

MC-202

Divisão e Conquista, MergeSort e Quicksort

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2023

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação $O(n^2)$:

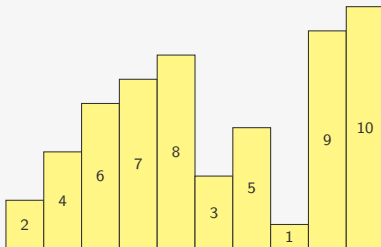
- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

E um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- `heapsort`

Nessa unidade veremos mais dois algoritmos de ordenação

Estratégia: recursão

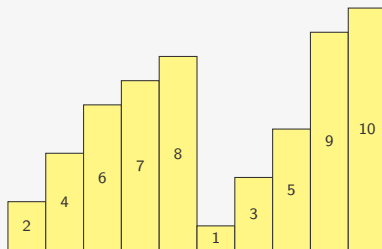


Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordenar(int *v, int l, int r)`
 - ordena o vetor das posições `l` a `r` (inclusive)
 - poderia ser um dos algoritmos vistos anteriormente
 - mas faremos algo mais simples e melhor
- executamos `ordenar(v, 0, 4);`

E se quiséssemos ordenar a segunda parte?

Ordenando a segunda parte



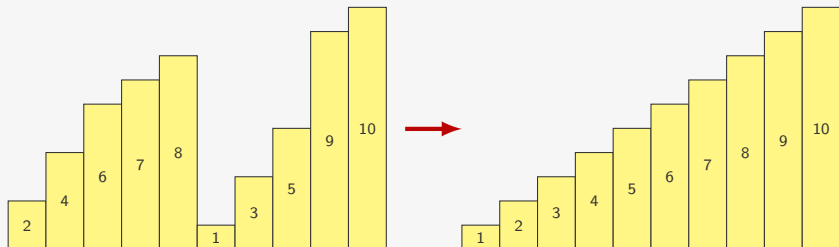
Para ordenar a segunda metade:

- executamos `ordenar(v, 5, 9);`

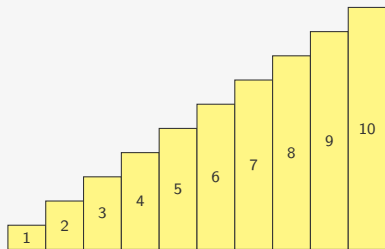
Ordenando todo o vetor

Se temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

- Como ordenar todo o vetor?



Intercalando



- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o **mínimo** e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante
- No final, copiamos do vetor auxiliar para o original

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- **Divisão:** Quebramos o problema em vários subproblemas menores
 - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois
- **Conquista:** Combinamos a solução dos problemas menores
 - ex: intercalamos os dois vetores ordenados

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em **v**:
 - O primeiro nas posições de **l** até **m**
 - O segundo nas posições de **m + 1** até **r**
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor
- Vamos considerar que o maior vetor tem tamanho **MAX**
 - Exemplo **#define MAX 100**

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2     int aux[MAX];
3     int i = l, j = m + 1, k = 0;
4     /*intercala*/
5     while (i <= m && j <= r)
6         if (v[i] <= v[j])
7             aux[k++] = v[i++];
8         else
9             aux[k++] = v[j++];
10    /*copia o resto do subvetor que não terminou*/
11    while (i <= m)
12        aux[k++] = v[i++];
13    while (j <= r)
14        aux[k++] = v[j++];
15    /*copia de volta para v*/
16    for (i = l, k = 0; i <= r; i++, k++)
17        v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

- a cada passo, aumentamos um em i ou em j
- no máximo $n := r - l + 1$

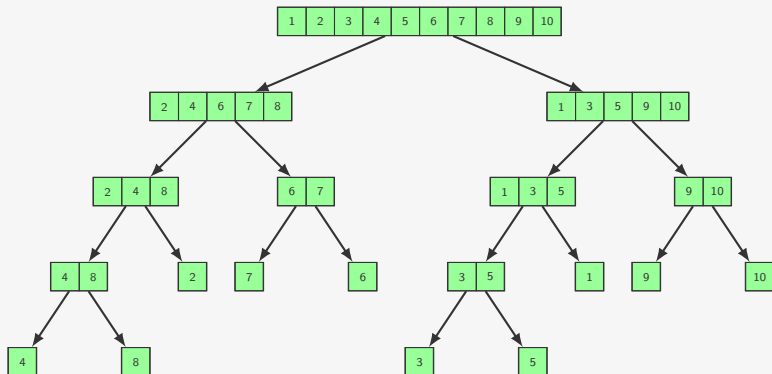
Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

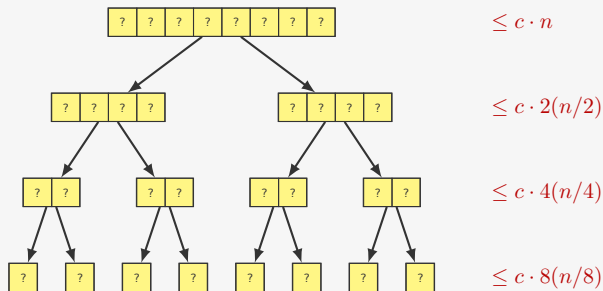
- Recebemos um **vetor** de tamanho n com limites:
 - O vetor começa na posição **vetor**[1]
 - O vetor termina na posição **vetor**[r]
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho 0 ou 1

```
1 void mergesort(int *v, int l, int r) {
2     int m = (l + r) / 2;
3     if (l < r) {
4         /*divisão*/
5         mergesort(v, l, m);
6         mergesort(v, m + 1, r);
7         /*conquista*/
8         merge(v, l, m, r);
9     }
10 }
```

Simulação

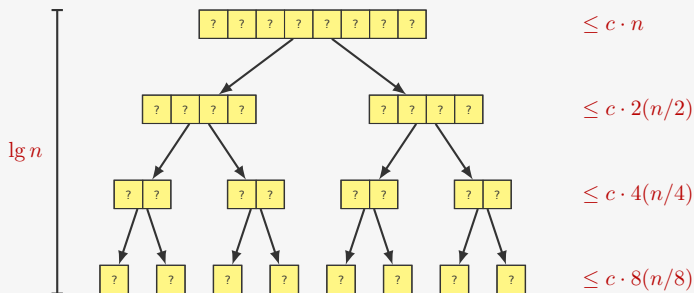


Tempo de execução para $n = 2^l$



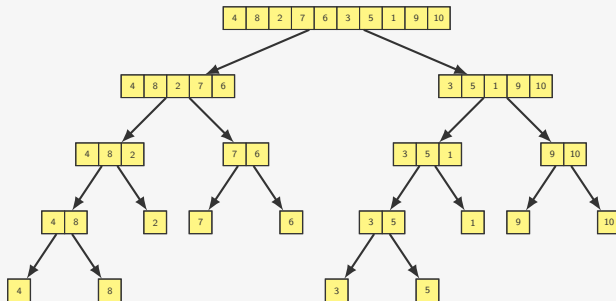
- No primeiro nível fazemos **um** merge com n elementos
- No segundo fazemos **dois** merge com $n/2$ elementos
- No $(k - 1)$ -ésimo fazemos 2^k merge com $n/2^k$ elementos
- No último gastamos tempo constante n vezes

Tempo de execução para $n = 2^l$



- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
 - Dividimos n por 2 até que fique menor ou igual a 1
 - Ou seja, $l = \lg n$
- Tempo total: $cn \lg n = O(n \lg n)$

Tempo de execução para n qualquer

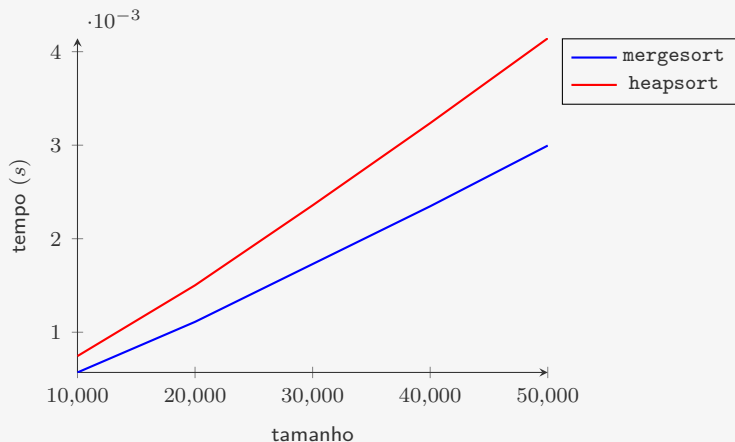


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
 - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
 - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c 2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n) = 2cn + 2cn \lg n = O(n \lg n)$$

Comparação entre mergesort e heapsort



mergesort é mais rápido do que o **heapsort**

- mas precisa de memória adicional
 - tanto para o vetor auxiliar - $O(n)$
 - quanto para a pilha de recursão - $O(\lg n)$

Quicksort - Ideia

- Escolhemos um **pivô** (ex: 4)
- Colocamos

Quicksort

```
1 int partition(int *v, int l, int r);
```

- escolhe um **pivô**
- coloca os elementos **menores à esquerda** do pivô
- coloca os elementos **maiores à direita** do pivô
- devolve a **posição final do pivô**

```
1 void quicksort(int *v, int l, int r) {  
2     int i;  
3     if (r <= l) return;  
4     i = partition(v, l, r);  
5     quicksort(v, l, i-1);  
6     quicksort(v, i+1, r);  
7 }
```

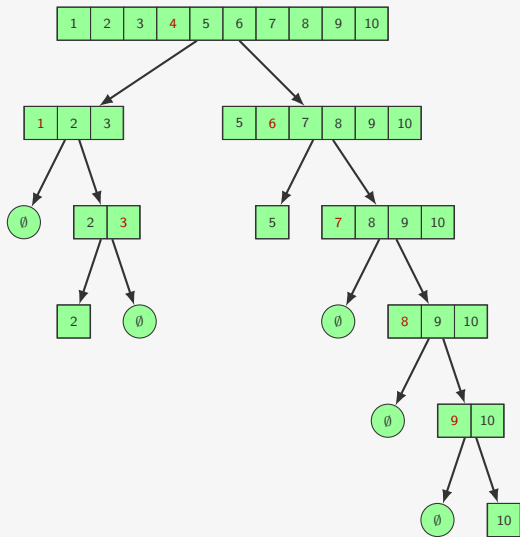
- Basta particionar o vetor em dois
- e ordenar o lado esquerdo e o direito

Como particionar um vetor?

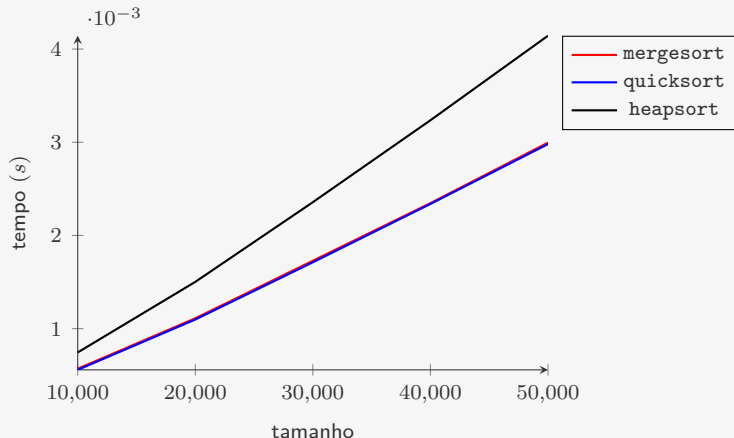
- Andamos da direita para a esquerda com um índice **i**
- De **i** até **pos - 1** ficam os menores do que o pivô
- De **pos** até **r** ficam os maiores ou iguais ao pivô
- Se o elemento em **i** for maior ou igual ao pivô
 - diminuimos **pos** e realizamos uma troca de **i** com **pos**
- No final, o pivô está em **pos**

```
1 int partition(int *v, int l, int r) {
2     int i, pivo = v[l], pos = r + 1;
3     for (i = r; i >= l; i--) {
4         if (v[i] >= pivo) {
5             pos--;
6             troca(&v[i], &v[pos]);
7         }
8     }
9     return pos;
10 }
```

Simulação do Quicksort



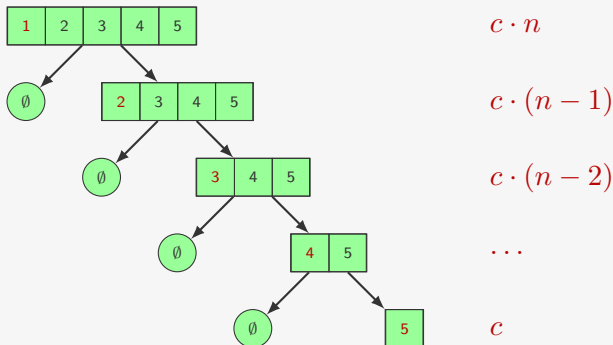
Comparação com o mergesort e heapsort



O **quicksort** foi levemente mais rápido do que o **mergesort**

- Mas ainda poderíamos otimizar o código dos três...
- Ou seja, um poderia ficar melhor do que o outro

Pior caso do QuickSort



O tempo de execução do Quicksort é, no pior caso:

$$c \cdot n + c \cdot (n - 1) + \dots + c = c \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) = c \sum_{j=1}^n j = c \frac{n(n + 1)}{2} = O(n^2)$$

Caso médio do QuickSort

Se o QuickSort é $O(n^2)$, como ele foi melhor que o HeapSort no experimento?

- Se o vetor for uma permutação aleatória de n números
- então o tempo médio (esperado) do QuickSort é $O(n \lg n)$
 - Nesse caso, o pivô particiona bem o vetor

Ou seja, o pior caso do QuickSort é “raro” nesse experimento

- Isso nem sempre é verdade
 - as vezes, os dados estão parcialmente ordenados
 - exemplo: inserção em blocos em um vetor ordenado

Vamos ver duas formas de mitigar esse problema

Mediana de Três

No **quicksort** escolhemos como pivô o elemento da esquerda

- Poderíamos escolher o elemento da direita ou do meio
- Melhor ainda, podemos escolher a mediana dos três
 - já que a mediana do vetor particiona ele no meio

```
1 void quicksort_mdt(int *v, int l, int r) {
2     int i;
3     if(r <= l) return;
4     troca(&v[(l+r)/2], &v[l+1]);
5     if(v[l] > v[l+1])
6         troca(&v[l], &v[l+1]);
7     if(v[l] > v[r])
8         troca(&v[l], &v[r]);
9     if(v[l+1] > v[r])
10        troca(&v[l+1], &v[r]);
11    i = partition(v, l+1, r-1);
12    quicksort_mdt(v, l, i-1);
13    quicksort_mdt(v, i+1, r);
14 }
```

- trocamos $v[(l+r)/2]$ com $v[l+1]$
- ordenamos $v[l]$, $v[l+1]$ e $v[r]$
- particionamos $v[l+1], \dots, v[r-1]$
 - $v[l]$ já é menor que o pivô
 - $v[r]$ já é maior que o pivô

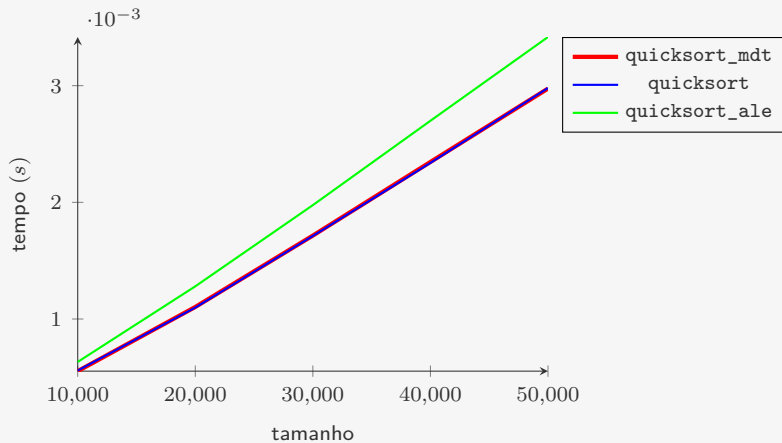
Quicksort Aleatorizado

```
1 int pivo_aleatorio(int l, int r) {
2     return l + (int)((r-l+1)*(rand() / ((double)RAND_MAX + 1)));
3 }
4
5 void quicksort_ale(int *v, int l, int r) {
6     int i;
7     if(r <= l) return;
8     troca(&v[pivo_aleatorio(l,r)], &v[l]);
9     i = partition(v, l, r);
10    quicksort_ale(v, l, i-1);
11    quicksort_ale(v, i+1, r);
12 }
```

O tempo de execução depende dos pivôs sorteados

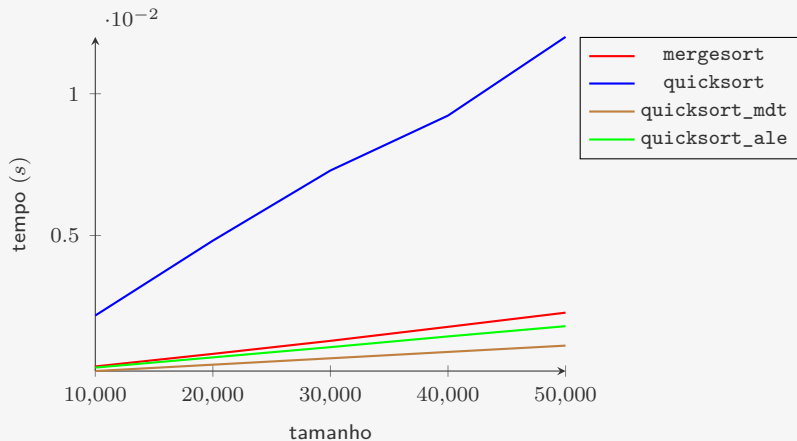
- O tempo médio é $O(n \lg n)$
 - as vezes é lento, as vezes é rápido
 - mas não depende do vetor dado

Experimentos - Vetores aleatórios



`quicksort_ale` adiciona um overhead desnecessário

Experimentos - vetores quase ordenados



0,5% de trocas entre pares escolhidos aleatoriamente

- **quicksort_mdt** é melhor
 - é esperado já que para vetores ordenados ele é $O(n \lg n)$

Conclusão

O MergeSort é um algoritmo de ordenação $O(n \lg n)$

- Em geral, melhor do que o HeapSort
- Mas precisa de espaço adicional $O(n)$

O QuickSort é um algoritmo de ordenação $O(n^2)$

- Mas ele pode ser rápido na prática
- Leva tempo $O(n \lg n)$ (em média) para ordenar uma permutação aleatória
- Sua versão aleatorizada é $O(n \lg n)$ em média
 - Não importa qual é o vetor de entrada
- Usar a mediana de três elementos como pivô pode melhorar o resultado
- Precisa de espaço adicional $O(n)$ para a pilha de recursão

Comparação Assintótica

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso	Memória
BubbleSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
SelectionSort	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
InsertionSort	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
HeapSort	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(1)$
MergeSort	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n)$
QuickSort	$O(n \lg n)$	$O(n \lg n)$	$O(n^2)$	$O(n)$

Exercício

Faça uma versão do MergeSort para listas ligadas.

Exercício

Faça uma versão do QuickSort que seja boa para quando há muitos elementos repetidos no vetor.

- A ideia é particionar o vetor em três partes: **menores**, **iguais** e **maiores** que o pivô

Exercício

Implemente a função

```
void mergeAB(int *v, int *a, int n, int *b, int m)
```

que dados vetores **a** e **b** de tamanho **n** e **m** faz a intercalação de **a** e **b** e armazena no vetor **v**. Suponha que **v** já está alocado e que tem tamanho maior ou igual a **n+m**.