Tensore energia-impulso

Damiano Santoferrara, Marco Zenari

6 Dicembre 2021

Indice

1 Introduzione **2**

2 Notazioni **2**

3 Esempio introduttivo: un gas di particelle non interagenti **3**

4 Generalizzazione al caso continuo **6**
- 4.1 Densità di massa relativistica 7
- 4.2 Conservazione della massa 7
- 4.3 Equazione delle geodetiche 9
- 4.4 Tensore e sua legge di conservazione 9
- 4.5 Densità di tetra-momento 10
- 4.6 Conservazione del tetra-impulso 10
- 4.7 Caso di moto non inerziale 11

5 Tensore energia-impulso: caso generale **12**
- 5.1 Interpretazione fisica 13
- 5.2 Tensore energia-impulso di due sistemi 14

6 Applicazione all'elettrodinamica **15**
- 6.1 Leggi di conservazione 15
- 6.2 Tensore energia impulso e tensore di Faraday 17

7 Conclusioni **19**

Riferimenti bibliografici **20**

1 Introduzione

In questo elaborato vorremmo arrivare a definire e comprendere il significato del **Tensore energia-impulso** per poi vagliare alcune applicazioni fisiche che ne rendono essenziale l'utilizzo all'interno della teoria della relatività speciale (SR) e della teoria della relatività generale (GR).

Questo tensore è un modo di rappresentare l'energia e il momento propri di un mezzo continuo in un modo furbamente intuitivo e prestante al formalismo covariante della relatività ristretta. Di fatto tutta la meccanica relativistica dei continui si deriva utilizzando proprietà del tesore energia-impulso. Ma perché studiare meccanica relatvistica dei continui se i corpi continui usualmente non possono in nessun modo essere accelerati fino a velocità relativistiche?

1. La specializzazione alla meccanica relativistica particellare è immediata se si parte dalla meccanica dei continui ma non è vero il contrario.
2. La meccanica dei continui è fondamentale per lo sviluppo della relatività generale, in quanto il tensore energia-impulso contiene le sorgenti del campo gravitazionale e contemporaneamente serve per descrivere le equazioni che ne caratterizzano la forma.
3. Ci sono alcuni sistemi fisici nella realtà che richiedono l'utilizzo della meccanica relativistica dei continui per essere descritti, come la superficie delle stelle di neutroni e l'orizzonte dei buchi neri. [Rin91]

Al fine di dare fin da subito una caratterizzazione fisica a questo oggetto matematico lo introduciamo con un semplice esempio, considerando da prima un gas di N particelle non interagenti con massa m e generalizzando in seguito i risultati ad una distribuzione continua di massa.

2 Notazioni

Riportiamo in questa sezione brevemente le notazioni che abbiamo utilizzato al fine di migliorare la chiarezza espositiva dell'elaborato.

Relatività speciale $\rightarrow$ SR
SdR $\rightarrow \mathcal{O}$
Spazio tempo di minkowski $\rightarrow \mathcal{M}^4$
tempo proprio $\rightarrow \tau$
tetra-posizione $\rightarrow x^a$
tetra-velocità o campo vettoriale di tetra-velocità $\rightarrow u^a$
velocità ordinaria 3D $\rightarrow \vec{v}$
tetra-momento$\rightarrow p^a$
densità di momento $\rightarrow P^a$
tetra-momento totale $\rightarrow \mathcal{P}^a$
tetra-forza minkowskiana $\rightarrow F^a$

densità di tetra-forza $\rightarrow f^a$
forza totale$\rightarrow \mathcal{F}$
energia$\rightarrow E$
Tensore$\rightarrow T^{ab}$
delta di Dirac $\rightarrow \delta^3()$
Trasformazione di Lorentz $\rightarrow L^c_d$
metrica $\rightarrow g = (-1, 1, 1, 1)$

3 Esempio introduttivo: un gas di particelle non interagenti

Introduciamo il tensore energia-impulso rielaborando un esempio tratto da [FGP20]. Consideriamo N particelle di massa a riposo m in moto in un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{O}$ e descriviamo ciò che avviene da un punto di vista cinematico. Per farlo richiamiamo prima brevemente alcune definizioni e risultati della relatività speciale. In formalismo covariante possiamo scrivere la tetra-posizione di una particella $x = (ct, x^1, x^2, x^3)$ dove c è la velocità della luce e t, x^1, x^2, x^3 sono le coordinate del SdR considerato. Nella notazione con gli indici scriveremo x^a con $a = 0, 1, 2, 3$. Derivando la tetra-posizione rispetto al tempo proprio τ della particella otteniamo la tetra-velocità $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$, le cui componenti spaziali u^α, $\alpha = 1, 2, 3$ sono pari alla velocità ordinaria tridimensionale $\vec{v}$ moltiplicata per un fattore $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ di Lorentz, mentre per la componente temporale abbiamo $u^0 = \gamma c$. Definiamo poi il tetra-momento (o quadri-impulso) $p^a = mu^a$ le cui componenti spaziali si riducono a $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ che è proprio l'impulso tridimensionale in SR, mentre la componente temporale è pari a $p^0 = m\gamma c$. Ricordando che l'energia di una particella in SR è pari a $E = m\gamma c^2$ possiamo scrivere l'utile relazione

$$E = p^0 c \tag{1}$$

Torniamo ora al nostro gas di N particelle. Ad un istante t ognuna di esse si troverà in una certa posizione dello spazio $\vec{x}_n(t)$ e avrà un certo tetra-momento $p^a_n(t)$ dove $n = 1, .., N$ indica la particella considerata. Siamo ora pronti per scrivere la distribuzione della densità di energia del nostro sistema, ossia

$$T^{00} = \sum_{n=1}^{N} E_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

dove E_n è l'energia della particella n-esima e $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))$ è la delta di Dirac tridimensionale [1]. Notiamo che T^{00} ha effettivamente le dimensioni di una densità di energia, se consideriamo che la delta di Dirac ha le dimensione dell'inverso di

[1] La distribuzione che soddisfa $\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{x} f(\vec{x})\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0)$

un volume. Utilizzando ora la relazione (1) T^{00} diventa

$$T^{00} = \sum_{n=1}^{N} cp_n^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) \tag{2}$$

Similmente possiamo scrivere anche la densità di momento nella direzione i-esima $\frac{1}{c}T^{0\alpha}$, con $\alpha = 1, 2, 3$, dove definiamo

$$T^{0\alpha} = \sum_{n=1}^{N} cp_n^\alpha \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) \tag{3}$$

Infine definiamo

$$T^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{N} p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) \tag{4}$$

che ha le dimensioni di un impulso su una superficie per unità di tempo, e che possiamo quindi interpretare come una densità di corrente di momento. Possiamo ora definire il tensore energia-momento nel caso di N particelle discrete nel modo seguente:

$$T^{ab} = \sum_{n=1}^{N} p_n^a \frac{dx_n^b}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) \tag{5}$$

con $a, b = 0, 1, 2, 3$. Si può facilmente vedere che le definizioni 2, 3 e 4 non sono altro che le rispettive componenti del nostro tensore. Dimostreremo tra poco che T è effettivamente un tensore, ossia che trasforma correttamente sotto trasformazioni di Lorentz. Facciamo ora brevemente vedere che è simmetrico, ossia vale che $T^{ab} = T^{ba}$. Per farlo ricorriamo al fatto che il tetra-momento si può scrivere

$$p_n^a = \frac{E_n}{c^2} \frac{dx_n^a}{dt}$$

Sostituendo questa relazione della definizione (5) si ottiene

$$T^{ab} = c^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^a p_n^b}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

che è evidentemente simmetrico in a e b. Dimostriamo ora che T^{ab} è un tensore. Per farlo lo riscriviamo in modo tale che la covarianza risulti evidente. Introduciamo nelle definizione (5) un integrale nella coordinata x^0 e una delta di dirac $\delta(x^0 - x_n^0)$, otteniamo

$$T^{ab} = \sum_{n=1}^{N} \int dx^0 p_n^a \frac{dx_n^b}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) \delta(x^0 - x_n^0)$$

che è equivalente alla 5 per la definizione della delta di dirac. Ci ricordiamo ora che $dx^0 = cdt$ e che $\gamma_n d\tau_n = dt$, dove τ_n è il tempo proprio di ciascuna particella e γ_n il fattore di Lorentz calcolato per ciascuna particella. Effettuando queste sostituzioni il tensore diventa

$$T^{ab} = c \sum_{n=1}^{N} \int d\tau_n p_n^a \frac{dx_n^b}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n) \tag{6}$$

In questo modo sia l'integrale che la derivata sono fatte rispetto ai tempi propri delle singole particelle, che sono invarianti di Lorentz. Cambiando SdR inerziale si applica una trasformazione di Lorentz L^c_d alle tetra-posizioni $x^b = L^b_c x^c$ e ai tetra-momenti $p^a = L^a_d x^d$ e poiché questi entrano linearmente nella definizione del Tensore energia-momento (6) si ha $T^{ab} = L^a_d L^b_c T^{cd}$, ossia T trasforma sotto trasformazioni di Lorentz come atteso da un tensore di rango 2. Abbiamo quindi costruito, nel caso di un gas di N particelle, un oggetto matematico che si comporta bene sotto trasformazioni di Lorentz e che contiene informazioni riguardo la densità di energia, la densità di momento e il flusso di momento nello spazio-tempo di Minkoswky. L'utilità dell'aver introdotto il *tensore energia-momento* è che questo ci permette di ricavare immediatamente alcune leggi di conservazione. Lo facciamo in questo caso particolare e rimandiamo una discussione più approfondita a dopo aver generalizzato la definizione dello stesso a distribuzioni di massa continue. A partire dalla definizione 5 del tensore possiamo calcolare la derivata temporale della componente T^{a0}

$$\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} c \sum_{n=1}^{N} p_n^a(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x_n}(t))$$

Dove abbiamo esplicitato le dipendenze temporali per chiarezza. Applichiamo le regole di derivazione e otteniamo

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{\partial p_n^a(t)}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x_n}(t) + p_n^a(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{x} - \vec{x_n}(t)) \right] \tag{7}$$

Concentriamoci sul primo termine a destra: poiché le p_n^a dipendono solo dal tempo la derivata parziale rispetto al tempo è equivalente alla derivata totale. Dalla teoria della SR sappiamo che $\frac{dp_n^a}{dt} = \frac{dp_n^a}{d\tau_n}\frac{d\tau_n}{dt}$ e che $\frac{dp_n^a}{d\tau_n} = F_n^a$ è la forza minkowskiana che agisce sulla particella n-esima. Possiamo quindi vedere il primo termine della 7 come una densità di forza f^a

$$f^a = \sum_{n=1}^{N} \frac{dp_n^a}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n) = \sum_{n=1}^{N} F_n^a \frac{d\tau_n}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n)$$

infatti integrando sulle coordinate spaziali otteniamo la forza totale nel SdR $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{F}^a = \sum_{n=1}^{N} F_n^a \frac{d\tau_n}{dt}$$

Se le particelle sono libere, ossia non agisce alcuna forza su di esse, otteniamo dalla 7

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} p_n^a(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\vec{x}-\vec{x_n}(t))$$

che si può scrivere

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} p_n^a(t)\sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial x_n^\mu}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_n^\mu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x_n}(t))$$

Usando ora il fatto che $\frac{\partial}{\partial x_n^\mu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x_n}) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^3(\vec{x}-\vec{x_n})$ e riordinando i termini possiamo scrivere

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} = -\sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sum_{n=1}^{N} p_n^a(t)\frac{\partial x_n^\mu}{\partial t}\delta^3(\vec{x}-\vec{x_n})\right] \tag{8}$$

Il termini tra parentisi quadre non è altro che la componente $T^{a\mu}$ del tensore. Arriviamo quindi a scrivere in maniera molto compatta una legge di conservazione nel caso in cui le particelle sono libere:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{a0}}{\partial t} = -\sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial T^{\alpha\mu}}{\partial x^\mu}$$

che può essere scritta in maniera più elegante introducendo la tetra-divergenza

$$\boxed{\nabla_b T^{ab} = 0} \tag{9}$$

Questa relazione, valida $\forall a$, esprime la conservazione della componente a del tetra-impulso del sistema nel caso questo sia isolato.

4 Generalizzazione al caso continuo

Il capitolo è ispirato a [Mor], [Sch09] e rielaborato. Consideriamo ora il nostro gas di particelle non interagenti come una porzione di massa continua contenuta in un dato spazio. Vedremo che questo approccio si può usare per descrivere qualsiasi sistema di materia continuo, dando così vita alla meccanica relativistica dei continui. Più precisamente si può caratterizzare il gas con due campi definiti in uno spazio di Minkowski:

- Un campo vettoriale $\mathcal{M}^4 \ni p \mapsto u(p) \in T_p\mathcal{M}^4$ che è la tetra-velocità del gas visto come sistema continuo, ossia la tetra-velocità propria delle particelle attorno al punto p.
- Un campo scalare $\mathcal{M}^4 \ni p \mapsto \mu_0(p) \in [0, +\infty)$ che è la densità di massa (propria) del sistema nel sistema di riferimento $\mathcal{O}_0$ in quiete con le particelle del gas nel punto p. Si possono infatti considerare le particelle

incluse in un volume attorno al punto p come ferme rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{O}_0$.

Il suddetto campo può essere euristicamente interpretato come:

$$\mu_0 = \frac{\delta m_p}{\delta V_{0,p}}$$

Dove $\delta V_{0,p}$ è il volumetto presente attorno al punto p nello spazio di quiete $\Sigma_p^{\mathcal{O}_0}$ e δm_p è la porzione di massa presente in quel volumetto.

Chiaramente se il gas è circoscritto in un certo volume V, allora $\mu_0 = 0$ nelle regioni al di fuori di tale volume.

4.1 Densità di massa relativistica

Si rende prima di tutto necessario derivare una definizione di densità di massa relativistica valida in qualsiasi sistema di riferimento ci si trovi. Per far questo applichiamo la definizione precedente in un generico riferimento $\mathcal{O}$ e applichiamo la dilatazione dei volumi:

$$\mu_{\mathcal{O}} = \frac{\delta m_p}{\delta V_{\mathcal{O},p}} = \mu_0 \frac{\delta V_{0,p}}{\delta V_{\mathcal{O},p}} = \mu_0 \gamma \tag{10}$$

Nel calcolo abbiamo considerato la massa come invariante relativistica ovviamente. Per sviluppare questa espressione ci serviamo di una definizione alternativa più "geometrica" del fattore γ.

$$\gamma = \frac{1}{c}(\gamma c) = -\frac{1}{c}\boldsymbol{g}(u, \boldsymbol{e}_0) \tag{11}$$

Dove il versore $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ è proprio del riferimento $\mathcal{O}$. Infatti si vede che:

$$\boldsymbol{g}(u, e_0) = u^a (e_0)_a = -\gamma c$$

Dunque la nuova definizione di densità di massa relativistica è:

$$\mu_{\mathcal{O}}(p) = -\frac{\mu_0(p)}{c}\boldsymbol{g}(u, e_0) = \frac{\mu_0(p)}{c}\langle u, e_0 \rangle \tag{12}$$

Dove l'operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è da intendere come prodotto scalare nello spazio standard $\mathcal{R}^4$.

4.2 Conservazione della massa

Il gas da noi considerato è per ipotesi composto da particelle non interagenti e dunque caratterizzate da moto libero. Per questo possiamo assumere che la massa si conservi nel tempo. Se dunque definiamo un insieme $B_t \subset \Sigma_t^{\mathcal{O}}$ che è l'evoluzione temporale di un dato insieme $B_0 \subset \Sigma_0^{\mathcal{O}}$ (contente una certa porzione della distribuzione di massa), otteniamo che:

$$\int_{B_0} \mu^{\mathcal{O}}(0, x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{B_t} \mu^{\mathcal{O}}(ct, x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 dx^3$$

Che alla luce della definizione (12) e definendo i punti $p = (ct, x^1, x^2, x^3)$ e $p_0 = (0, x^1, x^2, x^3)$, si può riscrivere:

$$\int_{B_0} \mu_0(p_0) \langle u(p_0), e_0 \rangle \, dx^1 dx^2 dx^3 + \int_{B_t} \mu_0(p) \langle u(p), -e_0 \rangle \, dx^1 dx^2 dx^3 = 0$$

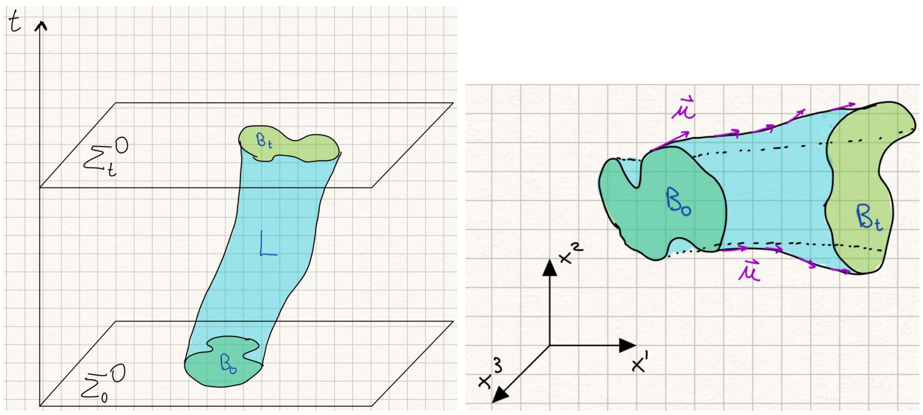

Figura 1: A sinistra evoluzione dell'insieme B_t nello spaziotempo di Minkowski, tubo S. A destra evoluzione dell'insieme nello spazio usuale

Possiamo ora considerare la quantità presente negli integrali precedenti per integrarla anche sul bordo del tubo S, che chiamiamo L, il quale definisce l'evoluzione temporale dell'insieme B_t, come si vede in figura:

$$\int_{L} \mu_0(q) \langle u(q), \nu(q) \rangle \, d\nu = 0 \tag{13}$$

Dove abbiamo definito il generico punto $q \in L$. L'integrale è anch'esso tridimensionale ($d\nu$ denota la misura sulla ipersuperficie L e $\nu(q)$ è un versore uscente da L) ed è nullo perché il campo vettoriale u^a è chiaramente diretto lungo l'evoluzione temporale dell'insieme B_t, identificabile con L e dunque è perpendicolare a ν.

Allora sommando l'ultimo integrale ai precedenti si ottiene un integrale che rappresenta il flusso uscente dal bordo di S:

$$\int_{\partial S} \mu_0(q) \langle u(q), n_S(q) \rangle \, d\nu = 0 \tag{14}$$

Dove il vettore $n_S(q)$ è il versore normale alla ipersuperficie S in ogni suo punto. Dunque il flusso di densità di massa uscente dalla superficie del tubo S è nulla.

Per il teorema della divergenza (ricordandoci di essere nel generico riferimento $\mathcal{O}$):

$$\int_S \nabla_a(\mu_0 u^a)dx^0dx^1dx^2dx^3 = 0$$

Ma per l'arbitrarietà di S possiamo concludere che in tutto lo spazio $\mathcal{M}^4$ vale la seguente uguaglianza:

$$\boxed{\nabla_a \mu_0 u^a = 0} \tag{15}$$

Che chiamiamo **Legge di conservazione della massa in forma locale**. Si può dimostrare inoltre che questa identità non dipende più dal sistema di riferimento scelto.

4.3 Equazione delle geodetiche

Ricaviamo ora un altro importante risultato. Ipotizziamo che il gas che stiamo considerando sia composto da particelle che si muovono di moto inerziale, ossia che soddisfano l'equazione:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = 0$$

In modo tale che il moto di ognuna delle particelle costituenti il corpo continuo è:

$$x^a(\tau) = x^a(0) + u^a\left(x^0(0), x^1(0), x^2(0), x^3(0)\right)\tau$$

Possiamo sviluppare la precedente condizione con l'obiettivo di ottenerne una più generale in termini del campo u, in tal modo possiamo abbandonare la nozione di particella e definire una equazione del moto che valga in ogni punto del corpo continuo:

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} = \frac{du^a}{d\tau} = \frac{dx^b}{d\tau}\frac{du^a}{dx^b} = u^b \nabla_b u^a \tag{16}$$

Notando che nel secondo passaggio ho implicitamente introdotto una somma sull'indice b. Dunque la nuova condizione equivalente alla precedente è:

$$\boxed{u^b \nabla_b u^a = 0} \tag{17}$$

Che è nota come **equazione delle geodetiche** e descrive il moto di particelle libere nello spazio-tempo $\mathcal{M}^4$. Questa equazione è soddisfatta anche nello spazio-tempo della relatività generale.

4.4 Tensore e sua legge di conservazione

Per interpretare i due risultati precedenti in una maniera che scopriremo essere più universale, definiamo il **tensore energia-impulso** come:

$$T = \mu_0 u \otimes u \quad \text{che in componenti è:} \quad T^{ab} = \mu_0 u^a u^b \tag{18}$$

Sulla base di questa definizione possiamo riscrivere le leggi (15) e (17) in maniera più compatta:

$$\boxed{\nabla_a T^{ab} = 0} \tag{19}$$

Questa è chiamata **conservazione del tetra-impulso** per ragioni che scopriremo nella prossima sezione. Questa equazione contiene dunque la legge di conservazione della massa e l'inerzialità del moto del sistema. Per giustificarla basta sviluppare la tetra-divergenza:

$$\nabla_a T^{ab} = \nabla_a(\mu_0 u^a u^b) = (\nabla_a \mu_0 u^a) u^b + \mu_0 u^a \nabla_a u^b = 0 + 0$$

4.5 Densità di tetra-momento

Definiamo ora un'altra densità che deve essere genericamente valida per ogni sistema di riferimento. Pensando alla meccanica classica è possibile definire la densità di quadri-momento nel seguente modo:

$$P^{\mathcal{O}} = \mu^{\mathcal{O}} u = \mu_0 \gamma u \tag{20}$$

Questa definizione può essere espressa utilizzando il tensore energia-impulso, ma prima c'è bisogno di definire la sua azione su un campo vettoriale:

Sia un campo vettoriale covariante $\omega : \mathcal{M}^4 \ni p \mapsto \omega(p) \in T^*_p\mathcal{M}^4$. Allora $T(\omega)$ è un vettore contravariante espresso tramite la seguente contrazione:

$$T(\omega)^j = \omega_k T^{kj} \tag{21}$$

Applichiamo ora il tensore al quadrivettore $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ e otteniamo:

$$T(e_0)^j = T^{0j} = \mu_0 u^0 u^j = c\gamma P^j \tag{22}$$

Ho dunque ottenuto le componenti della densità di tetraimpulso effettuando una contrazione sul tensore.

Posso inoltre definire il momento totale del sistema (ossia proprio di tutto lo spazio di quiete) in componenti, ad un tempo t come:

$$\mathcal{P}^a_{\mathcal{O}}(t) = \frac{1}{\gamma c} \int_{\Sigma^{\mathcal{O}}_t} T(\boldsymbol{e}_0) dx^1 dx^2 dx^3 \tag{23}$$

4.6 Conservazione del tetra-impulso

Usando questa definizione è possibile dimostrare, a partire dalla legge (19), che il momento totale si conserva:

$$\boxed{\mathcal{P}^a_{\mathcal{O}}(t) = \mathcal{P}^a_{\mathcal{O}}(0) \quad \forall t} \tag{24}$$

Per provare l'asserto consideriamo un tubo $S \in \mathcal{M}^4$, analogo a quello definito precedentemente, ma prendendo come insieme B_0 l'insieme che contiene tutta la distribuzione di massa e integriamo in esso l'identità $\nabla_a T^{ab} = 0$:

$$0 = \int_S \nabla_a T^{ab} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{\partial S} T(e_0) d\nu$$

Dove abbiamo usato il teorema della divergenza per la tetra-divergenza. Ora è possibile eliminare l'integrale sul bordo laterale di S, in quanto la densità di massa si annulla in maniera liscia lungo i bordi. Dunque otteniamo:

$$0 = \int_{B_t^{\mathcal{O}}} T(e_0) dx^1 dx^2 dx^3 - \int_{B_0^{\mathcal{O}}} T(e_0) dx^1 dx^2 dx^3$$

Allora otteniamo che, in un generico sistema di riferimento $\mathcal{O}$ vale la legge:

$$P^a_{\mathcal{O}}(t) = \frac{1}{\gamma c} \int_{B_t^{\mathcal{O}}} T(e_0) dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{\gamma c} \int_{B_0^{\mathcal{O}}} T(e_0) dx^1 dx^2 dx^3 = P^a_{\mathcal{O}}(0) \qquad (25)$$

Questo è un ulteriore (il terzo) risultato classico ottenuto con la sola informazione della legge di conservazione del tensore energia-impulso.

4.7 Caso di moto non inerziale

Nel caso in cui il moto delle particelle non è inerziale, non è più valida la legge (19), ma è possibile derivare una legge più generale riguardante la divergenza del tensore energia-impulso che genererà le equazioni del moto del sistema. La legge in questione è:

$$\boxed{\nabla_a T^{ab} = f^b} \qquad (26)$$

Dove f^b è il quadrivettore *densità di forza*. Sviluppiamo ora la legge e otteniamo due addendi:

$$f^b = \nabla_a T^{ab} = \nabla_a (\mu_0 u^a u^b) = (\nabla_a \mu_0 u^a) u^b + \mu_0 u^a \nabla_a u^b \qquad (27)$$

Dimostriamo ora che il primo termine, che associavamo alla conservazione della massa, è ancora nullo. Per farlo però è necessario aggiungere l'ipotesi che $u_b f^b = 0$. E sviluppandola:

$$0 = u_b f^b = u_b \nabla_a T^{ab} = u_b (\nabla_a u^b) \mu_0 u^a + u^b u_b \nabla_a (\mu_0 u^a)$$

dove

$$u_b (\nabla_a u^b) = \frac{1}{2} \nabla_a (u^b u_b) = -\frac{1}{2} \nabla_a c^2 = 0$$

Allora:

$$0 = u^b u_b \nabla_a (\mu_0 u^a) = -c^2 \nabla_a (\mu_0 u^a)$$

Che è la legge (15), dunque la massa è ancora conservata. L'equazione (27) si riduce ad essere:

$$f^b = \mu_0 u^a \nabla_a u^b$$

Che può essere riscritta come:

$$f^b = \mu_0 \frac{dx^a}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^a} \left(\frac{dx^a}{d\tau} \right) = \mu_0 \frac{d^2 x^a}{d\tau^2}$$

Che se integrata nello spazio di quiete fornisce l'equazione del moto del sistema.

5 Tensore energia-impulso: caso generale

Il capitolo è preso da [Mor] e da [TMW00]. Gli esempi illustrati nelle sezioni precedenti ci suggeriscono l'idea che l'informazione riguardante energia e momento di un sistema continuo isolato possa essere codificata nel **tensore energia-impulso**, un tensore di rango 2 che soddisfa l'equazione 19

$$\boxed{\nabla_a T^{ab} = 0}$$

nello spazio-tempo di Minkowski $\mathcal{M}^4$. Mostriamo ora che l'esistenza di questo tensore può essere assunta come la generalizzazione delle leggi della meccanica classica dei continui e del tensore degli sforzi. Per fare ciò richiamiamo alcune equazioni fondamentali della meccanica dei continui classica e mostriamo come l'equazione 19 porti ad esse nel limite non relativistico in cui le velocità in gioco sono molto minori della velocità della luce. Supponiamo di lavorare in un sistema di riferimento inerziale con coordinate cartesiane x^1, x^2, x^3 e tempo assoluto t. Sia μ la densità volumetrica di massa, v^α la componente α del campo di velocità del mezzo continuo, σ il tensore degli sforzi di Cauchy e f^α la componente α della densità di forza delle forze esterne al sistema. Allora valgano le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \mu v^\beta = 0 \tag{28}$$

$$\mu \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} v^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} v^\alpha \right) = \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \sigma^{\alpha\beta} + f^\alpha \tag{29}$$

dove la prima esprime la conservazione della massa, mentre la seconda è la II legge di Newton dove le forze interne al sistema vengono descritte dal tensore degli sforzi di Cauchy σ mentre le forze esterne dalla densità di forza $\vec{f}$. Riscriviamo l'equazione 29 ricordando che $\mu \frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} v^\alpha - v^\alpha \frac{\partial \mu}{\partial t}$ e usando l'equazione 28; otteniamo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} v^\alpha + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\mu v^\alpha v^\beta - \sigma^{\alpha\beta} \right) = f^\alpha, \alpha = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Assumiamo ora che esista un sistema relativistico che ammette un tensore energia impulso che soddisfi l'equazione 26 in presenza di forze esterne

$$\boxed{\nabla_b T^{ab} = f^a}$$

dove f è la densità di tetra-forza esterna agente sul sistema. Interpretiamo le componenti T^{00} come la densità di energia e $\frac{1}{c}T^{0\beta}$ come le densità di momento, come visto negli esempi precedenti. Scriviamo ora in componenti questa equazione, supponendo di lavorare in un sistema di riferimento inerziale dotato di coordinate minkowskiane (ct, x^1, x^2, x^3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}T^{00} + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{c}T^{\beta 0} = \frac{1}{c}f^0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c}T^{0\alpha} + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{c}T^{\alpha\beta} = f^\alpha, \alpha = 1, 2, 3 \tag{32}$$

Nel limite classico di basse velocità valgono le seguenti approssimazioni:

$$\frac{T^{00}}{c^2} = \frac{\gamma\mu c^2}{c^2} \cong \mu$$

$$\frac{T^{0\alpha}}{c} = \frac{\gamma\mu c v^\alpha}{c} \cong \mu v^\alpha$$

$$\frac{f^0}{c} = \gamma\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c^2} \ll 1$$

e le equazione 31 e 32 si riducono alle equazione 28 e 30 a patto di identificare il tensore energia impulso nel modo seguente:

$$T^{\alpha\beta} = \mu v^\alpha v^\beta - \sigma^{\alpha\beta}$$

Notiamo ora che se ci poniamo nel sistema di riferimento in cui il mezzo continuo è fermo, il tensore energia-impulso coincide, a meno di un segno, con il tensore degli sforzi di Cauchy per quanto riguarda le componenti spaziali. Essendo quest'ultimo simmetrico ci aspettiamo che anche il tensore energia-impulso lo sia, Ritroviamo inoltre, nel caso di un gas di particelle non interagenti in cui $\sigma^{\alpha\beta} = 0$, la definizione del tensore data nell'esempio introduttivo.

5.1 Interpretazione fisica

Alla luce di quanto appena visto ci aspettiamo che il tensore energia-impulso dia informazioni, oltre che riguardo l'energia e il momento, anche sulle forze interne ad un sistema agendo da generalizzazione del tensore degli sforzi di Cauchy. Riassumiamo quindi il significato fisico, componente per componente, del tensore che abbiamo introdotto. Supponiamo di essere in un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{O}$, allora:

- T^{00} è la densità volumetrica di energia nel SdR $\mathcal{O}$;
- $cT^{\alpha 0}$ è la componente α del flusso interno di energia del sistema nel SdR $\mathcal{O}$;
- $\frac{1}{c}T^{0\beta}$ è la densità volumetrica di momento del sistema nella direzione dell'asse β nel SdR $\mathcal{O}$;
- $T^{\alpha\beta}$ è la componente α del flusso del momento nella direzione β nel SdR $\mathcal{O}$; questa dipenderà in generale anche dalle forze interne al sistema.

Data questa interpretazione delle componenti del tensore possiamo dare un'interpretazione fisica alla legge di conservazione 19

$$\boxed{\nabla_a T^{ab} = 0}$$

in forma integrale. Consideriamo un volume S solidale con un SdR inerziale $\mathcal{O}$ dotato di coordinate minkowskiane $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$. Integriamo nelle coordinate spaziali 19 sul volume S considerato e otteniamo

$$\int_S \frac{\partial}{\partial x^0} T^{0a} dx^1 dx^2 dx^3 = -\sum_{\alpha=1}^{3} \int_S \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\alpha a} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{33}$$

Portiamo ora fuori dall'integrale la derivata temporale nella parte sinistra, mentre usiamo il teorema della divergenza a destra:

$$\frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{c} T^{0a} dx^1 dx^2 dx^3 = -\sum_{\alpha=1}^{3} \int_{\partial S} T^{\alpha a} n_\alpha dx^1 dx^2 dx^3 \tag{34}$$

dove n_α è la componente α del vettore uscente normale al bordo δS del volume considerato. Risulta ora evidente come che la variazione nell'unità di tempo della grandezza fisica considerata (energia o momento a secondo del fattore c o $\frac{1}{c}$ davanti) sia pari al flusso della stessa quantità che passa attraverso il bordo del volume ∂S. La stessa interpretazione è valida nel caso della presenza di forze esterne, queste agiscono come sorgenti esterne al sistema di energia e momento.

5.2 Tensore energia-impulso di due sistemi

Supponiamo di avere a che fare con 2 sistemi continui, ognuno dei quali ammette un tensore energia-impulso T, T'. Il tensore energia-impulso totale sarà dato dalla somma dei due tensori più un eventuale termine di accoppiamento tra i due sistemi

$$T_{tot} = T + T' + T_{int}$$

Se il sistema complessivo è isolato T_{tot} obbedirà all'equazione di conservazione locale 19 mentre T, T', T_{int} separatamente no. Da ciò si può esprime la forza che agisce sul primo e sul secondo sistema

$$f^b = -\nabla_a (T'^{ab} + T^{ab}_{int})$$

$$f'^b = -\nabla_a(T^{ab} + T^{ab}_{int})$$

e in generale $f^b \neq f'^b$.

6 Applicazione all'elettrodinamica

Il capitolo è ispirato a [Rin91], [Mor] e rielaborato. In questa sezione applichiamo le definizioni e le leggi di conservazione del tensore energia-impulso in elettrodinamica e mostriamo che si ritrovano subito alcuni risultati noti. Supponiamo di lavorare in un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{O}$ in cui sono presenti un campo elettrico $\vec{E}$ e un campo magnetico $\vec{B}$. Definiamo il tensore energia-impulso utilizzando il significato fisico delle componenti illustrato nella sezione precedente. Per quanto riguarda la componente T^{00} ci ricordiamo che la densità di energia in elettrodinamica (u) è pari a:

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) =: T^{00} \tag{35}$$

Per quanto riguarda la definizione delle componenti $T^{0\alpha} = T^{\alpha 0}$ ricorriamo alla definizione del vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$, dove qui μ_0 indica la permeabilità magnetica del vuoto. Il vettore di Poynting rappresenta la densità di momento del campo elettromagnetico a meno di un fattore $\frac{1}{c^2}$. Alla luce di ciò definiamo

$$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0} = \frac{1}{c}S^\alpha \tag{36}$$

Infine, per quanto riguarda le componenti $T^{\alpha\beta}$ notiamo che il tensore degli sforzi di Maxwell $\sigma^{\alpha\beta}$ rappresenta la componente α della forza di Lorentz per unità di area agente sulla superficie con vettore normale nella direzione β. Identifichiamo dunque con questo tensore le ultime componenti, a meno di un segno:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \epsilon_0 E^\alpha E^\beta + \frac{1}{\mu_0}B^\alpha B^\beta - \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\delta^{\alpha\beta}$$

$$T^{\alpha\beta} = -\sigma^{\alpha\beta} \tag{37}$$

Riassumiamo queste definizione in forma matriciale:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) & \frac{1}{c}S^1 & \frac{1}{c}S^2 & \frac{1}{c}S^3 \\ \frac{1}{c}S^1 & -\sigma^{11} & -\sigma^{12} & -\sigma^{13} \\ \frac{1}{c}S^2 & -\sigma^{21} & -\sigma^{22} & -\sigma^{23} \\ \frac{1}{c}S^3 & -\sigma^{31} & -\sigma^{32} & -\sigma^{33} \end{bmatrix} \tag{38}$$

6.1 Leggi di conservazione

Mostriamo ora che, dalla definizione data del tensore energia-impulso e dalle leggi di conservazione 19 e 26 si ottengono le leggi di conservazione classiche dell'elettrodinamica. Scriviamo, nel caso in cui i campi si propaghino nel vuoto (nello spazio in assenza di cariche), la seguente equazione:

$$\nabla_b T^{0b} = 0$$

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

dove indichiamo con $\vec{\nabla}\cdot$ la divergenza in tre dimensioni. Questa equazione esprime la conservazione dell'energia nel vuoto, per vederlo richiamiamo la densità di energia del campo elettromagnetico $u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$, ottenendo

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0} \tag{39}$$

Che ha la forma di una legge di conservazione puntuale. Per comprenderne meglio il significato portiamo il membro della divergenza del vettore di Poynting a sinistra e integriamo entrambe le parti su un volume generico V.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V u dV = -\int_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}} \tag{40}$$

Dove a sinistra abbiamo portato la derivata fuori dall'integrale mentre a destra abbiamo usato il teorema della divergenza e abbiamo chiamato Σ la superficie che racchiude il volume V. Tale equazione esprime la conservazione dell'energia, nel senso in cui la variazione di energia presente in un certo volume V nel tempo è pari al flusso di energia entrante dalla superficie che racchiude tale volume. Questo è il **teorema di Poynting** nel caso di assenza di cariche.

Prendiamo ora la stessa equazione di continuità e sviluppiamola per le componenti spaziali.

$$\nabla_b T^{\mu b} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial S^\mu}{\partial t} - \frac{\sigma^{\mu 1}}{\partial x^1} - \frac{\sigma^{\mu 2}}{\partial x^2} - \frac{\sigma^{\mu 3}}{\partial x^3} = 0$$

Per comprendere il significato fisico di tale equazione integriamo come prima su un volume V e usiamo il teorema della divergenza sul vettore tridimensionale $\vec{\sigma}^\mu = (\sigma^{\mu 1}, \sigma^{\mu 2}, \sigma^{\mu 3})$ e otteniamo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathcal{P}^\mu = \int_\Sigma \vec{\sigma}^\mu \cdot d\vec{\Sigma}} \tag{41}$$

Dove con $\mathcal{P}^\mu$ indichiamo la componente μ del momento totale proprio del campo elettromagnetico contenuto nel volume V preso come dominio di integrazione. L'equazione quindi ci dice che la pressione esercitata sulla superficie μ-esima (o meglio, la superficie il cui versore normale ha direzione x^μ) provoca un aumento della componente μ del momento nel volume che ha per bordo la superficie stessa.

Vediamo ora cosa accade nel caso in cui siano presenti delle cariche su cui agisce la forza di Lorentz. In questo caso la legge di conservazione valida (che dimostreremo nella prossima sezione) è la 26

$$\boxed{\nabla_b T^{ab} = f^a}$$

dove f^a è la densità di tetra-forza di Lorentz. Scegliendo $a = 0$ e sviluppando l'espressione si ottiene

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = \gamma\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c}$$

e integrando su un volume V come fatto precedentemente si ottiene

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V u dV - \int_V \gamma\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c} dV = -\int_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{\Sigma}} \tag{42}$$

dove il termine aggiuntivo rispetto al caso precedente è la variazione di energia relativistica dovuta al lavoro fatto sulle cariche. Questo è il teorema di Poynting nel caso generale.

Selezionando invece le componenti spaziali otteniamo

$$\nabla_b T^{\alpha b} = f^\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}S^\alpha + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sigma^{\alpha\beta} = \gamma\frac{d}{dt}P^\alpha_{mecc}$$

Ossia, integrando sul solito volume V e applicando il teorema della divergenza:

$$\boxed{\gamma\frac{d}{dt}\mathcal{P}^\alpha_{mecc} + \frac{d}{dt}\mathcal{P}^\alpha = \int_\Sigma \vec{\sigma}^\alpha\cdot d\vec{\Sigma}} \tag{43}$$

Abbiamo ora distinto il momento totale associato ai campi e quello meccanico esercitato sulle cariche. Questa equazione è assimilabile ad un teorema di Poynting ma per la componente α del momento invece che per l'energia. Esprime quindi che la variazione del momento totale in un volume V è pari al flusso del tensore degli sforzi di Maxwell attraverso la superficie che lo contiene.

6.2 Tensore energia impulso e tensore di Faraday

Ora vogliamo giustificare ulteriormente la forma del tensore nel caso di campi elettromagnetici. Cominciamo dimostrando una relazione che definisce la densità di tetra-forza.

Sia una regione di spazio in cui è presente un campo elettromagnetico (rappresentato dal tensore di Faraday F^{ab}) e una distribuzione continua di carica caratterizzata dalla tetra-corrente $J^a = (c\rho, \vec{j})$, dove ρ è la densità di carica elettrica e $\vec{j}$ è la densità di corrente tridimensionale. Sia il tensore di Faraday definito in tal modo:

$$F_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^1 & \frac{1}{c}E^2 & \frac{1}{c}E^3 \\ -\frac{1}{c}E^1 & 0 & -B^3 & B2 \\ -\frac{1}{c}E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{1}{c}E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Allora vale la seguente relazione per la forza che agisce su un volume unitario *proprio* (ossia un volume unitario solidale con il punto in cui si calcolano forza e carica).

$$\boxed{f_a = F_{ab}J^b} \tag{45}$$

La dimostriamo per la componente 0 e la prima componente spaziale, le altre due sono analoghe. Si ha che la componente zero della densità di tetraforza è:

$$f_0 = \cancel{\gamma}\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c} = \frac{1}{c}[\rho\vec{E}\cdot\vec{v} + \cancel{(\vec{j}\times\vec{B})\cdot\vec{v}}] = \frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{1}{c}(E_1j_1 + E_2j_2 + E_3j_3) = F_{0b}J^b$$

Dove abbiamo utilizzato la densità di forza di Lorentz (tridimensionale) $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$ e inoltre il secondo termine è nullo perchè la densità di corrente è diretta come la velocità ($\vec{j} = \rho\vec{v}$).

Sviluppando invece la prima componente della densità di forza di Lorentz:

$$f_1 = \rho E_1 + j_2B_3 - j_3B_2 = \frac{1}{c}(E_1c\rho) + B_2j_3 - B_3j_2 = F_{1b}J^b$$

Ora vogliamo esprimere il secondo termine della (45) in funzione del campo elettromagnetico. Per farlo richiamiamo prima due note proprietà del tensore di Faraday (la prima è la rappresentazione covariante di due delle equazioni di Maxwell):

$$\frac{\partial F^{ab}}{\partial x_b} = \mu_0 J^a \quad , \quad \frac{\partial F^{ab}}{\partial x_c} + \frac{\partial F^{bc}}{\partial x_a} + \frac{\partial F^{ca}}{\partial x_b} = 0 \tag{46}$$

Ora cominciamo a sviluppare il termine in questione:

$$F_{ab}J^b = \frac{1}{\mu_0}F_{ab}\frac{\partial F^{cb}}{\partial x_c} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_c}(F_{ab}F^{cb}) - \frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c}F^{cb}\right]$$

Dove si è utilizzata la prima delle (46) e poi la derivata del prodotto. Sviluppiamo ora l'ultimo termine dell'espressione (utilizzando l'antisimmetria del tensore di Faraday):

$$\frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c}F^{cb} = \frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c}\frac{1}{2}(F^{cb} - F^{bc}) = \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c}F^{cb} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c}F^{bc}$$

Ora nulla ci vieta di cambiare nomi agli indici del secondo addendo: $c \to b$ e $b \to c$:

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c}F^{cb} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ac}}{\partial x_b}F^{cb} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c} - \frac{\partial F_{ac}}{\partial x_b}\right)F^{cb} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_{ab}}{\partial x_c} + \frac{\partial F_{ca}}{\partial x_b}\right)F^{cb}$$

E ora utilizziamo la seconda delle (46) per ottenere:

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial F_{bc}}{\partial x_a}F^{cb} = \frac{1}{2}\frac{\partial F_{bc}}{\partial x_a}F^{bc} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_a}\left(F_{ac}F^{ac}\right)$$

Possiamo ora finire di sviluppare il termine originale, che ora è scrivibile nella forma:

$$F_{ab}J^b = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x_c}(F_{ab}F^{cb}) - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\left(F_{ac}F^{ac}\right)\right]$$

Se nel primo termine rinominiamo l'indice: $c \to b$ e nel secondo termine sviluppiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_a} = \delta^b_a \frac{\partial}{\partial x_b}$$

Allora finalmente otteniamo che:

$$F_{ab}J^b = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x_b}\left[F_{ab}F^{cb} - \frac{1}{4}\delta^b_a(F_{dc}F^{dc})\right] \tag{47}$$

Introduciamo ora un tensore le cui componenti sono:

$$T^b_a = -\frac{1}{\mu_0}[F_{ab}F^{cb} - \frac{1}{4}\delta^b_a(F_{dc}F^{dc})] \tag{48}$$

Così che l'equazione (47) diventa:

$$\boxed{\nabla_b T^b_a = F_{ab}J^b = f_a} \tag{49}$$

Che possiamo riportare nella forma a noi più familiare:

$$\boxed{f^a = F^{ab}J_b = \nabla_b T^{ab}} \tag{50}$$

E dunque ritroviamo la stessa forma della legge definita in modo generale per una distribuzione continua di massa: la 26.

7 Conclusioni

In conclusione abbiamo compreso che, dopo aver definito il tensore energia-impulso, possiamo racchiudere tutte le leggi di conservazione o le equazioni del moto che caratterizzano il sistema nelle due leggi:

$$\nabla_b T^{ab} = 0 \qquad \nabla_b T^{ab} = f^a$$

Che contengono quindi tutte le informazioni a nostra disposizione sul sistema in esame.

Abbiamo anche compreso l'universalità di questo metodo, in quanto la formulazione di una teoria in termini di leggi di conservazione del tensore si applica non solo ai sistemi continui classici, ma anche ai campi elettromagnetici. Siamo quindi anche riusciti a racchiudere la maggior parte delle leggi di elettrodinamica nelle stesse due leggi.

Riferimenti bibliografici

[FGP20] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri e Paolo Pani. *General Relativity and Its Applications: Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves*. CRC Press, 2020. Cap. 5.

[Mor] Valter Moretti. *Geometric Methods in Mathematical Physics I: Multi-Linear Algebra, Tensors, Spinors and Special Relativity*. Cap. 8.

[Rin91] Wolfgang Rindler. *Introduction to special relativity*. 1991.

[Sch09] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009. Cap. 4.

[TMW00] Kip S Thorne, Charles W Misner e John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Freeman, 2000.