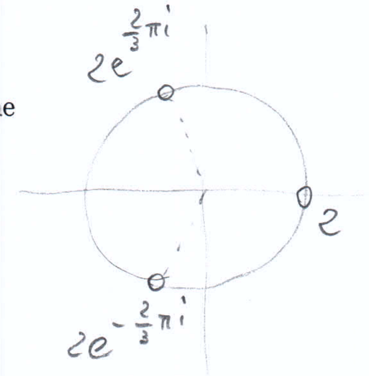
Cognome e Nome.. Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 28 GENNAIO 2009 - Compito A



Esercizio 1 (3 punti)
Trovare il dominio $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ e disegnare il luogo degli zeri della funzione

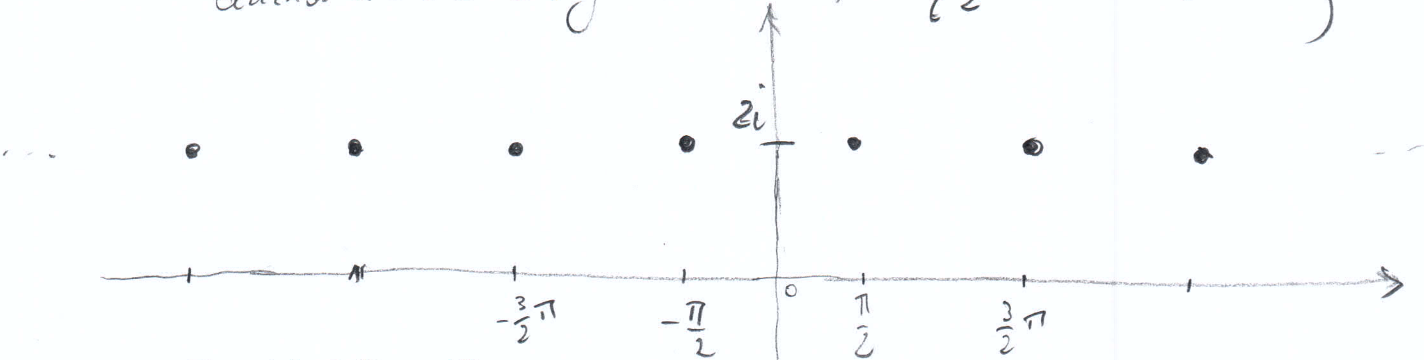
$$f(z) = \frac{\cos(z-2i)}{z^3-8}.$$

$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : z^3 - 8 \neq 0\}$;

$\cos(z-2i) = 0 \iff z - 2i = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\iff z = \frac{\pi}{2} + 2i + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Quindi l'insieme degli zeri di f è $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi + 2i : k \in \mathbb{Z}\right\}$



Esercizio 2 (3 punti)
Determinare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 = 9\,\overline{z}.$$

($z = 0$ è evidentemente soluzione.)
Posto $z = re^{i\vartheta}$, $r \geq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$z^2 = 9\bar{z} \iff r^2 e^{2i\vartheta} = 9re^{-i\vartheta} \iff \begin{cases} r^2 = 9r \\ 2\vartheta = -\vartheta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} r = 9 \\ \vartheta = \frac{2}{3}k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff z = 9, \ z = 9e^{\frac{2}{3}\pi i}, \ z = 9e^{-\frac{2}{3}\pi i}$

per $r = 0$ si ha $z = 0$

Quindi le soluzioni sono date dall'insieme

$$\left\{0, 9, 9e^{\frac{2}{3}\pi i}, 9e^{-\frac{2}{3}\pi i}\right\}$$

28/1/09

Esercizio 3 (4 punti)
Si determini l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)\frac{(z-3i)^n}{3^{2n}}. = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^n, \quad a_n = \frac{1}{3^{2n}} \sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2+3}\right)}{3^{2(n+1)}} \cdot \frac{3^{2n}}{\sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)} \right| \sim \frac{n^2+3}{[(n+1)^2+3]\,9} \to \frac{1}{9}$$

per $n \to \infty$

$\Rightarrow R = 9$ raggio di convergenza.

se $|z-3i| = 9$ si ha $|a_n(z-3i)^n| = |a_n|\,|z-3i|^n = |a_n|\,9^n$

$= \left|\sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right)\right| \sim \frac{1}{n^2+3} \sim \frac{1}{n^2}$ per $n\to\infty$, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge,

quindi la serie data converge per $|z-3i| = 9$. Allora

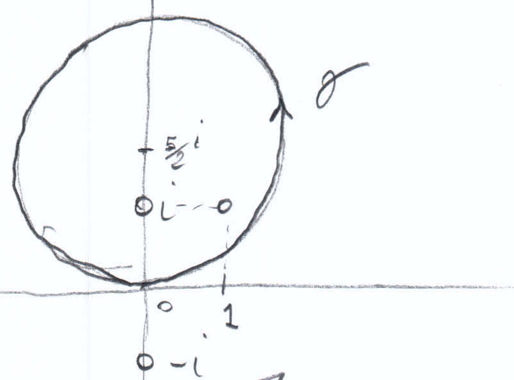
l'insieme di convergenza è $\overline{B_9(3i)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-3i| \le 9\}$

Esercizio 4 (5 punti)
Si calcoli

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z-1-i)}$$

dove γ è una curva di Jordan percorsa in senso antiorario il cui sostegno è la circonferenza di centro $\frac{5}{2}i$ e raggio $\frac{5}{2}$.

Detta f la funzione integranda, si ha per il th. dei residui che



$$I = 2\pi i \left[Res_f(i) + Res_f(1+i) \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{(z+i)(z-1-i)}\Big|_{z=i} + \frac{1}{z^2+1}\Big|_{z=1+i} \right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i+1} \right] = 2\pi i \,\frac{-(2i+1)+2i}{2i(2i+1)}$$

$$= \frac{-\pi}{2i+1}$$

28/1/09

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare del parametro reale α, si determini la natura della singolarità in 0 ed il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{\sin(\alpha z^2) - z^2}{z^3}.$$

Se $z \neq 0$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\alpha z^2)^{2n+1} - \frac{1}{z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} z^{4n-1} - \frac{1}{z} = \left(\frac{\alpha}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} z^{4n-1} \right) - \frac{1}{z}$$

$$= \frac{\alpha - 1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} z^{4n-1}$$

$$\mathrm{Res}_f(0) = (\alpha - 1)$$

se $\alpha \neq 1$ $z_0 = 0$ è un polo semplice

se $\alpha = 1$ $z_0 = 0$ è una singolarità eliminabile.

Esercizio 6 (4 punti)
Si consideri la distribuzione $T = (x^3 - 12\cos x)\delta_3(x-4)$. Calcolare $\langle T, x^2 \rangle$.

Si osservi che $T = (x^3 - 12\cos x)\delta_3(x-4)$

$= (x^3 - 12\cos x)\delta_7 = (7^3 - 12\cos(7))\delta_7$ è a supporto compatto, quindi ha senso considerare $\langle T, x^2 \rangle$ anche se il supporto di $\varphi(x) = x^2$ non è compatto.

Si ha quindi

$$\langle T, x^2 \rangle = \langle (7^3 - 12\cos(7))\delta_7, x^2 \rangle$$

$$= (7^3 - 12\cos(7))\, 7^2$$

28/11/09

Esercizio 7 (4 punti)
Posto
$$f(x) = x^4 e^{-7ix}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
verificare che la distribuzione $T = \left(\arctan \frac{\sqrt{3}}{5}x\right)\delta_5 + T_f$ è temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

(i) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{5}x\right)\delta_5 = \arctan(\sqrt{3})\,\delta_5 = \frac{\pi}{3}\delta_5$ a supporto compatto $\Longrightarrow \left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{5}x\right)\delta_5 \in \mathcal{S}'$;

(ii) $|f(x)| = x^4$ polinomio $\Longrightarrow T_f \in \mathcal{S}'$;

Quindi $T \in \mathcal{S}'$. $\mathcal{F}(T)(\nu) = \frac{\pi}{3}\mathcal{F}(\delta_5) + \mathcal{F}(x^4 e^{-7ix})$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-10\pi i\nu} + \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^4 \left[\mathcal{F}\left(e^{2\pi i\left(-\frac{7}{2\pi}\right)x}\right)\right]^{(4)}(\nu)$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-10\pi i\nu} + \frac{1}{16\pi^4}\,\delta^{(4)}_{-\frac{7}{2\pi}}$$

Esercizio 8 (5 punti)

a) Sia $f(z)$ una funzione analitica in un insieme aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Verificare che la parte reale e la parte immaginaria di f sono funzioni armoniche in Ω.

b) Trovare tutte le funzioni analitiche $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(f(z)) = 3x$ per ogni $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Se $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, allora $u(x,y) = 3x$ e valgono le equazioni di C-R:

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ v(x,y) = \phi(y), \ \phi \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

quindi dalla prima equazione

$\phi'(y) = 3 \Longrightarrow \phi(y) = 3y + c$, $c \in \mathbb{R}$, quindi

$f(x+iy) = 3x + i(3y + c)$, $c \in \mathbb{R}$

$(= 3z + ic, \ c \in \mathbb{R})$