The Alexandrov Moving Planes Method and Applications to Geometric Flows

Marco Tamburro
marco.tamburro@students.uniroma2.eu

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Relatore: Prof. Carlo Sinestrari

11 Dic 2024

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

X_0 varietà differenziabile *embedded* in $\mathbb{R}^{n+1}$, la facciamo evolvere secondo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

Roadmap

Struttura della tesi

- **Capitolo 1**: richiami e risultati preliminari
- **Capitolo 2**: introduzione del metodo dei piani di Alexandrov in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, S^n
- **Capitolo 3**: dimostrazione del teorema di Chow-Gulliver e conseguenze in $\mathbb{R}^n$
- **Capitolo 4**: estensione del teorema di Chow-Gulliver ad $\mathbb{H}^n$ ed S^n
- **Capitolo 5**: flussi che preservano l'area e il volume

Struttura della presentazione

Roadmap

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.
- Introdotto da Alexandrov per caratterizzare la sfera
  - Alexandrov A.D.; *A characteristic property of spheres*, 1962

Alexandrov Moving Planes Method

Cenni storici

- Tecnica per dimostrare la simmetria delle soluzioni a PDE ellittiche e paraboliche.
- Introdotto da Alexandrov per caratterizzare la sfera
  - Alexandrov A.D.; *A characteristic property of spheres*, 1962
- Serrin e da Gidas-Ni-Nirenberg lo applicano a soluzioni di PDE ellittiche di natura non-geometrica
  - Serrin J.; *A symmetry problem in potential theory*, 1971
  - Gidas B., Ni W.M., Nirenberg L.; *Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, 1979

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli

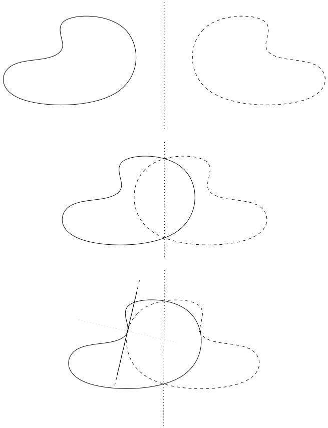

Figure 1

Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è "per la prima volta" *tangenza interna* dei grafici

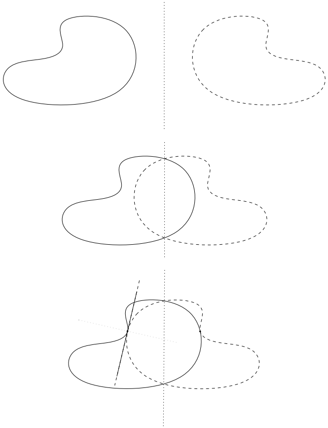

Figure 1

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è "per la prima volta" *tangenza interna* dei grafici
- Applico il principio del massimo alla differenza di soluzione e riflessione

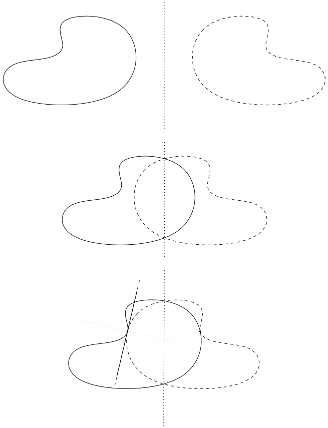

Figure 1

Alexandrov Moving Planes Method

Il metodo in breve

- Rifletto una soluzione rispetto a una famiglia di piani paralleli
- Considero il piano dove c'è "per la prima volta" *tangenza interna* dei grafici
- Applico il principio del massimo alla differenza di soluzione e riflessione
- Deduco che la funzione è simmetrica rispetto a quel piano. Per arbitrarietà della direzione, ho simmetria sferica

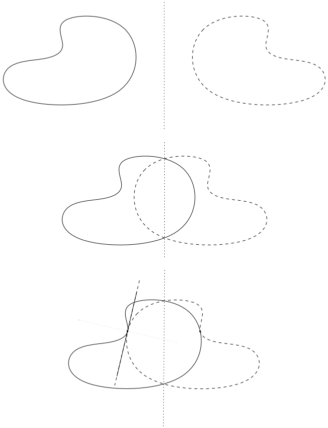

Figure 1

Roadmap

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

La condizione sulle derivate di F è equivalente a dire che questa sia una **equazione parabolica** (non-lineare). In particolare, possiamo applicare il principio del massimo e l'Hopf Boundary Point Lemma alla differenza di due soluzioni. Inoltre, la parabolicità garantisce l'esistenza per tempi piccoli.

Riflessione stretta

Riflessione stretta

Possiamo riflettere $X : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ strettamente rispetto a π se entrambe le seguenti cose non succedono:

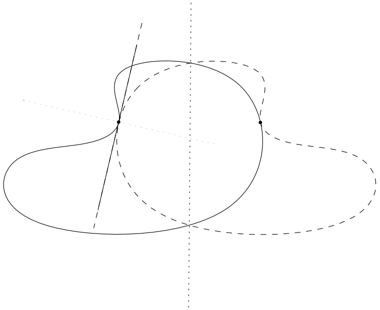

Figure 2: Contatto interno

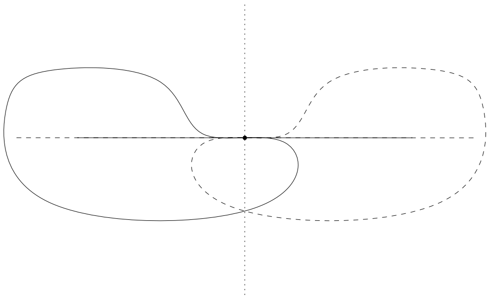

Figure 3: Tangenza al bordo

Il teorema di Chow e Gulliver

Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale X_0 strettamente rispetto ad un piano π, allora possiamo riflettere X_t strettamente rispetto a π per ogni $t \in [0, T)$ (intervallo in cui è definita la soluzione).

Il teorema di Chow e Gulliver

Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale X_0 strettamente rispetto ad un piano π, allora possiamo riflettere X_t strettamente rispetto a π per ogni $t \in [0, T)$ (intervallo in cui è definita la soluzione).

Interpretazione intuitiva: i piani rispetto a cui posso riflettere *aumentano* nel tempo, per cui la varietà diventa *più simmetrica* e *tonda*.

Roadmap

Due corollari

Corollario (Chow)

Data una soluzione C^2 al problema, esiste C, **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante t:

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \tag{1}$$

Due corollari

Corollario (Chow)

Data una soluzione C^2 al problema, esiste C, **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante t:

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \tag{1}$$

Se considero la soluzione riscalata, $\frac{X_t}{\max_{x \in X_t} |x|}$, per un flusso espansivo dove $\lim_{t \to T} \max_{x \in X_t} |x| = +\infty$, converge a una sfera

Due corollari

Corollario (Chow)

Data una soluzione C^2 al problema, esiste C, **che dipende solo dal dato iniziale**, tale che ad ogni istante t:

$$\max_{x \in X_t} |x| - \min_{x \in X_t} |x| < C \tag{1}$$

Se considero la soluzione riscalata, $\frac{X_t}{\max_{x \in X_t} |x|}$, per un flusso espansivo dove $\lim_{t \to T} \max_{x \in X_t} |x| = +\infty$, converge a una sfera

Corollario (Risa-Sinestrari)

Non esistono soluzioni antiche espansive $(F < 0)$ che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere.

Roadmap

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è $\mathbb{H}^{n+1}$ o S^{n+1}.

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante

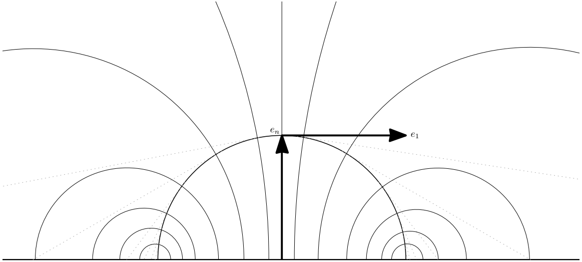

Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

Estensione a spazi a curvatura costante

Idea

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è $\mathbb{H}^{n+1}$ o S^{n+1}.

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante
- Introduciamo una notazione che consente di impostare il problema

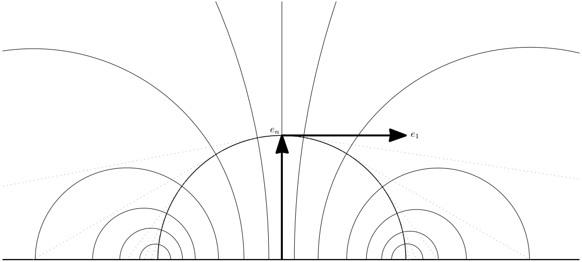

Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

Estensione a spazi a curvatura costante

Idea

Il risultato di Chow e Gulliver si estende al caso in cui lo spazio ambiente è $\mathbb{H}^{n+1}$ o S^{n+1}.

- L'equazione continua ad essere parabolica anche negli spazi a curvatura costante
- Introduciamo una notazione che consente di impostare il problema
- La dimostrazione di Chow-Gulliver può essere estesa

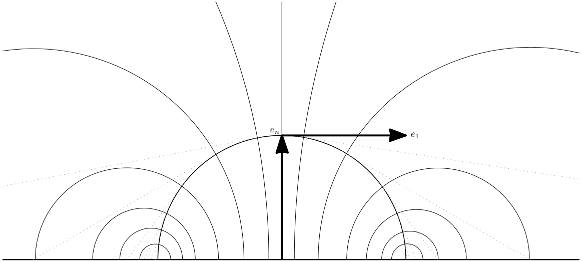

Figure 4: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche

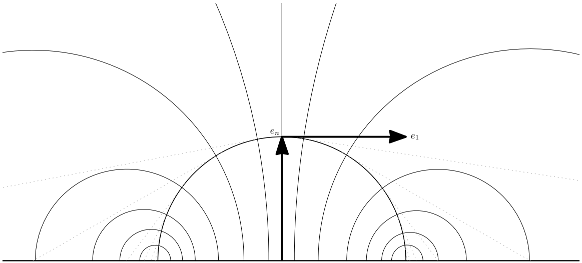

Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche
- Anche dimostrare che delle riflessioni esistono non è più banale

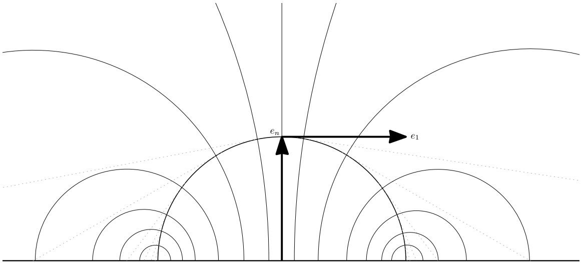

Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche
- Anche dimostrare che delle riflessioni esistono non è più banale
- Non è più ben definito un concetto di parallelismo tra gli iperpiani
  - Nel metodo consideriamo quelli ortogonali a una geodetica, ma non restano equidistanti in tutti i punti

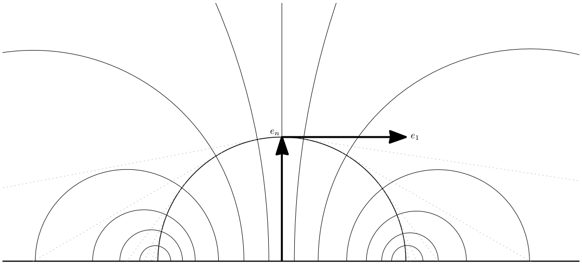

Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

- Iperpiani sostituiti da superfici totalmente geodetiche
- Anche dimostrare che delle riflessioni esistono non è più banale
- Non è più ben definito un concetto di parallelismo tra gli iperpiani
  - Nel metodo consideriamo quelli ortogonali a una geodetica, ma non restano equidistanti in tutti i punti
- Il trasporto parallelo non è banale

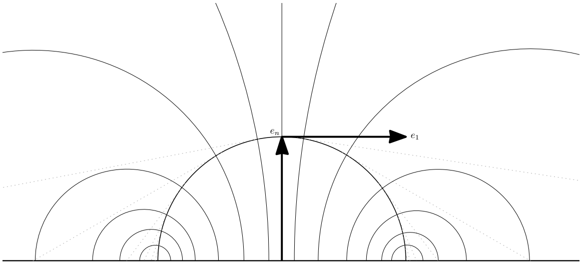

Figure 5: Iperpiani totalmente geodetici perpendicolari a una data geodetica in $\mathbb{H}^2$

Alcuni corollari continuano a valere, ad esempio resta vero che

Corollario

Non esistono soluzioni antiche espansive ($F < 0$) che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere (intese come luogo dei punti equidistanti da un'origine).

Alcuni corollari continuano a valere, ad esempio resta vero che

Corollario

Non esistono soluzioni antiche espansive ($F < 0$) che *escono fuori da un punto* oltre alle sfere (intese come luogo dei punti equidistanti da un'origine).

Flusso ad area/volume costante

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \left(-\frac{\sum_i \kappa_i(x)}{n} + \phi(t) \right) \nu$$

consideriamo il flusso dove F è la curvatura media H, e aggiungiamo un termine globale che lo rende a area/volume costante. Per conservare il volume:

$$\phi(t) = \frac{\int_{X_t} H^2(x,t)\, d\mu}{\int_{X_t} H(x,t)\, d\mu}$$

Flusso ad area/volume costante

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \left(-\frac{\sum_i \kappa_i(x)}{n} + \phi(t) \right) \nu$$

consideriamo il flusso dove F è la curvatura media H, e aggiungiamo un termine globale che lo rende a area/volume costante. Per conservare il volume:

$$\phi(t) = \frac{\int_{X_t} H^2(x,t)\, d\mu}{\int_{X_t} H(x,t)\, d\mu}$$

Il teorema di Chow e Gulliver si estende anche a questa classe di flussi

Flussi ad area e volume costante

Flusso ad area/volume costante

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = \left(-\frac{\sum_i \kappa_i(x)}{n} + \phi(t) \right) \nu$$

consideriamo il flusso dove F è la curvatura media H, e aggiungiamo un termine globale che lo rende a area/volume costante. Per conservare il volume:

$$\phi(t) = \frac{\int_{X_t} H^2(x,t)\, d\mu}{\int_{X_t} H(x,t)\, d\mu}$$

Il teorema di Chow e Gulliver si estende anche a questa classe di flussi

Usando il metodo è possibile dimostrare che il flusso non esce fuori da un compatto

Roadmap

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- La tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare facilmente molti risultati apparentemente difficili

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per soluzioni di un'ampia classe di PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- La tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare facilmente molti risultati apparentemente difficili
- I risultati principali possono essere estesi anche nel caso di spazi a curvatura costante e a flussi *modificati* per conservare il volume interno o l'area

The Alexandrov Moving Planes Method and Applications to Geometric Flows

Marco Tamburro
marco.tamburro@students.uniroma2.eu

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Relatore: Prof. Carlo Sinestrari

11 Dic 2024