Buongiorno a tutti sono Marco Vitali e questa è la mia tesi intitolata La Coomologia di De Rham.

Lo scopo di questa tesi è quello di illustrare i principali sviluppi della coomologia di De Rham, ovvero un potente strumento che consente di trovare invarianti per diffeomorfismi e invarianti topologici per le varietà studiate, passando attraverso importanti risultati quali la dualità di Poincarè e la classe di Thom.

Per poter discutere di questi argomenti sono necessarie delle nozioni preliminari, una su tutte la definizione di varietà differenziabile: una varietà M di dimensione n si dice differenziabile se è dotata di una struttura differenziabile, ovvero se:

1. Ha un atlante $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di aperti omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$ tramite gli omeomorfismi $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

2. Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ sono diffeomorfismi.

3. L'atlante deve essere minimale rispetto all'inclusione.

Tutto ciò di cui andremo a parlare, in particolare il complesso di De Rham, si baserà sulle k-forme differenziali definite sulla varietà.

Altri concetti fondamentali in questo ambito riguardanti le varietà sono:

1. L'orientabilità, e quindi il riuscire a definire o meno un'orientazione su di essa, tramite un atlante le cui funzioni di transizione hanno sempre jacobiano positivo.

2. L'integrazione delle k-forme differenziali lungo la varietà.

3. I fibrati, ovvero funzioni suriettive nelle varietà che come preimmagine di ogni punto hanno un certo spazio vettoriale definito "fibra".

A questo punto possiamo già iniziare a parlare di complesso di De Rham:

Il complesso delle forme differenziali su una varietà M con l'operatore differenziale d di differenziazione esterna si dice Complesso di De Rham di M e si denota $\Omega^*(M)$.

L'operatore d agisce fondamentalmente "derivando" rispetto ad una variabile per volta le forme e porta quindi una k-forma differenziale in una (k+1)-forma differenziale.

La coomologia di questo complesso si dice appunto Coomologia di De Rham e si definisce tramite il quoziente delle forme chiuse rispetto a quelle esatte, che rappresenta una stima di quante possano essere le soluzioni non banali dell'equazione differenziale $d\theta = 0$ rispetto a quelle banali.

Le stesse definizioni posso essere date analizzando solo le forme su M che hanno supporto compatto, dando vita così alla Coomologia di De Rham a supporto compatto.

Tenendo conto che durante tutta l'esposizione si considereranno solo funzioni C^∞, se si prende una funzione $f : N \to M$ si può definire una mappa di pullback $f^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$, quindi invertendo, definita componendo le forme differenziali con f, ovviamente non si possono comporre realmente una forma ed una funzione, ma è chiaro che si intende di comporre con f le funzioni che definiscono la forma.

Dunque considerando le inclusioni da $U \cap V$ in $U \coprod V$ in M si ottiene una sequenza esatta corta di complessi che va da 0 in $\Omega^*(M)$ in $\Omega^*(U)$ somma diretta con $\Omega^*(V)$ in $\Omega^*(U \cap V)$ in 0, dove la funzione chiamata δ è la differenza tra forme.

Per un teorema classico di topologia algebrica da una sequenza esatta corta di complessi nasce una sequenza esatta lunga in coomologia, che nel nostro caso viene rappresentata in questo modo.

Per il complesso di De Rham a supporto compatto vale un'analoga sequenza esatta lunga in coomologia, che però inverte il senso di percorrenza perchè il pullback di una forma a supporto compatto non è detto abbia supporto compatto, dunque si definisce al posto della mappa di pullback una mappa di pushforward.

Tramite degli isomorfismi inversi in coomologia tra $H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ e $H^*(\mathbb{R}^n)$ dati dalla proiezione π, che manda $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ in $(x_1, \ldots, x_n)$, e dalla sezione zero s, che manda $(x_1, \ldots, x_n)$ in $(x_1, \ldots, x_n, 0)$, si ottengono due lemmi molto importanti detti Lemma di Poincarè e Lemma di Poincarè a Supporto Compatto, che calcolano la coomologia di $\mathbb{R}^n$, la quale risulta essere $\mathbb{R}$ in dimensione 0 e 0 nelle altre dimensioni, e la sua coomologia a supporto compatto, $\mathbb{R}$ in dimensione n e 0 nelle altre dimensioni.

Questo viene reso possibile da un operatore differenziale K che rappresenta l'integrazione di una forma lungo l'ultima variabile, definito nella loro dimostrazione.

Grazie a questi due lemmi diventa ad esempio possibile calcolare la coomologia di S^n.

L'argomento di Mayer-Vietoris è un metodo di dimostrazione molto valido che consiste nell'accoppiare le due sequenze di Mayer-Vietoris percorse in senso opposto, per poi applicare l'integrazione sulla varietà M al prodotto wedge di una forma in $H^q(M)$ con una forma a supporto compatto in $H_c^{n-q}(M)$.

In questo modo, sfruttando il fatto che un funzionale lineare non degenere su $V \otimes W$ induce un isomorfismo tra V e $(W)^*$, si ottiene un isomorfismo tra la coomologia q-esima di M e il duale della sua (n-q)-esima coomologia a supporto compatto, e utilizzando il lemma dei 5 a dovere si ottiene che questo isomorfismo si estende alla coomologia k-esima di M per ogni k.

Questo risultato viene detto Dualità di Poincarè.

L'opposto però non è sempre vero e questa asimmetria deriva dal fatto che il duale di una somma diretta è un prodotto diretto, ma il duale di un prodotto diretto non è una somma diretta.

In ogni caso si dimostra che questo opposto è valido per varietà con un good cover finito.

Sfruttando nuovamente l'argomento di Mayer-Vietoris si può ottenere la Formula di Künneth che permette di calcolare la coomologia di un prodotto di varietà come prodotto delle loro coomologie.

A questo punto, tenendo conto della dualità di Poincarè non risulta troppo difficile comprendere quello che si dice Duale di Poincarè, ovvero considerando una varietà orientata M di dimensione n ed una sua sottovarietà orientata S di dimensione k, si può associare all'integrazione lungo S delle k-forme a supporto compatto, che è un elemento del duale di $H_c^k(M)$, un unica classe di coomologia in $H^{n-k}(M)$, che si dice appunto Duale di Poincarè di S in M.

In modo esattamente analogo ma per varietà con un good cover finito si può definire un Duale di Poincarè compatto che è una classe di coomologia in $H_c^{n-k}(M)$ che corrisponde unicamente all'integrazione lungo S delle k-forme.

Da ora in poi l'attenzione si sposterà drasticamente sul calcolare la coomologia dei fibrati vettoriali costruiti su varietà, ma prima di tutto è necessario comprendere cosa sono i fibrati vettoriali:

Se $\pi : E \to M$ è una suriezione tra varietà la cui fibra $\pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale $\forall x \in M$, allora π si dice fibrato vettoriale reale C^∞ di rango n se esistono:

1. Un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M

2. Dei diffeomorfismi che preservano le fibre ϕ_α che vanno da $\pi^{-1}(U_\alpha)$ ad $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ che sono degli isomorfismi lineari su ogni fibra.

Nei fibrati vettoriali oltre alle due già definite esiste un terzo tipo di coomologia, ovvero la Coomologia a Supporto Compatto lungo la Componente Verticale, o più semplicemente Coomologia Compatta Verticale, che considera come ci si può aspettare tutte le forme che ristrette ad ogni fibra hanno supporto compatto.

Anche per questa coomologia esiste una versione dei lemmi di Poincarè che dice che se M è una varietà di dimensione n allora c'è un isomorfismo tra $H_{cv}^*(M \times \mathbb{R}^n)$ e $H^{*-n}(M)$, rappresentato da una mappa detta integrazione lungo la componente verticale.

Generalizzando questo lemma ai fibrati vettoriali E di rango n su una varietà M si può ottenere che questo isomorfismo vale ancora ed il suo inverso T si dice Isomorfismo di Thom.

L'immagine della funzione 1_M che vale costantemente 1 su tutta la varietà è una classe in $H_{cv}^n(E)$ che si dice Classe di Thom ed è di fondamentale importanza in quanto un teorema stabilisce che essa può essere caratterizzata unicamente come la classe di coomologia in $H_{cv}^n(E)$ che si restringe ad un generatore di ogni fibra.

Inoltre la classe di Thom ha un collegamento molto stretto con il duale di Poincarè, infatti si arriva a dimostrare tramite un calcolo diretto che:

1. Il Duale di Poincarè di una sottovarietà chiusa orientata S di una varietà orientata M e la classe di Thom del fibrato vettoriale normale di S possono essere rappresentati dalla stessa forma.

2. La classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato $\pi : E \to M$ su una varietà orientata M e il duale di Poincarè della sezione zero di E possono essere rappresentati dalla stessa forma.

Grazie dell'attenzione.