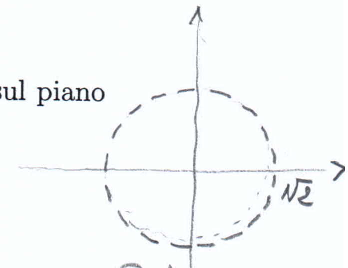
Cognome e Nome.............................................. Matricola............
Docente .........................

# ANALISI COMPLESSA
## Appello del 27 GENNAIO 2010 - Compito A

**Esercizio 1 (3 punti)**
Data la funzione

$$f(z) = \frac{4\,\mathrm{Im}(z) - (z+\bar{z})^2}{2 - |z|^2},$$

trovarne il luogo degli zeri nel suo dominio naturale $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ e disegnarlo sul piano complesso.



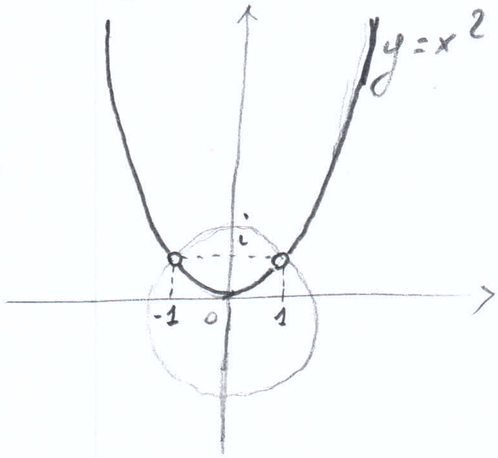

$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \neq 2\}$

$4\,\mathrm{Im}(z) - (z+\bar{z})^2 = 0 \iff 4\,\mathrm{Im}(z) - (2\mathrm{Re}(z))^2 = 0$

$\iff 4y - 4x^2 = 0 \iff y = x^2 \quad (z = x+iy,\ x, y \in \mathbb{R})$

Quindi il luogo degli zeri di $f$ è

$\{z = x+iy : x, y \in \mathbb{R},\ y = x^2\} \setminus \{1+i, -1+i\}$




**Esercizio 2 (3 punti)**
Si esprima la funzione

$$f(x+iy) := x(i-2x) + y(1-2y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

in termini della variabile complessa $z = x + iy$ e si stabilisca se è una funzione analitica.

$f(x+iy) = xi + y - 2x^2 - 2y^2 = i(x-iy) - 2(x^2+y^2) = i\bar{z} - 2|z|^2$

(oppure scrivere $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ....)

$f(x+iy) = [y - 2(x^2+y^2)] + ix$

$$\text{C.R.}: \begin{cases} -4x = 0 \\ 1 - 4y = -1 \end{cases} \implies f \text{ non è analitica in tutto } \mathbb{C}$$

(oppure $f(z) = i\bar{z} - 2|z|^2 = i\bar{z} - 2z\bar{z} = \bar{z}(i - 2z)$; se $f$ fosse analitica in $\mathbb{C}$ allora $\bar{z} = \dfrac{f(z)}{i-2z}$ sarebbe analitica per $i - 2z \neq 0$, assurdo)

27/1/10

**Esercizio 3 (4 punti)**
Si determini l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2n}}{(-i)^{2n+1}e^{-n}(n^3+3)} \,. = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \text{ con } \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{(-i)^{2n+1-n} e^{?}(n^3+3)} \\ w = (z-2i)^2 \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-i)^{2n+1} e^{-n}(n^3+3)}{(-i)^{2n+2+1} e^{-n-1}((n+1)^3+3)}\right| = e\,\frac{n^3+3}{(n+1)^3+3} \longrightarrow e \text{ per } n\to\infty$$

$\Longrightarrow R = e^{-1}$ raggio di convergenza

Se $|w| = e^{-1}$, $|a_n w^n| = |a_n||w|^n = |a_n| e^{-n} = \dfrac{1}{n^3+3} \sim \dfrac{1}{n^2}$ per $n\to\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, quindi la serie data converge assolutamente se $|w| = e^{-1}$. Allora l'insieme di convergenza è

$$\{z : |w| \le e^{-1}\} = \{z : |z-2i|^2 \le e^{-1}\} = \{z : |z-2i| \le 1/\sqrt{e}\}$$

$$= \overline{B_{1/\sqrt{e}}(2i)}$$

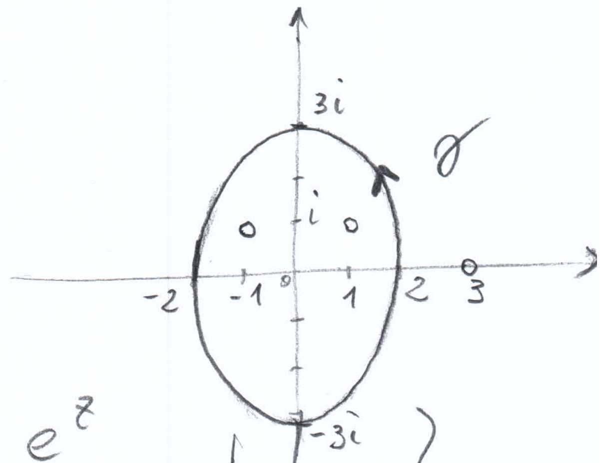
**Esercizio 4 (5 punti)**
Si calcoli

$$I := \int_\gamma \frac{e^z}{(z-3)(z^2-2z+2)}\, dz \,,$$

dove $\gamma$ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario e avente come sostegno l'insieme $E = \{z = x+iy \;:\; x,y \in \mathbb{R},\ (x^2/4)+(y^2/9) = 1\}$.

$z^2 - 2z + 2 = 0 \iff z = 1+i \ \cup\ z = 1-i$

Detta $f(z)$ la funzione integranda dal teor. dei residui segue che




$$I = 2\pi i \left[ Res_f(1+i) + Res_f(1-i) \right]$$

$$= 2\pi i \left\{ \left.\frac{e^z}{(z-3)(z-1+i)}\right|_{z=1+i} + \left.\frac{e^z}{(z-3)(z-1-i)}\right|_{z=1-i} \right\}$$

$$= \cancel{2}\pi \cancel{i} \left\{ \frac{e e^i}{(i-2)(\cancel{2}\cancel{i})} + \frac{e e^{-i}}{(-i-2)(-\cancel{2}\cancel{i})} \right\} = \pi e \left[ \frac{e^i}{i-2} + \frac{e^{-i}}{i+2} \right]$$

27/1/10

**Esercizio 5 (5 punti)**
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione
$$f(z) = (\alpha - 3) z \cosh\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\alpha}{z}.$$
Si determini il residuo di $f$ in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Se $z \neq 0$ $\quad f(z) = (\alpha-3)\, z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n} - \frac{\alpha}{z}$

$= (\alpha-3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!\, z^{2n-1}} - \frac{\alpha}{z} = (\alpha-3)\left[z + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4!\, z^3} + \cdots\right] - \frac{\alpha}{z}$

$= (\alpha-3) z + \left[\frac{\alpha-3}{2} - \alpha\right]\frac{1}{z} + (\alpha-3)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}}$

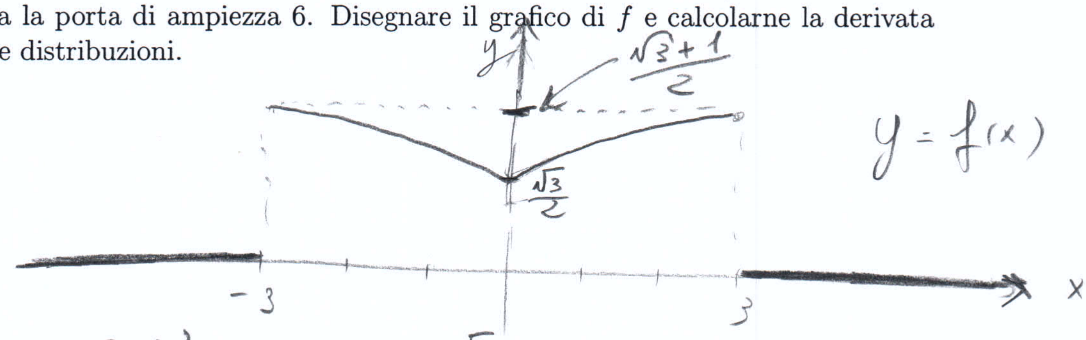
$= (\alpha-3) z + \left(-\frac{\alpha+3}{2z} + (\alpha-3)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n-1}}\right)$;

$\mathrm{Res}_f(0) = -\frac{\alpha+3}{2}$;

se $\alpha = 3$, $z_0 = 0$ è un polo semplice

se $\alpha \neq 3$, $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale.

**Esercizio 6 (4 punti)**
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) := \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left|\frac{\pi x}{18}\right|\right) p_6(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$
dove $p_6$ indica la porta di ampiezza 6. Disegnare il grafico di $f$ e calcolarne la derivata nel senso delle distribuzioni.




$\forall x \neq 0, \pm 3 \ \exists\, f'(x) = p_6(x)\left[\cos\left|\frac{\pi x}{18}\right| \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi x}{18}\right)\frac{\pi}{18}\right]$

$= p_6(x) \cos\left|\frac{\pi x}{18}\right| \operatorname{sgn}(x)\, \frac{\pi}{18}$

$T_f' = T_{f'} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(\delta_{-3} - \delta_3\right)$

27/1/10

**Esercizio 7 (4 punti)**
Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^5 + 3s^3 + 6}{s^3 + 3s}.$$

$$F(s) = \frac{s^2(s^3+3s)+6}{s^3+3s} = s^2 + \frac{6}{s^3+3s} = s^2 + \frac{6}{s(s^2+3)}$$

$$= s^2 + 2\,\frac{s^2+3-s^2}{s(s^2+3)} = s^2 + \frac{2}{s} - 2\,\frac{s}{s^2+3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^2) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right)$$

$$= \delta_0^{(2)} + 2H(t) - 2\cos(\sqrt{3}\,t)\,H(t).$$

Alternativamente: dividere numeratore per denominatore e poi decomporre in fratti semplici $6/s(s^2+3)$
A $6/s(s^2+3)$ si può anche applicare la formula di Heaviside.

**Esercizio 8 (5 punti)**
a) Scrivere la definizione di distribuzione temperata in $\mathbb{R}$.

b) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(x) := \dfrac{x^5 - 2}{x^4 + 1} + e^{3ix}$, $x \in \mathbb{R}$. Dire se $T_f$ è temperata, giustificando la risposta.

b) $|f(x)| \leq \dfrac{|x^5-2|}{x^4+1} + |e^{3ix}| \leq |x^5-2| + 1$

$\Rightarrow$ $f$ a crescita lenta $\Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$