18 Giugno 2019
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Consegnare il testo completo di tutti i fogli e con lo svolgimento completo degli esercizi, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola.**

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Si consideri il processo casuale

$$X(t) = \alpha r(t-\theta_1) + \beta r(t-\theta_2)$$

dove $r(t)$ è una funzione pari a 1 per $0 \leq t < T$ e nulla altrove (porta causale); α e β sono due variabili casuali che assumono i valori 0 e 1 in modo equiprobabile; θ_1 è una variabile casuale uniformemente distribuita in $[0, 2T]$ e θ_2 è una variabile casuale uniformemente distribuita in $[T, 4T]$. Tutte le variabili casuali sono tra loro indipendenti.

1. Il processo è stazionario?
2. Il processo è quasi determinato?
3. Calcolare media e valore quadratico medio di $X(t)$
4. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $X(t)$
5. Calcolare media e varianza della variabile casuale $Z = X(T) + X(3T)$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. Il processo è stazionario? NO. Vedi punto successivo. Media e varianza funzioni del tempo.
2. Il processo è quasi determinato? Si. E' infatti funzione di quattro variabili casuali.
3. Calcolare media e valore quadratico medio di $X(t)$

$$\begin{aligned} m_X(t) = E\{X(t)\} &= E\{\alpha r(t-\theta_1) + \beta r(t-\theta_2)\} \\ &= E\{\alpha\}E\{r(t-\theta_1)\} + E\{\beta\}E\{r(t-\theta_2)\} \\ &= \frac{1}{2}E\{r(t-\theta_1)\} + \frac{1}{2}E\{r(t-\theta_2)\} \\ &= \frac{1}{2}m_1(t) + \frac{1}{2}m_2(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo media e valore quadratico medio del primo termine:

$$\begin{aligned}
m_1(t) = E\{r(t-\theta_1)\} &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} r(t-x)dx \\
&= \int_{\max(0,t-T)}^{\min(2T,t)} \frac{1}{2T} 1 dx \\
&= \frac{1}{2T}\left(\min(2T,t) - \max(0,t-T)\right)^+ \\
s_1(t) = E\{r^2(t-\theta_1)\} &= m_1(t)
\end{aligned}$$

Il simbolo $(\cdot)^+$ coincide con l'argomento solo se questo è positivo, altrimenti è nullo.

La funzione $r(t-x)$ è infatti nulla per $x \notin [t, t-T]$ e vale 1 altrimenti. La funzione $m_1(t) = s_1(t)$ è un trapezio regolare con base maggiore $[0, 3T]$, base minore $[T, 2T]$, e altezza $\frac{1}{2}$.

Analogamente per il secondo termine:

$$\begin{aligned}
m_2(t) = E\{r(t-\theta_2)\} &= \frac{1}{3T}\int_T^{4T} r(t-x)dx \\
&= \int_{\max(T,t-T)}^{\min(4T,t)} \frac{1}{3T} \cdot 1 dx \\
&= \frac{1}{3T}\left(\min(4T,t) - \max(T,t-T)\right)^+ \\
s_2(t) = E\{r^2(t-\theta_2)\} &= m_2(t)
\end{aligned}$$

La funzione ottenuta $m_2(t)$ è un trapezio regolare con base maggiore $[T, 5T]$, base minore $[2T, 4T]$ e altezza $\frac{1}{3}$.

Per il valore quadratico medio si veda il punto successivo, ponendo $t_1 = t_2 = t$

$$s_X(t) = E\{X^2(t)\} = R_X(t,t) = \frac{1}{2}\left[m_1(t) + m_2(t) + m_1(t)m_2(t)\right]$$

Si noti infatti che $a_1(t,t) = m_1(t)$ e $a_2(t,t) = m_2(t)$.

4. Calcolare la funzione di autocorrelazione di $X(t)$

$$\begin{aligned}
R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} &= E\{[\alpha r(t_1-\theta_1) + \beta r(t_1-\theta_2)]\,[\alpha r(t_2-\theta_1) + \beta r(t_2-\theta_2)]\} \\
&= E\{\alpha^2 r(t_1-\theta_1)r(t_2-\theta_1) + \beta^2 r(t_1-\theta_2)r(t_2-\theta_2) + \\
&\alpha\beta r(t_1-\theta_1)r(t_2-\theta_2) + \beta\alpha r(t_1-\theta_2)r(t_2-\theta_1)\} \\
&= \frac{1}{2}a_1(t_1,t_2) + \frac{1}{2}a_2(t_1,t_2) + \frac{1}{4}m_1(t_1)m_2(t_2) + \frac{1}{4}m_1(t_2)m_2(t_1)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
a_1(t_1,t_2) = E\{r(t_1-\theta_1)r(t_2-\theta_1)\} &= \int_0^{2T} \frac{1}{2T} r(t_1-x)r(t_2-x)dx \\
&= \frac{1}{2T}\left(\min(2T,t_1,t_2) - \max(0,t_1-T,t_2-T)\right)^+ \\
a_2(t_1,t_2) = E\{r(t_1-\theta_2)r(t_2-\theta_2)\} &= \frac{1}{3T}\int_T^{4T} r(t_1-x)r(t_2-x)dx \\
&= \frac{1}{3T}\left(\min(4T,t_1,t_2) - \max(T,t_1-T,t_2-T)\right)^+
\end{aligned}$$

5. Calcolare media e varianza della variabile casuale $Z = X(T) + X(3T)$.

$$\begin{aligned}
E\{Z\} &= m_X(T) + m_X(3T) = \\
&= \frac{1}{2}m_1(T) + \frac{1}{2}m_2(T) + \frac{1}{2}m_1(3T) + \frac{1}{2}m_2(3T) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{5}{12}} \\
E\{Z^2\} &= E\{X^2(T) + X^2(3T) + 2X(T)X(3T)\} \\
&= s_X(T) + s_X(3T) + 2R_X(T, 3T) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + 2R_X(T, 3T) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Per il calcolo del terzo termine, dal punto 3:

$$\begin{aligned}
R_X(T, 3T) &= \frac{1}{2}\left[a_1(T, 3T) + a_2(T, 3T) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\right] = \frac{1}{24} \\
a_1(T, 3T) &= \frac{1}{2T}\left(\min(2T, T, 3T) - \max(0, 0, 2T)\right)^+ = 0 \\
a_2(T, 3T) &= \frac{1}{3T}\left(\min(4T, T, 3T) - \max(T, 0, 2T)\right)^+ = 0
\end{aligned}$$

18 Giugno 2019

Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

La funzione di trasferimento di un sistema numerico fisicamente realizzabile vale:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

1. Scrivere l'espressione dell'equazione alle differenze e disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Indicare la regione di convergenza di $H(z)$. Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)
3. Calcolare la risposta all'impulso del sistema.
4. Calcolare l'uscita del sistema quando all'ingresso viene posto il segnale $x(n) = \cos\left(\pi \frac{n}{2}\right)$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{4}{9}z^{-2}} \cdot X(z)$$

Dall'equazione precedente si ricava:

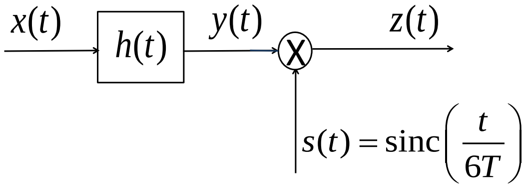
$$\left(1 - \frac{4}{9}z^{-2}\right) \cdot Y(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) + \frac{4}{9}z^{-2}Y(z)$$

Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + \frac{4}{9}y(n-2)$$

Lo schema a blocchi del sistema è quindi:



2. La funzione $H(z)$ ha uno zero in $z = 1$ e due poli in $z = 2/3$ e $z = -2/3$.
   Essendo il sistema fisicamente realizzabile, il sistema è causale, quindi la regione di convergenza è l'esterno della circonferenza con raggio $2/3$.
   Siccome il sistema è causale e tutti poli sono contenuti all'interno dlela circonferenza di raggio unitario, il sistema è stabile. Non è a fase minima, in quanto lo zero ha modulo unitario (non è strettamente all'interno della circonferenza di raggio unitario).

3. La risposta all'impulso si può trovare invertendo la funzione di trasferimento con il metodo dei fratti semplici:
$$H(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$
   con:
$$R_1 = H(z) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}$$
$$R_2 = H(z) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{5}{4}$$
   Quindi:
$$H(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} + \frac{5}{4}\frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$
   Antitrasformando:
$$h(n) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n) + \frac{5}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

4. La risposta di un sistema reale ad un ingresso sinusoidale di frequenza f_0 è una sinusoide con la stessa frequenza, con l'ampiezza moltiplicata per $|H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})|$ e la fase incrementata di un valore pari alla fase di $H(\mathrm{e}^{j2\pi f_0})$. In questo caso:
$$H(\mathrm{e}^{j2\pi f}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2j\pi f}}{1 - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-4j\pi f}}$$
   La frequenza della sinusoide è $f_0 = 1/4$:
$$H(\mathrm{e}^{j\pi f_0}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-j\pi/2}}{1 - \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-j\pi}} = \frac{1 + j}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{9}{13}\,(1 + j)\,.$$
   Il modulo di $(1 + j)$ è $\sqrt{2}$, mentre la fase vale $\pi/4$, quindi:
$$y(n) = \frac{9}{13}\sqrt{2}\cos\left(\pi\frac{n}{2} + \pi/4\right)$$
   .

18 Giugno 2019

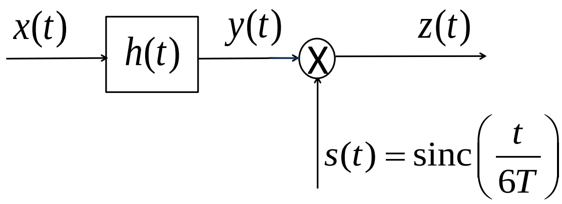
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente segnale:

$$x(t) = -1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q(t - 3nT) \qquad \text{con} \quad q(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}.$$

dove T è un numero reale positivo. Il segnale $x(t)$ passa attraverso un filtro con risposta all'impulso $h(t) = \frac{1}{3T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2t}{3T}\right)$, generando il segnale $y(t)$ e successivamente il segnale $z(t)$, come descritto nella seguente figura.



1. Calcolare lo spettro di potenza $G_x(f)$ del segnale $x(t)$.
2. Scrivere l'espressione del segnale $y(t)$.
3. Scrivere l'espressione di $Z(f)$ (trasfomata di Fourier di $z(t)$).
4. Calcolare la potenza e l'energia dei segnali $y(t)$ e $z(t)$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1. La trasformata di Fourier di $x(t)$ è pari a:

$$X(f) = -\delta(f) + \frac{1}{3T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{n}{3T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

dove:

$$Q(f) = \frac{2/T}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 f^2}$$

$$Q\left(\frac{n}{3T}\right) = \frac{2/T}{\frac{1}{T^2} + 4\pi^2 \frac{n^2}{9T^2}} = \frac{18T}{9 + 4\pi^2 n^2}$$

Sostituendo:

$$X(f) = -\delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6}{9 + 4\pi^2 n^2} \delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

Raccogliendo i coefficienti che moltiplicano la delta in zero:

$$X(f) = \left(-1 + \frac{2}{3}\right)\delta(f) + \sum_{n\neq 0} \frac{6}{9 + 4\pi^2 n^2}\delta\left(f - \frac{n}{3T}\right) = -\frac{1}{3}\delta(f) + \sum_{n\neq 0} \frac{6}{9 + 4\pi^2 n^2}\delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

Lo spettro di potenza vale quindi:

$$G_x(f) = \frac{1}{9}\delta(f) + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{6}{9 + 4\pi^2 n^2}\right)^2 \delta\left(f - \frac{n}{3T}\right)$$

2. La funzione di trasferimento $H(f)$ si trova calcolando la trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(t)$:

$$H(f) = \frac{1}{2}\text{tri}\left(\frac{3}{2}Tf\right)$$

La funzione triangolare $H(f)$ ha supporto $[-\frac{2}{3T}, \frac{2}{3T}]$ e quindi seleziona solo le 3 delta centrali della funzione $X(f)$. Tenendo conto dell'attenuazione del filtraggio tramite la funzione triangolare, la trasformata di Fourier del segnale in uscita dal filtro vale quindi:

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\delta(f) + \frac{1}{4}\frac{6}{9+4\pi^2}\delta\left(f - \frac{1}{3T}\right) + \frac{1}{4}\frac{6}{9+4\pi^2}\delta\left(f + \frac{1}{3T}\right)$$

$$Y(f) = -\frac{1}{6}\delta(f) + \frac{3}{9+4\pi^2}\frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right]$$

La sua antitrasformata vale:

$$y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{9+4\pi^2}\cos\left(2\pi\frac{1}{3T}t\right)$$

3. La trasformata di Fourier di $z(t) = y(t)\cdot s(t)$ è pari a:

$$Z(f) = Y(f) * S(f) = -\frac{1}{6}S(f) + \frac{1}{2}\frac{3}{9+4\pi^2}\left[S\left(f - \frac{1}{3T}\right) + S\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right]$$

con $S(f) = 6T\cdot p_{\frac{1}{6T}}(f)$.

4. Il segnale $y(t)$ è periodico, e quindi a potenza media finita. La sua potenza si calcola come la somma del modulo quadro dei coefficienti delle delta nella sua trasformata di Fourier, ossia:

$$P(y) = \frac{1}{36} + 2\left(\frac{1}{2}\frac{3}{9+4\pi^2}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{9/2}{(9+4\pi^2)^2}$$

Il segnale $z(t)$ è a energia finita e la sua energia si può calcolare come l'integrale del modulo quadro della sua trasformata di Fourier. Poichè le tre repliche di $S(f)$ che compaiono nell'espressione di $Z(f)$ sono separate in frequenza:

$$|Z(f)|^2 = \frac{1}{36}36T^2 p_{\frac{1}{6T}}(f) + \frac{9/4}{(9+4\pi^2)^2}36T^2\left[p_{\frac{1}{6T}}\left(f - \frac{1}{3T}\right) + p_{\frac{1}{6T}}\left(f + \frac{1}{3T}\right)\right]$$

L'energia vale quindi:

$$E(z) = \frac{1}{6T}T^2 + 2\cdot 6T\frac{9/4}{(9+4\pi^2)^2} = \frac{T}{6} + \frac{27T}{(9+4\pi^2)^2}$$