

The Alexandrov Moving Planes Method and Applications to Geometric Flows

Marco Tamburro

`marco.tamburro@students.uniroma2.eu`

Università degli studi di Roma Tor Vergata

Relatore: Prof. Carlo Sinestrari

11 Dic 2024



TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

X_0 varietà differenziabile *embedded* in \mathbb{R}^{n+1} , la facciamo evolvere secondo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvatures principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

X_0 varietà differenziabile *embedded* in \mathbb{R}^{n+1} , la facciamo evolvere secondo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvatures principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

Quello di cui voglio convincervi con questa presentazione è che le soluzioni di questo flusso diventano più regolari e simmetriche andando avanti nel tempo

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
- 6 Riassunto

- **Capitolo 1:** richiami e risultati preliminari
- **Capitolo 2:** introduzione del metodo dei piani di Alexandrov in \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n , S^n
- **Capitolo 3:** dimostrazione del teorema di Chow-Gulliver e conseguenze in \mathbb{R}^n
- **Capitolo 4:** estensione del teorema di Chow-Gulliver ad \mathbb{H}^n ed S^n
- **Capitolo 5:** flussi che preservano l'area e il volume

Struttura della presentazione

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
- 6 Riassunto

Di cosa **non** parliamo oggi

(ma che è nella tesi)

- Dettagli e dimostrazioni (oltre a qualche cenno sul teorema principale)
- Discussioni approfondite sugli spazi a curvatura costante
- Flussi che preservano l'area e il volume

Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method**
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
- 6 Riassunto

Alexandrov Moving Planes Method

Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.

Alexandrov Moving Planes Method

Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.
- Introdotto da Alexandrov per caratterizzare la sfera
 - ▶ Alexandrov A.D.; *A characteristic property of spheres*, 1962

Alexandrov Moving Planes Method

Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.
- Introdotto da Alexandrov per caratterizzare la sfera
 - ▶ Alexandrov A.D.; *A characteristic property of spheres*, 1962
- Serrin e da Gidas-Ni-Nirenberg lo applicano a soluzioni di PDE ellittiche di natura non-geometrica
 - ▶ Serrin J.; *A symmetry problem in potential theory*, 1971
 - ▶ Gidas B., Ni W.M., Nirenberg L.; *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, 1979

Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli

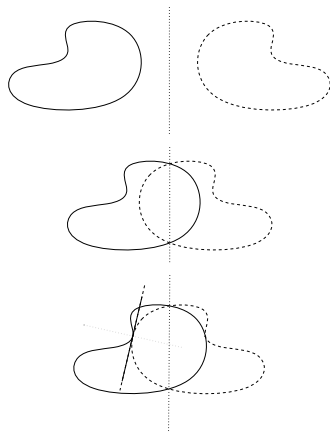


Figure 1

Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è “per la prima volta” *tangenza interna* dei grafici

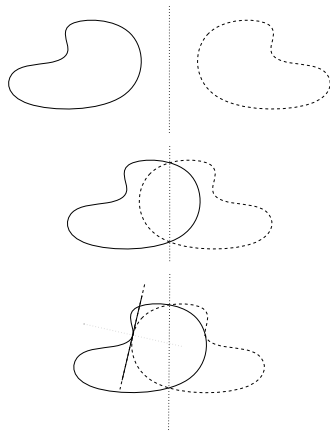


Figure 1

Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è “per la prima volta” *tangenza interna* dei grafici
- Applico il principio del massimo alla differenza di soluzione e riflessione

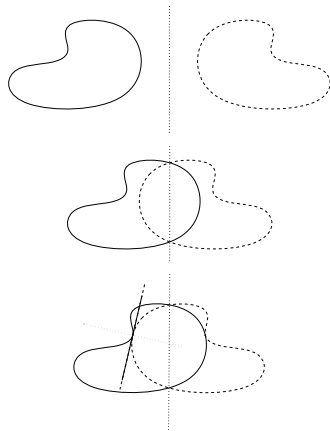


Figure 1

Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è “per la prima volta” *tangenza interna* dei grafici
- Applico il principio del massimo alla differenza di soluzione e riflessione
- Deduco che la funzione è simmetrica rispetto a quel piano. Per arbitrarietà della direzione, ho simmetria sferica

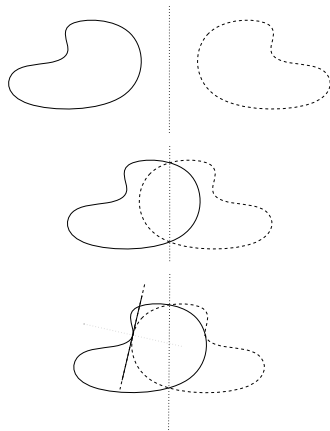


Figure 1

Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver**
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
- 6 Riassunto

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvatures principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

La condizione sulle derivate di F è equivalente a dire che questa sia una **equazione parabolica** (non-lineare). In particolare, possiamo applicare il principio del massimo e l'Hopf Boundary Point Lemma alla differenza di due soluzioni. Inoltre, la parabolicità garantisce l'esistenza per tempi piccoli.

Riflessione stretta

Definizione

Riflessione stretta

Possiamo riflettere $X : M^n \rightarrow R^{n+1}$ strettamente rispetto a π se entrambe le seguenti cose sono vere:

- La riflessione di X rispetto a π nel semispazio delimitato da π resta dentro l'altra metà di X , toccandosi solo sul piano
- A tutti i punti sul piano, X e la sua riflessione rispetto a π non hanno lo stesso vettore normale per nessun punto su $X \cap \pi$

Riflessione stretta

Cosa non deve succedere

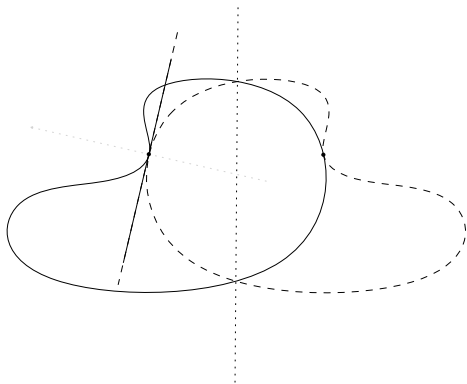


Figure 2: Esempio di contatto interno

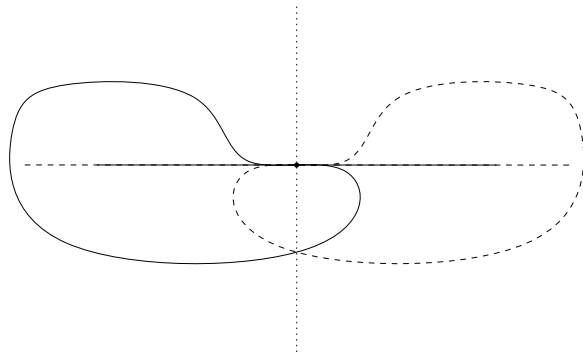


Figure 3: Esempio di contatto al bordo

Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale X_0 strettamente rispetto ad un piano π , allora possiamo riflettere X_t strettamente rispetto a π per ogni $t \in [0, T)$ (intervallo in cui è definita la soluzione).

Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale X_0 strettamente rispetto ad un piano π , allora possiamo riflettere X_t strettamente rispetto a π per ogni $t \in [0, T)$ (intervallo in cui è definita la soluzione).

Interpretazione intuitiva: i piani rispetto a cui posso riflettere *aumentano* nel tempo, per cui la varietà diventa *più simmetrica* e tonda.

Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari**
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
- 6 Riassunto

Corollario (Chow)

Data una soluzione C^2 al problema, esiste C , **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante t :

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \quad (1)$$

Corollario (Chow)

Data una soluzione C^2 al problema, esiste C , **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante t :

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \quad (1)$$

Se considero la soluzione riscalata, $\frac{X_t}{\max_{x \in X_t} |x|}$, per un flusso espansivo dove $\lim_{t \rightarrow T} \max_{x \in X_t} |x| = +\infty$, converge a una sfera

Due corollari

Corollario (Chow)

Data una soluzione C^2 al problema, esiste C , **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante t :

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \quad (1)$$

Se considero la soluzione riscalata, $\frac{X_t}{\max_{x \in X_t} |x|}$, per un flusso espansivo dove $\lim_{t \rightarrow T} \max_{x \in X_t} |x| = +\infty$, converge a una sfera

Corollario (Sinestrari)

Non esistono soluzioni antiche espansive ($F < 0$) che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere.

Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante**
- 6 Riassunto

Estensione a spazi a curvatura costante

(idea)

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è uno spazio a curvatura costante.

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante
- Introduciamo una notazione che consente di impostare il problema
- La dimostrazione non utilizza la metrica, per cui può essere estesa

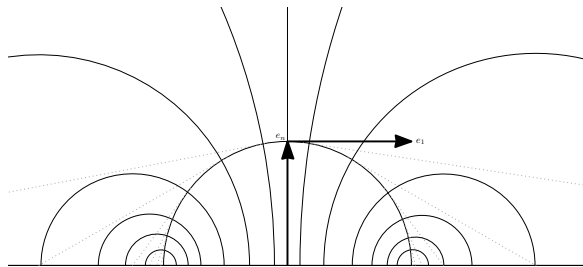


Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in \mathbb{H}^2

Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
- 6 Riassunto**

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- La tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare facilmente molti risultati apparentemente difficili

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- La tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare facilmente molti risultati apparentemente difficili
- I risultati principali possono essere estesi anche nel caso di spazi a curvatura costante e a flussi *modificati* per conservare il volume interno o l'area