Teoria ed Elaborazione dei Segnali - Appello 29 giugno 2023

(1) **1a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri una funzione $x(t)$ continua in t e che rappresenta un segnale deterministico reale ad energia finita e non nulla. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_1-t_2)$
b. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)\cdot\delta(t-t_2)$
c. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t-t_2-t_1)$
d. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)$

SOLUZIONE Grazie alle proprietà della funzione δ di Dirac (si vedano anche le lezioni relative al teorema del campionamento), la risposta corretta è la seguente: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)$

(2) **1b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri una funzione $x(t)$ continua in t e che rappresenta un segnale deterministico reale ad energia finita e non nulla. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t_1-t_2)$
b. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t_2-t_1)\cdot\delta(t-t_2)$
c. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2)$
d. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t_2-t_1)$

SOLUZIONE Grazie alle proprietà della funzione δ di Dirac (si vedano anche le lezioni relative al teorema del campionamento), la risposta corretta è la seguente: $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)\cdot\delta(t-t_2)$

(3) **2a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
b. se il processo è stazionario in senso stretto, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale.
c. $x(t)$ è detto "quasi determinato" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo
d. dato un processo casuale $x(t)$, la densitè spettrale di potenza è reale solo se il processo casuale $x(t)$ assume valori reali.

SOLUZIONE La risposta corretta è questa: "se il processo è stazionario in senso stretto, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale." in quanto i processi WSS hanno proprio come caratteristica il fatto che $R_x(t_1, t_2)$ dipenda solo da $\tau = t_2 - t_1$. Le altre risposte sono sbagliate, in quanto:

- $x(t)$ è detto "quasi determinato" se si tratta di un processo casuale con un'espressione analitica che dipende solo dal tempo e da variabili casuali, e questo non implica nessuna condizione rispetto al tempo.
- $x(t)$ è detto "ergodico" se le medie di insieme e quelle temporali sono uguali, e anche in questo caso ció non implica nessuna condizione in $x(t)$ rispetto al tempo.
- la densitè spettrale di potenza di un processo casuale è sempre una funzione reale, indipendentemente dalle caratteristiche del processo casuale $x(t)$

(4) **2b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
b. la densitè spettrale di potenza è sempre pari in f qualunque sia la tipologia di processo casuale $x(t)$.
c. affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni.
d. $x(t)$ è detto stazionario solo se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo

La risposta corretta è questa: "affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni" in quanto per i processi ergodici le medie di insieme e quelle temporali devono coincidere, e da ciò consegue il fatto che le una determinata media temporale deve avere un valore costante su tutte le realizzazioni. Le altre risposte sono sbagliate, in quanto:

- la condizione $x(t)$ stazionario non implica necessariamente che le sue realizzazioni siano costanti nel tempo, ma solo che le medie di insieme abbiano determinate condizioni di regolarità nel tempo
- $x(t)$ è detto "ergodico" se le medie di insieme e quelle temporali sono uguali, e questo non implica che le sue realizzazioni siano costanti nel tempo

- la densitè spettrale di potenza di un processo casuale può non essere pari se il processo casuale $x(t)$ è complesso

(5) **3a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2,5]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [6,9]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. $y[n]$ assume (al massimo) 8 valori non nulli
b. $y[n]$ assume (al massimo) 7 valori non nulli
c. $y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli
d. $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 1$

SOLUZIONE I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno entrambi quattro valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporti meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a sette. La risposta corretta è dunque "$y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli".

La risposta "$y[n]$ è certamente non nullo per $n = 1$" è anch'essa sbagliata, in quanto risulta evidente che in $n = 1$ i due segnali (opportunamente shiftati come richiesto dalla costruzione grafica della convoluzione) non si sovrappongono temporalmente.

(6) **3b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2,3]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [7,9]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

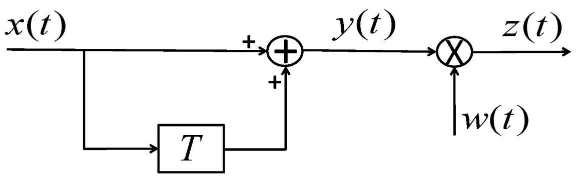
a. $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 0$
b. $y[n]$ assume (al massimo) 3 valori non nulli
c. $y[n]$ assume (al massimo) 4 valori non nulli
d. $y[n]$ assume (al massimo) 5 valori non nulli

SOLUZIONE I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno rispettivamente due e tre valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporti meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a quattro. La risposta corretta è dunque "$y[n]$ assume (al massimo) 4 valori non nulli".

La risposta "$y[n]$ è certamente non nullo per $n = 0$" è anch'essa sbagliata, in quanto risulta evidente che in $n = 0$ i due segnali (opportunamente shiftati come richiesto dalla costruzione grafica della convoluzione) non si sovrappongono temporalmente.

(7) **4a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il sistema riportato nella seguente figura:



dove $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, con $f_0 = \frac{1}{4T}$ e $\phi = \frac{3}{4}\pi$, e $w(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$. Calcolare lo spettro di potenza o lo spettro di energia (a seconda della tipologia del segnale) di $z(t)$. Quale delle seguenti risposte è corretta?

a. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 4T^2\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$
b. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 4T^2 p_{\frac{1}{4T}}(f)$
c. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 2T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$
d. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 8T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta
f. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 8T^2\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$

SOLUZIONE

I segnali $y(t)$ e $x(t)$ sono legati dalla relazione:

$$y(t) = x(t) + x(t-T)$$

Il sistema tra $x(t)$ e $y(t)$ è LTI, con risposta all'impulso reale:

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

La risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale è quindi a sua volta una sinusoide:

$$y(t) = |H(f_0)| \cos\left(2\pi f_0 t + \phi + \arg\{H(f_0)\}\right)$$

La funzione di trasferimento del sistema (trasformata di Fourier della risposta all'impulso) vale:

$$H(f) = 1 + \mathrm{e}^{-j2\pi fT} = \mathrm{e}^{-j\pi fT}\left(\mathrm{e}^{j2\pi fT} + \mathrm{e}^{-j2\pi fT}\right) = 2\mathrm{e}^{-j\pi fT}\cos(\pi fT)$$

Calcolata in $f_0 = \frac{1}{4T}$:

$$H(f_0) = 2\mathrm{e}^{-j\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-j\pi/4}$$

$H(f_0)$ ha quindi modulo pari a $\sqrt{2}$ e fase pari a -$\pi/4$:

$$y(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$$

In alternativa, si poteva cacolare $y(t)$ sostituendo $x(t)$ in $y(t) = x(t) + x(t-T)$:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) + \cos(2\pi f_0(t-T) + \phi)$$

e applicando la formula (disponibile nel formulario) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$y(t) = 2\cos(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \phi)\cos(\pi f_0 T) = 2\cos\left(2\pi\frac{1}{4T}t - \pi\frac{1}{4T}T + \frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\pi\frac{1}{4T}T\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2T}t - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$$

Il segnale $z(t) = y(t)\cdot w(t) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2T}t\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$ è un segnale ad energia finita, con trasformata di Fourier pari a:

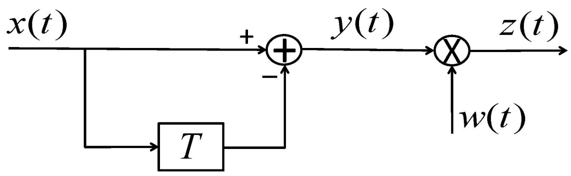
$$Z(f) = -\frac{\sqrt{2}}{2\jmath}\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right] * 4Tp_{\frac{1}{4T}}(f) = 2\jmath\sqrt{2}T\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) - p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$

Le due porte sono separate spettralmente. Lo spettro di energia vale quindi:

$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = 8T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$

(8) **4b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il sistema riportato nella seguente figura:



dove $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, con $f_0 = \frac{1}{4T}$ e $\phi = \frac{3}{4}\pi$, e $w(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$. Calcolare lo spettro di potenza o lo spettro di energia (a seconda della tipologia del segnale) di $z(t)$. Quale delle seguenti risposte è corretta?

a. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 4T^2\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$
b. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 4T^2 p_{\frac{1}{4T}}(f)$
c. Nessuna delle altre risposte è corretta
d. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 8T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$
e. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 2T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$

f. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 2T^2 \left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$

SOLUZIONE

I segnali $y(t)$ e $x(t)$ sono legati dalla relazione:

$$y(t) = x(t) - x(t-T)$$

Il sistema tra $x(t)$ e $y(t)$ è LTI, con risposta all'impulso reale:

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$$

La risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale è quindi a sua volta una sinusoide:

$$y(t) = |H(f_0)| \cos\left(2\pi f_0 t + \phi + \arg\{H(f_0)\}\right)$$

La funzione di trasferimento del sistema (trasformata di Fourier della risposta all'impulso) vale:

$$H(f) = 1 - \mathrm{e}^{-j2\pi fT} = \mathrm{e}^{-j\pi fT}\left(\mathrm{e}^{j2\pi fT} - \mathrm{e}^{-j2\pi fT}\right) = 2j\mathrm{e}^{-j\pi fT}\sin(\pi fT)$$

Calcolata in $f_0 = \frac{1}{4T}$:

$$H(f_0) = 2j\mathrm{e}^{-j\pi/4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{j3\pi/4}$$

$H(f_0)$ ha quindi modulo pari a $\sqrt{2}$ e fase pari a $3\pi/4$:

$$y(t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t + \pi\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$$

In alternativa, si poteva cacolare $y(t)$ sostituendo $x(t)$ in $y(t) = x(t) - x(t-T)$:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) - \cos(2\pi f_0(t-T) + \phi)$$

e applicando la formula (disponibile nel formulario) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$y(t) = -2\sin(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \phi)\sin(\pi f_0 T) = -2\sin\left(2\pi\frac{1}{4T}t - \pi\frac{1}{4T}T + \frac{3}{4}\pi\right)\sin\left(\pi\frac{1}{4T}T\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{2T}t - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2T}t + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$$

Il segnale $z(t) = y(t)\cdot w(t) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$ è un segnale ad energia finita, con trasformata di Fourier pari a:

$$Z(f) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\delta\left(f - \frac{1}{4T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right] * 4Tp_{\frac{1}{4T}}(f) = \sqrt{2}T\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$

Le due porte sono separate spettralmente. Lo spettro di energia vale quindi:

$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = 2T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$$

(9) **5a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{4}{T}(t - nT)\right).$$

Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| < \frac{9}{4T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$ che vale:

a. $y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
b. $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
c. $y(t) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$
d. $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$
e. $y(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$

f. $y(t) = 0 \;\; \forall t$

SOLUZIONE Il segnale periodico $x(t)$ ha come trasformata

$$X(f) = 2\frac{T}{4}\text{tri}\left(\frac{T}{4}f\right) \cdot \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\text{tri}\left(\frac{n}{4}\right)\cdot\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Poiché $H(f)$ é un filtro passabasso che annulla tutte le componenti per $|f| > \frac{9}{4T}$ restano in uscita solo le delta per $n = -2, -1, 0, 1, 2$ da cui

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f) + \text{tri}\left(\frac{1}{4}\right)\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \text{tri}\left(-\frac{1}{4}\right)\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \text{tri}\left(\frac{1}{2}\right)\delta\left(f - \frac{2}{T}\right) + \text{tri}\left(-\frac{1}{2}\right)\delta\left(f + \frac{2}{T}\right)\right]$$

Siccome $\text{tri}\left(\frac{1}{4}\right) = \text{tri}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ e $\text{tri}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{tri}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot 2\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$$

(10) **5b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{2}{T}(t - nT)\right).$$

Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } |f| < \frac{5}{4T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$ che vale:

a. $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
b. $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$
c. $y(t) = 0 \;\; \forall t$
d. $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$
e. $y(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$
f. $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$

SOLUZIONE Il segnale periodico $x(t)$ ha come trasformata

$$X(f) = \frac{T}{2}\text{tri}\left(\frac{T}{2}f\right) \cdot \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\text{tri}\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Poiché $H(f)$ é un filtro passabasso che annulla tutte le componenti per $|f| > \frac{5}{4T}$ restano in uscita solo le delta per $n = -1, 0, 1$ da cui

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f) + \text{tri}\left(\frac{1}{2}\right)\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \text{tri}\left(-\frac{1}{2}\right)\delta\left(f + \frac{1}{T}\right)\right]$$

Siccome $\text{tri}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{tri}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$:

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(11) **6a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale a tempo continuo $y(t) = 2x^2(t-1)\cos(\pi B_x t)$, in cui $x(t)$ ha uno spettro $X(f)$ a banda limitata,

$$X(f) \begin{cases} \neq 0, & \text{if } |f| < B_x \\ = 0, & \text{if } |f| > B_x \end{cases}$$

La minima frequenza di campionamento f_s (frequenza di Nyquist) che permette la perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni vale

a. $f_s = 2B_x$
b. $f_s = 5B_x$

c. $f_s = 4B_x$
d. $f_s = 7B_x$
e. nessuna delle altre risposte

SOLUZIONE

La trasformata di fourier di $w(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$ è pari a $W(f) = X(f) * X(f)$. Siccome il supporto della convoluzione tra due segnali è pari alla somma dei supporti, la banda di $W(f)$ è uguale a $2B_x$. Un ritardo temporale non influisce sulla banda del segnale, quindi anche la banda di $z(t) = w(t-1) = x^2(t-1)$ è uguale a $2B_x$.

La trasformata di Fourier di $y(t)$ vale:

$$Y(f) = 2Z(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2}B_x\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2}B_x\right)\right] = Z\left(f - \frac{1}{2}B_x\right) + Z\left(f + \frac{1}{2}B_x\right)$$

La massima frequenza di $Y(f)$ è $f_{max} = 2B_x + \frac{1}{2}B_x = \frac{5}{2}B_x$, da cui $f_s = 2f_{max} = 5B_x$.

(12) **6b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale a tempo continuo $y(t) = \frac{1}{2}x^2(t+1)\cos(3\pi B_x t)$, in cui $x(t)$ ha uno spettro $X(f)$ a banda limitata,

$$X(f) \begin{cases} \neq 0, & \text{if } |f| < B_x \\ = 0, & \text{if } |f| > B_x \end{cases}$$

La minima frequenza di campionamento f_s (frequenza di Nyquist) che permette la perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni vale

a. $f_s = 10B_x$
b. Nessuna delle altre risposte
c. $f_s = 3B_x$
d. $f_s = 7B_x$
e. $f_s = 5B_x$

SOLUZIONE

La trasformata di fourier di $w(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$ è pari a $W(f) = X(f) * X(f)$. Siccome il supporto della convoluzione tra due segnali è pari alla somma dei supporti, la banda di $W(f)$ è uguale a $2B_x$. Un ritardo temporale non influisce sulla banda del segnale, quindi anche la banda di $z(t) = w(t+1) = x^2(t+1)$ è uguale a $2B_x$.

La trasformata di Fourier di $y(t)$ vale:

$$Y(f) = \frac{1}{2}Z(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{3}{2}B_x\right) + \delta\left(f + \frac{3}{2}B_x\right)\right] = \frac{1}{4}Z\left(f - \frac{3}{2}B_x\right) + Z\left(f + \frac{3}{2}B_x\right)$$

La massima frequenza di $Y(f)$ è $f_{max} = 2B_x + \frac{3}{2}B_x = \frac{7}{2}B_x$, da cui $f_s = 2f_{max} = 7B_x$.

(13) **7a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un sistema LTI a tempo discreto è descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

Quanto vale il modulo della funzione di trasferimento $H(e^{j2\pi f})$ del sistema?

a. $H(e^{j2\pi f})$ non esiste
b. $|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5+4\cos(2\pi f)}{5+4\cos(4\pi f)}}$
c. $|H(e^{j2\pi f})| = \frac{2}{\sqrt{5+4\cos(2\pi f)}}$
d. $|H(e^{j2\pi f})| = \frac{2}{\sqrt{5-4\cos(2\pi f)}}$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta
f. $|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5+4\cos(2\pi f)}{5-4\cos(4\pi f)}}$

SOLUZIONE La trasformata zeta della relazione ingresso uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-2}$$

Quindi:

$$Y(z) - \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1-\frac{1}{4}z^{-2}\right]=X(z)\left[1+\frac{1}{2}z^{-1}\right]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Siccome $H(e^{\jmath 2\pi f})=H(z)|_{z=e^{\jmath 2\pi f}}$:

$$H(e^{\jmath 2\pi f})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-\jmath 2\pi f}}$$

Il suo modulo quadro vale:

$$|H(e^{\jmath 2\pi f})|^2=H(e^{\jmath 2\pi f})\cdot H^*(e^{\jmath 2\pi f})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-\jmath 2\pi f}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{\jmath 2\pi f}}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-\jmath 2\pi f}-\frac{1}{2}e^{\jmath 2\pi f}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}-\cos(2\pi f)}=\frac{4}{5-4\cos(2\pi f)}$$

La risposta corretta è quindi:

$$|H(e^{\jmath 2\pi f})|=\frac{2}{\sqrt{5+4\cos(2\pi f)}}$$

(14) **7b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un sistema LTI a tempo discreto è descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n)=x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)+\frac{1}{4}y(n-2)$$

Quanto vale il modulo della funzione di trasferimento $H(e^{\jmath 2\pi f})$ del sistema?

a. $|H(e^{\jmath 2\pi f})|=\frac{2}{\sqrt{5-4\cos(2\pi f)}}$
b. $|H(e^{\jmath 2\pi f})|=\sqrt{\frac{5-4\cos(2\pi f)}{5+4\cos(4\pi f)}}$
c. $|H(e^{\jmath 2\pi f})|=\sqrt{\frac{5-4\cos(2\pi f)}{5-4\cos(4\pi f)}}$
d. $|H(e^{\jmath 2\pi f})|=\frac{2}{\sqrt{5+4\cos(2\pi f)}}$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta
f. $H(e^{\jmath 2\pi f})$ non esiste

SOLUZIONE La trasformata zeta della relazione ingresso uscita vale:

$$Y(z)=X(z)-\frac{1}{2}X(z)z^{-1}+\frac{1}{4}Y(z)z^{-2}$$

Quindi:

$$Y(z)-\frac{1}{4}Y(z)z^{-2}=X(z)-\frac{1}{2}X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1-\frac{1}{4}z^{-2}\right]=X(z)\left[1-\frac{1}{2}z^{-1}\right]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Siccome $H(e^{\jmath 2\pi f})=H(z)|_{z=e^{\jmath 2\pi f}}$:

$$H(e^{\jmath 2\pi f})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-\jmath 2\pi f}}$$

Il suo modulo quadro vale:

$$|H(e^{\jmath 2\pi f})|^2=H(e^{\jmath 2\pi f})\cdot H^*(e^{\jmath 2\pi f})=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-\jmath 2\pi f}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{\jmath 2\pi f}}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-\jmath 2\pi f}+\frac{1}{2}e^{\jmath 2\pi f}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}+\cos(2\pi f)}=\frac{4}{5+4\cos(2\pi f)}$$

La risposta corretta è quindi:

$$|H(e^{\jmath 2\pi f})|=\frac{2}{\sqrt{5+4\cos(2\pi f)}}$$

(15) **8a** Risposta multipla | Una sola alternativa

La risposta all'impulso di un sistema numerico vale:

$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n-1)$$

All'ingresso del sistema viene inserito il segnale:

$$x(n) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Quanto vale il segnale $y(n)$ in uscita dal sistema?

a. Nessuna delle altre risposte è corretta
b. $y(n) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$
c. $y(n) = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
d. $y(n) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
e. $y(n) = \frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$

SOLUZIONE La trasformata zeta di $x(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$h(n)$ si può scrivere come:

$$h(n) = \delta(n) + \frac{1}{3}\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Applicando la proprietà del ritardo, si può ricavare la sua trasformata zeta:

$$H(z) = 1 + \frac{1}{3}\frac{3}{4}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

Moltiplicando $X(z)$ e $H(z)$ si ottiene:

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$Y(z)$ ha due poli semplici e può essere scomposta con il metodo dei residui:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{R_1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z)\cdot\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{1-\frac{1}{2}\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{4}\frac{4}{3}} = \frac{1/3}{4/3} = \frac{1}{4}$$

$$R_2 = Y(z)\cdot\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}\Big|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1-\frac{1}{2}(-4)}{1-\frac{3}{4}(-4)} = \frac{3}{4}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

(16) **8b** Risposta multipla | Una sola alternativa

La risposta all'impulso di un sistema numerico vale:

$$h(n) = \delta(n) + \frac{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n-1)$$

All'ingresso del sistema viene inserito il segnale:

$$x(n) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Quanto vale il segnale $y(n)$ in uscita dal sistema?

a. $y(n) = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

b. $y(n) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$
c. $y(n) = \frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$
d. Nessuna delle altre risposte è corretta
e. $y(n) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

SOLUZIONE La trasformata zeta di $x(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$h(n)$ si può scrivere come:

$$h(n) = \delta(n) + \frac{5}{3}\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Applicando la proprietà del ritardo, si può ricavare la sua trasformata zeta:

$$H(z) = 1 + \frac{5}{3}\frac{3}{4}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{5}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

Moltiplicando $X(z)$ e $H(z)$ si ottiene:

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$Y(z)$ ha due poli semplici e può essere scomposta con il metodo dei residui:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{R_1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z)\cdot\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\bigg|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\bigg|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{1+\frac{1}{2}\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{4}\frac{4}{3}} = \frac{5/3}{4/3} = \frac{5}{4}$$

$$R_2 = Y(z)\cdot\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\bigg|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}\bigg|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1+\frac{1}{2}(-4)}{1-\frac{3}{4}(-4)} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

(17) **9a** Risposta multipla | Una sola alternativa

E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-1,1]$ e autocorrelazione $R_X(t_1,t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t_1) = X(t_1) + X(t_1+3T)$.

a. $\frac{1}{10}$
b. Non ci sono dati sufficienti per calcolarla
c. 2
d. E' una funzione del tempo
e. $\frac{2}{3}$
f. $\frac{T}{2}$

SOLUZIONE

Si noti che il processo $X(t)$ non é necessariamente WSS. Sappiamo pero che é strettamente stazionario del prim'ordine perché $f_X(x,t)$ non dipende dal tempo. La media vale

$$\mu_x = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}pdp = 0$$

Il valore quadratico medio vale:

$$s_x = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}p^2dp = \frac{1}{3}$$

Calcoliamo

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t_1)\} - E^2\{Y(t_1)\}$$

$$E\{Y(t_1)\} = E\{X(t_1)+X(t_1+3T)\} = E\{X(t_1)\} + E\{X(t_1+3T)\} = 0+0 = 0$$

$$E\{Y^2(t_1)\} = E\{(X(t_1)+X(t_1+3T))^2\} = E\{X^2(t_1)\}+E\{X^2(t_1+3T)\}+2E\{X(t_1)X(t_1+3T)\} = 2s_x^2+2R_X(t_1,t_1+3T)$$

Sappiamo che l'ultimo termine é nullo ($|t_1-t_2| = 3T > T$), quinidi $\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t_1)\} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

(18) **9b** Risposta multipla | Una sola alternativa

E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-2,2]$ e autocorrelazione $R_X(t_1,t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t_1) = X(t_1) + 2X(t_1 + 2T)$.

a. $\frac{20}{3}$
b. Non ci sono dati sufficienti per calcolarla
c. E' una funzione del tempo
d. 4
e. $\frac{2T}{5}$
f. $\frac{2}{3}$

SOLUZIONE

Si noti che il processo $X(t)$ non é necessariamente WSS. Sappiamo pero che é strettamente stazionario del prim'ordine perché $f_X(x,t)$ non dipende dal tempo. La media vale

$$\mu_x = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} p dp = 0$$

Il valore quadratico medio vale:

$$s_x = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4} p^2 dp = \frac{4}{3}$$

Calcoliamo

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t_1)\} - E^2\{Y(t_1)\}$$

$$E\{Y(t_1)\} = E\{X(t_1) + 2X(t_1 + 2T)\} = E\{X(t_1)\} + 2E\{X(t_1 + 2T)\} = 0 + 0 = 0$$

$$E\{Y^2(t_1)\} = E\{(X(t_1)+2X(t_1+2T))^2\} = E\{X^2(t_1)\}+4E\{X^2(t_1+2T)\}+2E\{X(t_1)X(t_1+2T)\} = 5s_x^2+2R_X(t_1,t_1+2T)$$

Sappiamo che l'ultimo termine é nullo ($|t_1 - t_2| = 2T > T$), quinidi $\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t_1)\} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$.

(19) **10a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un rumore gaussiano bianco $n(t)$ ed un processo $y(t) = h(t) * n(t) + n(t)$, dove $h(t)$ è la risposta all'impulso di un sistema LTI stabile. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa.

a. $y(t)$ è bianco
b. $y(t)$ è a varianza infinita
c. $y(t)$ è gaussiano a valore medio nullo
d. $y(t)$ è stazionario

SOLUZIONE L'affermazione falsa é "$y(t)$ è bianco." Infatti il filtraggio di $n(t)$ tramite il filtro $h(t)$ fa sì che lo spettro di potenza in uscita dal filtro non sia costante.

(20) **10b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un rumore gaussiano bianco $n_1(t)$, un altro rumore gaussiano bianco $n_2(t)$ indipendente da $n_1(t)$ ed un processo $y(t) = h(t) * n_1(t) + n_2(t)$, dove $h(t)$ è la risposta all'impulso di un sistema LTI stabile. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa.

a. $y(t)$ è gaussiano a valore medio nullo
b. $y(t)$ è a varianza infinita
c. $y(t)$ è stazionario
d. $E\{y(t_1)y(t_2)\} = 0$ per $t_1 \neq t_2$

SOLUZIONE L'affermazione falsa é "$E\{y(t_1)y(t_2)\} = 0$ per $t_1 \neq t_2$.", che equivale a dire che $E\{y(t_1)y(t_2)\} = K\delta(t_2 - t_1)$. Infatti il filtraggio di $n_1(t)$ tramite il filtro $h(t)$ fa sì che l'autocrrelazione in uscita dal filtro non sia più una delta (e lo spettro di potenza in uscita non sia più costante).

Punteggio complessivo: 20