Quiz Teoria - appello 9 Febbraio 2023

1. **9 Febbraio 2023 QTCa**

   Si considerino i seguenti due segnali a tempo continuo:

   - $x(t)$ segnale con un generico andamento non nullo in $[T_1, T_2]$ e nullo altrove;
   - $y(t)$ segnale con un generico andamento non nullo in $[T_3, T_4]$ e nullo altrove;

   con $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$. Sia $z(t) = x(t) * y(t)$ la convoluzione tra i due segnali. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $T_4 - T_3 + T_2 - T_1$, e il cui primo istante sull'asse dei tempi in cui può assumere valore non nullo è uguale a $T_{start} = T_1 + T_3$ ✓
   (b) $z(t)$ è un segnale con supporto illimitato nel tempo
   (c) $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $T_4 + T_3 + T_2 + T_1$, e il cui primo istante sull'asse dei tempi in cui può assumere valore non nullo è uguale a $T_{start} = T_1 + T_3$
   (d) $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $T_4 - T_3 + T_2 - T_1$, e il cui primo istante sull'asse dei tempi in cui può assumere valore non nullo è uguale a $T_{start} = T_3 - T_1$

2. **9 Febbraio 2023 QTCb**

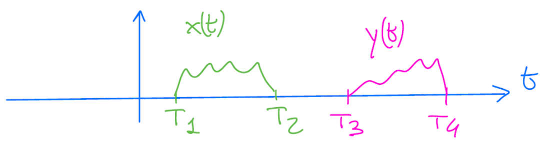
   Si considerino i seguenti due segnali a tempo continuo:

   - $y(t)$ segnale con un generico andamento non nullo in $[T_1, T_2]$ e nullo altrove;
   - $x(t)$ segnale con un generico andamento non nullo in $[T_3, T_4]$ e nullo altrove;

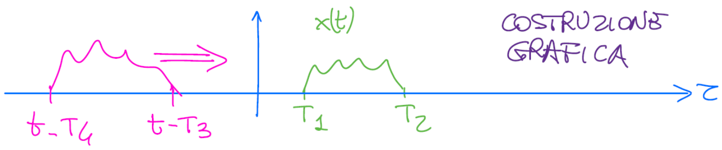
   con $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$. Sia $z(t) = x(t) * y(t)$ la convoluzione tra i due segnali. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $T_4 - T_3 + T_2 - T_1$, e il cui primo istante sull'asse dei tempi in cui può assumere valore non nullo è uguale a $T_{start} = T_1 + T_3$ ✓
   (b) $z(t)$ è un segnale con supporto illimitato nel tempo
   (c) $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $T_4 + T_3 - (T_2 + T_1)$, e il cui primo istante sull'asse dei tempi in cui può assumere valore non nullo è uguale a $T_{start} = T_1 + T_3$
   (d) $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $T_4 + T_3 + T_2 + T_1$, e il cui primo istante sull'asse dei tempi in cui può assumere valore non nullo è uguale a $T_{start} = T_1 - T_3$

SOLUZIONE Per entrambi i quiz, è opportuno avvalersi della seguente costruzione grafica:



$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$



- primo istante non nullo per $t - T_3 = T_1 \Rightarrow$

  $T_{start} = T_1 + T_3$

- ultimo istante non nullo per $t - T_4 = T_2$

  $T_{stop} = T_2 + T_4$

Il segnale $z(t)$ ha dunque il seguente supporto

$[T_1 + T_3 \,,\, T_2 + T_4]$

$\rightarrow$ durata $T_2 + T_4 - T_1 - T_3 = T_4 - T_3 + T_2 - T_1$

3. **9 Febbraio 2023 QPCa**

Si consideri un processo casuale quasi-determinato $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + B)$. I parametri A, f_0 sono numeri reali strettamente positivi, mentre B è una variabile casuale uniforme nell'intervallo $[0, 1]$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) le varie realizzazioni del processo casuale $x(t)$ sono costituite da un insieme di segnali sinusoidali tutti alla stessa frequenza e ampiezza, che differiscono tra di loro solo per un differente posizionamento degli attraversamenti per lo zero sull'asse dei tempi. ✓
   (b) il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso lato
   (c) il processo casuale $x(t)$ è ergodico
   (d) le varie realizzazioni del processo casuale $x(t)$ sono costituite da un insieme di segnali sinusoidali ad ampiezza diversa

SOLUZIONE Il processo casuale quasi-determinato $x(t)$ di questo esercizio corrisponde all'insieme di realizzazioni costituite da segnali sinusoidali con ampiezza e frequenza fissata (e uguale per tutte le realizzazioni) e fase casuale nell'intervallo indicato. La risposta corretta è dunque questa: "le varie realizzazioni del processo casuale $x(t)$ sono costituite da un insieme di segnali sinusoidali tutti alla stessa frequenza e ampiezza, che differiscono tra di loro solo per un differente posizionamento degli attraversamenti per lo zero sull'asse dei tempi." Si è visto inoltre a lezione che per questa tipologia di processo casuale il risultato non è stazionario (e conseguentemente non è neanche ergodico) salvo il caso particolare in cui la fase sia casuale e uniforme su un angolo giro, situazione non vera in questo esercizio. Le altre risposte sono dunque chiaramente sbagliate.

4. **9 Febbraio 2023 QPCb**

Si consideri un processo casuale quasi-determinato $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + B)$. I parametri B, f_0 sono numeri reali strettamente positivi, mentre A è una variabile casuale uniforme nell'intervallo $[1, 2]$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) le varie realizzazioni del processo casuale $x(t)$ sono costituite da un insieme di segnali sinusoidali tutti alla stessa frequenza e fase, che differiscono tra di loro solo per differenti ampiezze. ✓
   (b) il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso lato
   (c) il processo casuale $x(t)$ è ergodico
   (d) $x(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t + B)$ è una possibile realizzazione del processo casuale

SOLUZIONE Il processo casuale quasi-determinato $x(t)$ di questo esercizio corrisponde all'insieme di realizzazioni costituite da segnali sinusoidali con fase e frequenza fissata (e uguale per tutte le realizzazioni) e ampiezza casuale nell'intervallo indicato. La risposta corretta è dunque questa "le varie realizzazioni del processo casuale $x(t)$ sono costituite da un insieme di segnali sinusoidali tutti alla stessa frequenza e fase, che differiscono tra di loro solo per differenti ampiezze." Si è visto inoltre a lezione che per questa tipologia di processo casuale il risultato non è stazionario (e conseguentemente non è neanche ergodico) salvo il caso particolare in cui la fase sia uniforme su un angolo giro, situazione non vera in questo esercizio. Le altre risposte sono dunque chiaramente sbagliate.

La risposta "$x(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t + B)$ è una possibile realizzazione del processo casuale" è inoltre errata, poichè per questo processo casuale l'ampiezza varia in $[1, 2]$ e dunque non può essere pari a $\frac{1}{2}$

5. **9 Febbraio 2023 QTDa**

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo ✓
   (b) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
   (c) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo
   (d) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo

SOLUZIONE Per quanto visto a teoria relativamente alle regioni di convergenza, la risposta corretta è "per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo"

6. **9 Febbraio 2023 QTDb**

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo ✓

(b) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo

(c) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo

(d) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo

SOLUZIONE Per quanto visto a teoria relativamente alle regioni di convergenza, la risposta corretta è "per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo"

QuizTempo discreto - appello 9 Febbraio 2023

1. **Febbraio 2023 - TD1a**

   Si consideri la seguente sequenza $x[n]$ di $N = 8$ campioni:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 7 \\ \frac{1}{3} & n = 2, 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Si calcoli $X[k] = DFT\{x[n]\}$, per $k = 0, ..., 7$.

   (a) $X[k] = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 1$ ✓
   (b) $X[k] = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k}$
   (c) $X[k] = 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}$
   (d) $X[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \frac{1}{3}\delta[k-2] + \frac{1}{3}\delta[k-3] + \delta[k-7]$
   (e) $X[k] = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$
   (f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

   Soluzione
   La DFT della sequenx $x[n]$ su N punti è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{n\cdot k}{N}} \quad \text{per} \quad k = 0, ..., N-1$$

   In questo caso, $N = 8$ e solo 5 campioni sono diversi da zero:

$$X(k) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{1}{8}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{7}{8}k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{2}{8}k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{6}{8}k} =$$

$$= 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{7}{4}\pi k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi k}$$

   Tenedo conto che $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} = 1$, l'espressione precedente si può riscrivere come:

$$X(k) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{7}{4}\pi k} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi k} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} =$$

$$= 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k} + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\pi k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k} = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right).$$

2. **Febbraio 2023 - TD1b**

   Si consideri la seguente sequenza $x[n]$ di $N = 8$ campioni:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 2, 6 \\ \frac{1}{2} & n = 3, 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Si calcoli $X[k] = DFT\{x[n]\}$, per $k = 0, ..., 7$.

   (a) $X[k] = \cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 1$ ✓
   (b) $X[k] = \cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}$
   (c) $X[k] = 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}$
   (d) $X[k] = \delta[k] - \delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k-3] + \frac{1}{2}\delta[k-5] + \delta[k-6]$
   (e) $X[k] = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right)$
   (f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

   Soluzione
   La DFT della sequenx $x[n]$ su N punti è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{n\cdot k}{N}} \quad \text{per} \quad k = 0, ..., N-1$$

   In questo caso, $N = 8$ e solo 5 campioni sono diversi da zero:

$$X(k) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{2}{8}k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{6}{8}k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{3}{8}k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{5}{8}k} =$$

$$= 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{3}{2}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{3}e^{-j\frac{5}{4}\pi k}$$

Tenedo conto che $e^{j2\pi k} = 1$, l'espressione precedente si può riscrivere come:

$$X(k) = 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{3}{2}\pi k} \cdot e^{j2\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5}{4}\pi k} \cdot e^{j2\pi k} =$$

$$= 1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k} - e^{+j\frac{\pi}{2}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{2}e^{+j\frac{3}{4}\pi k} = 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right).$$

3. **Febbraio 2023 TD2a**

   Sia dato un sistema LTI discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{3}y(n-2).$$

   La risposta all'impulso del sistema vale:

   (a) $h(n) = \frac{9}{10}u(n) + \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$ ✓
   (b) $h(n) = \frac{1}{10}u(n) + \frac{9}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
   (c) $h(n) = \frac{3}{10}(-1)^n u(n) + \frac{7}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
   (d) $h(n) = \frac{7}{10}(-1)^n u(n) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
   (e) $h(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{3}u(n-1) + \frac{2}{3}u(n-2)$
   (f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

   Soluzione

   La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} + \frac{2}{3}Y(z)z^{-2}\ .$$

   Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

   Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

   con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \left.\frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{10}$$

$$R_2 = H(z)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{2}{3}} = \left.\frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{10}$$

   Quindi:

$$H(z) = \frac{9}{10}\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{10}\frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

   Antitrasformando (sistema causale):

$$h(n) = \frac{9}{10}u(n) + \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

4. **Febbraio 2023 TD2b**

   Sia dato un sistema LTI discreto caratterizzato dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{3}y(n-2).$$

   La risposta all'impulso del sistema vale:

   (a) $h(n) = \frac{3}{10}(-1)^n u(n) + \frac{7}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$ ✓
   (b) $h(n) = \frac{7}{10}(-1)^n u(n) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
   (c) $h(n) = \frac{9}{10}u(n) + \frac{1}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$

(d) $h(n)=\frac{1}{10}u(n)+\frac{9}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$
(e) $h(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)-\frac{1}{3}u(n-1)+\frac{2}{3}u(n-2)$
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z)=X(z)+\frac{1}{2}X(z)z^{-1}-\frac{1}{3}Y(z)z^{-1}+\frac{2}{3}Y(z)z^{-2}\ .$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{3}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z)=\frac{R_1}{1+z^{-1}}+\frac{R_2}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1=H(z)\left(1+z^{-1}\right)\big|_{z=-1}=\left.\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right|_{z=-1}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

$$R_2=H(z)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{2}{3}}=\left.\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+z^{-1}}\right|_{z=\frac{2}{3}}=\frac{1+\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{7}{10}$$

Quindi:

$$H(z)=\frac{3}{10}\frac{1}{1+z^{-1}}+\frac{7}{10}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando (sistema causale):

$$h(n)=\frac{3}{10}(-1)^n u(n)+\frac{7}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

tempo continuo

1. **TC1a**

   Si consideri lo schema a blocchi in figura 1 in cui $x(t)$ è un segnale a energia finita la cui trasformata di Fourier è rappresentata in figura 2.

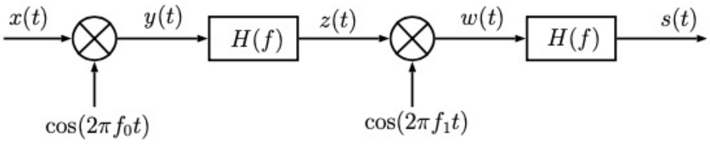


Figura 1 - Schema a blocchi del sistema

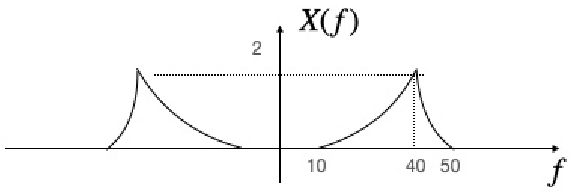
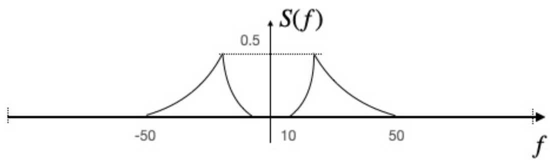
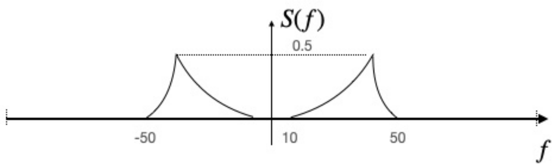


Figura 2 - Trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale $x(t)$

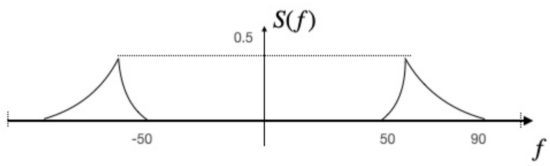
La risposta all'impulso dei filtri vale $h(t) = 2f_0 sinc(2f_0 t)$ in cui $f_0 = 150$ e $f_1 = 90$. Quale dei seguenti diagrammi rappresenta la corretta trasformata di Fourier $S(f)$ del segnale $s(t)$ in uscita dal sistema?



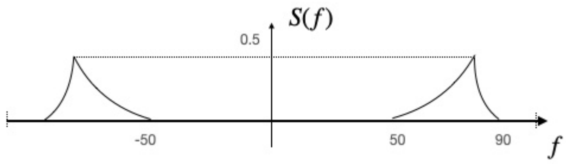
(a) ✓



(b)



(c)



(d)

(e) nessuna delle altre risposte

2. **TC1b**

   Si consideri lo schema a blocchi in figura 1 in cui $x(t)$ è un segnale a energia finita la cui trasformata di Fourier è rappresentata in figura 2.

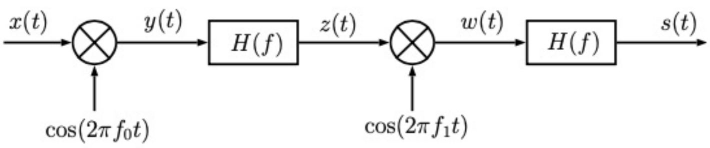


Figura 1 - Schema a blocchi del sistema

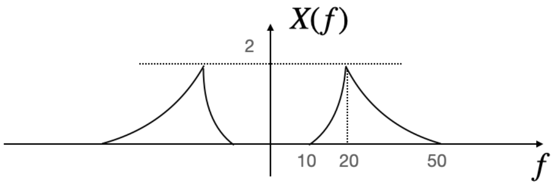
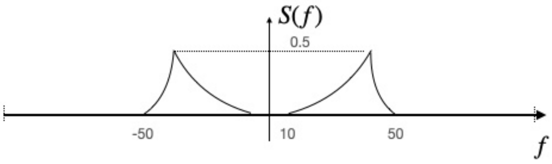
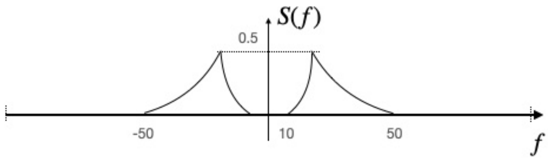
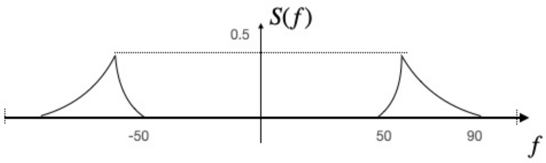


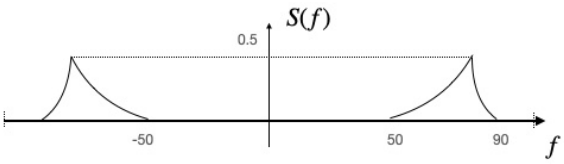
Figura 2 - Trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale $x(t)$

La risposta all'impulso dei filtri vale $h(t) = 2f_0 sinc(2f_0 t)$ in cui $f_0 = 150$ e $f_1 = 90$.
Quale dei seguenti diagrammi rappresenta la corretta trasformata di Fourier $S(f)$ del segnale $s(t)$ in uscita dal sistema?

(a)  ✓

(b) 

(c) 

(d) 

(e) nessuna delle altre risposte

Soluzione TC1a

Il segnale $y(t)$ ha trasformata di Fourier (Fig. 1)

$$Y(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

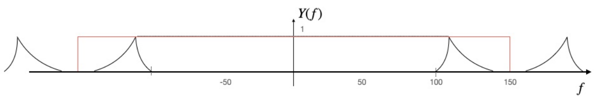


Figura 1: Trasformata di Fourier $Y(f)$ del segnale $y(t)$

Il segnale $z(t)$ ha trasformata di Fourier

$$Z(f) = Y(f)H(f)$$

dove $H(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro. dalle tavole si ha

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\ \text{sinc}\ (t/T)\right\} = p_{1/T}(f)$$

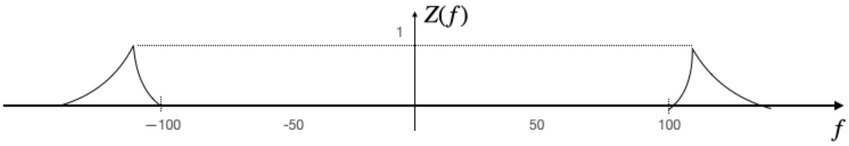


Figura 2: Trasformata di Fourier $Z(f)$ del segnale $z(t)$

e quindi, ponendo $1/T = 2f_0$, si ha

$$H(f) = \mathcal{F}\{2f_0 \text{ sinc } (2f_0 t)\} = p_{2f_0}(f)$$

Il segnale $w(t)$ ha trasformata di Fourier $W(f)$

$$W(f) = \frac{1}{2}[Z(f - f_1) + Z(f + f_1)]$$

con $f_1 = 90$ (Fig. 3) Il segnale $s(t)$ ha trasformata di Fourier

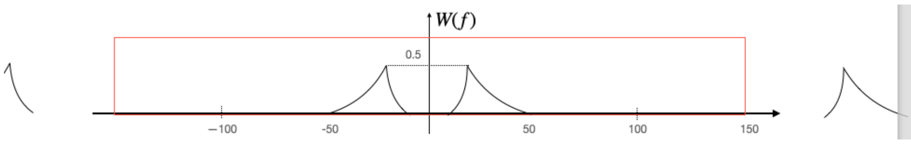


Figura 3: Trasformata di Fourier $W(f)$ del segnale $w(t)$

$$S(f) = W(f)H(f)$$

ed è mostrata nella Figura 4.

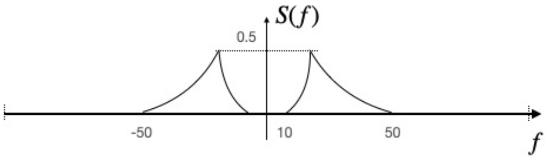


Figura 4: Trasformata di Fourier $S(f)$ del segnale $s(t)$

Rispetto a $X(f)$, si può notare che la trasformata $S(f)$ è ridotta di un fattore 4 e risulta "ribaltata".

3. **TC2a**

Si conderi un sistema LTI che ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j\pi f T} + 2\frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f} e^{-j\pi f \frac{7T}{2}}$$

al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$. (N.B. Si ricorda che $p_\alpha(t) = 1$ per $-\frac{\alpha}{2} < t < \frac{\alpha}{2}$ e $p_\alpha(t) = 0$ altrove). L'energia del segnale di uscita E_y vale:

(a) $E_y = \frac{13}{24}T^3$ ✓
(b) $E_y = \frac{17}{12}T^3$
(c) $E_y = \frac{11}{24}T^2$
(d) $E_y = \frac{7}{8}T^2$
(e) nessuna delle altre risposte

4. **TC2b**

Si consideri un sistema LTI che ha funzione di trasferimento

$$H(f) = 2\frac{\sin\left(\pi f \frac{3T}{2}\right)}{\pi f} e^{-j\pi f \frac{3T}{2}} + \frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f} e^{-j\pi f \frac{9T}{2}}$$

al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$. (N.B. Si ricorda che $p_\alpha(t) = 1$ per $-\frac{\alpha}{2} < t < \frac{\alpha}{2}$ e $p_\alpha(t) = 0$ altrove). L'energia del segnale di uscita E_y vale:

(a) $E_y = \frac{17}{12}T^3$ ✓
(b) $E_y = \frac{13}{24}T^3$
(c) $E_y = \frac{11}{24}T^2$
(d) $E_y = \frac{7}{8}T^2$
(e) nessuna delle altre risposte

SOLUZIONE TC2a

Facendo uso delle tavole delle trasformate e della proprietá del ritardo si ottiene che

$$h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2 \cdot p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{7T}{4}\right)$$

il cui andamento è riportato in Figura 5

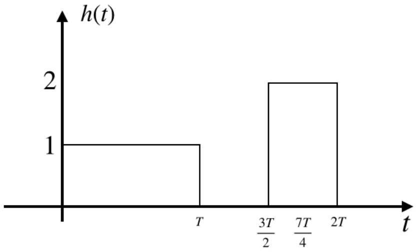


Figura 5: Risposta all'impulso $h(t)$

Il segnale in uscita $y(t)$ si può ottenere come convoluzione grafica di $x(t)$ e $h(t)$ ed è riportato in Figura 6.

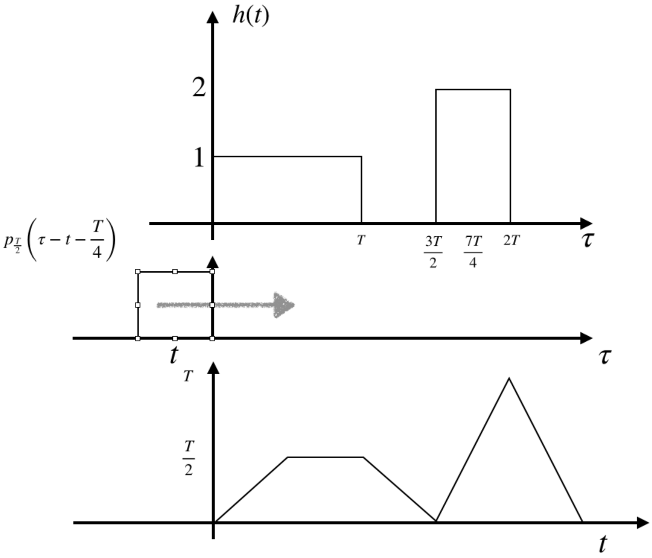


Figura 6: Segnale $y(t)$

L'energia del segnale di uscita è definita come

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2$$

ed è semplice da calcolare nel dominio del tempo, considerando il quadrato del segnale nei vari tratti. Nei due tratti obliqui del trapezio

$$2 \cdot \int_0^{T/2} t^2 dt = \frac{T^3}{12}$$

Nella parte costante

$$\int_{T/2}^{T} \frac{T^2}{4} dt = \frac{T^2}{4}\frac{T}{2} = \frac{T^3}{8}$$

per il tratto triangolare

$$2 \cdot \int_{3T/2}^{2T} (2t)^2 dt = \frac{T^3}{3}$$

Da cui $E_y = \frac{13}{24}T^3$.

5. **TC3a**

Si consideri il segnale

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 z(t) \cos(2\pi f_1 t),$$

in cui $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$, $f_1 = \frac{5}{2} f_0$ e

$$z(t) = \frac{\sin(\pi t f_0)}{\pi t}.$$

Il segnale viene campionato da un campionatore ideale ad una frequenza di campionamento $f_s = 3f_0$ e filtrato attraverso un filtro passabasso ideale con funzione di trasferimento $H(f)$ e banda $B = \frac{3}{2} f_0$. Volendo nuovamente campionare il segnale $y(t)$, la minima frequenza di campionamento necessaria in modo da garantire la sua possibile perfetta ricostruzione vale:

(a) $f_c = 2f_0$ ✓
(b) $f_c = 3f_0$
(c) $f_c = 6f_0$
(d) $f_c = \frac{3}{2} f_0$
(e) nessuna delle altre risposte

6. **TC3b**

Si consideri il segnale

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 z(t) \cos(2\pi f_0 t),$$

in cui $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 1$, $f_1 = \frac{5}{2} f_0$ e

$$z(t) = \frac{\sin(\pi t f_0)}{\pi t}.$$

Il segnale viene campionato da un campionatore ideale ad una frequenza di campionamento $f_s = 3f_0$ e filtrato attraverso un filtro passabasso ideale con funzione di trasferimento $H(f)$ e banda $B = 3f_0$. Volendo nuovamente campionare il segnale $y(t)$, la minima frequenza di campionamento necessaria in modo da garantire la sua possibile perfetta ricostruzione vale:

(a) $f_c = 5f_0$ ✓
(b) $f_c = 3f_0$
(c) $f_c = 6f_0$
(d) $f_c = \frac{3}{2} f_0$
(e) nessuna delle altre risposte

SOLUZIONE

Lo spettro del seganle $x(t)$ per le proprietá di lineritá ha due componenti: lo spettro a righe del coseno a frequenza f_0 e lo spettro del segnale $z(t)$ modulato alla frequenza $f_1 = 2,5f_0$. Lo spettro $Z(f)$ si ricava dalle tavole

$$\frac{\sin\frac{\pi t}{T}}{\pi t} \quad \longrightarrow \quad p_{\frac{1}{T}}(f)$$

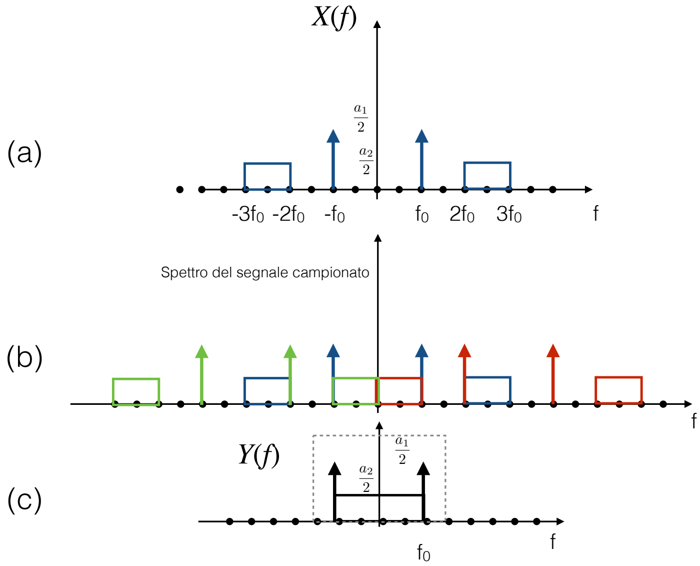


Figura 7: Spettri dei segnali

in cui nel nostro caso $\frac{1}{T} = f_0$. Lo spettro é dunque:

$$X(f) = \frac{a_1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{a_1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{a_2}{2}p_{f_0}(f - 2,5f_0) + \frac{a_2}{2}p_{f_0}(f + 2,5f_0).$$

come rappresentato in (a).

A seguito del campionamento lo spettro viene periodicizzato, come rappresentato in (b). Poiché il filtro passabasso ideale taglia tutte le frequenze per $|f| > 1,5f_0$, lo spettro risultante sará

$$Y(f) = \frac{a_1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{a_1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{a_2}{2}p_{2f_0}(f)$$

da cui si ricava antitrasformando,

$$y(t) = a_1\cos(2\pi f_0) + \frac{a_2}{2}\frac{\sin(2\pi t f_0)}{\pi t}$$

La massima frequenza presente nello spettro del segnale (banda) é f_0 da cui per il criterio di Nyquist la minima frequenza di campionamento necessaria é

$$f_s = 2f_0$$

Processi Casuali Febbraio 2023.

1. **447**

   Un processo gaussiano bianco stazionario $N(t)$, con densitá spettrale di potenza $N_0/2$, è sommato all'onda quadra $x(t) = \sum_k p_{2T}(t - 4kT)$. La somma è filtrata con il filtro

   $$H(f) = p_{2F_T}(f)\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi f}{F_T}\right)\right]},$$

   con guadagno unitario in continua e frequenza di taglio F_T, ottenendo $Z(t)$. La funzione porta $p_y(f)$ vale 1 per $-y/2 \le f \le y/2$ e 0 altrove. Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

   (a) $Z(t)$ è stazionario in senso stretto per $F_T \le \frac{1}{4T}$. In questo caso $E\{Z^2(t)\} = \frac{1}{4} + \frac{F_T N_0}{2}$ ✓
   (b) $Z(t)$ è stazionario in senso stretto per $F_T \le \frac{1}{4T}$. In questo caso $E\{Z^2(t)\} = \frac{F_T N_0}{2}$
   (c) $Z(t)$ è stazionario in senso stretto per $F_T \le \frac{1}{4T}$. In questo caso $E\{Z^2(t)\} = \frac{1}{4}$
   (d) $Z(t)$ è gaussiano, stazionario per il valor medio per qualunque valore di F_T.
   (e) $Z(t)$ ha valor medio nullo per qualunque valore di F_T.
   (f) $Z(t)$ è gaussiano non stazionario per qualunque valore di F_T.

2. **448**

   Un processo stazionario gaussiano bianco $N(t)$, con densitá spettrale di potenza $N_0/2$, è sommato all'onda triangolare $x(t) = \sum_k \Lambda_T(t - 2kT)$. La somma è filtrata con un filtro

   $$H(f) = p_{2F_T}(f)\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi f}{F_T}\right)\right]},$$

   con guadagno unitario in continua e frequenza di taglio F_T, ottenendo $Z(t)$. La funzione $p_y(f)$ vale 1 per $-y/2 \le f \le y/2$ e 0 altrove.

   Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

   (a) $Z(t)$ è stazionario in senso stretto per $F_T \le \frac{1}{2T}$. In questo caso $E\{Z^2(t)\} = \frac{1}{4} + \frac{F_T N_0}{2}$ ✓
   (b) $Z(t)$ è stazionario in senso stretto per $F_T \le \frac{1}{2T}$. In questo caso $E\{Z^2(t)\} = \frac{F_T N_0}{2}$
   (c) $Z(t)$ è stazionario in senso stretto per $F_T \le \frac{1}{2T}$. In questo caso$E\{Z^2(t)\} = \frac{1}{4}$
   (d) $Z(t)$ è gaussiano, stazionario per il valor medio per qualunque valore di F_T.
   (e) $Z(t)$ ha valor medio nullo per qualunque valore di F_T.
   (f) $Z(t)$ è gaussiano non stazionario per qualunque valore di F_T.

Soluzione 447:
Per la linearitá del sistema il processo di uscita è la somma del segnale determinato

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

ed un processo $N'(t)$ colorato e stazionario ma a media nulla. Il processo di uscita $Z(t) = y(t) + N'(t)$ ha dunque media $y(t)$ ed è stazionario se e solo se $y(t)$ è costante.

Siccome il segnale $x(t)$ è periodico, $y(t)$ è una costante se il filtro taglia tutte le armoniche di frequenza $k/4T$, con $k > 0$. Quindi quando $F_T \le 1/4T$.

In questa condizione

$$y(t) = \frac{1}{4T}\int_0^{2T} 1dt = \frac{1}{2}.$$

Il valore quadratico medio del rumore $N'(t)$ in uscita è dato da

$$\sigma^2_{N'} = \frac{N_0}{2}\int |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-F_T}^{F_T}\left(\frac{1}{2} + \cos(\pi f/F_T)\right) df = \frac{F_T N_0}{2}.$$

Il processo di uscita ha quindi valore quadratico medio

$$E\{Z^2(t)\} = \mu_Z^2 + \sigma^2_{N'} = \frac{1}{4} + \frac{F_c N_0}{2}$$

Per l'esercizio 448 la periodicitá è $2T$ e quindi $F_T \le 1/2T$. Il valor medio è lo stesso

$$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Lambda_T(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Fine Soluzione.

---

3. **1035**

Un processo casuale $X(t)$ gaussiano stazionario a valor medio nullo ha autocorrelazione $R_X(\tau) = \sin(\pi\tau B)/(\pi\tau)$. $X(t)$ subisce due trasformazioni lineari e tempo-invarianti, diventando $Y(t)$. La prima trasformazione ha risposta all'impulso $h_1(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}u(t)$. La seconda trasformazione è un passa-basso ideale, con funzione di trasferimento $H_2(f)$ uguale a 1 per $|f| < 1$ KHz e nulla altrove. Si consideri il caso $B = 2$ KHz. Dimezzando B, $P\{Y(t) > 1\}$

(a) diminuisce sempre ✓
(b) diminuisce solo se $RC > 2$
(c) aumenta sempre
(d) aumenta solo se $RC < 1$
(e) rimane invariata sempre
(f) rimane invariata solo se $RC > 2$

4. **1036**

Un processo casuale $X(t)$ gaussiano stazionario a valor medio nullo ha autocorrelazione $R_X(\tau) = \sin(\pi\tau B)/(\pi\tau)$. $X(t)$ subisce due trasformazioni lineari e tempo-invarianti, diventando $Y(t)$. La prima trasformazione ha risposta all'impulso $h_1(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}u(t)$. La seconda trasformazione è un passa-basso ideale, con funzione di trasferimento $H_2(f)$ uguale a 1 per $|f| < 1$ KHz e nulla altrove. Si consideri il caso $1/RC = 4$ KHz e $B = 4$ KHz. Dimezzando B, $P\{Y(t) > 1\}$

(a) rimane invariata sempre ✓
(b) diminuisce solo se $RC > 2$
(c) aumenta sempre
(d) aumenta solo se $RC < 1$
(e) diminuisce sempre
(f) rimane invariata solo se $RC > 2$

Soluzione 1035:
La densitá spettrale di potenza di X vale:

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = p_1(f/B) = p_B(f)$$

Quindi la densitá spettrale di potenza di Y vale:

$$S_Y(f) = S_X(f)|H_1(f)^2||H_2(f)|^2$$

con

$$|H_1(f)^2| = \frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Quindi

$$S_Y(f) = p_B(f)p_2(f)\frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Con i valori dati:

$$S_Y(f) = p_2(f)p_2(f)\frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Il processo ha valor medio nullo, quindi la probabilita' che il suo valore ecceda una soglia cresce al crescere della varianza, che coincide con l'integrale della densita spettrale di potenza $S_Y(f)$. In questo caso se dimezziamo B, il supporto di integrazione diminuisce

$$\int p_2(f)p_2(f)\frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}df \geq \int p_1(f)p_2(f)\frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}df,$$

e quindi **la varianza, e di conseguenza $P\{Y > 1\}$, diminuisce sempre, indipendentemente dal valore di RC.**

Per l'esercizio 1036 invece, siccome $B = 4$kHz

$$\int p_4(f)p_2(f)\frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}df = \int p_2(f)p_2(f)\frac{(1/RC)^2}{(1/RC)^2 + 4\pi^2 f^2}df$$

quindi **la varianza rimane invariata sempre, indipendentemente dal valore di RC.**

Fine Soluzione.
