Tempo discreto Settembre 2020.

1. **Settembre 2020 TD1a**

   Un filtro numerico ha relazione ingresso-uscita:

   $$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] \ .$$

   Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

   (a) Il sistema è stabile secondo il criterio di stabilità BIBO ed è realizzabile. ✓
   (b) Il sistema è instabile secondo il criterio di stabilità BIBO ed è realizzabile.
   (c) Il sistema è stabile secondo il criterio di stabilità BIBO e non è realizzabile.
   (d) Il sistema è instabile secondo il criterio di stabilità BIBO e non è realizzabile.

   SOLUZIONE

   La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

   $$Y(z) = X(z) - 2X(z)z^{-1} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-1} \ .$$

   Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

   $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1-2z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

   Dalla relazione ingresso-uscita si vede che fitro è causale. Siccome i poli ($p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = -\frac{1}{4}$) sono contenuti all'interno della circonferenza di raggio unitatrio, il filtro è quindi stabile secondo il criterio BIBO. Inoltre, i coefficienti sono reali, quindi il filtro è fisicamente realizzabile.

2. **Settembre 2020 TD2a**

   Sia $h[n]$ la risposta all'impulso del filtro numerico specificato dalla seguente equazione ingresso-uscita ricorsiva: $y[n] = x[n] + \frac{1}{2}\left(x[n-1] + y[n-1]\right)$. Dire quale delle seguenti espressioni di $h[n]$ è corretta.

   (a) $h[n] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$ ✓
   (b) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$
   (c) $h[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$
   (d) $h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{2}u[n-1]$

   SOLUZIONE

   La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

   $$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} \ .$$

   Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

   $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

   L'anti-trasformata di $H(z)$ vale:

   $$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

   $u(n)$ si può esprimere come $u(n-1) + \delta(n)$, quindi:

   $$h(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[u(n-1) + \delta(n)\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$