Soluzioni appello del 25 gennaio 2022

1. **QTCa**

   Sia $x(t)$ un segnale a tempo continuo con supporto temporale strettamente limitato in $[-T_0, +T_0]$ e sia $X(f)$ la sua trasformata di Fourier. Si consideri ora il segnale $y(t) = x(c \cdot t)$ con c costante reale positiva e strettamente maggiore di 1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $y(t)$ ha un supporto temporale minore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (definita come la banda a 3 dB) è maggiore di quella occupata da $X(f)$ ✓
   (b) $y(t)$ ha un supporto temporale minore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è minore di quella occupata da $X(f)$
   (c) $y(t)$ ha un supporto temporale maggiore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è minore di quella occupata da $X(f)$
   (d) $y(t)$ ha un supporto temporale maggiore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è maggiore di quella occupata da $X(f)$

   Soluzione
   In una trasformazione del tipo $y(t) = x(c \cdot t)$ con c costante reale minore e strettamente maggiore di 1, il segnale $y(t)$ risulta essere una versione compressa sull'asse dei tempi del segnale $x(t)$. Conseguentemente il supporto temporale di $y(t)$ risulta minore di quello di $x(t)$ e, viceversa, la banda occupata è maggiore di quella di $x(t)$.

2. **QTCb**

   Sia $x(t)$ un segnale a tempo continuo con supporto temporale strettamente limitato in $[-T_0, +T_0]$ e sia $X(f)$ la sua trasformata di Fourier. Si consideri ora il segnale $y(t) = x(c \cdot t)$ con c costante reale positiva e strettamente minore di 1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $y(t)$ ha un supporto temporale minore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è maggiore di quella occupata da $X(f)$
   (b) $y(t)$ ha un supporto temporale minore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è minore di quella occupata da $X(f)$
   (c) $y(t)$ ha un supporto temporale maggiore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è minore di quella occupata da $X(f)$ ✓
   (d) $y(t)$ ha un supporto temporale maggiore di quello di $x(t)$ e la banda occupata da $Y(f)$ (ad esempio definita come la banda a 3 dB) è maggiore di quella occupata da $X(f)$

   Soluzione
   Si vedano le soluzioni del quiz precedente, invertendo semplicemente le considerazioni in quanto con c costante reale minore e strettamente maggiore di 1, il segnale $y(t)$ risulta essere una versione "espansa" sull'asse dei tempi del segnale $x(t)$.

3. **QTDa**

   Si consideri un sistema lineare discreto con risposta all'impulso $h[n] = u[n]e^{4n} + \delta[n+4]$ Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) il sistema non è stabile BIBO e non è causale ✓
   (b) il sistema è stabile BIBO ma non è causale
   (c) il sistema è stabile BIBO ed è causale
   (d) il sistema non è stabile BIBO ma è causale

   Soluzione
   Osservando l'espressione della risposta all'impulso $h[n] = u[n]e^{4n} + \delta[n+4]$:

   (a) si nota che si ha un termine non nullo anche per $n < 0$ e dunque certamente il sistema NON è causale
   (b) per la stabilità BIBO è necessario che la sua risposta all'impulso $h[n]$ sia sommabile in modulo, cioè che $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]|$ sia un valore finito, richiesta sicuramente non vera in questo caso poichè si ha un termine esponenziale crescente per $n > 0$

4. **QTDb**

   Si consideri un sistema lineare discreto con risposta all'impulso $h[n] = u[n] - u[n-10] + \delta[n+10]$ Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

   (a) il sistema è stabile BIBO ma non è causale ✓
   (b) il sistema è stabile BIBO ed è causale
   (c) il sistema non è stabile BIBO ed è causale
   (d) il sistema non è stabile BIBO e non è causale

Soluzione
Osservando l'espressione della risposta all'impulso $h[n] = u[n] - u[n-10] + \delta[n+10]$:

(a) si nota che si ha un termine non nullo anche per $n < 0$ e dunque certamente il sistema NON è causale
(b) per la stabilità BIBO è necessario che la sua risposta all'impulso $h[n]$ sia sommabile in modulo, cioè che $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]|$ sia un valore finito, richiesta certamente vera in questo caso poichè $h[n]$ ha un numero finito di termini (finiti) diversi da zero.

5. **QPCa**

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

(a) se il processo è stazionario in senso stretto, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale. ✓
(b) $x(t)$ è detto "quasi determinato" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo
(c) $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
(d) la densità spettrale di potenza è reale solo se il processo casuale $x(t)$ assume valori reali.

Soluzione
La prima risposta è quella corretta, in quanto un processo casuale stazionario in senso stretto è anche stazionario in senso lato, condizione che richiede proprio che la autocorrelazione dipenda solo da τ e non da t. Per quanto riguarda le altre risposte, sono tutte false in quanto:

- un processo quasi determinato è un processo per il quale si riesce a scrivere una espressione analitica del suo andamento nel tempo, ma questo non ha poi nulla a che vedere con il suo andamento nel tempo
- un processo ergodico implica una regolarità nelle realizzazioni, ma non impone nulla in termini di costanza nel tempo delle realizzazioni
- la densità spettrale di potenza è sempre reale, anche per processi complessi, in quanto integrandola su un qualunque intervallo spettrale deve sempre dare luogo ad una potenza, cioè ad un numero reale (e positivo).

6. **QPCb**

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

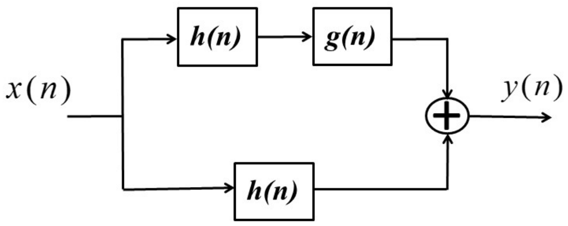
(a) affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni. ✓
(b) $x(t)$ è detto stazionario solo se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo
(c) $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
(d) la densità spettrale di potenza è sempre pari in f qualunque sia la tipologia di processo casuale $x(t)$.

Soluzione
La prima risposta è quella corretta, in quanto di fatto è la definizione di ergoditità. Per quanto riguarda le altre risposte, sono tutte false in quanto:

- la stazionarietà richiede una regolarità nel tempo sulle medie di insieme, ma questo non implica assolutamente che le realizzazioni debbano essere costanti nel tempo
- analogamente, un processo ergodico implica una regolarità nelle realizzazioni, ma non impone nulla in termini di costanza nel tempo delle realizzazioni
- la densità spettrale di potenza è pari solo per processi reali, mentre può non esserlo per processi complessi.

7. **TD1a**

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto ottenuto dalla combinazione di due sotto-sistemi con risposta all'impulso $h(n)$ e $g(n)$, come indicato nella seguente figura:



Sapendo che $h(n) = \alpha^n u(n)$, quanto deve valere $g(n)$ affinché il sistema complessivo si comporti come un ritardatore di N passi?

(a) $g(n) = \delta(n - N)$
(b) $g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - N - 1)$
(c) $g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - (N + 1)) - \delta(n)$ ✓
(d) $g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - N - 1) - \alpha^n u(n)$
(e) $g(n) = \frac{\delta(n-N)}{\alpha^n u(n)} - 1$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

La funzione di trasferimento del sistema nel dominio della trasformata zeta è:

$$H_{eq}(z) = H(z) \cdot G(z) + H(z)$$

Un ritardatore di N passi ha come funzione di trasferimento z^{-N}, quindi:

$$H_{eq}(z) = H(z) \cdot G(z) + H(z) = z^{-N}$$

Sosituendo l'espressione di $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, ottenuta come trasformata zeta di $h(n)$, si ha:

$$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} [1 + G(z)] = z^{-N}$$

Da cui si ricava:

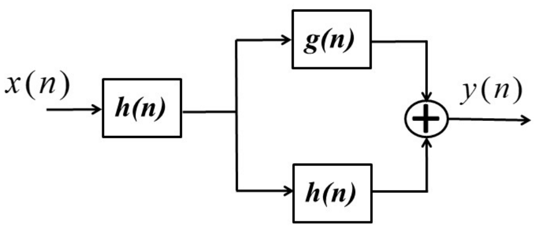
$$G(z) = z^{-N} - \alpha z^{-N-1} - 1$$

Antitrasformado:

$$g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - N - 1) - \delta(n)$$

8. **TD1b**

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto ottenuto dalla combinazione di due sotto-sistemi con risposta all'impulso $h(n)$ e $g(n)$, come indicato nella seguente figura:



Sapendo che $h(n) = \alpha^n u(n)$, quanto deve valere $g(n)$ affinché il sistema complessivo si comporti come un ritardatore di N passi?

(a) $g(n) = \delta(n - N)$
(b) $g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - N - 1)$
(c) $g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - (N + 1)) - \delta(n)$
(d) $g(n) = \delta(n - N) - \alpha\delta(n - N - 1) - \alpha^n u(n)$ ✓
(e) $g(n) = \frac{\delta(n-N)}{\alpha^n u(n)} - \alpha^n$

(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

La funzione di trasferimento del sistema nel dominio della trasformata zeta è:

$$H_{eq}(z) = H(z)\,[H(z) + G(z)]$$

Un ritardatore di N passi ha come funzione di trasferimento z^{-N}, quindi:

$$H_{eq}(z) = H(z)\,[H(z) + G(z)] = z^{-N}$$

Sosituendo l'espressione di $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, ottenuta come trasformata zeta di $h(n)$, si ha:

$$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\left[\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + G(z)\right] = z^{-N}$$

Da cui si ricava:

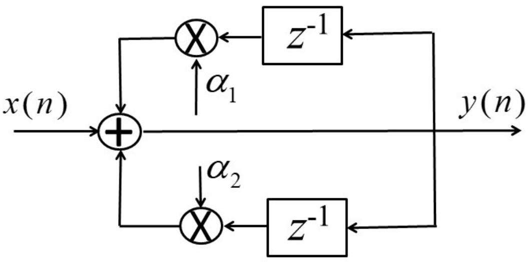
$$G(z) = z^{-N} - \alpha z^{-N-1} - \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$g(n) = \delta(n-N) - \alpha\delta(n-N-1) - \alpha^n u(n)$$

9. **TD2a**

Sia consideri il sistema LTI a tempo discreto mostrato in figura, dove $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ e $\alpha_2 = \frac{3}{4}$:



Si calcoli in segnale $y(n)$ in uscita dal sistema quando all'ingresso viene posto il segnale:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \delta(n)$$

(a) $y(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 3u(n)$ ✓
(b) $y(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - u(n)$
(c) $y(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
(d) $y(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
(e) $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \delta(n-1)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 y(n-1) + \alpha_2 y(n-1) \rightarrow y(n) = x(n) + (\alpha_1 + \alpha_2)\, y(n-1)$$

Sostituendo i valori di α_1 e α_2 e calcolando la trasformata zeta, si ottiene:

$$Y(z) = X(z) + Y(z)z^{-1}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - z^{-1}\right] = X(z)$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

(sistema causale)

La trasformata zeta dell'ingresso $x(n)$ vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 1 = \frac{2 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

La trasformata zeta de segnale in uscita $y(n)$ vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{2 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \left.\frac{2 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$$R_2 = Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{2 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{1}{2}\cdot 2}{1 - 2} = -1$$

Quindi:

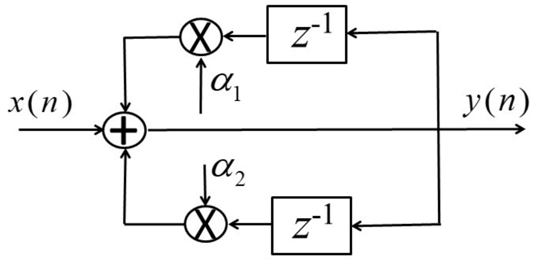
$$Y(z) = 3\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = 3u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

10. **TD2b**

Sia consideri il sistema LTI a tempo discreto mostrato in figura, dove $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{4}$:



Si calcoli in segnale $y(n)$ in uscita dal sistema quando all'ingresso viene posto il segnale:

$$x(n) = -\frac{1}{2}u(n) + \frac{5}{2}\delta(n)$$

(a) $y(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 3u(n)$
(b) $y(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - u(n)$ ✓
(c) $y(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
(d) $y(n) = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$
(e) $y(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{5}{2}\delta(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{5}{4}\delta(n-1)$
(f) Nessuna delle altre risposte

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \alpha_1 y(n-1) + \alpha_2 y(n-1) \rightarrow y(n) = x(n) + (\alpha_1 + \alpha_2)\, y(n-1)$$

Sostituendo i valori di α_1 e α_2 e calcolando la trasformata zeta, si ottiene:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

da cui:

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = X(z)$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

(sistema causale)

La trasformata zeta dell'ingresso $x(n)$ vale:

$$X(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{5}{2} = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

La trasformata zeta de segnale in uscita $y(n)$ vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \left.\frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = -1$$

$$R_2 = Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{5}{2} \cdot 2}{1 - 2} = 3$$

Quindi:

$$Y(z) = -\frac{1}{1 - z^{-1}} + 3\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y(n) = -u(n) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

11. **Febbraio 2021 TC1a**

Si consideri il segnale

$$x(t) = T\delta\left(t - \frac{T}{4}\right) + e^{-\frac{t}{T}}u(t)$$

in cui T é una costante positiva e $u(t)$ é la funzione gradino pari ad 1 per $t \geq 0$ e 0 altrove. Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema lineare e tempo-invariante con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

in cui la funzione $p_\alpha(t)$ é pari ad 1 per $|t| < \frac{\alpha}{2}$ e 0 altrove. Si valuti il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema lineare. Quale delle seguenti risposte é corretta?

(a) Il massimo valore di $y(t)$ vale $\max\{y(t)\} = 2T - \frac{T}{e}$ ✓
(b) Il massimo valore di $y(t)$ vale $\max\{y(t)\} = T - \frac{T}{e}$
(c) Il massimo valore di $y(t)$ vale $\max\{y(t)\} = T$
(d) Il massimo valore di $y(t)$ vale $\max\{y(t)\} = -\frac{T}{e}$
(e) Il massimo valore di $y(t)$ vale $\max\{y(t)\} = \frac{T}{e} - T$
(f) Nessuna delle altre risposte é corretta

12. **TC-1b**

Si consideri il segnale

$$x(t) = T\delta\left(t - \frac{T}{4}\right) - e^{-\frac{t}{T}}u(t)$$

in cui T é una costante positiva e $u(t)$ é la funzione gradino pari ad 1 per $t \geq 0$ e 0 altrove. Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema lineare e tempo-invariante con risposta all'impulso

$$h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

in cui la funzione $p_\alpha(t)$ é pari ad 1 per $|t| < \frac{\alpha}{2}$ e 0 altrove. Si valuti il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema lineare. Quale delle seguenti risposte é corretta?

(a) $y(T) = 2T - \frac{1}{e}$
(b) $y(T) = T - \frac{1}{e}$
(c) $y(T) = T$
(d) $y(T) = \frac{T}{e}$ ✓
(e) $y(T) = \frac{1}{e} - T$
(f) Nessuna delle altre risposte é corretta

Solution TC-1a

Let consider $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ where $x_1(t) = T\delta\left(t - \frac{T}{4}\right)$ and $x_2(t) = e^{-\frac{t}{T}}u(t)$. Exploiting the linearity properties the output of the system is obtained as

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau = y_1(t) + y_2(t)$$

For the properties of the Dirac Delta function

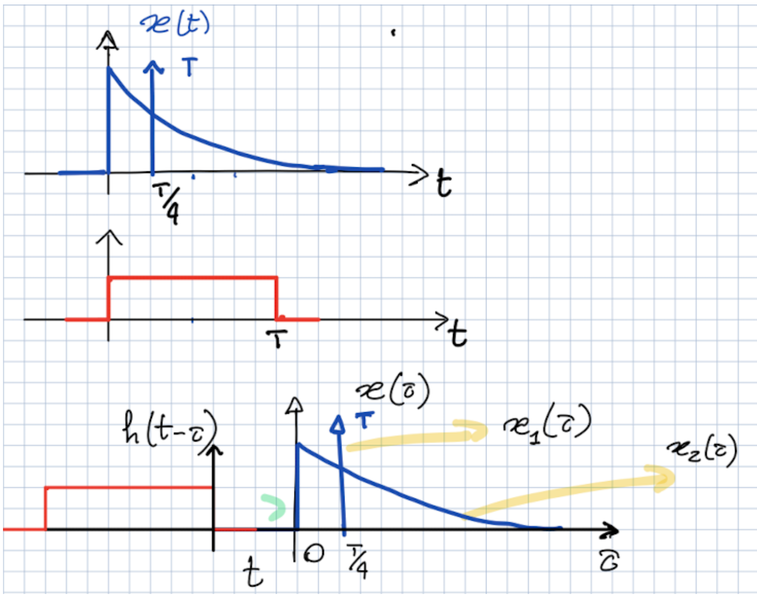
$$y_1(t) = Tp_T\left(t - \frac{T}{2} - \frac{T}{4}\right) = Tp_T\left(t - \frac{3T}{4}\right)$$

The signal $y_2(t)$ can be obtained as

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau & \text{for } 0 \leq t \leq T \\ \int_{t-T}^t e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau & \text{for } t > T \end{cases}$$

Then obtaining

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ -T\left[e^{-\frac{\tau}{T}}\right]_0^t = T\left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\right] & \text{for } 0 \leq t \leq T \\ -T\left[e^{-\frac{\tau}{T}}\right]_{t-T}^t = T\left[e^{-\frac{t-T}{T}} - e^{-\frac{t}{T}}\right] = Te^{-\frac{t}{T}}\left[e - 1\right] & \text{for } t > T \end{cases}$$



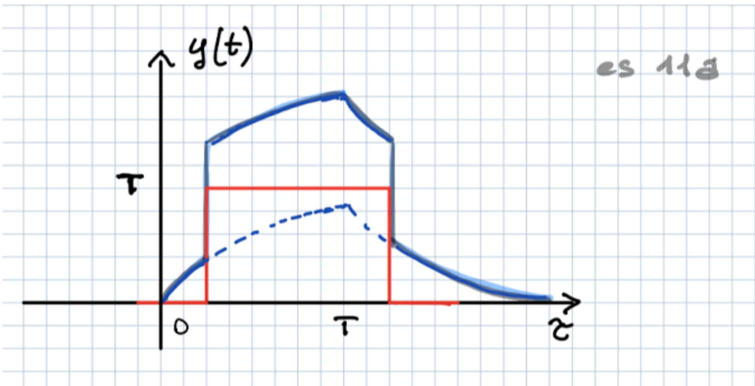
From the plot it can be seen that the maximum value is taken in $t = T$ where

$$y_1(T) = T$$

$$y_2(T) = T\left[1 - e^{-\frac{T}{T}}\right] = T\left[1 - e^{-1}\right]$$

and it can then be obtained that

$$\max\{y(t)\} = T + T\left[1 - e^{-1}\right] = 2T - Te^{-1}$$

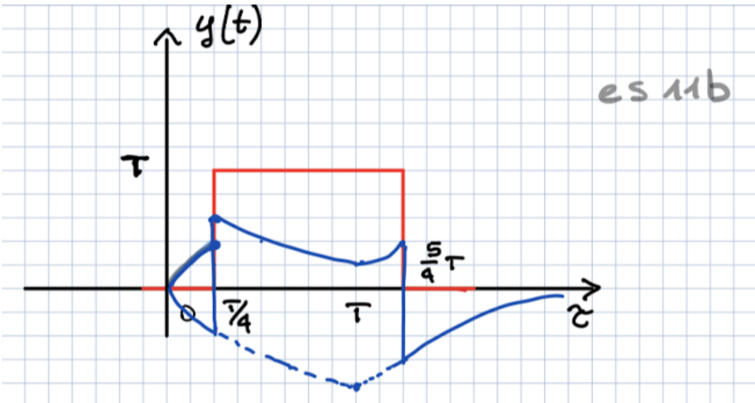


Solution TC-1b

The solution can be obtained is a similar way considering $x_1(t) = T\delta\left(t - \frac{T}{4}\right)$ and $x_2(t) = -e^{-\frac{t}{T}}u(t)$. In this case

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } \ t < 0 \\ tT\left[e^{-\frac{\tau}{T}}\right]_0^t = -T\left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\right] & \text{for } \ 0 \leq t \leq T \\ T\left[e^{-\frac{\tau}{T}}\right]_{t-T}^t = -T\left[e^{-\frac{t-T}{T}} - e^{-\frac{t}{T}}\right] = -Te^{-\frac{t}{T}}\left[e^{-1} - 1\right] & \text{for } \ t > T \end{cases}$$

$$y(T) = T - T\left[1 - e^{-1}\right] = T - T + Te^{-1} = Te^{-1}$$



y(t)
es 11b
T
5/4 T
0
T/4
T
τ

13. **TC-2a**

    Il segnale $x(t) = 2\cos^2(2\pi t/T)$ viene posto in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante causale con risposta all'impulso pari a 1 tra gli istanti di tempo 0 e T e nulla altrove. Il segnale di uscita $y(t)$ vale:

    (a) $y(t) = 0 \;\; \forall t$
    (b) $y(t) = (1/T)\cos(2\pi t/T)$
    (c) $y(t) = T\cos[2\pi(t - T/2)/T]$
    (d) $y(t) = T \;\; \forall t$ ✓
    (e) Nessuna delle altre risposte

14. **TC-2b**

    Il segnale $x(t) = 2\cos^2(\pi t/T)$ viene posto in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante causale con risposta all'impulso pari a 1 tra gli istanti di tempo 0 e $T/2$ e nulla altrove. Il segnale di uscita $y(t)$ vale:

    (a) $y(t) = 0 \;\; \forall t$
    (b) $y(t) = T/2 + (T/\pi)\cos(2\pi t/T)$
    (c) $y(t) = (T/\pi)\cos(2\pi t/T - \pi/2)$
    (d) $y(t) = T/2 + (T/\pi)\sin(2\pi t/T)$ ✓
    (e) Nessuna delle altre risposte

15. **TC-2c**

    Il segnale $x(t) = 2\sin^2(\pi t/T)$ viene posto in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante causale con risposta all'impulso pari a 1 tra gli istanti di tempo 0 e $T/2$ e nulla altrove. Il segnale di uscita $y(t)$ vale:

    (a) $y(t) = 0 \;\; \forall t$
    (b) $y(t) = T/2 + (T/\pi)\cos(2\pi t/T)$
    (c) $y(t) = (T/\pi)\cos(2\pi t/T - \pi/2)$
    (d) $y(t) = T/2 - (T/\pi)\sin(2\pi t/T)$ ✓
    (e) Nessuna delle altre risposte

Solution TC-2abc

The signal $x(t) = 2\cos^2(2\pi t/T)$ can be written as $x(t) = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t/T)\right]$. The impulse can be written as $h(t) = p_T(t - T/2)$ with transfer function

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j\pi f T}$$

Each harmonic component is modified by the value in modulus and phase of the transfer function at the frequencies of the harmonic component,i.e $f = 0$ and $f = 2/T$. Then

$$H(0) = T$$

$$H\left(\frac{2}{T}\right) = 0$$

We obtain that $y(t) = T \;\; \forall t$ since only the component if $f = 0$ passes through the filter.

Solution AF-012b The signal $x(t) = 2\cos^2(\pi t/T)$ can be written as $x(t) = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t/T)$. The impulse can be written as $h(t) = p_{T/2}(t - T/4)$ with transfer function

$$H(f) = \frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f} e^{-j\pi f T/2}$$

Each harmonic component is modified by the value in modulus and phase of the transfer function at the frequencies of the harmonic component,i.e $f = 0$ and $f = 1/T$. Then

$$H(0) = T/2$$

$$H\left(\frac{1}{T}\right) = T\frac{\sin(\pi/2)}{\pi} e^{-j\pi/2} = \frac{T}{\pi} e^{-j\pi/2}$$

Then $|H(f)| = \frac{T}{\pi}$ and the phase is $\arg H(f) = -\pi/2$.

We obtain that

$$y(t) = \frac{T}{2} + \frac{T}{\pi}\cos(2\pi t/T - \pi/2) = \frac{T}{2} - \frac{T}{\pi}\sin(2\pi t/T)$$

.

16. **TC-3a**

Si consideri il segnale

$$x(t) = T\left[\frac{sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\right]^2 - 2T\left[\frac{sin\left(\frac{\pi t}{4T}\right)}{\pi t}\right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi 5}{2T}t\right)$$

che viene elaborato da un campionatore che opera ad una frequenza di campionaamento $f_c = 1500\,\mathrm{Hz}$. Si determini il minimo valore del parametro T che permette la perfetta ricostruzione di $x(t)$ a partire dai suoi campioni

(a) $0,002\,\mathrm{s}$ ✓
(b) $0,001\,\mathrm{s}$
(c) $0,004\,\mathrm{s}$
(d) $0,005\,\mathrm{s}$
(e) Il segnale non puó essere mai ricostruito senza effetti di aliasing qualunque sia il valore di T
(f) Nessuna delle altre risposte

17. **TC-3b**

Si consideri il segnale

$$x(t) = 2T\left[\frac{sin\left(\frac{\pi t}{4T}\right)}{\pi t}\right]^2 - T\left[\frac{sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\right]^2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2T}t\right)$$

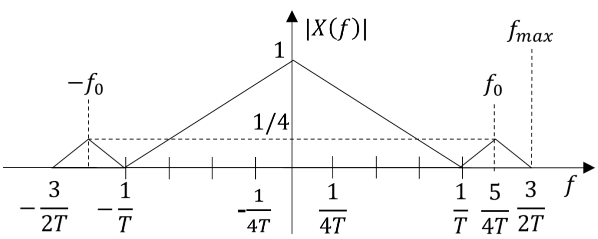
che viene elaborato da un campionatore che opera ad una frequenza di campionaamento $f_c = 2500\,\mathrm{Hz}$. Si determini il minimo valore del parametro T che permette la perfetta ricostruzione di $x(t)$ a partire dai suoi campioni

(a) $0,0018\,\mathrm{s}$ ✓
(b) $0,0036\,\mathrm{s}$
(c) $0,0009\,\mathrm{s}$
(d) $0,0072\,\mathrm{s}$
(e) Il segnale non puó essere mai ricostruito senza effetti di aliasing qualunque sia il valore di T
(f) Nessuna delle altre risposte

Solution TC-ab

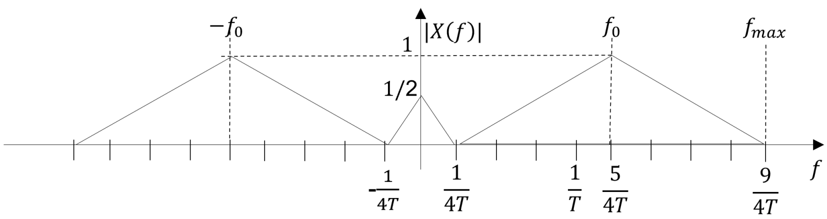
La massima frequenza nello spettro di $x(t)$ si ottiene calcolandone la trasformata di Fourier

Per la versione a abbiamo



in cui la massima frequenza $f_{\max} = \frac{3}{2T}$ La frequenza di campionamento $f_s \geq 2f_{\max} = \frac{3}{T}$ da cui si ottiene che $T \geq \frac{3}{f_s}$. Si ottiene quindi che il minimo valore di $T = \frac{3}{1500} = 2 \cdot 10^{-3}$

Per la versione b abbiamo



in cui la massima frequenza $f_{\max} = \frac{9}{4T}$ La frequenza di campionamento $f_s \geq 2f_{\max} = \frac{9}{2T}$ da cui si ottiene che $T \geq \frac{9}{2f_s}$. Si ottiene quindi che il minimo valore di $T = \frac{9}{5000} = 1.8 \cdot 10^{-3}$

18. **PC1a**

Si consideri un insieme di processi casuali $X_i(t)$ stazionari, a media nulla, spettro di potenza $S(f) = 1$ per $|f| < 3$ e statisticamente indipendenti. Si costruisca il processo

$$Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|i|} X_i(t - iT)$$

dove α è una costante positiva. La varianza di $Y(t)$

(a) vale $6\frac{1+\mathrm{e}^{-2\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha}}$ ✓
(b) vale $6\frac{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$
(c) vale $\frac{12}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha}}$
(d) diverge
(e) tende a zero
(f) dipende dal tempo
(g) non assume nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

19. **PC1b**

Si consideri un insieme di processi casuali $X_i(t)$, stazionari, statisticamente indipendenti, a media nulla, e con autocorrelazione $R_{X_i}(\tau) = 2(1 - |\tau|/T)$, per $|\tau| < T$ e nulla altrove. Si costruisca il processo

$$Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|i|} X_i(t - iT)$$

dove α è una costante positiva. La varianza di $Y(t)$

(a) vale $2\frac{1+\mathrm{e}^{-2\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha}}$ ✓
(b) vale $2\frac{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$
(c) vale $2T\frac{1+\mathrm{e}^{-2\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha}}$
(d) diverge
(e) dipende dal tempo
(f) tende a zero
(g) non assume nessuno dei valori indicati nelle altre risposte

20. **PC1c**

Si consideri un insieme di processi casuali $X_i(t)$ stazionari, statisticamente indipendenti, con densitá di probabilitá del prim'ordine uniforme in $[-1, 1]$. Si costruisca il processo

$$Y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|i|} X_i(t - iT)$$

dove α è una costante positiva. La varianza di $Y(t)$

(a) vale $\frac{1}{3}\frac{1+\mathrm{e}^{-2\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha}}$ ✓
(b) vale $\frac{1}{3}\frac{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$
(c) vale $\frac{1+\mathrm{e}^{-2\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha}}$
(d) diverge
(e) tende a zero
(f) dipende dal tempo
(g) non assume nessuno dei valori indicati nelle altre risposte.

Soluzione PC1
I passaggi sono i seguenti

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2(t) &= E\{Y^2(t)\} - E^2\{Y(t)\} \\
&= E\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|i|}X_i(t-iT)\mathrm{e}^{-\alpha|j|}X_j(t-jT)\right\} - E\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|i|}X_i(t-iT)\right\}^2 \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(|i|+|j|)}E\{X_i(t-iT)X_j(t-jT)\} - \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|i|}E\{X_i(t-iT)\}\right)^2 \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(|i|+|j|)}E\{X_i(t-iT)X_j(t-jT)\} - 0^2 \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha|i|}E\{X_i^2(t-iT)\} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j\neq i} \mathrm{e}^{-\alpha(|i|+|j|)}E\{X_i(t-iT)X_j(t-jT)\} \\
&= E\{X^2\}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha|i|} + 0 \\
&= E\{X^2\}\frac{1+e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}
\end{aligned}$$

Per trovare $E\{X^2\}$, ricordiamo $E\{X^2\} = \int S_x(f)df = R_X(0) = \int x^2 f_X(x)dx = 6$. Gli esercizi si distinguono solo nel modo di calcolare il valore quadratico medio di X.

21. **PC2a**

Si consideri un rumore gaussiano bianco $N(t)$ all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 1$ se $0 < t < T$ e zero altrove .

Si indichi con $Y(t)$ il processo in uscita e si consideri la variabile casuale

$$Z = Y(t_1) + Y(t_2)$$

Si indichi con σ_Z^2 la varianza di Z. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) σ_Z^2 è minima per $|t_1 - t_2| > T$. ✓
(b) σ_Z^2 è minima per $|t_1 - t_2| > T/2$.
(c) σ_Z^2 non dipende da t_1 e t_2, perché $Y(t)$ è un processo WSS.
(d) σ_Z^2 è minima per $|t_1 - t_2| < T$.
(e) σ_Z^2 è minima per $t_1 = t_2$.

22. **PC2b**

Si consideri un rumore gaussiano bianco $N(t)$ all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t) = 1$ se $0 < t < T$ e zero altrove .

Si indichi con $Y(t)$ il processo in uscita e si consideri la variabile casuale

$$Z = Y(t_1) + Y(t_2)$$

Si indichi con σ_Z^2 la varianza di Z. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) σ_Z^2 è massima per $t_1 = t_2$. ✓
(b) σ_Z^2 è massima per $|t_1 - t_2| > T$.
(c) σ_Z^2 è massima per $|t_1 - t_2| > T/2$.
(d) σ_Z^2 non dipende da t_1 e t_2, perché $Y(t)$ è un processo WSS.
(e) σ_Z^2 è massima per $|t_1 - t_2| < T$.

Soluzione PC2

I passaggi sono i seguenti (chiamando K il valore costante della densitá spettrale di potenza di $N(t)$):

$$\begin{aligned}
\sigma_Z^2(t_1,t_2) &= E\{(Y(t_1)+Y(t_2))^2\} - E\{(Y(t_1)+Y(t_2))\}^2 \\
&= E\{Y^2(t_1)\} + E\{Y^2(t_2)\} + 2E\{Y(t_1)Y(t_2)\} - 0^2 \\
&= 2E\{Y^2(t_1)\} + 2E\left\{Y^2(t_1)Y^2(t_2)\right\} \\
&= 2KT + 2R_Y(t_1-t_2) \\
&= 2KT + 2K(R_h(t_1-t_2) \\
&= 2KT + 2KT\Lambda\left(\frac{t_1-t_2}{T}\right)
\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione è massima se $t_1 - t_2 = 0$ (Vale $4KT$) ed è minima quando la funzione triangolare è nulla (ossia quando $|t_1 - t_2| > T$) .