MC-202
Algoritmos em Grafos

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

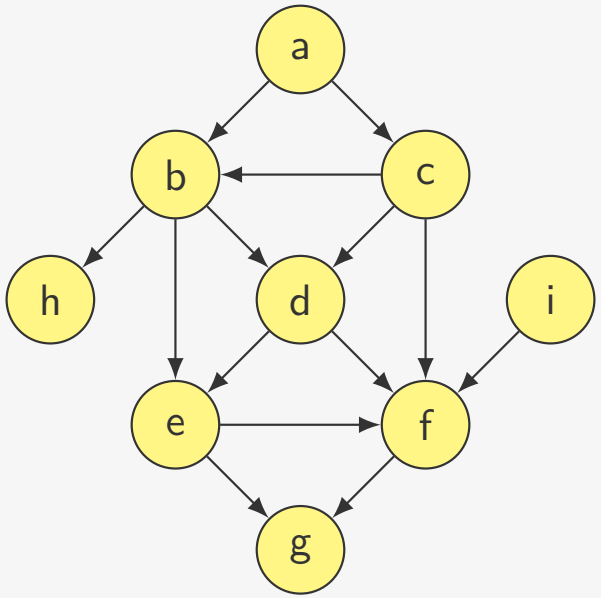
Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2023

Realizando tarefas

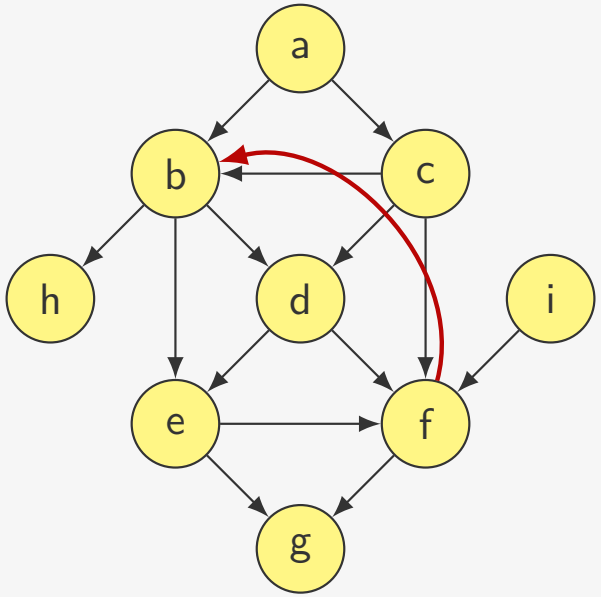
Queremos realizar várias tarefas, mas existem dependências

- Ex: Makefile
- Para uma tarefa ser realizada, precisamos primeiro realizar todas as tarefas das quais elas dependem
- Vamos modelar usando um digrafo



Ciclos e DAGs

É possível realizar as tarefas de acordo com as dependências deste digrafo?

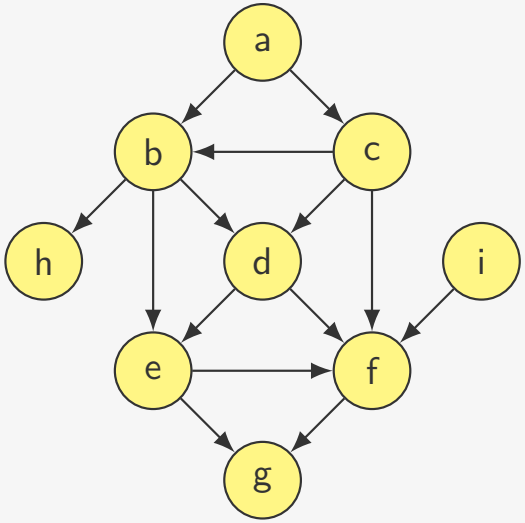


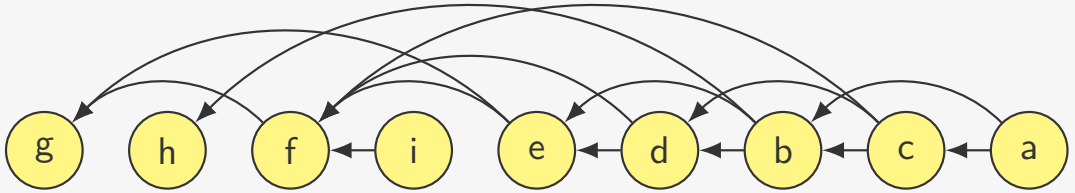
Um digrafo acíclico (DAG - *directed acyclic graph*) é um digrafo que não contém ciclos dirigidos

- Porém, ele pode ter ciclos não-dirigidos (ex: a, b, d, c, a)

As tarefas podem ser realizadas se e somente se o digrafo de dependências das tarefas é um DAG

Ordem para realizar tarefas

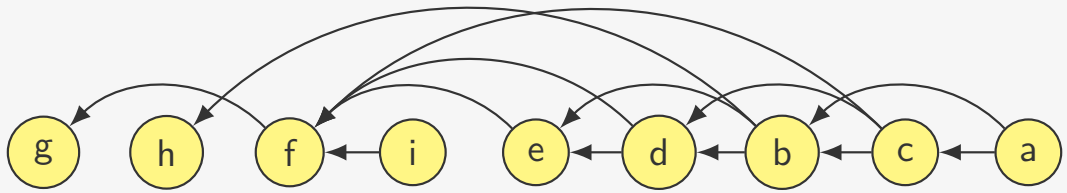




Em qual ordem devemos realizar essas tarefas?

- g e h não dependem de outra tarefa
- f depende apenas de g
- i depende apenas de f
- e depende apenas de f e g
- d depende apenas de e e f
- b depende apenas de h, e e d
- c depende apenas de b, d e f
- a depende apenas de b e c

Ordenação Topológica



Uma ordenação topológica (reversa) de um DAG é:

- Uma ordenação dos vértices do DAG
- onde um vértice que aparece na posição i
- tem arcos apenas para vértices em $\{0, 1, \ldots, i-1\}$
  - Na figura, os arcos vão apenas da direita para a esquerda
- i.e., podemos realizar as tarefas na ordem dada

Como encontrar um ordenação topológica?

Considere um vértice u do DAG:

- Todo v tal que (u, v) é arco deve aparecer antes de u
- Todo w tal que (v, w) e arco deve aparecer antes de v
- E assim por diante

Devemos considerar todos w para os quais existe caminho de u para w antes de considerar u

- Lembra uma pós-ordem em árvores binárias...

Como encontrar todo w tal que existe caminho de u para w?

- Busca em profundidade

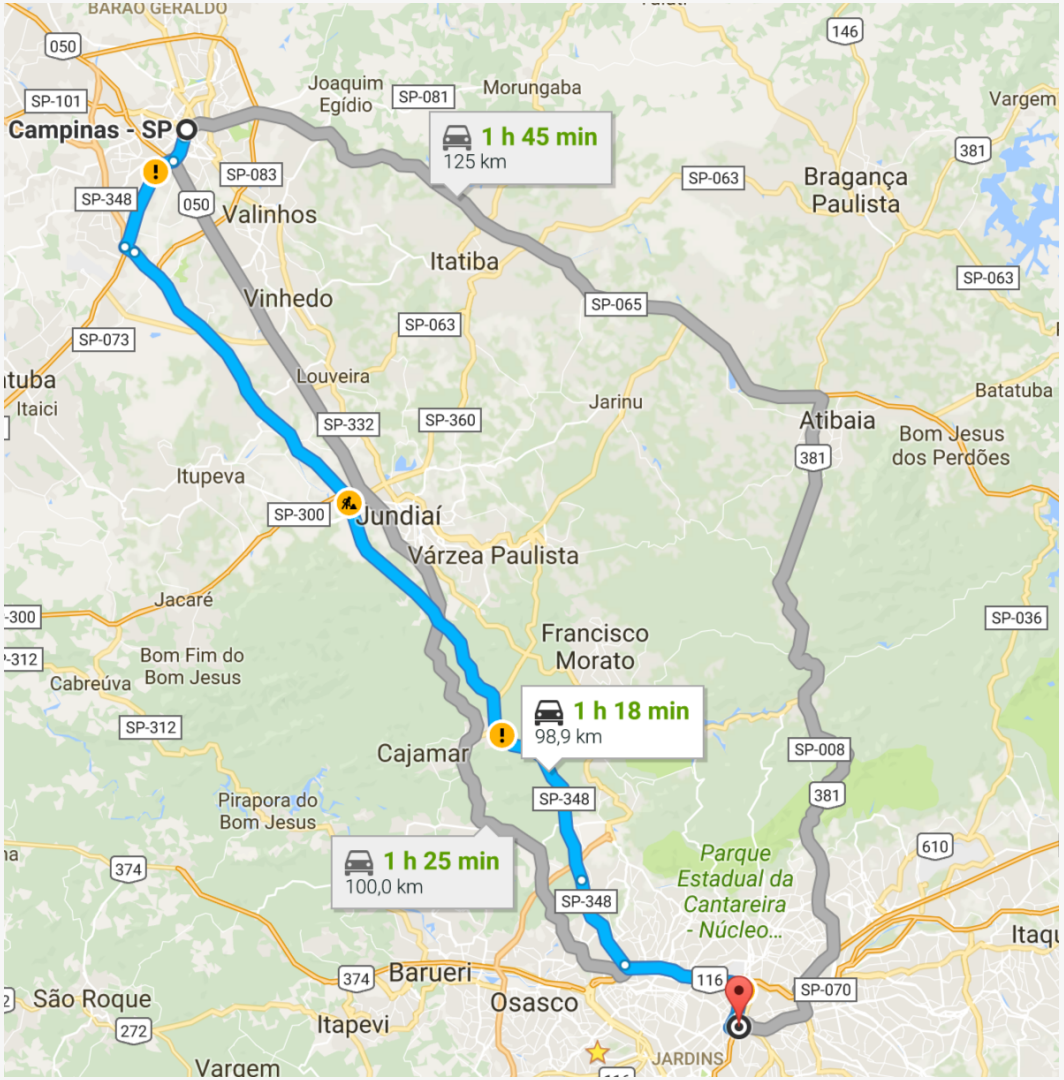
Implementação

```
1  void ordenacao_topologica(p_grafo g) {
2    int s, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3    for (s = 0; s < g->n; s++)
4      visitado[s] = 0;
5    for (s = 0; s < g->n; s++)
6      if (!visitado[s])
7        visita_rec(g, visitado, s);
8    free(visitado);
9    printf("\n");
10 }
```

```
1  void visita_rec(p_grafo g, int *visitado, int v) {
2    p_no t;
3    visitado[v] = 1;
4    for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
5      if (!visitado[t->v])
6        visita_rec(g, visitado, t->v);
7    printf("%d ", v);
8  }
```

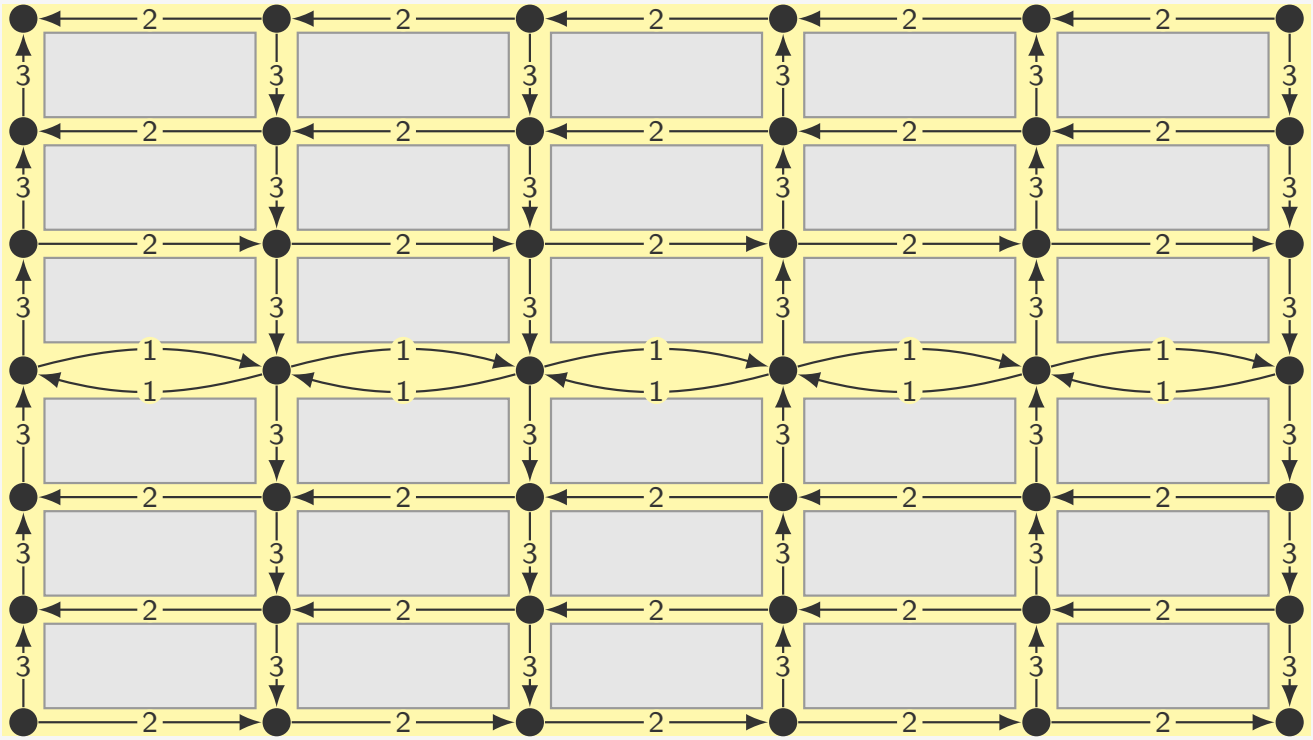
Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



Encontrando o menor caminho

Como encontrar o menor tempo para ir de A para B?



Modelamos como um digrafo com pesos nos arcos:

- Um vértice em cada cruzamento
- Um arco entre vértices consecutivos
- O peso do arco (u, v) é o tempo de viagem de u para v

Tempo de percurso do caminho: 20

Digrafos com pesos nas arestas — Representação

Como representar grafos com pesos nas arestas?

Listas de Adjacência:

- Basta adicionar um campo `peso` no Nó da lista ligada

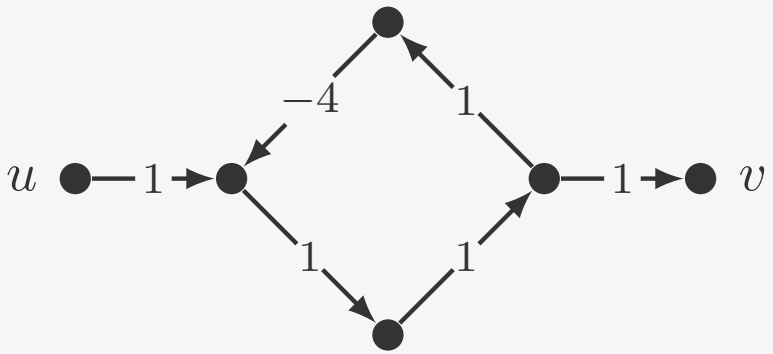
Matriz de Adjacências:

- Podemos indicar que não há arco usando peso `0`
  - Isso nem sempre é uma boa opção
  - Podemos trocar por `-1` ou então `INT_MAX`
- Ou fazemos uma struct com dois campos
  - um indica se há arco ou não
  - outro denota o peso do arco

Caminhos mínimos

Queremos encontrar um caminho de peso mínimo de u para v no digrafo

- Consideramos que os pesos são não-negativos
- Se não, podemos querer percorrer um ciclo negativo infinitas vezes...



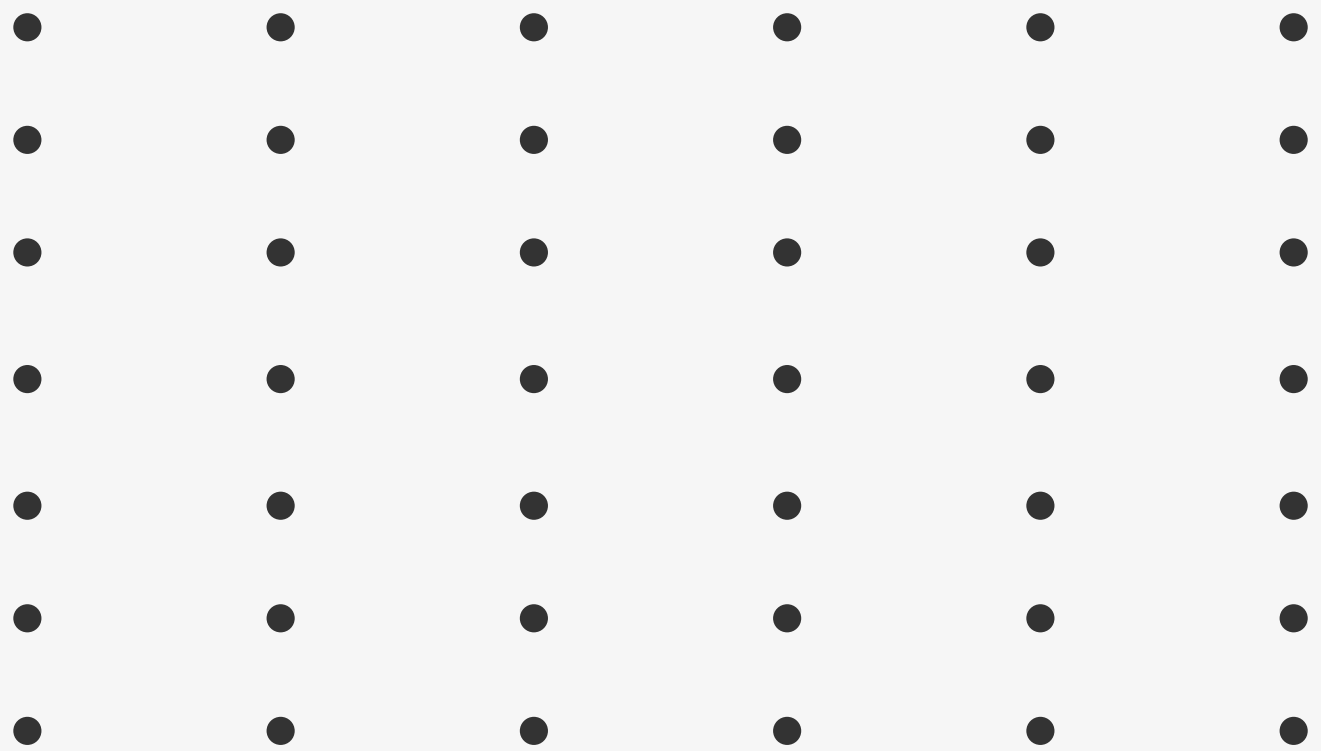
Como é o caminho mínimo de u para v?

- Ou u é vizinho de v
- Ou o caminho passa por um vizinho w de v
  - Soma do peso do caminho de u para w e de (w, v) é mínima
  - Este caminho de u a w tem que ter peso mínimo

Árvore de Caminhos mínimos

Árvore de caminhos mínimos (a partir de u):

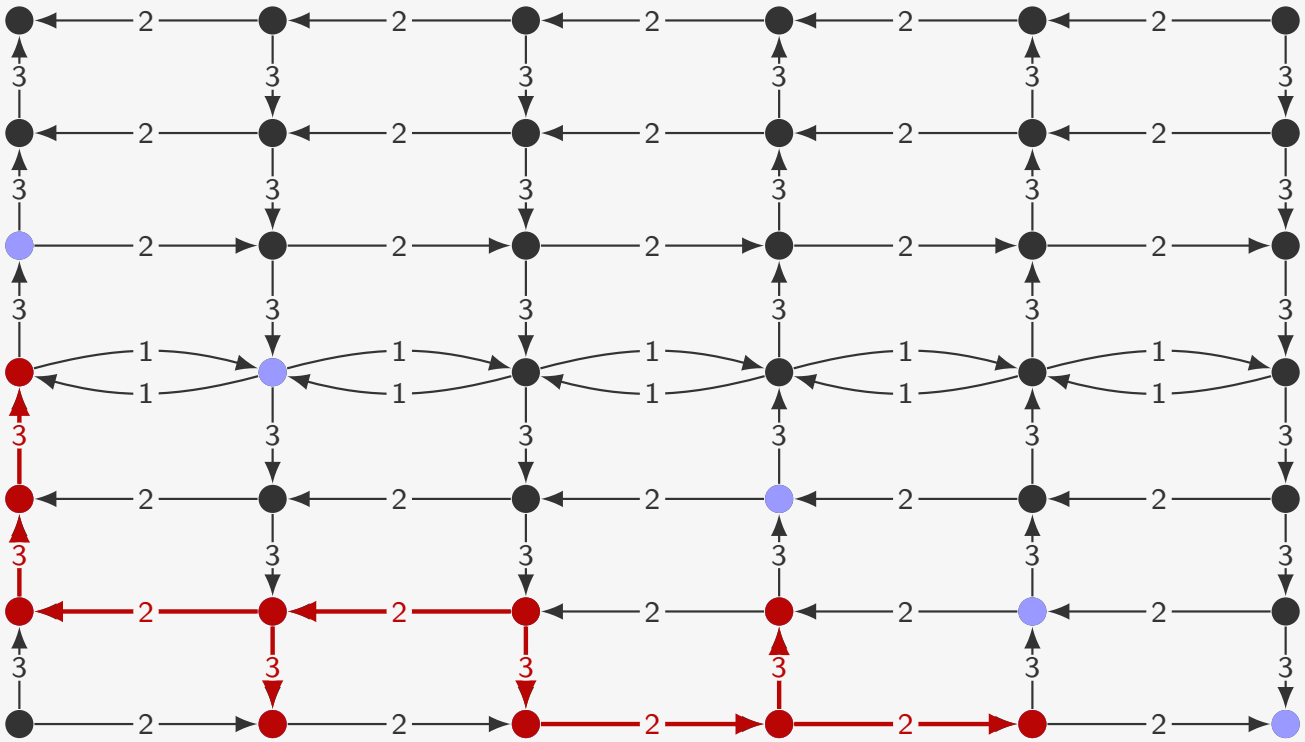
- Dado u, o algoritmo encontra uma árvore enraizada em u
- De forma que o caminho de v para u na árvore seja um caminho mínimo de u para v no digrafo



Algoritmo de Dijkstra

Em um certo momento já construímos parte da árvore

- Temos um conjunto de vértices que ainda não entraram
- Alguns destes são vizinhos de vértices já na árvore
- Eles estão na franja
- Pegamos o vértice na franja mais próximo de u



Implementação

Grafo

```
1  typedef struct no *p_no;
2
3  struct no {
4    int v;
5    int peso;
6    p_no prox;
7  };
8
9  typedef struct grafo *p_grafo;
10
11 struct grafo {
12   int n;
13   p_no *adj;
14 };
```

Heap binário

```
1  typedef struct {
2    int prioridade;
3    int vertice;
4  } Item;
5
6  typedef struct {
7    Item *v;
8    int *indice;
9    int n, tamanho;
10 } FP;
11
12 typedef FP * p_fp;
```

Implementação

```
1  int * dijkstra(p_grafo g, int s) {
2    int v, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
3    p_no t;
4    p_fp h = criar_fprio(g->n);
5    for (v = 0; v < g->n; v++) {
6      pai[v] = -1;
7      insere(h, v, INT_MAX);
8    }
9    pai[s] = s;
10   diminuiprioridade(h, s, 0);
11   while (!vazia(h)) {
12     v = extrai_minimo(h);
13     if (prioridade(h, v) != INT_MAX)
14       for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
15         if (prioridade(h, v)+t->peso < prioridade(h, t->v)) {
16           diminuiprioridade(h,t->v,prioridade(h,v)+t->peso);
17           pai[t->v] = v;
18         }
19   }
20   return pai;
21 }
```

Tempo: $\mathrm{O}(|E| \lg |V|)$