Sundaramovo síto

A srovnání se sítem Eratosthenovým

Autor: **Marco Souza de Joode**, G. Nad Štolou

1. května 2021

Eratosthenovo síto

- Předpokládáme, že všechna čísla jsou prvočísla
- Postupně odstraňujeme všechny celočíselné násobky
- Případně pouze celočíslené násobky čísel, které nebyly odstraněny.

Myšlenka za Sundaramovým sítem

Všechna přirozená čísla jsou buď sudá nebo lichá. Všechna prvočísla, až na číslo 2, jsou lichá. **Sundaramovo síto** selektivně vybírá složená lichá čísla a odstraňuje je.

Součiny čísel podle parity

Označíme-li si sudá čísla jako S a lichá čísla jako L, pak platí

$$
\begin{aligned}
S \cdot S &= S \\
S \cdot L &= S \\
L \cdot S &= S \\
L \cdot L &= L
\end{aligned}
$$

protože

$$
\begin{aligned}
2n \cdot 2m &= 4nm = 2 \cdot 2nm \\
2n \cdot (2m+1) &= 4nm + 2n = 2 \cdot (2nm + n) \\
(2n+1) \cdot (2m+1) &= 4nm + 2n + 2m + 1 = 2 \cdot (n + m + 2nm) + 1
\end{aligned}
$$

Složená lichá čísla

Všechna lichá čísla jsou buď prvočísla, nebo čísla složená. Každé liché složené číslo lze zapsat jako

$$\begin{aligned} &(2i+1)(2j+1) \\ &= 4ij + 2i + 2j + 1 \\ &= 2\underbrace{(i + j + 2ij)}_{U} + 1 \end{aligned}$$

Základní princip Sundaramova síta

- Mějme $m = \lfloor N/2 \rfloor$
- Pro všechna $i \in \{1, 2, ..., m\}$ a pro všechna $j \in \{1, 2, ..., m\}$ nalezněme množinu čísel L, které **nelze** zapsat jako $U = i + j + 2ij$, když $U < m$.
- Všechna lichá prvočísla lze zapsat jako $2U + 1$ pro každé U v množině L.

Optimalizace Sundaramova síta

- Mějme $m = \lfloor N/2 \rfloor$
- Pro všechna $i \in \{1, 2, ..., m\}$, aby $U = i + j + 2ij < m$, musí platit omezení na j:

$$\begin{aligned} i + j + 2ij &< m \\ j(2i+1) &< m - i \\ j &< \frac{m-i}{2i+1} \end{aligned}$$

  a zároveň nemusíme prověřovat $j \leq i$. Pak $j \in \{i, i+1, ..., \frac{m-i}{2i+1}\}$
- Všechna lichá prvočísla lze zapsat jako $2U + 1$ pro každé U v množině L.