Estado Solido

Tarea 5

Marco Antonio Rodríguez de León [1941556]

Instrucciones: Responder de manera detallada las preguntas formuladas en este cuestionario. Se debe apoyar cada respuesta, según el caso, con fórmulas y graficas esquematicas.

1.- Las ondas longitudinales se propagan atraves de un arreglo lineal monoatomico cuyo espacio de interacción interatomico es: $a = 3.6 \times 10^{-10} m$. La masa de los atomos son: $m = 56amu = 1.6650 \times 10^{-27} kg$. La velocidad acustica en el limite de la onda es: $v_0 = 5400 m/s$. Encontrar a) La frecuencia de corte: ω_m; b) la velocidad de fase (v_p) y la velocidad de grupo (v_g) en 4a. c La velocidad de fase y la velocidad de grupo de la onda en la frecuencia de corte; d) La constante de fuerza longitudinal interatomica. Asumirse que todas las fuerzas interatomicas obedecen la ley de Hooke, y que solo las interacciones de los primeros vecinos es singificativa

a) Partiendo de la definición de frecuencia de corte: $\omega_m := \sqrt{4\beta/m}$

De la definición de velocidad acustica: $v_0 = a\sqrt{\beta/m}$, entonces

$$\omega_m = \frac{2v_0}{a}$$

Donde: $v_0 = 5400\ m/s$ y $a = 3.6\times10^{-10}\ m$

$$\Rightarrow \omega_m = \frac{2(5400\ m/s)}{3.6\times10^{-10}\ m}$$

$$\therefore \omega_m = 3\times10^{13}\ rad/s$$

b) Partiendo de la expresión de la velocidad de fase: $v_p := v_0 \cos\left(\frac{Ka}{2}\right)$

De la relación del vector de propagación $K := \frac{2\pi}{\lambda}$, para $\lambda = 4a$

$$\Rightarrow v_p = v_0 \cos\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow v_p = v_0 \cos\left(\frac{\pi a}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow v_p = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore v_p = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0$$

Donde: $v_0 = 5400\ m/s$

$$\Rightarrow v_p = \frac{\sqrt{2}}{2}(5400 m/s)$$

$$\therefore v_p = 3818.38\ m/s.$$

Ahora, de la definición de velocidad de grupo $v_g = v_0 \frac{\sin(Ka/2)}{Ka/2}$ Donde $K = \frac{\pi}{2a}$, entonces

$$v_g = v_0 \frac{\sin(\frac{a}{2}\frac{\pi}{2a})}{\frac{a}{2}\frac{\pi}{2a}}$$

$$\Rightarrow v_g = v_0 \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} v_0$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{2\sqrt{2}\, v_0}{\pi}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(5400\, m/s)$$

$$v_g = 4861.91\ m/s$$

c) Ahora, de la definición de velocidad de fase: $v_p = v_0 \cos(Ka/2)$, con $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, y $\lambda = 2a$

$$\Rightarrow v_p = v_0 \cos(\frac{2\pi}{2a}\frac{a}{2})$$

$$\Rightarrow v_p = v_0 \cos(\frac{\pi}{2})$$

$$v_p = 0$$

De la definición de velocidad de grupo: $v_g = v_0 \frac{\sin(Ka/2)}{Ka/2}$, con: $K = \frac{\pi}{a}$

$$\Rightarrow v_g = v_0 \frac{\sin(\frac{\pi}{a}\frac{a}{2})}{\frac{\pi}{a}\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow v_g = v_0 \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{2}{\pi} v_0$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{2}{\pi}(5400\ m/s)$$

$$v_g = 3437.75\ m/s$$

d) Partiendo de la definición de velocidad acustica: $v_0 := a\sqrt{\beta/m}$, entonces

$$\beta = m(\frac{v_0}{a})^2$$

De $v_0 = 5400\ m/s$, $a = 3.6\times10^{-10} m$ y $m = 56\ amu$

$$\beta = (\frac{5400\ m/s}{3.6\times10^{-10} m})^2 (56\ amu)(\frac{1.6605\times10^{-27} Kg}{1\ amu})$$

$$\beta = 20.9223\ N/m$$

Scanned with CamScanner

2.- En un cierto arreglo monoatomico con espaciado $a = 3.0 \times 10{-}10m$ y masa $m = 40amu$, la velocidad de grupo es $v_g = 2700m/s$. La frecuencia de corte para una oscilación longitudinal es: $\omega_m = 2.5 \times 10^{13} rad/s$. Determinar la velocidad de fase de la onda; y la constante de Hooke en la interacción.

a) Partiendo de la definición de velocidad de fase: $v_p = v_0 \dfrac{\sin(Ka/2)}{Ka/2}$

De la relación: frecuencia de corte - velocidad acustica: $v_0 = \dfrac{a\omega_m}{2}$

$$v_p = \frac{a\omega_m}{2} \frac{\sin(Ka/2)}{Ka/2}$$

Ahora, de la definición de velocidad de grupo: $v_g = v_0 \cos(\frac{Ka}{2})$ Entonces:

$$\frac{Ka}{2} = \arccos\left(\frac{v_g}{v_0}\right)$$

Por tanto: $$v_p = \frac{a\omega_m}{2} \frac{\sin(\arccos(v_g/v_0))}{\arccos(v_g/v_0)}$$

Como $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, entonces: $|\sin(x)| = \sqrt{1-\cos^2(x)}$ Por tanto:

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Entonces: $$v_p = \frac{a\omega_m}{2} \frac{\sqrt{1-(2v_g/a\omega_m)^2}}{\arccos(2v_g/a\omega_m)}$$

De $a = 3.0 \times 10^{-10} m$, $\omega_m = 2.5 \times 10^{13}$ rad/s, $v_g = 2700$ m/s, entonces:

$$v_p = \frac{(3.0 \times 10^{-10} m)(2.5 \times 10^{13} rad/s)}{2} \frac{\sqrt{1-\left[\frac{2(2700 m/s)}{(3.0 \times 10^{-10} m)(2.5 \times 10^{13} rad/s)}\right]^2}}{\arccos\left(\frac{2(2700 m/s)}{(3.0 \times 10^{-10} m)(2.5 \times 10^{13} rad/s)}\right)}$$

$$\therefore v_p = 3397.99 \ m/s$$

b) De la definición de frecuencia de corte: $\omega_m = \sqrt{4\beta/m}$, entonces:

$$\beta = \frac{m\omega_m^2}{4}$$

De $\omega_m = 2.5 \times 10^{13}$ rad/s y $m = 40$ amu, $1 amu = 1.6605 \times 10^{-27} Kg$

$$\Rightarrow \beta = \frac{(2.5 \times 10^{13} rad/s)^2 (40 \ amu)(1.6605 \times 10^{-27} Kg/amu)}{4}$$

$$\beta = 10.38 \ N/m$$

3.- El modulo de Young para el hierro ($m = 56amu, \rho = 7.87g/cm^3$), es: $Y = 2.18\times10^{11}N/m^2$.
Calcular la velocidad de sonido en una onda macroscopica y estimar la frecuencia de corte

a) Partiendo de la definición de velocidad de fase: $v_p = v_0 \frac{\sin(Ka/2)}{Ka/2}$

Para una onda macroscopica, se considera: $K \to 0$, por tanto $Ka/2 \to 0$

Entonces: $v_p \to v_0$.

De la relación velocidad de fase - modulo de Young: $v_p = \sqrt{Y/\rho}$ entonces

$$v_0 \to \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$\to v_0 \to \sqrt{\frac{2.18\times10^{11}\ N/m^2}{7.87\ g/cm^3}}$$

$$\to v_0 \to \sqrt{\frac{2.18\times10^{11}}{7.87}\frac{(10^{-2})^3 m^3}{10^{-3} Kg}\frac{N}{m^2}}$$

$$v_0 \to 5263.09\ m/s$$

b) De la relación: velocidad acustica - frecuencia de corte: $\omega_m = \frac{2v_0}{a}$, entonces:

$$\omega_m \to \frac{2v_p}{a}$$

Ahora, de la definición de densidad: $\rho = \frac{m}{V}$ Tomando $V = a^3$ (celda unitaria), entonces: $\rho = \frac{m}{a^3}$, entonces $a = \sqrt[3]{m/\rho}$ Por tanto

$$\omega_m \to \frac{2}{(m/\rho)^{3}}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$\to \omega_m \to 2\sqrt[3]{\frac{7.87\ g/cm^3}{56\ amu}}\sqrt{\frac{2.18\times10^{11}\ N/m^2}{7.87\ g/cm^3}}$$

$$\to \omega_m \to 2\sqrt[3]{\frac{7.87}{56}\frac{10^{-3} Kg}{(10^{-2})^3 m^3}\frac{1}{1.6605\times10^{-27} Kg}}\sqrt{\frac{2.18\times10^{11}}{7.87}\frac{(10^{-2})^3 m^3}{10^{-3} Kg}\frac{N}{m^2}}$$

$$\therefore \omega_m \to 4.26\times10^{13}\ rad/s$$

4.- Considerese el caso de una oscilación longitudinal en un arreglo diatomico lineal, teniendo las caracteristicas de un compuesto NaCl ($a = 2.82\times10^{-10}m, m = 23amu, M = 35.5amu, velocidaddeondalarga:$ $4800m/s$). Encontrar: a) la constante de fuerza interatomica, b) La frecuencia asociada con el limite superior del limite acustico; c) los extremos minimos y maximos del limite optico en la relación de dispersión; e) la frecuencia acustica y f) la frecuencia optica para la onda con longitud de onda: $\lambda = 8a$

a) Partiendo de la velocidad acustica para un arreglo diatomico lineal: $V_0 = a\sqrt{\frac{2\beta}{m+M}}$, entonces $\beta = \frac{m+M}{2}\left(\frac{V_0}{a}\right)^2$ De: $m = 23\,amu$, $M = 35.5\,amu$, $a = 2.82\times10^{-10}m$, $V_0 = 4800\ m/s$

$$\Rightarrow \beta = \frac{23amu + 35.5amu}{2} \cdot \frac{1.6605\times10^{-27}Kg}{1amu}\left(\frac{4800\ m/s}{2.82\times10^{-10}m}\right)^2$$

$$\therefore \beta = 14.07\ \frac{N}{m}$$

b) Ahora, determinando el extremo inferior del limite acustico, de: $\omega_-(\frac{\pi}{a}) = \sqrt{2\beta/M}$

$$\rightarrow \omega_-(\tfrac{\pi}{a}) = \sqrt{\frac{2}{M}\,\frac{m+M}{2}\left(\frac{V_0}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_-(\tfrac{\pi}{a}) = \frac{V_0}{a}\sqrt{\frac{m+M}{M}}$$

De: $m = 23\,amu$, $M = 35.5\,amu$, $a = 2.82\times10^{-10}m$, $V_0 = 4800\ m/s$

$$\Rightarrow \omega_-(\tfrac{\pi}{a}) = \frac{4800\ m/s}{2.82\times10^{-10}m}\sqrt{\frac{23amu + 35.5amu}{35.5amu}}$$

$$\omega_-(\tfrac{\pi}{a}) = 2.19\times10^{13}\ rad/s$$

c) Ahora, determinando el extremo superior del limite acustico, de: $\omega_+(\frac{\pi}{a}) = \sqrt{2\beta/m}$

$$\rightarrow \omega_+(\tfrac{\pi}{a}) = \sqrt{\frac{2}{m}\,\frac{m+M}{2}\left(\frac{V_0}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_+(\tfrac{\pi}{a}) = \frac{V_0}{a}\sqrt{\frac{m+M}{m}}$$

De: $m = 23\,amu$, $M = 35.5\,amu$, $a = 2.82\times10^{-10}m$, $V_0 = 4800\ m/s$

$$\rightarrow \omega_+(\tfrac{\pi}{a}) = \frac{4800\ m/s}{2.82\times10^{-10}m}\sqrt{\frac{23amu + 35.5amu}{23amu}}$$

$$\omega_+(\tfrac{\pi}{a}) = 2.71\times10^{13}\ rad/s$$

d) Para los limites opticos, las frecuencias son: $\omega_-(0) = 0 \text{ rad/s}$ $\wedge$ $\omega_+(0) = \sqrt{2\beta \frac{m+M}{mM}}$

$$\Rightarrow \omega_+(0) = \sqrt{2 \cdot \frac{m+M}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \frac{m+M}{mM}}$$

$$\Rightarrow \omega_+(0) = \frac{v_0(m+M)}{a\sqrt{mM}}$$

De: $m = 23\,amu$, $M = 35.5\,amu$, $v_0 = 4800\ m/s$, $a = 2.82\times10^{-10}\ m$

$$\Rightarrow \omega_+(0) = \frac{(4800\ m/s)(23\,amu + 35.5\,amu)}{(2.82\times10^{-10}\ m)\sqrt{(23\,amu)(35.5\,amu)}}$$

(No se realizan los cambios de unidades puesto que $\frac{m+M}{\sqrt{mM}}$ es adimensional)

$$\therefore \omega_+(0) = 3.48\times10^{13}\ rad/s$$

e) Partiendo de la expresión de la frecuencia para un arreglo diatómico lineal:

$$\omega^2_{+,-}(K) = \frac{\beta(m+M)}{mM}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mM\sin^2(Ka)}{(m+M)^2}}\right)$$

De: $K = 2\pi/\lambda$, tomando $\lambda = 8a$, entonces:

$$\sin^2(Ka) = \sin^2\left(\frac{2\pi}{8a}\cdot a\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2(Ka) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \sin^2(Ka) = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\omega^2_{+,-}\left(\frac{\pi}{4a}\right) = \frac{\beta(m+M)}{mM}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2mM}{(m+M)^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \omega^2_{+,-}\left(\frac{\pi}{4a}\right) = \frac{m+M}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \frac{m+M}{mM}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2mM}{(m+M)^2}}\right)$$

Entonces los limites de frecuencia son:

$$\omega_-\left(\frac{\pi}{4a}\right) = \frac{v_0(m+M)}{a\sqrt{2mM}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{2mM}{(m+M)^2}}} \quad \wedge \quad \omega_+\left(\frac{\pi}{4a}\right) = \frac{v_0(m+M)}{a\sqrt{2mM}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{2mM}{(m+M)^2}}}$$

De: $m = 23\,amu$, $M = 35.5\,amu$, $v_0 = 4800\ m/s$, $a = 2.82\times10^{-10}\ m$

$$\Rightarrow \omega_-\left(\frac{\pi}{4a}\right) = \frac{(4800\ m/s)(23\,amu + 35.5\,amu)}{(2.48\times10^{-10}\ m)\sqrt{2(23\,amu)(35.5\,amu)}}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{2(23\,amu)(35.5\,amu)}{(23\,amu + 35.5\,amu)^2}}}$$

$$\wedge\ \omega_+\left(\frac{\pi}{4a}\right) = \frac{(4800\ m/s)(23\,amu + 35.5\,amu)}{(2.82\times10^{-10}\ m)\sqrt{2(23\,amu)(35.5\,amu)}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{2(23\,amu)(35.5\,amu)}{(23\,amu + 35.5\,amu)^2}}}$$

$$\therefore \omega_-\left(\frac{\pi}{4a}\right) = 1.24\times10^{13}\ rad/s \quad \wedge \quad \omega_+\left(\frac{\pi}{4a}\right) = 3.23\times10^{13}\ rad/s$$

5.- *Demostrar que la region prohibida de frecuencias entre los limites opticos y acusticos de un arreglo diatomico con relación de dispersión:* (3.10 − 10) *y de una longitud:* $\delta\omega$, *esta dado por:*

$$(\Delta\omega)^2 = \omega_+^2(0) - \frac{4\beta}{\sqrt{mM}}$$

Sea la diferencia de frecuencias: $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$. Entonces:

$$(\Delta\omega)^2 = (\omega_+ - \omega_-)^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\omega)^2 = \omega_+^2 - 2\omega_+\omega_- + \omega_-^2$$

Para la región prohibida de frecuencia entre los limites opticos y acusticos:

$$\omega_+\left(\frac{\pi}{a}\right) = \sqrt{\frac{2\beta}{m}} \quad \wedge \quad \omega_-\left(\frac{\pi}{a}\right) = \sqrt{\frac{2\beta}{M}}$$

Entonces:

$$(\Delta\omega)^2 = \left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m}}\right)\left(\sqrt{\frac{2\beta}{M}}\right) + \left(\sqrt{\frac{2\beta}{M}}\right)^2$$

$$\Rightarrow (\Delta\omega)^2 = \frac{2\beta}{m} - \frac{4\beta}{\sqrt{mM}} + \frac{2\beta}{M}$$

$$\rightarrow (\Delta\omega)^2 = 2\beta\left(\frac{m+M}{mM}\right) - \frac{4\beta}{\sqrt{mM}}$$

Recordando que: $\omega_+(0) := \sqrt{\frac{2\beta(m+M)}{mM}}$. Entonces:

$$(\Delta\omega)^2 = \omega_+^2(0) - \frac{4\beta}{\sqrt{mM}} \;\blacksquare$$

6.- *Ordenar los siguientes materiales con respecto al efecto de rayos residuales mostrados: InP, CdS, Ge, KBr.*

El efecto "Reststrahlen" o rayos residuales, es un fenomeno optico-reflectante, en donde la radiación electromagnetica tiene dificultades de propagarse a traves de un medio, dado su indice de refracción.

Los rayos residuales estan directamente relacionados con la naturaleza ionica o covalente de los materiales. Dado que, si la estructura del medio es diatomica, entonces su coeficiente de ionización dictara si habra o no gran cantidad de rayos residuales. Para medios monoatomicos, se tiene una estructura completamente covalente. Por tanto no hay coeficiente de ionización entonces los rayos residuales son pocos.

Con ello, se obtiene que el orden de: {InP, CdS, Ge, KBr}, dados los rayos residuales, es: