1.2 ➜ Proposiciones condicionales y equivalencia lógica

El decano de la escuela anunció que

Si el departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales,
entonces contratará un nuevo académico. **(1.2.1)**

La afirmación (1.2.1) establece que con la condición de que el departamento de matemáticas obtenga \$40,000 adicionales, entonces contratará un nuevo académico. Este tipo de proposición se conoce como **proposición condicional.**

Definición 1.2.1 ▶

Si p y q son proposiciones, la proposición

$$\text{si } p \text{ entonces } q \tag{1.2.2}$$

se llama *proposición condicional* y se denota por

$$p \to q$$

La proposición p se llama *hipótesis* (o *antecedente*) y la proposición q recibe el nombre de *conclusión* (o *consecuente*). ◀

Ejemplo 1.2.2 ▶

Si se define

p: El departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales,

q: El departamento de matemáticas contrata un nuevo académico,

entonces la proposición (1.2.1) toma la forma (1.2.2). La hipótesis es la afirmación "el departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales" y la conclusión es la afirmación "el departamento de matemáticas contrata un nuevo académico". ◀

¿Cuál es el valor de verdad para la afirmación del decano (1.2.1)? Primero, suponga que el departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales. Si de hecho contrata otro académico, con seguridad la afirmación del decano es verdadera. (Usando la notación del ejemplo 1.2.2, si p y q son ambas verdaderas, entonces $p \to q$ es verdadera). Por otra parte, si el departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales y *no* contrata un nuevo académico, el decano está equivocado, es decir, la oración (1.2.1) es falsa. (Si p es verdadera y q es falsa, entonces $p \to q$ es falsa). Ahora suponga que el departamento de matemáticas no obtiene \$40,000 adicionales. En este caso, el departamento de matemáticas puede o no contratar otro académico. (Quizá alguien del departamento se jubila y se contrata a alguien más para reemplazarlo. Por otro lado, el departamento puede no contratar a alguien). Por supuesto, no se consideraría falsa la afirmación del decano. Así, si el departamento de matemáticas *no* obtiene los \$40,000, la afirmación del decano debe ser verdadera, sin importar si el departamento contrata o no otro académico. (Si p es falsa, entonces $p \to q$ es verdadera sea q verdadera o falsa). Este análisis motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.3 ▶

El valor verdadero de la proposición condicional $p \to q$ está definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

◀

De manera formal, $\to$ es un operador binario sobre las proposiciones. El operador $\to$ asigna a cada par de proposiciones p y q la proposición $p \to q$.

Para quienes necesitan mayor evidencia de que $p \to q$ se debe definir como verdadera cuando p es falsa, se ofrece otra justificación. Casi todas las personas están de acuerdo en que la proposición

$$\text{Para todos los números reales } x, \text{ si } x > 0, \text{ entonces } x^2 > 0, \tag{1.2.3}$$

es verdadera. (En la sección 1.3 se hará el análisis formal y detallado de afirmaciones del tipo “para todos”). En la siguiente presentación, p denotada por $x > 0$ y q denotada por $x^2 > 0$. El hecho de que la proposición (1.2.3) sea verdadera significa que no importa con cuál número real se sustituya x, la proposición

$$\text{si } p \text{ entonces } q \tag{1.2.4}$$

resultante es verdadera. Por ejemplo, si $x = 3$, entonces p y q son ambas ciertas ($3 > 0$ y $3^2 > 0$ son ambas verdaderas) y, por la definición 1.2.3, (1.2.4) es verdadera. Ahora considere la situación donde p es falsa. Si $x = -2$, entonces p es falsa ($-2 > 0$ es falsa) y q es verdadera [$(-2)^2 > 0$ es verdadera]. Con objeto de que la proposición (1.2.4) sea verdadera en ese caso, debe definirse $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa y q es verdadera. Esto es justo lo que ocurre en el tercer renglón de la tabla de verdad para la definición 1.2.3. Si $x = 0$, entonces p y q son ambas falsas ($0 > 0$ y $0^2 > 0$ son falsas). Para que la proposición (1.2.4) sea cierta en este caso, debe definirse $p \to q$ como verdadera cuando p y q son ambas falsas. Justo ocurre esto en el cuarto renglón de la tabla de verdad para la definición 1.2.3. En los ejercicios 52 y 53 se da una mayor motivación para definir $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa.

Ejemplo 1.2.4 ▶

Sea

$$p\colon 1 > 2, \qquad q\colon 4 < 8.$$

Entonces p es falsa y q es verdadera. Por lo tanto,

$$p \to q \text{ es verdadera}, \qquad q \to p \text{ es falsa}.$$

◀

En las expresiones que incluyen a los operadores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$, el operador condicional $\rightarrow$ evalúa al final. Por ejemplo,

$$p \vee q \rightarrow \neg r$$

se interpreta como

$$(p \vee q) \rightarrow (\neg r).$$

Ejemplo 1.2.5 ▶

Suponiendo que p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, encuentre el valor de verdad de cada proposición.

a) $p \wedge q \rightarrow r$ *b)* $p \vee q \rightarrow \neg r$ *c)* $p \wedge (q \rightarrow r)$ *d)* $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

a) Primero se evalúa $p \wedge q$ porque $\rightarrow$ se evalúa al final. Como p es cierta y q es falsa, $p \wedge q$ es falsa. Por lo tanto, $p \wedge q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar si r es cierta o falsa).

b) Primero se evalúa $\neg r$. Como r es verdadera, $\neg r$ es falsa. Después se evalúa $p \vee q$. Como p es verdadera y q es falsa, $p \vee q$ es verdadera. Por lo tanto, $p \vee q \rightarrow \neg r$ es falsa.

c) Como q es falsa, $q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar si r es verdadera o falsa). Como p es verdadera, $p \wedge (q \rightarrow r)$ es verdadera.

d) Puesto que q es falsa, $q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar si r es verdadera o falsa). Entonces, $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es verdadera (sin importar si p es verdadera o falsa). ◀

Una proposición condicional que es verdadera porque la hipótesis es falsa se dice que es **verdadera por omisión** o **superficialmente verdadera**. Por ejemplo, si la proposición,

> Si el departamento de matemáticas obtiene \$40,000 adicionales, entonces contratará un nuevo académico,

es verdadera porque el departamento de matemáticas no obtuvo \$40,000 adicionales, se dice que la proposición es verdadera por omisión o que es superficialmente verdadera.

Algunas afirmaciones no de la forma (1.2.2) pueden rescribirse como proposiciones condicionales, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6 ▶

Reescriba cada proposición en la forma (1.2.2) de una proposición condicional.

a) María será una buena estudiante si estudia mucho.

b) Juan toma cálculo sólo si está en 2º, 3º o 4º grado de universidad.

c) Cuando cantas, me duelen los oídos.

d) Una condición necesaria para que los Cachorros ganen la Serie Mundial es que contraten a un pitcher suplente diestro.

e) Una condición suficiente para que María visite Francia es ir a la Torre Eiffel.

a) La hipótesis es la cláusula que sigue a *si*; entonces una formulación equivalente es

> Si María estudia mucho, entonces será una buena estudiante.

b) La afirmación significa que para que Juan tome cálculo debe estar en 2º, 3º o 4º año de universidad. En particular, si está en 1º, *no* puede tomar cálculo. Así, se concluye que si toma cálculo, entonces está en 2º, 3º o 4º año. Por lo tanto, una formulación equivalente sería

> Si Juan toma cálculo, entonces está en 2º, 3º o 4º año.
>
> Observe que
>
> Si Juan está en 2º, 3º o 4º año, entonces toma cálculo,

no es una formulación equivalente. Si Juan está en 2º, 3º o 4º año, puede o *no* tomar cálculo. (Aunque sea elegible para tomar cálculo, puede decidir no tomarlo).

La formulación "si p entonces q" hace hincapié en la hipótesis mientras que la formulación "p sólo si q" resalta la conclusión; la diferencia es nada más de estilo.

c) *Cuando* significa lo mismo que *si*; entonces una formulación equivalente es

Si cantas, me duelen los oídos.

d) Una **condición necesaria** es sólo eso: una condición que *se necesita* para lograr un resultado en particular. La condición *no* garantiza el resultado; pero si no se cumple, el resultado no se logrará. Aquí, la afirmación significa que si los Cachorros ganan la Serie Mundial, podemos estar seguros de que contrataron un pitcher suplente diestro, ya que sin ese contrato no habrían ganado. Así, una formulación equivalente de la afirmación es

Si los Cachorros ganan la Serie Mundial, entonces contrataron un pitcher suplente diestro.

La conclusión expresa una condición necesaria.

Observe que

Si los Cachorros contratan un pitcher suplente diestro, entonces ellos ganan la Serie Mundial,

no es una formulación equivalente. Contratar un pitcher suplente diestro no es garantía de que ganarán la Serie Mundial. Sin embargo, *no* contratarlo garantiza que no ganarán la Serie Mundial.

e) De manera similar, una **condición suficiente** es una condición que *basta* para garantizar un resultado en particular. Si la condición no se cumple, el resultado puede lograrse de otras formas o tal vez no se logre; pero si la condición se cumple, el resultado está garantizado. Aquí, para asegurar que María visite Francia, basta con que vaya a la Torre Eiffel. (Sin duda, hay otras maneras de asegurar que María visite Francia; por ejemplo, podría ir a Lyon). Así, una formulación equivalente a la afirmación en cuestión es

Si María va a la Torre Eiffel, entonces visita Francia.

La hipótesis expresa una condición suficiente.

Observe que

Si María visita Francia, entonces va a la Torre Eiffel,

no es una formulación equivalente. Como se observó, hay otras maneras de asegurar que María visite Francia que ir a la Torre Eiffel. ◀

El ejemplo 1.2.4 muestra que la proposición $p \to q$ puede ser verdadera mientras que la proposición $q \to p$ es falsa. La proposición $q \to p$ se llama la **recíproca** de la proposición $p \to q$. Así, una proposición condicional puede ser verdadera mientras que su recíproca es falsa.

Ejemplo 1.2.7 ▶

Escriba la proposición condicional

Si Jesús recibe una beca, entonces irá a la universidad,

y su recíproca en símbolos y en palabras. Además, suponga que Jesús no recibe la beca, pero gana la lotería y de todas formas va a la universidad, encuentre entonces el valor de verdad de la proposición original y su recíproca.

Sea

p: Jesús recibe una beca,

q: Jesús va la universidad.

La proposición se escribe en símbolos como $p \to q$. Como la hipótesis p es falsa, la proposición condicional es verdadera.

La recíproca de la proposición es

Si Jesús va a la universidad, entonces recibe una beca.

La recíproca se escribe en símbolos como $q \to p$. Puesto que la hipótesis q es verdadera y la conclusión p es falsa, la recíproca es falsa. ◀

Otra proposición útil es

$$p \text{ si y sólo si } q,$$

que se considera verdadera precisamente cuando p y q tienen el mismo valor de verdad (es decir, si p y q son ambas verdaderas o ambas falsas).

Definición 1.2.8 ▶

Si p y q son proposiciones, la proposición

$$p \text{ si y sólo si } q$$

se llama *proposición bicondicional* y se denota por

$$p \leftrightarrow q.$$

El valor de verdad de la proposición $p \leftrightarrow q$ se define por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

◀

El operador $\leftrightarrow$ también es un operador binario sobre las proposiciones. Asigna a cada par de proposiciones p y q la proposición $p \leftrightarrow q$.

Una manera alternativa de establecer "p si y sólo si q" es "p es una condición necesaria y suficiente para q". La proposición "p si y sólo si q" algunas veces se escribe p ssi q.

Ejemplo 1.2.9 ▶

La proposición

$$1 < 5 \text{ si y sólo si } 2 < 8 \tag{1.2.5}$$

se escribe en símbolos como

$$p \leftrightarrow q$$

si se define

$$p\colon 1 < 5, \qquad q\colon 2 < 8$$

Puesto que ambas, p y q, son verdaderas, la proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera. ◀

Una manera alternativa de establecer (1.2.5) es: Una condición necesaria y suficiente para que $1 < 5$ es que $2 < 8$.

En algunos casos, dos proposiciones diferentes tienen los mismos valores de verdad sin importar qué valores de verdad tengan las proposiciones que las constituyen. Tales proposiciones se conocen como **equivalentes lógicos.**

Definición 1.2.10 ▶

Suponga que las proposiciones P y Q están formadas por las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$. Se dice que P y Q son *equivalentes lógicos* y se escriben

$$P \equiv Q$$

siempre que, a partir de cualesquiera valores de verdad de $p_1, \ldots, p_n$, o bien P y Q son ambas verdaderas o P y Q son ambas falsas. ◀

Ejemplo 1.2.11 ▶

Leyes de De Morgan para lógica

Se verificará la primera de las **leyes de De Morgan**

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q,$$

WWW y se dejará la segunda como ejercicio (vea el ejercicio 54).

Si se escriben las tablas de verdad para $P = \neg(p \vee q)$ y $Q = \neg p \wedge \neg q$, se puede verificar que, a partir de cualesquiera valores de verdad para p y q, P y Q son ambas verdaderas o P y Q son ambas falsas.

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Entonces, P y Q son equivalentes lógicos. ◀

Ejemplo 1.2.12 ▶

Demuestre que, en Java, las expresiones

```
x < 10  ||  x > 20
```

y

```
!(x >= 10 && x <= 20)
```

son equivalentes. (En Java, >= significa ≥ y <= significa ≤.)

Si p denota la expresión `x >= 10` y q denota la expresión `x <= 20`, la expresión `!(x >= 10 && x <= 20)` se convierte en $\neg(p \wedge q)$. Por la segunda ley de De Morgan, $\neg(p \wedge q)$ es equivalente a $\neg p \vee \neg q$. Como $\neg p$ se traduce como x < 10 y $\neg q$ se traduce como `x > 20`, $\neg p \vee \neg q$ se traducen como `x < 10 || x > 20`. Por lo tanto, las expresiones `x < 10 || x > 20` y `!(x >= 10 && x <= 20)` son equivalentes. ◀

El siguiente ejemplo da una forma de equivalencia lógica para la negación de $p \to q$.

Ejemplo 1.2.13 ▶

Demuestre que la negación de $p \to q$ es equivalente lógico de $p \wedge \neg q$.

Debe demostrarse que

$$\neg\ (p \to q) \equiv p \wedge \neg q.$$

Al escribir las tablas de verdad para $P = \neg(p \to q)$ y $Q = p \wedge \neg q$, se puede verificar que, a partir de cualesquiera valores de verdad de p y q, o bien P y Q son ambas verdaderas o P y Q son ambas falsas:

p	q	$\neg(p \to q)$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Entonces P y Q son equivalentes lógicos. ◀

Ejemplo 1.2.14 ▶

Use la equivalencia lógica de $\neg(p \to q)$ y $p \wedge \neg q$ (vea el ejemplo 1.2.13) para escribir la negación de

Si Jesús recibe una beca, entonces va la universidad,

con símbolos y en palabras.

Sean

p: Jesús recibe una beca,

q: Jesús va la universidad.

La proposición se escribe con símbolos como $p \to q$. Su negación lógicamente equivalente a $p \wedge \neg q$. En palabras, esta última expresión es

Jesús recibe una beca y no va la universidad. ◀

Ahora se demostrará que, según estas definiciones, $p \leftrightarrow q$ es equivalente lógico de $p \to q$ y $q \to p$. En palabras,

p si y sólo si q

es lógicamente equivalente a

si p entonces q y si q entonces p.

Ejemplo 1.2.15 ▶

La tabla de verdad muestra que

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

◀

Se concluye esta sección con la definición de la **contrapositiva** de una proposición condicional. Se verá (en el Teorema 1.2.18) que la contrapositiva es una forma alternativa, lógicamente equivalente de la proposición condicional. El ejercicio 55 da otra forma de equivalente lógico para la proposición condicional.

Definición 1.2.16 ▶

La *contrapositiva* (o *transposición*) de la proposición condicional $p \to q$ es la proposición $\neg q \to \neg p$. ◀

Observe la diferencia entre la contrapositiva y la recíproca. La recíproca de una proposición condicional simplemente invierte los papeles de p y q, mientras que la contrapositiva invierte los papeles de p y q *y* niega cada una de ellas.

Ejemplo 1.2.17 ▶

Escriba la proposición condicional,

Si se cae la red, entonces Darío no puede entrar a Internet,

con símbolos. Escriba la contrapositiva y la recíproca con símbolos y en palabras. Además, suponga que la red no se cayó y que Darío puede entrar a Internet; encuentre los valores de verdad de la proposición original, su contrapositiva y su recíproca.

Sean

p: La red se cae,

q: Darío no puede entrar a Internet.

La proposición se escribe en símbolos como $p \to q$. Como la hipótesis p es falsa, la proposición condicional es verdadera.

La contrapositiva se escribe en símbolos como $\neg q \to \neg p$ y, en palabras,

Si Darío puede entrar a Internet, entonces la red no se cayó.

Como la hipótesis $\neg q$ y la conclusión $\neg p$ son ambas verdaderas, la contrapositiva es verdadera. (El Teorema 1.2.18 mostrará que la proposición condicional y su contrapositiva son equivalentes lógicos, es decir, que siempre tienen el mismo valor de verdad).

La recíproca de la proposición se escribe simbólicamente como $q \to p$, y en palabras:

Si Darío no puede entrar a Internet, entonces la red se cayó.

Como la hipótesis q es falsa, la recíproca es cierta. ◀

Un hecho importante es que una proposición condicional y su contrapositiva son equivalentes lógicos.

Teorema 1.2.18

La proposición condicional $p \to q$ y su contrapositiva $\neg q \to \neg p$ son equivalentes lógicos.

Demostración La tabla de verdad

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

muestra que $p \to q$ y $\neg q \to \neg p$ son lógicamente equivalentes.

En lenguaje común, "si" con frecuencia se usa como "si y sólo si". Considere la afirmación

Si arreglas mi computadora, entonces te pagaré \$50.

El significado que se pretende transmitir es

Si arreglas mi computadora, entonces te pagaré \$50, y
si no la arreglas, entonces no te pagaré \$50,

que es lógicamente equivalente a (vea el Teorema 1.2.18).

Si arreglas mi computadora, entonces te pago \$50, y
si te pago \$50, entonces arreglas mi computadora,

que, a su vez, es el lógico equivalente a (vea ejemplo 1.2.15).

Arreglas mi computadora si y sólo si te pago \$50.

En un discurso ordinario, el significado que se pretende para las afirmaciones que incluyen operadores lógicos con frecuencia (¡pero no siempre!) se infiere. Sin embargo, en matemáticas y ciencias, se requiere precisión. Sólo con la definición cuidadosa del significado de los términos, como "si" y "si y sólo si", podremos obtener afirmaciones precisas y sin ambigüedad. En particular, la lógica distingue entre las proposiciones condicional, bicondicional, recíproca y contrapositiva.

Sugerencias para resolver problemas

En la lógica formal, "si" y "si y sólo si" son bastante diferentes. La proposición condicional $p \to q$ (si p entonces q) es verdadera excepto cuando p es verdadera y q es falsa. Por otro lado, la proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ (p si y sólo si q) es verdadera precisamente cuando p y q son ambas verdaderas o ambas falsas.

Para determinar si las proposiciones P y Q, formadas con las proposiciones $p_1, \ldots,$ p_n, son equivalentes lógicos, escriba las tablas de verdad para P y Q. Si todos los elementos son al mismo tiempo verdaderos o falsos para P y Q, entonces P y Q *son* equivalentes. Si algún elemento es verdadero para una de las dos, P o Q, y falso para la otra, entonces P y Q *no* son equivalentes.

Las leyes de De Morgan para lógica

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \qquad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

dan las fórmulas para negar "o" ($\vee$) y negar "y" ($\wedge$). A grandes rasgos, negar "o" da como resultado "y", lo mismo que al negar "y" se obtiene "o".

El ejemplo 1.2.13 establece una equivalencia muy importante

$$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q,$$

que se encontrará a lo largo del libro. Esta equivalencia muestra que la negación de la proposición condicional se puede escribir usando el operador "y" ($\wedge$). Observe que no aparece el operador condicional en el lado derecho de la ecuación.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una proposición condicional? y ¿cómo se denota?
2. Escriba la tabla de verdad para la proposición condicional.
3. En una proposición condicional, ¿cuál es la hipótesis?
4. En una proposición condicional, ¿cuál es la conclusión?
5. ¿Qué es una condición necesaria?
6. ¿Qué es una condición suficiente?
7. ¿Cuál es la recíproca de $p \to q$?
8. ¿Qué es una proposición bicondicional? y ¿cómo se denota?
9. Escriba la tabla de verdad para la proposición bicondicional.
10. ¿Qué significa para P ser equivalente lógico de Q?
11. Establezca las leyes de De Morgan para lógica.
12. ¿Qué es la contrapositiva de $p \to q$?

Ejercicios

En los ejercicios 1 a 7, restablezca cada proposición en la forma (1.2.2) de una proposición condicional.

1. José pasará el examen de matemáticas discretas si estudia duro.
2. Rosa se graduará si tiene créditos por 160 horas-trimestre.
3. Una condición necesaria para que Fernando compre una computadora es que obtenga $2000.
4. Una condición suficiente para que Katia tome el curso de algoritmos es que apruebe matemáticas discretas.
5. Cuando se fabriquen mejores automóviles, Buick los fabricará.
6. La audiencia se dormirá si el maestro de ceremonias da un sermón.
7. El programa es legible sólo si está bien estructurado.
8. Escriba la recíproca de cada proposición en los ejercicios 1 al 7.
9. Escriba la contrapositiva de cada proposición en los ejercicios 1 al 7.

Suponiendo que p y r son falsas y que q y s son verdaderas, encuentre el valor de verdad para cada proposición en los ejercicios 10 al 17.

10. $p \to q$
11. $\neg p \to \neg q$
12. $\neg(p \to q)$
13. $(p \to q) \wedge (q \to r)$
14. $(p \to q) \to r$
15. $p \to (q \to r)$
16. $(s \to (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$
17. $((p \wedge \neg q) \to (q \wedge r)) \to (s \vee \neg q)$

Los ejercicios 18 al 27 se refieren a las proposiciones p, q y r; p es verdadera, q es falsa y el estado de r no se conoce por ahora. Diga si cada proposición es verdadera, falsa o tiene un estado desconocido.

18. $p \vee r$
19. $p \wedge r$
20. $p \to r$
21. $q \to r$
22. $r \to p$
23. $r \to q$
24. $(p \wedge r) \leftrightarrow r$
25. $(p \vee r) \leftrightarrow r$
26. $(q \wedge r) \leftrightarrow r$
27. $(q \vee r) \leftrightarrow r$

En los ejercicios 28 al 31, represente con símbolos la proposición cuando

$$p\text{: } 4 < 2, \quad q\text{: } 7 < 10, \quad r\text{: } 6 < 6$$

28. Si $4 < 2$, entonces $7 < 10$.
29. Si ($4 < 2$ y $6 < 6$), entonces $7 < 10$.
30. Si no ocurre que ($6 < 6$ y 7 no es menor que 10), entonces $6 < 6$.
31. $7 < 10$ si y sólo si ($4 < 2$ y 6 no es menor que 6).

En los ejercicios 32 al 37, formule la expresión simbólica en palabras usando

p: Hoy es lunes,
q: Está lloviendo,
r: Hace calor.

32. $p \to q$

33. $\neg q \to (r \wedge p)$

34. $\neg p \to (q \vee r)$

35. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$

36. $(p \wedge (q \vee r)) \to (r \vee (q \vee p))$

37 $(p \vee (\neg p \wedge \neg(q \vee r))) \to (p \vee \neg(r \vee q))$

En los ejercicios 38 a 41, escriba cada proposición condicional en símbolos. Escriba la recíproca y la contrapositiva de cada proposición en símbolos y en palabras. Encuentre también el valor de verdad para cada proposición condicional, su recíproca y su contrapositiva.

38. Si $4 < 6$, entonces $9 > 12$.

39. Si $4 < 6$, entonces $9 < 12$.

40. $|1| < 3$ si $-3 < 1 < 3$.

41. $|4| < 3$ si $-3 < 4 < 3$.

Para cada par de proposiciones P y Q en los ejercicios 42 al 51, establezca si $P \equiv Q$ o no.

42. $P = p,\ Q = p \vee q$

43. $P = p \wedge q,\ Q = \neg p \vee \neg q$

44. $P = p \to q,\ Q = \neg p \vee q$

45. $P = p \wedge (\neg q \vee r),\ Q = p \vee (q \wedge \neg r)$

46. $P = p \wedge (q \vee r),\ Q = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

47. $P = p \to q,\ Q = \neg q \to \neg p$

48. $P = p \to q,\ Q = p \leftrightarrow q$

49. $P = (p \to q) \wedge (q \to r),\ Q = p \to r$

50. $P = (p \to q) \to r,\ Q = p \to (q \to r)$

51. $P = (s \to (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s),\ Q = p \vee t$

Los ejercicios 52 y 53 proporcionan mayor motivación para definir $p \to q$ como verdadera cuando p es falsa. Se considera cambiar la tabla de verdad de $p \to q$ cuando p es falsa. Para este primer cambio, el operador resultante recibe el nombre de imp1 (ejercicio 52), y para el segundo cambio el operador resultante es imp2 (ejercicio 53). En ambos casos, se obtienen patologías.

52. Defina la tabla de verdad para *imp1* como

p	q	p *imp1* q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Demuestre que p *imp1* $q \equiv q$ *imp1* p.

53. Defina la tabla de verdad para *imp2* como

p	q	p *imp2* q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

a) Demuestre que

$$(p\ imp2\ q) \wedge (q\ imp2\ p) \not\equiv p \leftrightarrow q. \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

b) Demuestre que (1.2.6) permanece verdadera si se cambia el tercer renglón de la tabla de verdad de *imp2* a F V F.

54. Verifique la segunda ley de De Morgan, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

55. Demuestre que $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$

1.3 ➜ Cuantificadores

WWW

La lógica en las secciones 1.1 y 1.2 referente a proposiciones es incapaz de describir la mayoría de las afirmaciones en matemáticas y en ciencias de la computación. Considere, por ejemplo, la afirmación

$$p\text{: } n \text{ es un entero impar}$$

Una proposición es una afirmación que es verdadera o falsa. La afirmación p no es una proposición, porque el hecho de que p sea verdadera o falsa depende del valor de n. Por ejemplo, p es verdadera si $n = 103$ y falsa si $n = 8$. Como casi todas las afirmaciones en matemáticas y ciencias de la computación usan variables, debe ampliarse el sistema de lógica para incluir estas afirmaciones.

Definición 1.3.1 ▶

Sea $P(x)$ una oración que incluye la variable x y sea D un conjunto. P se llama *función proposicional* o *predicado* (respecto a D) si para cada x en D, $P(x)$ es una proposición. D es el *dominio de discurso* (también llamado dominio de referencia) de P. ◀

Ejemplo 1.3.2 ▶

Sea $P(n)$ la afirmación

$$n \text{ es un entero impar,}$$

y sea D el conjunto de enteros positivos. Entonces P es una función proposicional con dominio de discurso D ya que para cada n en D, $P(n)$ es una proposición [es decir, para cada n en D, $P(n)$ es verdadera o falsa pero no ambas]. Por ejemplo, si $n = 1$, se obtiene la proposición

$$P(1)\text{: 1 es un entero impar}$$