Es. 6, Cap. 4 dispense

Classificare tutte le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{(\cos z)(\cosh z)}{z^3\left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\left(z^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

Sol

Si ha

$$f(z) = \frac{(\cos z)(\cosh z)}{z^3\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2\left(z + \frac{\pi}{2}\right)^2\left(z - i\frac{\pi}{2}\right)\left(z + i\frac{\pi}{2}\right)}$$

e le singolarità di f sono $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}, -i\frac{\pi}{2}$.

(1) $z = 0$. Si ha

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{z^3} \qquad (m = 3), \qquad \text{con}$$

$$g_1(z) = \frac{(\cos z)(\cosh z)}{\left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\left(z^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$ olomorfa in un intorno di $z = 0$

(il che implica incidentalmente che $\mathrm{Res}_f(0) = \frac{1}{2!} g_1^{(2)}(0)$)

e poiché $g_1(0) = \cos(0)\cosh(0) = 1 \neq 0$ si ha che $z=0$ è un polo di ordine 3.

(2) $z = \frac{\pi}{2}$. Si ha

$$f(z) = \frac{g_2(z)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} \qquad (m=2), \quad \text{con}$$

$$g_2(z) = \frac{(\cos z)(\cosh z)}{z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)} \qquad \text{olomorfa in un intorno di } z=\frac{\pi}{2}$$

(il che implica incidentalmente che $\operatorname{Res}_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)$).

Si ha $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, quindi $g_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ per cui

$z = \frac{\pi}{2}$ <u>non</u> è un polo doppio. Può essere polo semplice o singolarità eliminabile. Per capirlo scriviamo

$$g_2(z) = \left[\frac{\overset{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\neq 0}{(\cosh z)}}{z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right]\frac{\overset{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}{\cos z}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

sviluppo di Taylor di $\cos z$ in $z = \pi/2$

$$= \left[\frac{(\cosh z)}{z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right]\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^n}$$

$$= \left[\frac{(\cosh z)}{z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right]\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(-\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3-\dots\right)$$

$$= \left[\frac{(\cosh z)}{z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right]\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}\left(-1+\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{6}-\dots\right)$$

$$= \frac{\tilde{g}_2(z)}{z-\frac{\pi}{2}} \qquad (m=2)$$

con $\tilde{g}_2(z) = \left[\dfrac{\cosh z}{z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}\right]\left(-1+\dfrac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{6}-\dots\right)$

olomorfa in un intorno di $z = \frac{\pi}{2}$

e con

$$\tilde{g}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\boxed{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\neq 0}}{\left.\left(z^3\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\right)\right|_{z=\frac{\pi}{2}}}(-1) \neq 0$$

quindi $z = \frac{\pi}{2}$ è un polo semplice.

(3) $z = -\frac{\pi}{2}$. Si ha che

$f(z)$ è "dispari", cioè $f(-z) = -f(z) \quad \forall z$

quindi anche $z = -\frac{\pi}{2}$ è un polo semplice.

(4) $z = i\frac{\pi}{2}$. Si ha

$$f(z) = \frac{g_4(z)}{\left(z - i\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (m = 1), \quad \text{con}$$

$$\text{con } g_4(z) = \frac{(\cos z)(\cosh z)}{z^3\left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\left(z + i\frac{\pi}{2}\right)}$$ olomorfa in un intorno di $z = i\frac{\pi}{2}$

(che incidentalmente implica che $\mathrm{Res}_f(i\frac{\pi}{2}) = g_4(i\frac{\pi}{2})$)

Si ha $\cosh\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

quindi $g_4(i\frac{\pi}{2}) = 0$ per cui $z = i\frac{\pi}{2}$ <u>non</u> è un polo semplice e quindi ne segue che

$z = i\frac{\pi}{2}$ è una singolarità eliminabile

(5) $z = -i\frac{\pi}{2}$. Si ha $f(-z) = -f(z)$ $\forall z$ quindi

anche $z = -i\frac{\pi}{2}$ è singolarità eliminabile.