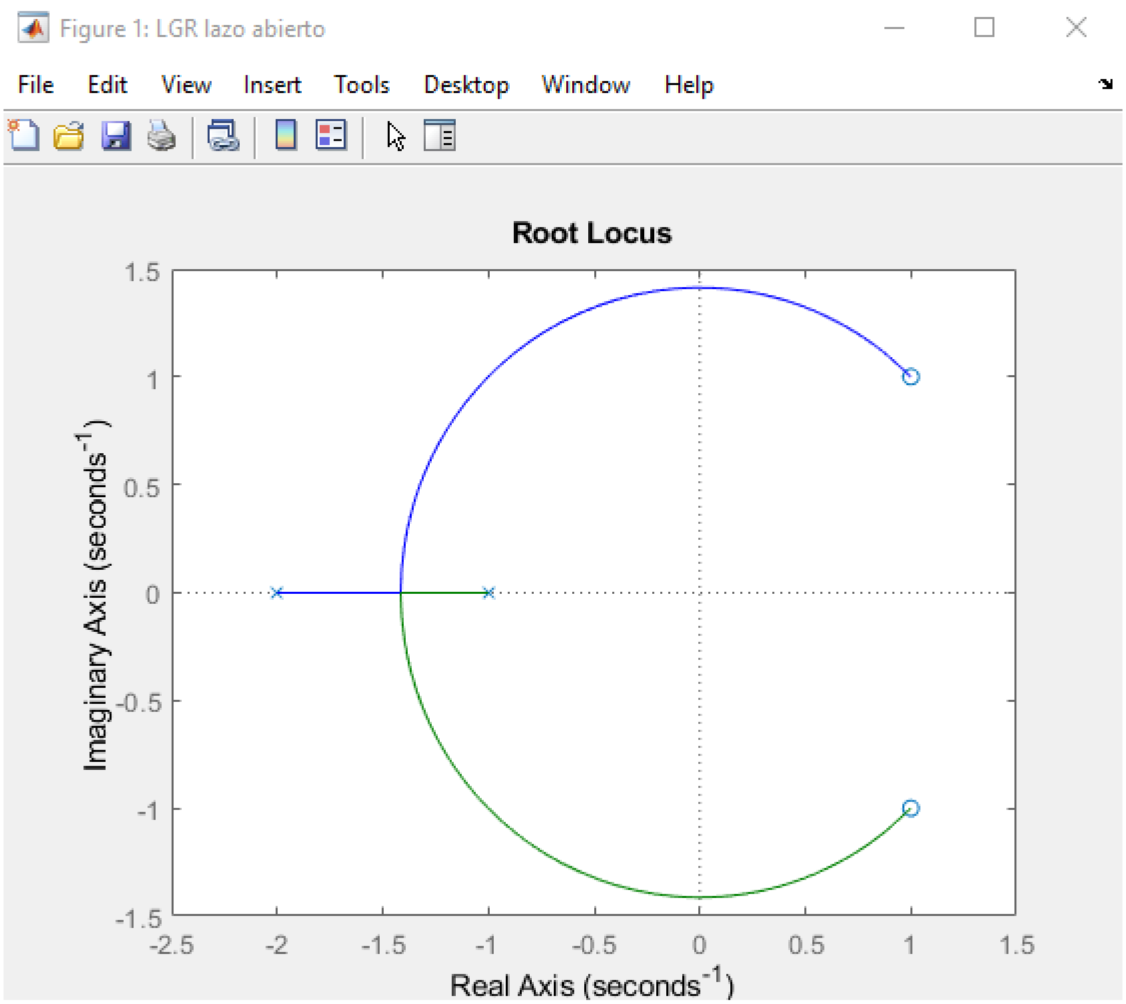
Tarea 3

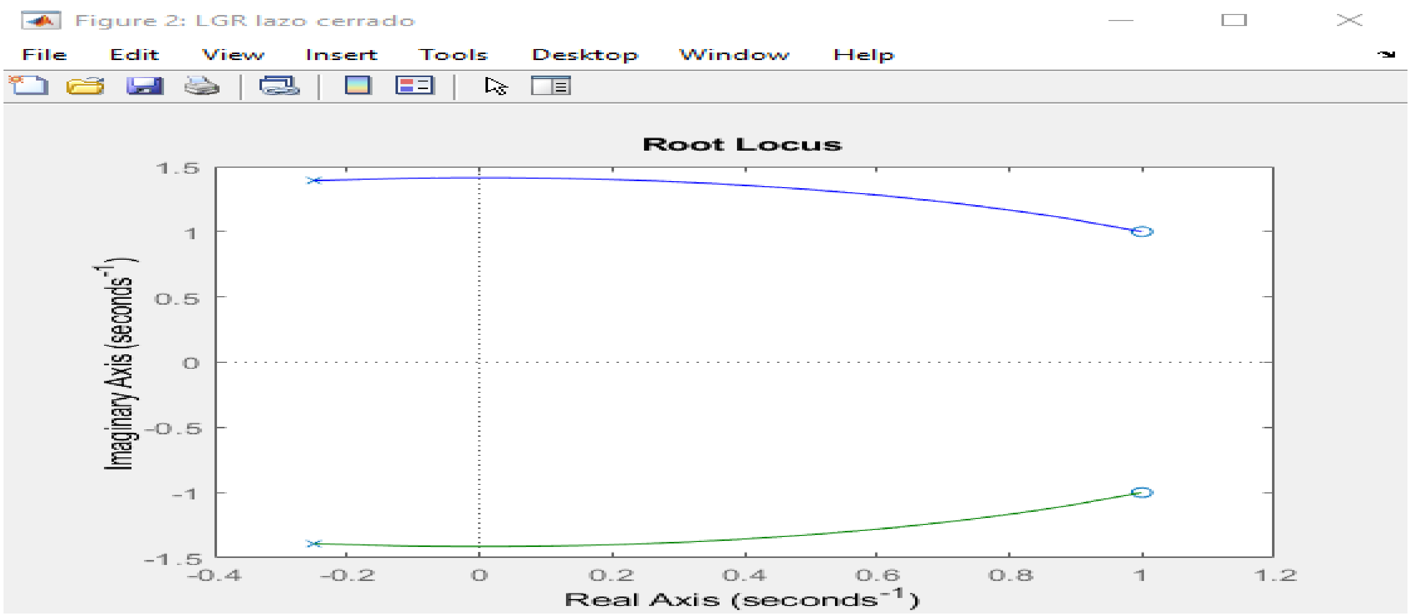
Ejercicio 1 y 2:

- **Gráfica con el lugar geométrico de las raíces**

1.-

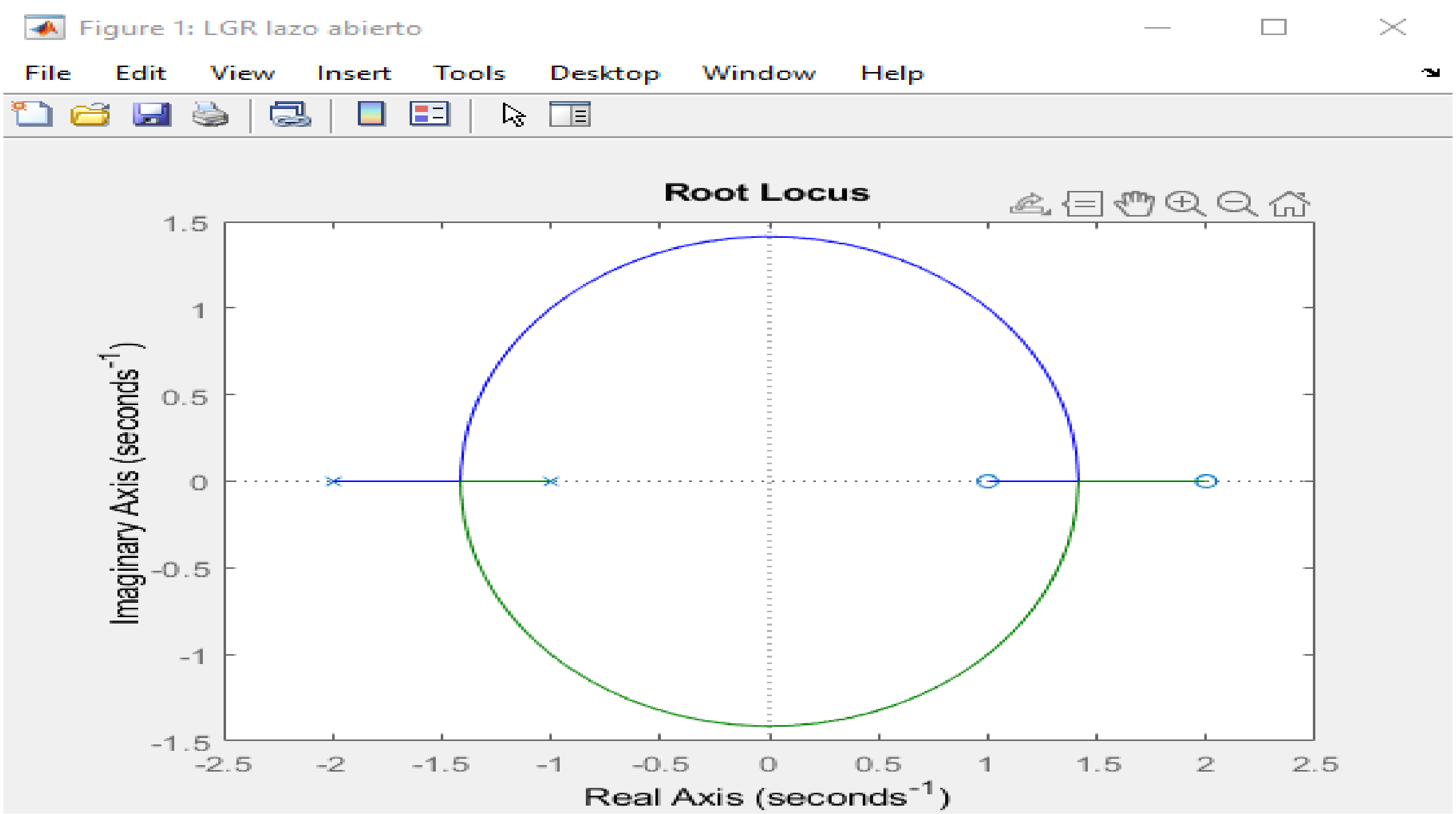
$$G(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{(s+1)(s+2)}$$

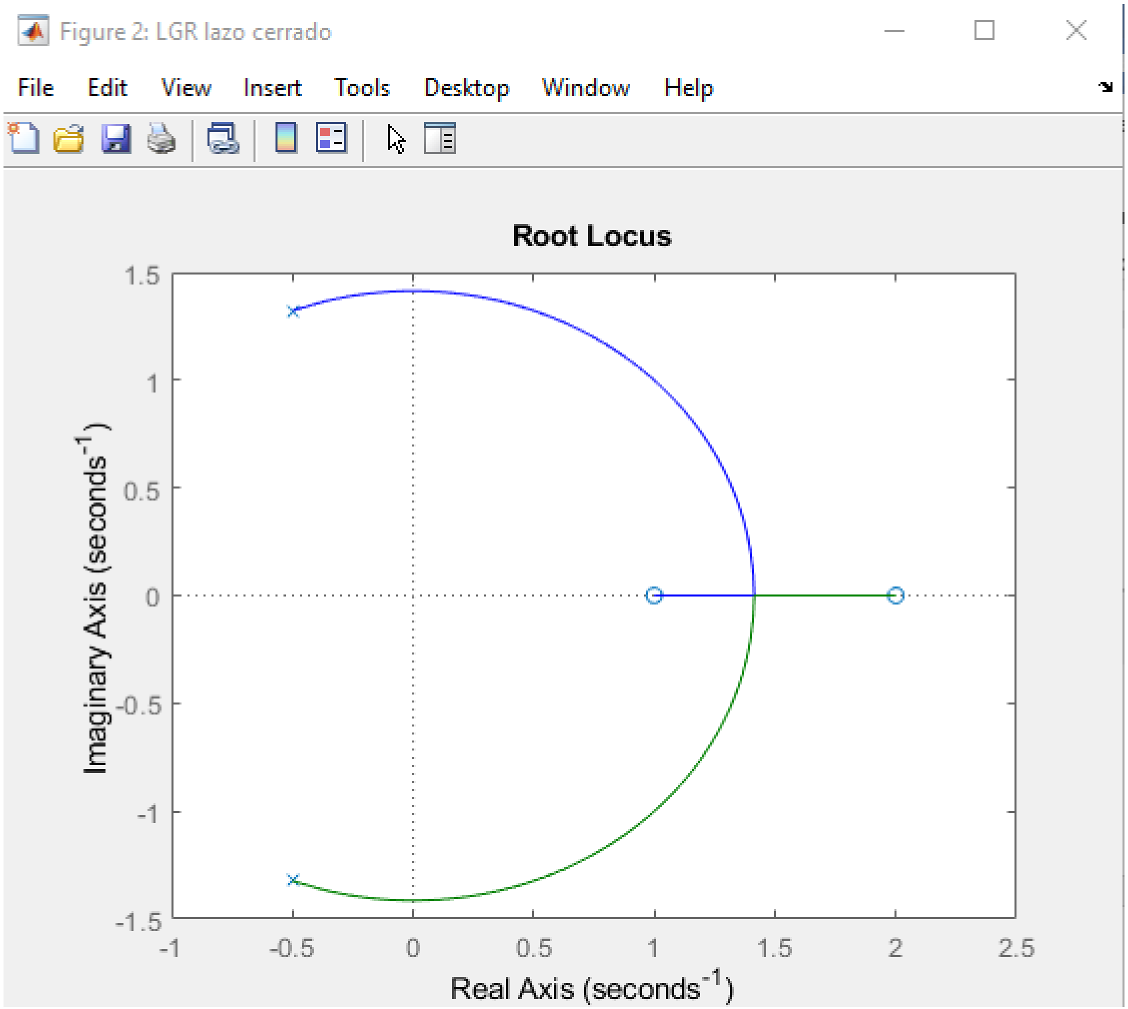




2.-

$$G(s) = \frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$





- **Valores de la ganancia K para los casos solicitados**

1.-

$$G(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{(s+1)(s+2)}$$

- **El sistema se vuelve marginalmente estable**

  K = 1.5; Polos imaginarios en ±1.4142i

  K = -1 La respuesta no se puede graficar

- **La respuesta al escalón es subamortiguada**

$$K > \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2}$$

$$K > 0.05051$$

- **La respuesta al escalón posee un factor de amortiguamiento de 0.7**

$$K = \frac{199 - 21\sqrt{61}}{100}$$

$$K = 0.34984$$

2.-

$$G(s) = \frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

- **El sistema se vuelve marginalmente estable**

  K = 1; Polos imaginarios en $\pm\sqrt{2}i$

  K = -1 La respuesta no se puede graficar
- **La respuesta al escalón es subamortiguada**

$$K > \frac{13 - 4\sqrt{10}}{9}$$

$$K > 0.03898$$

- **La respuesta al escalón posee un factor de amortiguamiento de 0.7**

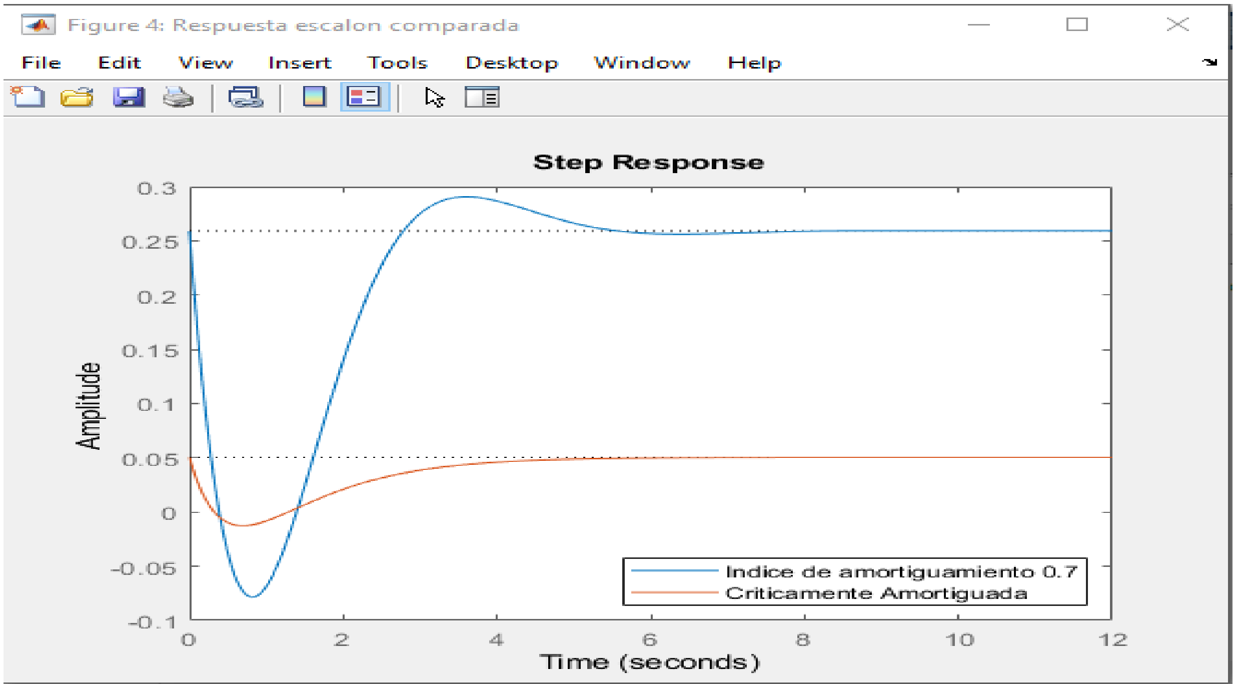
$$K = \frac{274 - 7\sqrt{949}}{225}$$

$$K = 0.25937$$

- **Gráfica comparativa de las respuestas subamortiguada y críticamente amortiguada solicitadas, de igual forma reporte las características de la respuesta transitoria de cada caso.**

1.-

$$G(s) = \frac{K(s^2 - 2s + 2)}{(s+1)(s+2)}$$



- Índice de amortiguamiento 0.7

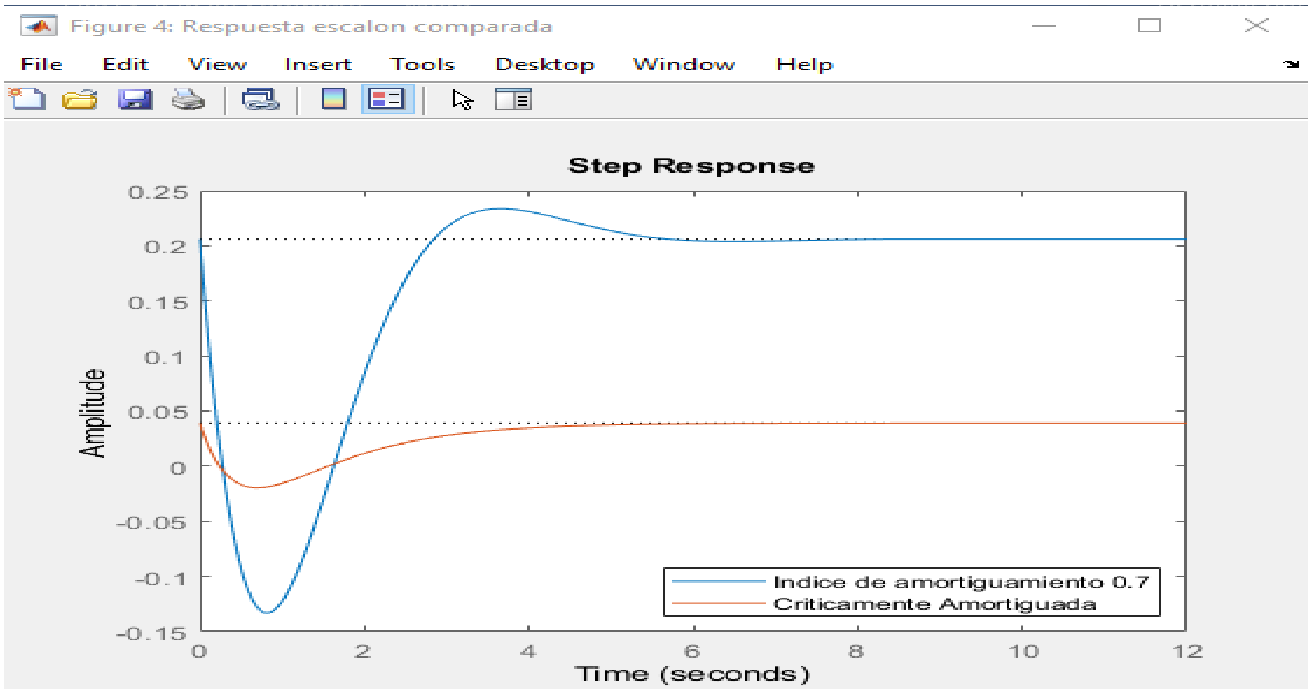
```
    RiseTime: 0
SettlingTime: 5.0244
 SettlingMin: -0.0787
 SettlingMax: 0.2907
   Overshoot: 12.1637
  Undershoot: 30.3634
        Peak: 0.2907
    PeakTime: 3.6212
```

- Críticamente amortiguada

```
    RiseTime: 0
SettlingTime: 4.6417
 SettlingMin: -0.0124
 SettlingMax: 0.0481
   Overshoot: 0
  Undershoot: 25.8332
        Peak: 0.0481
    PeakTime: 0
```

2.-

$$G(s) = \frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$



- Índice de amortiguamiento 0.7

```
     RiseTime: 0
 SettlingTime: 5.0419
  SettlingMin: -0.1329
  SettlingMax: 0.2336
    Overshoot: 13.4174
   Undershoot: 64.5390
         Peak: 0.2336
     PeakTime: 3.6543
```

- Críticamente amortiguada

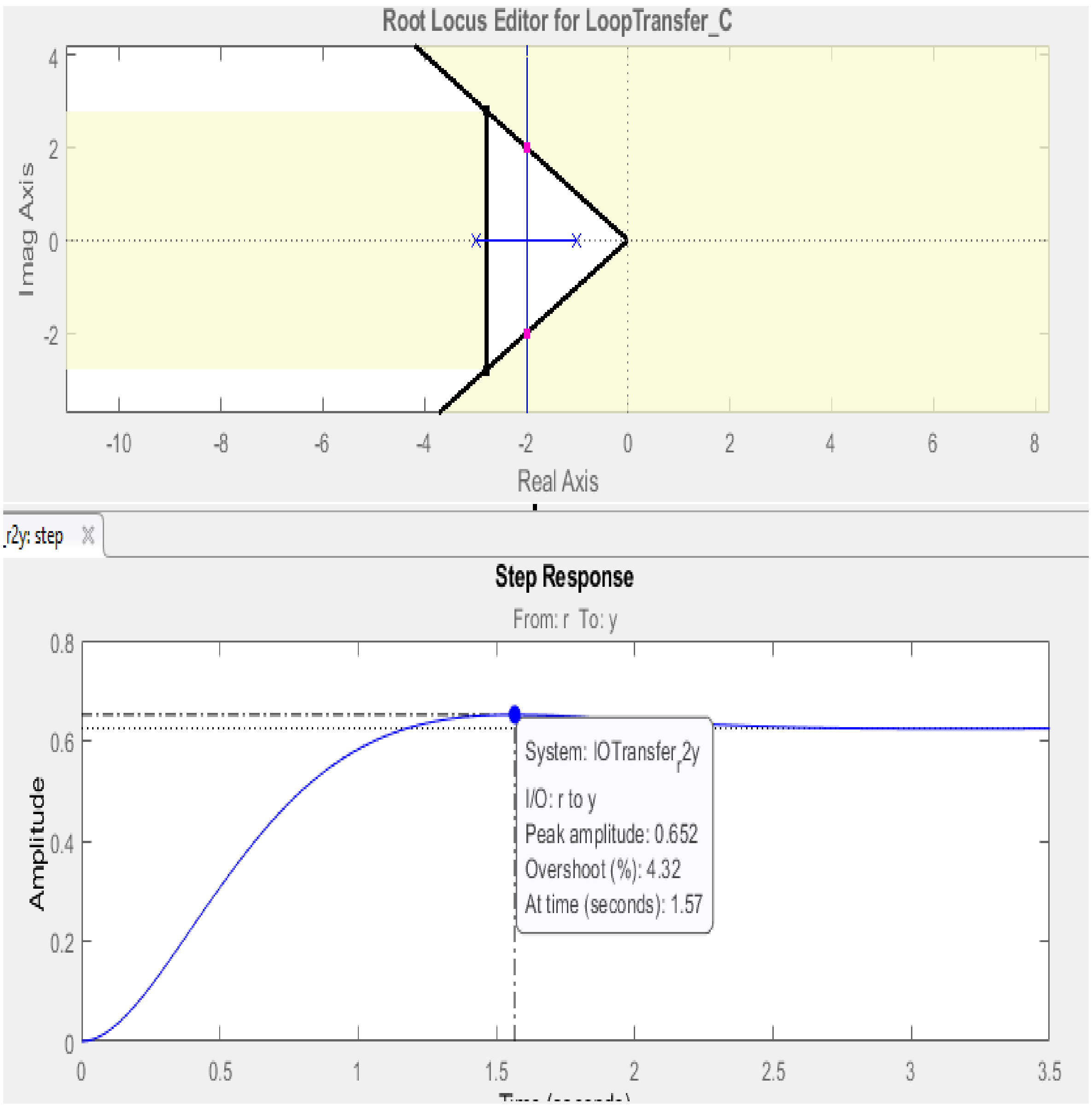
```
     RiseTime: 0
 SettlingTime: 4.6843
  SettlingMin: -0.0196
  SettlingMax: 0.0375
    Overshoot: 0
   Undershoot: 52.1085
         Peak: 0.0375
     PeakTime: 0
```

Para ejercicio 3 y 4:

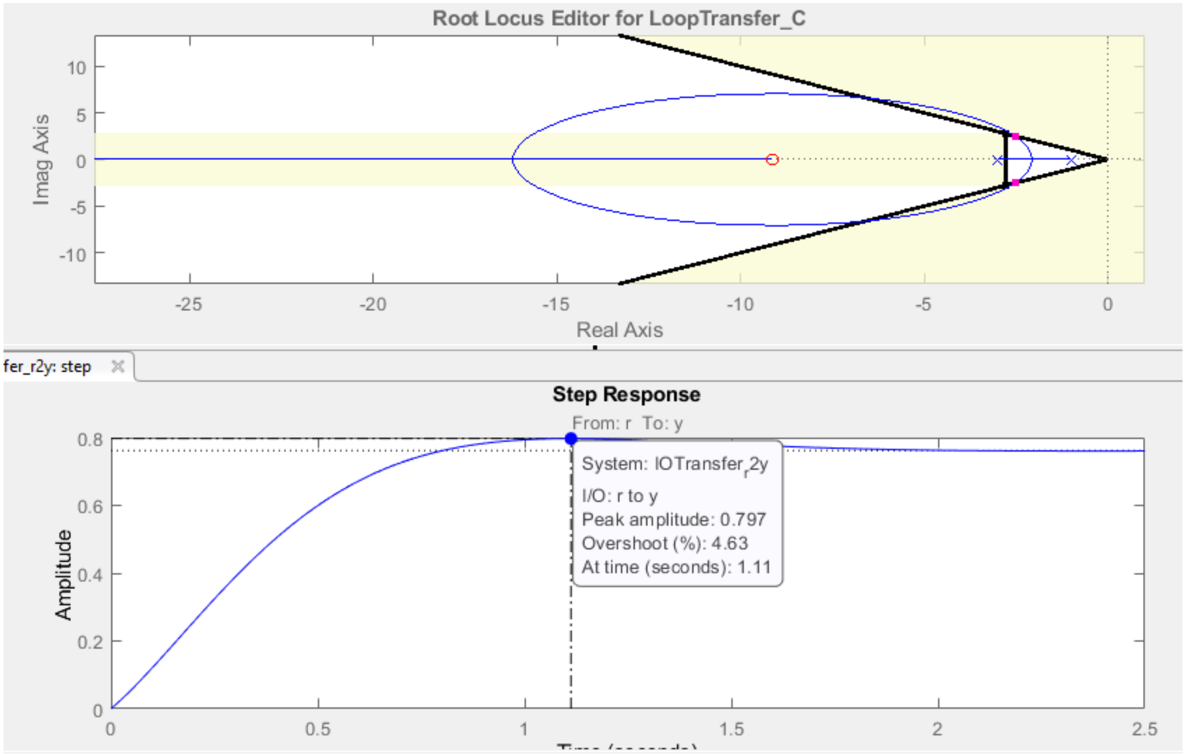
3.-

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$$

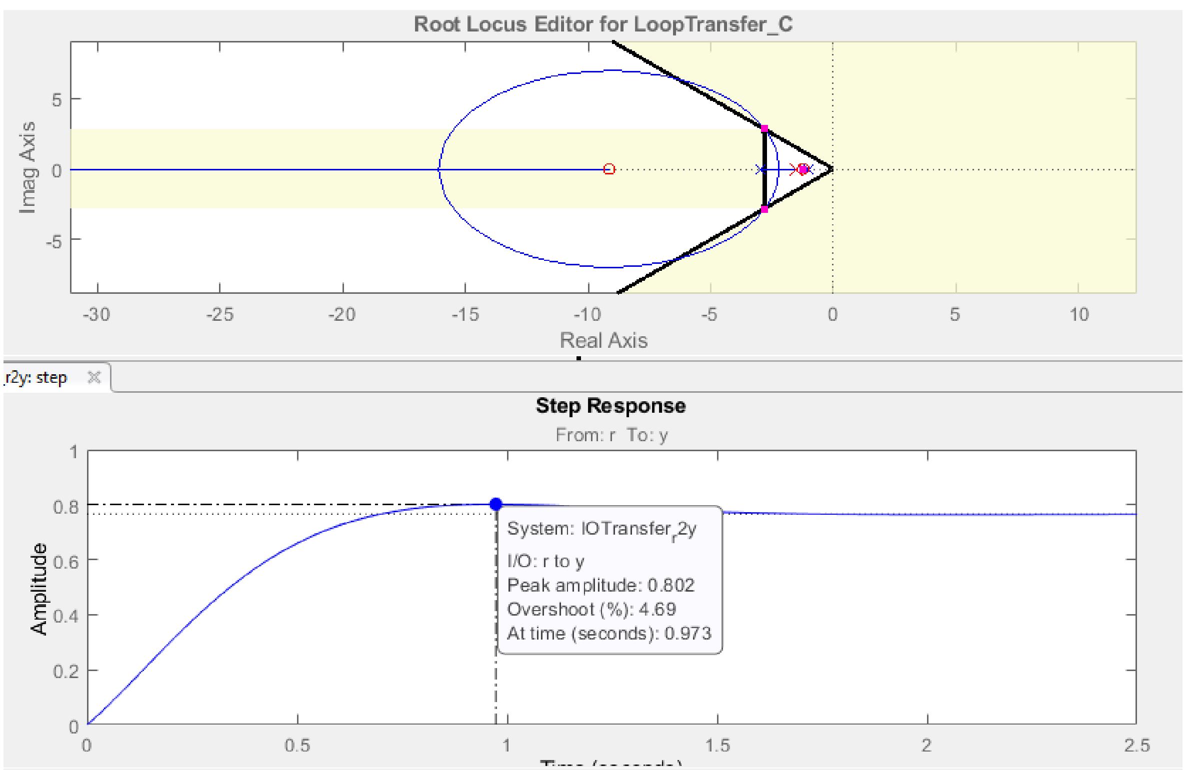
- **El lugar geométrico de las raíces del sistema sin compensar (antes de agregar el controlador PID)**



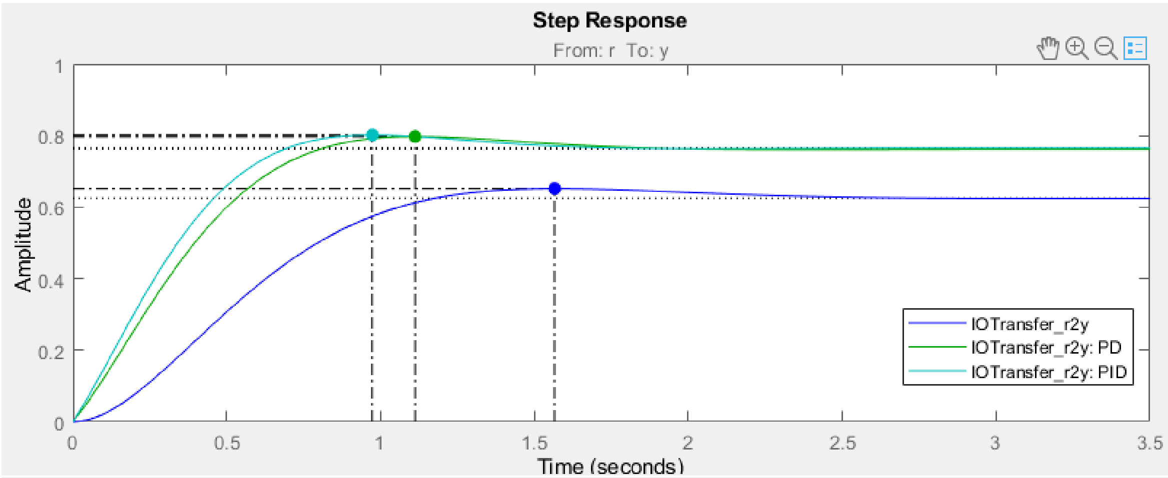
- **El lugar geométrico de las raíces del sistema con el controlador PD**



- **El lugar geométrico de las raíces del sistema con el controlador PID**



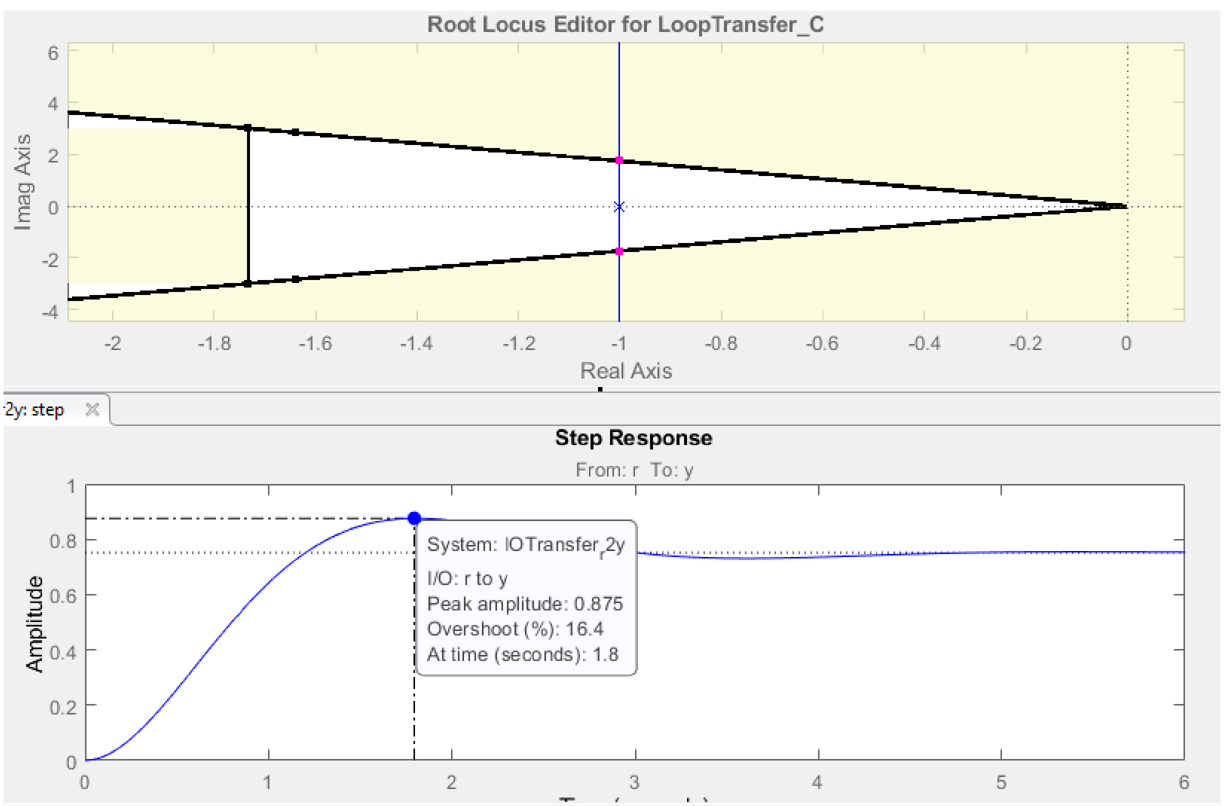
- **Una gráfica que compare la respuesta al escalón al satisfacer los requerimientos en respuesta transitoria (PD) y al reducir a el error en EE a cero (PID).**



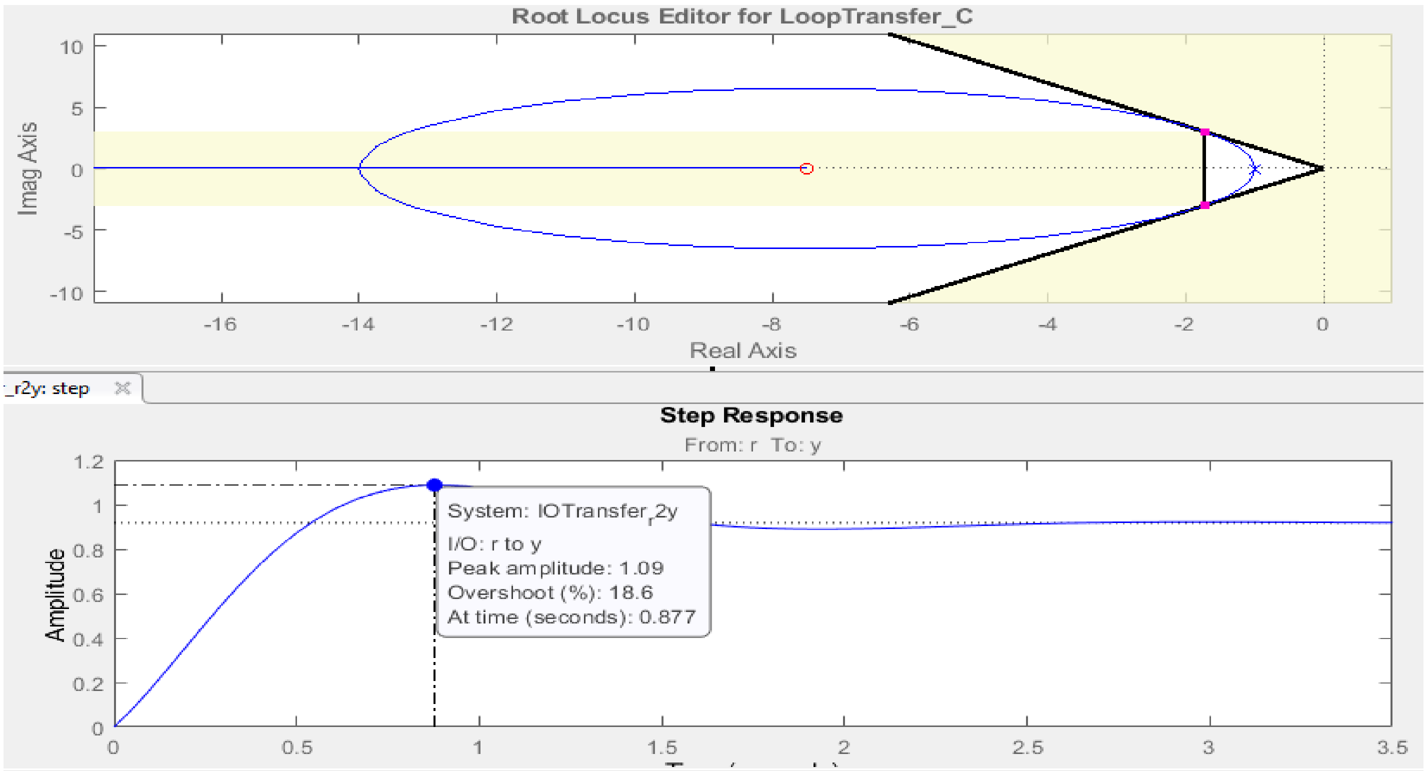
4.-

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^2}$$

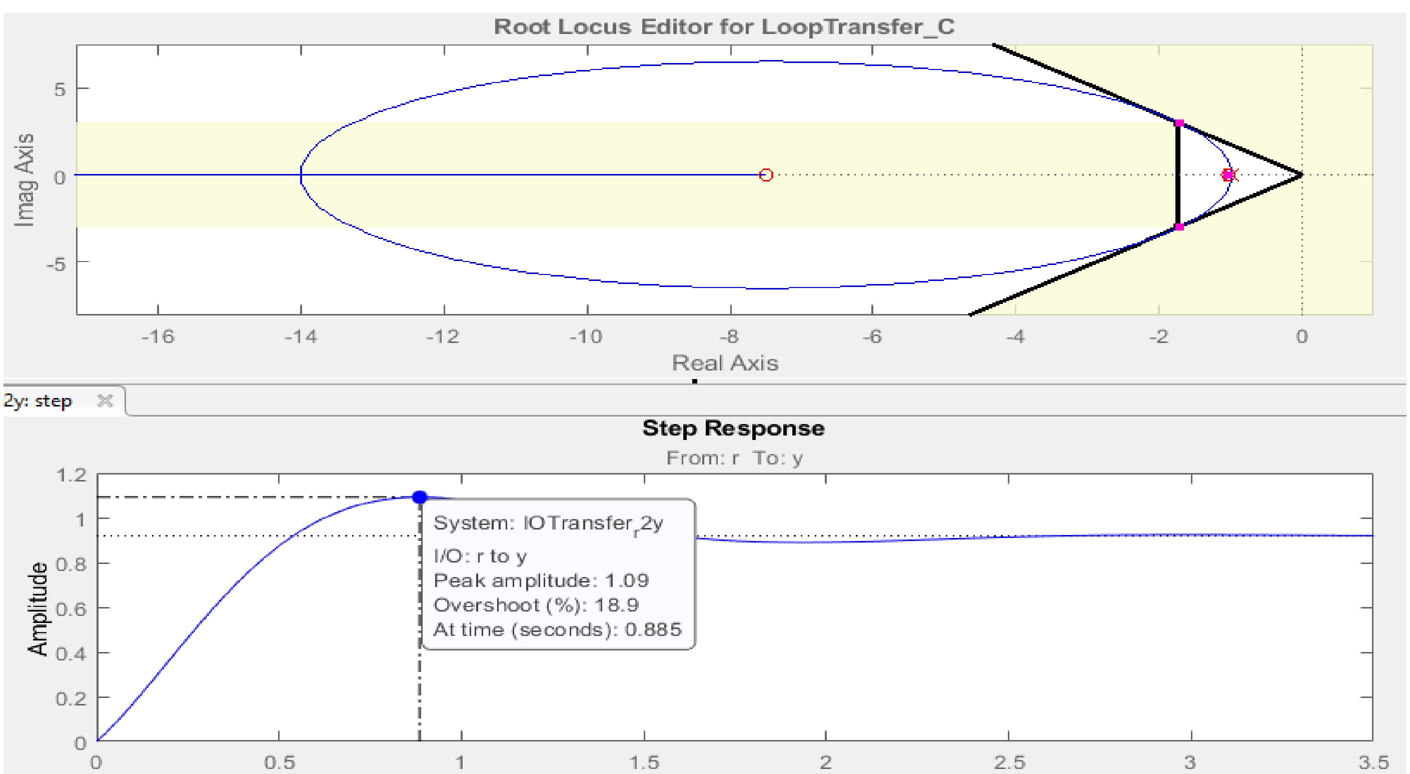
- **El lugar geométrico de las raíces del sistema sin compensar (antes de agregar el controlador PID)**



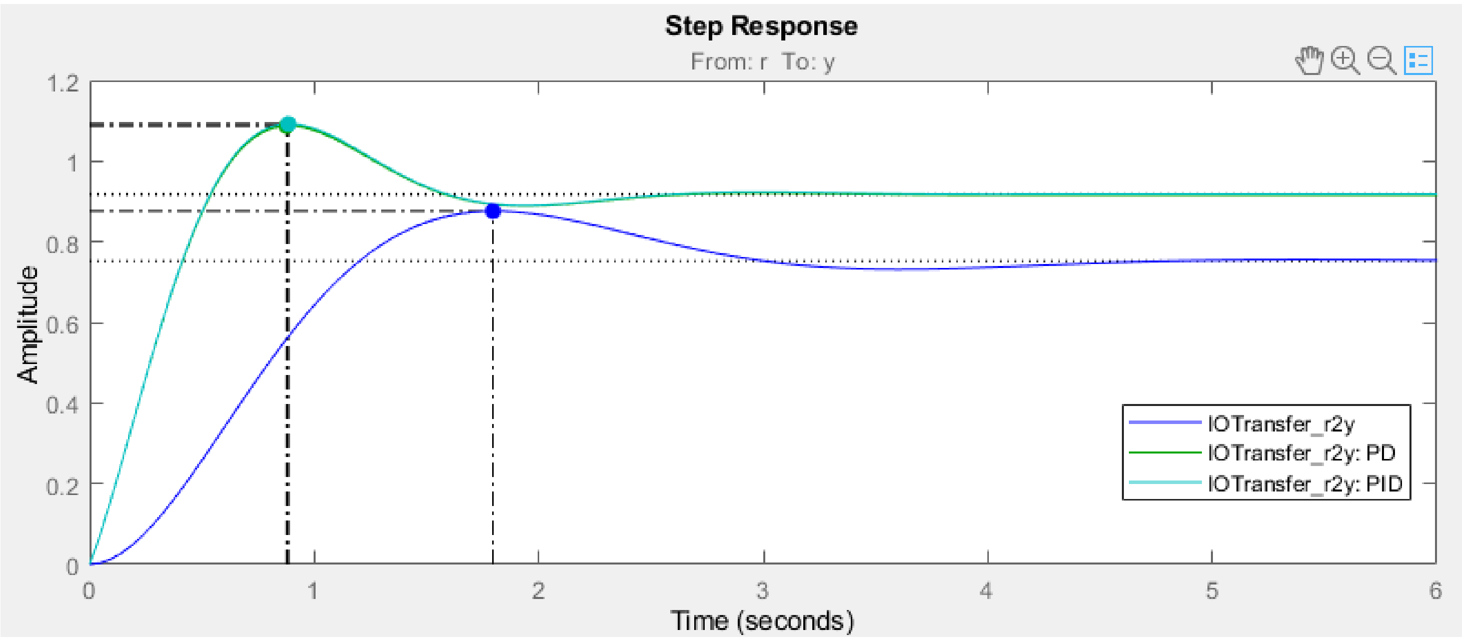
- **El lugar geométrico de las raíces del sistema con el controlador PD**



- **El lugar geométrico de las raíces del sistema con el controlador PID**



- **Una gráfica que compare la respuesta al escalón al satisfacer los requerimientos en respuesta transitoria (PD) y al reducir a el error en EE a cero (PID).**



Desarrollo completo

Marcoc-rasi

LGR

Ejercicio 1.1

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+G} = \frac{\frac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+2)}}{1+\frac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+2)}} = \frac{\frac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+2)}}{\frac{(s+1)(s+2)+K(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+2)}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+2)+K(s^2-2s+2)} = \frac{K(s^2-2s+2)}{(K+1)s^2+(3-2K)s+2K+2} = \frac{K(s+1-i)(s+1+i)}{(s+1)(s+2)+K(s+1-i)(s+1+i)}$$

Dibujo hecho con matlab anexado en el documento

Determinar los valores de ganancia K

funcion caracteristica

$$(K+1)s^2+(3-2K)s+2(1+K)=0 \qquad a = -\frac{\begin{vmatrix} K+1 & 2(1+K) \\ (3-2K) & 0 \end{vmatrix}}{3-2K}$$

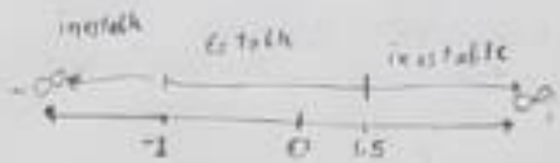
s^2	$K+1$	$2(1+K)$
s^1	$3-2K$	0
s^0	$a=2(K+1)$	

$a = 2(K+1)$

Intervalo de K

$K+1 \geq 0 \quad [-1, \infty]$

$K \geq -1$



$-1 \leq K \leq 1.5$

$3-2K \geq 0$

$-2K \geq -3$

$2K \leq 3$

$K \leq \frac{3}{2}$

$2(K+1) \geq 0$

$K+1 \geq 0 \quad [-1, \infty)$

$K \geq -1$

Marginalmente estable

s^2	$1.5+1$	$2(1+1.5)$	$\approx$	2.5	5
s^1	$3-2(1.5)$	0		0	0
s^0	5				

$P(s) = 2.5s^2+5$ polos imaginarios

$P'(s) = 5s$ respuesta marginalmente estable

Polos $\pm 1.41412i$

La respuesta al escalon es subamortiguada

Los polos en un sistema de segundo orden

$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \text{Polos } s=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

Una respuesta subamortiguada tiene polos complejos por lo que en $\sqrt{\xi^2-1}$ ξ^2 tiene que ser menor que 1, de esta manera aparecen valores imaginarios

de las ecuaciones de sistemas de 2do orden

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = (K+1)s^2+(3-2K)s+2(1+K)$$

$$2\xi\omega_n=(3-2K) \;;\quad \omega_n^2=2(1+K)$$

$$\omega_n=\sqrt{2+2K}$$

$$\xi=\frac{3-2K}{2\omega_n}$$

$$\xi=\frac{3-2K}{2\sqrt{2+2K}}$$

$$\therefore \quad \frac{3-2K}{2\sqrt{2+2K}}<1$$

Resolviendo con simbolab

$$K>\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$$

$$K>0.05051$$

La Respuesta al escalon posee un factor de amortiguamiento de 0.7

$$\xi=\frac{3-2K}{2\sqrt{2+2K}} \Rightarrow 0.7=\frac{3-2K}{2\sqrt{2+2K}} \Rightarrow K=\frac{199-21\sqrt{61}}{100}=0.34984$$

La respuesta al escalon es criticamente amortiguada

$$\xi=1$$

$$\xi=\frac{3-2K}{2\sqrt{2+2K}} \rightarrow 1=\frac{3-2K}{2\sqrt{2+2K}} \rightarrow K=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}=0.05051$$

Código Matlab

```
syms kk s
%Expansion de la expresion denominador lazo cerrado
a = [1 3 2]
roots(a)
b = s + 1 ;
c = s + 2;
d = kk*(s^2-2*s+2);
Denominador = expand((b * c) + d);
%Dibujo del LGR
%Ganancia
k = 0.3498475681;
%Numerador G(s)
num = [k -2*k 2*k];
%Denominador G(s)
den = [1 3 2];
%Funcion de transferencia lazo abierto
gLazoAbierto = tf(num,den)
%Funcion de transferencia lazo cerrado
gLazoCerrado = feedback(gLazoAbierto,1)
%Imagen LGR lazo abierto
figure('Name',"LGR lazo abierto");
rlocus(gLazoAbierto)
%Imagen LGR lazo cerrado
figure('Name',"LGR lazo cerrado");
rlocus(gLazoCerrado)
%Imagen Respuesta escalon lazo cerrado
figure('NAME',"Respuesta escalon lazo cerrado");
step(gLazoCerrado)

%Imagen amortiguamiento 0.7 y criticamente amortiguada
%Ganancia
k1 = 0.3498475681;
k2 = 0.05051025722;
%Numerador G(s)
num1 = [k1 -2*k1 2*k1];
num2 = [k2 -2*k2 2*k2];
%Funcion de transferencia lazo abierto
gLazoAbierto1 = tf(num1,den);
gLazoAbierto2 = tf(num2,den);
%Funcion de transferencia lazo cerrado
gLazoCerrado1 = feedback(gLazoAbierto1,1)
gLazoCerrado2 = feedback(gLazoAbierto2,1)
figure('name','Respuesta escalon comparada');
step(gLazoCerrado1,gLazoAbierto2)
legend('Indice de amortiguamiento 0.7','Criticamente
Amortiguada','Location','SouthEast')
Informacion1 = stepinfo(gLazoCerrado1)
Informacion2 = stepinfo(gLazoCerrado2)
```

Comprobaciones symbolab

$$\frac{3-2k}{2\sqrt{2+2k}}<1 \quad : \quad \begin{bmatrix} \text{Solución:} & k>\frac{5-2\sqrt{6}}{2} \\ \text{Decimal:} & k>0.05051\ldots \\ \text{Notación intervalo} & \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{2},\ \infty\right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{3-2k}{2\left(\sqrt{2+2k}\right)}=0.7 \quad : \quad k=\frac{199-21\sqrt{61}}{100} \quad \left(\text{Decimal:} \quad k=0.34984\ldots\right)$$

$$\frac{3-2k}{2\left(\sqrt{2+2k}\right)}=1 \quad : \quad k=\frac{5-2\sqrt{6}}{2} \quad \left(\text{Decimal:} \quad k=0.05051\ldots\right)$$

LGR

Ejercicio 1.2

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}}{1+\frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}} = \frac{\frac{K(s-1)(s+2)}{(s+1)(s+2)}}{\frac{(s+1)(s+2)+K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)+K(s-1)(s-2)} = \frac{K(s^2-3s+2)}{Ks^2+s^2+3s-3Ks+2K+2} = \frac{K(s^2-3s+2)}{(K+1)s^2+(3-3K)s+2(1+K)}$$

Dibujo hecho con matlab anexado en el documento

Determinar los valores de ganancia K

función característica

$$(K+1)s^2+(3-3K)s+2(1+K)=0$$

$$a = -\frac{\begin{vmatrix} K+1 & 2(1+K) \\ 3-3K & 0 \end{vmatrix}}{3-3K}$$

$$a = 2(1+K)$$

s^2	$K+1$	$2(1+K)$
s^1	$3-3K$	0
s^0	$a=2(1+K)$	

Intervalo K

$K+1 \geq 0$ $[-1, \infty]$

$K \geq -1$

$3-3K \geq 0$

$-3K \geq -3$ $[-\infty, 1]$

$3K \leq 3$

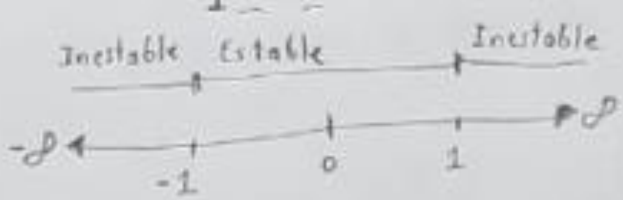
$K \leq \frac{3}{3} = 1$

$2(1+K) \geq 0$

$1+K \geq 0$ $[-1, \infty]$

$K \geq -1$

$-1 \leq K \leq 1$



Marginalmente estable

s^2	$1+1$	$2(1+1)$	$\rightleftarrows$ 2
s^1	$3-3(1)$	0	0
s^0			

$P(s) = 2s^2 + 4$

$P'(s) = 2s$

polos $\pm\sqrt{2}\,i$

La respuesta al escalon es subamortiguada

Los polos en un sistema de segundo orden

$$\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2} \qquad \text{Polos } -\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1}$$

Una respuesta subamortiguado tiene polos complejos por lo que en $\sqrt{\xi^2-1}$ ξ^2 tiene que ser menor que 1, de esta manera aparecen numeros imaginarios.

De las ecuaciones de segundo orden

$$s^2+2\xi w_n+w_n^2=(K+1)s^2+(3-3K)s+2(1+K)$$

$$2\xi w_n=3-3K \;;\; w_n^2=2(1+K)$$
$$w_n=\sqrt{2(1+K)}$$

$$\xi=\frac{3-3K}{2w_n} \qquad \therefore \; \frac{3-3K}{2\sqrt{2+2K}}<1$$

Resolviendo Symbolab

$$K>\frac{13-4\sqrt{10}}{9}$$
$$K>0.03898$$

$$\xi=\frac{3-3K}{2\sqrt{2+2K}}$$

La respuesta al escalon pesee un factor de amortiguamiento de 0.7

$$\xi=\frac{3-3K}{2\sqrt{2+2K}} \rightarrow 0.7=\frac{3-3K}{2\sqrt{2+2K}} \rightarrow K=\frac{274-7\sqrt{949}}{225}=0.25937$$

La respuesta al escalon es criticamente amortiguada

$$\xi=1$$

$$\xi=\frac{3-3K}{2\sqrt{2+2K}} \rightarrow 1=\frac{3-3K}{2\sqrt{2+2K}} \rightarrow K=\frac{13-4\sqrt{10}}{9}=0.03898$$

Código Matlab

```
syms kk s
%Expansion de la expresion denominador lazo cerrado
a = s + 1 ;
b = s + 2;
c = kk*(s-1)*(s-2);
numerador = expand((s-1)*(s-2));
Denominador = expand((a * b) + c);
%Dibujo del LGR
%Ganancia
k = 0.5;
%Numerador G(s)
num = [k -3*k 2*k];
%Denominador G(s)
den = [1 3 2];
%Funcion de transferencia lazo abierto
gLazoAbierto = tf(num,den)
%Funcion de transferencia lazo cerrado
gLazoCerrado = feedback(gLazoAbierto,1)
%Imagen LGR lazo abierto
figure('Name',"LGR lazo abierto");
rlocus(gLazoAbierto)
%Imagen LGR lazo cerrado
figure('Name',"LGR lazo cerrado");
rlocus(gLazoCerrado)
%Imagen Respuesta escalon lazo cerrado
figure('NAME',"Respuesta escalon lazo cerrado");
step(gLazoCerrado)


%Imagen amortiguamiento 0.7 y criticamente amortiguada
%Ganancia
k1 = 0.2593737546;
k2 = 0.03898770659;
%Numerador G(s)
num1 = [k1 -3*k1 2*k1];
num2 = [k2 -3*k2 2*k2];
%Funcion de transferencia lazo abierto
gLazoAbierto1 = tf(num1,den);
gLazoAbierto2 = tf(num2,den);
%Funcion de transferencia lazo cerrado
gLazoCerrado1 = feedback(gLazoAbierto1,1)
gLazoCerrado2 = feedback(gLazoAbierto2,1)
figure('name','Respuesta escalon comparada');
step(gLazoCerrado1,gLazoAbierto2)
legend('Indice de amortiguamiento 0.7','Criticamente
Amortiguada','Location','SouthEast')
Informacion1 = stepinfo(gLazoCerrado1)
Informacion2 = stepinfo(gLazoCerrado2)
```

Comprobaciones symbolab

$$\frac{3-3k}{2\sqrt{2+2k}}<1 \quad : \quad \begin{bmatrix} \text{Solución:} & k>\frac{13-4\sqrt{10}}{9} \\ \text{Decimal:} & k>0.03898\ldots \\ \text{Notación intervalo} & \left(\frac{13-4\sqrt{10}}{9},\infty\right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{3-3k}{2\left(\sqrt{2+2k}\right)}=0.7 \quad : \quad k=\frac{274-7\sqrt{949}}{225} \quad \left(\text{Decimal:} \quad k=0.25937\ldots\right)$$

$$\frac{3-3k}{2\left(\sqrt{2+2k}\right)}=1 \quad : \quad k=\frac{13-4\sqrt{10}}{9} \quad \left(\text{Decimal:} \quad k=0.03898\ldots\right)$$

Ejercicio 3

$$\frac{K}{(s+1)(s+3)} = \frac{K}{s^2+4s+3} \qquad T_p = 1.122\,s \qquad \zeta = 0.707$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{1.122\sqrt{1-0.707^2}} = 3.95$$

$$\%.05 = e^{-\left(\frac{0.707\pi}{\sqrt{1-0.707^2}}\right)} \times 100 = 4.32549312$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{T_p} = \frac{\pi}{1.122} = 2.799\ \pi$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 0.707[3.95] = 2.79265 \quad \mathbb{R}$$

Ejercicio 4

$$\frac{K}{(s+1)^2} = \frac{K}{s^2+2s+1} \qquad T_p = 1.047\,s \qquad \zeta = 0.5$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{1.047\sqrt{1-0.5^2}} = 3.4647$$

$$\%.05 = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100 = e^{-\left[\frac{0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}\right]} \times 100 = 16.30335348\,\%$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{T_p} = \frac{\pi}{1.047} = 3.000560049\ \pi$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 0.5[3.4647] = 1.73235 \quad \mathbb{R}$$