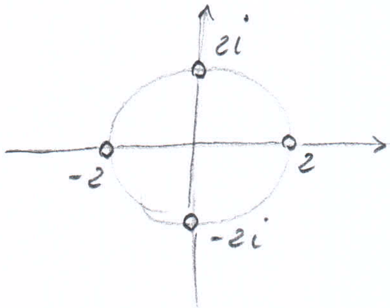
Cognome e Nome.. Matricola............
Docente ....

ANALISI COMPLESSA
Appello del 1 FEBBRAIO 2013 - Compito A

Esercizio 1 (3 punti)
Trovare gli zeri della funzione complessa

$$f(z) = \frac{\sin(2\pi z)}{(z^4 - 16)^2},$$

nel suo naturale dominio di definizione $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{C}$.



$\mathrm{dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} : z^4 - 16 \neq 0\}$;

$\sin(2\pi z) = 0 \iff 2\pi z = K\pi, \; K \in \mathbb{Z}$
$\iff z = \frac{K}{2}, \; K \in \mathbb{Z}$;

quindi l'insieme degli zeri di f è

$$\left\{ \frac{K}{2} : K \in \mathbb{Z}, K \neq \pm 4 \right\}$$

Esercizio 2 (3 punti)
Stabilire se la funzione

$$f(x+iy) := (x^2 - y^2) + i(x^2 + y^2), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

è analitica in $\mathbb{C}$.

f non è analitica in tutto $\mathbb{C}$ perché

$v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x,y) = x^2 + y^2$ non è armonica,

infatti $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \neq 0$

Esercizio 3 (5 punti)
Si determini e si disegni l'insieme di convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(in)^5} e^{n\bar{z}}.$$

Posto $w = e^{\bar{z}}$, studiamo la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(in)^5} w^n$

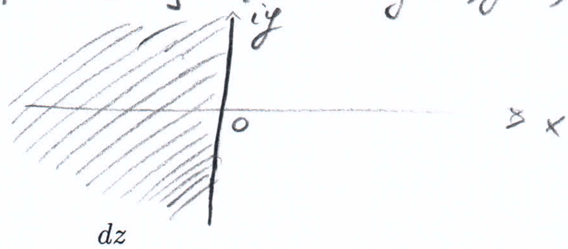
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{\sqrt{n+1}} = 1 \Longrightarrow R = 1 \text{ raggio di convergenza}$$

Se $|w| = 1$ $\displaystyle |a_n w^n| = \frac{\sqrt{n+1}}{n^5} |w|^n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^5} \sim \frac{1}{n^{9/2}}$ e

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{9/2}}$ converge, quindi la serie data converge sul bordo e

l'insieme di convergenza $\{z \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |e^{\bar{z}}| \leq 1\}$

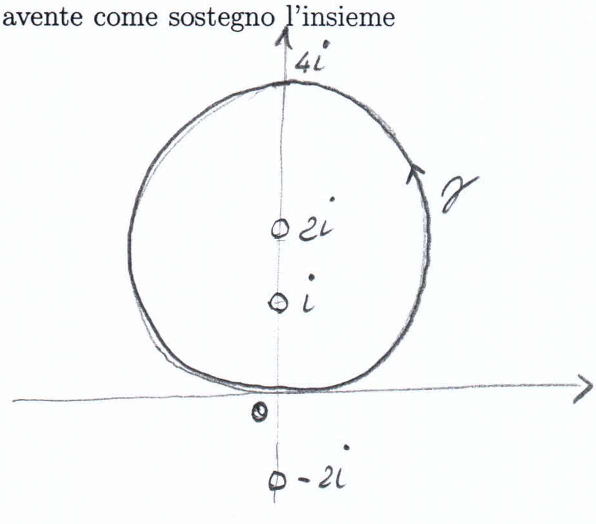
$= \{z = x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ |e^{x-iy}| = e^x \leq 1\} = \{z = x+iy : x,y \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$



Esercizio 4 (4 punti)
Si calcoli

$$I := \int_\gamma \frac{dz}{z^3 - 2iz^2 + z - 2i},$$

dove γ è la curva di Jordan percorsa in senso antiorario avente come sostegno l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$.



$$z^3 - 2iz^2 + z - 2i = z^2(z-2i) + (z-2i)$$

$$= (z^2+1)(z-2i) = (z-i)(z+i)(z-2i)$$

Grazie al teorema dei residui, se f è la funzione integranda si ha:

$$I = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}_f(i) + \operatorname{Res}_f(2i) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \left.\frac{1}{(z+i)(z-2i)}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{z^2+1}\right|_{z=2i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1}{2i(-i)} - \frac{1}{3} \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\} = 2\pi i \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

Esercizio 5 (5 punti)
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in $z_0 = 0$ nell'insieme $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ della funzione

$$f(z) := \frac{\sin(z^4)}{z^{13}} - \frac{\alpha - 9}{z^9} + \frac{\alpha}{z}.$$

Si determini il residuo di f in $z_0 = 0$ e la natura di tale singolarità.

Se $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^{13}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{\alpha - 9}{z^9} + \frac{\alpha}{z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{8n-9} - \frac{\alpha - 9}{z^9} + \frac{\alpha}{z}$$

$$= \frac{1}{z^9} - \frac{1}{3!z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{8n-9} - \frac{\alpha - 9}{z^9} + \frac{\alpha}{z}$$

$$= \left[\frac{10-\alpha}{z^9} + \left(\alpha - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{z} \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{8n-9}$$

$\mathrm{Res}_f(0) = \alpha - 1/6$

se $\alpha = 10$ $z_0 = 0$ è un polo semplice

se $\alpha \neq 10$ $z_0 = 0$ è un polo di ordine 9

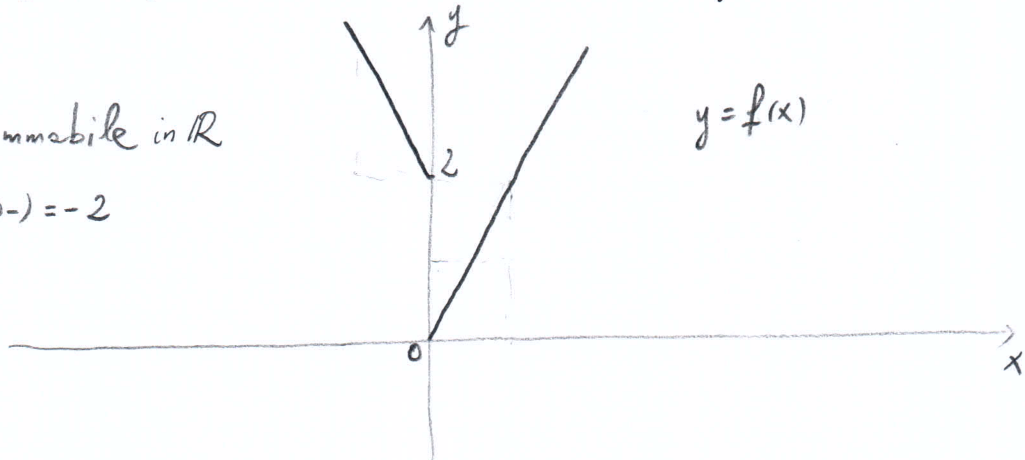
Esercizio 6 (4 punti)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |2x| - \mathrm{sgn}(3x) + \mathrm{sgn}(4x^2 + 1).$$

Disegnare il grafico di f e calcolare la derivata della distribuzione T_f.

f loc. sommabile in $\mathbb{R}$

$f(0+) - f(0-) = -2$



$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2\,\mathrm{sign}(x)$, f' loc. sommabile in $\mathbb{R}$

$$(T_f)' = T_{2\,\mathrm{sign}} - 2\delta_0$$

Esercizio 7 (4 punti)
Posto

$$f(x) = x^2 \cos x \,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

verificare che la distribuzione T_f è temperata e calcolarne la trasformata di Fourier.

$|x^2\cos x| = x^2|\cos x| \le x^2 \Longrightarrow f$ a crescita lenta $\Longrightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}(x^2\cos x)(\nu) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 [\mathcal{F}(\cos x)]''(\nu) = \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\left[\mathcal{F}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\right]''(\nu)$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2}\left\{\left[\mathcal{F}\left(e^{2\pi i\frac{1}{2\pi}x}\right)\right]''(\nu) + \left[\mathcal{F}\left(e^{2\pi i(-\frac{1}{2\pi})x}\right)\right]''(\nu)\right\}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2}\left(\delta''_{\frac{1}{2\pi}} + \delta''_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$$

Esercizio 8 (5 punti)
a) Siano date una distribuzione T ed una successione di distribuzioni T_n. Scrivere cosa significa che T_n converge a T nel senso delle distribuzioni.

b) Dire se esiste il limite nel senso delle distribuzioni della successione $T_n = \delta_{n-n\log n}$, $n \geq 1$. In caso affermativo calcolare tale limite.

(a) Si dice che $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se

$$\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \text{ per } n\to\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

(b) Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle T_n, \varphi\rangle = \varphi(n - n\log n) = 0$ (per $n > n_0$, n_0 opportuno)

perché $n - n\log n = n\log n\left(-1 + \frac{1}{\log n}\right) \to -\infty$ per $n\to\infty$.

Quindi $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow 0 = \langle 0, \varphi\rangle$

per cui $T_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$