Trabalho 2 - Problema dos Caminhos Mínimos

Igor J. Rodrigues; Leonardo S. Coradeli; Lucas V. Ikeda; Marco V. M. Faria

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Ciência e Tecnologia

9 de novembro de 2025

Sumário

Qual é o melhor caminho?

A Pergunta Intuitiva

Como o Google Maps sabe a rota mais rápida para chegar na FCT?

- É o caminho mais rápido (menor tempo)?
- É o caminho mais curto (menor distância)?
- É o caminho mais barato (sem pedágios)?

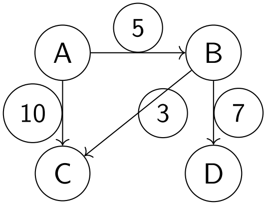
A ideia central é modelar o mapa como um **grafo** e atribuir **custos** às ruas.

(Imagem do Google Maps/Waze aqui)

Onde o PCM se Esconde?

- **Redes de Computadores:** Roteamento de pacotes na internet (Protocolo OSPF) — o custo é a latência.
- **Logística e Transporte:** Otimização de rotas de entrega (Correios, Mercado Livre) — o custo é a distância ou tempo.
- **Finanças (Avançado):** Detecção de oportunidades de arbitragem em mercados (encontrar ciclos de custo negativo).
- **Análise de Redes Sociais:** Medir o "grau de separação" entre duas pessoas.

- **Grafo (ou Dígrafo):** $G = (V, E)$
- V **(Vértices):** O conjunto de "nós" (ex: cidades, roteadores).
- E **(Arestas):** O conjunto de "conexões" (ex: ruas, cabos).
- **Grafo Ponderado:** Cada aresta $(i, j) \in E$ possui um **peso** (ou custo) w_{ij} associado.



O Problema de Caminhos Mínimos

- **Caminho:** Uma sequência de arestas que conecta um nó origem s a um nó destino t.
  - Ex: $P = (A \rightarrow B \rightarrow D)$
- **Custo do Caminho:** A soma dos pesos w_{ij} das arestas que formam o caminho.
  - Ex: $Custo(P) = w_{AB} + w_{BD}$

O Grande Objetivo

Dado um grafo ponderado G, um nó origem s e um nó destino t, encontrar o caminho P de s para t que **minimiza o custo total**.

$$P^* = \arg \min_{P:\, s \rightarrow t} \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}$$

Observação Importante

Os algoritmos que vamos estudar (Dijkstra, Bellman-Ford) resolvem o problema de **Origem Única (SSSP)**: encontram o caminho mínimo de s para **TODOS** os outros

Modelo PL: Variáveis e Função Objetivo

Variáveis de Decisão

Definimos x_{ij} como a quantidade de fluxo enviado pela aresta (i, j).

- $x_{ij} = 1$ se a aresta (i, j) faz parte do caminho mínimo.
- $x_{ij} = 0$ caso contrário.

Função Objetivo (Minimizar o Custo Total)

Queremos minimizar a soma dos custos de todas as arestas usadas. O custo de usar a aresta (i, j) é w_{ij}.

$$\min Z = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} \cdot x_{ij}$$

Modelo PL: Restrições de Conservação de Fluxo

Para cada nó k no grafo, o fluxo que "entra"deve ser igual ao fluxo que "sai", com exceção da origem e do destino.

1. **Nó Origem (s):**
   - O nó s **envia 1** unidade de fluxo.
   - Fluxo que Sai - Fluxo que Entra = 1

$$\sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} - \sum_{i:(i,s)\in E} x_{is} = 1$$

2. **Nó Destino (t):**
   - O nó t **recebe 1** unidade de fluxo.
   - Fluxo que Sai - Fluxo que Entra = -1

$$\sum_{j:(t,j)\in E} x_{tj} - \sum_{i:(i,t)\in E} x_{it} = -1$$

unesp

Modelo PL: Restrições de Conservação de Fluxo

3. Nós Intermediários ($k \neq s, t$):

- Tudo que entra deve sair (conservação pura).
- Fluxo que Sai - Fluxo que Entra $= 0$

$$\sum_{j:(k,j)\in E} x_{kj} - \sum_{i:(i,k)\in E} x_{ik} = 0$$

4. Restrição de Não-Negatividade

Não podemos enviar fluxo negativo.

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E$$

Modelo PL: A Mágica da Integridade

- **Pergunta:** Nós não deveríamos forçar x_{ij} a ser um número inteiro (0 ou 1)?

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{(Programação Inteira)}$$

- **Resposta:** Não precisa!
- Este tipo de problema de rede (Fluxo de Custo Mínimo) tem uma propriedade especial chamada **Total Unimodularidade**.
- **O que importa:** Essa propriedade **garante** que, se a oferta (1) e a demanda (-1) são inteiras, a solução ótima do problema de Programação Linear (com $x_{ij} \geq 0$) **já será inteira**.
- Por isso, podemos resolvê-lo eficientemente como um PL comum.