1.- (0,75 ptos.) Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) La fórmula $\exists X p(X) \rightarrow p(a)$ es válida.

$\neg (\exists X p(X) \rightarrow p(a))$

$\exists X p(X) , \neg p(a)$

$p(a) , \neg p(a)$ → No es válida

b) Sea S un conjunto de cláusulas del Cálculo Proposicional y supongamos que un literal l aparece en alguna cláusula de S y que l^c no aparece en ninguna cláusula de S. Sea S ′ la forma clausal obtenida a partir de S eliminando todas las cláusulas en las que aparece l. Entonces, S ≈ S ′ .

S ≈ S' siempre que S sea satisfactible si y sólo si S' es satisfactible.

Supongamos que S' es satisfactible.

$v(C') = T$ para todo $C' \in S'$

Extendemos v

$v(l) = T$; luego $v(C) = T$ para todo $C' \in S$.

Luego, si S es sacisfactible, S' lo es

Ejemplo: {pqr, p r , q} Es satisfactible. Si v(q) = T y v(p) = T. Tomando como S' {r} y extendiendo el modelo a S añadiendo v(p) = T. [v(p) el valor que sea]

c) Sea A(X1, . . . , Xn) una fórmula sin cuantificadores y sin símbolos de función. Entonces, la fórmula:

$$\forall X1 \cdots \forall Xn A(X1, \ldots , Xn)$$

es satisfacible si y solo si es satisfacible para una interpretación cuyo dominio se reduce a un único elemento.

A' = A(X1, . . . , Xn)

$v(A') = T$ para toda asignación σI si y sólo si $v_{\sigma I} (\forall X1 \cdots \forall Xn A) = T$

d) Demostrar que la fórmula $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$, donde

$$A_1 = \forall X \exists Y\, p(X, Y)$$
$$A_2 = \forall X \neg p(X, X)$$
$$A_3 = \forall X \forall Y \forall Z (p(X, Y) \wedge p(Y, Z)) \rightarrow p(X, Z)$$

no admite un modelo finito.

Comprobación por reducción a lo absurdo. Dominio finito D $d_1 \in D$

Por A_1, $d_2 \in D$ t.q $p(d_1, d_2)$. Luego $d_1, \ldots, d_n, \ldots$, t.q $p(d_i, d_{i+1})$

Por A_2, $i, j \in N$ t.q $d_i = d_j$; luego $\neg p(d_i, d_j)$

Por A_3, $\forall$ $i < j$ con $i, j \in N$, $p(d_i, d_j)$.

Por tanto, A_2 y A_3, se contradicen

e) ¿Por qué se exige en la regla de resolución del Cálculo de Predicados que las cláusulas generatrices no tengan variables en común?

En el caso de que dos clausulas contengan variables en común, es necesario renombrar una o ambas para evitar que haya repeticiones de nombres, de manera que la resolución no pueda fallar. Esta operación es posible dado que las variables son mudas y solo tienen relevancia en la clausula en la que aparecen

.

f) Demostrar que si C_1 y C_2 son cláusulas (del cálculo proposicional) generatrices, su resolvente es satisfacible si y solo C_1 y C_2 son simultáneamente satisfacibles.

$l \quad l^c$

Si C_1 y C_2 son simultaneamente satisfactibles $\leftrightarrow$ $Res(C_1, C_2) = C$ también lo es

$\rightarrow V(l) = T \qquad V(l^c) = F \qquad\qquad V(l^c) = T \qquad V(l) = F$

$\exists l' \in C2$ t.q $V(l') = T \qquad\qquad \exists l'' \in C1$ t.q $V(l'') = T$

luego $V(C) = T \qquad\qquad$ luego $V(C) = T$

$\leftarrow V(l''') = T$

Si $l''' \in C1 \qquad V(l) = F \qquad$ C1 y C2 son satisfactibles

Si $l''' \in C2 \qquad V(l) = T \qquad$ C1 y C2 son satisfactibles

g) Toda fórmula satisfacible del Cálculo de Predicados admite un modelo finito

Esta afirmación es falsa, pues puede haber fórmulas que sean satisfactibles, pero que sin embargo no admitan un modelo finito, como por ejemplo sería la fórmula $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$, donde:

$A_1 = \forall X \exists Y\, p(X, Y)$

$A_2 = \forall X \neg p(X, X)$

$A_3 = \forall X \forall Y\, \forall Z (p(X, Y) \wedge p(Y, Z)) \rightarrow p(X, Z)$

h) ¿Qué relación existe entre los tableros semánticos en el Cálculo Proposicional y la forma normal disyuntiva?

Las reglas de construcción de los tableros semánticos en el Cálculo de Predicados se recogen en tablas en función del tipo de fórmula:

-Las $\alpha-$ fórmulas son fórmulas conjuntivas y se satisfacen si lo hacen cada una de las subfórmulas $\alpha1$ y $\alpha2$.

-Las $\beta-$fórmulas son fórmulas disyuntivas, se satisfacen si una de sus subfórmulas $\beta1$ o $\beta2$ lo hace.

i) En el proceso de skolenización, ¿cómo se eliminan los cuantificadores existenciales una vez la fórmula en forma normal conjuntiva prenexa?

¿Por qué esa forma de eliminar los cuantificadores existenciales no cambia la satisfabilidad o no satisfabilidad de la fórmula inicial?

Esta eliminación se lleva a cabo introduciendo nuevos símbolos de función. Por ejemplo, si consideramos la fórmula $A = \forall X \exists Y\, p(X, Y)$, se elimina el cuantificador existencial transformando la fórmula en $A' = \forall X p(X, f(X))$. Estamos expresando casi la misma idea:

- La fórmula A dice que para todo X, se puede producir un valor Y de tal forma que el predicado sea cierto.
- La fórmula A' , se explicita una forma de hacer esta elección.

Las fórmulas no son lógicamente equivalentes, pero sí se comportan igual en cuanto a satisfabilidad.