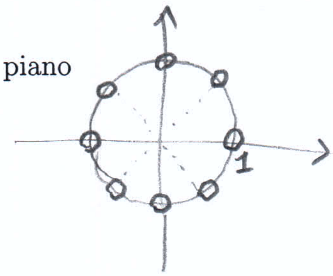
Cognome e Nome... Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 9 SETTEMBRE 2010 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Data la funzione

$$f(z) = \frac{iz - \overline{z}}{z^8 - 1},$$

trovarne il luogo degli zeri nel suo dominio naturale $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$ e disegnarlo sul piano complesso.

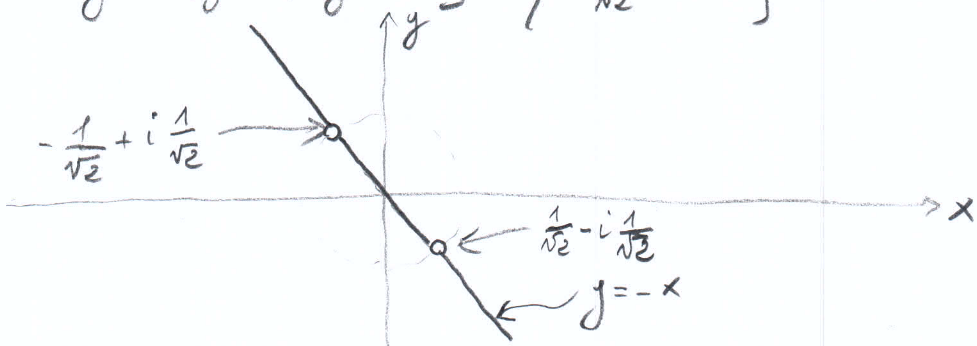


$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^8 \neq 1\}$

$iz - \overline{z} = 0 \iff iz = \overline{z} \iff y = -x \quad (z = x+iy,\ x,y \in \mathbb{R})$

quindi il luogo degli zeri di f è

$$\{z = x+iy \,:\, x,y \in \mathbb{R},\ y = -x\} \setminus \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\}$$



Esercizio 2 (3 punti)
Dire se la seguente funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f(x+iy) := x^2 + i(x^3 - 3xy^2), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

è analitica in $\mathbb{C}$, giustificando la risposta data.

La funzione f non è analitica in tutto $\Omega = \mathbb{C}$ perché la sua parte reale $u(x,y) = x^2$ non è una funzione armonica $(\Delta u = 2 \neq 0)$

9/9/10

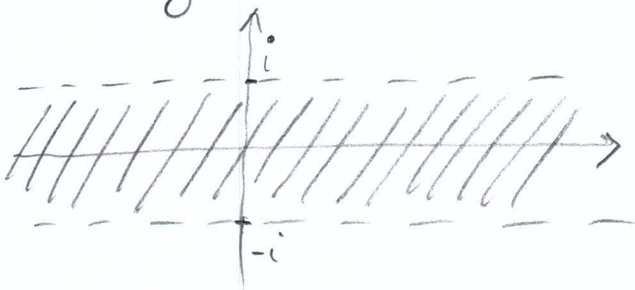
Esercizio 3 (5 punti)
Si determini e si rappresenti graficamente l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^2(\mathrm{Im}(z))^{n+3}.$$

Se ne calcoli successivamente la somma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^2(\mathrm{Im}(z))^{n+3} = z^2(\mathrm{Im}(z))^3 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Im}(z))^n = z^2(\mathrm{Im}(z))^3 \sum_{n=1}^{\infty} w^n$$

dove $w = \mathrm{Im}(z)$. Quindi l'insieme di convergenza è
$\{z : |w| < 1\} = \{z : |\mathrm{Im}(z)| < 1\}$



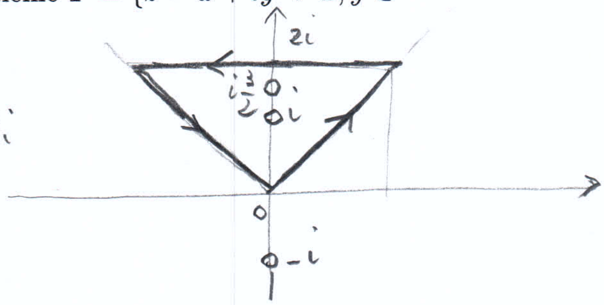
e

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^2(\mathrm{Im}(z))^{n+3} = z^2(\mathrm{Im}(z))^3\left[\frac{1}{1-w} - 1\right] = z^2(\mathrm{Im}(z))^3 \frac{w}{1-w} = \frac{z^2(\mathrm{Im}(z))^4}{1-\mathrm{Im}(z)}$$

Esercizio 4 (4 punti)
Si calcoli

$$I := \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)(z-i\frac{3}{2})}dz,$$

dove C è la frontiera percorsa in senso antiorario dell'insieme $T = \{z = x + iy \;:\; x, y \in \mathbb{R},\ |x| \le y \le 2\} \subseteq \mathbb{C}$.



$z = \pm i$, $z = \frac{3}{2}i$ poli semplici della funzione integranda $f(z)$; solo i, $\frac{3}{2}i$ appartengono all'interno di C, quindi per il th. dei residui

$$I = 2\pi i\left[\mathrm{Res}_f(i) + \mathrm{Res}_f\left(\tfrac{3}{2}i\right)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\left(\frac{z^2}{(z+i)(z-\frac{3}{2}i)}\right)\Bigg|_{z=i} + \left(\frac{z^2}{z^2+1}\right)\Bigg|_{z=\frac{3}{2}i}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{(-1)}{2i(-i/2)} + \frac{-9/4}{-9/4+1}\right] = 2\pi i\left[-1 + \frac{9}{5}\right] = \frac{8}{5}\pi i$$

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) = \frac{z - \beta \sin(iz)}{z^6}.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Se $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^5} - \beta \frac{\sin(iz)}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{\beta}{z^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{z^5} - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n i}{(2n+1)!} z^{2n-5} = \frac{1}{z^5} - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{(2n+1)!} z^{2n-5}$$

$$= \frac{1}{z^5} - \beta \left(\frac{i}{z^5} + \frac{i}{2z^3} + \frac{i}{5!\,z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i}{(2n+1)!} z^{2n-5} \right)$$

$$= \left[\frac{(1-\beta i)}{z^5} - \frac{i\beta}{2z^3} - \frac{i\beta}{5!\,z} \right] - \beta \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i}{(2n+1)!} z^{2n-5}$$

$$\mathrm{Res}_f(0) = -\frac{i\beta}{5!} = -\frac{i\beta}{120}$$

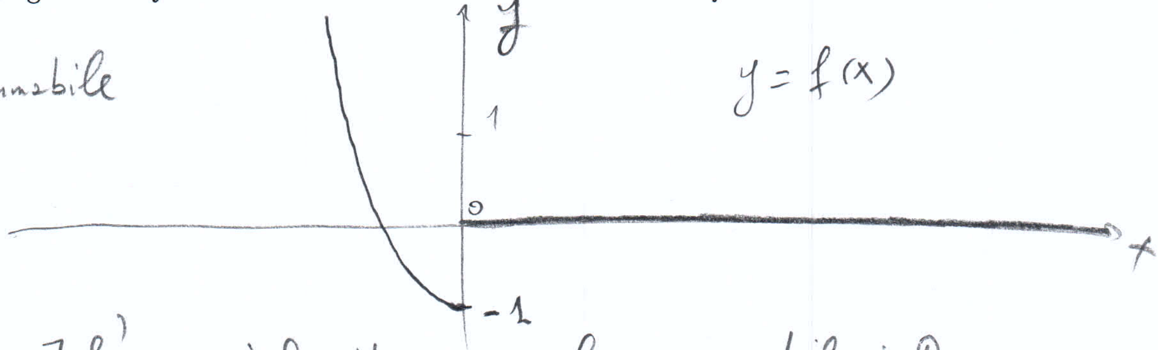
$z_0 = 0$ polo di ordine 5 $(1 - \beta i \neq 0 \ \forall \beta \in \mathbb{R})$

Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (\cosh x - 2) H(-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f.

f loc. sommabile



$\forall x \neq 0 \ \exists f'(x) = \sinh x \, H(-x)$ loc. sommabile in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow T_f' = T_{H(-x)\sinh(x)} + \delta_0$$

9/9/10

Esercizio 7 (4 punti)
Calcolare l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$F(s) = \frac{s^6 - s^2 + 1}{s(s^2+1)}.$$

$$F(s) = \frac{s^2(s^4-1)+1}{s(s^2+1)} = \frac{s^2(s^2-1)(s^2+1)+1}{s(s^2+1)} = s(s^2-1) + \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$= s^3 - s + \frac{1+s^2-s^2}{s(s^2+1)} = s^3 - s + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

(si trova lo stesso risultato dividendo prima numeratore per denominatore, e decomponendo in fratti semplici poi).

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}(s^3) - \mathcal{L}^{-1}(s) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$= \delta_0^{(3)} - \delta_0' + H(t) - \cos(t)H(t).$$

(oss: alla funzione $\frac{1}{s(s^2+1)}$ si può applicare la formula di Heaviside)

Esercizio 8 (5 punti)
a) Scrivere la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto.

b) Usando tale definizione, calcolare $\mathcal{F}(\delta_{x0})$, la trasformata di Fourier della delta di Dirac centrata in $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) $\forall \varphi$ funzione test

$$\langle \mathcal{F}(\delta_{x_0}), \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

$$= \langle \delta_{x_0}(\nu), \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2\pi i x_0 t} dt = \langle T_{e^{-2\pi i x_0 t}}, \varphi(t) \rangle$$

per cui $\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = T_{e^{-2\pi i x_0 t}}$, o, brevemente, $\mathcal{F}(\delta_{x_0})(t) = e^{-2\pi i x_0 t}$