

# The Alexandrov Moving Planes Method and Applications to Geometric Flows

Marco Tamburro

`marco.tamburro@students.uniroma2.eu`

Università degli studi di Roma Tor Vergata

Relatore: Prof. Carlo Sinestrari

11 Dic 2024



**TOR VERGATA**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

# Equazione di cui ci occupiamo

## Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$X_0$  varietà differenziabile *embedded* in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la facciamo evolvere secondo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove  $\nu$  è il vettore normale,  $\kappa_i$  le curvatures principali e  $F$  una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi
- 6 Riassunto

- **Capitolo 1:** richiami e risultati preliminari
- **Capitolo 2:** introduzione del metodo dei piani di Alexandrov in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$ ,  $S^n$
- **Capitolo 3:** dimostrazione del teorema di Chow-Gulliver e conseguenze in  $\mathbb{R}^n$
- **Capitolo 4:** estensione del teorema di Chow-Gulliver ad  $\mathbb{H}^n$  ed  $S^n$
- **Capitolo 5:** flussi che preservano l'area e il volume

# Struttura della presentazione

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi
- 6 Riassunto

# Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method**
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi
- 6 Riassunto

# Alexandrov Moving Planes Method

Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.

# Alexandrov Moving Planes Method

## Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.
- Introdotto da Alexandrov per caratterizzare la sfera
  - ▶ Alexandrov A.D.; *A characteristic property of spheres*, 1962



# Alexandrov Moving Planes Method

Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.
- Introdotto da Alexandrov per caratterizzare la sfera
  - ▶ Alexandrov A.D.; *A characteristic property of spheres*, 1962
- Serrin e da Gidas-Ni-Nirenberg lo applicano a soluzioni di PDE ellittiche di natura non-geometrica
  - ▶ Serrin J.; *A symmetry problem in potential theory*, 1971
  - ▶ Gidas B., Ni W.M., Nirenberg L.; *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, 1979

# Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli

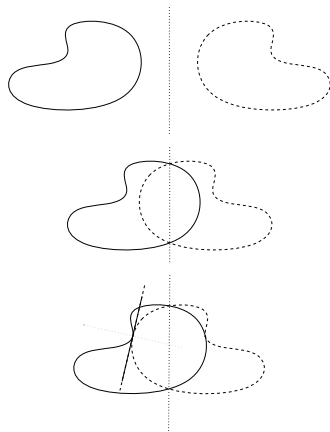


Figure 1

# Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è “per la prima volta” *tangenza interna* dei grafici

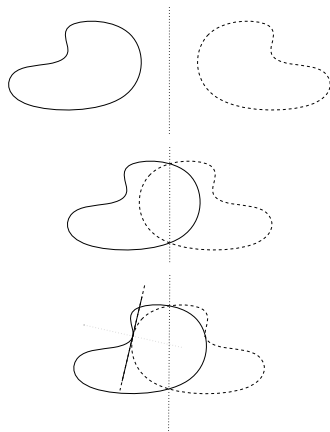


Figure 1

# Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è “per la prima volta” *tangenza interna* dei grafici
- Applico il principio del massimo alla differenza di soluzione e riflessione

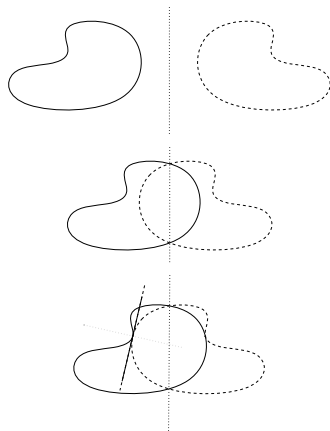


Figure 1

# Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è “per la prima volta” *tangenza interna* dei grafici
- Applico il principio del massimo alla differenza di soluzione e riflessione
- Deduco che la funzione è simmetrica rispetto a quel piano. Per arbitrarietà della direzione, ho simmetria sferica

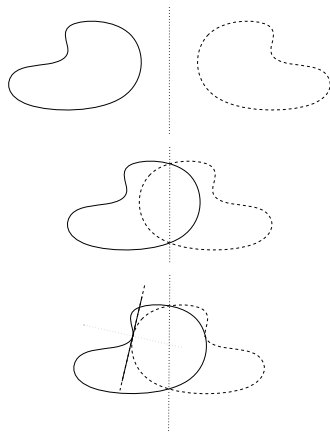


Figure 1

# Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver**
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi
- 6 Riassunto

# Equazione di cui ci occupiamo

## Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove  $\nu$  è il vettore normale,  $\kappa_i$  le curvatures principali e  $F$  una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

# Equazione di cui ci occupiamo

## Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))\nu$$

dove  $\nu$  è il vettore normale,  $\kappa_i$  le curvature principali e  $F$  una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

La condizione sulle derivate di  $F$  è equivalente a dire che questa sia una **equazione parabolica** (non-lineare). In particolare, possiamo applicare il principio del massimo e l'Hopf Boundary Point Lemma alla differenza di due soluzioni. Inoltre, la parabolicità garantisce l'esistenza per tempi piccoli.



# Riflessione stretta

## Definizione (Riflessione stretta)

Possiamo riflettere  $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  strettamente rispetto a  $\pi$  se entrambe le seguenti cose non succedono:

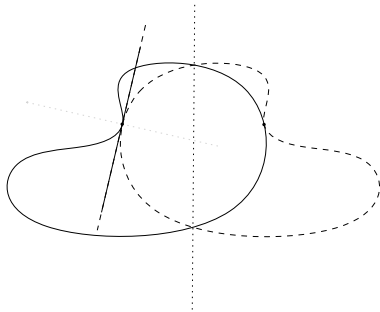


Figure 2: Contatto interno

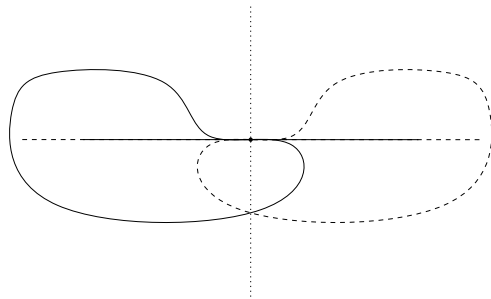


Figure 3: Tangenza al bordo

## Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale  $X_0$  strettamente rispetto ad un piano  $\pi$ , allora possiamo riflettere  $X_t$  strettamente rispetto a  $\pi$  per ogni  $t \in [0, T)$  (intervallo in cui è definita la soluzione).

## Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale  $X_0$  strettamente rispetto ad un piano  $\pi$ , allora possiamo riflettere  $X_t$  strettamente rispetto a  $\pi$  per ogni  $t \in [0, T)$  (intervallo in cui è definita la soluzione).

**Interpretazione intuitiva:** i piani rispetto a cui posso riflettere *aumentano* nel tempo, per cui la varietà diventa *più simmetrica e tonda*.

# Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari**
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi
- 6 Riassunto

## Corollario (Chow)

Data una soluzione  $C^2$  al problema, esiste  $C$ , **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante  $t$ :

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \quad (1)$$

## Corollario (Chow)

Data una soluzione  $C^2$  al problema, esiste  $C$ , **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante  $t$ :

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \quad (1)$$

Se considero la soluzione riscalata,  $\frac{X_t}{\max_{x \in X_t} |x|}$ , per un flusso espansivo dove  $\lim_{t \rightarrow T} \max_{x \in X_t} |x| = +\infty$ , converge a una sfera

# Due corollari

## Corollario (Chow)

Data una soluzione  $C^2$  al problema, esiste  $C$ , **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante  $t$ :

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \quad (1)$$

Se considero la soluzione riscalata,  $\frac{X_t}{\max_{x \in X_t} |x|}$ , per un flusso espansivo dove  $\lim_{t \rightarrow T} \max_{x \in X_t} |x| = +\infty$ , converge a una sfera

## Corollario (Risa-Sinestrari)

Non esistono soluzioni antiche espansive ( $F < 0$ ) che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere.

# Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi**
- 6 Riassunto



# Estensione a spazi a curvatura costante

## Idea

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è  $\mathbb{H}^{n+1}$  o  $S^{n+1}$ .

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante

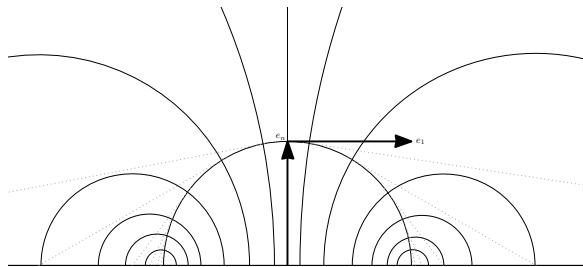


Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

## Idea

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è  $\mathbb{H}^{n+1}$  o  $S^{n+1}$ .

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante
- Introduciamo una notazione che consente di impostare il problema

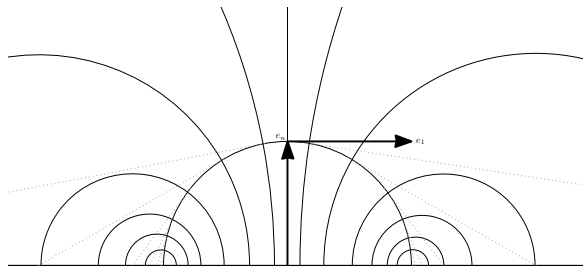


Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

## Idea

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è  $\mathbb{H}^{n+1}$  o  $S^{n+1}$ .

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante
- Introduciamo una notazione che consente di impostare il problema
- La dimostrazione di Chow-Gulliver può essere estesa

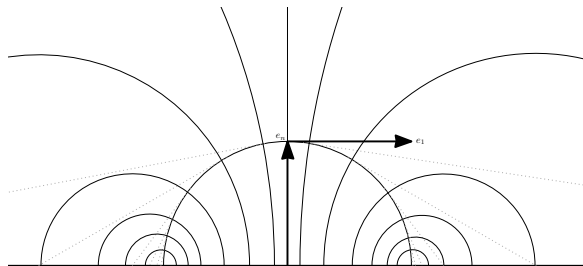


Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

Differenze con il caso euclideo

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche

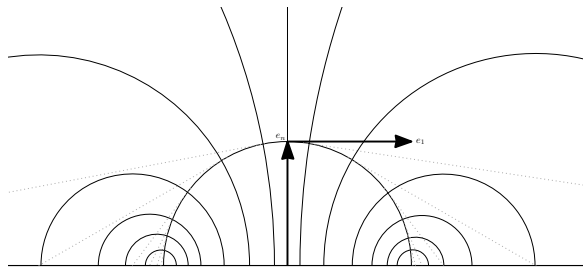


Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

## Differenze con il caso euclideo

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche
- Anche dimostrare che delle riflessioni esistono non è più banale

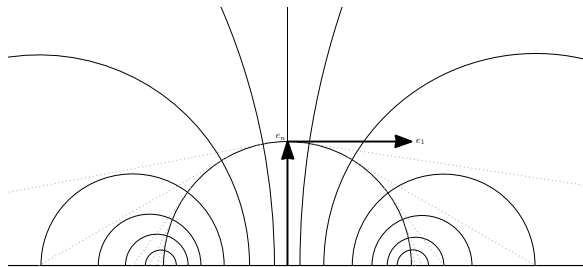


Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

## Differenze con il caso euclideo

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche
- Anche dimostrare che delle riflessioni esistono non è più banale
- Non è più ben definito un concetto di parallelismo tra gli iperpiani
  - ▶ Nel metodo consideriamo quelli ortogonali a una geodetica, ma non restano equidistanti in tutti i punti

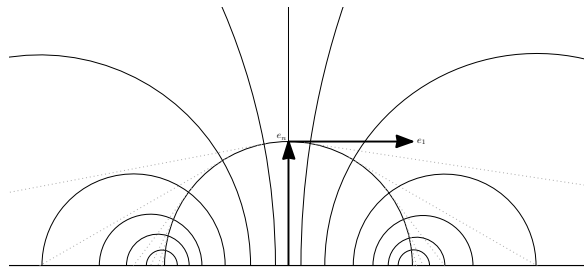


Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

## Differenze con il caso euclideo

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche
- Anche dimostrare che delle riflessioni esistono non è più banale
- Non è più ben definito un concetto di parallelismo tra gli iperpiani
  - ▶ Nel metodo consideriamo quelli ortogonali a una geodetica, ma non restano equidistanti in tutti i punti
- Il trasporto parallelo non è banale

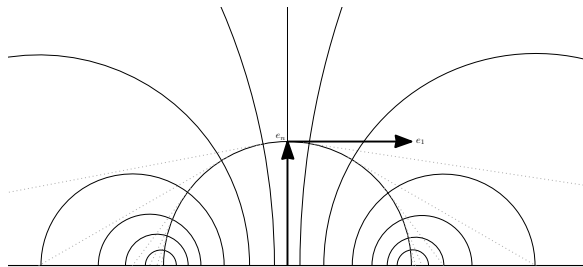


Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in  $\mathbb{H}^2$

# Estensione a spazi a curvatura costante

## Corollari

Alcuni corollari continuano a valere, ad esempio resta vero che

### Corollario

Non esistono soluzioni antiche espansive ( $F < 0$ ) che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere (intese come luogo dei punti equidistanti da un'origine).



# Estensione a spazi a curvatura costante

## Corollari

Alcuni corollari continuano a valere, ad esempio resta vero che

### Corollario

Non esistono soluzioni antiche espansive ( $F < 0$ ) che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere (intese come luogo dei punti equidistanti da un'origine).

## Flusso ad area/volume costante

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \left( -\frac{\sum_i \kappa_i(x)}{n} + \phi(t) \right) \nu$$

consideriamo il flusso dove  $F$  è la curvatura media  $H$ , e aggiungiamo un termine globale che lo rende a area/volume costante. Per conservare l'aerea:

$$\phi(t) = \frac{\int_{X_t} H^2(x, t) d\mu}{\int_{X_t} H(x, t) d\mu}$$

## Flusso ad area/volume costante

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \left( -\frac{\sum_i \kappa_i(x)}{n} + \phi(t) \right) \nu$$

consideriamo il flusso dove  $F$  è la curvatura media  $H$ , e aggiungiamo un termine globale che lo rende a area/volume costante. Per conservare l'aerea:

$$\phi(t) = \frac{\int_{X_t} H^2(x, t) d\mu}{\int_{X_t} H(x, t) d\mu}$$

Il teorema di Chow e Gulliver si estende anche a questa classe di flussi

# Flussi ad area e volume costante

## Flusso ad area/volume costante

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \left( -\frac{\sum_i \kappa_i(x)}{n} + \phi(t) \right) \nu$$

consideriamo il flusso dove  $F$  è la curvatura media  $H$ , e aggiungiamo un termine globale che lo rende a area/volume costante. Per conservare l'aerea:

$$\phi(t) = \frac{\int_{X_t} H^2(x, t) d\mu}{\int_{X_t} H(x, t) d\mu}$$

Il teorema di Chow e Gulliver si estende anche a questa classe di flussi

Usando il metodo è possibile dimostrare che il flusso non esce fuori da un compatto

# Roadmap

- 1 Introduzione
- 2 Alexandrov Moving Planes Method
- 3 Il risultato di Chow-Gulliver
- 4 Due esempi di corollari
- 5 Cenni sulla parte originale della tesi
- 6 Riassunto**

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- La tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare facilmente molti risultati apparentemente difficili



- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- La tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare facilmente molti risultati apparentemente difficili
- I risultati principali possono essere estesi anche nel caso di spazi a curvatura costante e a flussi *modificati* per conservare il volume interno o l'area

# The Alexandrov Moving Planes Method and Applications to Geometric Flows

Marco Tamburro

`marco.tamburro@students.uniroma2.eu`

Università degli studi di Roma Tor Vergata

Relatore: Prof. Carlo Sinestrari

11 Dic 2024



**TOR VERGATA**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA