1. Numeri complessi

Vincenzo Recupero
Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

Versione: 7 marzo 2013
Revisione: 30 gennaio 2020

Metodi Matematici per l'Ingegneria
05BQXMQ, 06BQXOA (Aa-Di), 06BQXOD, 06BQXPC (Aa-Di)

Dispense di Analisi

1 Numeri complessi

1.1 Definizione

La *notazione complessa* per la rappresentazione dei vettori del piano $\mathbb{R}^2$ consiste nel porre

$$1 := \mathbf{e_1} = (1, 0),$$
$$i := \mathbf{e_2} = (0, 1),$$

e

$$x := (x, 0), \qquad x \in \mathbb{R},$$

cioè si identifica $\mathbb{R}$ con l'asse delle ascisse e si denota con i il vettore $(0, 1)$. In questo modo ogni vettore $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto nella forma (vedi Figura 1)

$$\mathbf{u} = (x, y) = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + y(0, 1) = x + yi,$$

dove $y(0, 1) = yi$ è la moltiplicazione dello scalare $y \in \mathbb{R}$ per il vettore $i = (0, 1)$. Si usa anche scrivere iy piuttosto che yi.

Quindi da un punto di vista insiemistico l'insieme dei numeri complessi è esattamente il piano $\mathbb{R}^2$. Questi due insiemi differiscono però dal punto di vista algebrico, perché tra i numeri complessi si definisce un nuova operazione di prodotto che vediamo nella seguente definizione formale.

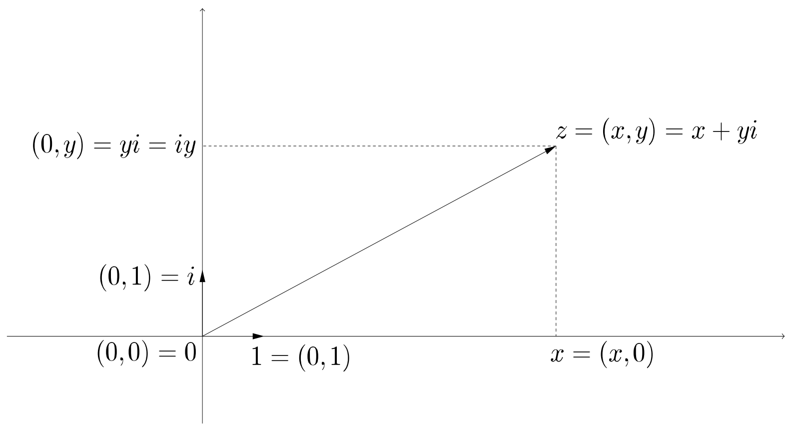

Figura 1: Notazione complessa nel piano

Definizione 1.1. Poniamo

$$x := (x, 0) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

(in particolare $1 = (1, 0)$, $0 = (0, 0)$) e

$$i := (0, 1) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

la cosiddetta *unità immaginaria.* Definiamo $\mathbb{C}$ come l'insieme $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \big\{ z = (x, y) = x + yi \ : \ x, y \in \mathbb{R} \big\} \tag{1.3}$$

dotato delle seguenti operazioni di *somma* e *prodotto*: se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + y_2 i,$$

si definisce

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \tag{1.4}$$
$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i. \tag{1.5}$$

Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono chiamati *numeri complessi.*

Osserviamo che la somma di numeri complessi (1.4) non è altro che la somma di vettori, ottenuta per mezzo della legge del parallelogramma. L'unico concetto nuovo è il prodotto, ma non è necessario memorizzare la complicata formula (1.5), perché, come vedremo tra poco, c'è un modo semplice di ricordarla.

Se un numero complesso z è del tipo $z = (x, 0)$, allora si usa dire che è reale (o che ha parte immaginaria nulla), in accordo con l'identificazione (1.1).

Osservazione 1.1. Prima di proseguire andrebbe verificato che nella formula (1.5), se $z_1 = (x_1, 0) = x_1$, allora la formula $z_1 z_2 = x_1 z_2$ non è altro che il prodotto tra lo scalare $x_1 \in \mathbb{R}$ ed il vettore z_2, in modo che non ci sia possibilità di confondersi. È così: infatti se $z_1 = (x_1, 0)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ allora

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - 0y_2, x_1 y_2 + 0x_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2) = x_1(x_2, y_2) = \lambda z_2.$$

In particolare se anche z_2 è reale, cioè $z_2 = (x_2, 0) = x_2$, otteniamo

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - 0, x_1 0 - x_2 0) = (x_1 x_2, 0) = x_1 x_2$$

per cui il prodotto tra due numeri complessi che stanno sull'asse x (identificato con $\mathbb{R}$), coincide col prodotto di numeri reali.

La somma ed il prodotto di numeri complessi soddisfano le solite proprietà *commutativa*, *associativa* e *distributiva*. Verificarlo è facile, ma noioso, per cui ci limitiamo ad enuciarle in modo preciso: se $z_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3$, si ha

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{la somma è commutativa} \tag{1.6}$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \text{il prodotto è commutativo} \tag{1.7}$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \text{la somma è associativa} \tag{1.8}$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \quad \text{il prodotto è associativo} \tag{1.9}$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \text{proprietà distributiva} \tag{1.10}$$

Notiamo che $1 = (1, 0)$ è l'*elemento neutro per il prodotto*, mentre $0 = (0, 0)$ è l'*elemento neutro per la somma*, questo vuol dire che:

$$1z = z1 = z \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad\qquad 0 + z = z + 0 = z \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.11}$$

ed è possibile verificare che 1 e 0 sono gli unici numeri con tali proprietà.. La formula

$$z = x + yi = x + iy \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

può ora essere giustificata dalla commutatività del prodotto. Al solito le *potenze intere positive* si definiscono in modo induttivo ponendo

$$z^0 := 1, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.12}$$

$$z^n := \underbrace{zz \cdots z}_{\text{n volte}}, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1. \tag{1.13}$$

Storicamente i numeri complessi sono stati introdotti per trovare radici di ogni polinomio non costante. Infatti proveremo il *Teorema fondamentale dell'algebra*, che afferma che ogni polinomio non costante ha almeno una radice complessa. Al momento possiamo solo verificare che il semplice polinomio $z^2 + 1$ ha una radice, infatti si ha la seguente

Proposizione 1.1. $i^2 = -1$.

Dimostrazione. Grazie alla formula (1.5) si ha $i^2 = ii = -1 + i0 = -1$. □

Per esercizio si verifichi che anche $-i$ è una radice di z^2+1, cioè $(-i)^2 = 1$.

Possiamo ora vedere come ricordare la formula (1.5) usando la scrittura

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

solitamente detta *forma algebrica* del numero complesso $z = (x, y)$ (cioè la somma dei vettori x e yi). Infatti grazie alle proprietà algebriche ed alla Proposizione 1.1 possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iiy_1y_2 \\ &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Lo stesso si può ovviamente fare per la somma

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

In altre parole è lecito fare i conti in $\mathbb{C}$ scrivendo prima i numeri complessi in forma algebrica, usando quindi le solite regole algebriche (come in $\mathbb{R}$), e tenendo conto che $i^2 = ii = -1$.

1.2 Parti reale ed immaginaria (coordinate)

La prima e la seconda componente di un numero complesso $z = (x, y) = x + iy$ sono chiamate rispettivamente *parte reale di z* e *parte immaginaria di z*:

$$\boxed{\begin{cases}\operatorname{Re} z := x \\ \operatorname{Im} z := y\end{cases}, \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.}$$

Coerentemente l'asse delle ascisse viene chiamato *asse reale* e l'asse delle ordinate è detto *asse immaginario*. I punti dell'asse immaginario sono detti *numeri immaginari puri*. Il fatto seguente è banale ma fondamentale:

$$\boxed{z = x + iy = 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re} z = x = 0 \ \text{ e } \ \operatorname{Im} z = y = 0.}$$

Qui il termine "e" va intesa nel senso matematico di *intersezione*: x e y devono essere entrambi nulli.

1.3 Opposto e inverso

Definiamo per ogni $z = x + iy$

$$-z := (-1)z = -x - iy$$

(come si fa in $\mathbb{R}$). Al solito si pone $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$. Quindi abbiamo che

$$z - z := z + (-z) = 0$$

cioè $-z$ è l'*opposto di z*. I punti z e $-z$ sono simmetrici rispetto all'origine. Si ha anche

$$nz = \underbrace{z + \cdots + z}_{\text{n volte}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora, se $z = x + iy \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo l'*inverso di* z (e lo denotiamo con z^{-1} o $1/z$) ponendo

$$z^{-1} := \frac{1}{z} := \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{1.15}$$

Questa definizione è motivata dall'identità

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1, \tag{1.16}$$

che si può verificare con un conto diretto (si osservi che prima di introdurre (1.15) a priori ancora non sapevamo dell'esistenza di un numero z^{-1} per cui vale effettivamente (1.16)). È possibile verificare che l'opposto e l'inverso sono unici. Vedremo dopo che esiste una maniera semplice di ricordare la definizione (1.15) di z^{-1}. Ora osserviamo che dall'identità $i^2 = ii = -1$ si ricava subito che $-i$ è l'inverso di i:

$$\frac{1}{i} = i^{-1} = -i.$$

Al solito si usa scrivere

$$\frac{z}{w} := z\frac{1}{w} \qquad z, w \in \mathbb{C},\ w \neq 0,$$

e, come per i numeri reali, si può controllare che se $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ e $w_1, w_2 \neq 0$ allora

$$\frac{z_1}{w_1} + \frac{z_2}{w_2} = \frac{z_1w_2 + z_2w_1}{w_1w_2}.$$

È possibile ora definire le *potenze intere negative di* z ponendo

$$z^m := \frac{1}{z^{-m}}, \qquad z \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},\ m < 0. \tag{1.17}$$

Si osservi che le proprietà (1.6)-(1.10) implicano che valgono in $\mathbb{C}$ le solite regole per calcolare somme e prodotti che si hanno in $\mathbb{R}$. Richiamiamone due.

Proposizione 1.2. *Se* $z, w \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *allora*

(a) $(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$ *dove* $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *(formula del binomio).*

(b) $z^n - w^n = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1})$.

Dimostrazione. Come in $\mathbb{R}$. □

Se nella proposizione precedente si prende ad esempio $n = 2$, si trovano le formule $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$, $z^2 - w^2 = (z-w)(z+w)$, valide per ogni $z, w \in \mathbb{C}$.

Un'altra consequenza delle proprietà fin ora viste è la ben nota equivalenza valida per ogni $z, w \in \mathbb{C}$:

$$zw = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad [\ z = 0 \ \text{ oppure } \ w = 0\ ]$$

cioè il prodotto di z e w è uguale a zero se e solo se *almeno uno* dei numeri z e w è zero: il termine "oppure" va intesa nel senso matematico di *unione*: potrebbero essere zero entrambi o uno solo sei due.

Osservazione 1.2. *Non ha senso considerare disuguaglianze tra numeri complessi*, infatti supponiamo per assurdo che sia possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine tra tutti i numeri che sia coerente con l'operazione di prodotto: ciò significa che vogliamo valga l'implicazione $[\ a, b > 0 \quad \Longrightarrow \quad ab > 0\ ]$. Allora ci sarebbero due possibilità: o i è positivo, o $-i$ è positivo; nel primo caso si avrebbe allora $-1 = i^2 = ii > 0$, mentre nel secondo $-1 = i^2 = ii = (-i)(-i) > 0$. Per cui in entrambi i casi risulta $-1 > 0$ che come sappiamo è una contraddizione (infatti $1 = 11 = (-1)(-1) > 0$). ♢

1.4 Modulo (distanza dall'origine)

Dato un numero complesso $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, possiamo calcolare la sua distanza dall'origine. La chiamiamo *modulo di* z e la denotiamo con

$$\boxed{|z| := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.}$$

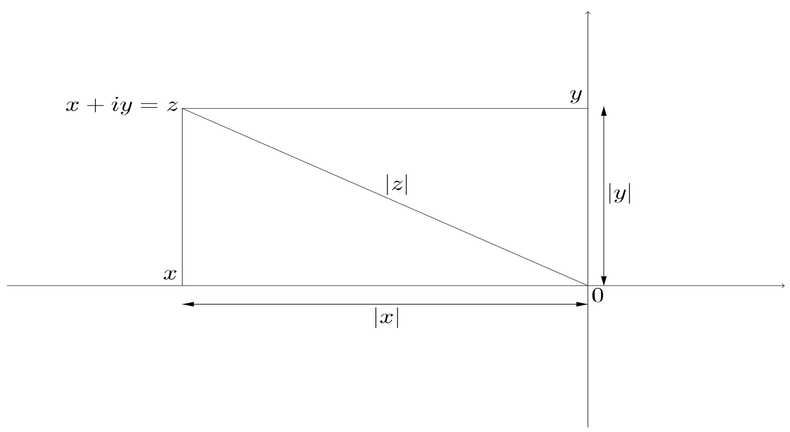

Figura 2: Modulo

Perciò se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ troviamo

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

che rappresenta la *distanza tra* z_1 *e* z_2.

Le formule seguenti valgono per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{(disuguaglianza triangolare)},} \tag{1.18}$$

$$|\lambda z| = |\lambda||z|, \tag{1.19}$$

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |x| = |\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \\ |y| = |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \end{cases}. \tag{1.20}$$

Queste proprietà sono geometricamente chiare: la disuguaglianza triangolare significa che il vettore $z + w$ è piu corto della somma delle lunghezze dei vettori z e w (Figura 3); la formula (1.19) dice come varia la lunghezza di un vettore quando

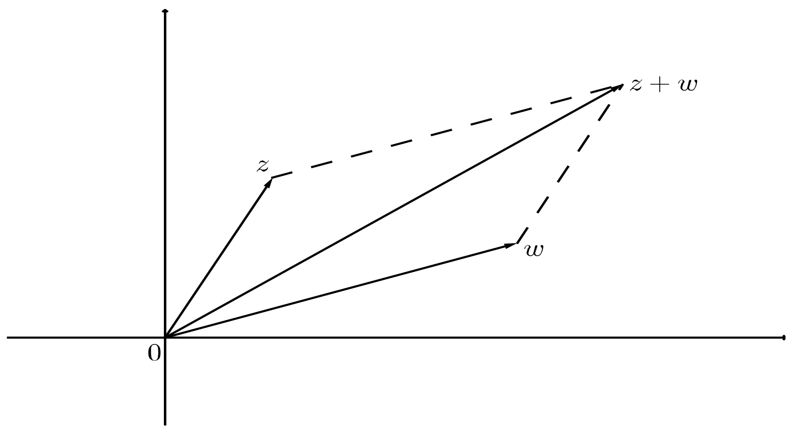

Figura 3: Disuguaglianza triangolare

viene moltiplicato per uno scalare; L'ultima proprietà (1.20) significa che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è più lungo dei cateti.

Queste tre formule si potrebbero anche provare analiticamente nel modo seguente: la disuguaglianza triangolare si può verificare prendendo i quadrati di entrambi i membri e svolgendo i calcoli. La formula (1.19) si può invece controllare con dei semplici conti. L'ultima proprietà (1.20) segue analiticamente dal fatto che $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$. La formula (1.19) vale anche se λ è complesso e si potrebbe verificare svolgendo i calcoli, ma lo vedremo in seguito in modo diverso.

Osserviamo che (1.18) si può anche scrivere come

$$|z - w| \leqslant |z| + |w| \tag{1.21}$$

infatti $|z-w| = |z+(-w)| \leqslant |z|+|-w| = |z|+|w|$ (anche qui il significato geometrico è evidente: fare un disegno). Infine abbiamo la seguente importante disuguaglianza

$$\boxed{\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w| \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}} \tag{1.22}$$

che può essere verificata prendendo il quadrato di ambo i membri (è lecito perché sono numeri reali positivi). Lasciamo questo conto come esercizio e proponiamo una procedura differente che ha il vantaggio di poter essere usata anche in contesti più generali:

$$\begin{aligned}
||z| - |w|| \leqslant |z - w| \quad &\iff \quad -|z - w| \leqslant |z| - |w| \leqslant |z - w| \\
&\iff \quad \begin{cases} -|z - w| \leqslant |z| - |w| \\ |z| - |w| \leqslant |z - w| \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} |w| \leqslant |z| + |z - w| \\ |z| \leqslant |z - w| + |w| \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} |w - z + z| \leqslant |z| + |z - w| \\ |z - w + w| \leqslant |z - w| + |w| \end{cases}
\end{aligned}$$

e le ultime due disuguaglianze sono vere grazie alla disuguaglianza triangolare. Si può quindi tornare indietro con le equivalenze.

1.5 Coniugazione (riflessione rispetto all'asse reale)

Se riflettiamo un punto $z = x + iy$ rispetto all'asse reale, otteniamo il punto $x - iy$ (vedi Figura 4), che chiamiamo *coniugato di* z e denotiamo con

$$\boxed{\overline{z} := x - iy, \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.}$$

Naturalmente vale l'dentità

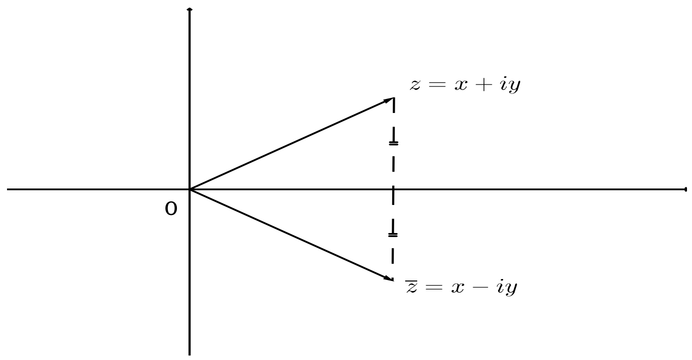

Figura 4: Coniugazione

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

e tramite un calcolo diretto si può verificare che

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad & \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}, \qquad & \overline{z_1 / z_2} &= \overline{z_1} / \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Valgono le seguenti formule il cui significato geometrico è illustrato in Figura 5:

$$\boxed{\operatorname{Re} z = x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.} \tag{1.23}$$

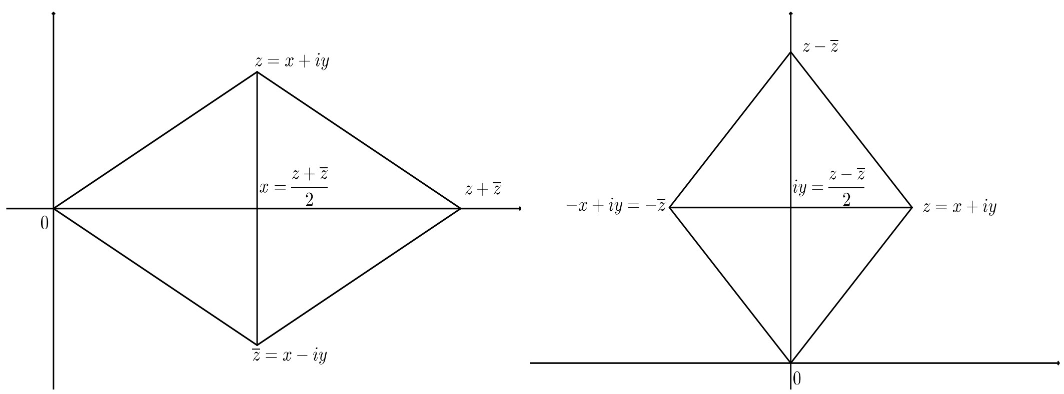

Figura 5: $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Esempio 1.1. Scrivere la formula $x^2 + xyi$ come una funzione di z e $\overline{z}$.
Sostituiamo le formule (1.23) in $x^2 + xyi$ ed otteniamo

$$x^2 + xyi = x(x + iy) = \frac{z + \overline{z}}{2} z = \frac{z^2}{2} + \frac{z\overline{z}}{2}.$$

♡

La seguente formula è utilissima

$$\boxed{|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}} \tag{1.24}$$

e permette di scrivere il quoziente di due numeri complessi in forma algebrica, infatti se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, si ha

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

In particolare, se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Naturalmente non bisogna memorizzare tali formule, ma solo capire la procedura che si è usata, come mostrato nel seguente esempio.

Esempio 1.2. Scrivere in forma algebrica il numero $z = \dfrac{3 + 2i}{1 - 2i}$.
La procedura vista prima consiste nel moltiplicare e dividere per il coniugato del denominatore, quindi

$$z = \frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-1 + i4}{|1 + 2i|^2} = -\frac{1}{5} + i\frac{8}{5}.$$

♡

2 Forma polare od esponenziale

Se $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$ allora $z = |z|\dfrac{z}{|z|}$, e $\dfrac{z}{|z|}$ ha modulo 1, quindi esiste $\theta \in \mathbb{R}$ per cui

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

infatti $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (vedi Figura 6). Si dice che il numero reale θ è *un argomento di* z e l'insieme di tutti i possibili argomenti di z si denota con $\arg(z)$:

$$\operatorname{Arg}(z) := \big\{\theta \in \mathbb{R} \;:\; z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\big\} \qquad (z \neq 0). \tag{2.1}$$

D'altra parte si dice *argomento principale di* z l'unico argomento di z appartenente a $]-\pi, \pi]$ e viene denotato con $\arg(z)$. Poniamo

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}.} \tag{2.2}$$

Allora se $|z| = r$ si scrive

$$\boxed{z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

che è anche chiamata *forma polare (o esponenziale) di* z.

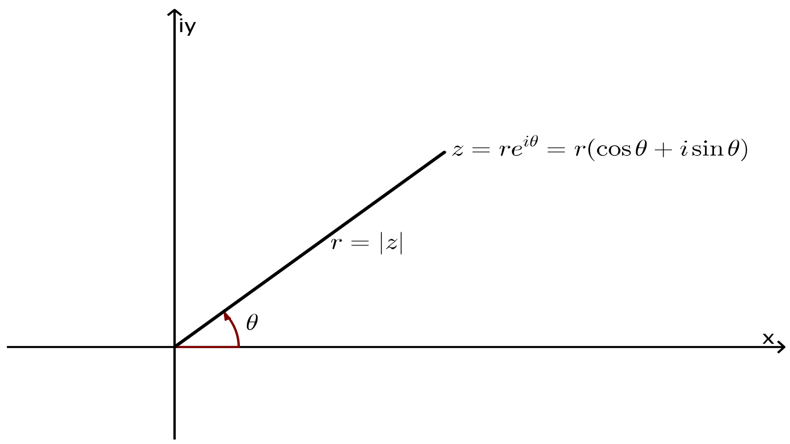

Figura 6: Forma polare (o esponenziale)

Esempio 2.1. Scrivere $z = i\sqrt{3} - 1$ in forma polare.
Il modulo di z è $|z| = \sqrt{4} = 2$, quindi

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

♡

Proposizione 2.1. *Per ogni $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ si ha*

(a) $|e^{i\theta}| = 1$

(b) $e^{i\theta} = e^{i\eta} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \eta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

(c) $e^{i\theta}e^{i\eta} = e^{i(\theta+\eta)}$

(d) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$

(e) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ *per ogni $n \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione.

(a) $|e^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

(b) È una consequenza diretta della periodicità delle funzioni seno e coseno.

(c) Grazie alle formule di addizione si trova

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\eta} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\eta + i\sin\eta) \\ &= (\cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta) + i(\sin\theta\cos\eta + \sin\eta\cos\theta) \\ &= \cos(\theta+\eta) + i\sin(\theta+\eta) = e^{i(\theta+\eta)}. \end{aligned}$$

(d) Poiché il coseno è pari ed il seno è dispari, si trova $\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$. Inoltre, grazie a (c) ad esempio, si ha $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$, quindi $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$.

(e) Se $n > 0$ è sufficiente applicare n volte la formula (c) con $\eta = \theta$. Questo, assieme a (d), fornisce il risultato per $n < 0$.

□

La proposizione precedente ha molte consequenze utili, vediamole. Se

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

allora da (c) si ottiene che $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, cioè

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2 \big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big],}$$

in altri termini

il prodotto di due numeri complessi si ottiene
moltiplicando i moduli e sommando gli argomenti.

In particolare

$$\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},}$$

Utilizzando (d), per $z_2 \neq 0$, otteniamo anche che

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\big[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\big],}$$

così

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0.}$$

Infine, se $n \in \mathbb{Z}$, dalla formula (e) deduciamo le *formule di De Moivre*:

$$\boxed{z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \Longrightarrow \quad z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)).}$$

Questo fatto fornisce un metodo semplice per trovare le radici n-esime complesse di un numero complesso, illustrato nella prossima

Proposizione 2.2. *Siano dati $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, ed $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Esistono esattamente n soluzioni dell'equazione (nell'incognita z):*

$$z^n = w.$$

Se $w = re^{i\phi}$, $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$, queste soluzioni sono

$$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.3}$$

I numeri $z_0, \ldots, z_{n-1}$ vengono chiamato radici n-esime (complesse) di w *e geometricamente rappresentano i vertici di un poligono regolare con n lati inscritto nella circonferenza di centro* 0 *e raggio $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{|w|}$.*

Dimostrazione. Scriviamo z e w in forma esponenziale:

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad w = re^{i\phi},$$

dove $\rho, r > 0$ e $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} z^n = w \quad &\iff \quad \rho^n e^{in\theta} = re^{i\phi} \quad \iff \quad \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \phi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta = \frac{\phi+2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta = \frac{\phi+2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases} \\ &\iff \quad z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

□

Piuttosto che ricordare la formula (2.3), è utile capire il metodo usato per la sua dimostrazione ed il significato geometrico delle n radici. Vediamo un esempio.

Esempio 2.2. Trovare le radici quarte complesse di 4, in altre parole trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = 4$.
Scriviamo z e 4 in forma polare:

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0, \ \theta \in \mathbb{R}, \qquad 4 = 4e^{i0}.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} z^4 = 4 \quad &\iff \quad \rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i0} \quad \iff \quad \begin{cases} \rho^4 = 4, \\ 4\theta = 0 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{4}, \\ 4\theta = 0 + 2k\pi, \ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{2}, \\ \theta = \dfrac{k}{2}\pi, \ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{2}, \\ \theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi \end{cases} \quad \iff \quad z = \sqrt{2}, \ z = i\sqrt{2}, \ z = -\sqrt{2}, \ z = -i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Si noti che, in questo caso particolare, la radice reale $z = \sqrt{2}$ è evidente, quindi le altre tre radici si possono dedurre senza effettuare conti, ricordando che devono costituire, assieme a $\sqrt{2}$, i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$ (vedi Figura 7). ♡

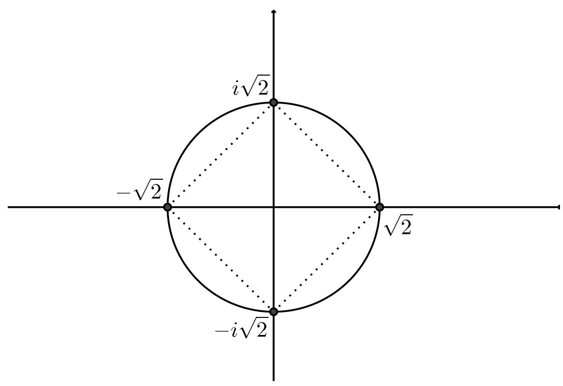

Figura 7: Radici quarte di 4

Siamo ora in grado di trovare le radici complesse di ogni polinomio di grado 2.

Proposizione 2.3. *Siano* $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, *tali che* $b^2 - 4ac \neq 0$. *Allora l'equazione (nell'incognita* $z \in \mathbb{C}$*)*

$$az^2 + bz + c = 0$$

ha due soluzioni date dalla formula

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm R}{2a} \qquad \text{dove } R \in \mathbb{C} \text{ è tale che } R^2 = b^2 - 4ac$$

cioè R *è una delle due radici complesse del numero* $b^2 - 4ac$.

Dimostrazione. Completando i quadrati otteniamo

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right] \end{aligned}$$

quindi, se $R \in \mathbb{C}$ è tale che $R^2 = b^2 - 4ac$, deduciamo che

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{R}{2a} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{-b \pm R}{2a}. \end{aligned}$$

□

La notazione $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ è anche frequente, ma va usata con cautela perché il simbolo $\sqrt{b^2 - 4ac}$ è per noi privo di significato in $\mathbb{C}$, e andrebbe inteso come l'insieme delle due radici complesse di $b^2 - 4ac$, un significato diverso dalla radice $\sqrt{\ }$ aritmetica usata nel corso di Analisi 1. In queste note non useremo questo simbolo con questo significato "complesso", ma se $r \geqslant 0$, con $\sqrt{r}$ continueremo ad intendere l'unico numero reale positivo x tale che $x^2 = r$, cioè l'unica soluzione reale positiva dell'equazione $x^2 = r$.

Esempio 2.3. Trovare le radici del polinomio $4z^2 + 4z + 1 - i$.
Applichiamo la formula risolutiva precedente con $a = 4$, $b = 4$, $c = 1 - i$. Si ha $b^2 - 4ac = 16 - 16(1 - i) = 16i \neq 0$. Per esercizio si trovi che le radici quadrate complesse di $16i$ sono $2\sqrt{2}(1 + i)$ e $-2\sqrt{2}(1 + i)$ (una l'opposto dell'altra). Quindi le due radici del trinomio di secondo grado assegnato sono

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}(1 + i)}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}(1 + i)}{4}$$

cioè $z_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $z_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{4} - i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ♡

3 Funzioni elementari complesse

In questo paragrafo definiamo le principali funzioni elementari $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ usate in ambito complesso. Ricordiamo che se A e B sono due insiemi, una *funzione* (o un'*applicazione*) $f : A \longrightarrow B$ (con dominio A e codominio B) è una "regola" (o "legge") che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $b \in B$. Ricordiamo anche che in generale il codominio è diverso dall'*immagine di* f, che è l'insieme $f(A) := \{f(a) \ : \ a \in A\} \subseteq B$ dei valori assunti da f. Il codominio viene stabilito a priori e fa parte della definizione di f.

3.1 Esponenziale complesso

La *funzione esponenziale* è definita come

$$\boxed{e^z := e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},}$$

dove e^x è l'esponenziale reale ($x \in \mathbb{R}$), cioè l'esponenziale dell'Analisi 1, mentre $e^{iy} := \cos y + i \sin y$ è stato definito nel paragrafo precedente nella formula (2.2). Un'altra notazione che si usa è $\exp(z)$. La funzione $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è forse la più importante tra quelle studiate in questo corso.

La seguente proposizione si deduce facilmente dalla Proposizione 2.1:

Proposizione 3.1. *Valgono le seguenti proprietà.*

(a) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$,

(b) $e^z \neq 0$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$

(c) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ *per ogni* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

(d) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

(e) $e^{-z} = (e^z)^{-1}$

(f) $(e^z)^n = e^{nz}$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *ed* $n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione.

(a) $|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x|e^{iy}| = e^x 1 = e^x$.

(b) Segue da (a).

(c) Se $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_1} = e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_1} \\ &= e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(d) $\overline{e^z} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^x}\,\overline{e^{iy}} = e^x e^{-iy} = e^{\overline{z}}$.

(e) Da (c) segue che $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, quindi $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.

(f) Segue da (c) e (d).

□

Esempio 3.1. Risolvere l'equazione complessa $e^z = 1$.

Se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, allora

$$e^z = 1 \iff e^x e^{iy} = 1e^{i0} \iff \begin{cases} e^x = 1, \\ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff z = 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Perciò

$$\boxed{e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}.}$$

♡

Utilizzando lo stesso metodo dell'esempio precedente, possiamo mostrare la seguente proprietà, che è anche chiamata *periodicità dell'esponenziale complesso* (di periodo $2\pi i$)

Proposizione 3.2. *Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora*

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Se $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, allora

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \iff \begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2}, \\ y_1 = y_2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff x_1 + iy_2 = x_2 + i(y_2 + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z},$$

che è cio che volevamo verificare. □

3.2 Funzioni trigonometriche ed iperboliche complesse

Prendiamo un numero reale $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo le identità

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Sommando e sottraendo queste uguaglianze troviamo le cosiddette *formule di Eulero*:

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad x \in \mathbb{R}.} \tag{3.1}$$

Motivati da queste formule definiamo le funzioni *coseno complesso* e *seno complesso*:

$$\boxed{\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbb{C}.} \tag{3.2}$$

Esempio 3.2. Trovare gli zeri delle funzioni $\cos z$ e $\sin z$.
Si ha

$$\cos z = 0 \iff e^{iz} + e^{-iz} = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz}$$
$$\iff e^{iz} = e^{i\pi} e^{-iz} \iff e^{iz} = e^{i\pi - iz}.$$

Ora possiamo quindi utilizzare la Proposizione 3.2 oppure possiamo procedere direttamente ponendo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, e scrivendo

$$\begin{aligned} e^{iz} = e^{i\pi - iz} \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{i(x+iy)} = e^{i\pi - i(x+iy)} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-y+ix} = e^{i(\pi-x)+y} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{-y}e^{ix} = e^{y}e^{-i(\pi-x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} e^{-y} = e^{y} \\ x = (\pi - x) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} e^{2y} = 1 \\ 2x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

quindi

$$\boxed{\cos z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

In modo completamente analogo si trova che

$$\boxed{\sin z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Si osservi che gli zeri delle funzioni complesse $\sin z$ e $\cos z$ sono esattamente gli stessi delle analoghe funzioni reali. Questa *non è una regola generale*, infatti, ad esempio, nell'esempio 3.1 con l'equazione $e^z - 1 = 0$ le cose sono completamente differenti: risolvere l'analoga equazione reale $e^x - 1 = 0$ e fare un confronto col caso complesso. ♡

Esempio 3.3. Verificare che

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

♡

Le *funzioni iperboliche complesse* sono definite sostituendo x con z nella definizione delle funzioni iperboliche reali $\cosh x$ e $\sinh x$:

$$\boxed{\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad z \in \mathbb{C}.} \tag{3.4}$$

La verifica delle seguenti affermazioni è un esercizio molto utile:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \tag{3.5}$$

$$\cosh z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{\pi i}{2} + k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.6}$$

$$\sinh z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = k\pi i. \tag{3.7}$$

4 Logaritmi e potenze complesse

Sappiamo dall'Analisi 1 che la funzione inversa dell'esponenziale reale $\mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[\, : t \longmapsto e^t$ è la funzione logaritmo (naturale) $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \log x$. In altri termini se $x \in \mathbb{R}$ è dato, allora $\log x := t$ è l'unica soluzione (reale) t dell'equazione $e^t = x$.

Passando in campo complesso già sappiamo che se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è dato, allora l'equazione complessa $e^w = z$ non ha un'unica soluzione complessa $w \in \mathbb{C}$, come ci hanno mostrato l'Esempio 3.1 e la Proposizione 3.2. Siamo quindi condotti a dare la seguente

Definizione 4.1. Se $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si dice *logaritmo complesso di* z l'insieme $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}$ delle soluzioni complesse $w \in \mathbb{C}$ dell'equazione $e^w = z$. In altri termini

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}} z := \{w \in \mathbb{C} \ : \ e^w = z\}.$$

Sottolineiamo il fatto che $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}} z$ non è un numero complesso, ma è un insieme di numeri complessi. Si usa anche dire che $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}$ è una *funzione multivoca* o *a più valori*, e va maneggiata con cura: si noti ad esempio che $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(e^z) \neq \{z\}$ (cfr. Proposizione 3.2). Abbiamo gli strumenti per calcolare esplicitamente $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}} z$ quando $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Per comodità scriviamo z in forma esponenziale $z = |z|e^{i\theta}$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$ e cerchiamo w in forma cartesiana $w = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} e^w = z \quad &\iff \quad e^a e^{ib} = |z|e^{i\theta} \quad \iff \quad \begin{cases} e^a = |z|, \\ b = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} a = \log|z|, \\ b = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

(dove $\log|z|$ è il logaritmo naturale di $|z| > 0$), per cui

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}} z = \{\log|z| + i(\theta + 2k\pi) \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{se } z = |z|e^{i\theta} \neq 0,$$

o, volendo utilizzare la notazione $\mathrm{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \ : \ z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}$ introdotta in (2.1),

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}} z = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z) := \{\log|z| + i\phi \ : \ \phi \in \mathrm{Arg}(z)\} \qquad \forall z \neq 0.$$

Ricordando poi che l'argomento principale $\arg(z)$ di $z \neq 0$ è definito come l'unico $\theta_p \in \,]-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|(\cos\theta_p + i\sin\theta_p)$, si può definire il cosiddetto *logaritmo principale*:

Definizione 4.2. Se $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si dice *logaritmo principale di* z il numero complesso $\log z := \log|z| + i\arg(z)$, dove $\arg(z)$ è l'unico $\theta_p \in \,]-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|(\cos\theta_p + i\sin\theta_p)$ e dove $\log|z|$ è il logaritmo naturale del numero reale $|z| > 0$ (dell'Analisi 1).

Si osservi che grazie alla precedente Definizione 4.2 risulta definita una funzione (univoca) complessa $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} \ : \ -\pi < \mathrm{Im}\, w \leqslant \pi\}$ che è la funzione inversa dell'esponenziale complesso <u>ristretto alla striscia</u> $\{w \in \mathbb{C} \ : \ -\pi < \mathrm{Im}\, z \leqslant \pi\}$ (l'esponenziale complesso è iniettivo su tale striscia), per cui si ha $e^{\log z} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, e $\log(e^z) = z$ se $z \in \{w \in \mathbb{C} \ : \ -\pi < \mathrm{Im}\, w \leqslant \pi\}$ (meglio non provare a memorizzare queste relazioni ma ricavarle quando servono). Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, e $z = x$ allora $\log z = \log x$ coincide con il logaritmo naturale dell'Analisi 1. Infine è un utile esercizio verificare che $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si ha $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$.

A questo punto è naturale dare la seguente definizione.

Definizione 4.3. Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $w \in \mathbb{C}$ si pone
$$z^w := e^{w \log z}.$$

Se in particolare $w = r \in \mathbb{R}$, si ha
$$z^r = e^{r \log |z| + ir \arg(z)} = e^{r \log |z|} e^{ir \arg(z)} = |z|^r e^{ir \arg(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \forall r \in \mathbb{R},$$
per cui
$$|z^r| = |z|^r \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \forall r \in \mathbb{R}.$$
Nel caso in cui poi $w = n \in \mathbb{Z}$ si ritrovano le potenze intere di z definite in precedenza.

5 Esercizi

Esercizi (tratti dalle dispense di Analisi Complessa (vecchio ordinamento)).

1. Scrivere i seguenti numeri complessi in forma algebrica.
   a) $(2 - 3i)(-2 + i)$
   b) $(3 + i)(3 - i)(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} i)$
   c) $\dfrac{1 + 2i}{3 - 4i} + \dfrac{2 - i}{5i}$
   d) $\dfrac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)}$
2. Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare.
   a) i
   b) -1
   c) $1 + i$
   d) $i(1 + i)$
   e) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$
   f) $\sin \alpha + i \cos \alpha$
3. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi
   a) $\dfrac{1}{1 - i} + \dfrac{2i}{i - 1}$
   b) $1 + i - \dfrac{i}{1 - 2i}$
4. Verificare che se $|z| = 1$ allora $\left| \frac{3z - i}{3 + zi} \right| = 1$
5. Risolvere le seguenti equazioni complesse.
   a) $z^2 - 2z + 2 = 0$
   b) $z^2 + 3iz + 1 = 0$

c) $z|z| - 2z + i = 0$
d) $|z|^2 z^2 = i$
e) $z^2 + i\overline{z} = 1$
f) $z^3 = |z|^4$

6. Verificare che $1+i$ è una radice di $z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$ e trovare tutte le altre radici (Suggerimento: usare (e provare) il fatto che se z è una radice di un polinomio con coefficienti *reali*, allora anche $\overline{z}$ ne è una radice).

7. Calcolare z^2, z^9, z^{20} per i seguenti numeri complessi z

   a) $\dfrac{1-i}{i}$
   b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i}$

8. a) Trovare le radici terze complesse di $-i$
   b) Trovare le radici quinte complesse di 1
   c) Trovare le radici quadrate complesse di $2 - 2i$

9. Trovare $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ nei casi seguenti

   a) $f(z) = z^3 + z + 1$
   b) $f(z) = \dfrac{3z}{z - \overline{z}}$
   c) $f(z) = \dfrac{1}{|z|^2 + 3}$

10. Scrivere $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + 2ix(1-y)$ come una funzione di $z = x + iy$.

Risposte

1. a) $-1 + 8i$
   b) $2 + i$
   c) $-2/5$
   d) $i/2$

2. a) $e^{i\pi/2}$
   b) $e^{i\pi}$
   c) $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
   d) $\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$
   e) $e^{i\pi/2}$
   f) $\cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha)$

3. a) $\sqrt{5/2}$
   b) $\sqrt{13/5}$

4. Scrivere $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, sostituirla nell'espressione, e calcolare il modulo ricordando l'ipotesi $x^2 + y^2 = 1$.

5. a) $z = 1 \pm i$
   b) $z = i(-3 \pm \sqrt{13})/2$
   c) $z = i$ e $z = i(-1 - \sqrt{2})$
   d) $\pm\sqrt{2}(1 + i)/2$
   e) $\sqrt{7}/2 - i/2, -\sqrt{7}/2 - i/2,$
   f) $z = 0,\ z = 1, z = -1/2 \pm \sqrt{3}i/2$

6. $1 + i,\ 1 - i, 1, 2$

7. a) $z^2 = 2i,\ z^9 = -16(1 + i),\ z^{20} = -2^{10}$
   b) $z^2 = (1 - i\sqrt{3})/2,\ z^9 = i,\ z^{20} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$

8. a) $(\sqrt{3} - i)/2,\ i,\ -(\sqrt{3} + i)/2$
   b) $1,\ e^{2\pi i/5},\ e^{4\pi i/5},\ e^{-4\pi i/5},\ e^{-2\pi i/5}$
   c) $\sqrt[4]{8}e^{-\pi i/8},\ \sqrt[4]{8}e^{7\pi i/8}$

9. a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x + 1,\ v(x, y) = 3x^2y - y^3 + y$
   b) $u(x, y) = 3/2,\ v(x, y) = -3x/2y$
   c) $u(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 3),\ v(x, y) = 0$

10. $f(z) = \overline{z}^2 + 2iz.$

Modifiche dalla revisione del 18 marzo 2016 alla revisione del 30 gennaio 2020:

1. pag. 9: sono stati invertiti i significati di arg e di Arg, attenzione!
2. pag. 12: piccola modifica alla dimostrazione della Proposizione 2.2.
3. pag. 16: è stato aggiunto un paragrafo sulle funzioni logaritmo e potenza complesse.