The Alexandrov Moving Planes Method and Applications to Geometric Flows

Marco Tamburro
marco.tamburro@students.uniroma2.eu

Università degli studi di Roma Tor Vergata
Relatore: Prof. Carlo Sinestrari

11 Dic 2024

TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Roadmap

1 Introduzione

2 Alexandrov Moving Planes Method

3 Il risultato di Chow-Gulliver

4 Alcune conseguenze e corollari

5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante

6 Riassunto

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

X_0 varietà differenziabile *embedded* in $\mathbb{R}^{n+1}$, la facciamo evolvere secondo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

X_0 varietà differenziabile *embedded* in $\mathbb{R}^{n+1}$, la facciamo evolvere secondo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

Quello di cui voglio convincervi con questa presentazione è che le soluzioni di questo flusso diventano più regolari e simmetriche andando avanti nel tempo

Struttura della tesi

- **Capitolo 1**: richiami e risultati preliminari
- **Capitolo 2**: introduzione del metodo dei piani di Alexandrov in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$, S^n
- **Capitolo 3**: dimostrazione del teorema di Chow-Gulliver e conseguenze in $\mathbb{R}^n$
- **Capitolo 4**: estensione del teorema di Chow-Gulliver ad $\mathbb{H}^n$ ed S^n
- **Capitolo 5**: flussi che preservano l'area e il volume

Struttura della presentazione

1. Introduzione
2. Alexandrov Moving Planes Method
3. Il risultato di Chow-Gulliver
4. Alcune conseguenze e corollari
5. Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante
6. Riassunto

Di cosa **non** parliamo oggi
(ma che è nella tesi)

- Dettagli e dimostrazioni (oltre a qualche cenno sul teorema principale)
- Discussioni approfondite sugli spazi a curvatura costante
- Flussi che preservano l'area e il volume

Roadmap

1 Introduzione

2 Alexandrov Moving Planes Method

3 Il risultato di Chow-Gulliver

4 Alcune conseguenze e corollari

5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante

6 Riassunto

Frame contents

- Item 1
- Item 2
  - Subitem 2.1
  - Subitem 2.2

This is **bold text for normal text**.

Frame contents

- Item 1
- Item 2
  - Subitem 2.1
  - Subitem 2.2

This is **bold text for normal text**.

Roadmap

1 Introduzione

2 Alexandrov Moving Planes Method

3 Il risultato di Chow-Gulliver

4 Alcune conseguenze e corollari

5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante

6 Riassunto

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

Equazione di cui ci occupiamo

Flusso geometrico di cui ci occupiamo

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = -F(\kappa_1(x), \ldots, \kappa_n(x))\nu$$

dove ν è il vettore normale, κ_i le curvature principali e F una funzione simmetrica tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa_i} > 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

La condizione sulle derivate di F è equivalente a dire che questa sia una **equazione parabolica** (non-lineare). In particolare, possiamo applicare il principio del massimo e l'Hopf Boundary Point Lemma alla differenza di due soluzioni. Inoltre, la parabolicità garantisce l'esistenza per tempi piccoli.

Definizione Riflessione stretta

Riflessione stretta

Cosa non deve succedere

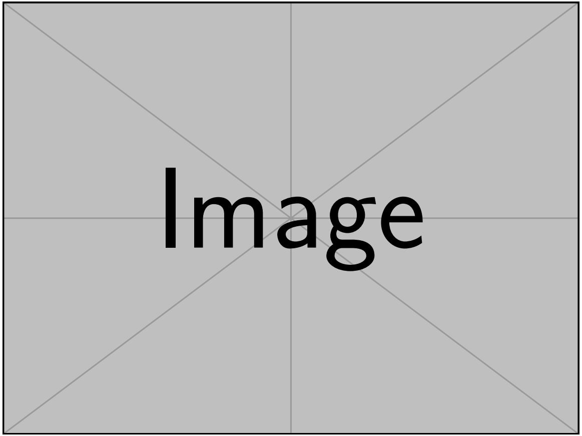

Figure 1: Example Figure A

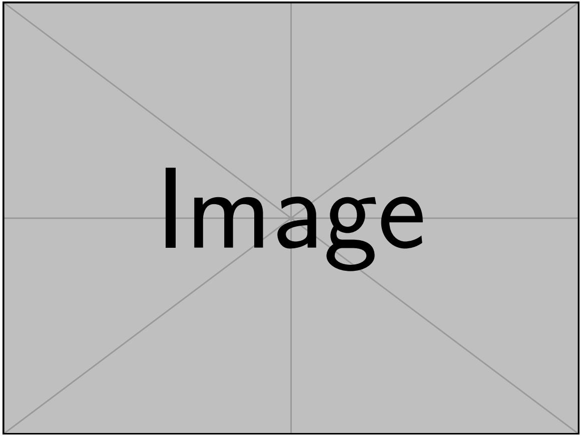

Figure 2: Example Figure B

Il teorema di Chow e Gulliver

Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale X_0 strettamente rispetto ad un piano π, allora possiamo riflettere X_t strettamente rispetto a π per ogni $t \in [0, T)$ (intervallo in cui è definita la soluzione).

Il teorema di Chow e Gulliver

Teorema (Chow-Gulliver)

Data una soluzione del flusso che stiamo considerando, se possiamo riflettere il dato iniziale X_0 strettamente rispetto ad un piano π, allora possiamo riflettere X_t strettamente rispetto a π per ogni $t \in [0, T)$ (intervallo in cui è definita la soluzione).

Interpretazione intuitiva: i piani rispetto a cui posso riflettere *aumentano* nel tempo, per cui la varietà diventa *più simmetrica* e tonda.

Roadmap

1 Introduzione

2 Alexandrov Moving Planes Method

3 Il risultato di Chow-Gulliver

4 Alcune conseguenze e corollari

5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante

6 Riassunto

Alcune conseguenze

Corollario (Chow)

Ciò che esce al di fuori di una sfera è un grafico

Alcune conseguenze

Corollario (Chow)

Ciò che esce al di fuori di una sfera è un grafico

Corollario (Chow)

Stima massimo-minimo modulo

Alcune conseguenze

Corollario (Chow)

Ciò che esce al di fuori di una sfera è un grafico

Corollario (Chow)

Stima massimo-minimo modulo

Corollario (Sinestrari)

Soluzioni antiche espansive che escono fuori da un punto sono per forza delle sfere a tutti i tempi

Roadmap

1 Introduzione

2 Alexandrov Moving Planes Method

3 Il risultato di Chow-Gulliver

4 Alcune conseguenze e corollari

5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante

6 Riassunto

Estensione a spazi a curvatura costante
(idea)

Frame contents

- Item 1
- Item 2
  - Subitem 2.1
  - Subitem 2.2

This is **bold text for normal text**.

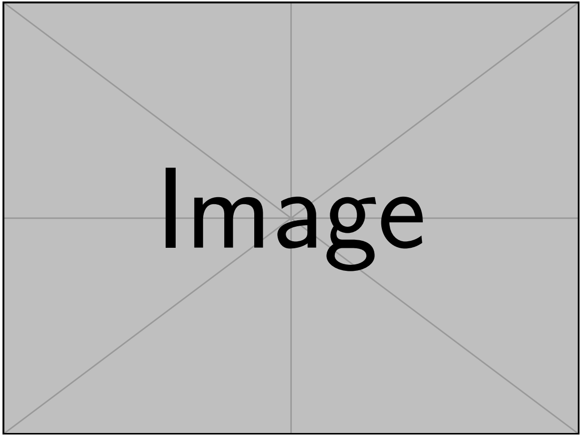

Figure 3: Example Figure A

Roadmap

1 Introduzione

2 Alexandrov Moving Planes Method

3 Il risultato di Chow-Gulliver

4 Alcune conseguenze e corollari

5 Cenni sull'estensione a spazi a curvatura costante

6 Riassunto

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- Pur essendo apparentemente poco utile, in realtà la tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare molti risultati apparentemente difficili

Riassunto

- Il metodo dei piani di Alexandrov è una tecnica che consente di dimostrare simmetrie radiali per tante soluzioni di numerose PDE
- Una ampia classe di flussi geometrici è parabolica, e a questi si può applicare un risultato di *monotonia delle simmetrie* di Chow e Gulliver
- Pur essendo apparentemente poco utile, in realtà la tecnica è estremamente versatile e consente di dimostrare molti risultati apparentemente difficili
- I risultati principali possono essere estesi anche nel caso di spazi a curvatura costante e a flussi *modificati* per conservare il volume interno o l'area