Cognome e Nome... Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 28 GENNAIO 2009 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Trovare il dominio $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ e disegnare il luogo degli zeri della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(z-2i)}{z^3-8}\,.$$

Esercizio 2 (3 punti)
Determinare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 = 9\,\overline{z}\,.$$

Esercizio 3 (4 punti)
Si determini l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2+3}\right) \frac{(z-3i)^n}{3^{2n}}\,.$$

Esercizio 4 (5 punti)
Si calcoli

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z-1-i)}$$

dove γ è una curva di Jordan percorsa in senso antiorario il cui sostegno è la circonferenza di centro $\frac{5}{2}i$ e raggio $\frac{5}{2}$.

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare del parametro reale α, si determini la natura della singolarità in 0 ed il residuo della funzione
$$f(z) = \frac{\sin(\alpha z^2) - z^2}{z^3}\,.$$

Esercizio 6 (4 punti)
Si consideri la distribuzione $T = (x^3 - 12\cos x)\delta_3(x-4)$. Calcolare $\langle\, T, x^2\,\rangle$.

Esercizio 7 (4 punti)
Posto
$$f(x) = x^4 e^{-7ix}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
verificare che la distribuzione $T = \left(\arctan \frac{\sqrt{3}}{5} x\right) \delta_5 + T_f$ è temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

Esercizio 8 (5 punti)

a) Sia $f(z)$ una funzione analitica in un insieme aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Verificare che la parte reale e la parte immaginaria di f sono funzioni armoniche in Ω.

b) Trovare tutte le funzioni analitiche $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che $\mathrm{Re}(f(z)) = 3x$ per ogni $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.