La Coomologia di De Rham

Marco Vitali

Laurea triennale in matematica

29/09/2023

Nozioni preliminari

Nozioni preliminari

Definizione varietà differenziabile

M varietà di dimensione n si dice differenziabile se dotata di una struttura differenziabile, ovvero se:

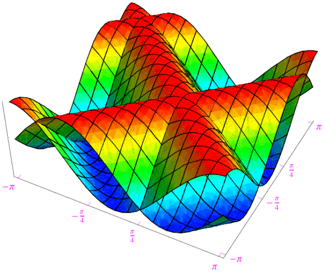
- Ha un atlante $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di aperti omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$ tramite gli omeomorfismi $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$
- Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ sono diffeomorfismi
- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è minimale rispetto all'inclusione.

Nozioni preliminari

Definizione varietà differenziabile

M varietà di dimensione n si dice differenziabile se dotata di una struttura differenziabile, ovvero se:

- Ha un atlante $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di aperti omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$ tramite gli omeomorfismi $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$
- Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ sono diffeomorfismi
- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è minimale rispetto all'inclusione.

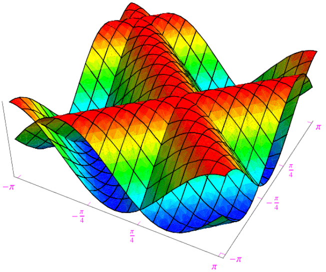


Nozioni preliminari

Definizione varietà differenziabile

M varietà di dimensione n si dice differenziabile se dotata di una struttura differenziabile, ovvero se:

- Ha un atlante $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di aperti omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$ tramite gli omeomorfismi $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$
- Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ sono diffeomorfismi
- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è minimale rispetto all'inclusione.



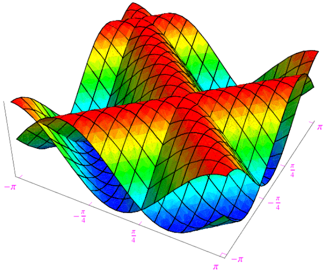
k-forme differenziali

Nozioni preliminari

Definizione varietà differenziabile

M varietà di dimensione n si dice differenziabile se dotata di una struttura differenziabile, ovvero se:

- Ha un atlante $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di aperti omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$ tramite gli omeomorfismi $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$
- Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ sono diffeomorfismi
- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è minimale rispetto all'inclusione.



k-forme differenziali

Orientazione

Integrazione

Fibrati

Il complesso di De Rham

Il complesso di De Rham

Il complesso delle forme differenziali su una varietà M con l'operatore differenziale d di differenziazione esterna si dice Complesso di De Rham di M $\Omega^*(M)$

Il complesso di De Rham

Il complesso delle forme differenziali su una varietà M con l'operatore differenziale d di differenziazione esterna si dice Complesso di De Rham di M $\Omega^*(M)$

La coomologia di questo complesso si dice Coomologia di De Rham di M.

Il complesso di De Rham

Il complesso delle forme differenziali su una varietà M con l'operatore differenziale d di differenziazione esterna si dice Complesso di De Rham di M $\Omega^*(M)$

La coomologia di questo complesso si dice Coomologia di De Rham di M.

$$H^q_{DR}(\mathbb{R}^n) = H^q(\mathbb{R}^n) = \frac{\{\text{q-forme chiuse}\}}{\{\text{q-forme esatte}\}}$$

Il complesso di De Rham

Il complesso delle forme differenziali su una varietà M con l'operatore differenziale d di differenziazione esterna si dice Complesso di De Rham di M $\Omega^*(M)$

La coomologia di questo complesso si dice Coomologia di De Rham di M.

$$H^q_{DR}(\mathbb{R}^n) = H^q(\mathbb{R}^n) = \frac{\{\text{q-forme chiuse}\}}{\{\text{q-forme esatte}\}}$$

Le stesse definizioni posso essere date analizzando solo le forme su M che hanno supporto compatto, dando vita così alla Coomologia di De Rham a supporto compatto

La sequenza di Mayer-Vietoris

La sequenza di Mayer-Vietoris

Avendo una funzione C^∞ tra varietà $f : N \to M$ si definisce una mappa di pullback $f^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$ definita componendo le forme differenziali con f

La sequenza di Mayer-Vietoris

Avendo una funzione C^∞ tra varietà $f : N \to M$ si definisce una mappa di pullback $f^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$ definita componendo le forme differenziali con f

Considerando le inclusioni

$$U \cap V \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} U \coprod V \overset{i}{\hookrightarrow} M$$

si ottiene una sequenza esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\delta} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

con $\delta\big((\omega, \tau)\big) = \tau - \omega$

La sequenza di Mayer-Vietoris

La sequenza di Mayer-Vietoris

Essendo una sequenza esatta corta dà vita alla sequenza esatta lunga in coomologia

$$
\begin{tikzcd}
& H^{k+1}(M) \arrow[r, "i^*"] & H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \arrow[r] & \cdots \\
& H^{k}(M) \arrow[r, "i^*"] & H^{k}(U) \oplus H^{k}(V) \arrow[r, "\delta"] & H^{k}(U \cap V) \arrow[llu, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[near end, fill=white]{d^*} ([yshift=-2ex]\tikztotarget.south) -| ([xshift=-4ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& \cdots \arrow[r] & H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \arrow[r, "\delta"] & H^{k-1}(U \cap V) \arrow[llu, rounded corners, "d^*"]
\end{tikzcd}
$$

La sequenza di Mayer-Vietoris

La sequenza di Mayer-Vietoris

Per il complesso di De Rham a supporto compatto invece vale

$$
\begin{tikzcd}
H_c^{k+1}(U \cap V) \arrow[r, "\delta"] & H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \arrow[r] & \cdots \\
H_c^{k}(U \cap V) \arrow[r, "\delta"] & H_c^{k}(U) \oplus H_c^{k}(V) \arrow[r, "i^* + j^*"] & H_c^{k}(M) \arrow[ull, rounded corners, "d^*"] \\
\cdots \arrow[r] & H_c^{k-1}(U) \oplus H_c^{k-1}(V) \arrow[r, "i^* + j^*"] & H_c^{k-1}(M) \arrow[ull, rounded corners, "d^*"]
\end{tikzcd}
$$

che inverte il senso di percorrenza rispetto alla precedente sequenza

I lemmi di Poincarè

I lemmi di Poincarè

Tramite degli isomorfismi inversi in coomologia tra $H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ e $H^*(\mathbb{R}^n)$ dati dalla proiezione e dalla sezione zero si ottengono due lemmi molto importanti

I lemmi di Poincarè

Tramite degli isomorfismi inversi in coomologia tra $H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ e $H^*(\mathbb{R}^n)$ dati dalla proiezione e dalla sezione zero si ottengono due lemmi molto importanti

Lemma di Poincarè

$$H^q(\mathbb{R}^n) = H^q(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & se \quad q = 0 \\ 0 & se \quad q \neq 0 \end{cases}$$

I lemmi di Poincarè

Tramite degli isomorfismi inversi in coomologia tra $H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ e $H^*(\mathbb{R}^n)$ dati dalla proiezione e dalla sezione zero si ottengono due lemmi molto importanti

Lemma di Poincarè

$$H^q(\mathbb{R}^n) = H^q(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & se \quad q = 0 \\ 0 & se \quad q \neq 0 \end{cases}$$

Lemma di Poincarè a supporto compatto

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & se \quad q = n \\ 0 & se \quad q \neq n \end{cases}$$

La dualità di Poincarè

Tramite un metodo di dimostrazione molto importante, detto Argomento di Mayer-Vietoris, che coinvolge ampiamente il Lemma dei 5, si riesce a mostrare un risultato fondamentale per lo studio della Coomologia di De Rham

La dualità di Poincarè

Tramite un metodo di dimostrazione molto importante, detto Argomento di Mayer-Vietoris, che coinvolge ampiamente il Lemma dei 5, si riesce a mostrare un risultato fondamentale per lo studio della Coomologia di De Rham

Dualità di Poincarè

Se M è una varietà orientabile di dimensione n allora
$H^q(M) \simeq (H_c^{n-q}(M))^*$

La dualità di Poincarè

Tramite un metodo di dimostrazione molto importante, detto Argomento di Mayer-Vietoris, che coinvolge ampiamente il Lemma dei 5, si riesce a mostrare un risultato fondamentale per lo studio della Coomologia di De Rham

Dualità di Poincarè

Se M è una varietà orientabile di dimensione n allora
$H^q(M) \simeq (H_c^{n-q}(M))^*$

L'opposto $H_c^q(M) \simeq (H^{n-q}(M))^*$ però non è sempre vero.

La Formula di Künneth

La Formula di Künneth

Utilizzando nuovamente l'argomento di Mayer-Vietoris si dimostra un'importante formula che rende possibile calcolare la coomologia di un prodotto di due varietà

Formula di Künneth

Se M e F sono due varietà con un good cover finito allora
$H^*(M \times F) = H^*(M) \otimes H^*(F)$

In questa formula si intende che
$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} \left(H^p(M) \otimes H^q(F) \right)$

Duale di Poincarè

A questo punto si hanno tutte le nozioni necessarie per definire il Duale di Poincarè

Duale di Poincarè

A questo punto si hanno tutte le nozioni necessarie per definire il Duale di Poincarè

Duale di Poincarè

Se M è una varietà orientata di dimensione n e S è una sua sottovarietà chiusa orientata di dimensione k allora esiste ed è unica una classe di coomologia $\eta_S \in H^{n-k}(M)$, detta Duale di Poincarè di S in M, tale che $\forall \omega \in H_c^k(M)$

$$\int\limits_S i^*\omega = \int\limits_M \omega \wedge \eta_S$$

con $i : S \to M$ inclusione

Duale di Poincarè

A questo punto si hanno tutte le nozioni necessarie per definire il Duale di Poincarè

Duale di Poincarè

Se M è una varietà orientata di dimensione n e S è una sua sottovarietà chiusa orientata di dimensione k allora esiste ed è unica una classe di coomologia $\eta_S \in H^{n-k}(M)$, detta Duale di Poincarè di S in M, tale che $\forall \omega \in H^k_c(M)$

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta_S$$

con $i : S \to M$ inclusione

Per dimostrare la sua esistenza si sfrutta che l'integrazione lungo una sottovarietà è un funzionale lineare, insieme alla dualità di Poincarè

Duale di Poincarè

Duale di Poincarè

Analogamente si può definire un duale di Poincarè per le forme compatte detto Duale di Poincarè Compatto, ma è necessario porre come ipotesi che la varietà abbia un good cover finito

Duale di Poincarè

Analogamente si può definire un duale di Poincarè per le forme compatte detto Duale di Poincarè Compatto, ma è necessario porre come ipotesi che la varietà abbia un good cover finito

Duale di Poincarè Compatto

Se M è una varietà orientata di dimensione n con un good cover finito e S è una sua sottovarietà chiusa orientata di dimensione k allora esiste ed è unica una classe di coomologia $\eta'_S \in H_c^{n-k}(M)$, detta Duale di Poincarè Compatto di S in M, tale che $\forall \omega \in H^k(M)$

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega \wedge \eta'_S$$

con $i : S \to M$ inclusione

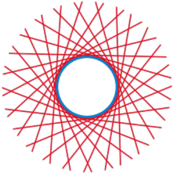
Fibrati vettoriali

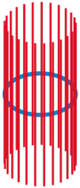
Fibrati vettoriali

Da ora in poi l'attenzione si sposterà drasticamente sul calcolare la coomologia dei fibrati vettoriali costruiti su varietà

Fibrati vettoriali

Da ora in poi l'attenzione si sposterà drasticamente sul calcolare la coomologia dei fibrati vettoriali costruiti su varietà





Definizione Fibrato vettoriale

Se $\pi : E \to M$ è una suriezione tra varietà la cui fibra $\pi^{-1}(x)$ è uno spazio vettoriale $\forall x \in M$, allora π si dice fibrato vettoriale reale C^∞ di rango n se esistono

- Un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M
- Dei diffeomorfismi che preservano le fibre $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ che sono degli isomorfismi lineari su ogni fibra.

Coomologia Compatta Verticale

Coomologia Compatta Verticale

Nei fibrati vettoriali oltre alle due già definite esiste un terzo tipo di coomologia, ovvero la Coomologia a Supporto Compatto lungo la Componente Verticale, o più semplicemente Coomologia Compatta Verticale

Coomologia Compatta Verticale

Nei fibrati vettoriali oltre alle due già definite esiste un terzo tipo di coomologia, ovvero la Coomologia a Supporto Compatto lungo la Componente Verticale, o più semplicemente Coomologia Compatta Verticale

Anche per quest'ultima esiste una versione dei lemmi di Poincarè

Lemma di Poincarè compatto lungo la componente verticale

Se M è una varietà di dimensione n allora

$$H^*_{cv}(M \times \mathbb{R}^n) \simeq H^{*-n}(M)$$

La Classe di Thom

La Classe di Thom

Generalizzando questo lemma al caso in cui si ha un fibrato vettoriale E di rango n su una varietà M, questo isomorfismo Prende il nome di Isomorfismo di Thom

$$T : H^*(M) \to H_{cv}^{n+*}(E)$$

La Classe di Thom

Generalizzando questo lemma al caso in cui si ha un fibrato vettoriale E di rango n su una varietà M, questo isomorfismo Prende il nome di Isomorfismo di Thom

$$T : H^*(M) \to H_{cv}^{n+*}(E)$$

L'immagine della funzione costante 1_M tramite questo isomorfismo prende il nome di Classe di Thom ed è caratterizzata in modo particolare

La Classe di Thom

Generalizzando questo lemma al caso in cui si ha un fibrato vettoriale E di rango n su una varietà M, questo isomorfismo Prende il nome di Isomorfismo di Thom

$$T : H^*(M) \to H_{cv}^{n+*}(E)$$

L'immagine della funzione costante 1_M tramite questo isomorfismo prende il nome di Classe di Thom ed è caratterizzata in modo particolare

Teorema

La Classe di Thom di un fibrato vettoriale E orientato di rango n si può caratterizzare unicamente come la classe di omologia in $H_{cv}^n(E)$ che si restringe in ogni fibra F ad un generatore di $H_c^n(F)$

La Classe di Thom e Il Duale di Poincarè

La Classe di Thom e Il Duale di Poincarè

È molto interessante notare come la Classe di Thom e Il Duale di Poincarè siano in fondo concetti coincidenti, infatti applicando direttamente la definizione di Duale di Poincarè alla Classe di Thom si ottiene

La Classe di Thom e Il Duale di Poincarè

È molto interessante notare come la Classe di Thom e Il Duale di Poincarè siano in fondo concetti coincidenti, infatti applicando direttamente la definizione di Duale di Poincarè alla Classe di Thom si ottiene

Teorema

- Il duale di Poincarè di una sottovarietà chiusa orientata S di una varietà orientata M e la classe di Thom del fibrato vettoriale normale di S possono essere rappresentati dalla stessa forma
- La classe di Thom di un fibrato vettoriale orientato $\pi : E \to M$ su una varietà orientata M e il duale di Poincarè della sezione zero di E possono essere rappresentati dalla stessa forma

Grazie dell'attenzione!