Analisis de la ecuación de onda en R^2

Rodríguez de León, Marco Antonio   Chávez Coronado, Karen Alejandra

Abril 17, 2021

RESUMEN

La ecuación de onda es una ecuación diferencial que logra modelar una gran cantidad de fenómenos físicos. En su expresión general, puede ser utilizada en diversos problemas que van desde áreas como el electromagnetismo, hasta la física cuántica o la mecanica Newtoniana. Por ello, su estudio y obtención de sus soluciones es un desarrollo altamente analizado. En este trabajo se determinó la solución numérica para la ecuación diferencial de la onda para una variable espacial y otra temporal, partiendo del método de diferencias finitas, las condiciones iniciales y la definición de la derivada parcial.

PALABRAS CLAVE

Ecuación de onda, diferencias finitas, modelación, ecuación diferencial parcial.

ABSTRACT

The wave equation is a differential equation that can modelated many physical phenomena. In its general expression, it can be used in phenoms in electromagnetism, quantum physics and Newtonian Mechanics. Thus, the researches in waves equations and its solutions is investigated in every physics and engineering carriers. In this work, we determined the numerical solution of the differential equation of a wave to a single spacial variable and another temporal, using the method of finite differentials, a list of a initial conditions and the definition of a partial derivative.

KEYWORDS

Wave equation, finite difference method, modeling, partial differential equation.

Introducción

El movimiento armónico es un fenómeno de suma importancia en diversos sistemas físicos oscilantes. Estos se pueden modelar mediante un análisis armónico, lo cual posteriormente se recaerá a resolver la ecuación de la propagación de onda. La ecuación de la onda puede describir diversos fenómenos: desde el sonido con las ondas acústicas; las olas con las ondas gravitatorias y capilares; los terremotos con las ondas sísmicas y elásticas; hasta la luz, dadas las ondas electromagnéticas. Estos son algunos de los ejemplos mayormente conocidos de fenómenos de propagación de ondas. Otros fenómenos físicos más complejos y abstractos como son las ondas gravitacionales, las cuales están ligadas a la teoría general de la relatividad; y el estado cuántico de un sistema de partículas, mismas que están ligadas a la mecánica ondulatoria, la cual también tiene su raíz en la propagación de ondas.

Matemáticamente hablando, la propagación de ondas se modela precisamente mediante una ecuación de onda, la cual se puede obtener a partir de las ecuaciones generales que gobiernan el fenómeno en cuestión. Por ejemplo, en el caso de ondas acústicas, dichas ecuaciones son las ecuaciones de Navier-Stokes. Por otro lado, las ecuaciones que describen la propagación de ondas electromagnéticas están dadas por las ecuaciones de Maxwell.

Tras probarse que las ondas electromagnéticas se comportan como partículas, el físico francés Louis De-Broglie en el año de 1924, sugirió que las partículas, como el electrón, por ejemplo, también deben tener un comportamiento dual, es decir, deben comportase bajo ciertas circunstancias como ondas. De dicha forma, se contempló que, así como la mecánica clásica y la teoría electromagnética tienen sus respectivas ecuaciones fundamentales, se debían obtener cuales ecuaciones corresponden a la mecánica cuántica.

El problema fundamental de la mecánica cuántica es resolver la ecuación de schrödinger dada por (ecuación 1):

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\overrightarrow{r}))\Psi(\overrightarrow{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\overrightarrow{r},t)}{\partial t}$$

Ecuación 1: Ecuación de Schrödinger general.

Esta es la ecuación de schrödinger para una partícula de masa m, con una energía potencial $V(\vec{r})$. Así, dicha expresión modela la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, la cual está descrita de igual forma por una variante de la ecuación de onda.

La ecuación de onda es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de segundo orden en las variables espaciales y en el tiempo. Esta ecuación predice el valor de la perturbación propagada en cualquier punto del espacio e instante de tiempo a partir de su valor inicial y condiciones de contorno en el dominio de interés.

Durante este proyecto, se trabajará con la ecuación de onda, y en su respectiva solución numérica bajo algunas condiciones iniciales dadas. Esto analizando la ecuación de onda general, y posteriormente aplicándose a algunos ejemplos de movimiento de cuerdas dadas distintas funciones.

Marco Teórico

Movimiento Armónico simple

El movimiento armónico simple es un fenómeno dinámico, en donde un cuerpo u objeto cambia de posición de forma periódica durante distintos ciclos. Estos fenómenos están sujetos al tiempo, y sus representaciones pueden ser desde R^2 (plano cartesiano) hasta R^3 (el espacio) dependiendo de lo que se desea conocer de ellos. Es posible extrapolarse este fenómeno a dimensiones mayores, pero para efectos prácticos y de un análisis del espacio euclideo, se considerará que el mayor nivel posible es en R^3.

Este fenómeno es representado por medio de las funciones trigonométricas donde predominan las funciones sinusoidales, dada su naturaleza armónica y que, además satisfacen las ecuaciones de onda. De esta forma se da a lugar que una función pueda modelar un fenómeno armónico. No obstante, esta información no es suficiente para definir que las funciones trigonométricas sean las únicas funciones para determinar si un fenómeno es armónico. Sin embargo, sí son funciones conocidas que modelan estos fenómenos de forma sumamente exacta.

Ecuación de Onda

Las ecuaciones de onda en 1 dimensión espacial (R), y una dimensión temporal (t), cumplen con la ecuación diferencial de segundo orden (ecuación 2):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -cx(t)$$

Ecuación 2: Ecuación de onda para fenómenos unidimensionales espacial y temporalmente.

Donde las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son de la forma (ecuación 3):

$$x(t) = Asin(\omega t + \delta)$$

Ecuación 3: Ecuación de movimiento armónico simple para una variable.

De manera general, una función de onda para un objeto que se mueve en n dimensiones espaciales (R^n), y una dimensión temporal, se debe cumplir con la ecuación diferencial parcial, de la función con argumeto vectorial (ecuación 4):

$$\frac{\partial^2 f(\overrightarrow{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f(\overrightarrow{r},t)$$

Ecuación 4: Ecuación diferencial parcial de la onda en su forma general.

Con c una constante, conocida como: *velocidad de onda.*

Análisis de la ecuación

La ecuación de onda se define como aquella función tal que satisface la ecuación diferencial parcial anteriormente mencionada (ecuación 4). Su utilidad física abarca desde tópicos de acústica, hasta la mecánica cuántica y el electromagnetismo. No obstante, a pesar de ser una ecuación diferencial parcial de segundo orden, contiene un alto nivel de complejidad en su trabajo mientras mayores sean los parámetros.

Ecuación de onda general

La ecuación de onda, está dada por una función conocida como *función de onda* ($\Psi(\overrightarrow{r},t)$), la cual es una función dependiente de dos términos: uno espacial de dimensión n, y otro temporal. También se le conoce como ecuación de onda viajera. Esta ecuación, diferencialmente, está dada por las segundas derivadas parciales de la función de onda (ecuación 4).

La resolución de esta ecuación se puede dividir en dos casos: aquella ecuación de onda totalmente dependiente del tiempo, o parcialmente dependiente. Estas se clasifican dependiendo si la función de onda $\Psi(\overrightarrow{r},t)$ puede descomponerse en dos funciones $f(\overrightarrow{r})$ y $\phi(t)$, o no. Usualmente para fines académicos y prácticos, se toma a consideración dicho caso, no obstante, para niveles de complejidad más altos, se requiere trabajar con esta función sin la hipótesis fuerte de que puede ser descompuesta en funciones independientes.

Ecuación de onda unidimensional espacialmente

Para el caso especial de una función de onda con 1 variable espacial (x) y una temporal (t), se tiene una ecuación diferencial con dos derivadas parciales de segundo orden con respecto a cada una de las variables (ecuación 5)

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Ecuación 5: Ecuación de la onda con movimiento unidimensional espacialmente, y temporalmente.

Para la solución general de la ecuación de onda, se obtiene su forma canonica (ecuación 6).

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})\Psi(x,t) = 0$$

Ecuación 6: Reescritura de la ecuación de la onda con movimiento unidimensional espacialmente y temporalmente.

Definiéndose la variable v como la suma de la parcial de la función de onda con respecto a t, menos la veclocidad de onda producto con la parcial de la función de onda con respecto a x (ecuación 7a), con lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales a resolver (ecuación 7b):

$$a)\frac{\partial \Psi}{\partial t} + c\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v$$
$$b)\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Ecuación 1.7: Reescritura de la ecuación de la onda con movimiento unidimensional espacialmente y temporalmente.

Mediante un análisis de estas ecuaciones, y un desarrollo integral del sistema, se obtiene que la función de onda: $\Psi(x,t)$ puede ser descrita mediante una combinación de dos funciones arbitrarias F y G, de clase $\mathcal{C}^{(2)}$, cuyos parámetros son: $x+ct$, y $x-ct$ respectivamente (ecuación 8):

$$\Psi(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Ecuación 8: Reescritura de la ecuación de la onda con movimiento unidimensional espacialmente y temporalmente.

Cuyo resultado anterior implica que la ecuación de la onda puede ser descrita mediante la suma de un par de ondas viajeras moviéndose en direcciones opuestas. En forma más compacta, se obtiene que una expresión más general determinando algunas formas de las funciones F y G, es mediante la conocida fórmula de *d'Alambert* (ecuación 9):

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

Ecuación 9: Reescritura de la ecuación de la onda con movimiento unidimensional espacialmente y temporalmente.

Para el caso de una función de onda la cual pueda ser expresada mediante funciones dependientes de únicas variables independientes ($\psi(x), \phi(t)$), se pueden observar diversas investigaciones o artículos académicos los cuales abordan las soluciones de dichos problemas. No obstante, para este caso se recurre a una forma más general.

Desarrollo analítico del programa

Ecuación de onda para una dimensión espacial y una temporal

Para determinar la solución de esta ecuación diferencial, puede utilizarse el método de diferenciación parcial (ecuación 10):

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} := \lim_{\|\Delta \hat{x_i}\| \to 0} \frac{f(\vec{x} + \Delta \hat{x_i}) - f(\vec{x})}{\|\Delta \hat{x_i}\|}$$

Ecuación 10: Definición general de la derivada parcial de una función escalar: $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$

De esa forma, se puede determinar la forma general de una segunda derivada parcial de la ecuación de onda (ecuacion 11):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Psi(x,t+\Delta t) - \Psi(x,t) + \Psi(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} = c^2[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Psi(x+\Delta x,t) - \Psi(x,t) + \Psi(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}]$$

Ecuación 11: Ecuación de la onda en su forma dada por la definición de derivadas parciales.

De forma matemática es sumamente difícil de solucionar. No obstante, es de utilidad para la aplicación del método de diferencias finitas. Dicho método obtiene soluciones numéricas para ecuacioens diferenciales, tomando a consideración: $\Delta t, \Delta x$ como variables sumamente pequeñas, por lo que se ahorra la notación. Con lo que, al despejar la expresión $\Psi(x,t+2\Delta t)$ arbitrariamente, se obtiene una que dicho valor, para toda (x,t) en la región rectangular $[x_0,x_f] \times [t_0,t_f]$, puede ser descrita mediante la suma de elementos anteriores de la ecuación de onda (ecuación 12):

$$\Psi(x,t+\Delta t) \to 2\Psi(x,t) - \Psi(x,t-\Delta t) + (c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x+\Delta x,t) - 2\Psi(x,t) + \Psi(x-\Delta x,t)]$$

Ecuación 12: Expresión de la forma de un elemento siguiente de la ecuación de onda en su variable temporal.

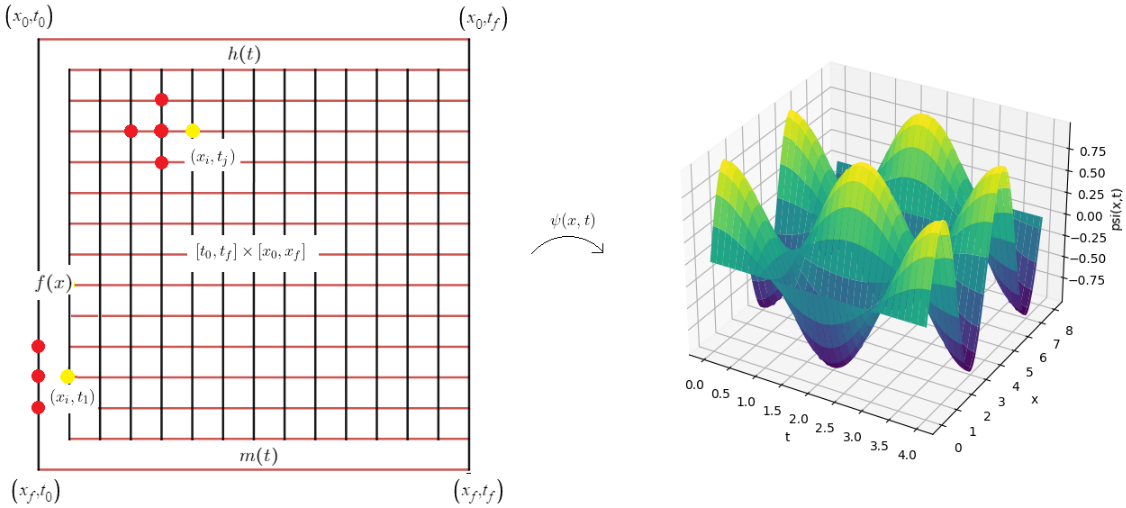
Posteriormente, se considera a: $x = x_i$ y a $t = t_j$, donde los elemento i-ésimo y j-ésimo del tiempo están dados por: $x_i = x_0 + i\Delta x$ y $t_j = t_0 + j\Delta t$ respectivamente. Con lo cual, se puede determinar que la fórmula para obtener la solución de la ecuación diferencial, centrándose en obtener el valor de: $\Psi(x_i,t_j)$, sujetas a las condiciones iniciales: $\Psi(x,t_0) = f(x)$; $\Psi_t(x,t_0) = g(x)$; $\Psi(x_0,t) = h(t)$; $\Psi(x_f,t) = m(t)$ (ecuación 13):

$$i)\Psi_{j,1} = f_j + g_j\Delta t + \frac{C^2}{2}[f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}]$$

$$ii)\Psi_{j,i+1} = 2\Psi_{j,i} - \Psi_{j,i-1} + C^2[\Psi_{j+1,i} - 2\Psi_{j,i} + \Psi_{j-1,i}] \ \forall i \geq 1$$

Ecuación 13: Sistema de ecuaciones para la solución numérica de la ecuación de onda.

La implementación de este algoritmo se basa en obtener los valores de los pares: (x_i,t_j), para una región rectangular: $[x_0,t_0] \times [x_f,t_f]$, mediante la proyección.



Modelación de la ecuación de onda

En la modelación computacional, primeramente se incializan el conjunto de funciones que determinan las condiciones iniciales, además de otro par de funciones las cuales se aplicarán a unos arreglos para determinar su solución real.

Posteriormente se explica al usuario la función del programa dado que es de fin académico y descriptivo. Tras ello, se inicializan las variables: los límites de la región rectangular (x_0, t_0, x_f, t_f), el número de particiones (n), la velocidad de la onda (c), y los elementos diferenciales $(\Delta x, \Delta t)$. Estos parámetros deben ser cuidadosamente escogidos ya que el método requiere que la multiplicación: $c\frac{\Delta t}{\Delta x}$ sea tal que permita la convergencia de la función de onda. En caso de no ser así, divergirán los valores y entregarán resultados inmensos. No obstante, esto requiere de un análisis minucioso de la solución analitica, o en su defecto, de la forma obtenida de la gráfica en comparación de su forma real.

Posteriormente se definen los arreglos de temperatura (T), desplazamiento (X), el arreglo que guardará la función de onda numérica (Y) y otro para la función de onda real (Y_{real}). Con ello, se programa el método de diferencias finitas y se llena el arreglo bidimensional Y que será la proyección de los elementos en la región rectangular: $[x_0, x_f] \times [t_0, t_f]$ dado el método de diferencias finitas. Luego se abre un documento donde se ingresarán todos los datos para su recopilación y análisis exhaustivo. Finalmente se exponen los resultados generando un par de gráficas tridimensionales en el plano: T, X, Ψ, donde se compara la gráfica de la ecuación de onda obtenida numéricamente, con aquella real obtenida analíticamente.

Resultados

En este trabajo se utilizaron 3 distintos problemas con movimiento armónico:

i) Cuerda oscilante con un par de nodos.

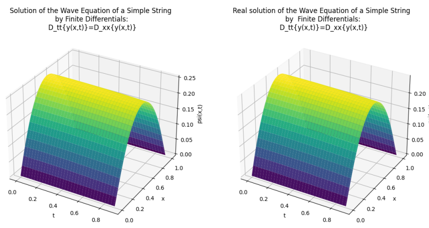
Considerando una cuerda la cual tiene únicamente dos nodos, a una distancia de una unidad. Se desea determinar la ecuación que describe el comportamiento de dicho fenómeno. Para este fenómeno, se determina la siguiente ecuación diferencial parcial, sujeta a las condiciones iniciales dadas:

$$\begin{gathered}\Psi_{tt}(x,t) = c^2\Psi_{xx}(x,t);\\ \Psi(x,0) = x(1-x);\ x \in [0,1];\\ \Psi_t(x,0) = 0;\ x \in [0,1];\\ \Psi(0,t) = 0;\ t \in \mathcal{R}^+\\ \Psi(1,t) = 0;\ t \in \mathcal{R}^+\end{gathered}$$

Las respectivas soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales son:

$$\Psi(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{u_k^3} sin(u_k x) cos(c u_k x)$$

donde: $u_k := (2k+1)\pi$



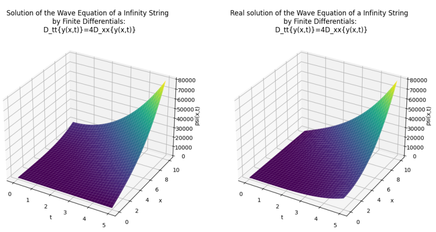
ii) Cuerda semi-infinita con extremo fijo.

Considerando una cuerda semi-infinita la cual tiene únicamente un nodo en el origen del plano cartesiano. Se desea determinar la ecuación que describe el comportamiento de dicho fenómeno a lo largo del tiempo. En este caso, se determina la siguiente ecuación diferencial parcial, sujeta a las condiciones iniciales dadas:

$$\Psi_{tt}(x,t) = 4\Psi_{xx}(x,t);$$
$$\Psi(x,0) = x^4;\ x \in \mathcal{R}^+;$$
$$\Psi_t(x,0) = 0;\ x \in \mathcal{R}^+;$$
$$\Psi(0,t) = 0;\ x \in \mathcal{R}^+$$

Las respectivas soluciones analíticas de las ecuaciones difrenciales son:

$$\Psi(x,t) = \begin{Bmatrix} \frac{(x+2t)^4+(x-2t)^4}{2};\ x > 2t \\ \frac{(x+2t)^4-(x-2t)^4}{2};\ x < 2t \end{Bmatrix}$$



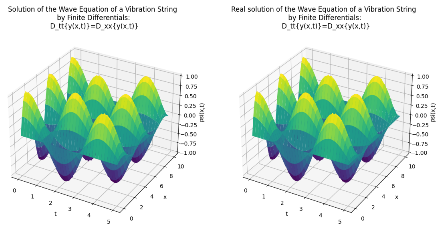
iii) Cuerda vibrante.

Considerando una cuerda vibrando, la cual tiene una cantidad L de nodos. Se desea determinar la ecuación que describe el comportamiento de dicho fenómeno a lo largo del tiempo. Para esta ecuación, se determina la siguiente ecuación diferencial parcial, sujeta a las condiciones iniciales dadas:

$$\Psi_{tt}(x,t) = 4\Psi_{xx}(x,t);$$
$$\Psi(x,0) = sin(\tfrac{\pi}{2}x);\ x \in [0,L];$$
$$\Psi_t(x,0) = 0;\ x \in [0,L];$$
$$\Psi(0,t) = 0;\ t \in \mathcal{R}^+$$
$$\Psi(L,t) = 0;\ t \in \mathcal{R}^+$$

Las respectivas soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales son:

$$\Psi(x,t) = \tfrac{1}{2}[sin(\tfrac{\pi(x+ct)}{2}) + sin(\tfrac{\pi(x-ct)}{2})]$$



Conclusiones

A lo largo de este trabajo se introdujeron los conceptos conocidos del movimiento ondulatorio y su importancia. De igual forma, se enfocó principalmente en la modelación de estos fenómenos mediante la ecuación de onda. Estos fenómenos pueden variar sumamente dependiendo de las funciones bases y condiciones iniciales. Como se mostró en los resultados, las gráficas obtenidas para cada fenómeno son sumamente similares, entregando así una comprobación visual de que las funciones de onda obtenidas numériamente mediante el método de diferencias finitas, fueron sumamente exactas. Esto ya que si varían un poco los valores, al realizar una cantidad de 100^2 particiones (100 particiones para el conjunto de valores de X y otras 100 para el conjunto de T), una alteración de un valor podría implicar un resultado completamente distinto.

Como posteriores trabajos se planteará trabajar con las ecuaciones de onda de funciones más difíciles, tales como: la onda electromagnetica, las ondas de sonido; para consigo tomar experiencia y poder introducirnos a trabajar con la ecuación de Schrödinger. Esta última se planteaba como primera propuesta para el trabajo, no obstante fue, a nuestra consideración, un proyecto que supero nuestras expectativas. Desde determinar la solución para la ecuación de la onda, hasta obtener la solución para un problema de la ecuación de Schrödinger y posteriormente mapearlo en un plano complejo, eso mismo implicó un reto que no pudimos enfrentar.

Uno de los principales retos en este trabajo fue el de obtener el criterio de convergencia de los valores obtenidos de la ecuación de la onda. Esto ya que en diversos articulos no especificaban que la relación: $c\frac{\Delta t}{\Delta x}$, tenía que ser menor a 1. Eso resultó en una serie de complicaciones difíciles de solucionar. No obstante, tras afrontar dicho criterio que sigue siendo vago en algunos problemas, se logró obtener las soluciones.

References

[1] Sears, F. (1986). *Física Universitaria.* Distrito Federal, México: Fondo educativo Interamericano

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. (2010). *Fundamentos de física.* Distrito Federal, México: Editorial Patria.

[3] Jain, P. (s.f.). *Wave Equations*, pag. 7. Unversity of Delhi.

[4] Langtangen, H. P. (2016). *Finite difference methods for wave motion.* United Stated; Oslo; Department of Informatics, University of Oslo; Center for Biomedical Computing, Simula Research Laboratory

[5] Feldman, J. (2007). *Solution of the Wave Equation by Separation of Variables.*

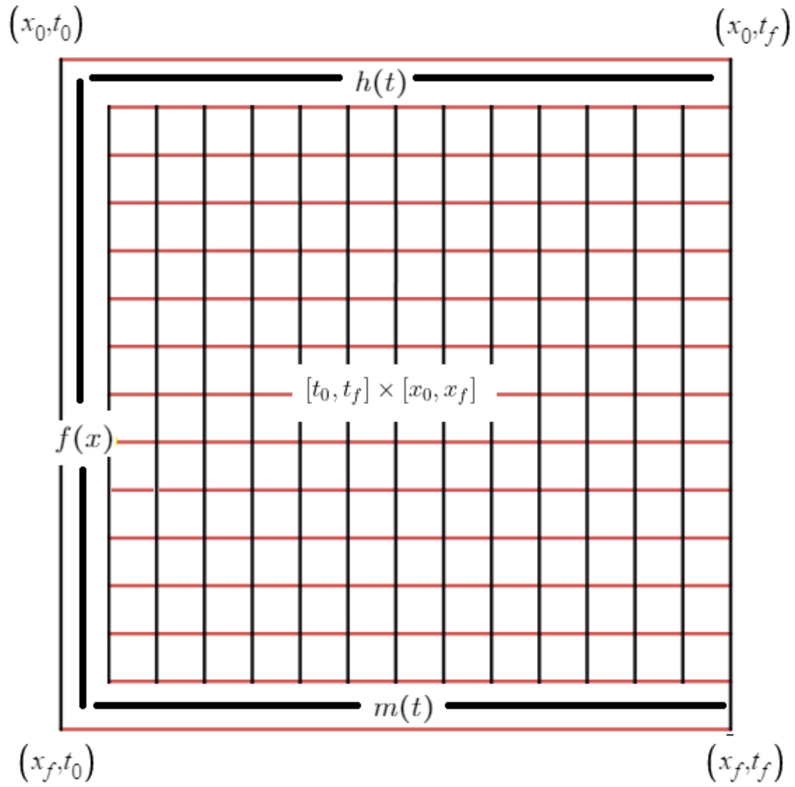
Anexo: Desarrollo teorico del metodo de Diferencias finitas

Sea la ecuación diferencial parcial de segundo orden conocida como: Ecuación de onda:

$$\Psi_{tt}(x,t) = c^2\Psi_{xx}(x,t)$$

Sujeta a: $\Psi(x,t_0) = f(x)$; $\Psi_t(x,t_0) = g(x)$; $\Psi(x_0,t) = h(t)$; $\Psi(x_f,t) = m(t)$

Considerando la región rectangular: $[x_0,x_f]\times[t_0,t_f]$, donde se puede observar de las condiciones iniciales en dicha región que:



Ahora, trabajando para determinar los valores faltantes de la región rectangular. Partiendo de la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{\partial x_i} := \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1,x_2,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n) - f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{\Delta x_i}$$

Entonces, realizando el procedimiento, determinando el valor de $\Psi(x,t+\Delta t)$, considerando: $|\Delta| \to 0$ (condición de derivada) :

$$\frac{\Psi_t(x,t+\Delta t) - \Psi_t(x,t)}{\Delta t} = c^2\frac{\Psi_x(x+\Delta x,t) - \Psi_x(x,t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\frac{\Psi(x,t+\Delta t)-\Psi(x,t)}{\Delta t} - \frac{\Psi(x,t)-\Psi(x,t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = c^2\frac{\frac{\Psi(x+\Delta x,t)-\Psi(x,t)}{\Delta x} - \frac{\Psi(x,t)-\Psi(x-\Delta x,t)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\Psi(x,t+\Delta t) - 2\Psi(x,t) + \Psi(x,t-\Delta t) = c^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x+\Delta x,t) - 2\Psi(x,t) + \Psi(x-\Delta x,t)]$$

$$\Psi(x,t+\Delta t) = 2\Psi(x,t) - \Psi(x,t-\Delta t) + c^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x+\Delta x,t) - 2\Psi(x,t) + \Psi(x-\Delta x,t)]$$

Con lo anterior, partamos a obtener todos los elementos: $\Psi(x,t)$, para: $x = x_i \wedge t = t_j$. Considerando: $x_i := x_0 + i\Delta x \ \wedge \ t_j := t_0 + j\Delta t$, entonces:

$$\Psi(x_i,t_j+\Delta t)=2\Psi(x_i,t_j)-\Psi(x_i,t_j-\Delta t)+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_i+\Delta x,t_j)-2\Psi(x_i,t_j)+\Psi(x_i-\Delta x,t_j)]$$
$$\Psi(x_i,t_{j+1})=2\Psi(x_i,t_j)-\Psi(x_i,t_{j-1})+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_j)-2\Psi(x_i,t_j)+\Psi(x_{i-1},t_j)]$$

Vease primeramente el caso donde: $j=0$, entonces:

$$\Psi(x_i,t_1)=2\Psi(x_i,t_0)-\Psi(x_i,t_{-1})+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_0)-2\Psi(x_i,t_0)+\Psi(x_{i-1},t_0)]$$

De: $\Psi_t(x,t_0)=g(x)$, y de la definición de la derivada parcial central: $\Psi_t(x,t)=\dfrac{\Psi(x,t+\Delta t)-\Psi(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}$. Entonces, para: $t=t_0$:

$$g(x_i)=\frac{\Psi(x_i,t_1)-\Psi(x_i,t_{-1})}{2\Delta t}$$
$$2g(x_i)\Delta t=\Psi(x_i,t_1)-\Psi(x_i,t_{-1})$$
$$\Psi(x_i,t_{-1})=\Psi(x_i,t_1)-2g(x_i)\Delta t$$

Sustituyendo:

$$\Psi(x_i,t_1)=2\Psi(x_i,t_0)-[\Psi(x_i,t_1)-2g(x_i)\Delta t]+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_0)-2\Psi(x_i,t_0)+\Psi(x_{i-1},t_0)]$$
$$\Psi(x_i,t_1)=2\Psi(x_i,t_0)-\Psi(x_i,t_1)+2g(x_i)\Delta t+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_0)-2\Psi(x_i,t_0)+\Psi(x_{i-1},t_0)]$$
$$2\Psi(x_i,t_1)=2\Psi(x_i,t_0)+g(x_i)\Delta t+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_0)-2\Psi(x_i,t_0)+\Psi(x_{i-1},t_0)]$$
$$\Psi(x_i,t_1)=\Psi(x_i,t_0)+g(x_i)\Delta t+\frac{1}{2}(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_0)-2\Psi(x_i,t_0)+\Psi(x_{i-1},t_0)]$$

Ahora, recordando que: $\Psi(x,t_0)=f(x)$; $\Psi_t(x,t_0)=g(x)$; $\Psi(x_0,t)=h(t)$; $\Psi(x_f,t)=m(t)$, entonces:

$$\Psi(x_i,t_1)=f(x_i)+g(x_i)\Delta t+\frac{1}{2}(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})]$$

Esto válido para: $(x_i,t_0)\forall x_i$. De esta forma se puede obtener la proyección en la función para: $t=t_1$ y $x\in[x_0,x_f]$. A continuación, realizando el mismo procedimiento, para determinar los valores para $j=1$, entonces:

$$\Psi(x_i,t_2)=2\Psi(x_i,t_1)-\Psi(x_i,t_0)+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_1)-2\Psi(x_i,t_1)+\Psi(x_{i-1},t_1)]$$

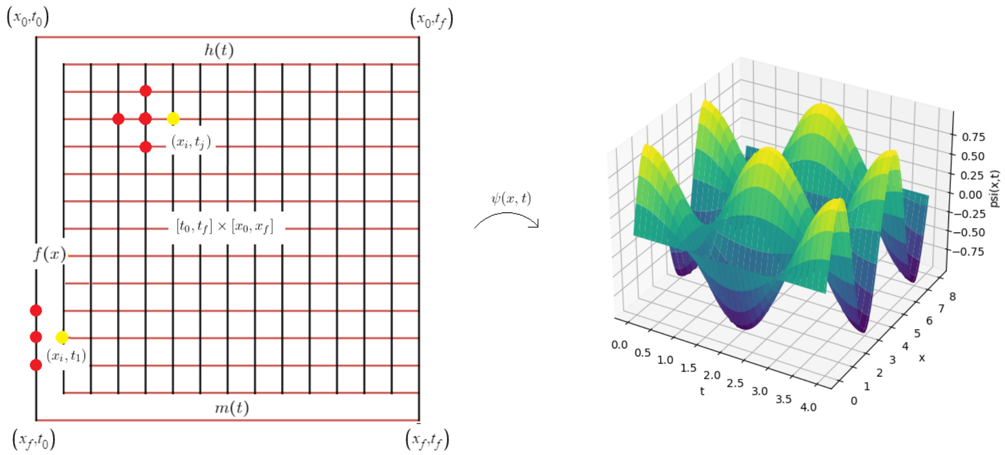
Donde, se tienen los valores de la función en: (x_i,t_0), y (x_i,t_1), para todos los valores de x_i. Con lo que se pueden obtener todos los valores de (x_i,t_2).

De esta forma, se concluye que la solución de la ecuación de onda, de la forma:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Sujeta a: $\Psi(x,t_0)=f(x)$; $\Psi_t(x,t_0)=g(x)$; $\Psi(x_0,t)=h(t)$; $\Psi(x_f,t)=m(t)$, se obtiene que:

$$\Psi(x_i,t_1)=f(x_i)+g(x_i)\Delta t+\frac{1}{2}(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})]$$
$$\Psi(x_i,t_{j+1})=2\Psi(x_i,t_j)-\Psi(x_i,t_{j-1})+(c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2[\Psi(x_{i+1},t_j)-2\Psi(x_i,t_j)+\Psi(x_{i-1},t_j)]\ \forall j\geq 1$$


(x_0,t_0)
(x_0,t_f)
$h(t)$
(x_i,t_j)
$[t_0,t_f]\times[x_0,x_f]$
$f(x)$
(x_i,t_1)
$m(t)$
(x_f,t_0)
(x_f,t_f)
$\psi(x,t)$
psi(x,t)
t
x