Trabalho 2 - Problema do Transporte

Igor J. Rodrigues; Leonardo S. Coradeli; Lucas V. C. Ikeda; Marco V. M. Faria

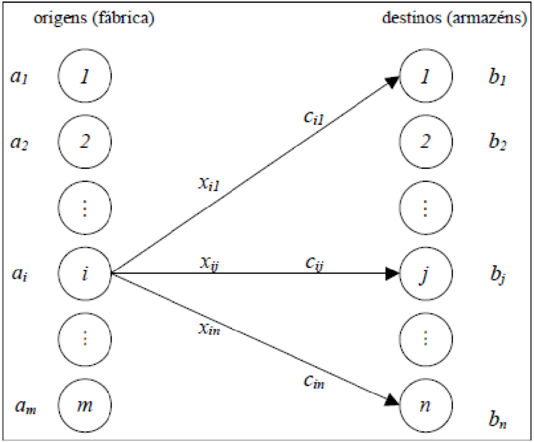
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Ciência e Tecnologia

12 de novembro de 2025

Sumário

Definição do Problema do Transporte

- É uma classe especial dentro dos problemas de programação linear que trata da distribuição de mercadorias de várias origens para vários destinos;
- O objetivo é encontrar um plano de transporte que **minimize o custo total** de envio, respeitando as restrições de **oferta e demanda**.



unesp

Exemplo Prático

- Uma empresa de calçados possui três fábricas e precisa distribuir sua produção para cinco lojas espalhadas pelo país. Cada fábrica possui uma capacidade máxima de produção semanal, e cada loja possui uma demanda específica a ser atendida.
- O custo de transporte de um par de sapatos entre cada fábrica e cada loja é conhecido e varia conforme a distância e o tipo de transporte utilizado.
- As capacidades de produção (oferta) das fábricas são: **200**, **300** e **250 pares**, respectivamente.
- As demandas das lojas são: **150**, **180**, **100**, **200** e **120 pares**, respectivamente.

Tabela de Custos de Transporte (R$ por par)

	L1	L2	L3	L4	L5	Oferta
F1	8	6	10	9	7	200
F2	9	12	13	7	5	300
F3	14	9	16	5	8	250
Demanda	150	180	100	200	120	

Restrições de Oferta (Capacidade de Produção):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 300$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 250$$

Restrições de Demanda (Necessidade das Lojas):

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 180$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 120$$

Restrições de não negatividade:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Interpretação do Problema

- O objetivo é determinar quantos pares de sapatos cada fábrica deve enviar para cada loja de forma a **minimizar o custo total de transporte**.
- Todas as demandas devem ser atendidas, e nenhuma fábrica pode produzir mais do que sua capacidade máxima.
- Esse tipo de problema é conhecido como **Problema do Transporte Balanceado**, pois a soma das ofertas é igual à soma das demandas:

$$200 + 300 + 250 = 150 + 180 + 100 + 200 + 120 = 750$$

- Pode ser resolvido utilizando métodos como o **Canto Noroeste**, **Vogel**, **Menor Custo**

Formulação Matemática

- **Variáveis de decisão:**

$$x_{ij} = \text{quantidade transportada da origem } i \text{ para o destino } j$$

- **Função objetivo:**

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

onde c_{ij} representa o custo de transporte por unidade.

- **Restrições:**

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{(oferta)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad \forall j = 1, \ldots, n \quad \text{(demanda)}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall i, j$$

unesp

- Método do Canto Noroeste;
- Método do Custo Mínimo;
- **Método de Vogel.**

Método de Vogel

- O **Método de Vogel** é uma técnica heurística usada para encontrar uma **solução inicial viável** para o problema do transporte.
- Ele busca equilibrar **custo e penalidade**, tentando minimizar o custo total logo na alocação inicial.
- O princípio é penalizar as escolhas caras: a cada etapa, calcula-se o quanto se "perde" ao não escolher a opção mais barata de cada linha e coluna.

Etapas do Método de Vogel

1. **Calcular as penalidades:** Para cada linha e coluna, determine a diferença entre os dois menores custos dessa linha/coluna. Essa diferença representa a **penalidade**.
2. **Identificar a maior penalidade:** Escolha a linha ou coluna com a penalidade mais alta (ou seja, onde o erro seria mais caro se não for escolhida a menor rota).
3. **Selecionar a menor célula de custo** nessa linha ou coluna e alocar:

$$x_{ij} = \min(\text{oferta}_i, \text{demanda}_j)$$

4. **Atualizar as ofertas e demandas:** Subtraia o valor alocado e risque a linha ou coluna esgotada.
5. **Repetir o processo** até que todas as ofertas e demandas sejam atendidas.

Exemplo - Método de Vogel

Tabela 1: Tabela de custos e demandas

	D1	D2	D3	Oferta
O1	6	8	10	20
O2	7	11	11	15
O3	4	5	12	25
Demanda	10	10	40	

Vogel — Iteração 1

- Penalidades (diferença entre dois menores custos):
  - Linhas: $r_1 = 2, \; r_2 = 4, \; r_3 = 1$
  - Colunas: $c_1 = 2, \; c_2 = 3, \; c_3 = 1$
- Maior penalidade: **linha O2** ($r_2 = 4$). Menor custo nessa linha: $c_{2,1} = 7$.
- Alocação: $x_{2,1} = \min(15, 10) = 10$.

	D1	D2	D3	Oferta
O1	6	8	10	20
O2	**7 (10)**	11	11	5
O3	4	5	12	25
Demanda	0	10	40	

Vogel — Iteração 2

- Penalidades (após atualização):
  - Linhas: $r_1 = 2,\ r_2 = 0,\ r_3 = 7$
  - Colunas: $c_2 = 3,\ c_3 = 1$
- Maior penalidade: **linha O3** ($r_3 = 7$). Menor custo nessa linha: $c_{3,2} = 5$.
- Alocação: $x_{3,2} = \min(25, 10) = 10$.

	D1	D2	D3	Oferta
O1	6	8	10	20
O2	7 (10)	11	11	5
O3	4	**5 (10)**	12	15
Demanda	0	0	40	

unesp

Vogel — Iterações 3,4 e 5 (coluna D3)

- Agora resta apenas a coluna D3 (demanda 40).
- Passos realizados:
  1. Alocamos $x_{3,3} = 15$ (restante de O3).
  2. Alocamos $x_{2,3} = 5$ (restante de O2).
  3. Alocamos $x_{1,3} = 20$ (restante de O1).

	D1	D2	D3	Oferta
O1	6	8	**10 (20)**	0
O2	7 (10)	11	**11 (5)**	0
O3	4	5 (10)	**12 (15)**	0
Demanda	0	0	40	

Solução inicial (Vogel) e Custo Total

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 10 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

- Cálculo do custo:

$$Z = 7 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 11 \cdot 5 + 12 \cdot 15 = 555$$

- Solução encontrada pelo Método de Vogel (alocação inicial): $\boxed{Z = 555}$.

Exercício - Método de Vogel

Tabela 2: Tabela de custos e demandas

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	5	8	6	10	30
O2	9	7	4	8	40
O3	6	5	8	9	50
Demanda	20	30	25	45	

Enunciado

Determine o plano de transporte ótimo utilizando o **Método de Aproximação de Vogel**, de modo a minimizar o custo total.

Características do Método de Vogel

- Fornece soluções iniciais geralmente **mais próximas da ótima** do que o Método do Canto Noroeste ou o do Custo Mínimo;
- Requer cálculos adicionais, mas reduz o número de iterações posteriores no método de otimização (Simplex);
- É amplamente utilizado em problemas de transporte reais devido ao seu **bom equilíbrio entre precisão e esforço computacional**.

Método u-v (MODI)

- Também conhecido como **Método MODI** (*Modified Distribution Method*);
- É utilizado para **verificar a otimalidade** de uma solução viável inicial do problema do transporte;
- Permite identificar se é possível **reduzir o custo total** ajustando a alocação das variáveis não básicas;
- É uma forma simplificada de aplicar o **Simplex** ao problema do transporte.

Ideia do Método u-v

- O método se baseia na atribuição de dois conjuntos de variáveis:

  u_i (para as origens) e v_j (para os destinos)

- Para cada célula básica (i, j), temos:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

- As células não básicas são então avaliadas pelo **custo reduzido**:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

Condição de Ótimo

Uma solução é **ótima** se e somente se:

$$\Delta_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i,j) \text{ não básicos.}$$

- Se todos os Δ_{ij} forem positivos ou nulos, o custo total atual é mínimo;
- Caso exista algum $\Delta_{ij} < 0$, há oportunidade de melhoria no custo, a solução ainda não é ótima;
- Nesse caso, deve-se ajustar a alocação construindo um **ciclo fechado** para redistribuir as quantidades.

Etapas do Método MODI

1. **Obter uma solução inicial viável** (ex: Método de Vogel);
2. **Calcular os valores de u_i e v_j:**
   - Escolha arbitrariamente $u_1 = 0$;
   - Para cada célula básica, use $c_{ij} = u_i + v_j$ para determinar os demais valores;
3. **Calcular os custos reduzidos:**

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

4. **Verificar a otimalidade:**
   - Se todos os $\Delta_{ij} \geqslant 0$, pare, a solução é ótima;
   - Caso contrário, vá para o próximo passo.

Etapas do Método MODI (continuação)

5. **Identificar a célula com o menor Δ_{ij}:**
   - Essa será a célula **candidata a entrar na base**;
6. **Construir o ciclo fechado:**
   - Alterne entre células básicas, formando um caminho fechado;
   - Sinalize os movimentos com $+$ e $-$;
7. **Atualizar as alocações:**

$$x_{ij} = x_{ij} \pm \theta$$

   onde θ é o menor valor das células marcadas com $-$;
8. **Repetir o processo** até que todos os $\Delta_{ij} \geqslant 0$.

unesp

Exemplo - Método u-v (MODI)

Tabela 3: Tabela de custos e solução inicial (via Vogel)

	D1	D2	D3	Oferta
O1	6	8	10	20
O2	7	11	11	15
O3	4	5	12	25
Demanda	10	10	40	

Objetivo

A partir da solução inicial obtida pelo Método de Vogel, aplique o **Método MODI** para verificar se a solução é ótima e, se necessário, encontrar uma solução de custo menor.

Exercício - Método u-v (MODI)

Tabela 4: Tabela de custos e demandas

	D1	D2	D3	D4	Oferta
O1	10 (5)	2 (10)	20	11	15
O2	12	7 (5)	9 (15)	20 (5)	25
O3	4	14	16	19 (10)	10
Demanda	5	15	15	15	

Enunciado

Determine o plano de transporte ótimo utilizando o **Método de Aproximação de Vogel**, de modo a minimizar o custo total.

Vantagens do Método u-v (MODI)

- É o **método mais eficiente** para testar e melhorar soluções do problema do transporte;
- Evita o uso completo do **Simplex**, tornando o processo mais direto;
- Facilita a visualização da estrutura do problema;

Resumo do Método u-v (MODI)

Passos Principais

1. Obtenha uma solução inicial viável (Vogel, Canto Noroeste, etc.);
2. Calcule u_i e v_j com base nas células básicas;
3. Determine Δ_{ij} para as não básicas;
4. Verifique se há $\Delta_{ij} < 0$;
5. Ajuste as alocações por ciclos fechados até atingir a otimalidade.

Conclusão

- O problema do transporte é uma aplicação clássica da programação linear com grande relevância prática;
- Seu estudo auxilia na compreensão de modelos de otimização com restrições de capacidade e custo;
- Métodos como o de Vogel e o MODI permitem soluções eficientes e economicamente viáveis.

Referências

- OLIVEIRA, Jéssica Moia de. O problema de transporte. 2016. Projeto Supervisionado II (Graduação em Matemática, Estatística e Computação Científica) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2016. Orientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira.
- TAHA, Hamdy A. Operations research: an introduction. 10th ed. Global Edition. Harlow: Pearson Education, 2017.
- BYJU'S. Vogel's Approximation Method. Disponível em: https://byjus.com/maths/vogels-approximation-method/