4 Febbraio 2020
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF)

NOTA: **Il tempo totale assegnato per la soluzione è di 2 ore. Al termine dei primi 30 minuti verrà ritirato il foglio con i quiz a risposta multipla.**
Consegnare il testo completo di tutti i fogli, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola (in STAMPATELLO MAIUSCOLO). Nella tabellina qui sotto riportare al più una risposta per ogni quiz di teoria usando LETTERE MAIUSCOLE. Spiegazioni o commenti (opzionali) sulla risposta selezionata possono essere aggiunti nel campo COMMENTI che segue ogni quiz di teoria.

Quiz	1	2	3
Risposta	C	B	B

1. Si consideri la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ calcolata per un segnale deterministico reale $x(t)$ ad energia finita e non nulla. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   A) l'autocorrelazione è una funzione complessa di τ che può avera una parte immaginaria diversa da zero.

   B) $R_x(\tau)$= -$R_x(-\tau)$

   C) il massimo valore assunto da $R_x(\tau)$ coincide con l'energia del segnale $x(t)$.

   D) L'integrale in τ della funzione di autocorrelazione è pari all'energia del segnale $x(t)$.

   COMMENTI (opzionali)

2. Si consideri una sinusoide a tempo discreto con espressione $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \theta)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   A) la periodicità di $x[n]$ è pari a $1/f_0$

   B) se f_0 è un numero irrazionale, la sequenza non può essere periodica

   C) la sequenza $x[n]$ è periodica per qualunque valore di f_0 e θ

   D) si considerino due sinusoidi con due diversi valori di f_0. Le due sequenze risultanti sono sicuramente diverse.

   COMMENTI (opzionali)

3. Si consideri un processo casuale $n(t)$ di tipo rumore bianco (gaussiano, stazionario, ergodico e con densità spettrale di potenza pari a $N_0/2$). Si consideri poi il processo $n'(t) = \dfrac{d}{dt}\, n(t)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   A) $n'(t)$ non è stazionario

   B) la densità spettrale di potenza di $n'(t)$ è nulla in $f = 0$

   C) la densità spettrale di potenza di $n'(t)$ è pari a $2\pi f^2 N_0$

   D) la funzione di autocorrelazione di di $n'(t)$ è pari a $\dfrac{N_0}{2}\delta(t)$

   COMMENTI (opzionali)

4 Febbraio 2020
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF)

NOTA: **Consegnare il testo completo di tutti i fogli e con lo svolgimento completo degli esercizi, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola.**

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Si conderi un sistema LTI che ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j\pi f T} + 2 \frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f} e^{-j\pi f \frac{7T}{2}}$$

al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

per ottenere il segnale di uscita $y(t)$.

1. si ottenga $h(t)$ la risposta all'impulso del sistema LTI e si disegni il suo andamento nel dominio del tempo
2. si ottenga il segnale di uscita $y(t)$
3. si calcoli l'energia del segnale di uscita E_y

(N.B. Si ricorda che $p_\alpha(t) = 1$ per $-\frac{\alpha}{2} < t < \frac{\alpha}{2}$ e $p_\alpha(t) = 0$ altrove).

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

Facendo uso delle tavole delle trasformate e della proprietá del ritardo si ottiene che

$$h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2 \cdot p_{\frac{T}{2}}\left(t - \frac{7T}{4}\right)$$

il cui andamento è riportato in Figura 1

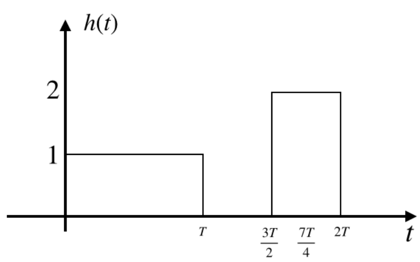


Figura 1: Risposta all'impulso $h(t)$

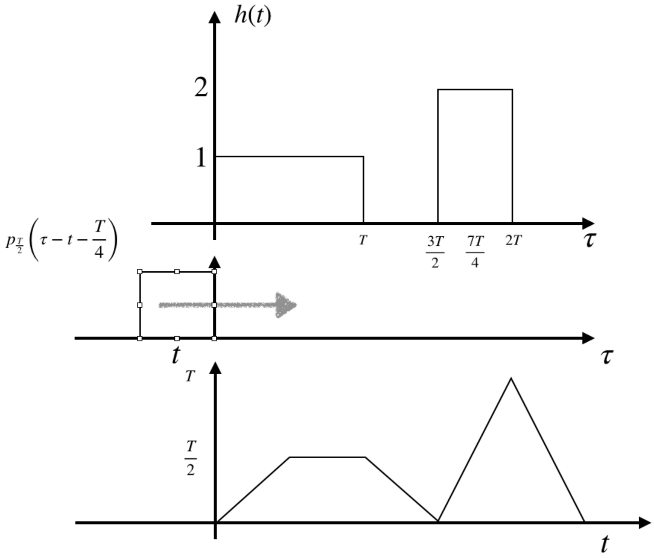


Figura 2: Segnale $y(t)$

Il segnale in uscita $y(t)$ si può ottenere come convoluzione grafica di $x(t)$ e $h(t)$ ed è riportato in Figura 2.

L'energia del segnale di uscita è definita come

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2$$

ed è semplice da calcolare nel dominio del tempo, considerando il quadrato del segnale nei vari tratti. Nei due tratti obliqui del trapezio

$$2 \cdot \int_{0}^{T/2} t^2 dt = \frac{T^3}{12}$$

Nella parte costante

$$\int_{T/2}^{T} \frac{T^2}{4} dt = \frac{T^2}{4}\frac{T}{2} = \frac{T^3}{8}$$

per il tratto triangolare

$$2 \cdot \int_{3T/2}^{7T/4} (2t)^2 dt = \frac{T^3}{24}$$

Da cui $E_y = \frac{T^3}{4}$.

4 Febbraio 2020
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

Si consideri il processo

$$X(t) = \cos(4\pi t + \theta) + N(t),$$

dove $N(t)$ è un processo Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_N(f) = N_0/2$, e θ una variabile casuale.

Sia $Y(t)$ il processo ottenuto passando $X(t)$ attraverso un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = u(t) \cdot \exp(-t).$$

1. Quali condizioni deve soddisfare la densità di probabilità di θ affinché $X(t)$ sia stazionario WSS?
2. Nelle condizioni trovate al punto precedente, calcolare media, valore quadratico medio, e la varianza di $X(t)$
3. Calcolare la funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza di $X(t)$
4. Calcolare la media, il valore quadratico medio e la varianza di $Y(t)$
5. Calcolare la funzione di autocorrelazione e lo spettro di potenza $Y(t)$
6. Calcolare la media del processo $A(t) = X(t)Y(t+2)$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1. Scrivo $X(t) = Z(t) + N(t)$. $N(t)$ è stazionario. Se assumo la v.c. θ indipendente da $N(t)$ con $f_\theta(x) = \frac{1}{2\pi}p_{2\pi}(x)$ (uniforme in $[-\pi, \pi]$), allora $Z(t)$ è stazionario WSS (visto a lezione) e indipendente da $N(t)$. Quindi anche $X(t)$ è stazionario WSS.
2. Scrivo caratteristiche statistiche di $Z(t)$ e $N(t)$.

$$\begin{aligned} \mu_Z &= E\{Z(t)\} = 0 \\ \mu_N &= 0 \end{aligned}$$

Funzioni di autocorrelazione, e varianza.

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) \\ R_N(\tau) &= \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \\ \sigma_Z^2 &= R_Z(0) - \mu_Z^2 = \frac{1}{2} \\ \sigma_N^2 &= R_N(0) - \mu_N^2 \to \infty \end{aligned}$$

Siccome $Z(t)$ e $N(t)$ sono indipendenti e a media nulla:

$$\begin{aligned}\mu_X &= \mu_Z + \mu_N = 0\\ R_X(\tau) &= R_Z(\tau) + R_N(\tau) = \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\\ \sigma_X^2 &= \sigma_Z^2 + \sigma_N^2 \to \infty\\ S_X(f) &= \mathcal{F}(R_X(\tau)) = \frac{1}{4}\left(\delta(f-2) + \delta(f+2)\right) + \frac{N_0}{2}\end{aligned}$$

3. Vedi sopra.

4. Per un sistema LTI usiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \mu_X H(0)\\ S_Y(f) &= S_X(f)|H(f)|^2\\ R_Y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}(S_Y(\tau))\end{aligned}$$

Calcoliamo la funzione di trasferimento e lo spettro di energia del sistema:

$$\begin{aligned}H(f) &= \mathcal{F}(h(t)) = \frac{1}{1+j2\pi f}\\ |H(f)|^2 &= \frac{1}{1+(2\pi f)^2}\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}\mu_Y &= \mu_X = 0\\ S_Y(\tau) &= \left(\frac{1}{4}\left(\delta(f-2) + \delta(f+2)\right) + \frac{N_0}{2}\right)\frac{1}{1+(2\pi f)^2}\end{aligned}$$

Per la proprietà di campionamento della delta

$$\begin{aligned}S_Y(\tau) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(4\pi)^2}\cdot\left(\delta(f-2) + \delta(f+2)\right) + \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+(2\pi f)^2}\\ R_Y(\tau) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(4\pi)^2}\cdot\cos(4\pi\tau) + \frac{N_0}{4}\cdot\exp(-|\tau|)\\ \sigma_Y^2 &= R_Y(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(4\pi)^2} + \frac{N_0}{4}\end{aligned}$$

5. Vedi sopra.

6. Usiamo la relazione:

$$\begin{aligned}R_{XY}(\tau) &= E\{X(t)Y(t+\tau)\} = R_X(\tau) * h(\tau) = \left(\frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right) * u(\tau)e^{-\tau} =\\ &= |H(2)|\frac{1}{2}\cos(4\pi\tau + \arg(H(2)) + \frac{N_0}{2}u(\tau)e^{-\tau},\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato la relazione tra sinusoidi all'ingresso e all'uscita di un sistema LTI. Esplicitiamo

$$\begin{aligned}|H(2)| &= \frac{1}{\sqrt{1+(4\pi)^2}}\\ \arg(H(2)) &= -\arctan(4\pi)\end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$E\{A(t)\} = R_{XY}(2) = |H(2)|\frac{1}{2}\cos(\arg(H(2)) + \frac{N_0}{2}\mathrm{e}^{-2}.$$

4 Febbraio 2020
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta all'impulso:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{2}{3}\delta(n),$$

1. Scrivere l'espressione della relazione ingresso/uscita in termini dell'equazione alle differenze e disegnare lo schema a blocchi del sistema.
2. Indicare la regione di convergenza di $H(z)$ (trasformata zeta di $h(n)$). Il sistema è stabile? È a fase minima? (motivare le risposte)
3. Calcolare i segnali $y_1(n)$, $y_2(n)$ e $y_3(n)$ in uscita dal sistema quando all'ingresso sono presenti i seguenti segnali:

$$x_1(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad x_2(n) = \delta(n) - \frac{2}{3}\delta(n-1) \qquad x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n).$$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1. La funzione di trasferimento $H(z)$ si ottiene calcolando la trasformata zeta di $h(n)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{2}{3} = \frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

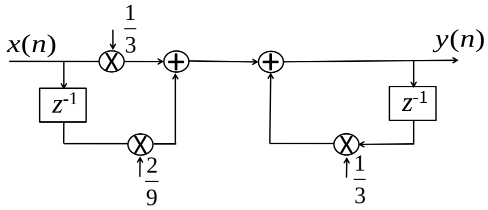
Dall'espressione precedente si ricava la seguente relazione tra $Y(z)$ e $X(z)$:

$$Y(z)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right) = X(z)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}z^{-1}\right) \rightarrow Y(z) = \frac{1}{3}X(z) + \frac{2}{9}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{2}{9}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

Il diagramma a blocchi del sistema è quindi:



2. Dalla risposta all'impulso si vede che il sistema è causale (infatti $h(n) = 0 \quad \forall \quad n < 0$). La regione di convergenza è quindi l'esterno di una circonferenza avente raggio uguale al modulo del polo più esterno. I poli di $H(z)$ sono le radici del denominatore: $1 - \frac{1}{3}z^{-1} = 0$. C'è quindi un unico polo in $z = \frac{1}{3}$ e la regione di convergenza è: $|z| > \frac{1}{3}$.
Un sistema causale è stabile se il modulo di tutti i poli è minore di 1, quindi il sistema è stabile. Un sistema causale è a fase minima se il modulo dei poli e degli zeri è minore di 1, quindi il sistema è anche a fase minima, in quanto ha un unico zero in $z = -\frac{2}{3}$.

3. Le trasformate zeta dei segnali in ingresso valgono:

$$X_1(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad X_2(z) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} \qquad X_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Moltiplicando per $H(z)$ si ottengono le trasformate zeta dei segnali in uscita dal sistema:

$$Y_1(x) = \frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad Y_2(z) = \frac{\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad Y_3(z) = \frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}.$$

Antitrasformando, si ottengono i segnali nel dominio del tempo.

Per il primo segnale, si può applicare il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y_1(z) = \frac{R_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{R_1}{1-p_2z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = \frac{1}{3}\frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1+2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$R_2 = \frac{1}{3}\frac{1+\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{1}{15}$$

$$Y_1(z) = \frac{2/5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1/15}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \rightarrow \quad y_1(n) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{1}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

La trasformata del secondo segnale si può scrivere come:

$$Y_2(z) = \frac{\left(1-\frac{4}{9}z^{-2}\right)}{3\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} - \frac{4}{27}z^{-2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

L'antitrasformata vale quindi:

$$y_2(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{4}{27}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left[u(n) - \frac{4}{3}u(n-2)\right]$$

La trasformata del terzo segnale si può scrivere come:

$$Y_3(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2} + \frac{2}{9}\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$$

Usando le tavole delle trasformate si ottiene:

$$y_3(n) = \frac{1}{3}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{2}{9}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(3n+1)\,u(n)$$