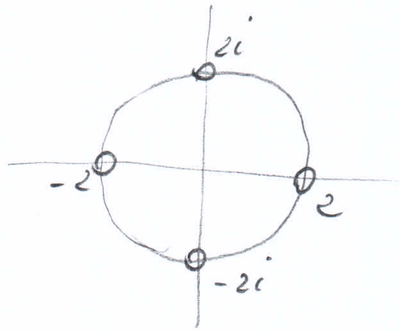
Cognome e Nome... Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 20 FEBBRAIO 2012 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Trovare gli zeri della funzione complessa

$$f(z) = \frac{1 - e^{3\pi z}}{z^4 - 16},$$

nel suo naturale dominio di definizione $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$.



$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \;:\; z^4 - 16 \neq 0\}$

$1 - e^{3\pi z} = 0 \iff 3\pi z = 2K\pi i, \quad K \in \mathbb{Z}$

$\iff z = \frac{2}{3}Ki, \quad K \in \mathbb{Z}$

quindi l'insieme degli zeri di f è

$\left\{ \frac{2}{3}Ki \;:\; K \in \mathbb{Z},\; K \neq \pm 3 \right\}$

Esercizio 2 (3 punti)
Trovare l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{3z} = e^{3\bar{z}}$$

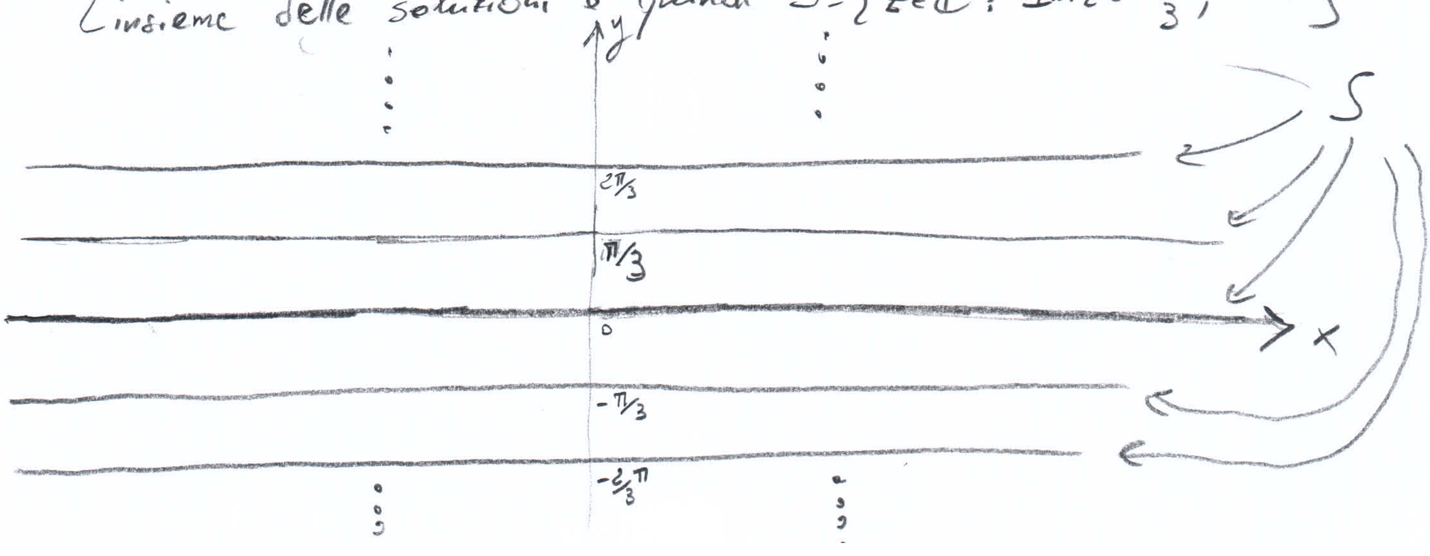
e disegnarlo nel piano complesso.

$e^{3z} = e^{3\bar{z}} \iff 3z = 3\bar{z} + 2K\pi i, \quad K \in \mathbb{Z} \qquad (z = x + iy,\; x, y \in \mathbb{R})$

$\iff \cancel{3x} + 3iy = \cancel{3x} - 3iy + 2K\pi i, \quad K \in \mathbb{Z}$

$\iff 6yi = 2K\pi i, \quad K \in \mathbb{Z} \iff y = \frac{K\pi}{3}, \quad K \in \mathbb{Z}$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = \frac{K\pi}{3},\; K \in \mathbb{Z} \right\}$



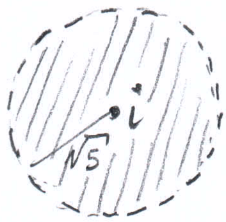
Esercizio 3 (5 punti)
Si determini e si disegni l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5(iz+1)^n}{(1+i2)^n}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5(iz+1)^n}{(1+2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 i^n}{(1+i2)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{n^5 i^n}{(1+i2)^n} \\ w = z-i \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^5\,|1+2i|^n}{|1+2i|^{n+1}\,n^5} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \frac{1}{\sqrt{5}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{per } n \to \infty$$

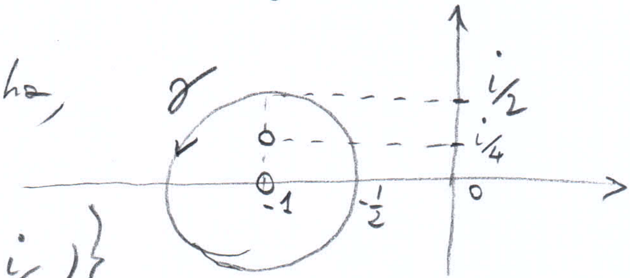
$\Longrightarrow R = \sqrt{5}$ raggio di convergenza. Se $|z-i| = \sqrt{5}$ si ha $|a_n(z-i)^n| = \frac{n^5}{(\sqrt{5})^n}|z-i|^n = n^5 \not\to 0$ per $n \to \infty$, quindi la serie data non converge se $|z-i| = \sqrt{5}$. Riassumendo l'insieme di convergenza è $B_{\sqrt{5}}(i)$



Esercizio 4 (4 punti)
Si calcoli

$$I := \int_\gamma \frac{1}{z^2(z+1)(z+1-i/4)}dz,$$

dove γ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario avente come sostegno l'insieme $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1| = 1/2\}$.



Se f è la funzione integranda si ha, per il teorema dei residui,

$$I = 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}_f(-1) + \mathrm{Res}_f\left(-1+\tfrac{i}{4}\right) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left(\frac{1}{z^2(z+1-\frac{i}{4})}\right)\Bigg|_{z=-1} + \left(\frac{1}{z^2(z+1)}\right)\Bigg|_{z=-1+\frac{i}{4}} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1}{-\frac{i}{4}} + \frac{1}{(-1+\frac{i}{4})^2(\frac{i}{4})} \right\} = 2\pi \left\{ -4 + \frac{16 \times 4}{15-8i} \right\}$$

$$= 8\pi \left(\frac{1+8i}{15-8i}\right)$$

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) := \frac{z^2 - \alpha e^{i2z}}{z^4}.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Se $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\alpha}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i2z)^n}{n!} = \frac{1}{z^2} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n 2^n}{n!} z^{n-4}$$

$$= \frac{1}{z^2} - \alpha\left(\frac{1}{z^4} + \frac{2i}{z^3} - \frac{2^2}{2z^2} - \frac{2^3 i}{3!\,z} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{i^n 2^n}{n!} z^{n-4}\right)$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{z^4} - \frac{2\alpha i}{z^3} + \frac{1+2\alpha}{z^2} + \frac{4\alpha i}{3z}\right) - \alpha \sum_{n=4}^{\infty} \frac{i^n 2^n}{n!} z^{n-4}$$

$\mathrm{Res}_f(0) = -\frac{4}{3}\alpha i$

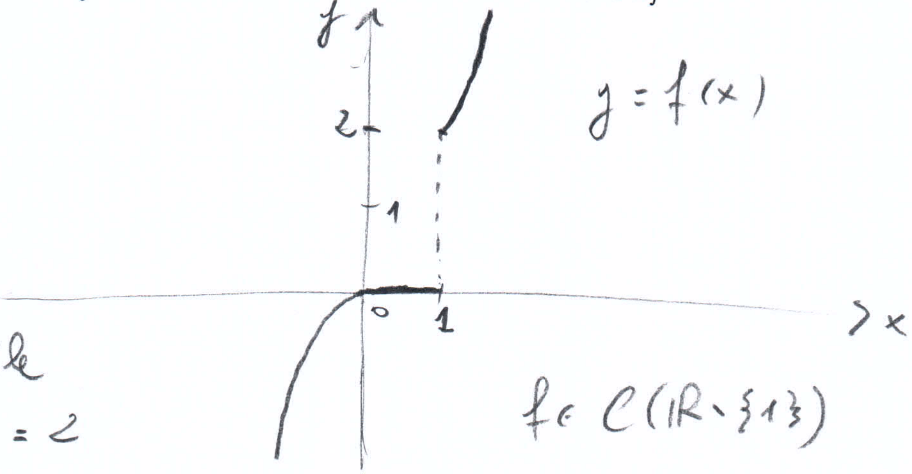
se $\alpha \neq 0$ allora $z_0 = 0$ è un polo di ordine 4;

se $\alpha = 0$ allora $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2.

Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = [\mathrm{sgn}(x-1) + \mathrm{sgn}(x)]x^2 .$$

Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f.



f loc. sommabile

$f(1+) - f(1-) = 2$

$f \in C(\mathbb{R} \setminus \{1\})$

$\forall x \neq 1 \ \exists\ f'(x) = 2x[\mathrm{sign}(x-1) + \mathrm{sign}(x)] = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[0,1]}(x)\, 4x$

f' loc. sommabile ~~su~~ $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad (T_f)' = T_{f'} + 2\delta_1$$

Esercizio 7 (4 punti)
Posto

$$f(x) = x^4, \qquad x \in \mathbb{R},$$

verificare che la distribuzione $f(x)\delta_4 + T_f$ è temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

$f(x)\delta_4 = 4^4 \delta_4$ ha supporto compatto $\Longrightarrow f(x)\delta_4 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$;

$f(x)$ è un polinomio $\Longrightarrow f$ è a crescita lenta $\Longrightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

quindi $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}\left(f(x)\delta_4 + T_f\right)(\nu) = \mathcal{F}\left(4^4\delta_4 + x^4\right)(\nu) =$$

$$= 4^4 \mathcal{F}(\delta_4)(\nu) + \mathcal{F}(x^4)(\nu)$$

$$= 4^4 e^{-8\pi i \nu} + \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^4 \left[\mathcal{F}(1)\right]^{(4)}(\nu)$$

$$= 4^4 e^{-8\pi i \nu} + \frac{1}{2^4\pi^4}\delta_0^{(4)} = 256\, e^{-8\pi i \nu} + \frac{1}{32\pi^4}\delta_0^{(4)}$$

Esercizio 8 (5 punti)

a) Scrivere la definizione di funzione armonica.

b) Verificare che se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è analitica, allora la sua parte reale è armonica.