Teoria ed elaborazione dei segnali

1. **EXERCISE 1a - Body and questions**

   Si consideri il segnale
   $$x(t) = 2 + \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right)$$
   e la sua versione campionata
   $$y(t) = x(t) \cdot T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)$$
   in cui $T_c = T/5$. Il segnale $y(t)$ viene filtrato da un sistema LTI con risposta all'impulso
   $$h_a(t) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2} \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(5\pi \frac{t}{T}\right)$$
   Il segnale $z_a(t)$ all'uscita del filtro con risposta all'impulso $h_a(t)$ vale:

   (a) $z_a(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(5\pi \frac{t}{T}\right)$ ✓
   (b) $z_a(t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{5}{T} t\right)$
   (c) $z_a(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(\frac{11\pi}{2} \frac{t}{T}\right)$
   (d) $z_a(t) = 0 \ \forall t$

2. **Settembre 2020 Tc 1b**

   Si consideri il segnale
   $$x(t) = 2 + \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right)$$
   e la sua versione campionata
   $$y(t) = x(t) \cdot T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c)$$
   in cui $T_c = T/5$. Il segnale $y(t)$ viene filtrato da un sistema LTI con risposta all'impulso
   $$h_b(t) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(10\pi \frac{t}{T}\right)$$
   Il segnale $z_b(t)$ all'uscita del filtro con risposta all'impulso $h_b(t)$ vale:

   (a) $z_b(t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{5}{T} t\right)$ ✓
   (b) $z_b(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(\frac{11\pi}{2} \frac{t}{T}\right)$
   (c) $z_b(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(2\pi \frac{5}{2T} t\right)$
   (d) $z_b(t) = 0 \ \forall t$

SOLUZIONE 1

La trasformata di Fourier del segnale
$$x(t) = 2 + \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi t} \cos\left(4\pi \frac{t}{T}\right)$$
vale
$$X(f) = 2\delta(f) + p_{\frac{1}{T}}(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{2}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{T}\right)\right] =$$

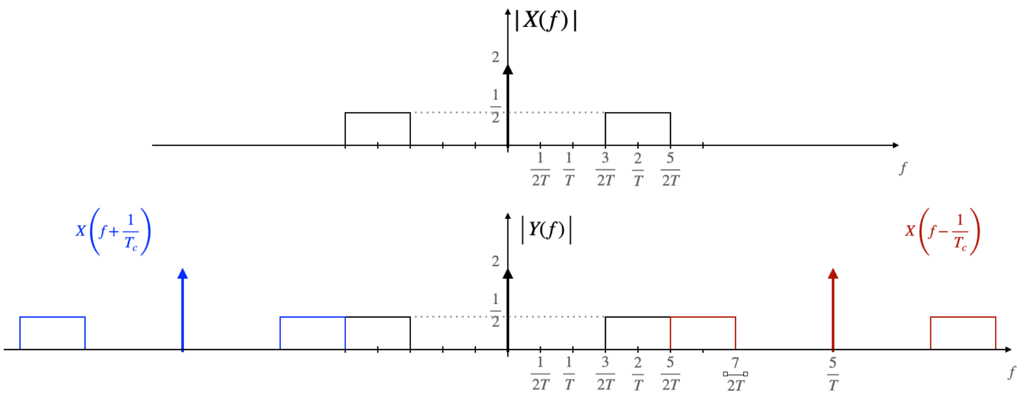

Figura 1: Modulo della trasformata di $x(t)$ e di $y(t)$

$$= 2\delta(f) + \frac{1}{2}\left[p_{\frac{1}{T}}\left(f - \frac{2}{T}\right) + p_{\frac{1}{T}}\left(f + \frac{2}{T}\right)\right]$$

Il segnale campionato $y(t)$ ha spettro periodico con repliche di $X(f)$ nei multipli di $f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{5}{T}$,

$$Y(f) = X(f) * T_c\left[\frac{1}{T_c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{n}{T_c}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

come mostrato in figura 1. Nella figura sono mostrate solo le repliche per $\frac{5}{T}$ e $-\frac{5}{T}$.
Considerando il filtro con

$$h_a(t) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\frac{t}{T}\right)}{\pi t}\cos\left(5\pi\frac{t}{T}\right)$$

la sua funzione di trasferimento si ottiene trasformando la risposta all'impulso

$$H_a(f) = p_{\frac{5}{2T}}(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{5}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{5}{2T}\right)\right]$$

$$H_a(f) = \frac{1}{2}\left[p_{\frac{5}{2T}}\left(f - \frac{5}{2T}\right) + p_{\frac{5}{2T}}\left(f + \frac{5}{2T}\right)\right]$$

come mostrato in figura 2.
Nell'altro caso

$$h_b(t) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\frac{t}{T}\right)}{\pi t}\cos\left(10\pi\frac{t}{T}\right)$$

e

$$H_b(f) = p_{\frac{3}{2T}}(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{5}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{5}{T}\right)\right]$$

$$H_b(f) = \frac{1}{2}\left[p_{\frac{3}{2T}}\left(f - \frac{10}{2T}\right) + p_{\frac{3}{2T}}\left(f + \frac{10}{2T}\right)\right]$$

come mostrato in figura 3.
Osservando gli spettri del segnale e della funzione di trasferimento é immediato vedere che nel caso (a) all'uscita del filtro é presente solo la parte dello spettro di forma rettangolare, mentre nell'altro caso (b) solo vengono selezionate le funzioni delta. Quindi,

$$Z_a(f) = \frac{1}{4}p_{\frac{2}{T}}\left(f - \frac{5}{2T}\right) + \frac{1}{4}p_{\frac{2}{T}}\left(f + \frac{5}{2T}\right)$$

$$Z_a(f) = \frac{1}{2}p_{\frac{2}{T}}(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{5}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{5}{2T}\right)\right]$$

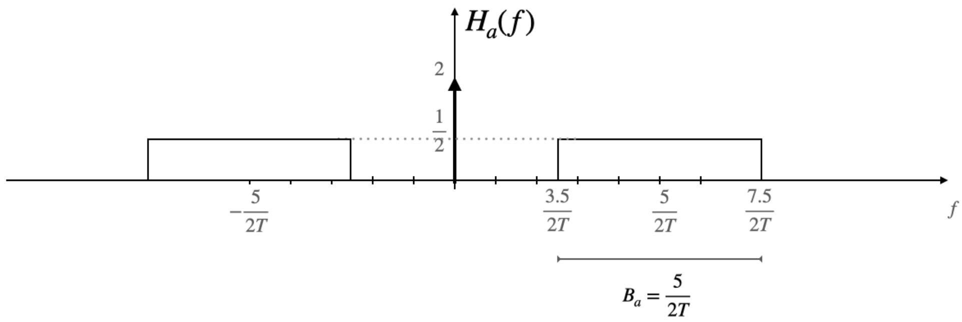

Figura 2: Funzione di trasferimento $H_a(f)$

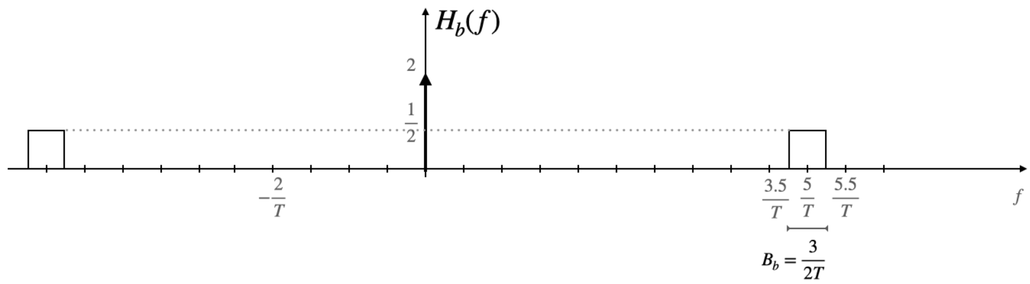

Figura 3: Funzione di trasferimento $H_b(f)$

come mostrato in figura 4 da cui si deriva

$$z_a(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)}{\pi t}\cos\left(2\pi\frac{5}{2T}t\right)$$

. Nell'altro caso

$$Z_b(f) = \frac{1}{2}2\delta\left(f - \frac{5}{T}\right) + \frac{1}{2}2\delta\left(f + \frac{5}{T}\right) = \delta\left(f - \frac{5}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{5}{T}\right)$$

come in figura 5 e

$$z_b(t) = 2\cos\left(2\pi\frac{5}{T}t\right)$$

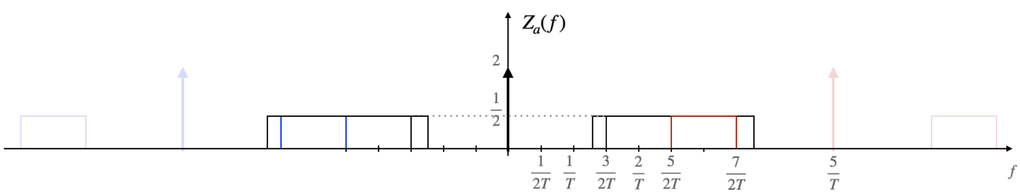

Figura 4: Spettro del segnale all'uscita del filtro $H_a(f)$

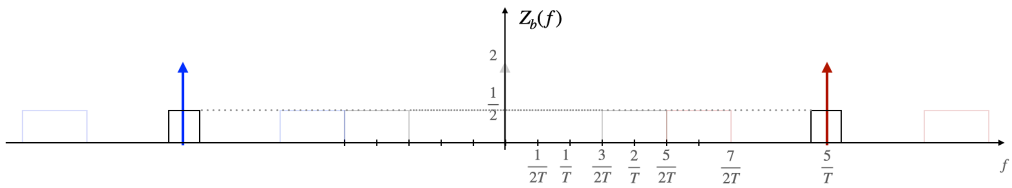

Figura 5: Spettro del segnale all'uscita del filtro $H_b(f)$

3. **Settembre 2020 Tc 2**

Si consideri il segnale

$$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{per } 0 \le t < T \\ 1 & \text{per } T \le t < 2T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

che viene elaborato da un filtro con risposta all'impulso

$$h(t) = e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

per ottenere il segnale $y(t)$. Quale delle seguenti relazioni é VERA:

(a) $y(2T) = 2\left(e^{-\frac{T}{2}} - 2e^{-T} + 1\right)$ ✓

(b) $y(2T) = 2\left(1 - e^{-\frac{T}{2}}\right)$

(c) $y(2T) = 2\left(e^{-\frac{T}{2}} - 2e^{-T} - 1\right)$

(d) $y(2T) = e^{-T}$

SOLUZIONE 2

Il segnale $x(t)$ si puó scrivere come somma di due seganli di tipo porta traslati

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

come in figura 6. L'uscita del filtro vale

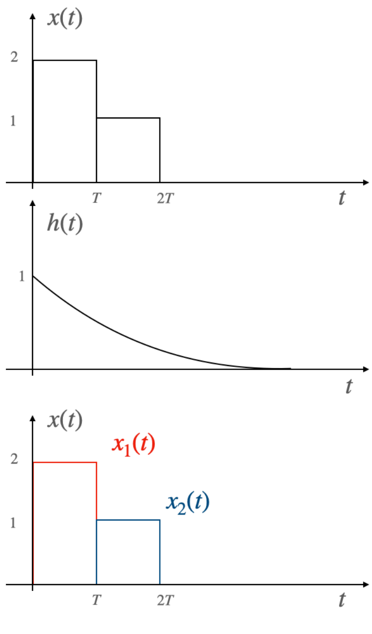

Figura 6: Segnale $x(t)$

$$y(t) = x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)d\tau = y_1(t)+y_2(t)$$

$$y(2T) = y_1(2T) + y_2(2T) = \int_0^T 2h(2T-\tau)d\tau + \int_T^{2T} 1h(t-\tau)d\tau$$

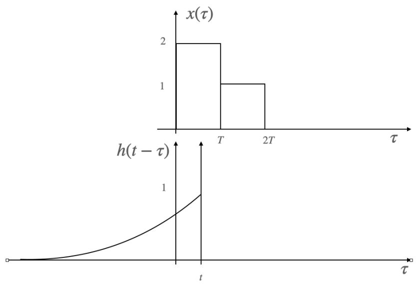

Figura 7: Convoluzione per ottenere $y(t)$

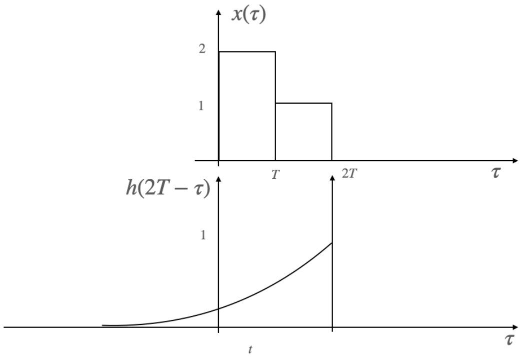

Figura 8: Convoluzione per ottenere $y(2T)$

$$y_1(2T) = \int_0^T 2e^{-\frac{2T-\tau}{2}} d\tau = 2e^{-\frac{2T}{2}} \int_0^T e^{\frac{\tau}{2}} d\tau = 4e^{-T}[e^{\frac{\tau}{2}}]_0^T = 4e^{-T}[e^{\frac{T}{2}} - 1] = 4e^{-\frac{T}{2}} - 4e^{-T}$$

$$y_2(2T) = \int_T^{2T} e^{-\frac{2T-\tau}{2}} d\tau = e^{-\frac{2T}{2}} \int_T^{2T} e^{\frac{\tau}{2}} d\tau = 2e^{-T}[e^{\frac{\tau}{2}}]_T^{2T} = 2e^{-T}[e^{\frac{2T}{2}} - e^{\frac{T}{2}}] = 2 - 2e^{-\frac{T}{2}}$$

Da cui

$$y(2T) = 4e^{-\frac{T}{2}} - 4e^{-T} + 2 - 2e^{-\frac{T}{2}} = 2e^{-\frac{T}{2}} - 4e^{-T} + 2 = 2(e^{-\frac{T}{2}} - 2e^{-T} + 1)$$

Come in figura 7. Poiché l'esercizio chiede di calcolare il valore di $y(2T)$ si tratta di considerare il caso in figura 8

Nell'altra versione in cui $h(t) = e^{-\frac{t}{3}}u(t)$:

$$y_1(2T) = \int_0^T 2e^{-\frac{2T-\tau}{3}} d\tau = 2e^{-\frac{2T}{3}} \int_0^T e^{\frac{\tau}{2}} d\tau = 6e^{-\frac{2T}{3}}[e^{\frac{\tau}{3}}]_0^T = 6e^{-\frac{2T}{3}}[e^{\frac{T}{3}} - 1] = 6e^{-\frac{T}{3}} - 6e^{-\frac{2T}{3}}$$

$$y_2(2T) = \int_T^{2T} e^{-\frac{2T-\tau}{3}} d\tau = e^{-\frac{2T}{3}} \int_T^{2T} e^{\frac{\tau}{3}} d\tau = 3e^{-\frac{2T}{3}}[e^{\frac{\tau}{3}}]_T^{2T} = 3e^{-\frac{2T}{3}}[e^{\frac{2T}{3}} - e^{\frac{T}{3}}] = 3 - 3e^{-\frac{T}{3}}$$

Da cui

$$y(2T) = 6e^{-\frac{T}{3}} - 6e^{-\frac{2T}{3}} + 3 - 3e^{-\frac{T}{3}} = 3e^{-\frac{T}{3}} - 6e^{-\frac{2T}{3}} + 3 = 3(^{-\frac{T}{3}} - 2e^{-\frac{2T}{3}} + 1)$$

4. **Settembre 2020 TC3a**

Lo spettro di energia del segnale $x(t) = 2\mathrm{e}^{-2|t-t_0|}$ vale:

(a) $S_x(f) = \frac{4}{\left[1+(\pi f)^2\right]^2}$ ✓
(b) $S_x(f) = \frac{4}{\left[1+(\pi f)^2\right]^2}\mathrm{e}^{-j4\pi f t_0}$
(c) $S_x(f) = \frac{2}{1+\left(\frac{\pi f}{2}\right)^2}$
(d) $S_x(f) = \frac{2}{1+\left(\frac{\pi f}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{-j4\pi f t_0}$
(e) Lo spettro di energia di $x(t)$ non esiste perché $x(t)$ è un segnale a potenza media finita.

SOLUZIONE 3

Dalle tavole e considerando la proprietá del ritardo si vede che la trasformata di $x(t)$ vale

$$X(f) = 2\frac{2 \cdot 2}{4 + 4\pi f^2}e^{-j2\pi f t_0} = 2\frac{1}{1 + \pi f^2}e^{-j2\pi f t_0}$$

da cui si ottiene che lo spettro di energia

$$S_x = |X(f)|^2 = \frac{4}{\left[1 + (\pi f)^2\right]^2}$$