POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Richiami e Complementi di Teoria dei Circuiti

Sistemi Elettronici e Tecnologie

- I sistemi elettronici studiati nel corso sono ***circuiti elettrici***.
- Per uno studio proficuo, *è indispensabile avere piena padronanza dei contenuti del corso di Elettrotecnica*
- Si presenterà ora una panoramica dei principali concetti che verranno utilizzati ampiamente nel seguito e si assumono per noti.
- Si integreranno i concetti visti ad Elettrotecnica con concetti nuovi utili a introdurre le caratteristiche elettriche dei sistemi elettronici.

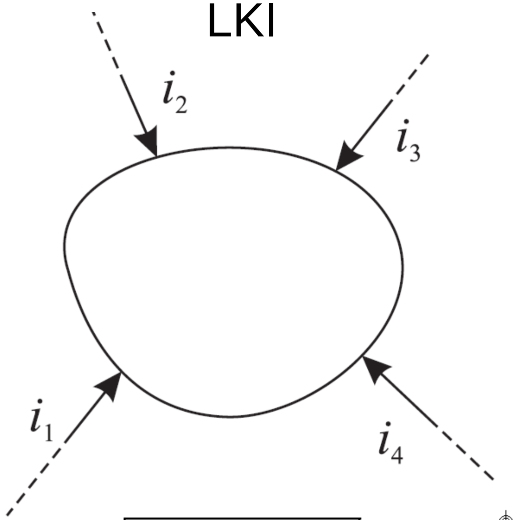
Concetti di Base

- Tensione e corrente
  - LKV e LKI
- Bipoli Lineari
  - Convenzioni di segno e potenza
  - Generatori indipendenti: relazioni costitutive
  - Bipoli lineari: resistori, condensatori e induttori: relazioni costitutive
  - Connessioni in Serie e Parallelo
  - Partitore di Tensione e di Corrente
  - Principio di Sovrapposizione degli Effetti
  - Teorema di Millman
  - Resistenza equivalente
  - Bipoli equivalenti Thévénin e Norton

Concetti di Base

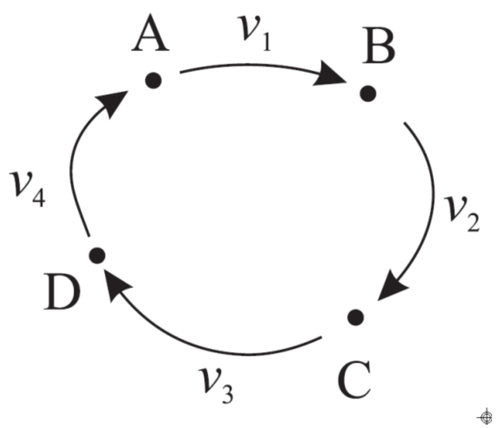
- Tensione e corrente
- Leggi di Kirchoff delle tensioni (LKV) e delle correnti (LKI): conoscerle e saperle usare…

LKI



$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} i_i = 0}$$

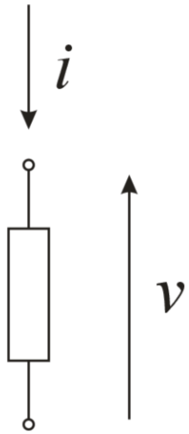
LKV



$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} v_i = 0.}$$

Bipoli

- Elementi a due terminali
- Si definiscono una tensione *v* ai capi del bipolo ed una corrente *i* che in esso fluisce
- caratterizzati da una *relazione costitutiva* che esprime un legame tra *v* ed *i*



relazioni costitutive

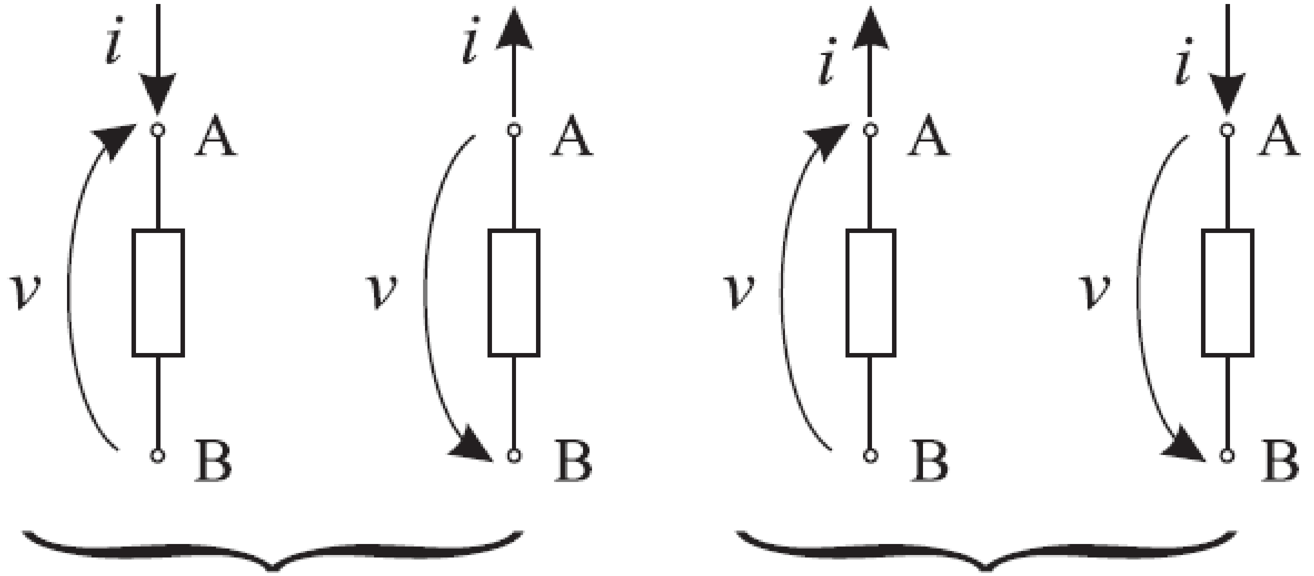
$g(v, i, t) = 0$ relazione in forma implicita

$i = f(v)$ bipolo (tempo-invariante) controllato in tensione

$v = f(i)$ bipolo (tempo-invariante) controllato in corrente

Bipoli

- Convenzioni di segno e significato energetico



Convenzione di segno
degli utilizzatori

Potenza ***assorbita*** dal bipolo

$$P_{\mathrm{a}}(t) = v(t)i(t)$$

Convenzione di segno
dei generatori

Potenza ***erogata*** dal bipolo

$$P_{\mathrm{d}}(t) = v(t)i(t)$$

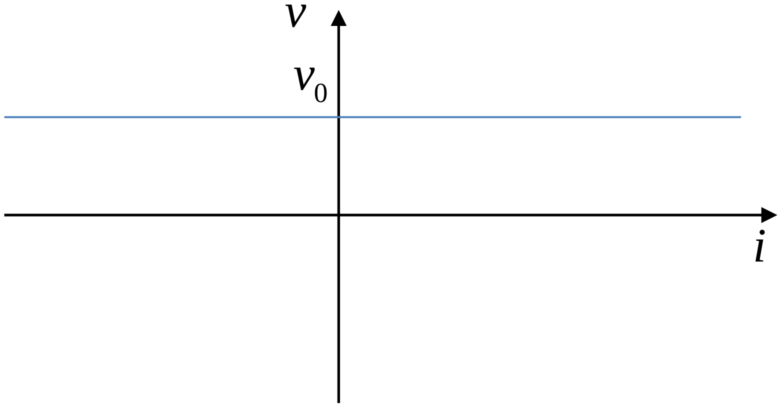
Bipoli Lineari (affini) adinamici

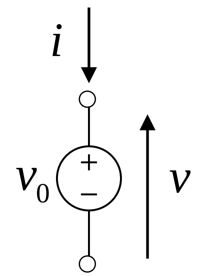
- La più generale relazione di un bipolo lineare (affine), tempo-invariante e adinamico (resistivo, senza memoria)

$$\alpha v + \beta i + \gamma = 0 \qquad [\alpha] = V^{-1}, [\beta] = A^{-1}, [\gamma] = num$$

- Tutti i bipoli visti nel corso di elettrotecnica hanno relazioni deducibili da questa

Generatore indipendete di tensione



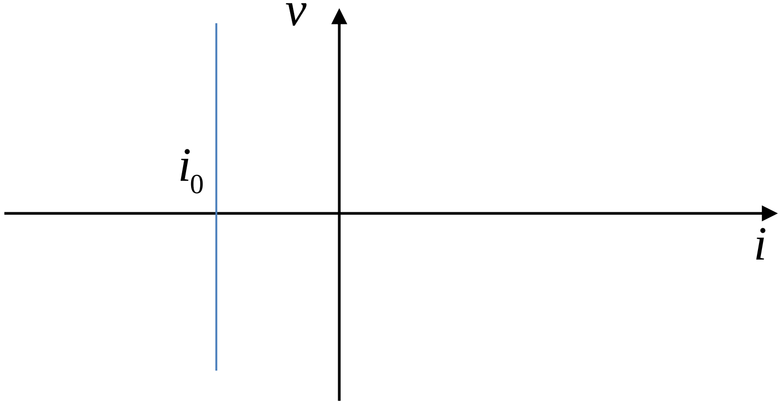


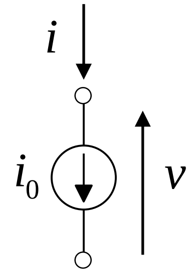
$$v = v_0 \; (\forall i)$$

$$\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma \neq 0$$

Bipoli Lineari (affini) adinamici - II

Generatore indipendete di corrente

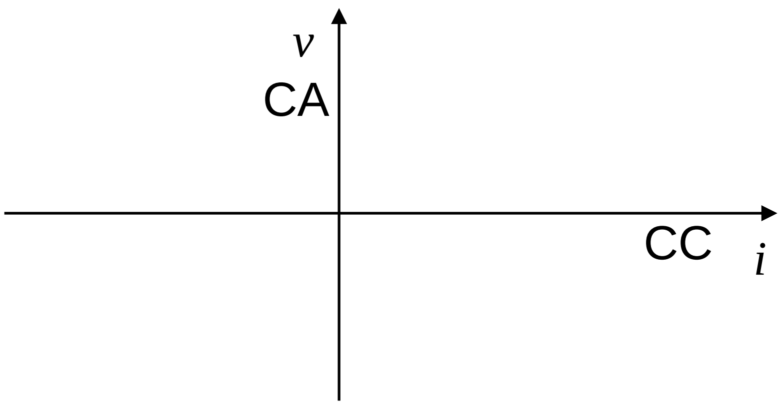


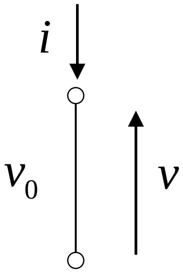


$$i = i_0 \ (\forall v)$$

$$\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$$

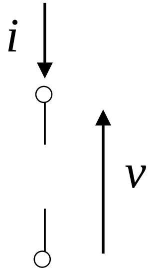
Cortocircuito e circuito aperto





$$v = 0 \ (\forall i)$$

$$\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

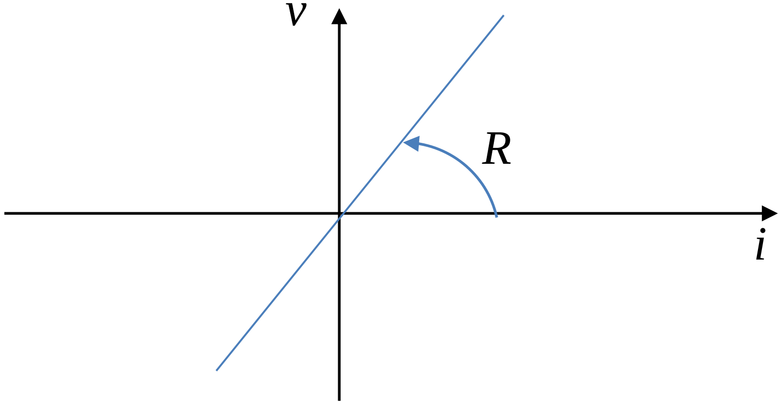


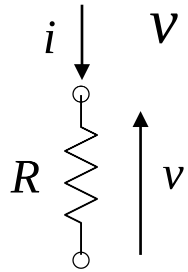
$$i = 0 \ (\forall v)$$

$$\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$$

Bipoli Lineari (affini) adinamici - III

Resistore (a parametri R)

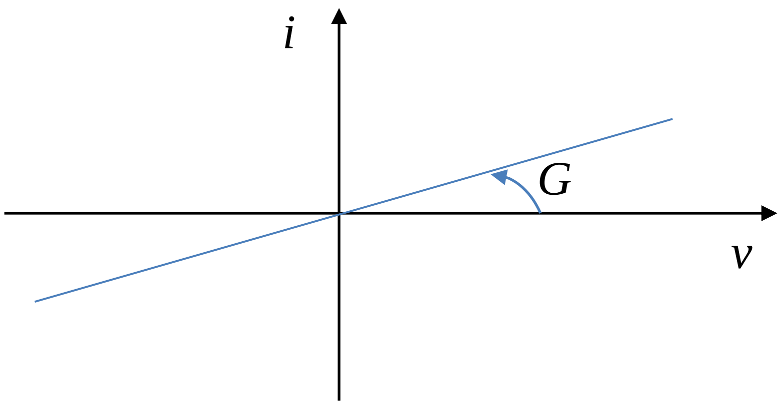


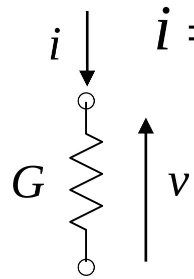


$$v = Ri$$

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$$

Resistore (a parametri G)





$$i = Gv$$

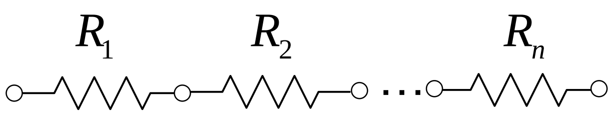
$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = 0$$

- Note:

1. Le relazioni $v = Ri$ e $i = Gv$ valgono solo considerando tensioni e correnti scelti secondo **la convensione dell" utilizzatore**
2. $G = 1/R$ per $R \neq 0$
3. CC e CA possono essere considerati casi particolari di generatori ideali di tensione (con $v_0 = 0$) e corrente (con $i_0 = 0$) e di un resistore (con $R = 0$ o con $G = 0$)

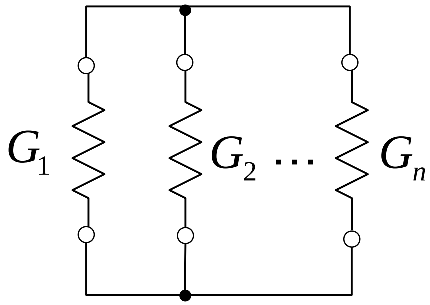
Connessione in Serie e Parallelo

- Serie: i bipoli hanno a due a due un morsetto in commune (che non è collegato a nient'altro)



$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

- Parallelo: I bipoli formano un unico taglio

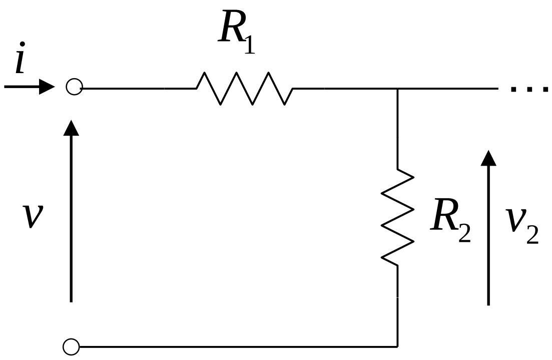


$$G_{eq} = \sum_{k=1}^{n} G_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \right)$$

- Per $n = 2$, $R_{eq} = R_1 + R_2$ per la serie $R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ per il parallelo

Partitore di tensione e di corrente

- Partitore di tensione

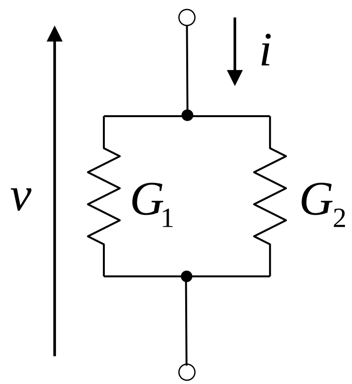


$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \qquad v_2 = R_2 i$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

Rapporto di partizione

- Partitore di corrente



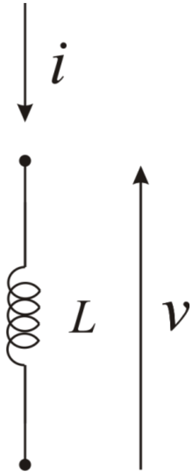
$$v = \frac{i}{G_1 + G_2} \qquad i_2 = G_2 v$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} v$$

Rapporto di partizione

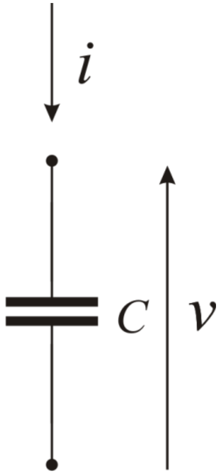
Concetti di Base

- Bipoli lineari dinamici (reattivi, con memoria)
  - Induttori ideali
  - Condensatori ideali



Induttore ideale

$$v = L\frac{di}{dt}$$



Condensatore ideale

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Concetti di Base

- Principio (Teorema) di sovrapposizione degli effetti

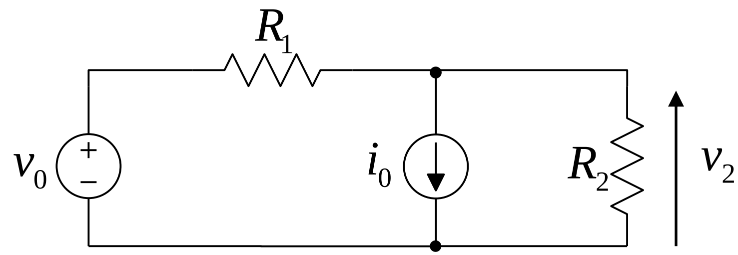
  Presa una rete elettrica **lineare** con n_v generatori indipendenti di tensione $(v_{01}, v_{02}, \ldots v_{0n})$ e n_i generatori indipendenti di corrente $(i_{01}, i_{02}, \ldots i_{0n})$, ciascuna tensione/corrente può essere scritta come combinazione lineare dei valori di tali sorgenti

$$v_j = \sum_{k=1}^{n_v} \alpha_k v_{0k} + \sum_{k=1}^{n_v} \beta_k i_{0k}$$

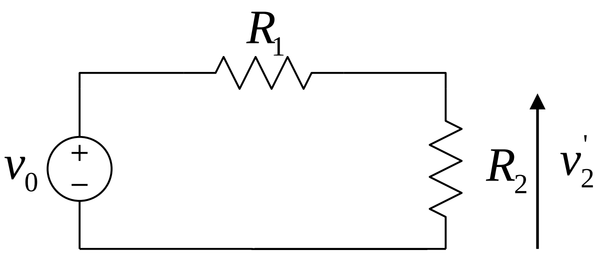
- In pratica si considera la soluzione della rete considerando l'effetto di ciascun generatore indipendente avendo annullato tutti gli altri
- Si ripete questa operazione per ciascun generatore
- Si sommano i risultati ottenuti

Sovrapposizione degli effetti - Esempio

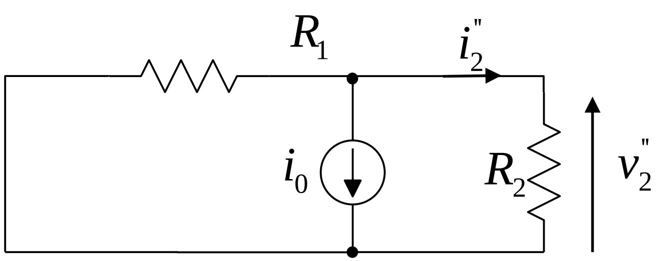
- Determino v_2' dal circuito ottenuto annullando i_0 (sostituendo il generatore di corrente con un CA)



$$R_1, R_2, i_0, v_0 \text{ noti, } v_2 = ?$$



$$v_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_0$$



$$v_2'' = R_2 i_2''$$

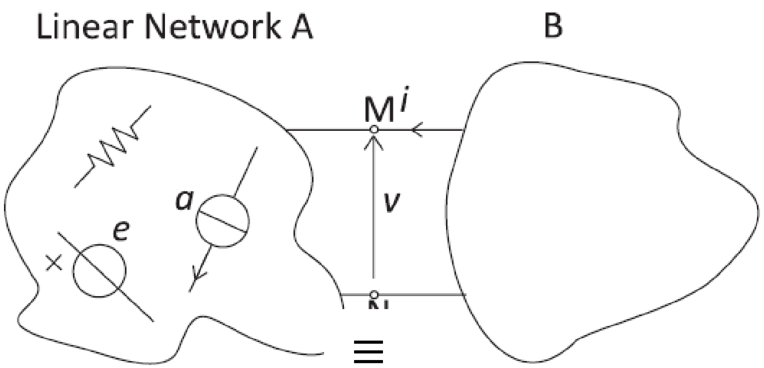
- Determino v_2'' da circuito ottenuto annullando v_0 (sostituendo il generatore di tensione con un CC)

$$v_2'' = R_2 \left(-\frac{G_2}{G_1 + G_2} i_0 \right) = -\frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} i_0$$

$$\boxed{v_2 = v_2' + v_2'' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_0 - \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2} i_0}$$

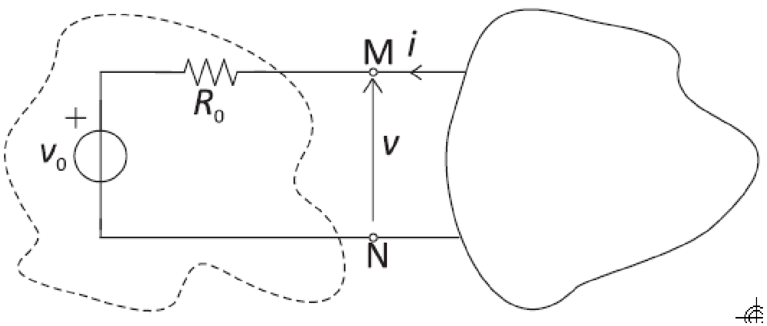
Concetti di Base

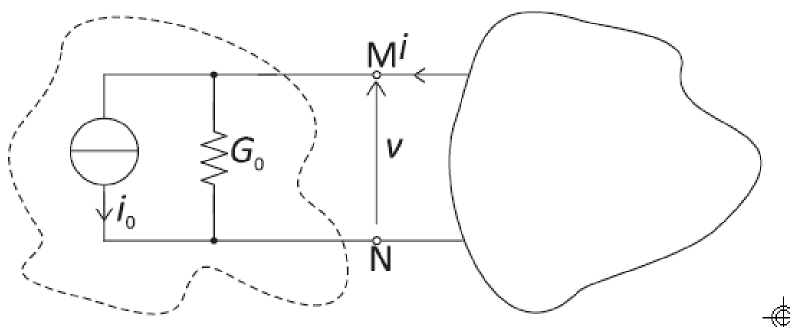
- Bipoli equivalenti di Thévénin e Norton (conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti)



- Una bipolo elettrico **lineare** (cioè formato dalla interconnessione di componenti lineari può essere sostitito da un bipolo equivalente di Thevenin o Norton, senza alterare il comportamento del resto della rete

$\equiv$ $\equiv$





Circuito equivalente di Thévénin

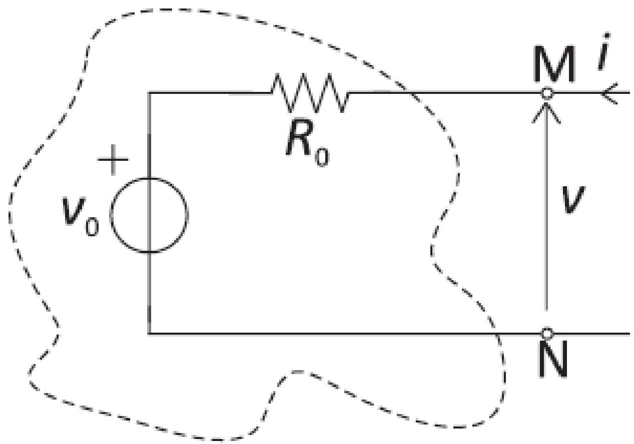
v_0: tensione a vuoto
R_0: resistenza equivalente

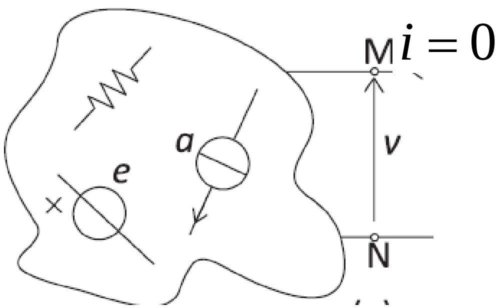
Circuito equivalente di Norton

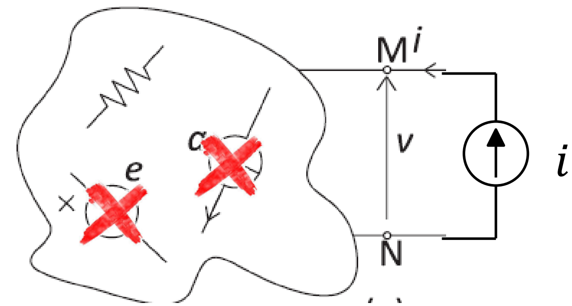
i_0: corrente di corto circuito
$G_0 = 1/R_0$: conduttanza equivalente

Bipoli di Thévénin

- Calcolo di v_0 e R_0





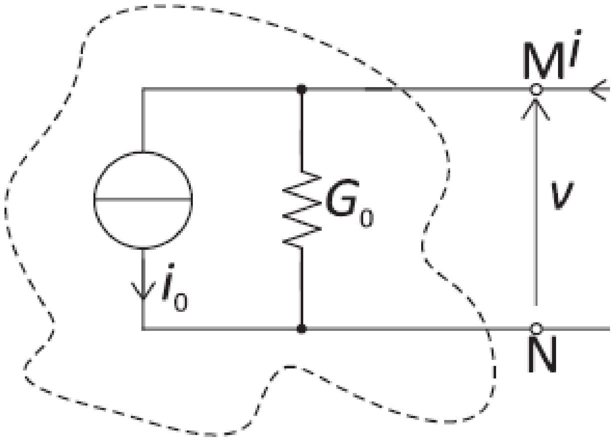


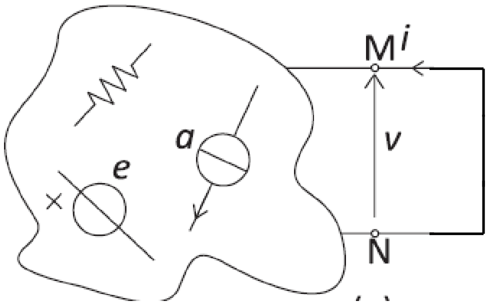
$$\boxed{v_0 = v_{CA} = v\big|_{i=0}}$$

$$\boxed{R_0 = \frac{v}{i}\bigg|_{e_k=0, a_k=0}}$$

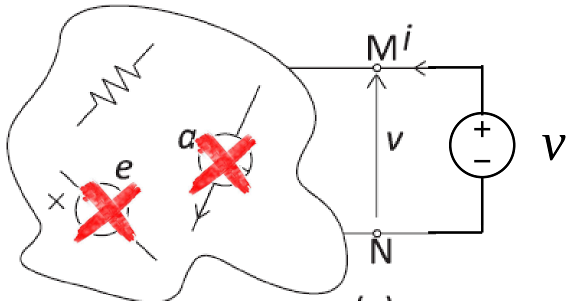
Bipoli di Norton

- Calcolo di i_0 e G_0





$$v = 0$$



$$\boxed{i_0 = i_{CC} = i\big|_{v=0}}$$

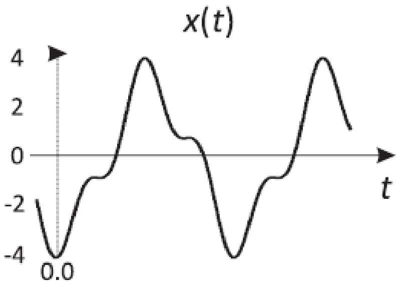
$$\boxed{G_0 = \frac{i}{v}\bigg|_{e_k=0,\,a_k=0}}$$

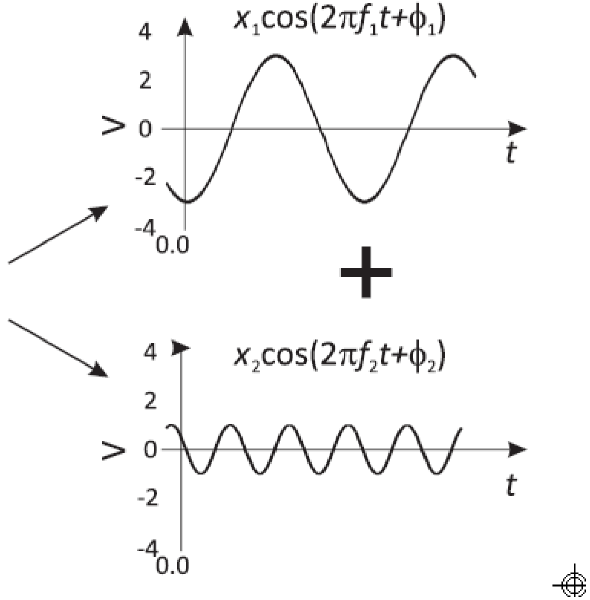
Concetti di Base

- Analisi di reti dinamiche nel dominio della frequenza
  - Impedenza, ammettenza
  - Funzioni di trasferimento
  - Diagrammi di Bode

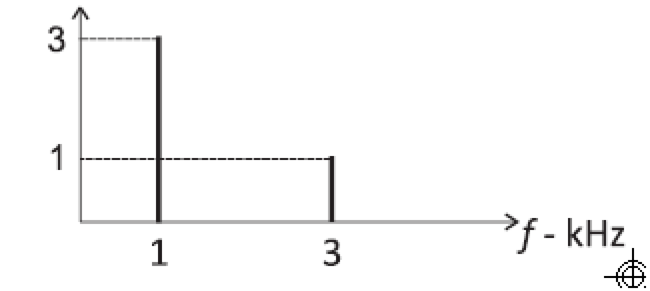
Segnale: Analisi nel dominio della frequenza

Segnale Periodico:

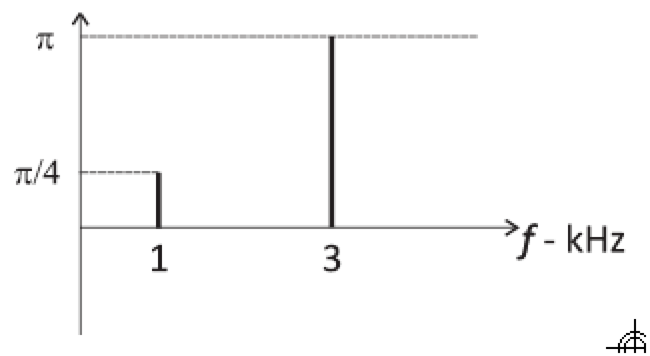




$|X(f)|$ - V Spettro di Ampiezza



$\phi(f)$ - rad Spettro di Fase

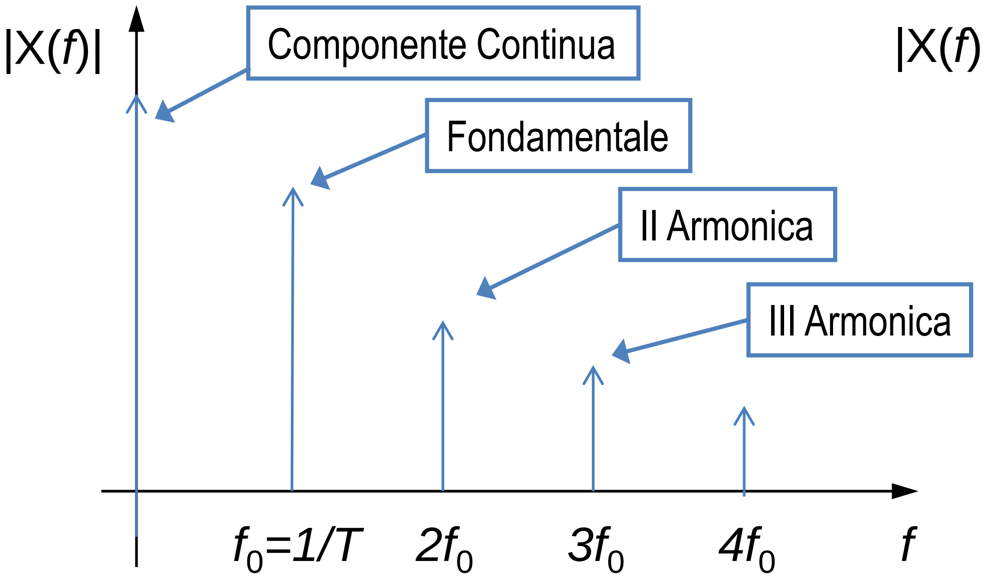


serie di Fourier

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

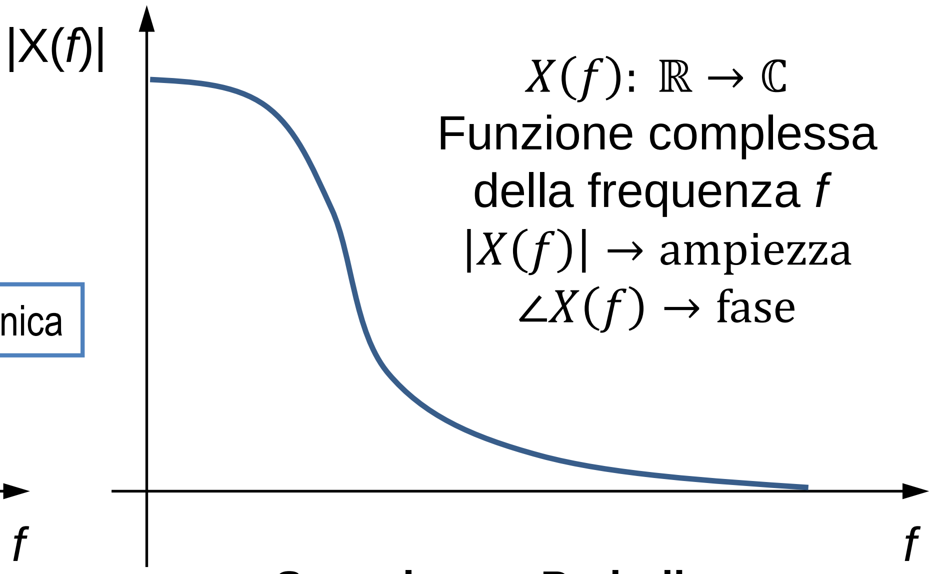
Segnale: Analisi nel dominio della frequenza

- Un generico segnale può essere scomposto nella somma di (infinite) sinusoidi con diversa *frequenza*, *ampiezza* e *fase.*



Segnale Periodico (periodo ***T=1/f*$_0$**):
solo componenti a frequenza *n/T, n* intero
Spettro a righe, Serie di Fourier

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$



$X(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
Funzione complessa della frequenza *f*
$|X(f)| \to$ ampiezza
$\angle X(f) \to$ fase

Segnale non Periodico:
Spettro continuo
Antitrasformata di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f.$$

Analisi nel dominio della frequenza: perché ?

- La risposta di un sistema ***lineare tempo-invariante*** (LTI) ad un ingresso sinusoidale a frequenza f_0 <u>è ancora una sinusoide a frequenza f_0.</u>
  - Questo non è vero in generale per ingressi non-sinusoidali
- Nel caso più generale, in un sistema LTI con ingresso sinusoidale a frequenza f_0 :
  - l'ampiezza della sinusoide in uscita è pari a quella della sinusoide in ingresso, moltiplicata per un fattore α che dipende da f_0.
  - l'uscita presenta uno sfasamento $\Delta\varphi$ che dipende da f_0.

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

$$y(t) = \alpha(f_0) X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x + \Delta\varphi(f_0))$$

Analisi nel dominio della frequenza: perché ?

- Se rappresentiamo la sinusoide $X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$ con un ***fasore***, cioè un numero complesso $X = X_0 e^{j\varphi_x} \in \mathbb{C}$
  - dove $|X| = X_0$, pari all'ampiezza della sinusoide
  - e dove $\angle X = \varphi_x$, pari alla fase della sinusoide,
- il numero complesso $Y = Y_0 e^{j\varphi_Y}$ che rappresenta l'uscita può essere espresso come $H(f_0)X$, dove $H(f_0) = \alpha(f_0) e^{j\Delta\varphi(f_0)}$ descrive come il sistema opera a frequenza f_0.

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

$$X = X_0 e^{j\varphi_x}$$

$$y(t) = \alpha(f_0) X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x + \varphi(f_0))$$

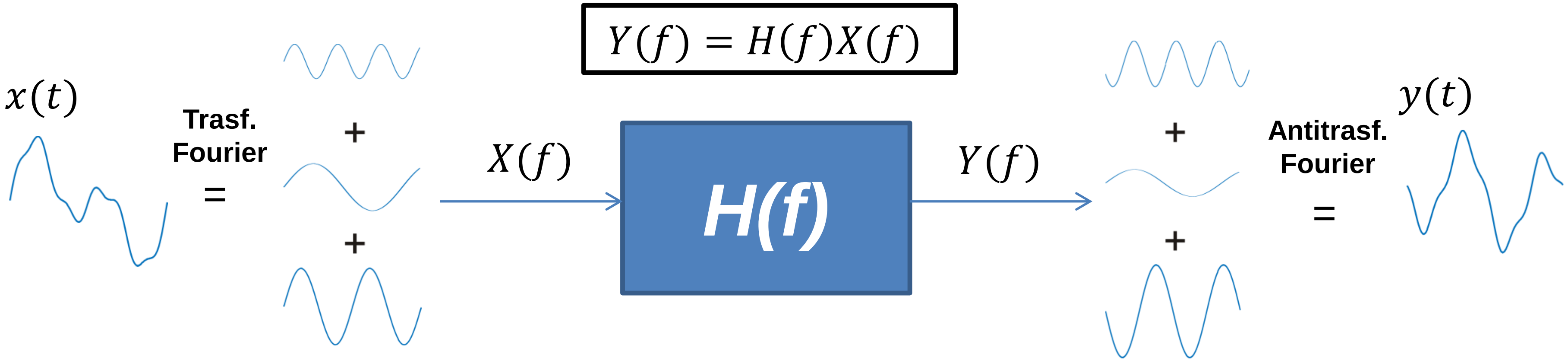
$$Y = \alpha(f_0) X_0 e^{j\varphi_x + \Delta\varphi(f_0)} = H(f_0) X$$

Analisi nel dominio della frequenza: perché ?

- Generalizzando il numero complesso $H(f_0)$ per una generica frequenza f del segnale in ingresso, la funzione $H(f)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, detta ***funzione di trasferimento (f.d.t.),*** permette di ottenere la risposta del sistema a qualsiasi ingresso *sinusoidale*

$$Y = H(f)X$$

- Con l'analisi di Fourier si può esprimere ***qualsiasi*** ingresso nel dominio della frequenza, cioè come somma di sinusoidi. Per linearità, l'uscita è data applicando la f.d.t. frequenza per frequenza e sovrapponendo gli effetti.
- L'uscita nel dominio della frequenza è data dal prodotto dell'ingresso nel dominio della frequenza per la funzione di trasferimento.



Analisi nel dominio della frequenza: perché ?

- L'analisi nel dominio della frequenza semplifica estremamente l'analisi dei sistemi dinamici LTI perché trasforma gli operatori integro-differenziali in operatori algebrici

$$\frac{d\,\cdot}{dt} \rightarrow j\omega \qquad\qquad \int_0^t \cdot\, dt' \rightarrow j\omega$$

- Strumenti matematici

Trasformata di Fourier:

$$X_F(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f t}dt$$

Funzione complessa della variabile reale 'frequenza' f, (o $\omega = 2\pi f$, 'frequenza angolare')

Considera segnali da $-\infty$ a $+\infty$ (tipicamente periodici), usata per studiare i sistemi LTI *a regime*

Trasformata di Laplace:

$$X_L(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)e^{st}dt$$

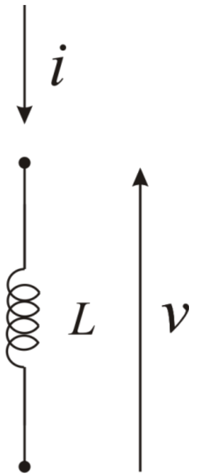
Funzione complessa della variabile complessa $s = \sigma + j\omega$ (*pulsazione complessa)*

Se interessa solo l'analisi *a regime* (sarà sempre così in questo corso) trasformate di Fourier e di Laplace si equivalgono e vale la relazione

$$X_F(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}\Big|_f = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\omega=j2\pi f} = X_L(j\omega) = X_L(j2\pi f)$$

Circuiti lineari dinamici nel dominio della frequenza

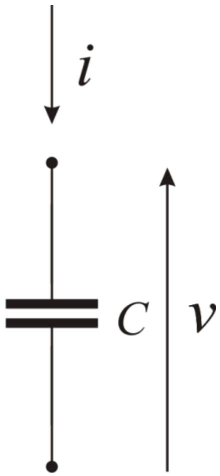
- L'analisi nel dominio della frequenza si applica in particolare ***a circuiti lineari con elementi dinamici*** (induttori, condensatori)



Induttore ideale

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$V(s) = sLI(s) = Z(s)I(s)$$



Condensatore ideale

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$I(s) = sCV(s) = Y(s)V(s) = {}^{V(s)}\!/_{Z(s)}$$

Impedenza ed Ammettenza

$$Z = sL \qquad Z = 1/sC$$

$$Y = 1/sL \qquad Y = sC$$

Equazioni costitutive nel dominio della frequenza

$$V = ZI$$

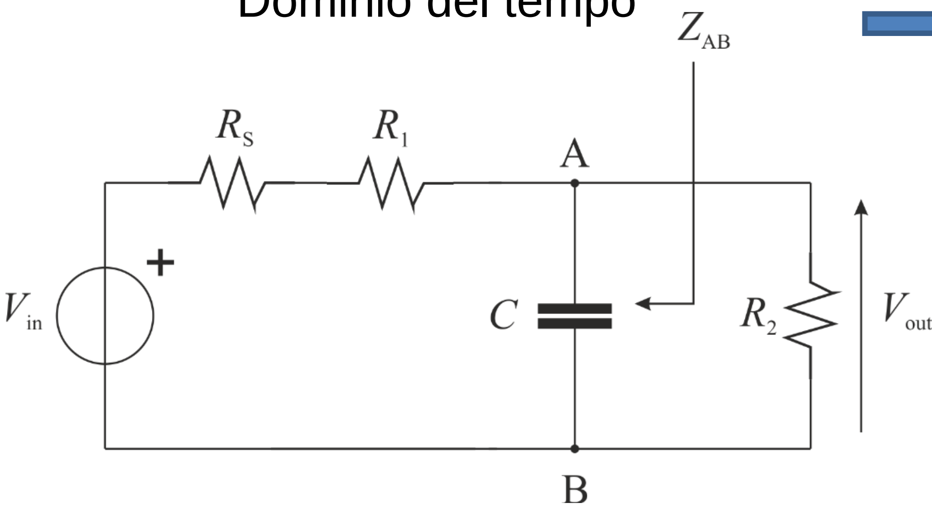
$$I = YV$$

- Utilizzando le relazioni costitutive nel dominio della frequenza i circuiti dinamici si analizzano con i metodi visti per quelli adinamici (LKV, LKI, partitori, ecc…)
- Si possono ricavare le *funzioni di trasferimento* tra sorgenti ed uscite

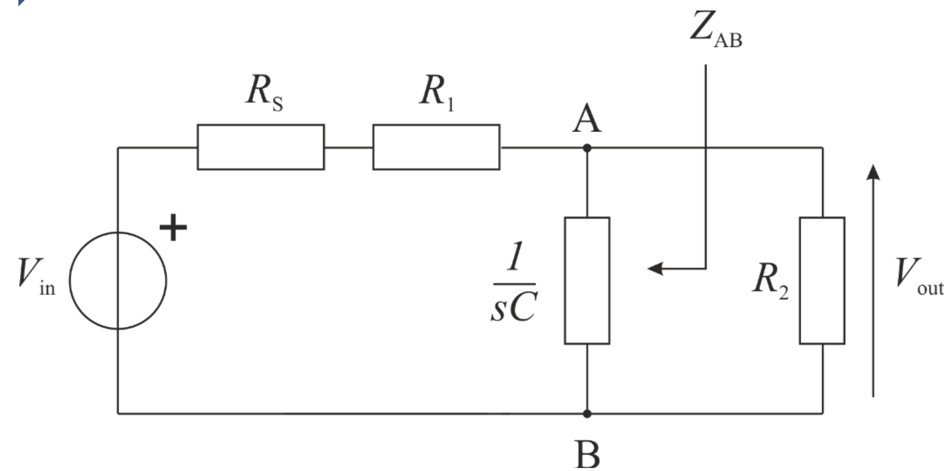
Esempio:

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$

Dominio del tempo



Dominio della frequenza



$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC} \parallel R_2}{R_1 + R_S + \frac{1}{sC} \parallel R_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{R_1 + R_S + \frac{R_2}{1 + sCR_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S + sCR_2(R_1 + R_S)}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}}$$

Diagrammi di Bode

- E' utile visualizzare graficamente l'andamento di una funzione di trasferimento.
- Consideriamo $H(j2\pi f) = H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ (Trasf. di Fourier)
- Le f.d.t. sono funzioni *a valori complessi*, occorre rappresentarne **modulo** e **fase** in funzione della *variabile reale* frequenza *f* (o pulsazione ω).
- Il **modulo** è rappresentato in unità logaritmiche (decibel, dB) per poterne apprezzare variazioni di ordini di grandezza sulla stessa scala.
- La **fase** è espressa in gradi o radianti.
- Per la **frequenza** si usa una scala logaritmica (interessa studiare la f.d.t. per frequenze che variano di diversi ordini di grandezza).
- Le rappresentazioni grafiche del modulo e della fase di una funzione di trasferimento descritte sopra prendono il nome di ***diagrammi di Bode.***

Diagrammi di Bode

- Esempio: $$H(s) = k\frac{1}{1 - s/s_p}$$ $$k = 0.5$$ $$s_p = -40.000 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$$

Diagramma del modulo

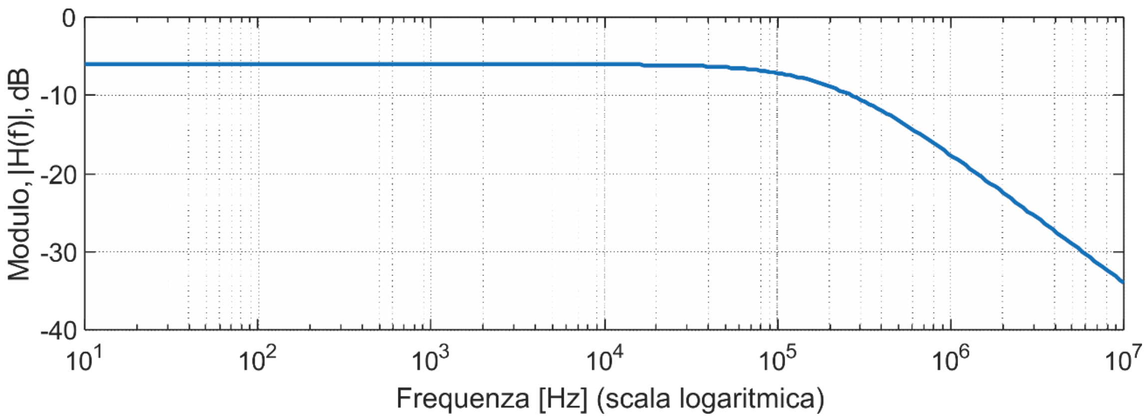
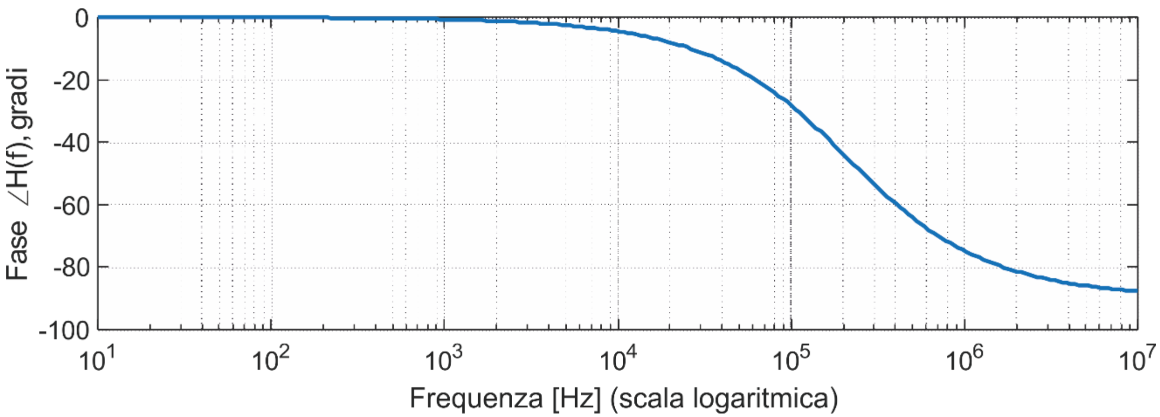


Diagramma della fase



E' importante saper tracciare a mano e con buona approssimazione i diagrammi di Bode di modulo e fase. Per farlo, si utilizza l'approssimazione asintotica 'a spezzate' illustrata nelle prossime slide

Diagrammi di Bode

- In generale, per un circuito lineare a parametri concentrati, le funzioni di trasferimento sono razionali fratte (rapporto di polinomi in *s*) e possono essere poste nella forma:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

$s_{z,i}$: **zeri**: radici complesse del polinomio a numeratore
$s_{p,i}$: **poli:** radici complesse del polinomio a denominatore

I polinomi a num. e den. sono a coefficienti reali → quindi i poli e gli zeri possono sono o reali o a coppie complesse coniugate. Nel seguito consideriamo solo il caso di poli e zeri ***reali*** (v. testi di riferimento per poli complessi).

- I diagrammi di Bode riportano il modulo (in decibel) e la fase (in gradi o radianti) della funzione di trasferimento valutata per $s = j\omega$ in funzione della frequenza (su scala logaritmica)

Modulo (in dB)

$$20 \log_{10}|H(j\omega)|$$

Fase

$$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}}$$

Diagrammi di Bode: Modulo (I)

- Modulo:

$$20\log_{10}|H(j\omega)| =$$

$$= 20\log_{10}|k|\omega^m \left| \frac{\prod_i \left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right)} \right|$$

$$= \underbrace{20\log_{10}|k|}_{\text{costante}} + \underbrace{20\,m\log_{10}\omega}_{\text{contributo di zeri/poli nell'origine}} + \underbrace{\sum_i 20\log_{10}\left|1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right|}_{\text{contributi degli zeri non nell'origine}} - \underbrace{\sum_i 20\log_{10}\left|1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right|}_{\text{contributi dei poli non nell'origine}}$$

Diagrammi di Bode: Modulo (II)

- Modulo:

Se la f.d.t. è **adimensionata** (è cioè un rapporto di grandezze omogenee, ad es. amplificazione di tensione, corrente,…) il modulo si esprime direttamente in decibel (dB)

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

Se la f.d.t. è **dimensionata** (è ad esempio un'impedenza, misurata in Ω, un'ammettenza, misurata in S,…), come unità logaritmica si usano i decibel riferiti all'unità di misura

	Unità Naturale	In unità logaritmiche…	Unità Logaritmica
Impedenza $|Z(j\omega)|$	Ω	$20\log_{10}\frac{|Z(j\omega)|}{1\Omega}$	dBΩ
Ammettenza $|Y(j\omega)|$	S	$20\log_{10}\frac{|Y(j\omega)|}{1S}$	dBS

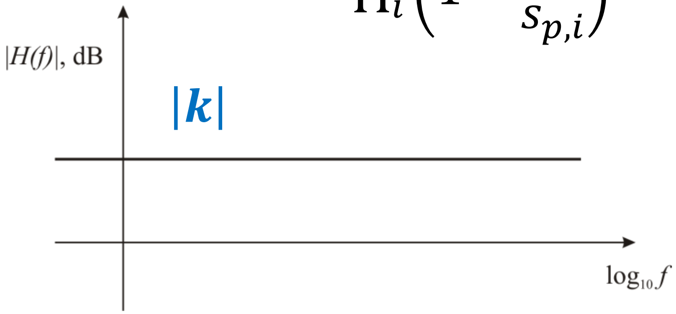
Diagrammi di Bode: Modulo (III)

- Modulo:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

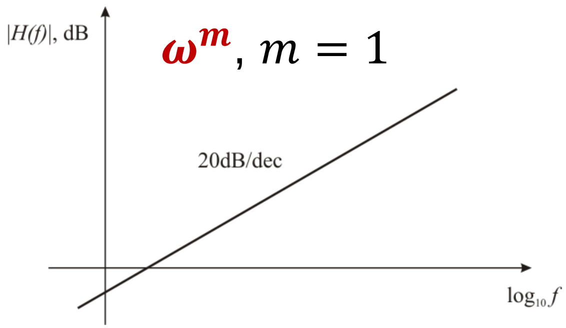
Contributo della costante moltiplicativa:

$20 \log_{10} k$ (costante in frequenza)



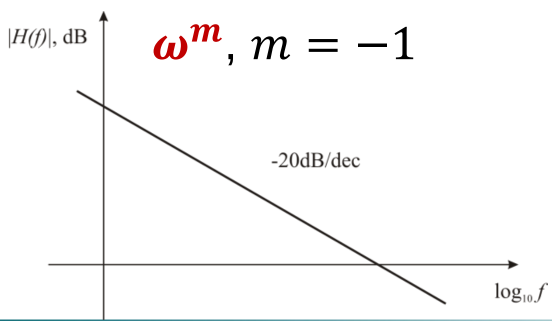
Contributo di uno zero semplice nell'origine (s^m con $m = 1$):

$$20 \log_{10} \frac{f}{1\text{Hz}}$$



Contributo di un polo semplice nell'origine (s^m con $m = -1$):

$$-20 \log_{10} \frac{f}{1\text{Hz}}$$



Diagrammi di Bode: Modulo (IV)

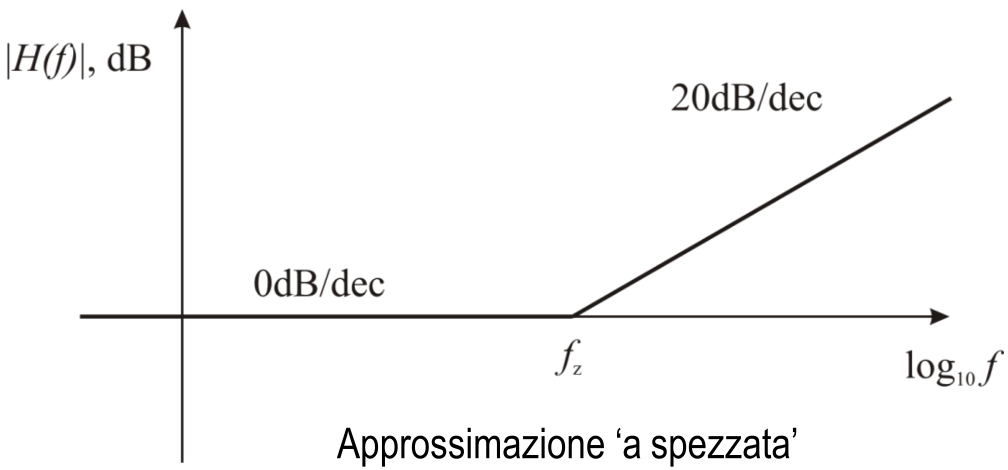
- Modulo:

  Contributo di uno **zero reale** $f_{z,i} \neq 0$

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{z,i} = \frac{|s_{z,i}|}{2\pi}$$

$$20\log_{10}\left|1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right| = 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_{z,i}^2}} = \begin{cases} 0\text{dB} & f \ll |f_{z,i}| \\ 3\text{dB} & f = |f_{z,i}| \\ 20\log_{10}\frac{f}{f_{z,i}} & f \gg |f_{z,i}| \end{cases}$$



Approssimazione 'a spezzata'

Diagrammi di Bode: Modulo (V)

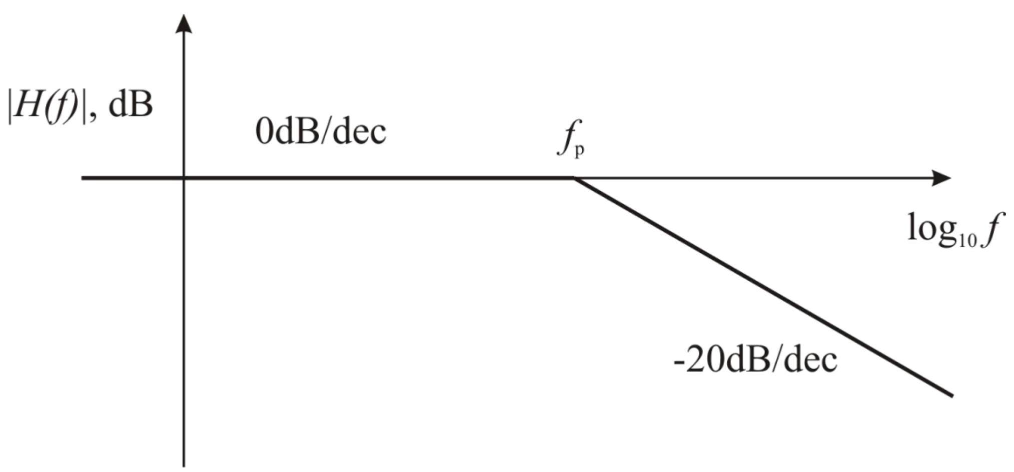
- Modulo:

  Contributo di un **polo reale** $f_{p,i} \neq 0$

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(\mathbf{1 - \frac{s}{s_{p,i}}}\right)}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{p,i} = \frac{|s_{p,i}|}{2\pi}$$

$$-20\log_{10}\left|1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right| = -20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_{p,i}^2}} = \begin{cases} 0\text{dB} & f \ll |f_{p,i}| \\ -3\text{dB} & f = |f_{p,i}| \\ -20\log_{10}\frac{f}{f_{p,i}} & f \gg |f_{p,i}| \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: Fase (I)

- Fase:

$$\angle H(j\omega) = \angle k + m\,90^\circ + \angle \prod_i \left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) - \angle \prod_i \left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right)$$

$$= \angle k + m\,90^\circ + \sum_i \angle \left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) - \sum_i \angle \left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right)$$

contributi zeri/poli nell'origine

contributi degli zeri non nell'origine

contributi dei poli non nell'origine

$$\angle k = \begin{cases} 0 \text{ per } k > 0 \\ 180^\circ \text{ per } k < 0 \end{cases}$$

Può essere espressa in gradi o in radianti

Diagrammi di Bode: Fase (II)

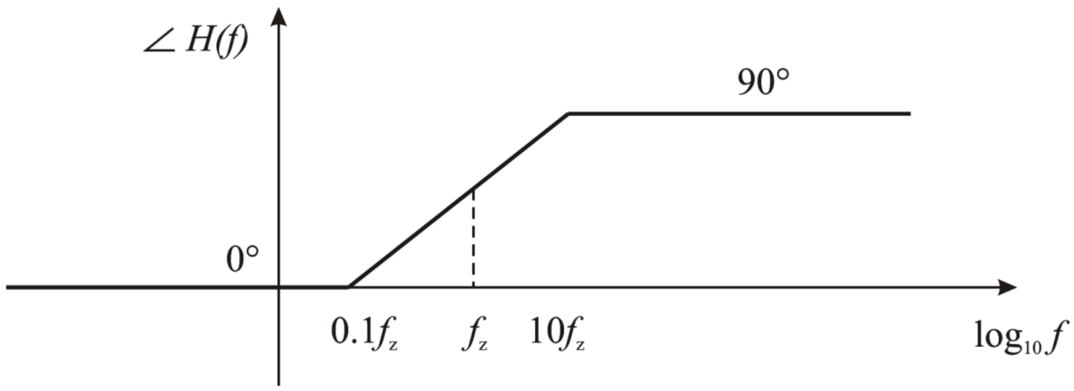
- Fase:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

Contributo di uno **zero reale negativo** $s_{z,i} < 0$ in $f_{z,i}$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{z,i} = \frac{|s_{z,i}|}{2\pi} \qquad s_{z,i} < 0 \rightarrow |s_{z,i}| = -s_{z,i}$$

$$\angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) = \arctan\frac{f}{f_{z,i}} = \begin{cases} 0^\circ & f \ll |f_{z,i}| \\ 45^\circ & f = |f_{z,i}| \\ 90^\circ & f \gg |f_{z,i}| \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: Fase (III)

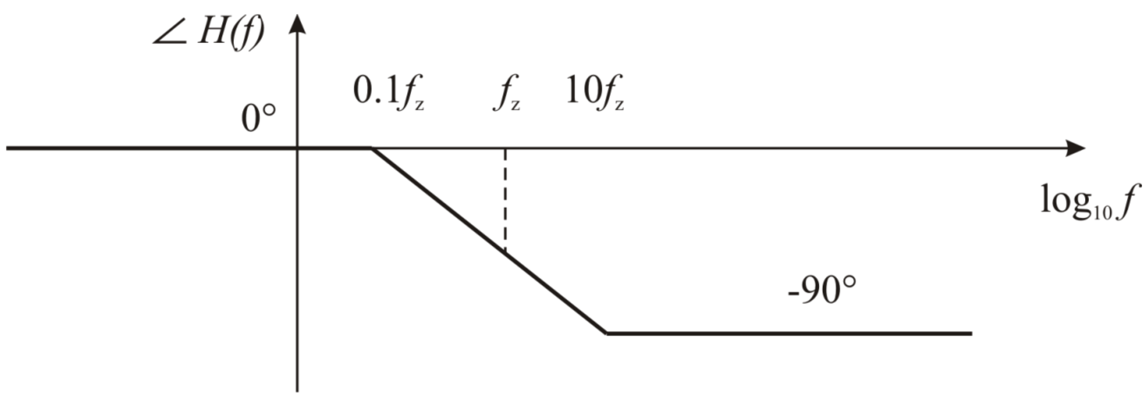
- Fase:

$$H(s) = k s^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

Contributo di uno **zero reale positivo** $s_{z,i} > 0$ in $f_{z,i}$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{z,i} = \frac{|s_{z,i}|}{2\pi}$$

$$\angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) = -\arctan\frac{f}{f_{z,i}} = \begin{cases} 0° & f \ll |f_{z,i}| \\ -45° & f = |f_{z,i}| \\ -90° & f \gg |f_{z,i}| \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: Fase (IV)

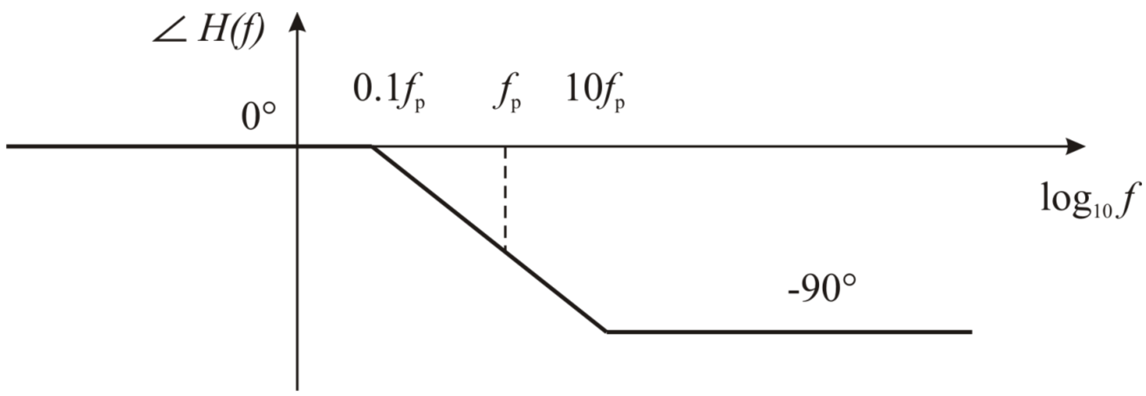
- Fase:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s_{p,i}}}\right)}$$

Contributo di uno **polo reale negativo*** $s_{p,i} < 0$ in $f_{p,i}$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{p,i} = \frac{|s_{p,i}|}{2\pi} \qquad s_{p,i} < 0 \rightarrow |s_{p,i}| = -s_{p,i}$$

$$-\angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right) = -\arctan\frac{f}{f_{p,i}} = \begin{cases} 0^\circ & f \ll |f_{p,i}| \\ -45^\circ & f = |f_{p,i}| \\ -90^\circ & f \gg |f_{p,i}| \end{cases}$$



* La presenza di poli con parte reale positiva implica instabilità, <u>pertanto si considerano solo poli con parte reale negativa</u>

Esercizio: analisi in frequenza

Con riferimento al circuito in figura:

1) determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.

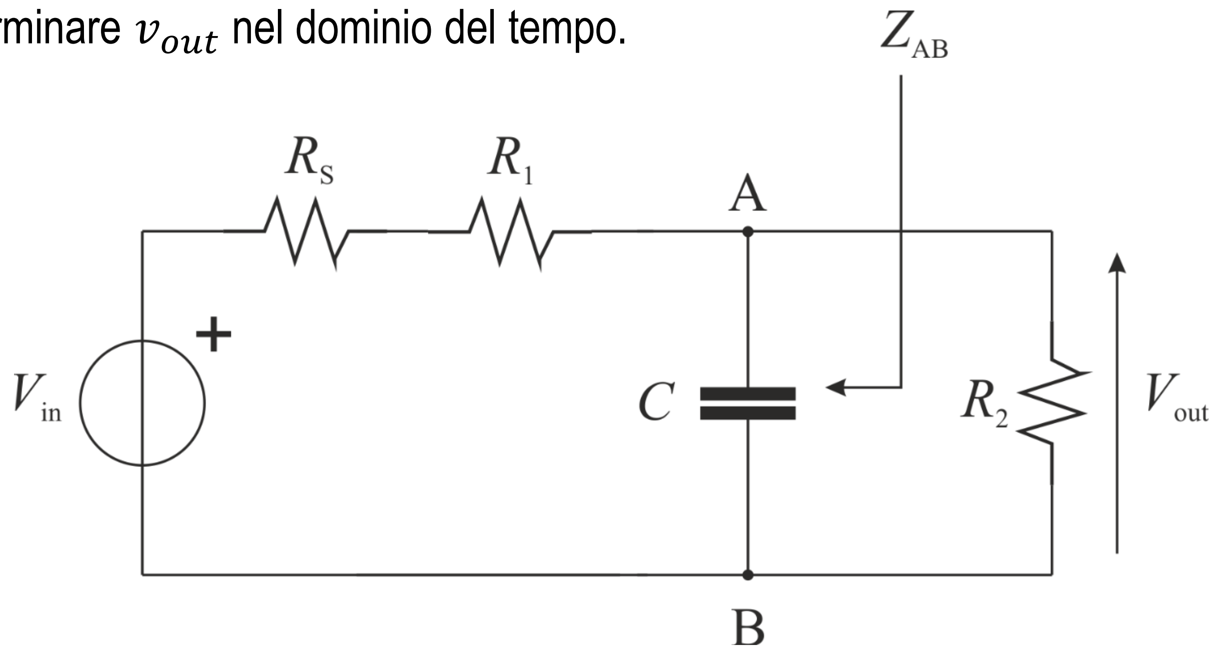
2) determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode

3) supponendo che venga applicato un segnale in ingresso

$$v_{in}(t) = \sum_{k=0}^{2} V_i \cos(2\pi k f_0 t + \phi_i),$$

con $f_0 = 20\text{kHz}, V_0 = 1\text{V}, \phi_0 = 0, V_1 = 2\text{V}, \phi_1 = 0, V_2 = 1\text{V}, \phi_2 = \frac{\pi}{4}$

determinare v_{out} nel dominio del tempo.



$R_S = 5\text{k}\Omega$

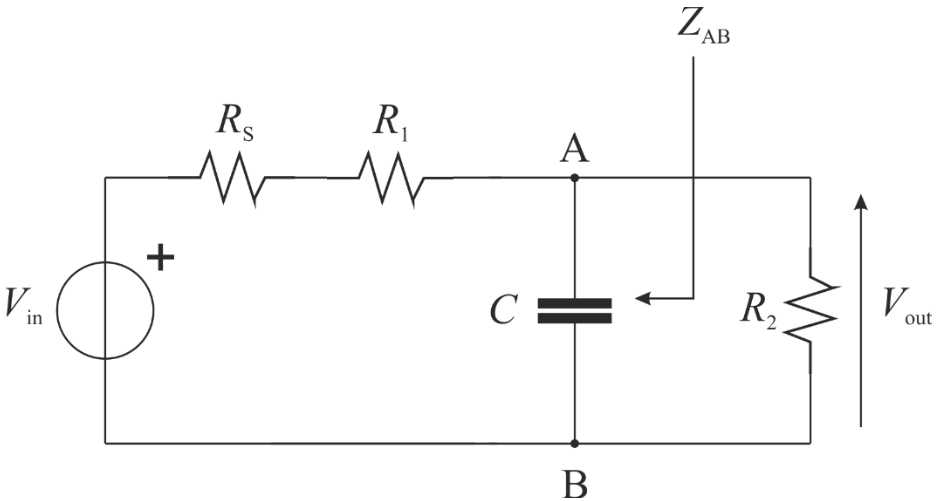
$R_1 = 5\text{k}\Omega$

$R_2 = 10\text{k}\Omega$

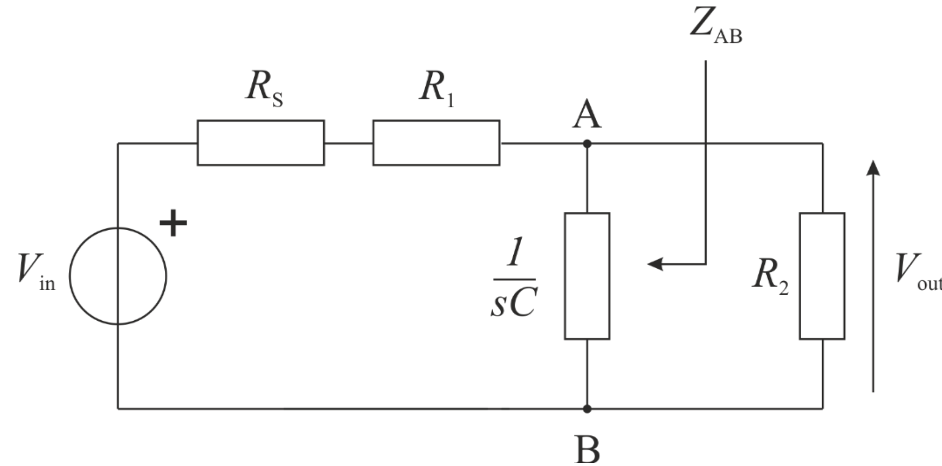
$C = \frac{5}{2\pi}\text{ nF}$

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.



Dominio della frequenza



$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC} \parallel R_2}{R_1 + R_S + \frac{1}{sC} \parallel R_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{R_1 + R_S + \frac{R_2}{1 + sCR_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S + sCR_2(R_1 + R_S)}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}}$$

Risposta in Frequenza: Esercizio

$$\boxed{H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}}$$

$R_S = 5\text{k}\Omega,\ R_1 = 5\text{k}\Omega$
$R_2 = 10\text{k}\Omega,\ C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$

1) Si identificano gli elementi dell'espressione generale, ordinando le singolarità (poli/zeri) in ordine di frequenza di taglio crescente

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)} \Longrightarrow H(s) = k \frac{1}{1 - s/s_p}$$

(c'è solo un polo e nessuno zero)

costante moltiplicativa: $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} = \frac{1}{2} \rightarrow -6\text{dB}$

un polo reale negativo in $s_p = -\frac{1}{C[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]} = -\frac{2\pi}{25} \frac{\text{rad}}{\mu\text{s}}$ → freq. di taglio $f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 40\text{kHz}$

2) Si tracciano i diagrammi di Bode del modulo e della fase (non quotati sull'asse delle ordinate) per i vari contributi, partendo da quelli a frequenza più bassa e sommando via via i successivi.

3) Si quotano i diagrammi sull'asse delle ordinate valutando la f.d.t. in uno o più punti significativi

Esercizio: analisi in frequenza

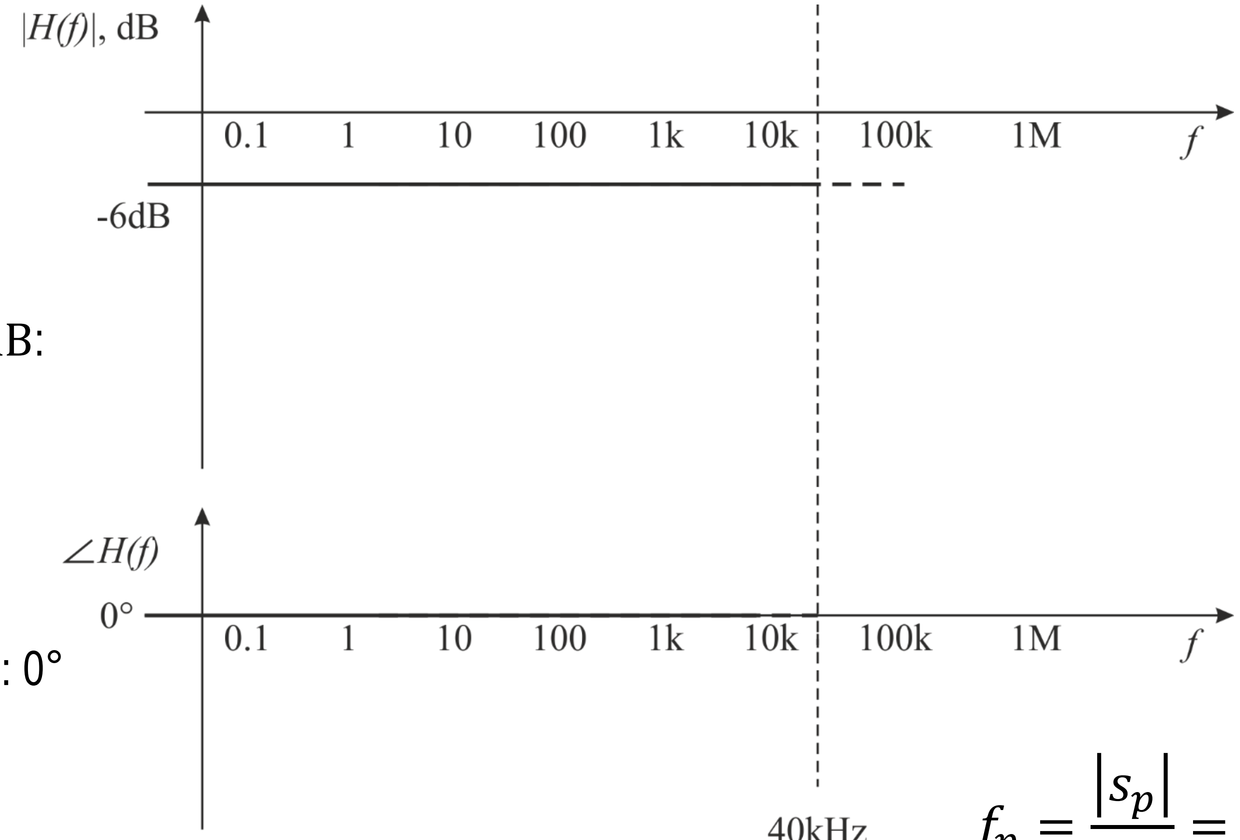
-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.

$k = \frac{1}{2}$

Contrib. Modulo: -6dB:

$k > 0$

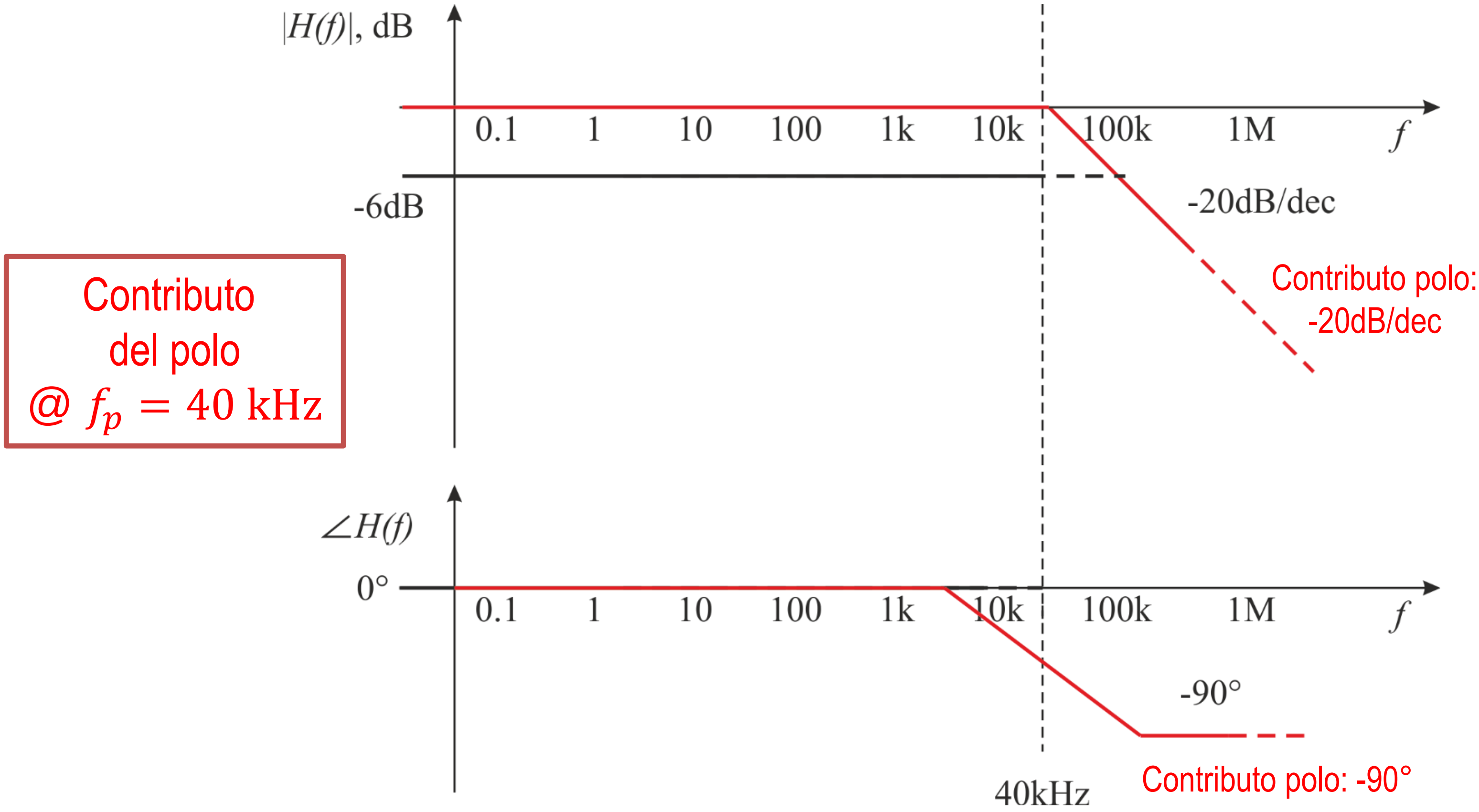
Contributo fase: 0°



$$f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 40\text{kHz}$$

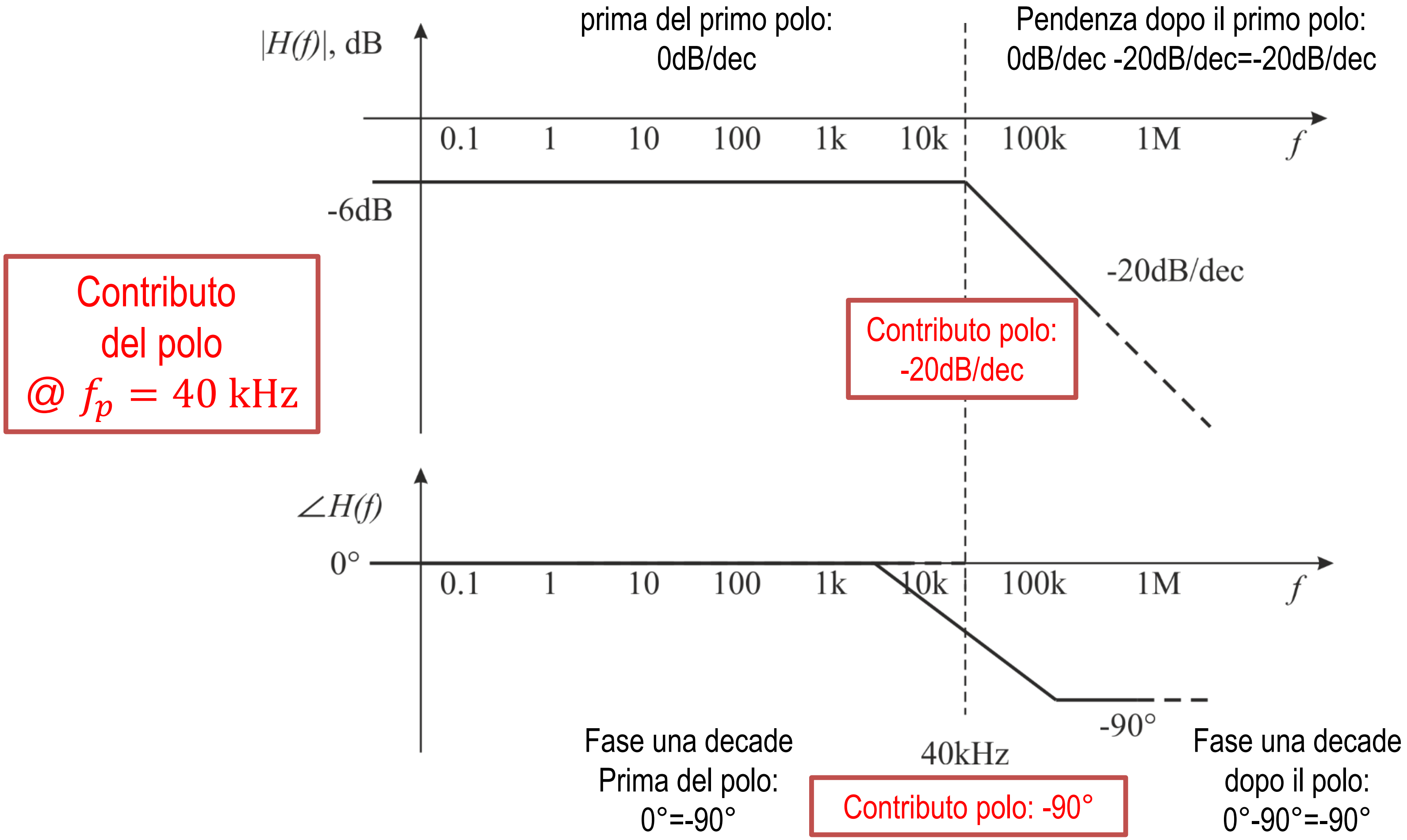
Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.



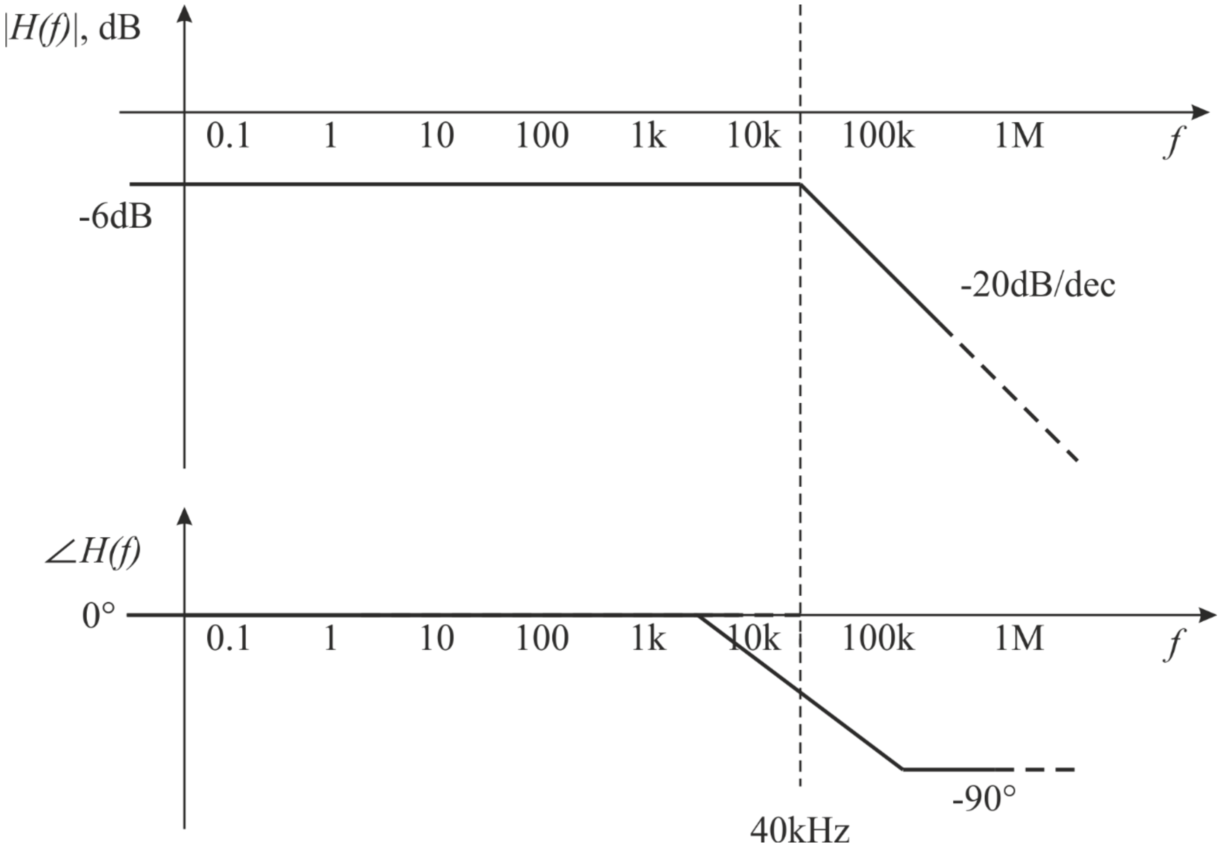
Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.



Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.



$$H(f) = k\frac{1}{1 + jf/f_p}$$

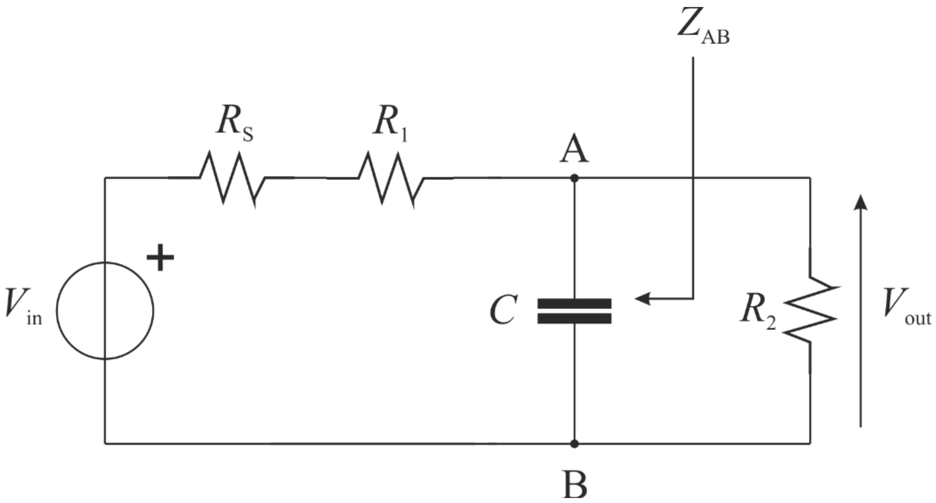
$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} = \frac{1}{2} \rightarrow -6\text{dB}$$

$$f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 40\text{kHz}$$

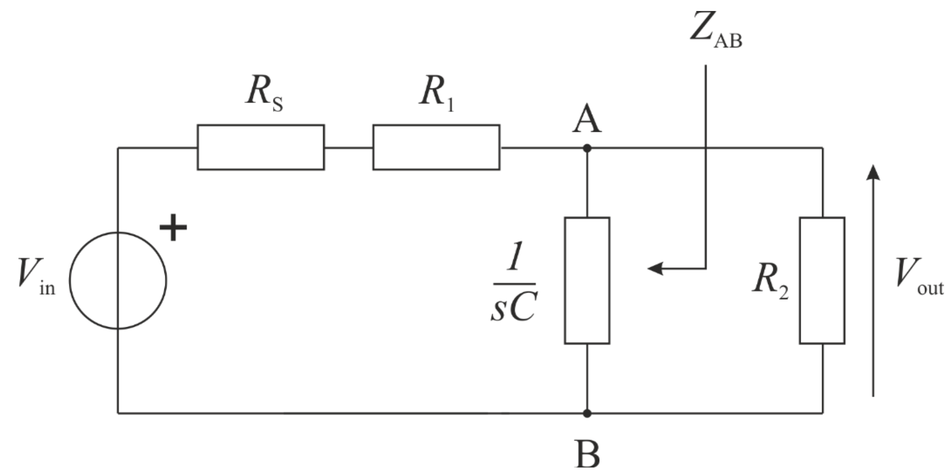
(è la stessa $H(s)$ considerata nella slide 33: lì erano riportati i diagrammi 'esatti')

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode



Dominio della frequenza



$$Z_{AB}(s) = (R_1 + R_S) \parallel \frac{1}{sC}$$

$$\boxed{Z_{AB}(s) = \frac{R_1 + R_S}{1 + sC(R_1 + R_S)}}$$

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode

$R_S = 5\text{k}\Omega$

$R_1 = 5\text{k}\Omega$

$R_2 = 10\text{k}\Omega$

$C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$

$$\boxed{Z_{AB}(s) = \frac{R_1 + R_S}{1 + sC(R_1 + R_S)}}$$

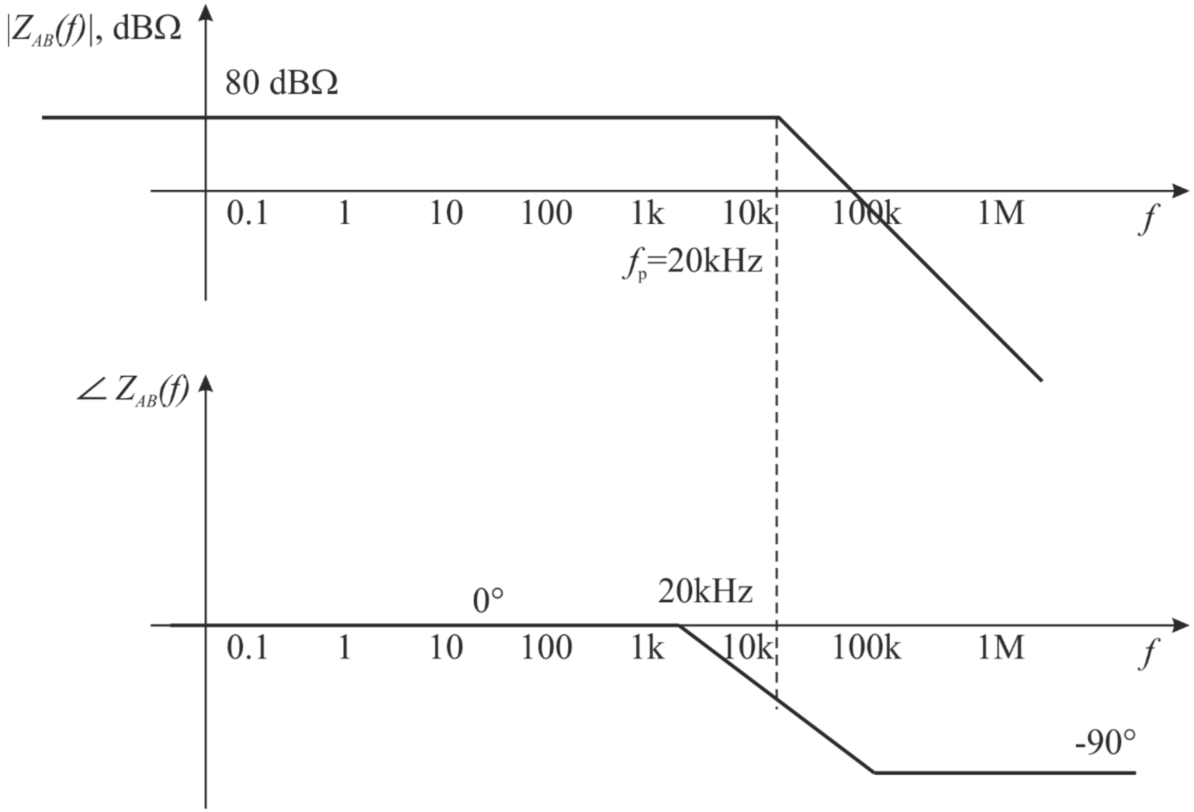
$$Z_{AB}(s) = R_0 \frac{1}{1 - s/s_p} \rightarrow Z_{AB}(f) = Z_{AB}(s)\Big|_{s=j2\pi f} = R_0 \frac{1}{1 + jf/f_p}$$

$$R_0 = R_1 + R_S = 10k\Omega \quad \rightarrow 80\text{dB}\Omega$$

$$s_p = -\frac{1}{C(R_1+R_S)} = -\frac{2\pi}{50}\frac{\text{rad}}{\mu\text{s}} \rightarrow \qquad f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 20\text{kHz}$$

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode



$$Z_{AB}(f) = R_0 \frac{1}{1 + jf/f_p}$$

$$R_0 = 10k\Omega \rightarrow 80\text{dB}\Omega$$

$$f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 20\text{kHz}$$

Esercizio: analisi in frequenza

supponendo che venga applicato un segnale in ingresso

$$v_{in}(t) = \sum_{k=0}^{2} V_i \cos(2\pi k f_0 t + \phi_i),$$

con $f_0 = 20\text{kHz}, V_0 = 1\text{V}, \phi_0 = 0, V_1 = 2\text{V}, \phi_1 = 0, V_2 = 1\text{V}, \phi_2 = \frac{\pi}{4}$

determinare v_{out} nel dominio del tempo.

Data la linearità del circuito, si può valutare l'uscita per ciascuna componente sinusoidale (usando la f.d.t. *H*(*f*) valutata alle diverse frequenze), e poi sovrapporre gli effetti

$$v_{out}(t) = \sum_{k=0}^{2} V_{out,i} \cos(2\pi k f_0 t + \phi_{out,i})$$

$$H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = k\frac{1}{1 + jf/f_p} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{jf}{40\text{kHz}}}$$

$$V_{out,0} = |H(0)|V_0 = 0.5\text{V} \qquad \phi_{out,0} = \phi_0 + \angle H(0) = 0$$

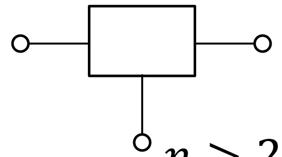
$$V_{out,1} = |H(20\text{kHz})|V_1 = 0.9\text{V} \qquad \phi_{out,1} = \phi_1 + \angle H(20\text{kHz}) = -26.5°$$

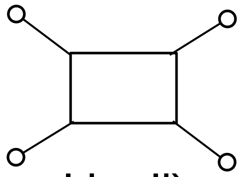
$$V_{out,2} = |H(40\text{kHz})|V_2 = 0.35\text{V} \qquad \phi_{out,2} = \phi_2 + \angle H(40\text{kHz}) = 45° - 45° = 0$$

Generalizzazioni (caso adinamico)

Numero terminali

$n = 2$ (bipoli)

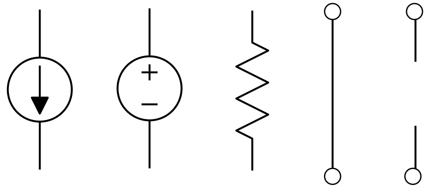




$n > 2$ (multipoli)

Relazione $v - i$

lineare



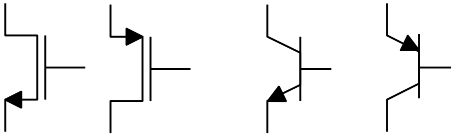
Cosideriamo il caso di n pari $(= 2k)$ e in cui i morsetti sono divisibili a coppie (a formare una porta) per cui la corrente entrante in uno dei morsetti è uguale a quella uscente dall'altro: ***k* −porte**

Importante il caso con k=2:
due porte o doppio bipolo

i generatori pilotati lineari introdotti sono doppi bipoli

nonlineare

Diodo



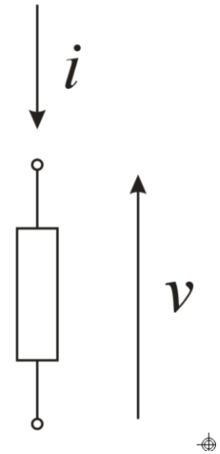
Transistori MOS e BJT

Concetti base

- **Doppi Bipoli**
  - Variabili indipendenti e variabili dipendenti e relazioni costitutive
  - Rappresentazioni R,G,H,H’
  - Significato circuitale dei parametri
  - Caratteristiche d’ingresso, uscita e trans-caratteristiche
  - Doppi bipoli come blocchi funzionali

Doppi Bipoli (lineari)

- Fino ad ora si sono considerati *bipoli*
  - elementi a due terminali
  - si può definire una sola tensione *v* ed una sola corrente *i*
  - caratterizzati da una *relazione costitutiva* che esprime un legame tra *v* ed *i*
  - difficile da vedersi come ‘blocco funzionale’



relazioni costitutive

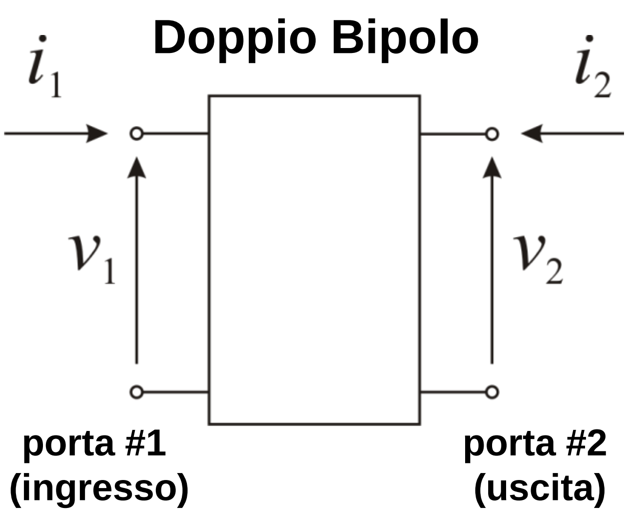
$$\alpha v + \beta i + \gamma = 0$$

Ricavo i da v (bipolo controllato in tensione)

Ricavo v da i (bipolo controllato in corrente)

Doppi Bipoli (lineari)

- L'approccio è generalizzabile a più terminali:
  - si possono definire due tensioni alle porte v_1 e v_2 e due correnti i_1 e i_2 indipendenti (le correnti ai due terminali delle stessa porta sono assunte opposte – per definzione stessa di porta).
  - relazioni costitutive: due equazioni nelle quattro variabili v_1, v_2, i_1 e i_2.
  - se si considera una porta come *ingresso* e l'altra come *uscita,* un doppio bipolo può essere visto come trasposizione circuitale di un blocco funzionale



$$
\begin{cases}
\alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \beta_{11}i_1 + \beta_{12}i_2 + \gamma_1 = 0 \\
\alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \beta_{21}i_1 + \beta_{22}i_2 + \gamma_2 = 0
\end{cases}
$$

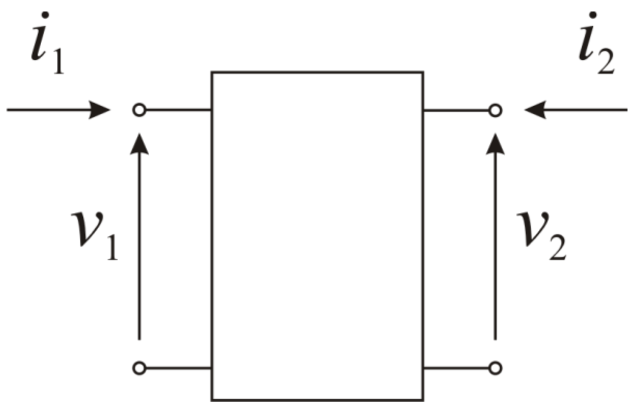
$$\boldsymbol{\alpha v} + \boldsymbol{\beta i} + \boldsymbol{\gamma} = 0$$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 2x2 matrices

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\gamma}$ 2-dim vectors

Doppi Bipoli

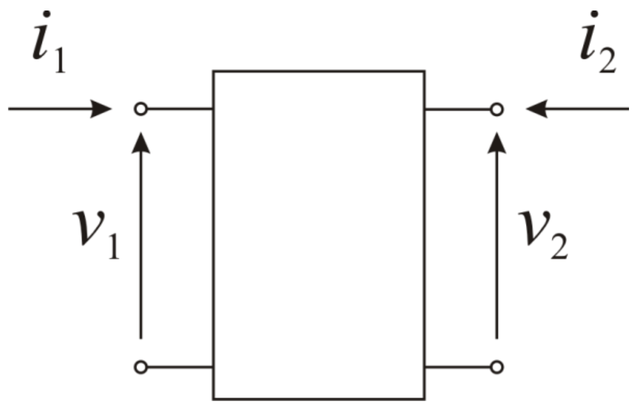
- Relazioni costitutive:
  - due tra v_1, v_2, i_1 e i_2 si considerano come *variabili indipendenti.*
    - Possono vedersi come 'ingressi'
  - le altre due variabili sono espresse in funzione delle precedenti (*variabili dipendenti*).
    - Possono vedersi come 'uscite'
  - sono possibili diverse scelte (combinazioni di 4 elementi presi a 2 a 2 = $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!}$=6)



porta #1 (ingresso) **porta #2 (uscita)**

Rappresentazione	Variabili Indipendenti	Variabili Dipendenti
$\boldsymbol{R}$	$i_1,\, i_2$	$v_1,\, v_2$
$\boldsymbol{G}$	$v_1,\, v_2$	$i_1,\, i_2$
$\boldsymbol{H}$	i_1, v_2	v_1, i_2
$\boldsymbol{H}$'	v_1, i_2	i_1, v_2
$\boldsymbol{T}$	$v_2, -i_2$	v_1, i_1
$\boldsymbol{T}$'	$v_1, -i_1$	v_2, i_2

Doppi Bipoli



Rappresentazione	Variabili Indipendenti	Variabili Dipendenti
$\boldsymbol{R}$	i_1, i_2	v_1, v_2

Per un doppio bipolo lineare:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{i}}$$

dove: $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$

matrice delle resistenze

Significato dei parametri ***r***:

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Resistenza equiv. alla porta #1 *con la porta #2 in circuito aperto*

$$r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

tensione alla porta #1 (in circuito aperto) dovuta ad una corrente unitaria alla porta #2 (transresistenza)

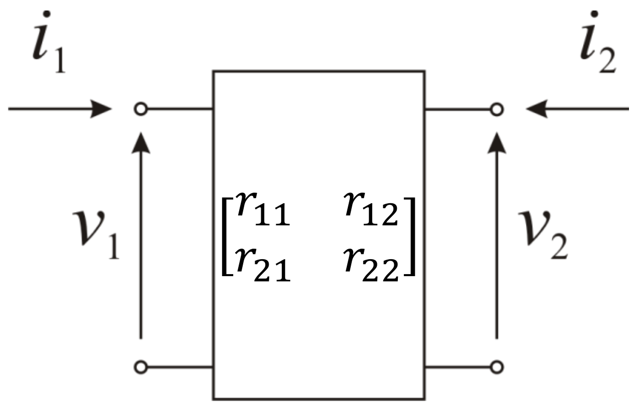
$$r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

Resistenza equiv. alla porta #2 *con la porta #1 in circuito aperto*

$$r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

tensione alla porta #2 (in circuito aperto) dovuta ad una corrente unitaria alla porta #1 (transresistenza)

Doppi Bipoli - Caratteristiche



Rappresentazione	Variabili Indipendenti	Variabili Dipendenti
$\boldsymbol{R}$	i_1, i_2	v_1, v_2

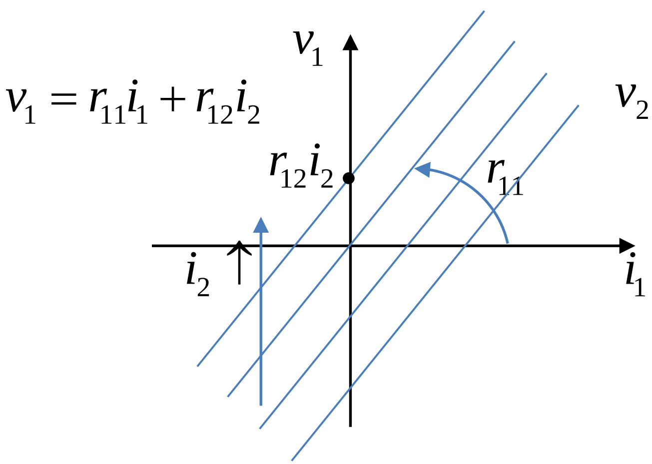
Per un doppio bipolo lineare:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 \end{cases}$$

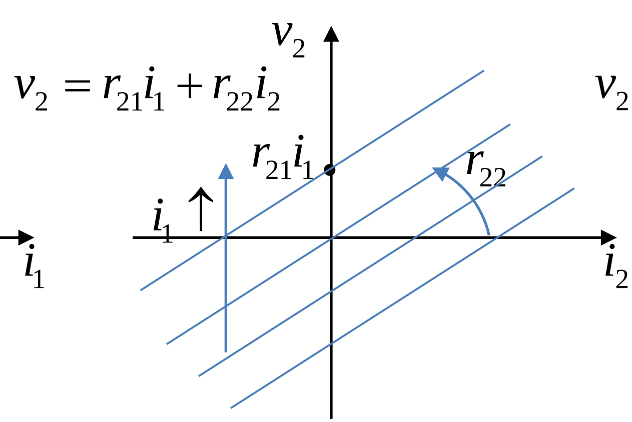
in forma matriciale:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{i}}$$

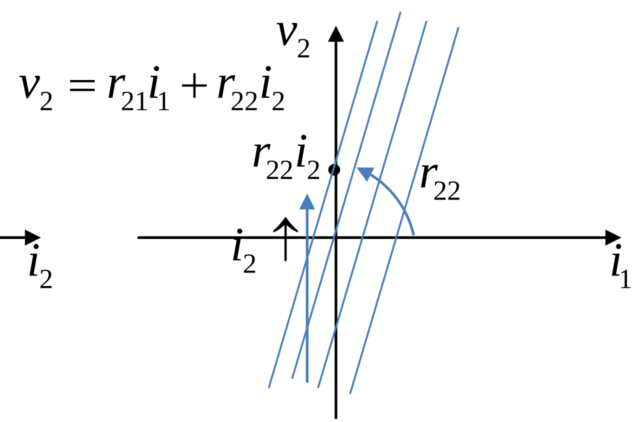
- Per ciascuna porta si possono disegnare (famiglie) di caratteristiche



Caratteristiche di Ingresso

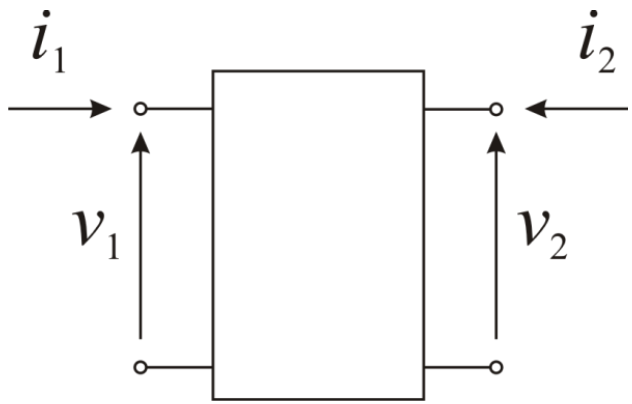


Caratteristiche di Uscita



Transcaratteristiche

Doppi Bipoli



Rappresentazione	Variabili Indipendenti	Variabili Dipendenti
$\boldsymbol{G}$	v_1, v_2	i_1, i_2

Per un doppio bipolo lineare:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$\boxed{\boldsymbol{i} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}}$$

dove: $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$

matrice delle conduttanze

Significato dei parametri *g:*

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

Conduttanza alla porta #1
con la porta #2 in corto circuito

$$g_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$$

corrente che fluisce alla porta #1
(chiusa in corto circuito) a seguito
di una eccitazione in tensione unitaria
alla porta #2 (transconduttanza)

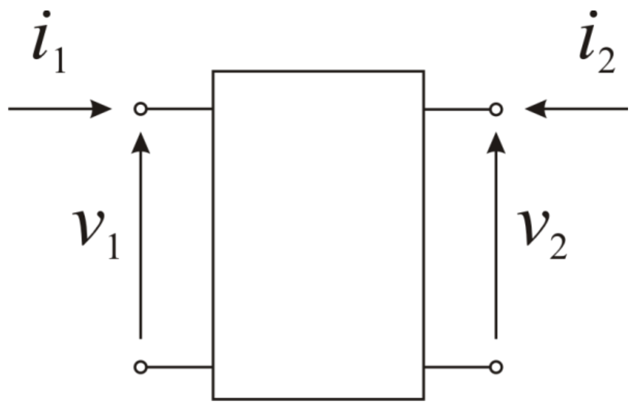
$$g_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_2=0}$$

Conduttanza alla porta #2
con la porta #1 in corto circuito

$$g_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

corrente che fluisce alla porta #2
(chiusa in corto circuito) a seguito
di una eccitazione in tensione unitaria
alla porta #1 (transconduttanza)

Doppi Bipoli



Rappresentazione	Variabili Indipendenti	Variabili Dipendenti
$\boldsymbol{H}$	$i_1,\ v_2$	$v_1,\ i_2$

Per un doppio bipolo lineare:

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$\boxed{\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

matrice dei parametri ibridi

Significato fisico dei parametri *h:*

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

Resistenza equiv. alla porta #1
con la porta #2 in corto circuito
dimensioni: resistenza

$$h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0}$$

tensione alla porta #1
(in circuito aperto) dovuta ad una tensione unitaria alla porta #2
dimensioni: adimensionato
(guadagno di tensione)

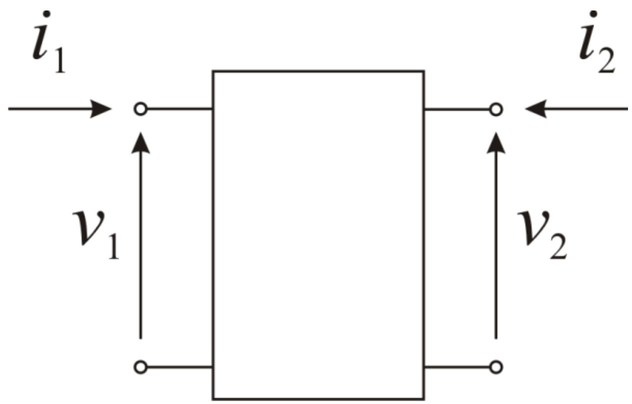
$$h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}$$

Conduttanza equiv. alla porta #2
con la porta #1 in circuito aperto
dimensioni: conduttanza

$$h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$

Corrente alla porta #2
(in corto circuito) dovuta ad una corrente unitaria alla porta #1
dimensioni: adimensionato
(guadagno di corrente)

Doppi Bipoli



Rappresentazione	Variabili Indipendenti	Variabili Dipendenti
H'	$v_1,\ i_2$	$i_1,\ v_2$

Per un doppio bipolo lineare:

$$\begin{cases} i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2 \\ v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2 \end{cases}$$

in forma matriciale:

$$\boxed{\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{H'} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$$

matrice dei parametri ibridi inversi

Significato fisico dei parametri *h:*

$$h'_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0}$$

Conduttanza equiv. alla porta #1
con la porta #2 in circuito aperto
dimensioni: conduttanza

$$h'_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0}$$

Corrente alla porta #1
(in corto circuito) dovuta ad una tensione unitaria alla porta #2
dimensioni: adimensionato
(guadagno di corrente)

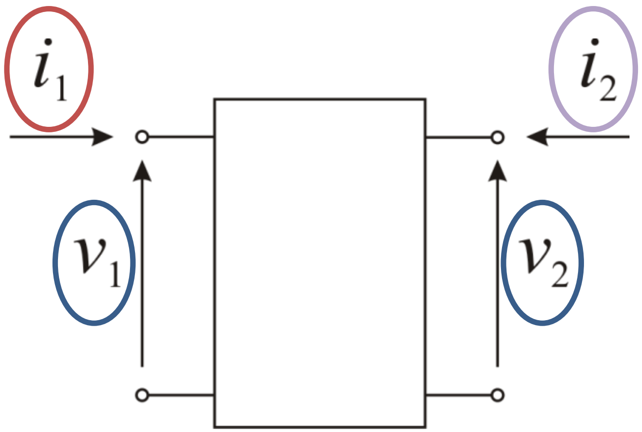
$$h'_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=0}$$

Resistenza equiv. alla porta #2
con la porta #1 in corto circuito
dimensioni: resistenza

$$h'_{21} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$

Tensione alla porta #2
(in circuit aperto) dovuta ad una tensione unitaria alla porta #1
dimensioni: adimensionato
(guadagno di tensione)

Doppi Bipoli: considerazioni sistemistiche



Blocco Funzionale

$$h'_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0}$$

$$h'_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0}$$

Se l'ingresso non è fornito da un generatore di tensione ideale, la corrente i_1 altera il valore di v_1

La corrente d'ingresso i_1 è funzione:

- della tensione applicata ☹
- della corrente in uscita ☹ ☹ (l'ingresso dipende dall'uscita!)

Effetti (spesso) indesiderati, non descritti nello schema a blocchi

$$h'_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=0}$$

La tensione in uscita è anche funzione della corrente in uscita i.e. di che cosa colleghiamo alla porta d'uscita ☹.
Effetto (spesso) indesiderato, non descritto dallo schema a blocchi

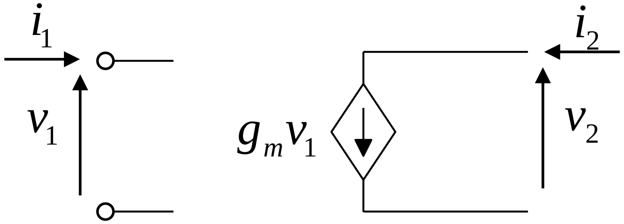
$$h'_{21} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0}$$

La tensione d'uscita è funzione della tensione in ingresso
E' quello che ci aspettiamo leggendo schema a blocchi

Quali sono i doppi bipoli più simili ad un blocco funzionale? (see the next slide)

I generatori controllati sono doppi bipoli

- Generatore di corrente controllato (comandato) in tensione (VCCS)

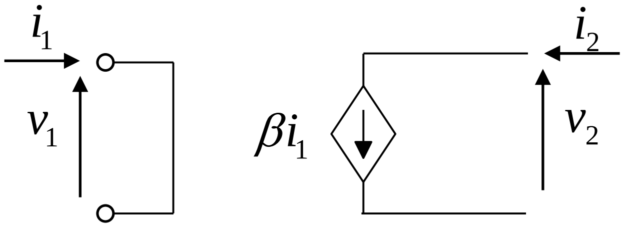


$$\begin{cases} i_1 = 0, \ \forall v_1 \\ i_2 = g_m v_1, \ \forall v_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_m & 0 \end{bmatrix}$$

g_m transconduttanza

blocco con ingresso in tensione e uscita in corrente «ideale»

- Generatore di corrente controllato (comandato) in corrente (CCCS)

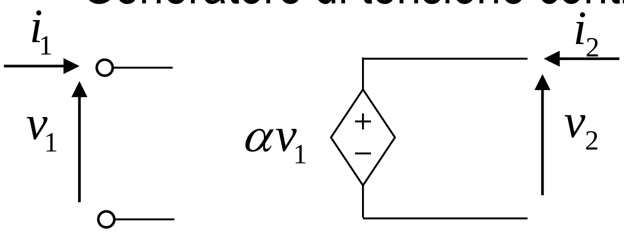


$$\begin{cases} v_1 = 0, \ \forall i_1 \\ i_2 = \beta i_1, \ \forall v_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

β guadagno di corrente

blocco con ingresso in corrente e uscita in corrente «ideale»

- Generatore di tensione controllato (comandato) in tensione (VCVS)

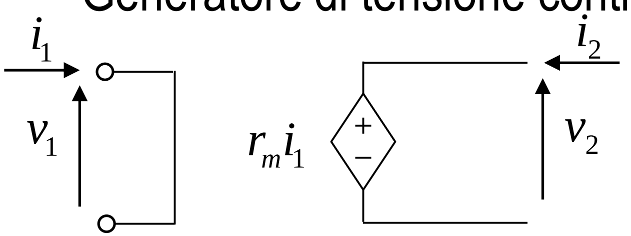


$$\begin{cases} i_1 = 0, \ \forall v_1 \\ v_2 = \alpha v_1, \ \forall i_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

α guadagno di tensione

blocco con ingresso in tensione e uscita in tensione «ideale»

- Generatore di tensione controllato (comandato) in corrente (CCVS)



$$\begin{cases} v_1 = 0, \ \forall i_1 \\ v_2 = r_m i_1, \ \forall i_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_m & 0 \end{bmatrix}$$

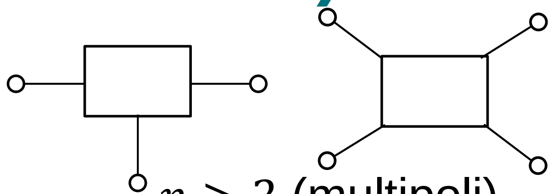
r_m transresistenza

blocco con ingresso in corrente e uscita in tensione «ideale»

Alcune generalizzazioni (caso dinamico)

Numero terminali

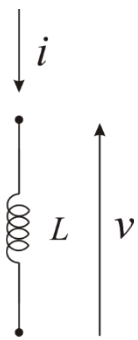
$n = 2$ (bipoli)



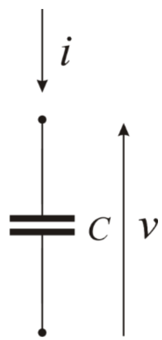
$n > 2$ (multipoli)

Relazione $v - i$

lineare



$Z = sL$
$Y = 1/sL$



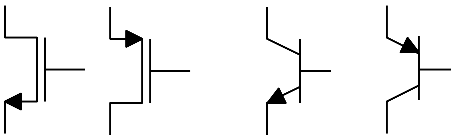
$Z = 1/sC$
$Y = sC$

Le descrizioni dei k –porte si fanno nel dominio delle trasformate (possibile dato che siamo nel caso lineare!).

$\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ e da $\boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{Y}$

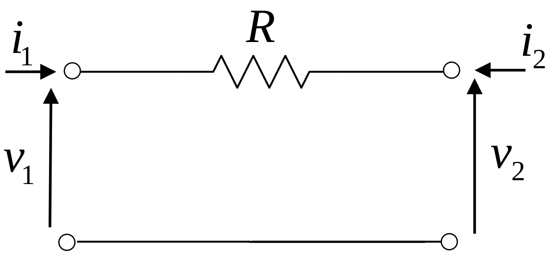
nonlineare

Diodo
Ha effetti reattivi (nonlineari)



MOS e BJT
Hanno effeti reattivi
(lineari e nonlineari)

Esistono sempre tutte le descrizioni dei Doppi Bipoli?



$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{R},\ i_2 = -\frac{v_1 - v_2}{R}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R & -1/R \\ -1/R & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

- Esiste la matrice $\boldsymbol{G}$ ma non la matrice $\boldsymbol{R}$ dato che non è possibile esprimere v_1 e v_2 in funzione di i_1 e i_2

- Quindi non esistono sempre tutte le descrizioni. Come si passa dall'una all'altra?

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{i} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Se esiste l'inversa di ***R*,** cioè $\boldsymbol{R}^{-1}$ tale per cui $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}$ =**1**, dove **1** è la matrice identità 2x2

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{i} \ \rightarrow \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}$$

Se confrontiamo l'espressione di $\boldsymbol{i}$ ricavata sopra con quella che definisce ***G***

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{v} \qquad\qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}$$

Ne concludiamo che, se $\boldsymbol{R}^{-1}$ esiste:

$$\boxed{\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}^{-1}}$$

Formule di passaggio tra le varie descrizioni

da considerazioni matematiche e/o circuitali si ricavano relazioni tra i diversi parametri

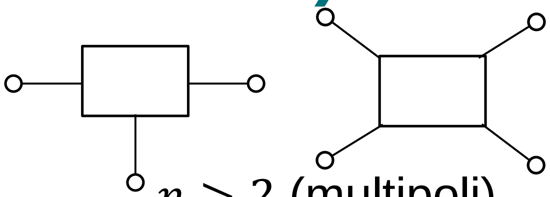
	R	**G**	**H**	**H′**	**T**	**T′**
R	$\begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta\mathbf{G}} & -\frac{g_{12}}{\Delta\mathbf{G}} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta\mathbf{G}} & \frac{g_{11}}{\Delta\mathbf{G}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{11}} & -\frac{h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h'_{21}}{h'_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta\mathbf{T}}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{C'} & \frac{1}{C'} \\ \frac{\Delta\mathbf{T}'}{C'} & \frac{A'}{C'} \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{\Delta\mathbf{R}} & -\frac{r_{12}}{\Delta\mathbf{R}} \\ -\frac{r_{21}}{\Delta\mathbf{R}} & \frac{r_{11}}{\Delta\mathbf{R}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -\frac{h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta\mathbf{T}}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A'}{B'} & -\frac{1}{B'} \\ -\frac{\Delta\mathbf{T}'}{B'} & \frac{D'}{B'} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ -\frac{r_{21}}{r_{22}} & \frac{1}{r_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h'_{22}}{\Delta\mathbf{H}} & -\frac{h'_{12}}{\Delta\mathbf{H}} \\ -\frac{h'_{21}}{\Delta\mathbf{H}} & \frac{h'_{11}}{\Delta\mathbf{H}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta\mathbf{T}}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B'}{A'} & \frac{1}{A'} \\ -\frac{\Delta\mathbf{T}'}{A'} & \frac{C'}{A'} \end{matrix}$
H′	$\begin{matrix} \frac{1}{r_{11}} & -\frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{r_{11}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta\mathbf{H}} & -\frac{h_{12}}{\Delta\mathbf{H}} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta\mathbf{H}} & \frac{h_{11}}{\Delta\mathbf{H}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta\mathbf{T}}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C'}{D'} & -\frac{1}{D'} \\ \frac{\Delta\mathbf{T}'}{D'} & \frac{A'}{D'} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{22}}{g_{21}} & -\frac{1}{g_{21}} \\ -\frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{21}} & -\frac{g_{11}}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D'}{\Delta\mathbf{T}'} & \frac{B'}{\Delta\mathbf{T}'} \\ \frac{C'}{\Delta\mathbf{T}'} & \frac{A}{\Delta\mathbf{T}'} \end{matrix}$
T′	$\begin{matrix} \frac{r_{22}}{r_{12}} & \frac{\Delta\mathbf{R}}{r_{12}} \\ \frac{1}{r_{12}} & \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ -\frac{\Delta\mathbf{G}}{g_{12}} & -\frac{g_{11}}{g_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta\mathbf{H}}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta\mathbf{H}'}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ -\frac{h'_{11}}{h'_{12}} & -\frac{1}{h'_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta\mathbf{T}} & \frac{B}{\Delta\mathbf{T}} \\ \frac{C}{\Delta\mathbf{T}} & \frac{A}{\Delta\mathbf{T}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A' & B' \\ C' & D' \end{matrix}$

$\Delta\mathbf{M} = \det(\mathbf{M})$

Alcune generalizzazioni (caso dinamico)

Numero terminali

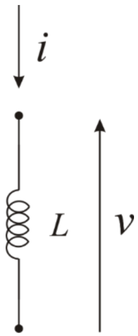
$n = 2$ (bipoli)



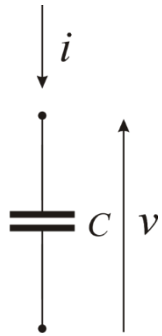
$n > 2$ (multipoli)

Relazione $v - i$

lineare



$Z = sL$
$Y = 1/sL$



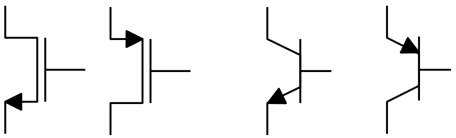
$Z = 1/sC$
$Y = sC$

Le descrizioni dei k −porte si fanno nel dominio delle trasformate (possibile dato che siamo nel caso lineare!).

$\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ e da $\boldsymbol{G} \rightarrow \boldsymbol{Y}$

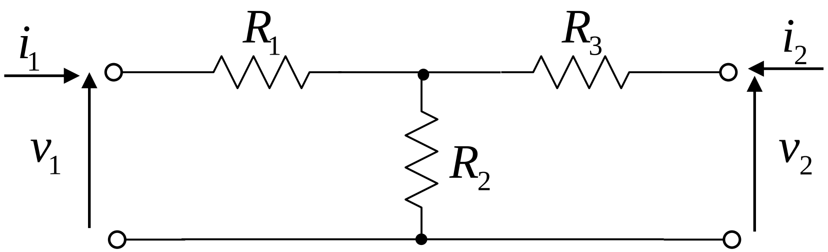
nonlineare

Diodo
Ha effetti reattivi
(nonlineari)



MOS e BJT
Hanno effeti reattivi
(lineari e nonlineari)

Esercizio: Calcolare la Matrice R



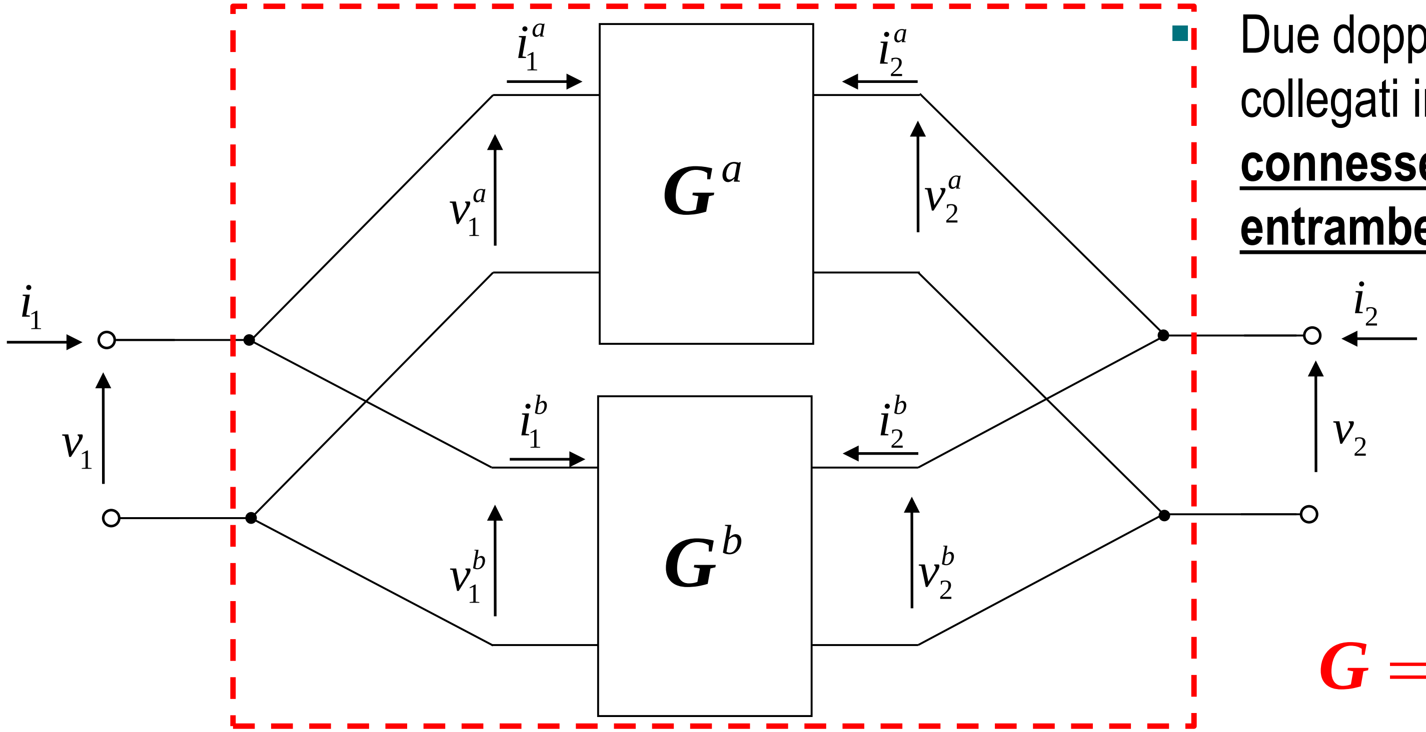
$v_1 = R_1 i_1 + R_2 (i_1 + i_2)$ LKV alla maglia di ingresso

$v_2 = R_3 i_2 + R_2 (i_1 + i_2)$ LKV alla maglia di uscita

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + R_2) i_1 + R_2 i_2 \\ v_2 = R_2 i_1 + (R_3 + R_2) i_2 + \end{cases}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_3 + R_2 \end{bmatrix}$$

Esercizio: Connessione in Parallelo di Doppi Bipoli



- Due doppi bipoli solo collegati in parallelo se **sono connesse in parallelo entrambe le porte**

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}^a + \boldsymbol{G}^b)$$

$$\boldsymbol{i}^a = \begin{bmatrix} i_1^a \\ i_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^a & g_{12}^a \\ g_{21}^a & g_{22}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^a \\ v_2^a \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{i}^b = \begin{bmatrix} i_1^b \\ i_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^b & g_{12}^b \\ g_{21}^b & g_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b \\ v_2^b \end{bmatrix}$$

$$v_1^a = v_1^b = v_1,\ v_2^a = v_2^b = v_2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}^a = \boldsymbol{v}^b = \boldsymbol{v}$$

$$i_1 = i_1^a + i_1^b,\ i_2 = i_2^a + i_2^b$$

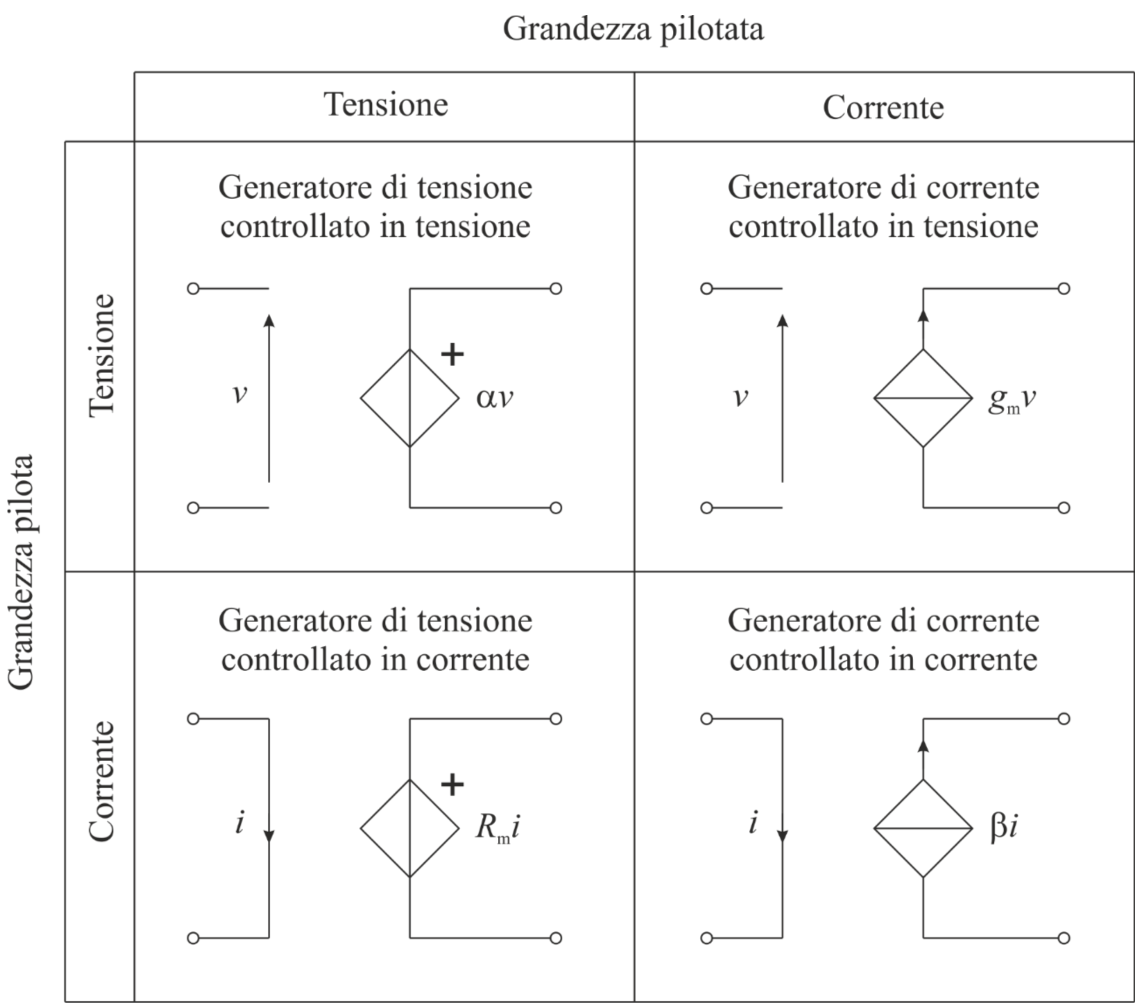
$$\Rightarrow \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{i}^a + \boldsymbol{i}^b = \boldsymbol{G}^a \boldsymbol{v}^a + \boldsymbol{G}^b \boldsymbol{v}^b$$

$$= (\boldsymbol{G}^a + \boldsymbol{G}^b)\boldsymbol{v}$$

Concetti di Base

- Generatori Pilotati (detti anche *controllati, comandati* o *dipendenti*)
  - Classificazione
  - Metodo del Pilota

Generatori Pilotati (controllati, comandati, dipendenti)

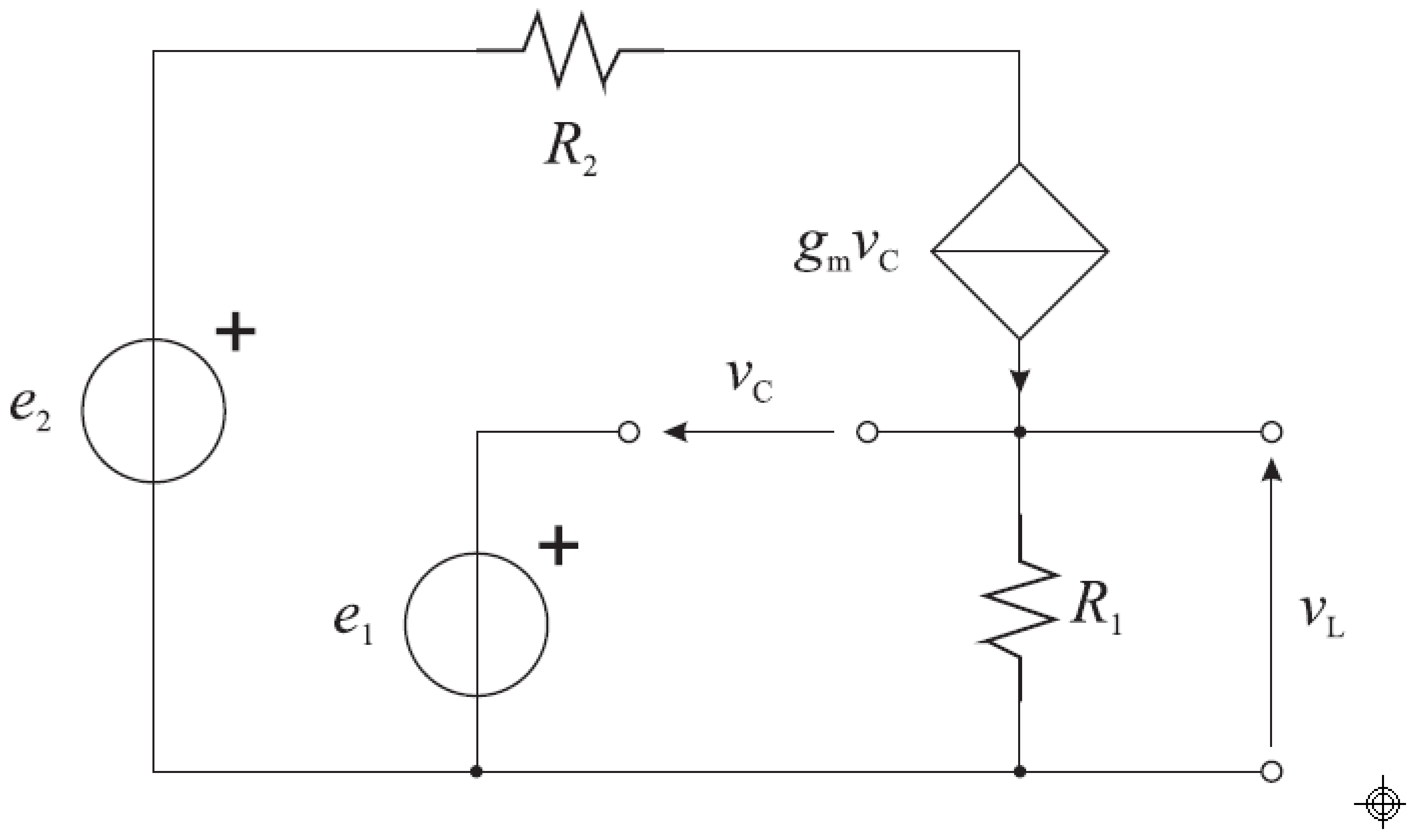


i generatori pilotati, a differenza dei gen. indipendenti, <u>non sono bipoli</u> perché è necessario introdurre una seconda coppia di terminali (porta) per definire la **grandezza pilota**

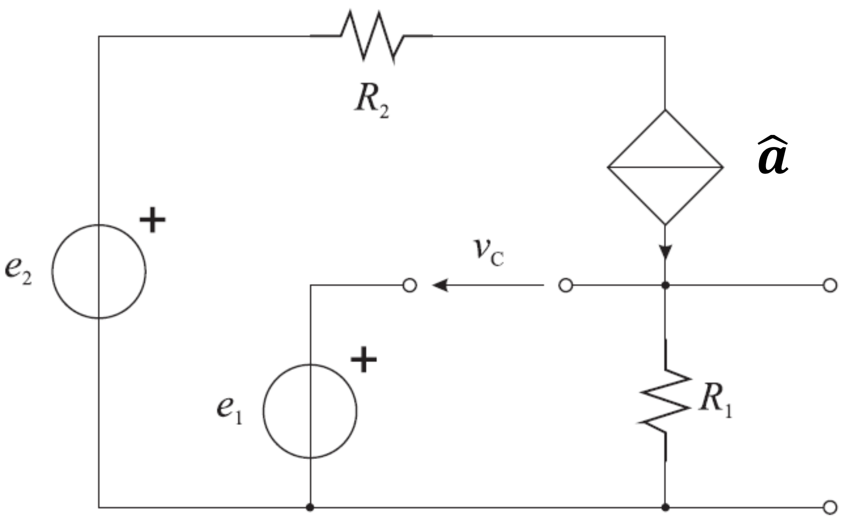
di fatto si tratta di **doppi bipoli**, che ammettono solo una delle rappresentazioni (R, G, H o H', vedi slide seguente)

Analisi di Circuiti con Gen. Pilotati: Metodo del Pilota

Calcolare la tensione d'uscita v_L in funzione delle tensioni impresse dai generatori indipendenti e_1 ed e_2.



Analisi di Circuiti con Gen. Pilotati: Metodo del Pilota



Si procede in 3 passi:

PASSO 1: si determina la grandezza pilota v_C in funzione dei generatori indipendenti, trattando il generatore pilotato come un generatore indipendente di valore incognito $\hat{a}$

Il circuito è lineare e si può applicare il <u>principio di sovrapposizione degli effetti:</u>

$$v_C = v_C^{(1)} + v_C^{(2)} + v_C^{(3)}$$

contributo di: e_1, e_1, $\hat{a}$

Analizzando il circuito:

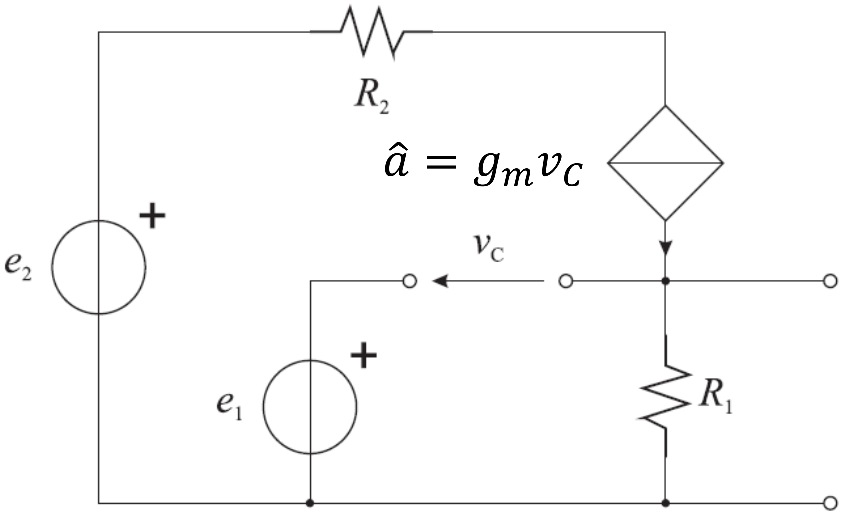
$$v_C^{(1)} = e_1$$

$$v_C^{(2)} = 0$$

$$v_C^{(3)} = -R_1\hat{a}$$

$$\boxed{v_C = e_1 - R_1\,\hat{a}}$$

Analisi di Circuiti con Gen. Pilotati: Metodo del Pilota



Si procede in 3 passi:

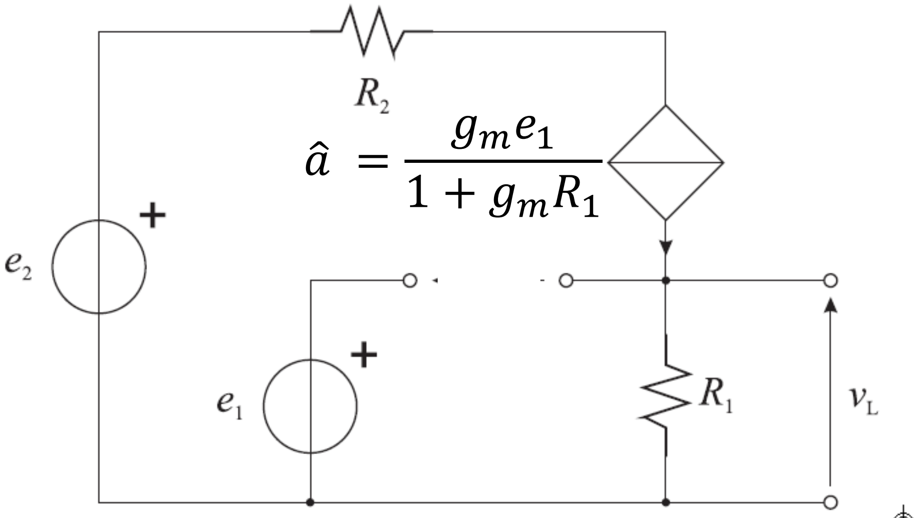
PASSO 2: dall'espressione della grandezza pilota v_C ottenuta al passo precedente e dalla relazione costitutiva del generatore pilotato ($\hat{a} = g_m\, v_C$) e si ricavano così la grandezza pilota v_C e la grandezza pilotata $\hat{a}$ in funzione di soli generatori indipendenti

$$\begin{cases} v_C = e_1 - R_1\,\hat{a} \\ \hat{a} = g_m v_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C = e_1 - R_1\, g_m v_C \\ \hat{a} = g_m v_C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} v_C = \dfrac{e_1}{1 + g_m R_C} \\ \hat{a} = \dfrac{g_m e_1}{1 + g_m R_C} \end{cases}}$$

Analisi di Circuiti con Gen. Pilotati: Metodo del Pilota



Si procede in 3 passi:

PASSO 3: si ricava l'uscita richiesta v_L, trattando il generatore pilotato come un generatore indipendente $\hat{a}$ di valore ***noto***, *e* pari a quello ottenuto nel passo 2.

Il circuito è lineare e si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$v_L = v_L^{(1)} + v_L^{(2)} + v_L^{(3)}$$

contributo di: e_1, e_1, $\hat{a}$

Analizzando il circuito:

$$v_L^{(1)} = 0$$

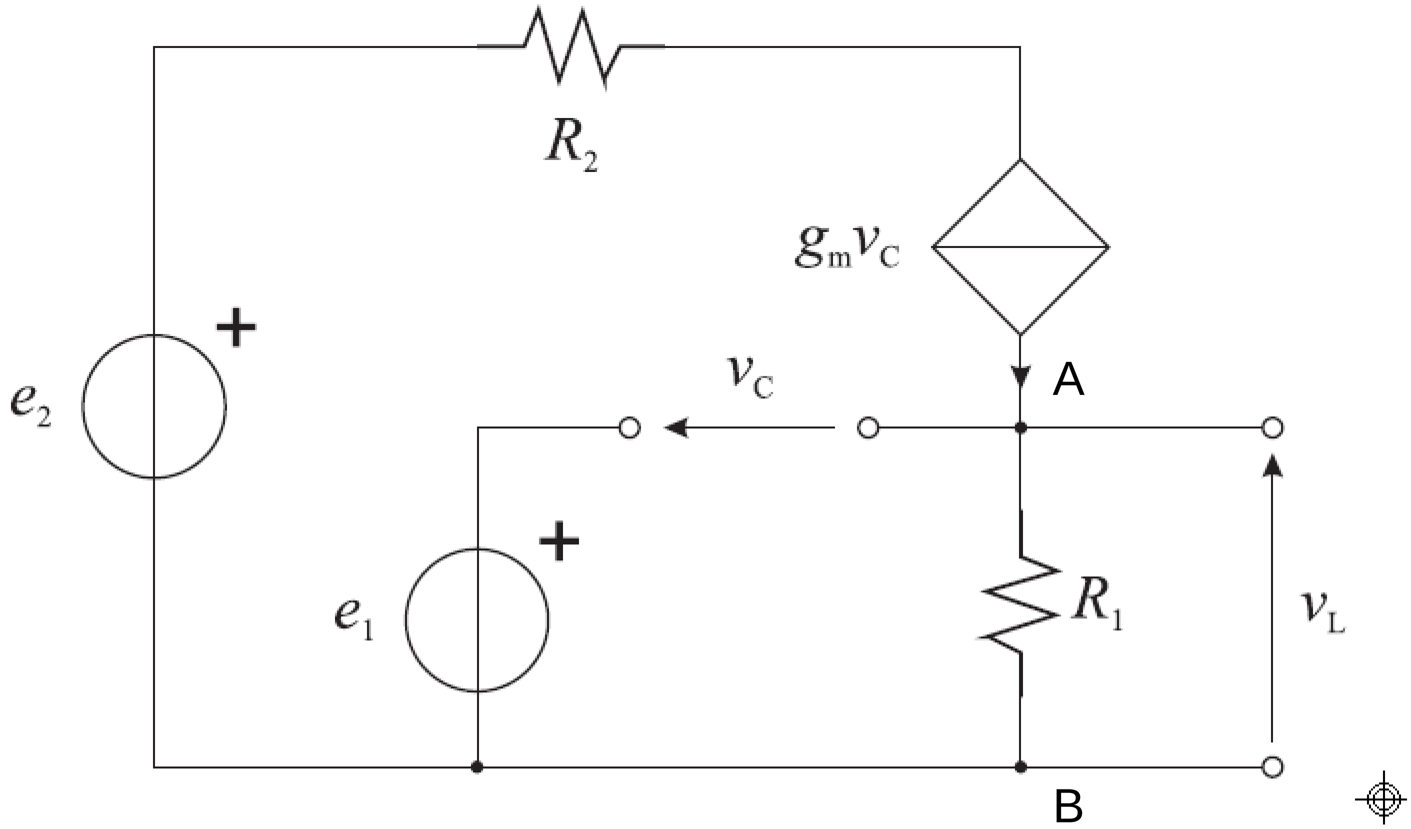
$$v_L^{(2)} = 0$$

$$v_L^{(3)} = R_1 \hat{a}$$

$$\boxed{v_L = \frac{g_m R_1}{1 + g_m R_1} e_1}$$

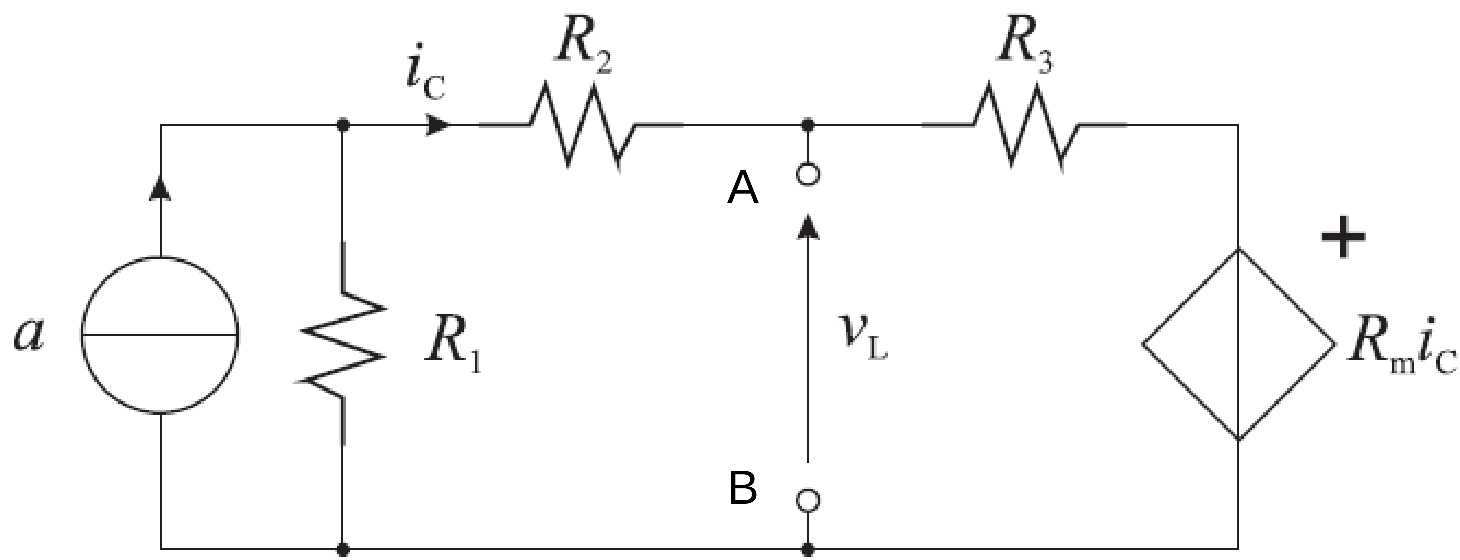
Esercizio: Analisi di Circuiti con Generatori Pilotati

- Calcolare la tensione d'uscita v_L in funzione delle tensioni impresse dai generatori indipendenti e_1 ed e_2.
- Determinare i parametri dell'equivalente di Thévénin ai morsetti AB.



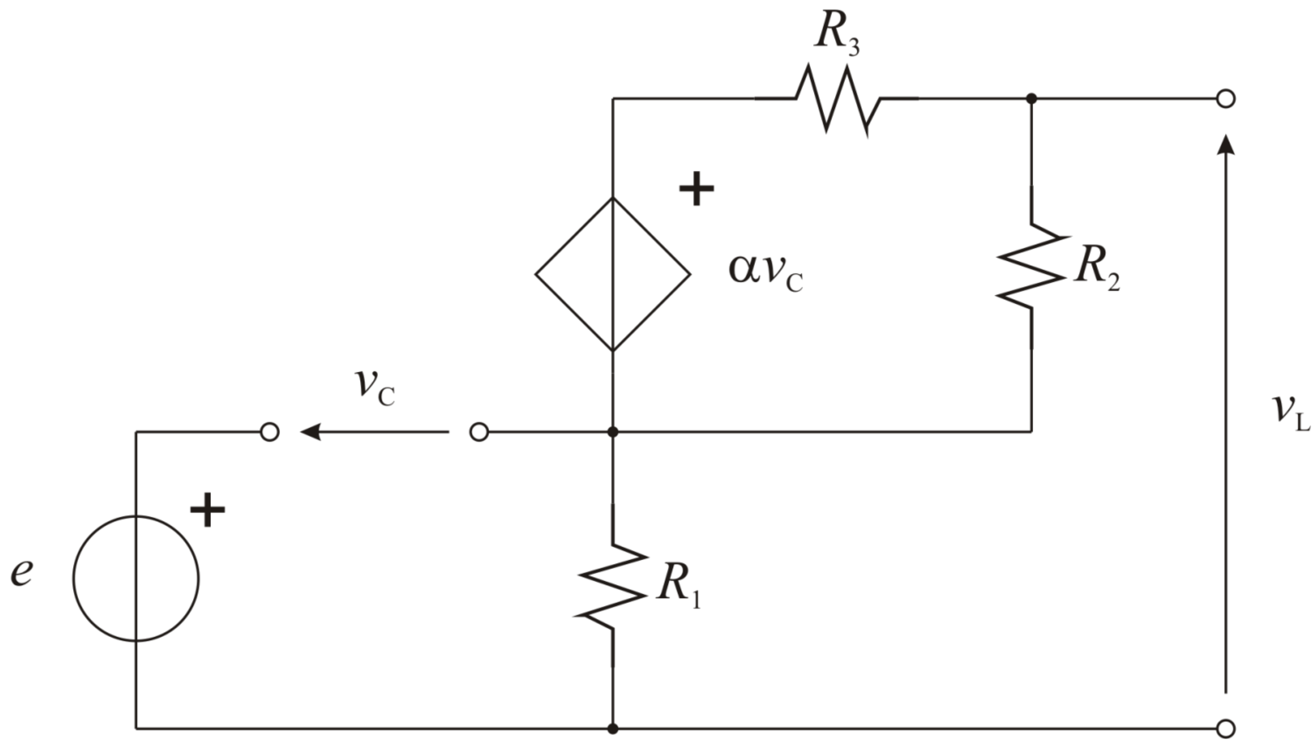
Esercizio: Analisi di Circuiti con Generatori Pilotati

- Calcolare la tensione d'uscita v_L in funzione della corrente impressa dal generatore indipendente a.
- Determinare i parametri dell'equivalente di Norton ai morsetti AB.



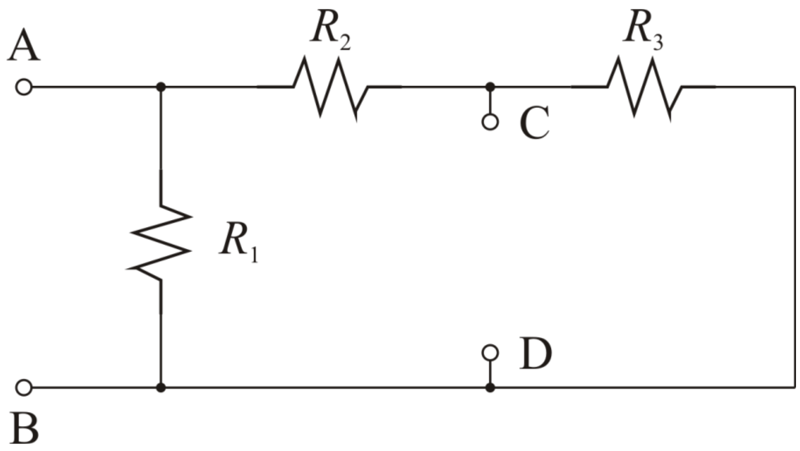
Esercizio: Analisi di Circuiti con Generatori Pilotati

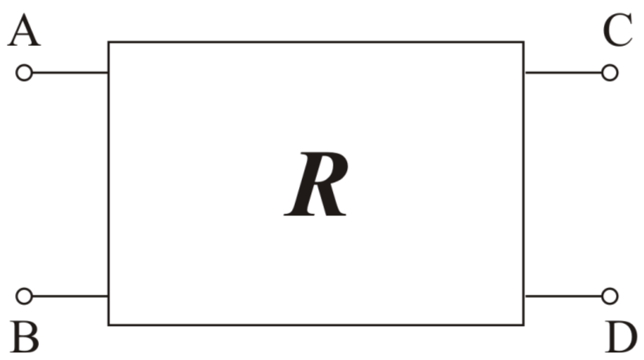
- Calcolare la tensione d'uscita v_L in funzione della tensione impressa dal generatore indipendente e.



Esercizio: Doppi Bipoli

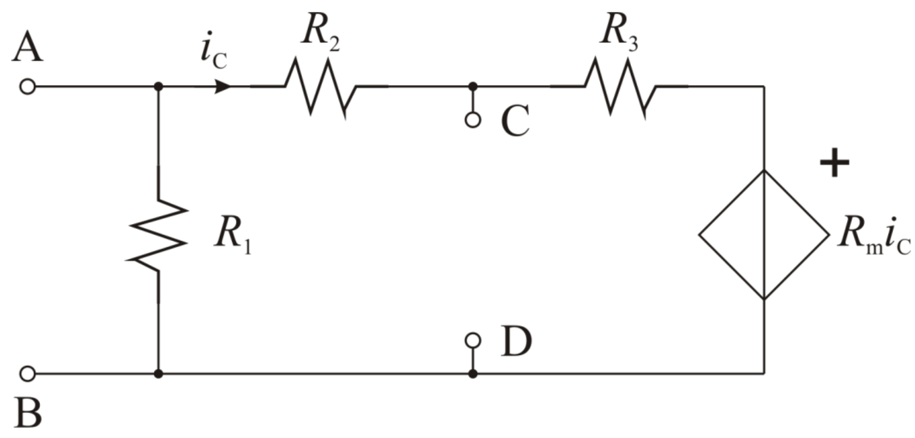
- Determinare i parametri della matrice ***R*** del doppio bipolo alle porte AB e CD del circuito in figura.

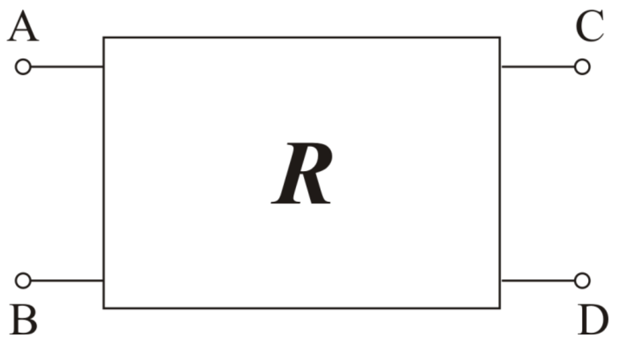




Esercizio: Doppi Bipoli

- Determinare i parametri della matrice ***R*** del doppio bipolo alle porte AB e CD del circuito in figura.





Esercizio: Doppi Bipoli

- Determinare i parametri ibridi inversi (matrice **H’**) del doppio bipolo alle porte AB e CD del circuito in figura.