{64} + \frac{3}{32}A^4T^3 = \frac{1}{96}A^4T^3 + \frac{3}{32}A^4T^3 = \frac{5}{48}A^4T^3$$



7.

Si consideri un sistema caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t-T).$$

Calcolare $E\{x(t)y(t)\}$ per $T = 0$ e $T = 1/(2B)$, sapendo che $x(t)$ è un processo casuale gaussiano con spettro di potenza $S_x(f) = G$ per $|f| < B$ e $S_x(f) = 0$ per $|f| > B$.

(a) $E\{x(t)y(t)\} = 2GB$ per $T = 0$, $E\{x(t)y(t)\} = 2GB(1 + 2B)$ per $T = 1/(2B)$ ✓
(b) $E\{x(t)y(t)\} = 2GB$ per $T = 0$, $E\{x(t)y(t)\} = 2GB(1 - 2B)$ per $T = 1/(2B)$
(c) $E\{x(t)y(t)\} = 2GB$ sia per $T = 0$, che per $T = 1/(2B)$
(d) Nessuna delle altre risposte

Soluzione
Il sistema considerato è LTI. Vogliamo calcolare $E\{x(t)y(t)\} = R_{xy}(0) = R_x(\tau) * h(\tau)|_{\tau=0}$ che si ottiene anche integrando lo spettro di potenza mutuo :

$$R_x(\tau) * h(\tau)|_{\tau=0} = \int S_x(f)H(f)df$$

La funzione di trasferimento del sistema, ottenibile usando la proprietá della derivata e del ritardo per la trasformata, è la seguente:

$$H(f) = 1 + e^{-j2\pi fT}(j2\pi f)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
E\{x(t)y(t)\} &= \int_{-B}^{B} G(1 + e^{-j2\pi T}(j2\pi f))df \\
&= 2GB + \int_{-B}^{B} Ge^{-j2\pi fT}(j2\pi f)df \\
&= 2GB + G\int_{-B}^{B} (\cos(2\pi fT) - j\sin(2\pi fT))(j2\pi f)df \\
&= 2GB + G\int_{-B}^{B} \sin(2\pi fT)(2\pi f)df
\end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza trascuro il primo termine perché da contributo sempre nullo essendo l'integrale su un supporto simmetrico rispetto all'origine di una funzione dispari.
Ora risolviamo per i due valori di T considerati. Quando $T = 0$:

$$E\{x(t)y(t)\} = 2GB + G\int_{-B}^{B} G\sin(2\pi f0)(2\pi f)df = 2GB.$$

Quando $T = 1/2B$

$$E\{x(t)y(t)\} = 2GB + G\int_{-B}^{B} \sin(2\pi f/2B)(2\pi f)df$$

Integro per parti il secondo termine:

$$\int_{-B}^{B} \sin(2\pi f/2B)(2\pi f)df = -2Bf\cos(\pi f/B)|_{-B}^{B} - 0 = 4B^2$$

da cui

$$E\{x(t)y(t)\} = 2GB + 4GB^2 = 2GB(1 + 2B).$$

8.

Sia $n(t)$ un processo gaussiano con densità spettrale di potenza $G_n(f) = N_0/2$ per $|f| \leq 1/T$ e nullo altrove. Tale processo passa attraverso un sistema lineare e invariante per traslazioni temporali $H(f) = 1 + e^{j2\pi fT}$; sia $y(t)$ l'uscita del sistema, e $G_y(f)$ il suo spettro di potenza. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(a) $G_y(f)$ vale $2N_0$ per $f = 0$ ✓
(b) $G_y(f)$ vale $2N_0$ per $f = 1/(4T)$
(c) $G_y(f)$ vale $N_0/2$ per $f = 1/(2T)$
(d) $G_y(f)$ è costante nell'intervallo $0 \leq f \leq 1/T$
(e) $G_y(f)$ non è definita in quanto il processo $y(t)$ non è stazionario in senso lato
(f) nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione
Il processo di uscita è stazionario in senso lato perche' lo è l'ingresso ed il sistema è LTI. Lo spettro di potenza di uscita e':

$$G_y(f) = G_n(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}[(1+\cos(2\pi fT))^2 + \sin^2(2\pi fT)]$$

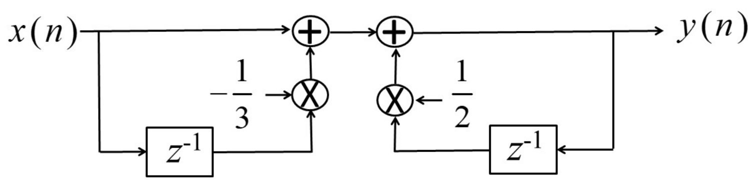
Nell'intervallo $|f| \leq 1/T$ e nullo altrove. Non e' quindi costante.

Quindi

$$\begin{aligned} G_y(0) &= \frac{N_0}{2}[(1+\cos(0))^2 + \sin^2(0)] = 2N_0 \\ G_y(1/4T) &= \frac{N_0}{2}[(1+\cos(2\pi/4))^2 + \sin^2(2\pi/4)] = N_0 \neq 2N_0 \\ G_y(1/2T) &= \frac{N_0}{2}[(1+\cos(2\pi/2))^2 + \sin^2(2\pi/2)] = 0 \neq N_0/2 \end{aligned}$$

9.

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto descritto dal seguente schema a blocchi (dove z^{-1} rappresenta un ritardo di un campione nel dominio del tempo discreto):



La risposta del sistema al gradino unitario $u[n]$ vale:

(a) $y[n] = -\frac{1}{3}u[n-1] - \frac{1}{2}\frac{1}{u[n-1]}$
(b) $y[n] = \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$ ✓
(c) $y[n] = -\frac{1}{3}u[n] + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
(d) $y[n] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}u[-n]$
(e) $y[n] = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4\right]u[n]$

Soluzione
La relazione ingresso/uscita del sistema in figura è:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

La trasformata zeta vale:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = X(z)\left[1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

La trasformata zeta dell'ingresso ($x(n) = u(n)$) è pari a:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

La trasformata zeta dell'uscita vale quindi:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \left.\frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$R_2 = H(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 - 2} = -\frac{1}{3}$$

Quindi:

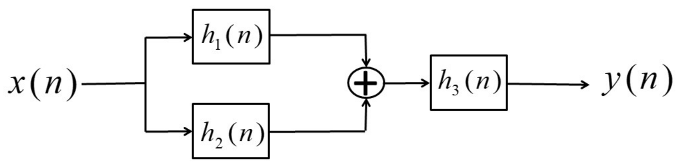
$$H(z) = \frac{4}{3}\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando (sistema causale):

$$h(n) = \frac{4}{3}u(n) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

10.

Si consideri il sistema LTI causale a tempo discreto descritto dal seguente schema a blocchi:



con

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n], \quad h_2[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n], \quad h_3[n] = 2\delta[n] + \frac{2}{3}\delta[n-1].$$

Quale delle seguenti espressioni corrisponde alla relazione ingresso/uscita del sistema in figura?

(a) $y[n] = x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2] + \frac{1}{4}y[n-2]$ ✓
(b) $y[n] = 2x[n] + \frac{2}{3}x[n-1]$
(c) $y[n] = 2x[n] + \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2]$
(d) $y[n] = \frac{2}{3}x[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2]$
(e) $y[n] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2]$

Soluzione
La funzione di trasferimento complessiva del sistema in figura (composto da una connessione in parallelo e una in serie) vale:

$$H(z) = [H_1(z) + H_2(z)] \cdot H_3(z)$$

con:

$$H_1(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad H_2(z) = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad H_3(z) = 2 + \frac{2}{3}z^{-1}$$

Sostituendo:

$$H(z) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right]\left[2 + \frac{2}{3}z^{-1}\right] =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left[1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right] = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

Sostituendo l'espressione di $H(z)$ nella relazione $Y(z) = X(z)H(z)$:

$$Y(z) = X(z)\frac{z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$Y(z) - \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} = X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}X(z)z^{-2}$$

Antitrasformando:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$