1.- **Energia cinetica del gas de electrones.** Mostrar que la energia cinetica de un gas de N electrones en $\mathbb{R}^3$, a temperatura: $T = 0K$, es:

$$U_0 = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

Partiendo de la relación de la energía cinetica, dada la función de Fermi y la densidad de estados:

$$U_0 = \int_0^\infty \mathcal{E}\, f(\mathcal{E}) D(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$$

Para un gas de electrones, a $T=0$, se tiene que la distribución de Fermi es de la forma

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} 1; & 0 \le \mathcal{E} \le \mathcal{E}_F \\ 0; & \mathcal{E}_F < \mathcal{E} \end{cases}$$

Por tanto: $U_0 = \int_0^{\mathcal{E}_F} \mathcal{E} f(\mathcal{E}) D(\mathcal{E})\, d\mathcal{E} + \int_{\mathcal{E}_F}^{\infty} \mathcal{E} f(\mathcal{E}) D(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$

$$\Rightarrow U_0 = \int_0^{\mathcal{E}_F} \mathcal{E}\, D(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}.$$

De la expresión de la densidad de estados: $D(\mathcal{E}) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}^{1/2}$ Entonces:

$$U_0 = \int_0^{\mathcal{E}_F} \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}^{3/2}\, d\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\mathcal{E}^{5/2}}{5/2}\Big|_0^{\mathcal{E}_F}$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{V}{5\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \left[\mathcal{E}_F^{5/2} - 0^{5/2}\right]$$

$$\therefore U_0 = \frac{V}{5\pi^2}\left(\frac{2m\mathcal{E}_F}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}_F$$

Ahora, de la expresión del numero de electrones: $N = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m\mathcal{E}_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{3}{5}\left[\frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m\mathcal{E}_F}{\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\mathcal{E}_F$$

$$\therefore U_0 = \frac{3}{5} N \mathcal{E}_F \blacksquare$$

2.- **Presión y el modulo de Bulk de un gas de electrones.** (a) Derivar la relación que conecta la presión y el volumen de un gas a temperatura: $T = 0K$. (b) Demostrar que el modulo de Bulk: $B = -V\dfrac{\partial p}{\partial V}$ para un gas de electrones a temperatura: $T = 0K$, es: $B = \dfrac{5}{3}p = \dfrac{10}{9}\dfrac{U_0}{V}$. (c) Estimar el valor de la contribución del gas de electrones a B, para el potasio.

Hint: Usar la relación: $U_0 = \dfrac{3}{5}N\epsilon_F$ y la relación entre ϵ_F y la concentración de electrones. El resultado debe ser escrito como: $p = \dfrac{2}{3}\dfrac{U_0}{V}$.

a) Partiendo de: $P = -\dfrac{\partial U_0}{\partial V}$, En este caso, tomando: $U_0 = \dfrac{3}{5}N\epsilon_F$, con: $\epsilon_F = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$

$$\Rightarrow P = -\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{3}{5}N\epsilon_F\right]$$

$$\Rightarrow P = -\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{3}{5}N\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 N)^{2/3}\, V^{-2/3}\right]$$

$$\Rightarrow P = -\frac{3}{5}N\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 N)^{2/3}\left(-\frac{2}{3}\right)V^{-5/3}$$

$$\Rightarrow P = -\frac{3}{5}N\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}\right]\left(-\frac{2}{3}\right)V^{-1}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2}{5}N\epsilon_F/V$$

De $U_0 = \frac{3}{5}N\epsilon_F \Rightarrow P = \frac{2}{3V}\left(\frac{3}{5}N\epsilon_F\right)$

$$\therefore\ P = \frac{2}{3}\frac{U_0}{V}$$

b) Ahora, de la definición del modulo de Bulk: $B := -V\dfrac{\partial P}{\partial V}$

$$\Rightarrow B = -V\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{2}{3}\frac{U_0}{V}\right]$$

$$\Rightarrow B = -V\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{2}{3}\frac{3N\epsilon_F}{5V}\right]$$

$$\Rightarrow B = -V\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{2}{5V}N\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}\right]$$

$$\Rightarrow B = -\frac{VN\hbar^2(3\pi^2 N)^{2/3}}{5m}\frac{\partial}{\partial V}\left[V^{-5/3}\right]$$

$$\Rightarrow B = -\frac{VN\hbar^2(3\pi^2 N)^{2/3}}{5m}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)V^{-8/3}$$

$$\therefore\ B = \frac{N\hbar^2}{3m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}\frac{1}{V}$$

Retomando $B = \frac{N\hbar^2}{3m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}\frac{1}{V}$, donde $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$

$$\Rightarrow B = \frac{2N}{3}\frac{\varepsilon_F}{V}$$

De: $U_0 = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$

$$\Rightarrow B = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}U_0\right)\frac{1}{V}$$

$$\therefore B = \frac{10}{9}\frac{U_0}{V}$$

Donde, recordando que: $P = \frac{2}{3}\frac{U_0}{V}$

$$\therefore B = \frac{5}{3}P = \frac{10}{9}\frac{U_0}{V}$$

c) Ahora, de: $B = \frac{10}{9}\frac{U_0}{V} \Rightarrow B = \frac{10}{9}\,\frac{3}{5}\,\frac{N\varepsilon_F}{V}$

$$\therefore B = \frac{2}{3}\frac{N\varepsilon_F}{V}$$

Donde, de la concentración de electrones: $n = N/V \Rightarrow n = 1.40\ cm^{-3}$ $\wedge$ $\varepsilon_F = 7.12\ eV$, para el potasio.

$$\Rightarrow B = \frac{2}{3}\left[1.40\cdot(10^{-2}m)^{-3}\right]\left[7.12\ (1.602176\times10^{-19}\ J)\right]$$

$$\therefore B = 3.170177\times10^{-13}\ \frac{N}{m}$$

Scanned with CamScanner

3.- **Potencial quimico en $\mathbb{R}^2$.** Mostrar que el potencial quimico de un gas de Fermi en $\mathbb{R}^2$, esta dado por:

$$\mu(T) = k_B T ln\left[exp(\frac{\pi n\hbar^2}{mk_BT}) - 1\right]$$

para n electrones por unidad de area.

Nota: La densidad de orbitales de un gas de electrones libres en $\mathbb{R}^2$ es independiente de la energia: $D(\epsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}$, por unidad de area de un especimen.

Partiendo de la expresión para el numero de particulas en el gas de Fermi

$$N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Donde: la función de Fermi es $f(\varepsilon) = [e^{(\varepsilon-\mu)/K_BT} + 1]^{-1}$, y de la expresión de la densidad de estados $D(\varepsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}$. Entonces

$$N = \int_0^\infty \frac{m}{\pi\hbar^2} [e^{(\varepsilon-\mu)/K_BT} + 1]^{-1} d\varepsilon$$

Sea $x = e^{(\varepsilon-\mu)/K_BT} + 1 \Rightarrow dx = \frac{1}{K_BT} e^{(\varepsilon-\mu)/K_BT} d\varepsilon \quad \therefore \quad \frac{K_BT}{x-1} dx = d\varepsilon$

$$\Rightarrow N = \frac{m}{\pi\hbar^2} \int_{x(0)}^{x(\infty)} \frac{1}{x} \frac{K_BT}{x-1} dx$$

$$\Rightarrow N = \frac{mK_BT}{\pi\hbar^2} \int_{x(0)}^{x(\infty)} \frac{1}{x(x-1)} dx$$

$$\Rightarrow N = \frac{mK_BT}{\pi\hbar^2} \int_{x(0)}^{x(\infty)} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right] dx$$

$$\Rightarrow N = \frac{mK_BT}{\pi\hbar^2} [ln|x-1| - ln|x|] \Big|_{x(0)}^{x(\infty)}$$

Notese que: $x(0) = e^{-\mu/K_BT} + 1 \quad \wedge \quad x(\infty) = \infty$

$$\Rightarrow N = \frac{mK_BT}{\pi\hbar^2} ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| \Big|_{1+e^{-\mu/K_BT}}^{\infty}$$

$$\Rightarrow N = \frac{mK_BT}{\pi\hbar^2} \left[\lim_{x\to\infty} ln|1 - 1/x| - ln\left|1 - \frac{1}{1+e^{-\mu/K_BT}}\right|\right]$$

$$\Rightarrow N = \frac{mK_BT}{\pi\hbar^2} \left[\lim_{x\to\infty} ln|1| - ln\left|1 - \frac{1}{1+e^{-\mu/K_BT}}\right|\right]$$

Tomando: $N=n$, con n el número de electrones en el sistema

$$-\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT} = \ln\left|1-\frac{1}{1+e^{-\mu/K_BT}}\right|$$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{1}{1+e^{-\mu/K_BT}} = \exp\left(-\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-\mu/K_BT}} = 1-\exp\left(\frac{-n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{-\mu/K_BT}}{1+e^{-\mu/K_BT}} = \exp\left(-\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+e^{-\mu/K_BT}}{e^{-\mu/K_BT}} = \exp\left(\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{\mu/K_BT}+1 = \exp\left(\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{\mu/K_BT} = \exp\left(\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)-1$$

$$\Rightarrow \quad \mu/K_BT = \ln\left|\exp\left(\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)-1\right|$$

$$\therefore \quad \mu = K_BT\ln\left|\exp\left(\frac{n\pi\hbar^2}{mK_BT}\right)-1\right|$$

Scanned with CamScanner

5.- **Helio 3 (He^3) liquido.** El atomo de Helio 3 (He^3) tiene un spin $s = 1/2$, y es un fermion. La densidad del Helio 3 liquido es: $\rho = 0.081\ g\ cm^{-3}$ ($a\ T \approx 0$). Calcular la energia de Fermi: ϵ_F y la temperatura de Fermi: T_F

Partiendo de la ecuación de la energía de Fermi: $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$. Sabiendo que la densidad del material está dada por: $\rho = \frac{Nm}{V} \Rightarrow \frac{N}{m} = \frac{\rho}{m}$. Por tanto

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2\rho}{m}\right)^{2/3}$$

Donde: $\hbar = 1.054571817\times10^{-34}\ J\cdot s$ $\wedge$ $\rho = 0.081\ g/cm^3 = 81\ \frac{Kg}{m^3}$ $\wedge$ $m = 3.0160293\ uma = 5.0081167\times10^{-27}\ Kg$

Por tanto

$$\varepsilon_F = \frac{(1.054571817\times10^{-34}\ J\cdot s)^2}{2(5.0081167\times10^{-27}\ Kg)}\left(\frac{3\pi^2(81\ Kg/m^3)}{5.0081167\times10^{-27}\ Kg}\right)^{2/3}$$

$$\left(\frac{J^2\cdot s^2}{Kg}\cdot\left(\frac{1}{m^3}\right)^{2/3} = \frac{J^2\cdot s^2}{Kg\cdot m^2} = J\right)$$

$$\therefore\ \varepsilon_F = 6.796243616\times10^{-23}\ J$$

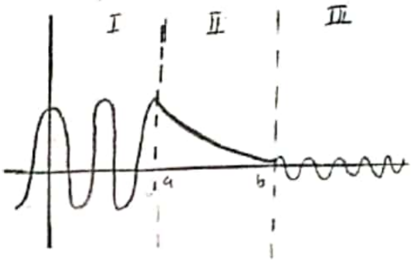
Ahora, de la definición de la temperatura de Fermi: $T_F = \frac{\varepsilon_F}{K_B}$,

donde $K_B = 1.380649\times10^{-23}\ J\cdot K^{-1}$

$$\Rightarrow T_F = \frac{6.796243616\times10^{-23}\ J}{1.380649\times10^{-23}\ J\cdot K^{-1}}$$

$$\therefore\ T_F = 4.922499\ K$$

30.- De la ecuación: [Ejemplo 4], resolver para el coeficiente R, representante de la amplitud de la onda reflectada. Verificar que $|R|^2 + |T|^2 = 1$, y descibir la interpretación física.



De las ecuaciones de onda:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{iK_1 x} + Re^{-iK_1 x}, & x \leq a \\ Ge^{-K_2 x} + De^{K_2 x}, & a < x < b \\ Te^{iK_1 x}, & b \leq x \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de continuidad:

$$\lim_{x \to a^-} \psi(x) = \lim_{x \to a^+} \psi(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \to b^-} \psi(x) = \lim_{x \to b^+} \psi(x)$$

$$\wedge \quad \lim_{x \to a^-} \psi'(x) = \lim_{x \to a^+} \psi'(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \to b^-} \psi'(x) = \lim_{x \to b^+} \psi'(x)$$

$$\rightarrow \quad e^{iK_1 a} + Re^{-iK_1 a} = G e^{-K_2 a} + De^{K_2 a} \quad \wedge \quad Ge^{-K_2 b} + De^{K_2 b} = Te^{iK_1 b}$$

$$\wedge \quad iK_1 e^{iK_1 a} - iK_1 Re^{-iK_1 a} = -K_2 G e^{-K_2 a} + K_2 De^{K_2 a} \quad \wedge \quad -K_2 Ge^{-K_2 b} + K_2 De^{K_2 b} = iK_1 T e^{iK_1 b}$$

Nombrandolas:

i) $e^{iK_1 a} + Re^{-iK_1 a} = G e^{-K_2 a} + De^{K_2 a}$

ii) $Ge^{-K_2 b} + De^{K_2 b} = Te^{iK_1 b}$

iii) $iK_1 e^{iK_1 a} - iK_1 Re^{-iK_1 a} = -K_2 G e^{-K_2 a} + K_2 D e^{K_2 a}$

iv) $-K_2 G e^{-K_2 b} + K_2 De^{K_2 b} = iK_1 T e^{iK_1 b}$

Trabajando con (ii) y (iv)

$$-K_2 G e^{-K_2 b} + K_2 De^{K_2 b} = iK_1 (G e^{-K_2 b} + De^{K_2 b})$$

$$\Rightarrow -K_2 G e^{-K_2 b} + K_2 De^{K_2 b} = iK_1 G e^{-K_2 b} + iK_1 D e^{K_2 b}$$

$$\Rightarrow -K_2 G e^{-K_2 b} - iK_1 G e^{-K_2 b} = -K_2 D e^{K_2 b} + iK_1 D e^{K_2 b}$$

$$\Rightarrow (K_2 + iK_1) G e^{-K_2 b} = (K_2 - iK_1) D e^{K_2 b}$$

$$\therefore \quad G = \frac{K_2 - iK_1}{K_2 + iK_1} D e^{2K_2 b}$$

Con lo anterior, vease para ii)

$$C' e^{-K_2 b} + D e^{K_2 b} = T e^{iK_1 b}$$

$$\Rightarrow \frac{K_2 - iK_1}{K_2 + iK_1} D e^{2K_2 b} e^{-K_2 b} + D e^{K_2 b} = T e^{iK_1 b}$$

$$\Rightarrow \frac{K_2 - iK_1}{K_2 + iK_1} D e^{K_2 b} + D e^{K_2 b} = T e^{iK_1 b}$$

$$\Rightarrow \frac{K_2 - iK_1 + K_2 + iK_1}{K_2 + iK_1} D e^{K_2 b} = T e^{iK_1 b}$$

$$\Rightarrow \frac{2K_2}{K_2 + iK_1} D e^{K_2 b} = T e^{iK_1 b}$$

$$\therefore \quad D = \frac{K_2 + iK_1}{2K_2} T e^{(iK_1 - K_2) b}$$

Ahora, para i) y iii), haciendo: $iK_1 (i) - (ii)$:

$$iK_1 [e^{iK_1 a} + R e^{-iK_1 a}] - [iK_1 e^{iK_1 a} - iRK_1 e^{-iK_1 a}] = iK_1 [C' e^{-K_2 a} + D e^{K_2 a}] - [-K_2 C' e^{-K_2 a} + K_2 D e^{K_2 a}]$$

$$\Rightarrow iK_1 e^{iK_1 a} + iK_1 R e^{-iK_1 a} - iK_1 e^{iK_1 a} + iK_1 R e^{-iK_1 a} = iK_1 C' e^{-iK_1 a} + iK_1 D e^{K_2 a} + K_2 C' e^{-K_2 a} - K_2 D e^{K_2 a}$$

$$\Rightarrow 2iK_1 R e^{-iK_1 a} = (iK_1 + K_2) C' e^{-K_2 a} + (iK_1 - K_2) D e^{K_2 a}$$

$$\Rightarrow 2iK_1 R e^{-iK_1 a} = \cancel{(iK_1 + K_2)} \frac{K_2 - iK_1}{\cancel{K_2 + iK_1}} D e^{K_2 b} e^{-K_2 a} + (iK_1 - K_2) D e^{K_2 a}$$

$$\Rightarrow 2iK_1 R e^{-iK_1 a} = (K_2 - iK_1) D e^{K_2 (b-a)} + (K_2 - iK_1) D e^{K_2 a}$$

$$\Rightarrow R = \frac{K_2 - iK_1}{2iK_1} D e^{K_2 b - K_2 a + iK_1 a} - \frac{K_2 - iK_1}{2iK_1} D e^{K_2 a + iK_1 a}$$

$$\Rightarrow R = \frac{K_2 - iK_1}{2iK_1} \frac{K_2 + iK_1}{2K_2} T e^{iK_1 b - K_2 b + K_2 b - K_2 a + iK_1 a} - \frac{K_2 - iK_1}{2iK_1} \frac{K_2 + iK_1}{2K_2} T e^{iK_1 b - K_2 b + K_2 a + iK_1 a}$$

$$\Rightarrow R = \frac{K_2^2 + K_1^2}{4iK_1 K_2} T e^{iK_1 b + iK_1 a} - \frac{K_2^2 + K_1^2}{4iK_1 K_2} T e^{iK_1 b + iK_1 a} e^{K_2 a - K_2 b}$$

$$\Rightarrow R = \frac{K_2^2 + K_1^2}{4iK_1 K_2} T e^{iK_1 b + iK_1 a} [1 - e^{K_2 a - K_2 b}]$$

Por tanto: $|R|^2 + |T|^2 = \left| \frac{K_2^2 + K_1^2}{4iK_1 K_2} T e^{iK_1 (b+a)} [1 - e^{K_2 (a-b)}] \right|^2 + |T|^2$; donde: $|e^{iK_1 (b-a)}| = 1$

$$\Rightarrow |R|^2 + |T|^2 = |T|^2 \left[\left| \frac{K_1^2 + K_2^2}{4iK_1 K_2} (1 - e^{K_2 (a-b)}) \right|^2 + 1 \right]$$

Ahora, de: iK_1 (i) + (ii):

$$iK_1[e^{iK_1a}+Re^{-iK_1a}]+[iK_1e^{iK_1a}-iK_1Re^{-iK_1a}] = iK_1[Ce^{-K_2a}+De^{K_2a}]+[-K_2Ce^{-K_2a}+K_2De^{K_2a}]$$

$$\Rightarrow iK_1e^{iK_1a}+iK_1Re^{-iK_1a}+iK_1e^{iK_1a}-iK_1Re^{-iK_1a} = iK_1Ce^{-K_2a}+iK_1De^{K_2a}-K_2Ce^{-K_2a}+K_2De^{K_2a}$$

$$\Rightarrow 2iK_1Re^{iK_1a} = (iK_1-K_2)Ce^{-K_2a}+(iK_1+K_2)De^{K_2a}$$

$$\Rightarrow R = \frac{iK_1-K_2}{2iK_1}Ce^{-K_2a-iK_1a}+\frac{iK_1+K_2}{2iK_1}De^{K_2a-iK_1a}$$

$$\Rightarrow R = \frac{iK_1-K_2}{2iK_1}\,\frac{K_2-iK_1}{K_2+iK_1}De^{K_2b}e^{-K_2a-iK_1a}+\frac{iK_1+K_2}{2iK_1}De^{K_2a-iK_1a}$$

$$\Rightarrow R = -\frac{(K_2-iK_1)^2}{2iK_1(K_2+iK_1)}De^{K_2b-K_2a-iK_1a}+\frac{K_2+iK_1}{2iK_1}De^{K_2a-iK_1a}$$

$$\Rightarrow R = -\frac{(K_2-iK_1)^2}{4iK_1K_2(K_2+iK_1)}Te^{iK_1b-K_2b+K_2b-K_2a-iK_1a}+\frac{K_2+iK_1}{4iK_1K_2}Te^{iK_1b-K_2b+K_2a-iK_1a}$$

$$\Rightarrow R = \frac{T}{4iK_1K_2}e^{iK_1b-iK_1a}\left[-\frac{(K_2-iK_1)^2}{K_2+iK_1}e^{-K_2a}+(K_2+iK_1)e^{-K_2b+K_2a}\right]$$

$$R = \frac{1}{4iK_1K_2(K_2+iK_1)}Te^{iK_1(b-a)}\left[(K_2+iK_1)^2e^{-K_2(a-b)}-(K_2-iK_1)^2e^{-K_2a}\right]$$

Si $\frac{R}{R}=1$

$$\Rightarrow \frac{Te^{iK_1b-iK_1a}[(K_2+iK_1)^2e^{K_2a-K_2b}-(K_2-iK_1)^2e^{-K_2a}]/4iK_1K_2(K_2+iK_1)}{Te^{iK_1b+iK_1a}[1-e^{K_2a-K_2b}](K_1^2+K_2^2)/4iK_1K_2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(K_2+iK_1)^2e^{K_2a-K_2b}-(K_2-iK_1)^2e^{-K_2a}}{K_2+iK_1}\cdot\frac{1}{(K_1^2+K_2^2)e^{iK_1a}(1-e^{K_2a-K_2b})} = 1$$

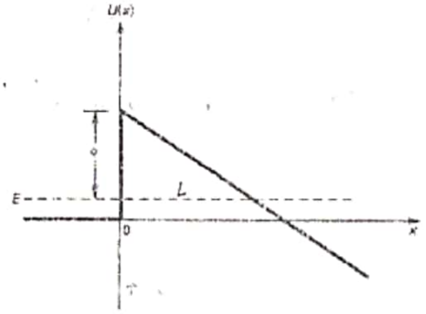
37. Cuando un fuerte campo electrico es aplicado al metal, los electrones pueden ser expulsados del metal. A este se le conoce como: **emision de campo**, y eso involucra un proceso de penetración de la barrera de potencial. El potencial es de la forma:

$$U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \phi - e\varepsilon x + E; & x \geq 0 \end{cases}$$

Donde: $\phi > 0$.

Calcular la probabilidad de pentración de la barrera, por un electron quien se aproxima a dicha región desde la derecha ($x \to 0$). Evaluar numericamente para el caso de: $\phi = 3eV \wedge \varepsilon = 1\times10^9 V/m$.

Considerese como L a la distancia horizontal de la intersección de la recta $y = E$ con $y = U(x)$



Partiendo de la aproximación de la probabilidad de trasmisión:

$$P \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m[U(x) - E]}\,dx\right)$$

En este caso: $a = 0 \wedge b \in \mathbb{R}$: $U(b) = E$. Determinando b:

$$\phi - \mathcal{E}eb + E = E$$

$$\Rightarrow \phi = \mathcal{E}eb$$

$$\therefore b = \frac{\phi}{\mathcal{E}e}$$

Por tanto: $P \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^{\phi/\mathcal{E}e} \sqrt{2m[\phi - e\mathcal{E}x + E - E]}\,dx\right)$

$$\Rightarrow P \simeq \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^{\phi/\mathcal{E}e} \sqrt{\phi - e\mathcal{E}x}\,dx\right)$$

Sea $y = \phi - e\mathcal{E}x \Rightarrow dy = -e\mathcal{E}dx$. Por tanto

$$\int \sqrt{\phi - e\mathcal{E}x}\,dx = \int \frac{y^{1/2}}{-e\mathcal{E}}\,dy$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\phi - e\mathcal{E}x}\,dx = -\frac{1}{e\mathcal{E}}\,\frac{y^{3/2}}{3/2}$$

Por tanto: $\int \sqrt{\phi - e\mathcal{E}x}\,dx = -\frac{2}{3e\mathcal{E}}(\phi - e\mathcal{E}x)^{3/2} + C'$. Con lo que:

$$P \simeq \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \frac{-2}{3e\mathcal{E}} \left. (\phi - e\mathcal{E}x)^{3/2} \right|_0^{\phi/e\mathcal{E}} \right]$$

$$\Rightarrow P \simeq \exp\left[\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e\mathcal{E}} \left\{ \cancel{\left(\phi - e\mathcal{E}\frac{\phi}{e\mathcal{E}}\right)^{3/2}} - (\phi - e\mathcal{E}\cdot 0)^{3/2} \right\} \right]$$

$$\Rightarrow P \simeq \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar e\mathcal{E}} \phi^{3/2} \right]$$

Para el caso de $\mathcal{E} = 1\times 10^{9}\ \frac{V}{m}$ $\wedge$ $\phi = 3\,eV$.

$$\Rightarrow P \simeq \exp\left[-\frac{4\sqrt{2(9.10938356\times 10^{-31}\,Kg)}\ (3\,eV)^{3/2}}{3(6.58211956\times 10^{-16}\,eV\cdot s)(1.60217\times 10^{-19}\,C)(1\times 10^{9}\ V/m)} \right]$$

$$\therefore P \simeq e^{-8.86759\times 10^{10}} \simeq 0$$

Es decir la probabilidad de trasmisión o traspaso de la barrera de potencial es casi nula