Approssimazione

Teorema: Assegnati n + 1 punti con le ascisse distinte tra loro <u>esiste uno e un sol polinomio pn(x) di grado minore o uguale a n interpolante i dati assegnati,</u> ovvero soddisfacente le condizioni di interpolazione.

Definizione: Si dice che una successione di polinomi {Pn} n∈N converge uniformemente a f se, e solo se,

lim n→∞ ||f −Pn|| ∞ = 0

Ma vale PER OGNI POLINOMIO? No, Infatti data una qualunque successione di nodi, distinti in [a,b] <u>ESISTE SEMPRE UNA FUNZIOME CONTINUA</u> che non converge uniformemente.

TEOREMA: Se la funzione ha derivata continua, i nodi di Chebyshev e Lobatto ci danno una serie di funzioni CHE CONVERGONO UNIFORMEMENTE.

CONSTATAZIONE: La scelta di nodi equispaziati NON GARANTISCE LA CONVERGENZA UNIFORME, **NEPPURE** per funzioni con derivata continua di qualsiasi ordine

CONSTATAZIONE: Si osservi che le funzioni polinomiali a tratti sono continue ma, generalmente, non sono derivabili nei punti di raccordo.

DEFINIZIONE: Sia $S_d(x)$ una spline di ordine d: 1)S è di grado ≤ d; 2) S ha derivata continua fino a d-1; 3) S è definita per nell' intervallo.

TEOREMA: Sia f una qualsiasi funzione continua, QUALUNQUE SIA LA SCELTA DEI NODI, la successione di spline S_d ci permette di convergere ad f, **sempre**!

DEFINIZIONE: Le spline sono FUNZIONI POLINOMIALI a TRATTI, di grado locale 3 (d=3). Necessitano di 4 condizioni.

CONSTATAZIONE: Esistono 3 tipi di spline cubiche; tutte rispondono alla proprietà 1) e 3) della precedente defizione. Essi si dividono in:

Naturali

1) $S_3^{(2)}(x_1) = 0, \; S_3^{(2)}(x_{n+1}) = 0$

Not-a-knot

2) $S_3^{(3)}$ è continua in x_2 e in x_n

Vincolate

3) $S_3^{(1)}(x_1) = f'(x_1), \; S_3^{(1)}(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$

CONSTATAZIONE: $O(h^4)$ è il massimo ordine di convergenza che si ottiene con le suddete spline cubiche. LE SPLINE CONVERGONO TUTTE.

CONSTATAZIONE: Date le Spline cubiche, di ordine k (ovvero derivabili fino a k con continuità), tutte le derivate fino alla k-esima CONVERGONO TUTTE UNIFORMEMENTE alle corrispettive derivate di f (simultanea approssimazione).

CONSTATAZIONE: A differenza dei polinomi interpolanti, le spline interpolanti convergono uniformemente alla funzione interpolata al CRESCERE DEI NODI di interpolazione, qualunque sia la scelta dei nodi (convergenza pari a $O(h^2)$). La funzione però DEVE ESSERE CONTINUA.

QUIZ: Se f `e continua con la sua derivata prima, la scelta dei nodi di Chebyshev oppure di Chebyshev-Lobatto, invece, garantisce la convergenza uniforme: la convergenza è tanto più rapida, quanto più è regolare la funzione f.

TEOREMA: Il massimo ordine di convergenza per spline cubiche è $O(h^4)$. Nell' ordine, le velocità di convergenza sono: Naturali > NOT > Vincolate.

QUIZ: La spline cubica vincolata è univocamente determinata; è derivabile; non ha derivata terza continua! Basta ricordarsi le sue proprietà.

QUIZ: La spline not-a-knot è univocamente determinata; non ha derivata terza continua; non è di grado 3; è derivabile.

QUIZ: La spline cubica è continua nella sua derivata seconda, sempre.

QUIZ: Data una funzione di grado N, il polinomio interpolante DEVE avere grado ALMENO ≤ N.

QUIZ: Una spline di ordine D ha derivata continua fino all' ordine D-1.

QUIZ: La spline cubica (D=3) appartiene a C^2, ovvero derivata continua fino al secondo ordine.

SISTEMI LINEARI

DEFINIZIONE: La norma due è anche definita come norma euclidea ed è da applicarsi solo a vettori; si può anche implementare da se norm(x,2), sqrt($x^T x$).

DEFINIZIONE: Matrice e vettore sono COMPATIBILI se
$$||Ax|| \leq ||A||*||x||$$

CONSTATAZIONE: La matrice P delle fattorizzazioni è una matrice di permutazione che tiene conto degli scambi effettuati per poter ridurre la matrice. Tali matrici sono MATRICI ORTOGNALI.

CONSTATAZIONE: Matrice definita positiva se HA AUTOVALORI POSITIVI.

TEOREMA: Si può valutare la correttezza di una matrice in base al suo *numero di condizionamento*. K = cond(A,1). Se K ≈1, matrice BEN condizionata, altrimenti se >>1 MALE.

CONSTATAZIONE: Se le matrici sono triangolari, si preferisce procedere con la *sostituzione all'indietro/avanti*. Costo computazionale (tempo) molto basso, O($\frac{n^2}{2}$)!!

CONSTATAZIONE: Affinché il metodo delle eliminazioni di Gauss possa procedere, è necessario che al passo k risulti $a_{kk}^{k} \neq 0$.

CONSTATAZIONE: Il metodo di Gauss CON pivoting fornisce una soluzione **più** accurata di quella senza pivoting.

CONSTATAZIONE: Il metodo di Gauss anche se ben condizionato non fornisce sempre la soluzione esatta.

CONSTATAZIONE: U e L sono due matrici triangolari, U è superiore (upper) mentre L è inferiore (lower). Moltiplicate tra loro danno A, la matrice di partenza.

DEFINIZIONE: Lo scambio di righe finalizzato ad agevolare il metodo di Gauss grazie agli scambi di righe è detto *PIVOTING PARZIALE*. Il pivoting può risultare SUPERFLUO quando: 1) A è diagonale dominante per colonne 2)A è simmetrica e definita positiva.

TEOREMA: Infatti, se la matrice è simmetrica *E* definita positiva, il pivoting è superfluo. Si ricorre alla matrice R di Choleski, UNIVOCAMENTE DETERMINATA. Con R "TRIU" e diagonale positiva. (costo $\frac{n^3}{6}$).

TEOREMA: Esiste una fattorizzazione che ci permette di fattorizzare tutto! Ed è la fattorizzazione QR, valida anche per matrici rettangolari!! A = Q*R, con Q quadrata ed ORTOGONALE.

CONSTATAZIONE: La fattorizzazione QR NON E' UNICA!!!

TEOREMA: La soluzione di un sistema sovradeterminato si risolve con il problema dei *minimi quadrati*, sempre determinato!

CONSTATAZIONE: Un sistema sovradeterminato può non ammettere soluzioni.

TEOREMA: Il problema dei minimi quadrati ammette sempre soluzione.

CONSTATAZIONE: Se la matrice A ha rango massimo $A^T A$ è una matrice SIMMETRICA e DEFINITA POSITIVA risolubile mediante Choleski. TUTTAVIA, anche se il problema che si risolve non è mal condizionato, il procedimento numerico è POCO STABILE. Si procede quindi con QR.

CONSTATAZIONE: Se A non ha rango massimo, ci sono infinite soluzioni. Tuttavia, si rappresenta solo quello con NORMA EUCLIDEA MINIMA.

- Esiste uno e un solo vettore $\mathbf{x}^\star \in X$ tale che

$$||\mathbf{x}^\star||_2 = \min_{\mathbf{x}\in X} ||\mathbf{x}||_2$$

.

AUTOVALORI ed SVD

CONSTATAZIONE: Se μ è autovalore di A, μ^k è autovalore di A^k; Se μ è autovalore di A, μ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

DEFINIZIONE: Il RAGGIO SPETTRALE di A è: l' autovalore più grande in modulo. Max(abs(eig(A)))→norm(A,2).

DEFINIZIONE: Due matrici A e B di *ordine n* si dicono SIMILI se esiste una matrice S, di *ordine n* e non singolare, tale che $S^{-1} A S = B$.

TEOREMA: Due matrici A e B sono simili se HANNO GLI STESSI AUTOVALORI.

DEFINIZIONE: Una matrice A è DIAGONALIZZABILE se è simile alla matrice costituita da tutti gli autovalori di A, posti lungo una diagonale. AS = SD, le colonne di S sono autovettori di A.

TEOREMA: Una matrice è diagonalizzabile se possiede n autovalori DISTINTI, o LIN. INDIP.

CONSTATAZIONE: Il condizionamento NON DIPENDE DA A, ma dalla matrice degli autovettori S! cond(S).

TEOREMA: Il metodo delle potenze *converge* all'autovalore di modulo massimo.

CONSTATAZIONE: Se esistono due autovalori uguali ma opposti, oppure due autovalori complessi coniugati, allora non si può convergere all'autovalore di modulo masssimo.

CONSTATAZIONE: Le matrici simmetriche garantiscono una elevata velocità di convergenza; in generale dipende da quanto $abs\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)$ → 0 per m → infinito.

CONSTATAZIONE: Metodo delle potenze inverse ci permette di determinare un autovalore, se è noto una sua approssimazione p.

CONSTATAZIONE: Se p = 0, otteniamo l'autovalore di MODULO MINIMO, nell'ipotesi però che quest'ultimo sia unico!

CONSTATAZIONE: Con il metodo QR per gli autovalori viene determinata una successione di matrici:

1. Se A è simmetria, A_∞ è diagonale di AUTOVALORI;
2. Se A ha autovalori reali, A_∞ è TRIU, e la diagonale ha autovalori;
3. A qualsiasi, A_∞ QUASI TRIU.

CONSTATAZIONE: Se la matrice è simmetrica, allora norma spettrale e raggio spettrale coincidono.

CONSTATAZIONE: Due matrici si dicono simili se hanno gli stessi autovalori.

CONSTATAZIONE: Il calcolo degli autovalori per matrici simmetriche è sempre ben condizionato!

DEFINIZIONE: Il metodo delle potenze FORNISCE L' AUTOVALORE DI MODULO MASSIMO, e quindi il RAGGIO SPETTRALE.

DEFINIZIONE: Il metodo delle potenze inverse FORNISCE L' AUTOVALORE PROSSIMO AD UNA SUA APPROSSIMAZIONE P.

CONSTATAZIONE: Il metodo QR assicura elevata efficienza nella convergenza (molto veloce), TUTTAVIA NON SEMPRE CONVERGE.

CONSTATAZIONE: Il metodo QR RESTITUISCE TUTTI I VETTORI!

QUIZ: È possibile determinare mediante Gershgorin se una matrice è singolare: **Se la matrice è dominante diagonale, allora essa è non singolare**. Di conseguenza, assegnata una matrice, quella rappresentante una "circonferenza" che non interseca l' asse x è proprio la matrice non singolare.

SVD

TEOREMA: Ogni matrice $\in R^{m.n}$ è fattorizzabile nella forma:

$$U^T AV = S = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad p = \min\{m, n\}$$

CONSTATAZIONE: La matrice S contiene i valori SINGOLARI, le matrici U e V, oltre ad essere ortogonali, contengono, rispettivamente, vettori singolari sinistri e destri. "svd(A) → tutti i valori singolari, quelli veri!" (non V).

TEOREMA: Problemi con SVD SONO TUTTI E SEMPRE BEN CONDIZIONATI.

TEOREMA: Il numero dei valori singolari → RANGO DELLA MATRICE DI PARTENZA.

TEOREMA: Vettori colonna di U e di V costituiscono, rispettivamente, basi ortonormali per IMMAGINE e NUCLEO.

CONSTATAZIONE: Il rango della matrice A mi è dato dal numero di valori singolari.

DrEgg.