# MC-202
# Backtracking

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2023

# Sequências

Como imprimir todas as sequências de tamanho $k$ de números entre $1$ e $n$?

Exemplo: $n = 4, k = 3$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 1 3 1 | 2 1 1 | 2 3 1 | 3 1 1 | 3 3 1 | 4 1 1 | 4 3 1 |
| 1 1 2 | 1 3 2 | 2 1 2 | 2 3 2 | 3 1 2 | 3 3 2 | 4 1 2 | 4 3 2 |
| 1 1 3 | 1 3 3 | 2 1 3 | 2 3 3 | 3 1 3 | 3 3 3 | 4 1 3 | 4 3 3 |
| 1 1 4 | 1 3 4 | 2 1 4 | 2 3 4 | 3 1 4 | 3 3 4 | 4 1 4 | 4 3 4 |
| 1 2 1 | 1 4 1 | 2 2 1 | 2 4 1 | 3 2 1 | 3 4 1 | 4 2 1 | 4 4 1 |
| 1 2 2 | 1 4 2 | 2 2 2 | 2 4 2 | 3 2 2 | 3 4 2 | 4 2 2 | 4 4 2 |
| 1 2 3 | 1 4 3 | 2 2 3 | 2 4 3 | 3 2 3 | 3 4 3 | 4 2 3 | 4 4 3 |
| 1 2 4 | 1 4 4 | 2 2 4 | 2 4 4 | 3 2 4 | 3 4 4 | 4 2 4 | 4 4 4 |

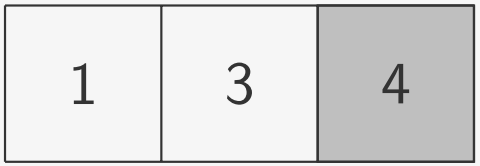
Toda sequência que começa com $i$ é seguida de uma sequência de tamanho $k - 1$ de números entre $1$ e $n$

# Sequências

Podemos resolver usando Recursão:

- Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
- Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente

Simulação para $n = 4, k = 3$:



# Sequências — Implementação

```
1  void sequencias(int n, int k) {
2    int *seq = malloc(k * sizeof(int));
3    sequenciasR(seq, n, k, 0);
4    free(seq);
5  }
6
7  void sequenciasR(int *seq, int n, int k, int i) {
8    int v;
9    if (i == k) {
10     imprimi_vetor(seq, k);
11     return;
12   }
13   for (v = 1; v <= n; v++) {
14     seq[i] = v;
15     sequenciasR(seq, n, k, i+1);
16   }
17 }
```

Note que `seq` funciona como uma pilha

- Acessamos sempre a última posição

# Sequências sem repetições

Queremos agora imprimir todas as sequências de tamanho $k$ de números entre $1$ e $n$ sem repetições

Primeiro algoritmo:

- já temos um algoritmo que gera todas as sequências com repetições
- testar se uma sequência tem repetição é fácil
- basta imprimir as sequências que passarem no teste!

# Checando por repetições

```
1  int busca(int *vetor, int k, int valor) {
2    int i;
3    for (i = 0; i < k; i++)
4      if (vetor[i] == valor)
5        return 1;
6    return 0;
7  }
8
9  int tem_repeticao(int *vetor, int k) {
10   int i;
11   for (i = k - 1; i > 0; i--)
12     if (busca(vetor, i, vetor[i]))
13       return 1;
14   return 0;
15 }
```

# Checando por repetições

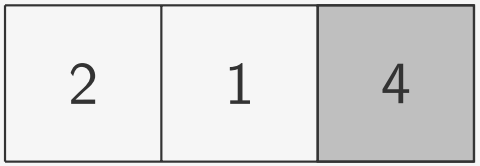
```
1  void sem_repeticao(int n, int k) {
2    int *seq = malloc(k * sizeof(int));
3    sem_repeticaoR(seq, n, k, 0);
4    free(seq);
5  }
6
7  void sem_repeticaoR(int *seq, int n, int k, int i) {
8    int v;
9    if (i == k) {
10     if (!tem_repeticao(seq, k))
11       imprimi_vetor(seq, k);
12     return;
13   }
14   for (v = 1; v <= n; v++) {
15     seq[i] = v;
16     sem_repeticaoR(seq, n, k, i+1);
17   }
18 }
```

# Segundo Algoritmo

Podemos construir a sequência sem permitir repetições

- Basta verificar se o número já está na sequência

Simulação para $n = 4, k = 3$:



# Segundo Algoritmo

```
1  void sem_repeticaoR(int *seq, int n, int k, int i) {
2    int v;
3    if (i == k) {
4      imprimi_vetor(seq, k);
5      return;
6    }
7    for (v = 1; v <= n; v++) {
8      if (!busca(seq, i, v)) {
9        seq[i] = v;
10       sem_repeticaoR(seq, n, k, i+1);
11     }
12   }
13 }
```

# Terceiro Algoritmo

Guardamos a informação de quais números já foram usados

- Vetor `usado` de `n + 1` posições
- `usado[i] = 1` se `i` está no prefixo
- `usado[i] = 0` se `i` não está no prefixo
- Bem mais rápido do que fazer a busca

# Terceiro Algoritmo

```
1  void sem_repeticao(int n, int k) {
2    int *seq = malloc(k * sizeof(int));
3    int *usado = calloc(n + 1, sizeof(int));
4    sem_repeticaoR(seq, usado, n, k, 0);
5    free(seq);
6    free(usado);
7  }
8
9  void sem_repeticaoR(int *seq, int *usado, int n, int k, int i) {
10   int v;
11   if (i == k) {
12     imprimi_vetor(seq, k);
13     return;
14   }
15   for (v = 1; v <= n; v++) {
16     if (!usado[v]) {
17       seq[i] = v;
18       usado[v] = 1;
19       sem_repeticaoR(seq, usado, n, k, i+1);
20       usado[v] = 0;
21     }
22   }
23 }
```

# Comparação

Primeiro algoritmo:

- Gera todas as sequências com repetições
- Testa para ver se a sequência tem repetições
- Tempo para $n = k = 10$: 116,98s

Segundo algoritmo:

- Gera apenas sequências sem repetições
- Usa `busca` para ver se o número já está na sequência
- Tempo para $n = k = 10$: 4,16s

Terceiro algoritmo:

- Gera apenas sequências sem repetições
- Usa um vetor para ver se o número já está na sequência
- Tempo para $n = k = 10$: 3,83s

# Força Bruta

Geramos os candidatos a solução do problema e testamos para ver se é de fato uma solução

- Ex.: para quebrar uma senha, podemos gerar cada senha sistematicamente e testamos se é a senha válida
- Podemos enumerar estruturas (como sequências)
- Podemos encontrar todas as soluções de um problema

Porém, a força bruta pode ser muito lenta para resolver determinados problemas

# Backtracking — Retrocesso

Resolver um problema de forma recursiva, podendo tomar decisões erradas

- Nesse caso, escolhemos outra decisão

Construímos soluções passo-a-passo, retrocedendo se a solução parcial atual não é válida

- Começamos com uma solução parcial vazia
- Enquanto for possível, adicionamos um elemento à solução parcial
- Se encontrarmos uma solução completa, terminamos
- Se não é possível adicionar mais nenhum elemento à solução parcial, retrocedemos
  - removemos um ou mais elementos da solução parcial
  - e tomamos decisões diferentes das que foram tomadas

# Sudoku

No Sudoku, nós temos uma matriz $9 \times 9$ com algumas entradas preenchidas com números entre $1$ e $9$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 9 | 2 | 4 | 3 | 1 | 6 | 8 |
| 3 | 2 | 8 | 9 | 1 | 6 | 4 | 5 | 7 |
| 1 | 4 | 6 | 8 | 5 | 7 | 9 | 2 | 3 |
| 9 | 7 | 2 | 6 | 8 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 8 | 5 | 7 | 3 | 9 | 6 | 1 | 2 |
| 6 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| 8 | 9 | 7 | 5 | 6 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 6 | 1 | 3 | 9 | 8 | 5 | 7 | 4 |
| 5 | 3 | 4 | 1 | 7 | 2 | 8 | 9 | 6 |

Objetivo: completar a matriz com números entre $1$ e $9$ sem repetir números nas linhas, nas colunas e nas células

# Sudoku - Resolução por Backtracking

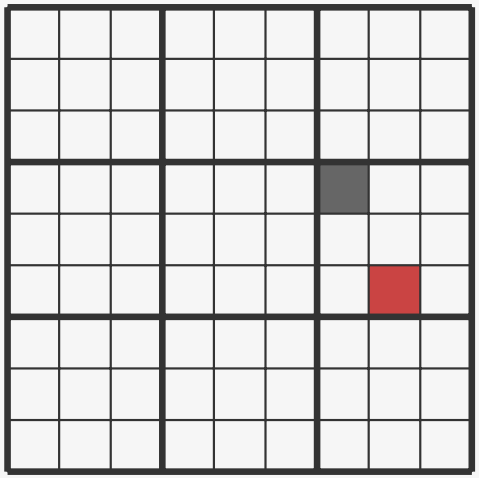
Preenchemos o Sudoku gradualmente:

- até encontrar uma posição sem valor válido
- retrocedemos e continuamos a busca

| | | | 2 | 4 | 3 | 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 8 | | | 6 | | 5 | |
| | 4 | | | | | | | |
| | | | 6 | | | | | 5 |
| 4 | 8 | | 7 | 3 | 9 | 6 | 1 | |
| | | | 4 | | | | | 9 |
| | 9 | | | | | | | |
| | | 1 | | | 8 | | 7 | |
| | | | 1 | 7 | 2 | 8 | | |

# Sudoku — Código

```
1  int pode_inserir(int m[9][9], int l, int c, int v) {
2    int i, j, cel_l, cel_c;
3    for (i = 0; i < 9; i++)
4      if (m[l][i] == v) /* aparece na linha l? */
5        return 0;
6    for (i = 0; i < 9; i++)
7      if (m[i][c] == v) /* aparece na coluna c? */
8        return 0;
9
10   cel_l = 3 * (l / 3);
11   cel_c = 3 * (c / 3);
12   for (i = cel_l; i < cel_l + 3; i++)
13     for (j = cel_c; j < cel_c + 3; j++)
14       if (m[i][j] == v) /* aparece na célula? */
15         return 0;
16   return 1;
17 }
```



# Sudoku — Código

```
1  int sudoku(int m[9][9]) {
2    int i, j, fixo[9][9];
3    for (i = 0; i < 9; i++)
4      for (j = 0; j < 9; j++)
5        fixo[i][j] = m[i][j]; /* diferente de zero é verdadeiro */
6    return sudokuR(m, fixo, 0, 0);
7  }
8
9  void proxima_posicao(int l, int c, int *nl, int *nc) {
10   if (c < 8) {
11     *nl = l;
12     *nc = c+1;
13   } else {
14     *nl = l+1;
15     *nc = 0;
16   }
17 }
```

# Sudoku — Código

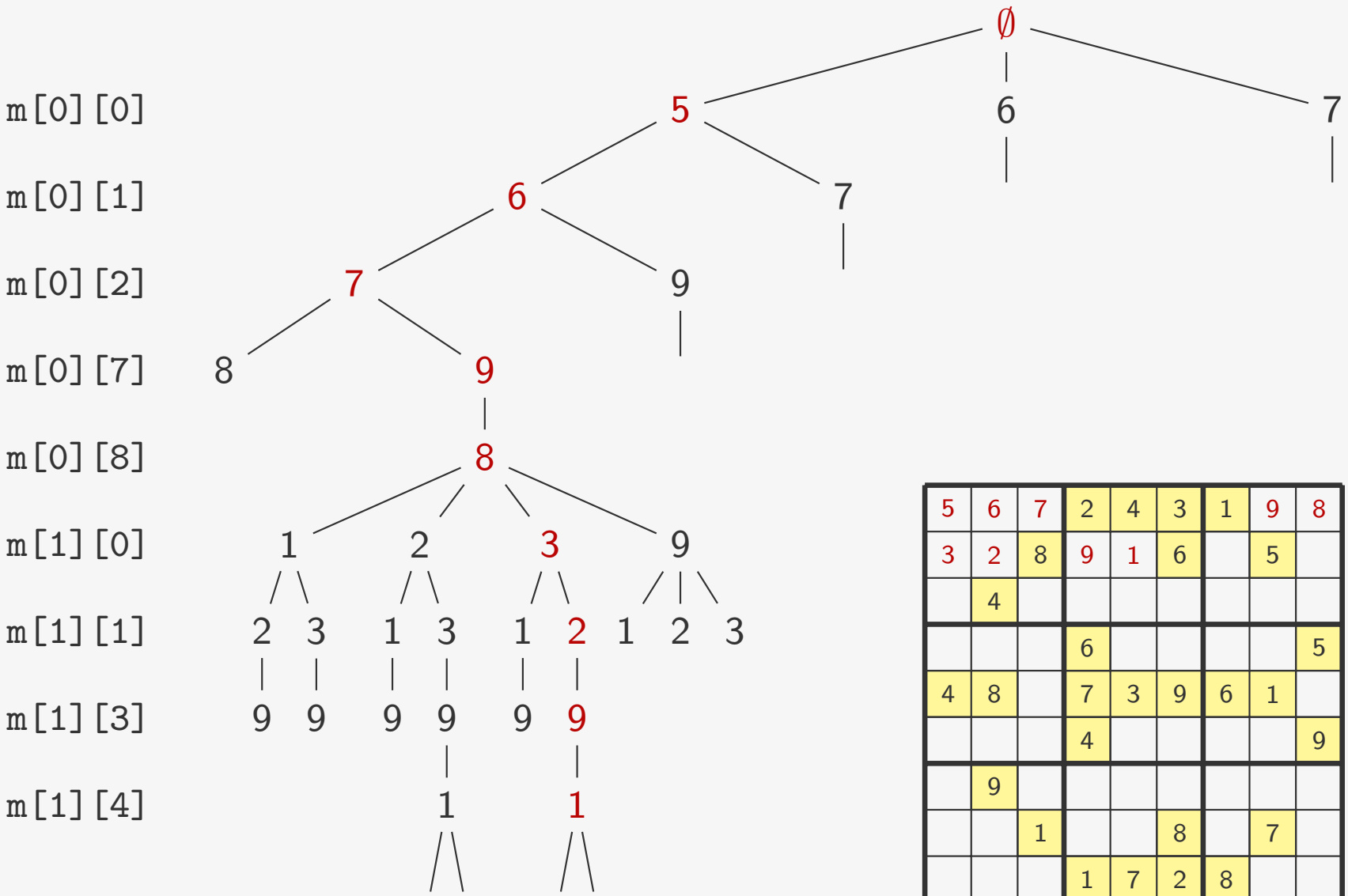
```
1  int sudokuR(int m[9][9], int fixo[9][9], int l, int c) {
2    int v, nl, nc;
3    if (l == 9) {
4      imprimi_sudoku(m);
5      return 1;
6    }
7    proxima_posicao(l, c, &nl, &nc);
8    if (fixo[l][c])
9      return sudokuR(m, fixo, nl, nc);
10   for (v = 1; v <= 9; v++) {
11     if (pode_inserir(m, l, c, v)) {
12       m[l][c] = v;
13       if(sudokuR(m, fixo, nl, nc))
14         return 1;
15     }
16   }
17   m[l][c] = 0;
18   return 0;
19 }
```

# Árvore de soluções parciais

Podemos representar a busca pela solução como uma árvore:

- Cada solução parcial é um nó da árvore
- Uma solução parcial $B$ é filha de uma solução parcial $A$ se pode ser podemos estender $A$ em um passo para obter $B$
- Ex.: No Sudoku, se já preenchemos $k$ entradas e podemos preencher a entrada $k+1$, então essa nova solução parcial é filha da anterior
- Se uma solução parcial não tem filhos, então
  - Ou é uma solução completa
  - Ou não tem como estender mais a solução

# Sudoku — Árvore de soluções parciais




| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 2 | 4 | 3 | 1 | 9 | 8 |
| 3 | 2 | 8 | 9 | 1 | 6 | | 5 | |
| | 4 | | | | | | | |
| | | | 6 | | | | | 5 |
| 4 | 8 | | 7 | 3 | 9 | 6 | 1 | |
| | | | 4 | | | | | 9 |
| | 9 | | | | | | | |
| | | 1 | | | 8 | | 7 | |
| | | | 1 | 7 | 2 | 8 | | |

# Árvore de soluções parciais

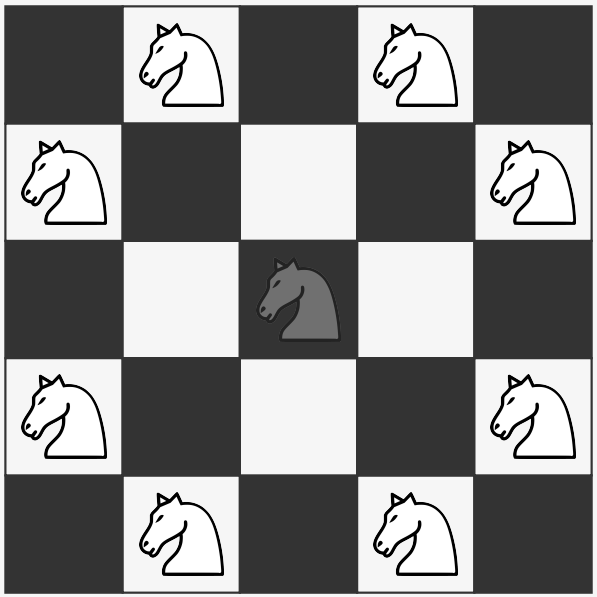
O Backtracking é uma busca em profundidade:

- Avançamos o máximo possível em uma única direção
- Se não encontramos a solução,
  - retrocedemos o mínimo possível e
  - pegamos um caminho que nunca usamos antes
  - novamente avançando o máximo possível
- O grafo existe implicitamente
  - Os vértices são as soluções parciais
  - Os arcos indicam se é possível estender uma solução para outra

# Passeio do Cavalo no Tabuleiro de Xadrez

Movimento do cavalo no xadrez — formato de **L**:

- dois quadrados horizontalmente e um verticalmente, ou
- dois quadrados verticalmente e um horizontalmente

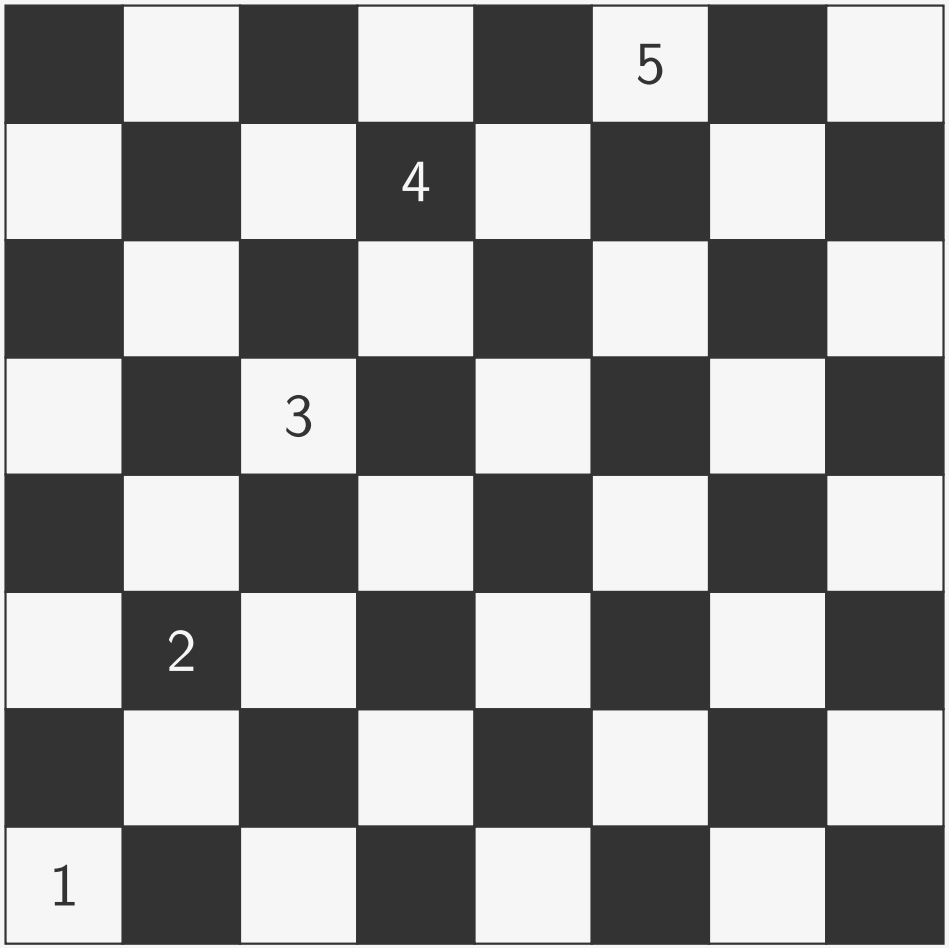


Dado um tabuleiro de xadrez $n \times n$ e uma posição $(x, y)$ do tabuleiro queremos encontrar um passeio de um cavalo que visite cada casa exatamente uma vez

# Simulação

Matriz `m` armazena os movimentos do cavalo

- `m[l][c]` $= 0$: posição $(\texttt{l}, \texttt{c})$ ainda não foi visitada
- `m[l][c]` $= i > 0$: posição $(\texttt{l}, \texttt{c})$ foi visitada no passo $i$



# Passeio do Cavalo — Código

```
1  int cavalo(int **m, int n, int x, int y) {
2    int i, j;
3    for (i = 0; i < n; i++)
4      for (j = 0; j < n; j++)
5        m[i][j] = 0;
6    m[x][y] = 1;
7    return cavaloR(m, n, x, y);
8  }
9
10 void proxima_posicao(int l, int c, int k, int *nl, int *nc) {
11   static int movimentos[8][2] = {{2, 1}, {1, 2}, {-1, 2},
12                                  {-2, 1}, {-2,-1}, {-1, -2},
13                                  {1, -2}, {2, -1}};
14   *nl = l + movimentos[k][0];
15   *nc = c + movimentos[k][1];
16 }
```

# Cavalo — Código

```
1  int cavaloR(int **m, int n, int l, int c) {
2    int k, nl, nc;
3    if (m[l][c] == n * n)
4      return 1;
5    for (k = 0; k < 8; k++) {
6      proxima_posicao(l, c, k, &nl, &nc);
7      if ((nl >= 0) && (nl < n) && (nc >= 0) && (nc < n)
8          && (m[nl][nc] == 0)) {
9        m[nl][nc] = m[l][c] + 1;
10       if (cavaloR(m, n, nl, nc))
11         return 1;
12       m[nl][nc] = 0;
13     }
14   }
15   return 0;
16 }
```

# Eficiência do Backtracking

- Em geral, mais rápido que a Força Bruta pois eliminamos vários candidatos a solução de uma só vez
- Implementação simples, mas pode ser lento para problemas onde temos muitas soluções parciais possíveis

Como fazer um algoritmo de Backtracking rápido?

- Ter um algoritmo para decidir se uma solução parcial pode ser estendida para uma solução completa que seja
  - Bom: Evita explorar muitas soluções parciais
  - Rápido: Processa cada solução parcial rapidamente

# Aplicações para Backtracking

Para aplicar Backtracking é necessário que o problema tenha um conceito de solução parcial

- Problemas de satisfação de restrições
  - Encontrar uma solução que satisfaça as restrições
  - Como o Sudoku, por exemplo
- Problemas de Otimização Combinatória
  - Conseguimos enumerar as soluções do problema
  - Queremos encontrar a de valor mínimo
- Programação Lógica (Prolog, por exemplo)
  - Prova automática de teoremas

# Exercício

Crie um algoritmo que, dado $n$ e $C$, imprime todas as sequências de números não-negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C$$

a) Modifique o seu algoritmo para considerar apenas sequências sem repetições

b) Modifique o seu algoritmo para imprimir apenas sequências com $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

# Exercício

Modifique o algoritmo que resolve o Sudoku para saber rapidamente se um valor já foi usado numa linha, coluna ou célula.
**Dica**: use matrizes auxiliares.