Soluzioni Appello Teoria ed Elaborazione dei Segnali del 02-02-2021

1.

Si consideri un sistema lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = f^2 \cdot e^{-j2\pi f}$, al cui ingresso sia inviato il segnale $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$. Sia $y(t)$ il corrispondente segnale di uscita. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $y(t) = A\ f^2\ \sin(2\pi f_0 t)$
(b) $y(t) = A\ f_0^2\ \sin(2\pi f_0 (t-1))$ ✓
(c) $y(t) = A\ f_0^2\ \sin(2\pi f_0 (t+1))$
(d) $y(t) = A\ f_0^2\ e^{-j2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t)$

Soluzione
Abbiamo visto a teoria che per un segnale sinusoidale alla frequenza f_0 pari a $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ in ingresso ad un sistema lineare, si ha in uscita:

$$y(t) = |H(f_0)| \cdot A\ \sin(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})$$

Nel nostro caso:

$$H(f_0) = f_0^2 \cdot e^{-j2\pi f_0}$$

e dunque:

$$y(t) = f_0^2 \cdot \sin(2\pi f_0 t - 2\pi f_0) = A\ f_0^2\ \sin(2\pi f_0 (t-1))$$

In alternativa, facendo tutti i passaggi, nel dominio della trasformata di Fourier si ha:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) = \frac{A}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right] \cdot f^2 \cdot e^{-j2\pi f} = \frac{A}{2j}\left[f_0^2 \cdot e^{-j2\pi f_0}\delta(f-f_0) - f_0^2 \cdot e^{j2\pi f_0}\delta(f+f_0)\right]$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \frac{A f_0^2}{2j}\left[e^{-j2\pi f_0} e^{j2\pi f t} - e^{j2\pi f_0} e^{-j2\pi f t}\right] = A f_0^2 \sin(2\pi f t - 2\pi f_0) = A\ f_0^2\ \sin(2\pi f_0 (t-1))$$

2.

Si consideri un generico processo casuale $x(t)$ stazionario in sento lato. Sia $S_x(f)$ la sua densità spettrale di potenza e $R_x(\tau)$ la sua funzione di autocorrelazione. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $R_x(\tau)$ e $S_x(f)$ sono certamente entrambe delle funzioni a valori reali
(b) $R_x(\tau) \geq 0\ \ \forall \tau$
(c) $S_x(f) \geq 0\ \ \forall f$ ✓
(d) $S_x(f)$ è l'anti trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$

Soluzione
L'unica affermazione vera è la (c), in quanto lo spettro si potenza non può mai essere negativo (in quanto rappresenta la distribuzione della potenza nel dominio della frequenza).
Le risposte (a) e (b) sono errate in quanto $R_x(\tau)$ può assumere anche valori complessi e negativi.
La risposta (d) è errata in quanto vale il contrario, ossia $R_x(\tau)$ è l'anti trasformata di Fourier di $S_x(f)$.

3.

Si consideri un filtro Infinite Impule Response (IIR) con risposta all'impulso $h[n]$ e il segnale di ingresso $x[n] = 1$ per $n = 0, 1, 2, 3$ e nullo altrove. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) Il segnale di uscita $y[n]$ può essere valutato soltanto se si conosce la relazione ingresso-uscita del filtro IIR
(b) Il segnale di uscita $y[n]$ non può essere valutato esattamente col metodo della convoluzione circolare, utilizzando la tecnica dell'aggiunta di zeri ✓
(c) Il segnale di uscita $y[n]$ può essere valutato esattamente col metodo della convoluzione circolare, utilizzando la tecnica dell'aggiunta di zeri
(d) Il segnale di uscita $y[n]$ può essere valutato esattamente col metodo della convoluzione circolare tra $x[n]$ e $h[n]$, senza utilizzare la tecnica di aggiunta di zeri

Soluzione
L'unica affermazione vera è la (b) a causa delle seguenti considerazioni.

- un filtro IIR ha una risposta all'impulso di durata infinita
- conseguentemente, la sua implementazione numerica NON può mai essere ottenuta esattamente con una convoluzione circolare, neanche con l'aggiunta di zeri (questa considerazione esclude dunque le risposte (c) e (d)

- se è nota la risposta all'impulso $h[n]$, è sempre possibile calcolare la convoluzione lineare per ottenere l'uscita, e dunque non è vero che sia indispensabile conoscere la relazione ingresso uscita del filtro.

4.

Il segnale $x(t) = \frac{\sin(\pi t/T_1)}{\pi t}$ in cui $T_1 = 0.01$ s, viene ricevuto attraverso un filtro caratterizzato dalla risposta all'impulso,

$$h_1(t) = \frac{1}{3\pi t} \sum_{k=2}^{4} \sin(k\pi t/T_2)$$

Il massimo valore di T_2 che consente di ricevere un segnale non distorto vale:

(a) $T_2 = 0.02$ ✓
(b) $T_2 = 0.04$
(c) $T_2 = 0.03$
(d) non è possibile ricevere un segnale non distorto

Soluzione
La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ vale

$$X(f) = \mathrm{p}_{\frac{1}{T_1}}(f)$$

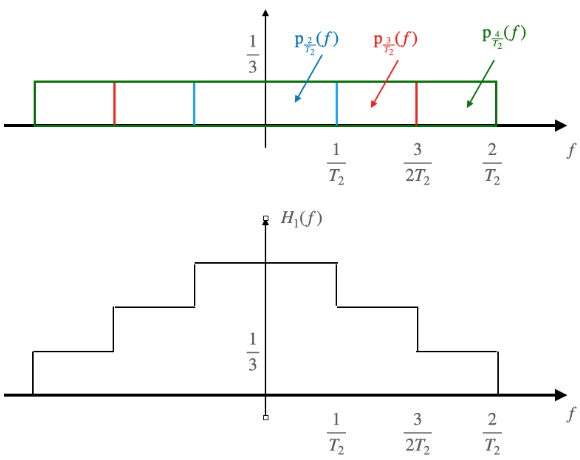
e si tratta quindi di un segnale di banda $B_x = \frac{1}{2T_1}$.
Il filtro ha una funzione di trasferimento che si può ottenere osservando che

$$h_1(t) = \frac{\sin(2\pi t/T_2)}{3\pi t} + \frac{\sin(3\pi t/T_2)}{3\pi t} + \frac{\sin(4\pi t/T_2)}{3\pi t}$$

e quindi che

$$H_1(f) = \frac{1}{3}\mathrm{p}_{\frac{2}{T_2}}(f) + \frac{1}{3}\mathrm{p}_{\frac{3}{T_2}}(f) + \frac{1}{3}\mathrm{p}_{\frac{4}{T_2}}(f)$$

rappresentata in figura.



Affinché il segnale non sia distorto è necessario che il filtro sia a guadagno unitario e con modulo costante sulla banda del segnale quindi è necessario che

$$\frac{1}{T_2} \geq \frac{1}{2T_1}$$

cioé che $T_2 \leq 2T_1$.

5.

Il segnale $x(t) = 2 + \cos(2\pi f_0 t)$ con f_0 costante, passa attraverso un filtro passabasso di tipo RC con costante di tempo

$$RC = \frac{1}{2\pi f_0}$$

e con risposta all'impulso $h(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}u(t)$. La potenza del segnale in uscita dal filtro vale:

(a) $\frac{17}{4}$ ✓

(b) 4
(c) 0
(d) altro

Soluzione
La funzione di trasferimento del filtro si ottiene facilmente dalle tavole come

$$H(f) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\frac{1}{RC}+j2\pi f} = \frac{1}{1+j2\pi fRC} = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$$

Il segnale di ingresso ha trasformata di Fourier fatta da 3 componenti spettrali

$$X(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

ciascuna delle quali viene modificata in ampiezza e fase a seconda del valore assunto dalla funzione di trasferimento in corrispondenza di ciascuna $\delta(f)$. Lo spettro del segnale di uscita é quindi

$$Y(f) = 2H(0)\delta(f) + \frac{1}{2}H(-f0)\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}H(f_0)\delta(f+f_0) = 2\delta(f) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-j}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+j}\delta(f+f_0)$$

La potenza del segnale di uscita si ottiene quindi come

$$P(y) = 2^2 + \left|\frac{1}{2}\frac{1}{1-j}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\frac{1}{1-j}\right|^2 = 4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{17}{4}$$

6.

Si consideri il segnale $q(t) = A\sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i P_{\frac{T}{2}}\left(t - i\frac{T}{2}\right)$, dove $P_\alpha(t)$ vale 1 per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove, e A è una costante reale positiva. Il segnale $q(t)$ ha potenza $\mathcal{P}(q) = 4$, ed è posto all'ingresso di un limitatore la cui uscita $y(t)$ coincide con $q(t)$ quando $q(t) > 0$ ed è nulla altrimenti. La media temporale di $y(t)$ è:

(a) 1 ✓
(b) 2
(c) nulla
(d) $\frac{1}{T}$

Soluzione
Il segnale $q(t)$ è un'onda quadra di periodo T che assume le ampiezze $\{-A, A\}$. Per determinare il valore di A calcoliamone la potenza ricordando da formula per i segnali periodici

$$P(q) = \frac{E(q_T)}{T}$$

dove $q_T(t)$ è il segnale $q(t)$ troncato sul suo periodo e $E(q_T)$ la sua energia. Si ottiene facilmente che

$$P(q) = \frac{A^2 T}{T} = A^2$$

da cui $A = 2$. All'uscita del limitatore si ottiene un segnale $y(t)$ ancora di periodo T ma pari a zero negli intervalli di tempo corrispondenti alle semionde negative. La media temporale del segnale vale

$$m_y = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} y(t)dt$$

ma trattandosi di un segnale periodico che si ripete uguale a se stesso in ogni T, considerando il segnale $y_T(t)$, cioè il segnale $y(t)$ troncato sul periodo T, si può scrivere

$$m_y = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y_T(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 2dt = \frac{1}{T}\cdot 2\cdot\frac{T}{2} = 1$$

7.

Un filtro numerico è descritto dal seguente schema a blocchi (dove z^{-1} rappresenta un ritardo di un campione nel dominio del tempo discreto):

L'uscita $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale $x(n) = \sin(\pi\frac{n}{2})$ vale:

(a) $y(n) = -\frac{2}{3}\cos(\pi\frac{n}{2})$ ✓
(b) $y(n) = \frac{2}{3}\sin(\pi\frac{n}{2})$
(c) $y(n) = -\frac{2}{3}\sin(\pi\frac{n}{2} - \frac{\pi}{4})$
(d) $y(n) = \frac{2}{3}\cos(\pi\frac{n}{2} + \frac{\pi}{4})$
(e) $y(n) = 0$

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = \frac{1}{3}x(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2)$$

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = \frac{1}{3}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}Y(z)z^{-2}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right] = \frac{1}{3}z^{-2}X(z)$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Il sistemaè reale (essendo reali tutti i cieffiicienti della relazione ingresso-uscita), quindi l'uscita dal sistema quando all'ingresso è posto il segnale sinusiodale $x(n) = \sin(2\pi f_0 n)$ vale:

$$y(n) = |H(e^{j2\pi f_0})| \sin(2\pi f_0 n + \phi(H(e^{j2\pi f_0})))$$

In questo caso $f_0 = \frac{1}{4}$, quindi:

$$H(e^{j2\pi f_0}) = H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{3}\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1}{3}\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Di conseguenza:

$$|H(e^{j2\pi f_0})| = \frac{2}{3} \qquad \phi(H(e^{j2\pi f_0})) = -\frac{\pi}{2}$$

Sostituendo:

$$y(n) = \frac{2}{3}\sin(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{3}\cos(\pi\frac{n}{2})$$

8.

Sia dato un sistema LTI discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{3}y(n-2).$$

La risposta all'impulso del sistema vale:

(a) $h(n) = \frac{3}{10}u(n) + \frac{7}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$ ✓
(b) $h(n) = \frac{7}{10}u(n) + \frac{3}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
(c) $h(n) = \frac{9}{10}(-1)^n u(n) + \frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
(d) $h(n) = \frac{1}{10}(-1)^n u(n) + \frac{9}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
(e) $h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{3}u(n-1) + \frac{2}{3}u(n-2)$

Soluzione

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} + \frac{2}{3}Y(z)z^{-2} \;.$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \left.\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$R_2 = H(z)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=-\frac{2}{3}} = \left.\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{10}$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{3}{10}\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{7}{10}\frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando (sistema causale):

$$h(n) = \frac{3}{10}u(n) + \frac{7}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

9.

Il processo casuale $x(t)$ con densità di probabilità del prim'ordine

$$f_X(x;t) = \frac{1}{T}[p_T(x - t)]$$

dove $p_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$

(a) ha varianza costante ✓
(b) ha valor medio e valor quadratico medio costanti
(c) non soddisfa nessuna delle altre relazioni
(d) è stazionario in senso lato

Soluzione

Il processo non è stazionario perchè la statistica del prim'ordine è funzione del tempo. Questa è una porta di supporto fisso T centrata in t. Il valor medio è dunque $m_X(t) = t$ mentre la varianza è

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2 dx = T^2/12$$

ed è costante.

10.

Si consideri un processo $N(t)$ gaussiano bianco all'ingresso di due filtri F_1 ed F_2. F_1 è un filtro passa basso ideale con banda unilatera B_1 e F_2 è un filtro passa banda ideale con funzione di trasferimento $H_2(f) = 2$ per $f_1 < |f| < f_2$ e nulla altrove, con $f_1 > 0$. $Y_1(t)$ è il processo all'uscita di F_1 e $Y_2(t)$ è il processo all'uscita di F_2. Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(a) $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ sono indipendenti se $f_1 > B_1$. ✓
(b) $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ sono indipendenti per $f_1 = \alpha B_1$ con $0 < \alpha < 1$.
(c) $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ non possono essere indipendenti perchè sono generati a partire dallo stesso processo $N(t)$
(d) $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ sono scorrelati, ma non indipendenti, per ogni scelta di B_1 f_1 e f_2
(e) $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ sono indipendenti al più per un insieme numerabile di valori discreti t_i con $i = 0, 1, 2, \cdots$.

Soluzione

Siccome i processi sono Gaussiani, indipendenza statistica corrisponde a indipendenza lineare (scorrelazione). Calcolo la correlazione:

$$\begin{aligned}
E\{Y_1(t)Y_2(t)\} &= E\left\{\int N(\tau_1)h_1(t-\tau_1)d\tau_1 \int N(\tau_2)h_2(t-\tau_2)d\tau_2\right\} \\
&= \int\int E\{N(\tau_1)N(\tau_2)\}\, h_1(t-\tau_1)h_2(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int\int K\delta(\tau_1-\tau_2)h_1(t-\tau_1)h_2(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int K h_1(t-\tau_1)h_2(t-\tau_1)d\tau_1 \\
&= \int K h_1(\tau_1)h_2(\tau_1)d\tau_1
\end{aligned}$$

La correlazione è dunque nulla se le due risposte all'impulso sono ortogonali (prodotto scalare nullo). Quando due segnali hanno supporto disgiunto, o nel tempo o nella frequenza, sono ortogonali. Questa condizione si verifica se $f_1 > B_1$.