7 Settembre 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF, MAT, CIN)

NOTA: **Il tempo totale assegnato per la soluzione è di 2 ore. Al termine dei primi 30 minuti verrà ritirato il foglio con i quiz a risposta multipla.**
Consegnare il testo completo di tutti i fogli, ricordandosi di riportare negli appositi spazi nome, cognome e matricola (in STAMPATELLO MAIUSCOLO). Nella tabellina qui sotto riportare al più una risposta per ogni quiz di teoria usando LETTERE MAIUSCOLE. Spiegazioni o commenti (opzionali) sulla risposta selezionata possono essere aggiunti nel campo COMMENTI che segue ogni quiz di teoria.

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	QUIZ DI TEORIA

Quiz	1	2	3
Risposta			

1. Il segnale $x(t) = \text{sinc}(f_0 t)\cos(2\pi f_1 t)$ con $f_0 = 10$ kHz e $f_1 = 16$ kHz viene campionato a 50 kHz, e ogni campione viene quantizzato su 64 livelli. Dire quali delle seguenti affermazioni è corretta:

   A) La frequenza di campionamento soddisfa il teorema del campionamento ed il bit rate generato è pari a 400 kbit/s

   B) La frequenza di campionamento soddisfa il teorema del campionamento ed il bit rate generato è pari a 3200 kbit/s

   C) La frequenza di campionamento è troppo bassa per soddisfare il teorema del campionamento

   D) La frequenza di campionamento soddisfa il teorema del campionamento ed il bit rate generato è pari a 300 kbit/s

   Se si ritiene che nessuna delle precedenti affermazioni sia corretta si risponda con E.

2. Si consideri il processo casuale $X(t) = \xi$, dove ξ è una variabile casuale gaussiana a valor medio nullo e varianza unitaria. Tale processo è

   A) stazionario ed ergodico

   B) ergodico ma non stazionario

   C) stazionario ma non ergodico (Per la fila B non è neanche stazionario)

   D) né stazionario né ergodico

   E) ergodico per la media ma non per l'autocorrelazione

3. Discutere linearità e invarianza temporale del sistema specificato dalla seguente relazione tra entrata e uscita:
$$y(t) = 4 + e^{x(t)}$$

A) lineare e invariante

B) non lineare e invariante

C) non lineare e non invariante

D) lineare e non invariante

4. La funzione $\frac{z}{z-1/2}$ con regione di convergenza $|z| < 1/2$ rappresenta:

A) La funzione di trasferimento di un sistema LTI (lineare e tempo invariante) numerico, non ricorsivo e fisicamente realizzabile

B) **La trasformata z di una sequenza $x[n]$ anticausale (diversa da zero per valori negativi di n)**

C) La funzione di trasferimento di un filtro IIR causale

D) Nessuna delle altre risposte

7 Settembre 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 1

Si consideri un processo casuale $X(t)$ stazionario in senso stretto del secondo ordine con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $(0, +1)$ e autocovarianza $K_X(\tau)$ a supporto limitato in $[-T, T]$. Si consideri ora il processo

$$Y(t) = \int_t^{t+2} X(\theta) d\theta$$

1. Calcolare media, varianza e potenza di $X(t)$
2. Il processo $Y(t)$ è stazionario in senso lato? è stazionario in senso stretto?
3. La relazione ingresso uscita è causale? rappresenta un sistema LTI?
4. Calcolare media, varianza e potenza di $Y(t)$ in funzione di $K_X(\tau)$
5. La statistica del prim'ordine di $Y(t)$, $f_Y(y;t)$, è a supporto limitato?
6. Calcolare a funzione di autocorrelazione di $Y(t)$ in funzione di $K_X(\tau)$.
7. Se il processo $Y(t)$ è stazionario, calcolare la densità spettrale di potenza $G_Y(f)$
8. E' possibile estrarre da $Y(t)$ due campioni $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ non correlati? Se la risposta è positiva indicare la distanza tra i due campioni.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

1. Essendo $X(t)$ stazionario, media, potenza e varianza sono costanti. Media:

$$m_X = E(X(t)) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \frac{1}{2}$$

Potenza coincide con il valore quadratico medio

$$P_X = E(X^2(t)) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{3}.$$

La varianza si ottiene sottraendo alla potenza il quadrato della media:

$$\sigma_X^2 = P_x - m_X^2 = \frac{1}{12}$$

2. Siccome la relazione ingresso-uscita rappresenta un sistema LTI (vedi punto successivo) il processo $Y(t)$ è anch'esso stazionario del second'ordine in senso stretto.

3. Possiamo scrivere:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_2(\theta - (t+1))X(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_2(t+1-\theta)X(\theta)d\theta = \Pi_2(t+1) * X(t)$$

   dove $\Pi_2(t)$ è la porta simmetrica di supporto 2. Il sistema dunque è LTI con risposta all'impulso $h(t) = \Pi_2(t+1)$. Siccome $h(t) \neq 0 \; \forall t < 0$ il sistema *non* è causale.

4. La media $Y(t)$ si ottiene come segue

$$m_Y = H(0)m_X = m_X \int h(t)dt = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

   Non possiamo calcolare la varianza e la potenza esplicitamente, ma possiamo scrivere.

$$P_Y = R_Y(\tau)|_{\tau=0} = [R_X(\tau) * R_h(\tau)]_{\tau=0} = m_Y^2 + [K_X(\tau) * R_h(\tau)]_{\tau=0}$$

   dove $R_X(\tau) = K_X(\tau) + m_X^2$ e $R_h(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso $h(t) = \Pi_2(t+1)$:

$$R_h(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) = 2\Lambda_2(\tau) = 2\Lambda_1(\tau/2).$$

   Quindi $\sigma_Y^2 = P_Y - m_Y^2 = P_Y - 1$

5. I valori che $Y(t)$ può assumere sono limitati, infatti

$$Y(t) = \int_t^{t+2} X(\theta)d\theta \leq \int_t^{t+2} \max_\theta(X(\theta))d\theta = \int_t^{t+2} 1d\theta = 2$$

   e

$$Y(t) = \int_t^{t+2} X(\theta)d\theta \geq \int_t^{t+2} \min_\theta(X(\theta))d\theta = \int_t^{t+2} 0d\theta = 0$$

   quindi $f_Y(y)$ ha supporto limitato in $[0, 2]$.

6. Vedi punto 4.

7.

$$\begin{aligned} G_Y(f) &= G_X(f)|H(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}|H(f)|^2 \\ &= 4\text{sinc}^2(2f)\mathcal{F}\{R_X(\tau)\} \\ &= 4\text{sinc}^2(2f)\left(m_X^2\delta(f) + \mathcal{F}\{K_X(\tau)\}\right) \end{aligned}$$

8. Benchè $K_X(\tau)$ non sia nota, sappiamo che è a supporto limitato. Siccome la convoluzione somma i supporti la autocovarianza K_Y ha supporto limitato in $[-2-T, 2+T]$. Affinché $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ siano non correlati la loro covarianza deve essere nulla. Quindi $K_Y(t_2 - t_1)$ deve essere nullo. Questo accade $\forall |t_2 - t_1| \geq T + 2$.

7 Settembre 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema a tempo discreto causale con funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{2\left(1 - \beta z^{-1}\right)}{1 - \frac{\alpha}{2} z^{-1} - \frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}}$$

1. Per quali valori di α e β il sistema è stabile? Per quali valori di α e β il sistema è a fase minima?
2. Scrivere la relazione ingresso/uscita in termini dell'equazione alle differenze.
3. Disegnare il diagramma a blocchi del sistema.
4. Calcolare la risposta all'impulso del sistema nel caso in cui $\alpha = +\frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2

1.
$$H(z) = \frac{2\left(1 - \beta z^{-1}\right)}{1 - \frac{\alpha}{2} z^{-1} - \frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}} = \frac{2z\,(z-\beta)}{z^2 - \frac{\alpha}{2} z - \frac{1}{2}\alpha^2}$$

I poli di $H(z)$ sono le radici del denominatore:

$$z^2 - \frac{\alpha}{2} z - \frac{1}{2}\alpha^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + 2\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha}{4} \pm \frac{3}{4}\alpha$$

$p_1 = \alpha$, $p_2 = -\frac{\alpha}{2}$.

Gli zeri di $H(z)$ sono le radici del numeratore: $z(z-\beta) = 0 \rightarrow z_1 = \beta,\ z_2 = 0$.

Un sistema causale è stabile se il modulo di tutti i poli è minore di 1, condizione verificata per $|\alpha| < 1$ nel caso in cui il polo in α non venga cancellato dallo zero in β. Se invece $\beta = \alpha$, allora il polo in α viene cancellato dallo zero e il sistema è stabile se $|\alpha| < 2$.

Un sistema causale è a fase minima se il modulo dei poli e degli zeri è minore di 1, quindi se $|\alpha| < 1$ e $|\beta| < 1$ (se non avvengono cancellazioni tra poli e zeri).

2.
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2\left(1-\beta z^{-1}\right)}{1-\frac{\alpha}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}}$$

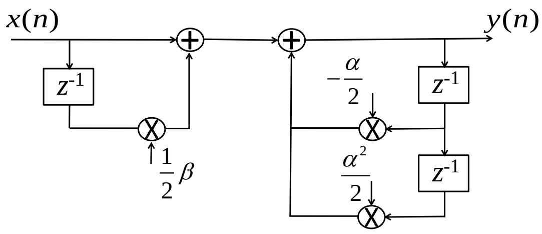
$$Y(z)\left(1-\frac{\alpha}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}\right) = 2X(z)\left(1-\beta z^{-1}\right)$$

$$Y(z)-\frac{\alpha}{2}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{2}\alpha^2 z^{-2}Y(z) = 2X(z)-2\beta z^{-1}X(z)$$

$$y(n)-\frac{\alpha}{2}y(n-1)-\frac{1}{2}\alpha^2 y(n-2) = 2x(n)-2\beta x(n-1)$$

$$y(n) = \frac{\alpha}{2}y(n-1)+\frac{1}{2}\alpha^2 y(n-2)+2x(n)-2\beta x(n-1)$$

3. Diagramma a blocchi del sistema:



4. Nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, la funzione di trasferimento $H(z)$ vale:

$$H(z) = \frac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

Poli:

$$p_1 = \frac{1}{2} \quad p_2 = -\frac{1}{4}$$

Applico il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$H(z) = \frac{R_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{R_1}{1-p_2 z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = \left.\frac{2+z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2+2}{1+\frac{1}{4}\cdot 2} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$R_2 = \left.\frac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{2-4}{1-\frac{1}{2}\cdot(-4)} = -\frac{2}{3}$$

$$H(z) = \frac{8/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

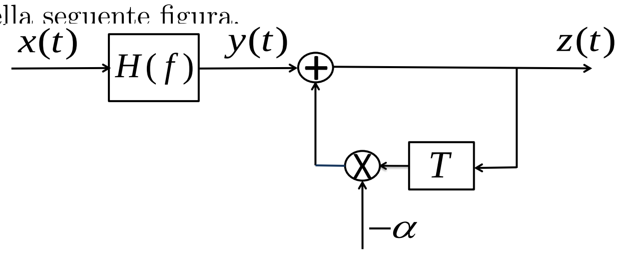
7 Settembre 2018
Teoria ed elaborazione dei segnali (INF-CIN-MAT)

Cognome	
Nome	
Matricola	
Compito	A
	ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente segnale:

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - 2nT) \qquad \text{con} \quad p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{se} \quad |t| < T \\ 0 & \text{se} \quad |t| > T \end{cases}$$

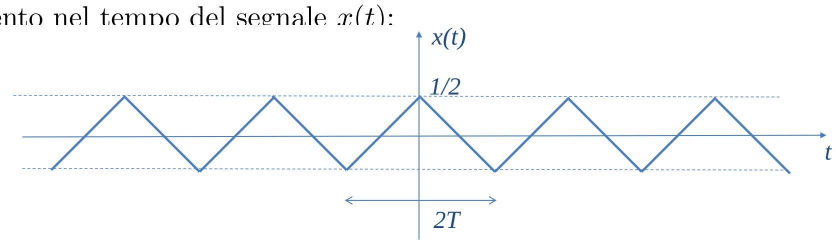
dove T è un numero reale positivo. Il segnale $x(t)$ passa attraverso un filtro passa-basso ideale $H(f)$ di ampiezza unitaria e banda B, generando il segnale $y(t)$ e successivamente il segnale $z(t)$, come descritto nella seguente figura.



1. Disegnare l'andamento nel tempo del segnale $x(t)$.
2. Calcolare la potenza P_x e lo spettro di potenza $G_x(f)$ del segnale $x(t)$.
3. Calcolare il valore che deve assumere la banda B del filtro passbasso ideale affinché il segnale $y(t)$ sia una sinusoide e scrivere l'espressione di $y(t)$.
4. Scrivere l'espressione del segnale $z(t)$ quando il segnale $y(t)$ ha l'espressione ricavata al punto 3.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3

1. Andamento nel tempo del segnale $x(t)$:



2. La potenza di $x(t)$ (segnale periodico di periodo $2T$) può essere calcolata come:

$$P_x = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

$x(t)$ è una funzione reale e pari, quindi:

$$P_x = 2\frac{1}{2T} \int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{4} + \frac{t^2}{T^2} - \frac{t}{T}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{4}t + \frac{t^3}{3T^2} - \frac{t^2}{2T}\right]_0^T = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{4}T + \frac{T}{3} - \frac{T}{2}\right] = \frac{1}{12}$$

La trasformata di Fourier di $x(t)$ è pari a:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{n}{2T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

dove:

$$P(f) = T\mathrm{sinc}^2(fT)$$
$$P\left(\frac{n}{2T}\right) = T\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

Sostituendo:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

La funzione $\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$ è diversa da zero solamente se n è dispari ($n = 2k+1$) oppure se $n = 0$:

$$X(f) = -\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2k+1}{2}\right)\delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\pi\frac{2k+1}{2}\right)}{\left(\pi\frac{2k+1}{2}\right)^2}\delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

Lo spettro di potenza vale quindi:

$$G_x(f) = \frac{4}{\pi^4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}\delta\left(f - \frac{2k+1}{2T}\right)$$

3. La trasformata $X(f)$ è composta da una serie di delta alle frequenze $f_k = \frac{2k+1}{2T}$. Le due delta attorno all'origine hanno frequenza $\pm\frac{1}{2T}$, le successive hanno frequenza $\pm\frac{3}{2T}$. Per selezionare solamente le due delta centrali, la banda del filtro passabasso deve quindi essere compresa tra $\frac{1}{2T}$ e $\frac{3}{2T}$, ossia $\frac{1}{2T} < B < \frac{3}{2T}$.
La trasformata di Fourier di $y(t)$ è pari a:

$$Y(f) = \frac{2}{\pi^2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right]$$

La sua antitrasformata vale:

$$y(t) = \frac{4}{\pi^2}\cos\left(2\pi\frac{1}{2T}t\right) = \frac{4}{\pi^2}\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

4. La relazione tra $z(t)$ e $y(t)$ è:

$$z(t) = y(t) - \alpha z(t-T)$$

Applicando la trasformata di Fourier:

$$Z(f) = Y(f) - \alpha Z(f)\mathrm{e}^{-j2\pi fT}$$

Da qui si ricava che la funzione di trasferimento del sistema che ha all'ingresso $y(t)$ e in uscita $z(t)$ è pari a:

$$H_2(f) = \frac{Z(f)}{Y(f)} = \frac{1}{1 + \alpha \mathrm{e}^{-j2\pi fT}}$$

All'ingresso del sistema è posta una sinusoide di frequenza $f_0 = \frac{1}{2T}$. Il segnale in uscita sar à ancora una sinusoide con la stessa frequenza:

$$z(t) = |H_2(f_0)| \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\pi \frac{t}{T} + \arg\{\mathrm{H_2(f_0)}\}\right)$$

con:

$$H_2(f_0) = \frac{1}{1 + \alpha \mathrm{e}^{-j2\pi \frac{1}{2T} T}} = \frac{1}{1 + \alpha \mathrm{e}^{-j\pi}} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Quindi:

$$z(t) = \frac{4}{\pi^2 (1 - \alpha)} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$