

# Relazione PAF I anno

## Sistemi binari e Sistemi a N corpi

Marco Zenari

September 18, 2020

### Abstract

In questa relazione ripercorro brevemente l'evoluzione dello studio dei sistemi binari, dalla meccanica di Newton alla Relatività Generale di Einstein, concentrandomi in particolare sulle equazioni che determinano come varia nel tempo l'orbita della binaria. Utilizzando un codice fortran per l'integrazione numerica confronto due casi studiati entrambi in relatività generale, il sistema Terra-Sole e la binaria di Hulse-Taylor. Nel primo caso si scopre che per osservare differenze significative tra predizione classica e predizione in relatività generale bisogna aspettare un intervallo di tempo molto lungo, mentre nel secondo caso l'effetto delle onde gravitazionali non è trascurabile.

Nella seconda parte dell'elaborato studio il Sistema Solare Interno, visto come un sistema di N corpi in meccanica classica. Mi concentro in particolare sulla posizione relativa di Terra e Marte, provando ad individuare tra quanto si presenterà una nuova finestra di lancio per missioni spaziali tra i due pianeti, ottenendo come previsione Ottobre 2022.

# 1 Sistemi binari: da Newton ad Einstein

Un sistema binario è un sistema di due corpi (che possono essere stelle ma anche pianeti, buchi neri o galassie) legati dalla reciproca attrazione gravitazionale che orbitano attorno ad un centro di massa comune. Una buona descrizione (che oggi sappiamo essere una approssimazione di una teoria più generale) è stata data già a partire dalla fine del XVII secolo con lo sviluppo della Meccanica Newtoniana. Sir Isaac Newton pubblicò infatti nel 1687 l'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, nella quale viene enunciata la legge di gravitazione universale, ottenuta a partire dai principi della meccanica classica e dalle leggi empiriche di Keplero. Secondo tale legge la forza che descrive l'interazione gravitazionale tra due masse può essere espressa nel seguente modo:

$$\vec{F}_{1,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^3} \vec{r}_{1,2} \quad (1)$$

dove  $\vec{F}_{1,2}$  è la forza che agisce sul corpo 1 a causa del corpo 2 e  $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  è la posizione relativa tra i due corpi e il segno meno è dato dalla natura attrattiva della forza. Se si vuole studiare un sistema a due corpi in meccanica newtoniana è possibile ottenere una soluzione esatta del problema. Si possono infatti scrivere le equazione del moto conoscendo la forza data dalla (1) e si ottiene quindi un sistema di due equazioni differenziali accoppiate, che può essere facilmente risolto introducendo il nuovo sistema di coordinate

$$\begin{cases} \vec{R} &= \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases} \quad (2)$$

e passando ai parametri massa totale  $M = m_1 + m_2$  e massa ridotta  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Con tali accorgimenti il sistema iniziale diventa

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &= 0 \\ \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -G \frac{\mu M}{r^3} \vec{r} \end{cases} \quad (3)$$

Il problema è stato quindi ridotto alla soluzione di una equazione differenziale del moto per una massa fittizia  $\mu$ .

La legge di gravitazione universale ha anche delle importanti conseguenze. Sappiamo infatti grazie ad essa che il campo di gravitazione è conservativo, ossia è possibile determinare un potenziale che dipende solo dalla distanza  $r$  tra le due masse. Inoltre come esplicitato dalla (1) la forza gravitazionale è una forza centrale e pertanto il sistema binario conserva il proprio momento angolare (essendo la somma dei momenti delle forze nullo). A partire dalla conservazione dell'energia e dalla conservazione del momento angolare è possibile dimostrare le leggi di Keplero, che sono state storicamente dedotte per mezzo di osservazioni sperimentali. In particolare il fatto che le orbite dei pianeti intorno al sole siano ellittiche (I legge di Keplero) può essere dimostrato a partire dalla conservazione dell'energia, la seconda (velocità areolare costante) è diretta conseguenza della conservazione del momento angolare mentre la terza ( $T^2 \propto a^3$ ) si può ottenere ancora dalla conservazione dell'energia sfruttando il concetto di similitudine meccanica.

La teoria della Gravitazione universale di Newton risulta tuttavia essere solo una buona approssimazione (per basse velocità) di una teoria più generale, ossia la Teoria della Relatività Generale (GR) sviluppata da Albert Einstein e pubblicata per la prima volta nel 1915. La rivoluzione concettuale di questa teoria sta nel fatto che essa non interpreta più l'interazione gravitazionale come un'interazione a distanza tra corpi massivi, ma come una legge fisica che lega la curvatura dello spazio-tempo alla distribuzione di massa in esso.

Uno dei problemi su cui ci si interrogava e che spinse il fisico tedesco alla elaborazione di tale teoria era spiegare cosa succederebbe se, date due masse che interagiscono gravitazionalmente, ne venisse rimossa una. L'altra smetterebbe di subirne l'influenza gravitazionale immediatamente? Quest'ultima ipotesi è in contraddizione con la teoria della relatività ristretta, elaborata sempre da Einstein e pubblicata nel 1905 secondo cui la velocità della luce è finita, e nulla può oltrepassarla.

Un altro risultato importante della GR è la predizione delle onde gravitazionali (GW), ossia perturbazioni dello spazio tempo che si propagano con carattere ondulatorio. Fronti d'onda di particolare intensità si possono verificare quando masse molto grandi si muovono molto velocemente, cambiando la distribuzione di massa nello spaziotempo in modo repentino. La rilevazione sperimentale di tali onde è tuttavia molto complessa e il primo evento significativo è stato registrato nel settembre del 2015 dalla collaborazione *LIGO* / *VIRGO*, che ha registrato le onde gravitazionali causate dalla collisione di due buchi neri.

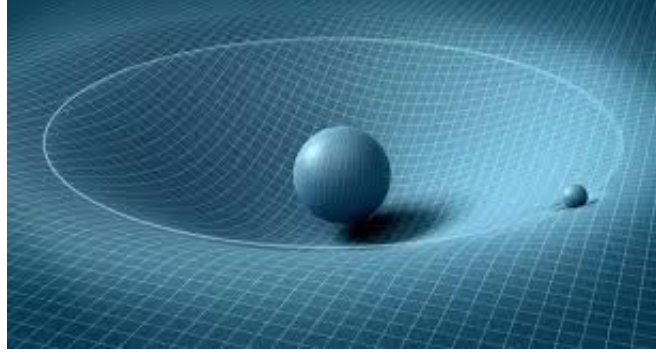


Figura 1: Un corpo in orbita intorno ad un altro, come ad esempio la Terra intorno al Sole, si muove lungo la *geodetica* in uno spazio tempo alterato dalla presenza di massa.

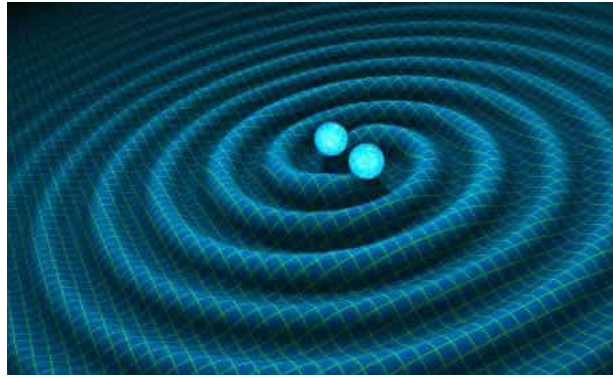


Figura 2: Un sistema binario costituito da due corpi massivi che si muovono velocemente emette delle perturbazioni dello spaziotempo denominate *Onde gravitazionali*.

Le onde gravitazionali trasportano energia e momento (sia lineare che angolare) che vengono sottratti alla binaria, per la quale non valgono più quindi la conservazione dell'energia e del momento angolare. Nel 1953 si riuscì a calcolare che la potenza delle onde gravitazionali causate da una binaria di massa totale  $M$ , massa ridotta  $\mu$ , semiasse maggiore  $a$  ed eccentricità  $e$  è data da:

$$\begin{cases} P_{GW} = \frac{32G^4\mu^2M^3}{5c^5a^5} f(e) \\ f(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \end{cases} \quad (4)$$

e la variazione di momento angolare trasportata è data da

$$\begin{cases} \frac{dL_{GW}}{dt} = -\frac{32G^{7/2}\mu^2M^{5/2}}{5c^5a^{7/2}} g(e) \\ g(e) = \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{8}e^2\right) \end{cases} \quad (5)$$

Volendo studiare l'evoluzione di un sistema binario si avrà quindi, per i principi di conservazione, che

$$\begin{cases} \frac{dE_{BIN}}{dt} = -P_{GW} \\ \frac{dL_{BIN}}{dt} = -\frac{dL_{GW}}{dt} \end{cases} \quad (6)$$

In particolare vogliamo studiare come  $a$  ed  $e$  variano nel tempo. A partire dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{da}{dE} \frac{dE}{dt} \\ \frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial e}{\partial L} \frac{dL}{dt} \end{cases} \quad (7)$$

si possono ricavare le espressioni per la variazione del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita di una binaria:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3\mu M^2}{c^5a^3} f(e) \\ \frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3\mu M^2}{c^5a^4} \tilde{g}(e) \end{cases} \quad (8)$$

dove  $f(e)$  è la stessa della (4) mentre

$$\tilde{g}(e) = \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left( 1 + \frac{121}{304} e^2 \right)$$

Si osserva che  $\frac{da}{dt} < 0$  e  $\frac{de}{dt} < 0$ , ossia il sistema binario tende con il trascorrere del tempo ad un'orbita più stretta e di eccentricità minore (più circolare).

Per avere una conferma della GR si vuole osservare se l'evoluzione di un sistema binario segue in effetti le deduzioni che da essa si ottengono. Per far sì che le variazioni delle grandezze sudiate siano sufficientemente grandi si cerca un sistema con corpi massivi e distanze relative piccole. Si possono osservare sistemi di stelle di neutroni oppure binarie di buchi neri. Rimane tuttavia il problema che misurare in maniera soddisfacente la variazione del semiasse maggiore  $a$  dell'orbita potrebbe essere molto complicato, mentre sarebbe più semplice misurare il periodo  $T$ . Per questo motivo è utile tenere in considerazione la seguente equazione

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^5} \left( \frac{T}{2\pi} \right)^{-8/3} f(e) \quad (9)$$

che descrive la variazione relativa del periodo. Negli anni settanta venne scoperta e studiata una binaria di stelle di neutroni, denominata *Binaria di Hulse-Taylor*. Le osservazioni sperimentali, e in particolare la variazione del periodo nel tempo, sono risultate essere compatibili con le deduzioni teoriche, dando una prima conferma della teoria sulle onde gravitazionali.

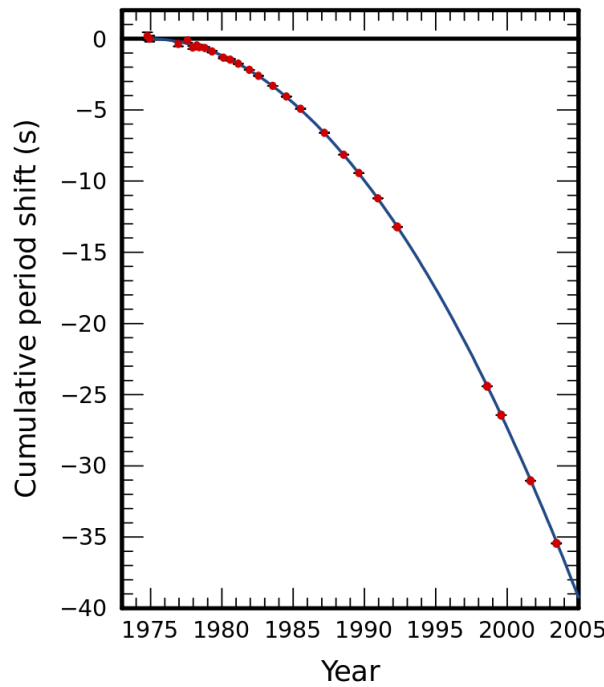


Figura 3: Confronto tra dati teorici (funzione in blu) e osservazioni (punti in rosso) per la binaria di Hulse-Taylor

Le equazioni dedotte a partire dalla Relatività Generale riportate qui in maniera sintetica, non ammettono soluzione analitica esatta. Bisogna pertanto ricorrere a metodi di integrazione numerici implementabili con l'utilizzo di un calcolatore.

## 2 Evoluzione del sistema Terra-Sole

In questa sezione voglio studiare l'evoluzione del sistema Terra-Sole in relatività generale. Viste le masse relativamente piccole in gioco rispetto alla distanza relativa mi aspetto che, almeno per periodi di tempo ragionevolmente brevi, i parametri  $a$  e  $e$  dell'orbita diminuiscano in maniera quasi impercettibile. Ipotizzando inoltre che i due corpi non vengano influenzati da altri eventi voglio ottenere una stima di quanto tempo impiegherebbe la Terra a *cadere* sul Sole come conseguenza della emissione di onde gravitazionali. In generale mi aspetto che si tratti di un intervallo di tempo molto lungo, in quanto sappiamo che la potenza delle onde gravitazionali, e quindi l'energia meccanica dissipata dal sistema che stiamo considerando, dipende dalle masse in gioco, dalla distanza tra le due masse e da una funzione dell'eccentricità dell'orbita secondo la (6).

Per la simulazione utilizzo il codice fortran *integrate\_binary\_GR* che, date certe condizioni iniziali, integra con metodi numerici le equazioni differenziali della variazione del semiasse maggiore e dell'eccentricità presentate nel paragrafo precedente (8).

Considero quindi le seguenti condizioni all'istante iniziale:

- massa del Sole =  $1 M_s$ ;
- massa della Terra =  $3.003 \cdot 10^{-6} M_s$ ;
- distanza =  $1 AU$ ;
- eccentricità dell'orbita =  $1.67 \cdot 10^{-2}$ .

Poiché la somma del raggio terrestre e di quello solare è circa  $4.7 \cdot 10^{-3} AU$  impongo come condizione di termine della simulazione tale distanza tra le due masse. Tale condizione viene raggiunta dopo un tempo molto lungo, ossia  $3.3 \cdot 10^{24}$  anni.

Riporto in grafico i risultati ottenuti, la variazione del semiasse maggiore (figura 4) e la variazione dell'eccentricità (figura 5) in funzione del tempo.

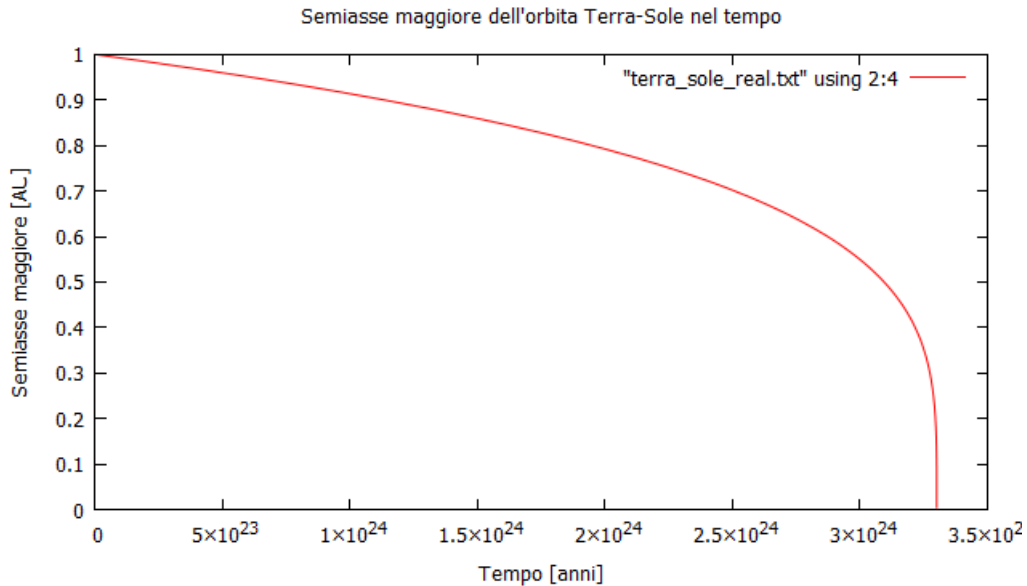


Figura 4: Variazione in funzione del tempo del semiasse maggiore del sistema Terra-Sole

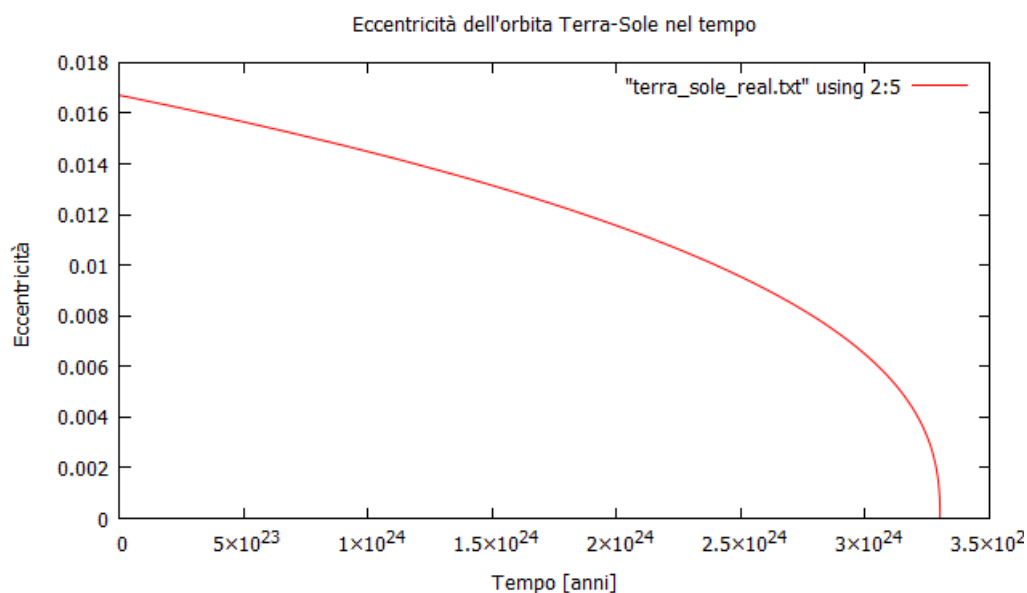


Figura 5: Variazione in funzione del tempo dell'eccentricità dell'orbita della binaria Terra-Sole

Dai dati in output dal programma risulta che dopo  $5 \cdot 10^{17}$  anni il semiasse maggiore  $a$  è ancora pari ad 1 AU così come l'eccentricità dell'orbita non ha ancora subito variazioni. Pertanto risulta che anche per intervalli di tempo molto lunghi per un sistema come quello Terra-Sole le predizioni della teoria classica si discostano di molto poco da quella della GR.

Mi chiedo ora cosa succederebbe se la Terra si trovasse in un'orbita più vicina al sole. Quanto tempo impiegherebbe a cadere sul Sole se si trovasse ad esempio alla distanza dalla nostra stella a cui si trova Mercurio? Ripeto quindi la simulazione cambiando la posizione iniziale dei due corpi, ossia ponendo il semiasse maggiore dell'orbita pari a  $0.3871 \text{ AU}$ . Il tempo impiegato sarebbe, sebbene molto minore del caso precedente, ancora sufficientemente lungo da non dovercene preoccupare, ossia  $7.4 \cdot 10^{22} \text{ anni}$ . Riporto in figura 6 e figura 7 i grafici dell'andamento di  $a$  ed  $e$  in questo nuovo scenario ipotizzato.

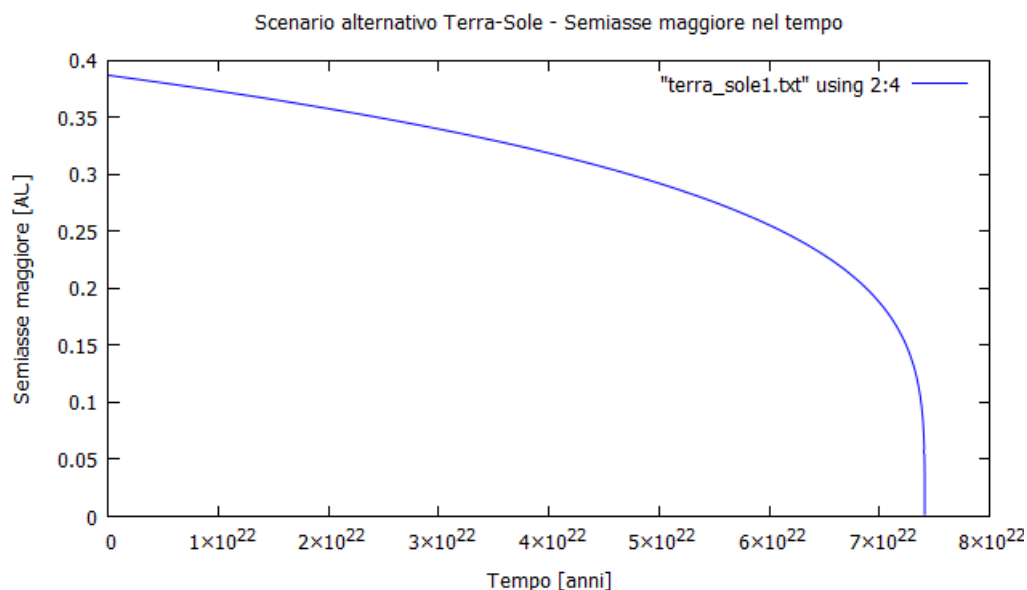


Figura 6: Variazione del semiasse maggiore nel tempo nel nuovo scenario

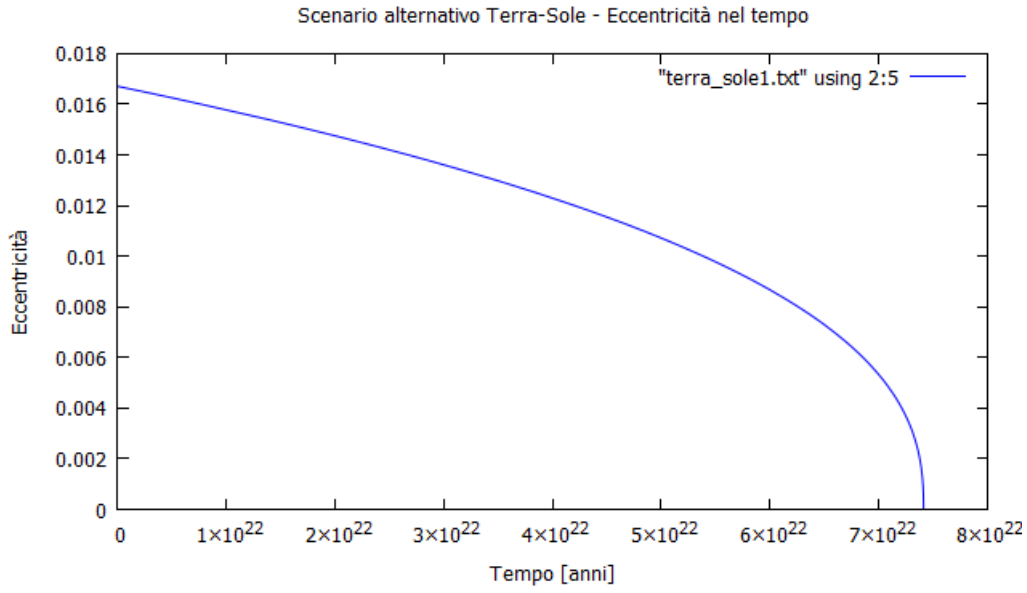


Figura 7: Variazione dell'eccentricità dell'orbita nel nuovo scenario

### 3 Binaria di Hulse-Taylor

Nell'introduzione ho accennato dell'importante scoperta di un sistema binario di stelle di neutroni, ad opera di Russen Alan Hulse e Joseph Hooson Taylor nel 1974, che fu una delle prime conferme sperimentali della Teoria di Relatività Generale di Einstein. I due astronomi osservarono prima una delle due stelle del sistema, una *pulsar*, ossia una stella di neutroni che ruota molto velocemente che emette impulsi elettromagnetici solitamente ad intervalli di tempo estremamente regolari. Tuttavia le emissioni di questa *pulsar* venivano ricevute talvolta prima e talvolta dopo di quando ci si aspettava. Nel complesso queste variazioni degli intervalli di tempo si ripetevano regolarmente ogni 7.75 ore. Queste variazioni degli intervalli portarono gli scienziati a pensare che la pulsar si trovasse in un'orbita binaria con un'altra stella di neutroni, che venne successivamente individuata.

Adesso voglio utilizzare il codice di fortran utilizzato anche per lo studio dell'evoluzione Terra-Sole per studiare questo sistema. Mi aspetto che la variazione di eccentricità e semiasse maggiore avvenga in intervalli di tempo molto minori rispetto al caso precedente, vista la distanza molto più ridotta tra le due stelle e la massa maggiore (1.4 masse solari per ogni stella). Le condizioni iniziali per l'integrazione delle equazioni differenziali (8) sono quindi le seguenti:

- $m_1 = 1.4 M_s$ ;
- $m_2 = 1.4 M_s$
- distanza =  $1.3 \cdot 10^{-2} AU$ ;
- eccentricità dell'orbita = 0.617.

Considerando che il raggio medio di una stella di neutroni è di circa 10 km imposto come condizione per il termine del programma che la distanza tra le due masse sia di 20 km. Tale condizione si verificherà (secondo la mia simulazione) tra  $9.5 \cdot 10^9$  anni. Riporto di seguito i grafici di eccentricità e semiasse maggiore nel tempo.

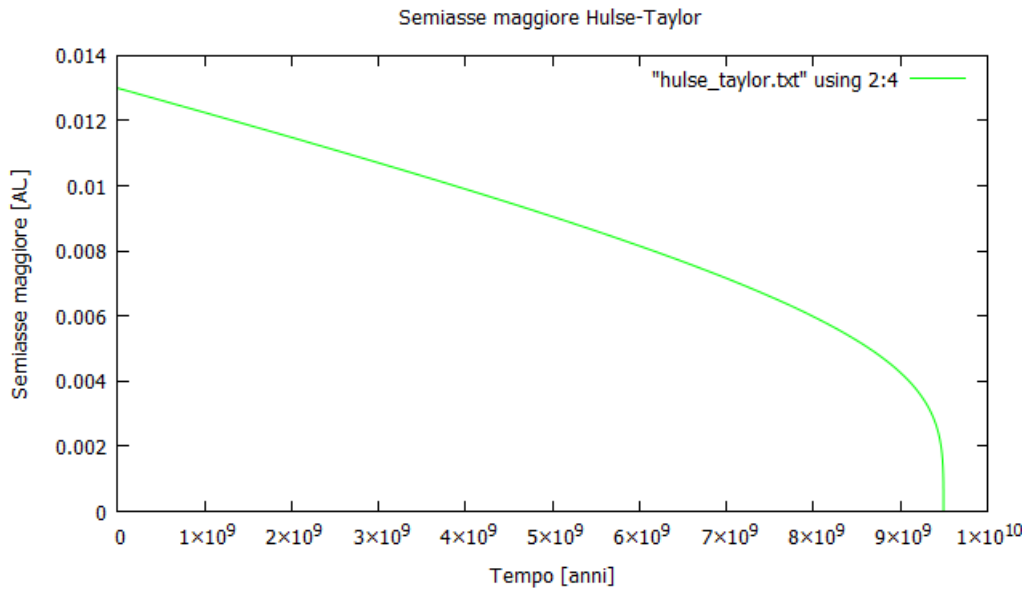


Figura 8: Semiasse maggiore in funzione del tempo per la binaria di Hulse-Taylor

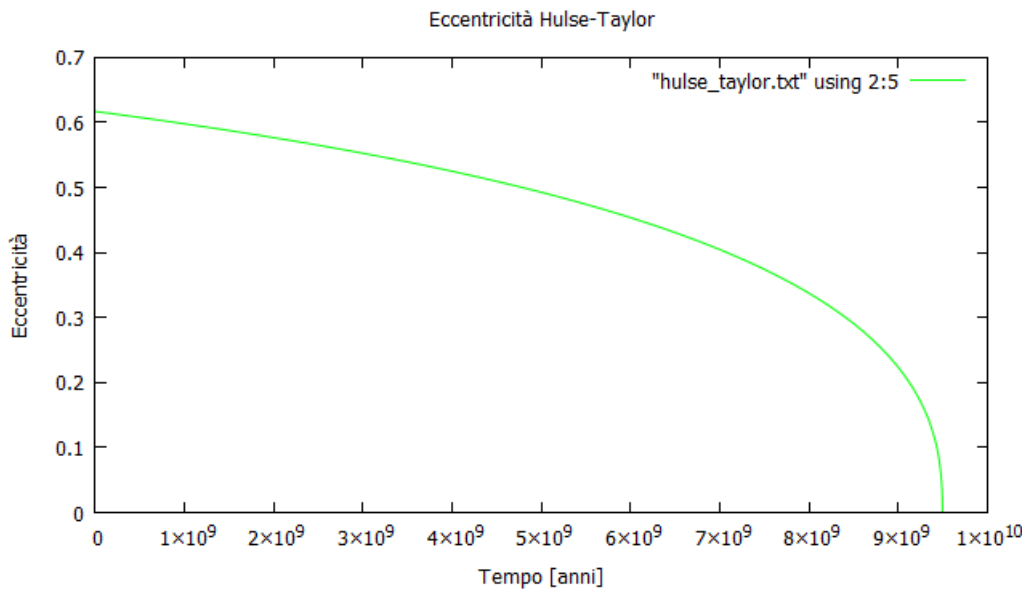


Figura 9: Eccentricità dell'orbita in funzione del tempo per la binaria di Hulse-Taylor

Come ci si aspetta, semiasse maggiore ed eccentricità diminuiscono nel corso del tempo a causa dell'energia e del momento angolare dispersi dalla binaria sotto forma di onde gravitazionali. Osservo inoltre che il tempo che deve trascorrere prima che le due stelle collidano, e quindi che inizi la loro coalescenza, è circa 9 miliardi di anni, ben più breve del caso studiato in precedenza. Questo significa che utilizzare la meccanica newtoniana per studiare questo sistema produrrebbe dei risultati che si discosterebbero molto dalla fisica che invece osserveremmo. A differenza quindi del sistema Terra-Sole nel quale per osservare differenza tra la predizione teorica newtoniana e quella della relatività generale bisognerebbe aspettare un periodo di tempo molto lungo, di ordini di grandezza più lungo della età dell'universo fino ad ora, in questo caso la differenza tra predizione relativistica e classica sarebbe molto grande.



## 4 Il Sistema Solare Interno

Nelle sezioni precedenti mi sono concentrato sullo studio di sistemi a 2 corpi, in meccanica newtoniana e in relatività generale. Ora voglio estendere lo studio ad un sistema di N corpi generico in meccanica classica. Scrivendo le equazioni del moto per gli N corpi si osserva che si ottiene un sistema di N equazioni differenziali accoppiate, che non è possibile risolvere analiticamente. Bisogna per tanto ricorrere ad un metodo di integrazione numerico, che nel codice *N-body* che utilizzerò per la simulazione sarà il metodo di Hermite al quarto ordine. Il sistema che mi propongo di studiare è il sistema solare interno, ossia il sistema composto dal Sole e dai pianeti Mercurio, Venere, Terra e Marte. Il codice (scritto in C++) richiede in input le masse dei corpi coinvolti, la posizione x, y e z di ciascun corpo nello spazio tridimensionale e le relative velocità nelle tre direzioni. Per semplicità io considererò il sistema in due dimensioni, ossia assumendo che il piano orbitale sia lo stesso per tutti i pianeti. Il codice utilizza le unità di misura *N-body units*, ossia un sistema di unità nel quale vengono scelte arbitrariamente l'unità di massa (io ho scelto la Massa solare) e l'unità di lunghezza (io ho preso L'*Astronomical Unit*) e l'imposizione della condizione  $G = 1$  determina l'unità di tempo. Come condizioni iniziali ho assunto le posizioni relative al sole in cui i pianeti si trovavano il 1 Giugno 2020, per poter confrontare l'evoluzione del sistema simulato con le posizioni che i pianeti hanno effettivamente occupato nei mesi seguenti. Posizionando il Sole nell'origine ho trovato i dati delle coordinate x e y per ciascun pianeta. Per determinarne la velocità ho dovuto però tenere conto del punto dell'orbita in cui ciascun pianeta si trovava. Nell'ipotesi in cui ciascun pianeta venga influenzato gravitazionalmente solo dal Sole (e quindi che il sistema pianeta-sole sia in approssimazione una binaria) la velocità del pianeta è data dalla seguente:

$$v(r) = \sqrt{2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (10)$$

dove  $r$  è la distanza dal Sole,  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita e  $M$  è la massa totale del sistema binario (massa del pianeta + massa del Sole). Con un po' di trigonometria si può scomporre la velocità lungo gli assi e ottenere così le componenti  $V_x$  e  $V_y$  da inserire in input.

Ripercorrerò adesso come si è evoluto il sistema nel tempo, riportando alcune raffigurazioni di esso, in un piano con asse delle ascisse e delle ordinate con unità di misura *Astronomical Unit*. Ogni diapositiva riporta l'evoluzione di un intervallo di tempo (con unità di tempo quella del codice) di 0.05, ossia circa 70 ore. Nelle raffigurazioni il punto blu indicherà il Sole, quello arancione Mercurio, verde Venere, la Terra rossa e Marte viola. Vengono inoltre rappresentate le velocità dei pianeti con dei vettori proporzionali al modulo delle velocità.

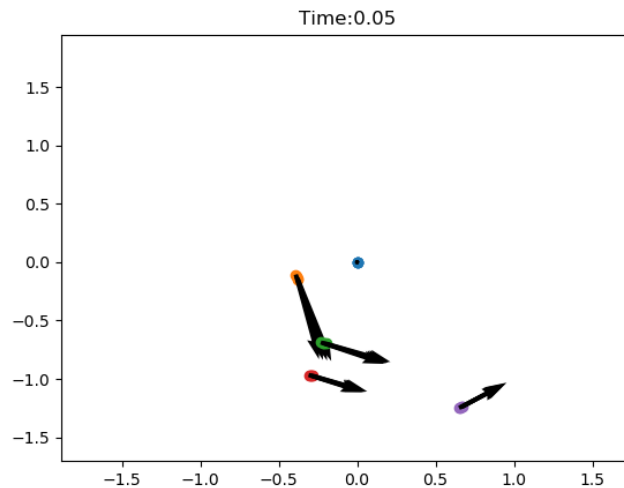


Figura 10: Sistema al momento iniziale della simulazione (1 Giugno 2020 e le 70 ore successive)

A Luglio abbiamo assistito ad alcuni lanci spaziali di missioni verso Marte. In tale periodo infatti i due pianeti si trovavano in una posizione relativa ideale per un lancio. Riporto ad esempio una rappresentazione

della traiettoria che seguirà il rover *Perseverance* lanciato il 30 Luglio 2020 verso il Pianeta Rosso.

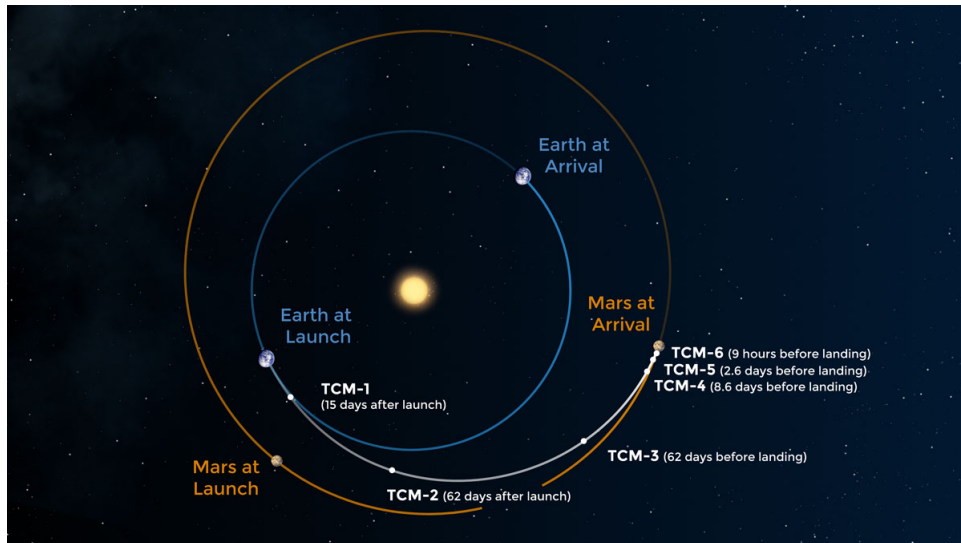


Figura 11: Traiettoria del rover Perseverance

Concentrandomi sulla posizione relativa di Terra e Marte riporto la raffigurazione della mia simulazione al 30 Luglio 2020 (data del lancio del rover), e mi chiedo tra quanti mesi una nuova finestra di lancio verso Marte si aprirà.

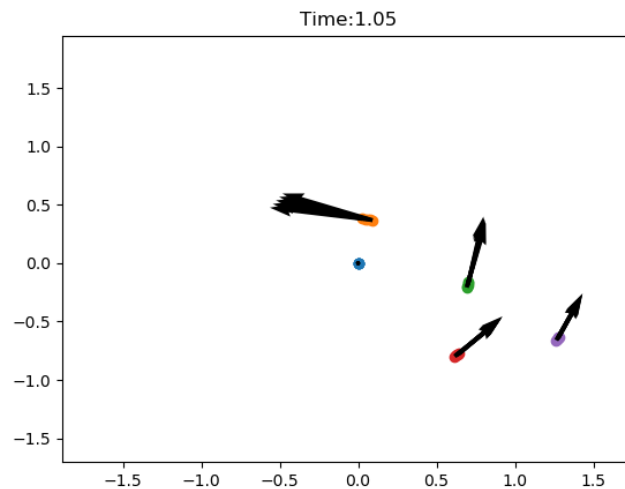


Figura 12: Simulazione all'istante  $t=1.05$  ossia al 30 Luglio

La distanza tra Terra e Marte al momento del lancio era di 97 milioni di km. Provo a stimare grossolanamente quando si potrà aprire una nuova finestra di lancio per Marte. Al tempo  $t=14.7$  della mia simulazione (Ottobre 2022) la posizione relativa tra i due pianeti sarà la seguente:

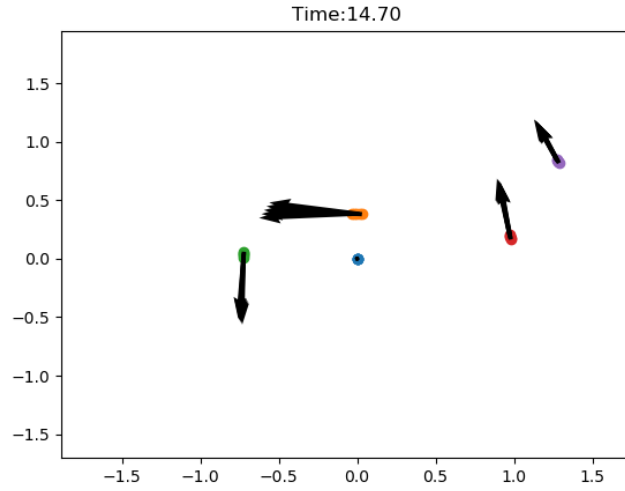


Figura 13: Simulazione all'istante  $t=14.7$  ossia Ottobre 2022

La distanza relativa sarà circa 100 milioni di chilometri. La prossima finestra di lancio sarà quindi indicativamente verso Ottobre 2022. Facendo una breve ricerca ho ottenuto la conferma che la prossima finestra è attesa tra Agosto e Ottobre 2022.

Per verificare la correttezza della simulazione e avere un'idea dell'errore che commetto con le mie previsioni decido di confrontare le posizioni dei pianeti ottenute dalla simulazione dopo 107 giorni con quelle osservate il giorno corrispettivo, ossia il 15 Settembre 2020. Riporto di seguito la tabella con dati.

	$X_{oss}[AU]$	$X_{sim}[AU]$	$Y_{oss}[AU]$	$Y_{sim}[AU]$
Mercurio	-0.17	-0.03	-0.43	-0.39
Venere	0.37	0.34	0.62	0.64
Terra	0.99	0.99	-0.12	-0.08
Marte	1.39	1.49	0.09	0.02

Tabella 1: Confronto tra le posizioni dei pianeti osservate il 15 Settembre 2020 e quelle ottenute dalla simulazione

Come ci si può aspettare la simulazione e le osservazioni si discostano abbastanza, infatti nella simulazione sono state fatte molte approssimazioni, ad esempio non si sono considerati i movimenti lungo la quota  $z$  nel nostro spazio tridimensionale e non sono stati inclusi gli altri pianeti del sistema solare, trascurandone quindi l'influenza gravitazionale (in particolare si è trascurata quella di Giove). Tuttavia vediamo che (a parte per Mercurio che orbita molto vicino al Sole) l'incertezza relativa può essere stimata circa al 10%.

## 5 Conclusione

I risultati che ho ottenuto dalle simulazioni sono in accordo con le teorie di gravitazione prese in considerazione e con le osservazioni sperimentali. Ho evidenziato come per osservare differenze sostanziali tra meccanica classica e teoria della relatività generale per un sistema come quello Terra-Sole, in cui le masse in gioco sono relativamente piccole e le distanze abbastanza grandi, bisogna aspettare un periodo di tempo molto lungo, addirittura dell'ordine di  $10^{18}$  anni. Al contrario, per un sistema binario di stelle di neutroni come quello di Hulse-Taylor, gli effetti delle onde gravitazionali non sono trascurabili, e queste sottraendo energia e momento angolare al sistema causano una diminuzione del semiasse maggiore dell'orbita e dell'eccentricità della binaria, fino a quando le due stelle non collidono. Infine ho studiato l'evoluzione del Sistema Solare Interno, concentrandomi sulla posizione relativa di Terra e Marte per determinare quella che potrebbe essere la prossima finestra di lancio per missioni spaziali, e ottenendo come previsione Ottobre 2022, in linea con le previsioni della comunità scientifica.