Apuntes CRA

① Definiciones

NAND NOR

exclusivo

Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $|$, $\downarrow$

- Átomos: p, q, ...
- Fórmulas: contienen átomos unidos por conectivos. A, B, C, ...
- Proposiciones: conjunto de fórmulas: $\mathcal{P}$
- Interpretación: el valor de una proposición puede ser verdadero o falso. $v(A) \in \{T, F\}$
- Dos fórmulas A y B son equivalentes si $v(A) = v(B)$. Se denota $A \equiv B$. ($\equiv$ = $\leftrightarrow$).
- Interpretación: cjto. de valores de los átomos de un cjto de fórmulas.

② Satisfabilidad, validez

Sea v el cjto. de átomos con asignación (p. ej. p=1, q=0, s=1 ...).

$v(A) = T$ para algún v => Satisfacible.
$v(A) = T$ para todos v => Válida. (Tautología)
$v(A) = F$ para algún v => Falsificable. (No válida).
$v(A) = F$ para todos v => Insatisfacible (No satisfacible). (Contradicción).

todas ramas cerradas => insati.

Por tanto:

A válida $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ no satisfacible.
A satisfacible $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ no válida.
A

③ Tableros semánticos

Objetivo: transformar proposición en grafo. Los hojas serán los valores que tendrían que tener los átomos para q. la proposición sea cierta.

Si las hojas contienen contradicciones => hoja cerrada (⊗).
Si la hoja no contiene contradicc => hoja abierta (⊙). => Posible solución.

Chuleta

las hojas son
- Todos cerrados => Insatisfacible. (Contradicción). ○ ∨ ○ ∨ ○
- Todos abiertos => Válida (Tautología)
- Algún cerrado => No válida
- Algún abierto => Satisfacible.

Para transformar la proposición en árbol usamos:

α reglas => Conjunción de disyunciones (lo normal).
β reglas => Disyunción de conjunciones.

Ej. 1.

$$(p \wedge q) \to (\overline{(p \to q)} \vee r)$$; Aplico 1 α - Regla

$$\equiv \overline{(p \wedge q)} \vee (\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee r)$$; Aplico 2 α - Regla

$$\equiv (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee ((p \wedge \bar{q}) \vee r)$$; Separo

$$\equiv (\bar{p}) \vee (\bar{q}) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (r)$$; Todos abiertos $\Rightarrow$ A es válida. (Tautología).

Ej. 2

Nota: para estudiar validez de una fórmula, no hace falta completar árbol.
Una fórmula A es válida si para cualquier valor v siempre $v(A)=T$.
Una fórmula A es no válida si algún valor v devuelve $v(A)=F$.
A válida $\Leftrightarrow \bar{A}$ no satisfacible.

Ejercicios Lambda - Cálculo

① ¿Es el número de combinadores de punto fijo finito?

R: no, no lo es.

Para demostrar que es infinito, consideremos el siguiente λ-término:

$T = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma$ (n veces con $n \geq 2$)

Considerando el siguiente alfabeto con $n-1$ letras distintas:

$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$

Sea w una palabra de longitud n en dicho alfabeto.

Entonces:

$\gamma \equiv \lambda a_1 \lambda a_2 \dots a_{n-1} f. f(wf)$; T es un combinador de punto fijo.

Podemos comprobarlo:

$$T F \equiv \gamma \gamma \dots \gamma F \twoheadrightarrow (\lambda f. f(\gamma \gamma \dots \gamma f))F \rightarrow F(\gamma \gamma \dots \gamma F) \equiv F(T F)$$

Dado que podemos elegir cualquier $n \geq 2$ con $n \in \mathbb{N}$, y hay naturales infinitos, podemos concluir que se pueden construir infinitos combinadores de punto fijo.

② Dados los λ-términos M y N, $M = N$, ¿Es cierto $M \twoheadrightarrow N$ ó $N \twoheadrightarrow M$?

R.: no necesariamente dos λ-términos iguales se reducen el uno al otro.

Demostrarlo.

Sabemos que dos λ-términos son iguales si de uno podemos llegar a otro aplicando β-reducciones y expansiones.

Si consideramos como contraejemplo la aplicación del combinador paradógico:

$Y \equiv \lambda f. (\lambda x. f(xx)) (\lambda x. f(xx))$;

$YF \equiv (\lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx)))F \equiv$

$P \rightarrow (\lambda x. F(xx))(\lambda x. F(xx)) \equiv$

$P \rightarrow F((\lambda x. F(xx))(\lambda x. F(xx))) \equiv$

$\leftarrow_\beta F(YF) \equiv YF$

Tenemos que $YF = F(YF)$, pero ni $YF \twoheadrightarrow F(YF)$, ni $F(YF) \twoheadrightarrow YF$.

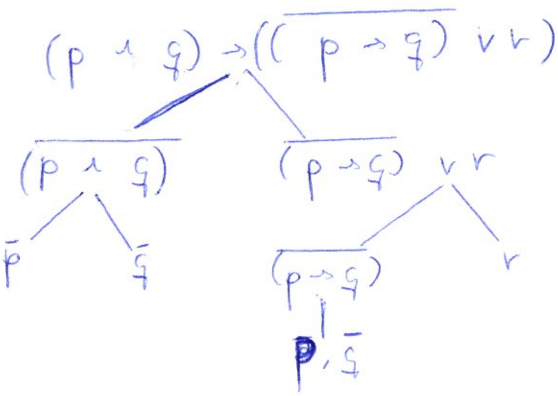
③ ¿Por qué se exige, para que $M[N/x]$ sea correcta, que

$$BV(M) \cap FV(N) = \emptyset \,?$$

R: se exige porque

Ejercicios CRA - T1

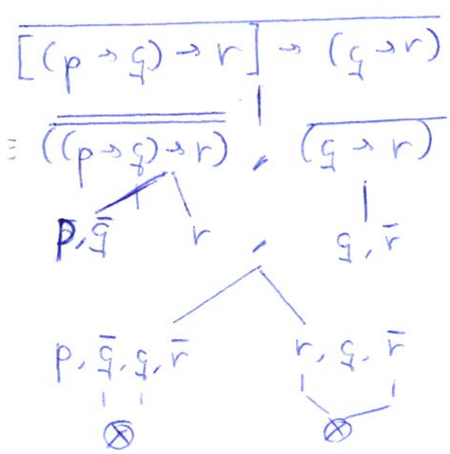
1)



2) Estudiar validez de $F: [(p \to q) \to r] \to (q \to r)$

- F es válida si $\overline{F}$ no es satisfacible.
- $\overline{F}$ no es satisfacible si el tablero de $\overline{F}$ es cerrado.
- $\overline{F}$ es cerrado si todas sus ramas son cerradas.

1) Niego F:



Dado que todas las ramas de $\overline{F}$ son cerradas, el árbol es cerrado. Como el tablero es cerrado, $\overline{F}$ es no satisfacible.
Como $\overline{F}$ no es satisf., F es válida.

Resumen:

F válida $\iff$ $\overline{F}$ insatisfacible $\iff$ Tablero cerrado $\iff$ Todas ramas cerradas.

α-reglas $\Rightarrow$ Desarrollar $\wedge$

β-reglas $\Rightarrow$ Desarrollar $\vee$

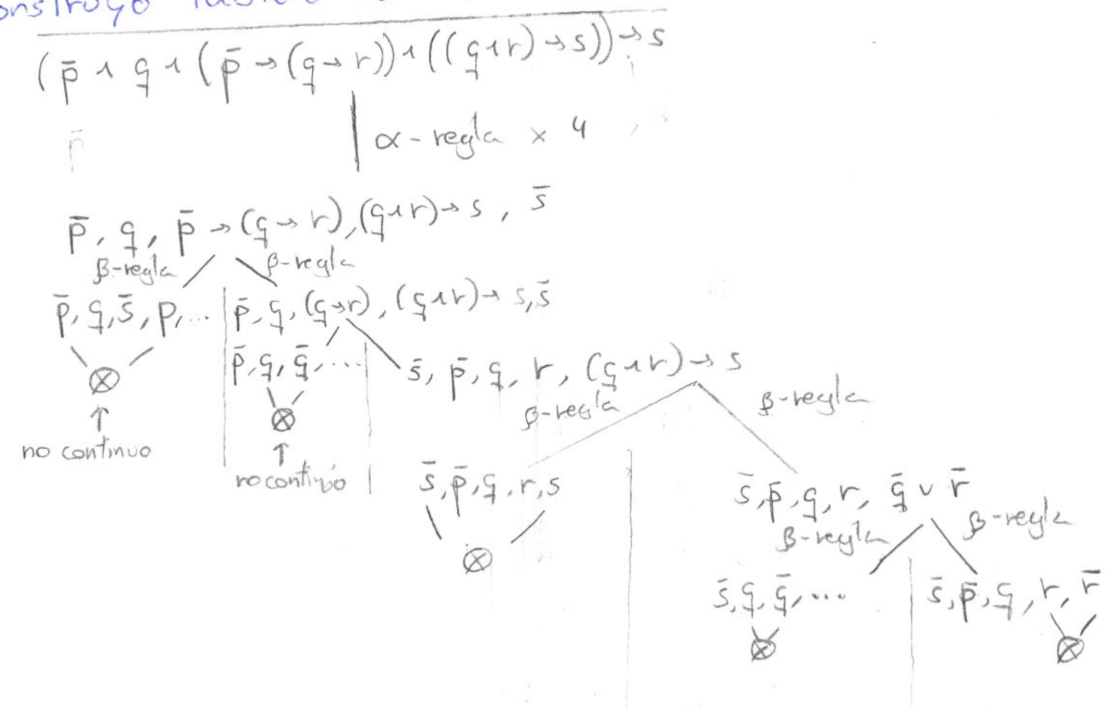
3) Probar validez de $F: (\bar{p} \wedge q \wedge (\bar{p} \to (q \to r)) \wedge ((q \wedge r) \to s)) \to s$

$\beta \to \vee$
$\alpha \to \wedge$

F válida $\Leftrightarrow$ $\overline{F}$ insatisfacible

$\overline{F}$ insatisf $\Leftrightarrow$ Tablero cerrado $\Leftrightarrow$ Todas las ramas cerradas.

Construyo tablero de $\overline{F}$:



Como todas las ramas son cerradas, $\overline{F}$ es insatisfacible. $\overline{F}$ es una contradicción. Por tanto, F es válida.

PEI 1. 21 de marzo de 2019

1.- *(0,75 ptos.)* Responder a las siguientes preguntas razonando adecuadamente la respuesta:

a) ¿Por qué se exige en la regla de resolución del Cálculo de Predicados que las cláusulas generatrices no tengan variables en común?

b) ¿Toda fórmula satisfacible en el Cálculo de Predicados admite un modelo finito?

c) ¿Qué relación existe entre tableros semánticos en el Cálculo Proposicional y la forma normal disyuntiva?

2.- *(0,75 ptos.)* ¿De las fórmulas

$$t \longrightarrow q$$

$$p \longrightarrow (r \vee q)$$

$$\neg p \longrightarrow (\neg s \wedge q)$$

$$\text{y} \ \ (p \vee r) \longrightarrow t$$

se deduce $s \longrightarrow q$? Usar tableros semánticos para responder a esta pregunta.

3.- *(0,75 ptos.)* ¿De las fórmulas

$$\forall X \forall Y \, p(X,Y) \longrightarrow q(X,Y),$$

$$\forall X \exists Y \, r(X,Y) \longrightarrow s(Y,X) \text{ y}$$

$$\exists X \forall Z \, (\neg r(X,Z) \vee s(X,Z)) \longrightarrow p(X,Z),$$

se deduce $\exists X \exists Y \, p(X,Y) \vee q(X,Y)$? Usar resolución para responder a la pregunta.

4.- *(0,75 ptos.)* Las listas se pueden codificar, empleando el Cálculo de Predicados, mediante una función . de aridad 2, y una constante *nil*, la lista vacía, de manera que: una lista con un elemento se representa mediante $.(a, nil)$, con dos elementos $.(a, .(b, nil)), \ldots$ y así sucesivamente. Escribir un programa lógico que defina un predicado de aridad dos, $subconjunto(L, L_1)$, que tome valor cierto si, vistas las listas como conjuntos, la lista L es subconjunto de L_1.

Usando el programa definido, levar a cabo resolución SLD a la Prolog para responder a la pregunta

$$\leftarrow subconjunto(.(1, .(1, .(2, nil))), .(1, .(2, .(3, nil)))).$$

Del mismo modo, y usando de nuevo el programa definido anteriormente, realizar resolución SLD a la Prolog para encontrar **una** respuesta correcta a la pregunta

$$\leftarrow subconjunto(.(1, .(2, nil)), L).$$

(C_7) $R(C_6, C_3) \Rightarrow x \leftarrow a,\ z_6 \leftarrow z_3 \Rightarrow r(a, z_3)$

(C_8) $R(C_6, C_4) \Rightarrow x \leftarrow a,\ z_6 \leftarrow z_4 \Rightarrow s(a, z_4)$

(C_9) $R(C_5, C_8) \Rightarrow x_5 \leftarrow a,\ z_5 \leftarrow z_4 \Rightarrow r(a, x_5)$

(C_{10}) $\square$

$(\forall X (p(x) \wedge q(x))) \leftrightarrow (\forall X\, p(X) \wedge \forall X\, q(X))$

$\forall X\, (p(x) \to q(X)) \to ((\forall p(y)) \to (\exists X\, q(x)))$

$\forall X (p(X) \vee q(X)) \to (\forall X\, p(X) \vee \forall X\, q(x))$

$\forall X (p(X) \vee q(X)), \overline{(\forall X\, p(x) \vee \forall X\, q(x))}$

$, \overline{\forall X\, p(x)}, \overline{\forall X\, q(x)}$

$, \exists X\, \overline{p(x)}, \exists X\, \overline{q(X)}$ // $X_1 = a$, $X_2 = b$

V $, \overline{p(b)}, \overline{q(a)}$

$\forall X (p(X) \vee q(X)), p(a) \vee q(a), p(b) \vee q(b), \overline{p(b)}, \overline{q(a)}$

$p(a), \overline{p(b)}, \overline{q(a)}, q(b)$

$[\overline{(q \vee t)} \wedge [(s \to r) \vee (s \to t)] \wedge (r \to (p \wedge q)) \wedge (s \to p) \wedge s]$

$\bar{q}, \bar{t}, s, [(s \to r) \vee (s \to t)], [r \to (p \wedge q)], [s \to p]$

$\bar{q}, \bar{t}, s, \bar{s} \vee r, \ldots$

$\bar{q}, \bar{t}, s, r, p, p$ ⊙

$$\exists X \forall y \forall z \exists u \exists w \to (P(x,y,z) \wedge Q(u,v) \wedge \overline{R(w)}]$$

$$\forall y \forall z \exists u \exists w \left[P(a,y,z) \wedge Q(u,v) \wedge \overline{R(w)}\right]$$

$$\forall y \left[P(a,y,z) \wedge Q(F(y,z),v) \wedge \overline{R(w)}\right]$$

$$\forall y \forall z \forall v \left[P(a,y,z) \wedge Q(F(y,z),(v\ ,\ )), R(G(y,z,v))\right)$$

$$\forall x \forall y \exists z \Rightarrow z \Rightarrow F(x,y)$$

$$\overline{(\exists p(X))} \Rightarrow \forall \overline{p(X)}$$

$$\exists x (p(X) \vee q(X)) \Rightarrow [\exists x\, p(x)] \vee [\exists x\, q(x)]$$

$$\forall X (p(X) \to q(X)) \not\Rightarrow (\forall X\, p(X) \to \forall X\, q(X))$$

$$\forall X (p(X) \to q(X)), \overline{(\forall X\, p(X) \to \forall X\, q(X))}$$

$$\forall X (p(X) \to q(X)), \forall X\, p(X), \overline{\forall X\, q(X)}$$

$$\forall X (p(X) \to q(X)), \forall X\, p(X), \exists X\, \overline{q(X)} \quad ; \quad X \to a$$

$$\forall X (p(X) \to q(X)), \forall X\, p(X), \overline{q(a)}$$

$$p(a) \to q(a),\ p(a),\ \overline{q(a)}$$

$$\overline{p(a)},\ p(a),\ \overline{q(a)} \qquad\qquad q(a)\ p(a),\ \overline{q(a)}$$

$\cancel{(\forall X (p(x) \wedge q(x)) \to (\forall X\, p(x) \wedge \forall X\, q(x))}$

1) $\overline{p(x,y)} \vee p(y,x)$

2) $\overline{p(x,y)} \vee \overline{p(y,z)} \vee p(x,z)$

3) $p(x, f(x))$,

4) $\overline{p(x,x)}$

3') $p(x_1, f(x_1))$; 1') $p(x_1, f(x_1)) \vee p(f(x_1), x_1)$

1) $\overline{p(x_1, f(x_1))} \vee p(f(x_1), x_1)$ $\quad (x \leftarrow x_1,\ y \leftarrow f(x_1)$

3') $p(x, f(x_1))$

5) $p(f(x_1), x_1)$

6)

2) $\overline{p(f(x_1), x_1)} \vee \overline{p(f(x_1), z)} \vee \cancel{p(f(x_1), x_1)}$

1) $\overline{p(x,y)} \vee p(y,x)$

2) $\overline{p(x,y)} \vee \overline{p(y,z)} \vee p(x,z)$

3) $p(x, f(x))$

4) $\overline{p(x,x)}$

3) $p(x_1, f(x_1))$ // Particularizo para x_1

5)

$p(x_1, f(x_1))$

$\overline{p(x_1, f(x_1))} \vee p(f(x_1), x_1)$ // $x \leftarrow x_1$, $y \leftarrow f(x_1)$

$\therefore p(f(x_1), x_1)$

6) 3) $p(x_1, f(x_1))$

2) $\overline{p(x_1, f(x_1))} \vee p(f(x_1), z) \vee p(x_1, z)$

$\therefore p(f(x_1), z) \vee p(x_1, z)$

2.24

1) $\overline{(\forall X \; (p(x) \to q(x))) \to ((\forall p(x)) \not\to (\exists X q(x)))}$

$\forall X \, (p(x) \to q(x)), \; \forall p(x), \; \overline{\exists X \, q(x)}$

$, \; \forall X \; \overline{q(x)}$

$\underbrace{\forall X(p(x) \to q(x)), \; \forall p(x)}_{F1 \qquad F2}, \; \underbrace{\forall X \; \overline{q(x)}}_{F3}$

$F1, F2, F3, \; p(a) \to q(a), \; p(a), \; \overline{q(a)}$

$\overline{p(a)}, \; p(a), \; \overline{q(a)} \qquad q(a) \;\; p(a), \; \overline{q(a)}, \; F1, F2, F3$

2) $\overline{(\forall X(p(x) \wedge q(x))) \leftrightarrow (\forall X \, p(x) \wedge \forall X \, q(x))}$

$\overline{(\forall X \, (p(x) \wedge q(x))) \to (\forall X \, p(x) \wedge \forall X \, q(x)) \wedge (\forall X \, p(x) \wedge \forall X \, q(x)) \not\to (\forall X \, (p(x) \wedge q(x)))}$

$\underbrace{\forall X \, (p(x) \wedge q(x))}_{F1}, \; \overline{(\forall X \, p(x) \wedge \forall X \, q(x))}, \; \underbrace{(\forall X \; p(x) \wedge \forall X \, q(x))}_{F2}, \; \overline{(\forall X \; (p(x) \wedge q(x))}$

$F1, F2, \; \overline{\forall x \, p(x)} \vee \overline{\forall x \, q(x)}, \; \exists x \, \overline{(p(x) \wedge q(x))}$

$F1, F2, \; \exists x \, \overline{p(x)} \vee \exists x \, \overline{q(x)}, \; \exists x \, (\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)})$ // $\{a, b, c\}$

$F1, F2, \; \overline{p(a)} \vee \overline{q(b)}, \; \overline{p(c)} \vee \overline{q(c)}$ // Desenrollo F's...

$\cancel{p(a) \wedge q(a)}, \; p(a), \; q(a), \; p(b), \; q(b), \; p(c), \; q(c), \; \overline{p(a)} \vee \overline{q(b)}, \; \overline{p(c)} \vee \overline{q(c)}$

Siempre cerrados: p(

1) $\overline{p(x)} \vee q(x) \vee r(x, f(x))$

2) $\overline{p(x)} \vee q(x) \vee s(f(x))$

3) $t(a)$

4) $p(a)$

5) $\overline{r(a,y)} \vee t(y)$

6) $\overline{t(x)} \vee \overline{q(x)}$

7) $\overline{t(x)} \vee \overline{s(x)}$

8) $x \leftarrow a$ Resol. 3,6

$t(a)$

$\overline{t(a)} \vee \overline{q(a)}$

$\therefore \overline{q(a)}$

8) $\overline{q(a)}$

9) Res 4, 2 $\Rightarrow q(a) \vee s(f(a))$

10) Res 4, 1 $\Rightarrow q(a) \vee r(a, f(a))$

11) Res 8, 9 $\Rightarrow s(f(a))$

12) Res 8, 10 $\Rightarrow r(a, f(a))$

~~13) Res 3, 8 $\Rightarrow$ s(a)~~

13) Res 5, 12 $\Rightarrow y \leftarrow f(a) \Rightarrow t(f(a))$

14) $x \leftarrow f(a)$

7) $\overline{t(f(a))} \vee \overline{s(f(a))}$

13) $t(f(a))$

$\overline{s(f(a))}$

15) Res 13, 11 $\Rightarrow \square$

1) $\overline{p(x,y)} \vee p(y,x)$

2) $\overline{p(x,y)} \vee \overline{p(y,z)} \vee p(x,z)$

3) $p(x, f(x))$

4) $\overline{p(x,x)}$

---

5) $p(x_1, f(x_1))$ // Particularizo para x.

6)
5) $p(x_1, f(x_1))$
1) $\overline{p(x_1, f(x_1))} \vee p(f(x_1), x_1)$ // $x \leftarrow x_1$, $y \leftarrow f(x_1)$

$\therefore \; p(f(x_1), x_1)$

7)
5) $p(x_1, f(x_1))$
2) $\overline{p(x_1, f(x_1))} \vee \overline{p(f(x_1), z)} \vee p(x_1, z)$ // $x \leftarrow x_1$, $y \leftarrow f(x_1)$

$\therefore \; \overline{p(f(x_1), z)} \vee p(x_1, z)$

8) $p(f(x_2), x_2)$ // Particularizo para x_2.

9)
8) $p(f(x_2), x_2)$
$\overline{p(f(x_2), x_2)} \vee p(x_1, \cancel{z} x_2)$ // $z \leftarrow x_2$

$p(x_1, x_2)$

10)
9) $p(x_1, x_2)$
$\overline{p(x_1, x_2)}$

$\therefore \; \square$ ← cláusula vacía

Resumen T2

Propiedades

$\overline{\forall x\ p(x)} \equiv \exists x\ \overline{p(x)}$;

$\overline{\exists x\ p(x)} \equiv \forall x\ \overline{p(x)}$;

Variables = x, y, z...

Literales = a, b, c...

$\exists x\ p(x) \Rightarrow p(a)$

$\forall x\ p(x) \Rightarrow p(x_n)$

$\forall x \exists y\ p(x, y) \Rightarrow p(x_n, f(x_n))$; Cuando hay un existe precedido de para todos, se deja en función de las variables.

Asignaciones

Válidas:	Inválidas
$X_n \leftarrow Y_{n'}$	$F(x) \cancel{\leftrightarrow} a$
$X_n \leftarrow a$	$a \cancel{\leftrightarrow} X_n$
$X_n \leftarrow f(X_{n'})$	$F(x) \cancel{\leftrightarrow} Y_n$

Algoritmo

1) Negar conclusión
2) Simplificar predicados (Ojo al copiar)
3) Pasar a proposiciones
4) Explotar resolución usando asignaciones válidas.

Si se llega a cláusula vacía ⇒ Las fórmulas son válidas.

Si <u>NO</u> se llega a la cláusula vacía ⇒ NO son válidas.

Ejercicios T2 - Resolución

1) Marzo 2012:

1) $\forall x \forall y [(\overline{p(x)} \vee r(x,y))]$

2) $\exists x \exists y [\overline{((q(y) \vee r(x,y))}] \equiv \exists x \exists y [q(y) \wedge \overline{r(x,y)}]$

3) $\forall x \exists y [p(x) \vee s(x,y)]$

Conclusión negada $\rightarrow$ 4) $\overline{\exists x \exists y [r(x,y)]} \equiv \forall x \forall y [\overline{r(x,y)}]$

- Transformo a proposiciones:

$C_1 = \overline{p(x_1)} \vee r(x_1, y_1)$

$C_2 = q(b)$

$C_3 = \overline{r(a,b)}$

$C_4 = p(x_4) \vee s(x_4, f(x_4))$

$C_5 = \overline{r(x_5, y_5)}$

- Explloto resolución:

$C_6 = \overline{p(a)}$ (Res. C_1, C_3) $\{x_1 \leftarrow a, \ x_2 \leftarrow b\}$

$C_7 = r(x_4, f(x_4)) \vee s(x_4, f(x_4))$ (Res C_1, C_4) $\{x_1 \leftarrow x_4, \ y_1 \leftarrow f(x_4)\}$

$C_8 = \overline{p(x_5)}$ (Res C_1, C_5) $\{x_1 \leftarrow x_5, \ y_1 \leftarrow y_5\}$

$C_9 = s(a, f(a))$ (Res C_3, C_7) $\{x_4 \leftarrow a, \ y_4 \leftarrow b\}$

$C_{10} = s(a, f(a))$ (Res C_4, C_6) $\{x_4 \leftarrow a\}$ //Repetida

$C_{11} = s(x_5, f(x_5))$ (Res C_4, C_8) $\{x_4 \leftarrow x_5\}$

$C_{12} = s(x_5, f(x_5))$ (Res C_5, C_7) $\{x_5 \leftarrow x_4\}$ $\{y_5 \leftarrow f(x_4)\}$

No quedan más resoluciones por hacer, por tanto, las fórmulas <u>no</u> son válidas.

2)

Ejercicios T2

Xungos

1) $\cancel{\overline{p(x,x)} \vee p(y,x)}$

MARZO 2012

1) $\forall X \forall Y (\overline{p(X)} \vee r(X,Y))$

2) $\overline{\forall X \forall Y (g(Y) \to r(X,Y))} \equiv \overline{\exists x \exists y \, (g(y) \wedge r(x,y))}$

3) $\forall X \exists Y (p(X) \vee s(X,Y))$ //Ning conclusión

4) $\overline{\exists X \exists Y \; r(X,Y)} \equiv \forall X \forall Y \; \overline{r(X,Y)}$

$C_1: \overline{p(x)} \vee r(x,y)$

$C_2: g(y) \wedge r(x,y) \equiv g(y) \wedge \overline{r(x,y)}$

$C_2': g(b)$

$C_3: r(a,b)$

$C_4: p(x_1) \vee s(x_1, f(x_1))$ // porq. le precede un $\exists Y$

$C_5: r(x_2, y_2)$

C_6: Resol. $\overline{p(a)}$ $\{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}$ //1,3

$C_7: s(a, f(a)) \vee r(a,b)$. $\{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}$ //1,4

$C_8: R(1,5) \Rightarrow$

x, y	y, x	x	y	$\overline{p(x,y)} \wedge p(y,x)$
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

$\exists X \exists Y \, (p(x) \wedge \overline{p(y)})$

$\exists x \exists y \, (p(x)$

$\exists x \exists y \, (\overline{p(x)}$

MARZO 2012

1) $\forall x \forall y\, [p(x) \rightarrow r(x,y)]$

2) $\exists x \exists y\, [(\overline{\overline{q(y)} \vee r(x,y)})] \equiv \exists x \exists y\, [q(y) \wedge \overline{r(x,y)}]$

3) $\forall x \exists y\, [p(x) \vee s(x,y)]$

4) $\overline{\exists x \exists y\, [r(x,y)]} \equiv \forall x \forall y\, [\overline{r(x,y)}]$

$C_1 = \overline{p(x)} \vee r(x,y)$

$C_2 = q(b)$

$C_3 = \overline{r(a,b)}$

$C_4 = p(x_1) \vee s(x_1, f(x_1))$ // No puedo quitar s, es inválida.

$C_5 = \overline{r(x_2, y_2)}$

$C_6 = Res(C_1, C_3) \Rightarrow \overline{p(a)}$ // $\{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}$

$C_7 = Res(C_1, C_4) \Rightarrow r(x_1, y) \vee s(x_1, f(x_1))$

$C_8 = Res(C_1, C_5) \Rightarrow \overline{p(x_2)}$

$C_9 = Res()$ // No puedo resolver con nada C_2.

$C_9 = Res(C_3, C_7) \Rightarrow s(a, f(x_1))$

$C_{10} = Res(C_4, C_6) \Rightarrow s(a, f(x_1))$ //Repetida

$C_{11} = Res(C_4, C_8) \Rightarrow s(x_2, f(x_2))$

$C_{12} = Res(C_5, C_7) \Rightarrow s(x_2, f(x_2))$

1) $\forall x \forall y \; p(x) \rightarrow (r(x) \land s(x,y))$ — $p(x) \rightarrow r(x) \equiv \overline{p(x)} \lor r(x)$

2) $\forall x \exists y \forall z \; \overline{s(x,y)} \lor t(x,z)$

3) $\forall y \cancel{\forall} z \; \overline{t(y,z)} \lor r(y)$

4) $\overline{\forall x \; p(x) \rightarrow r(x)} \equiv \exists x \; \overline{p(x) \rightarrow r(x)} \equiv \exists x \; p(x) \land \overline{r(x)}$

$C_1 = \overline{p(x)} \lor r(x)$

$C_2 = \overline{p(x)} \lor s(x,y)$

$C_3 = \overline{s(x_1, f(x_1))} \lor t(x_1, z)$

$C_4 = \overline{t(y_1, z_1)} \lor r(y_1)$

$C_5 = p(a)$

$C_6 = \overline{r(a)}$

$C_7 = Res(C_1, C_5) \Rightarrow r(a)$

$C_8 = Res(C_2, C_3) \Rightarrow \overline{p(x_1)} \lor t(x_1, z) \quad \{y \leftarrow f(x_1)\}$

$C_9 = Res(C_2, C_5) \Rightarrow s(a, y)$

$C_{10} = Res(C_3, C_4) \Rightarrow \overline{s(x_1, f(x_1))} \lor r(x_1)$ // No sé si ta bien

$C_{11} = Res(C_4, C_6) \Rightarrow \overline{t(a, z_1)}$

$C_{12} = Res(C_2, C_{10}) \Rightarrow \overline{p(x_1)} \lor r(x_1)$

$C_{13} = Res(C_3, C_9) \Rightarrow t(a, z) \lor s(a, y)$

$C_{14} = Res(C_4, C_8) \Rightarrow$ Repetida (C_{12})

$C_{15} = Res(C_4, C_{13}) \Rightarrow r(y_1) \lor s(a, y)$

$C_{16} = Res(C_{11}, C_3) \Rightarrow \overline{s(a, f(a))}$

$C_{17} = Res(C_{16}, C_2) \Rightarrow \overline{p(a)}$

$C_{18} = Res(C_{17}, C_5) \Rightarrow$

1) $\forall x \forall y [(p(x,y) \Rightarrow (r(\cancel{y}) \vee g(x)))]$

2) $\forall x \exists y [(\overline{p(x,y)} \rightarrow \overline{s(x,y)})]$

3) $\exists x \forall y [s(y,x)]$

4) $\overline{\exists y \; r(y)} \equiv \forall y \; \overline{r(y)}$

$\overline{\forall x \; p(x)} \equiv \exists x \; \overline{p(x)}$

$\forall x \exists y \; p(x,y) \Rightarrow p(x, f(x))$

$C_1 = \overline{p(x,y)} \vee r(\cancel{y}) \vee g(x)$

$C_2 = p(x_1, f(x_1)) \vee \overline{s(x_1, f(x_1))}$

$C_3 = s(y, a)$

$C_4 = \overline{r(y_1)}$

$C_5 = \text{Resol.}(C_1, C_2) \Rightarrow r(f(x_1)) \vee g(x_1) \vee s(x_1, f(x_1))$

$C_6 = \text{Resol.}(C_1, C_4) \Rightarrow \overline{p(x_1, y)} \vee g(x)$

$C_7 = \text{Res.}(C_2, C_3) \Rightarrow$ No pq. $f(x_1) \leftarrow a$ es inválido.

$C_7 = \text{Res.}(C_2, C_6) \Rightarrow s(x_1, f(x_1)) \vee g(x_1)$

$C_8 = \text{Res}(C_4, C_5) \Rightarrow g(x_1) \vee s(x_1, f(x_1))$

---

1) $\forall x \forall y \, (p(x,y) \rightarrow r(x))$

2) $\forall x \exists y \, (\overline{p(x,y)} \rightarrow \overline{s(x,y)})$

3) $\exists x \forall y \; s(x,y)$

4) $\overline{\forall x \exists y \;\; p(x,y)} \equiv \exists x \forall y \; \overline{p(x,y)}$

$C_1 = \overline{p(x_1, y_1)} \vee r(x_1)$

$C_2 = p(x_2, f(x_2)) \vee \overline{s(x_2, f(x_2))}$

$C_3 = s(a, y_3)$

$C_4 = \overline{p(b, y_4)}$

$C_5 = R(1,2) \Rightarrow x_2 \leftarrow x_1$; $r(x_2) \vee \overline{s(x_2, y_2)}$, $f(x_2) \leftarrow y_2$

$C_6 = R(2,4) \Rightarrow x_2 \leftarrow b$, $f(x_2) \leftarrow y_4$; $\overline{s(b, y_4)}$

$C_7 = R(3,6) \Rightarrow$ Inválida. No se puede universaliz. literales.

$C_7 = R(3,5) \Rightarrow x_2 \leftarrow a$, $y_2 \leftarrow y_3$. $r(a)$

Ejercicios CRA - TI - Otras universidades

1) Desarrollar tablero de:

$F: \; p \wedge q \wedge (p \to (q \to \bar{p}))$

α-reglas $\times 3$

$p, \; q, \; (p \to (q \to \bar{p}))$

β-regla | β-regla

$p, q, \bar{p}$ — $\otimes$

$p, q, (q \to \bar{p})$

$p, q, \bar{q}$ — $\otimes$

$p, q, \bar{p}$ — $\otimes$

F es insatisfacible.

2) Desarrollar tablero de:

$p \wedge \bar{q} \wedge (p \to ((q \vee r) \to (p \wedge r)))$

α-reglas $\times$

$p, \; \bar{q}, \; p \to [(q \vee r) \to (p \wedge r)]$

β-regla

$p, \bar{q}, \bar{p}$ — $\otimes$

$p, \bar{q}, (q \vee r) \to (p \wedge r)$

$p, \bar{q}, \bar{q}, \bar{r}$ — $\odot$

$p, \bar{q}, p, r$ — $\odot$

3) Probar validez de $F: \; s \wedge ((\bar{r} \to p) \to q)$

$\bar{F}: \; \overline{s \wedge ((\bar{r} \to p) \to q)}$

$\bar{s}$ — $\odot$

$\overline{((\bar{r} \to p) \to q)}$

α-regla

$(\bar{r} \to p), \; \bar{q}$

$r, \bar{p}$

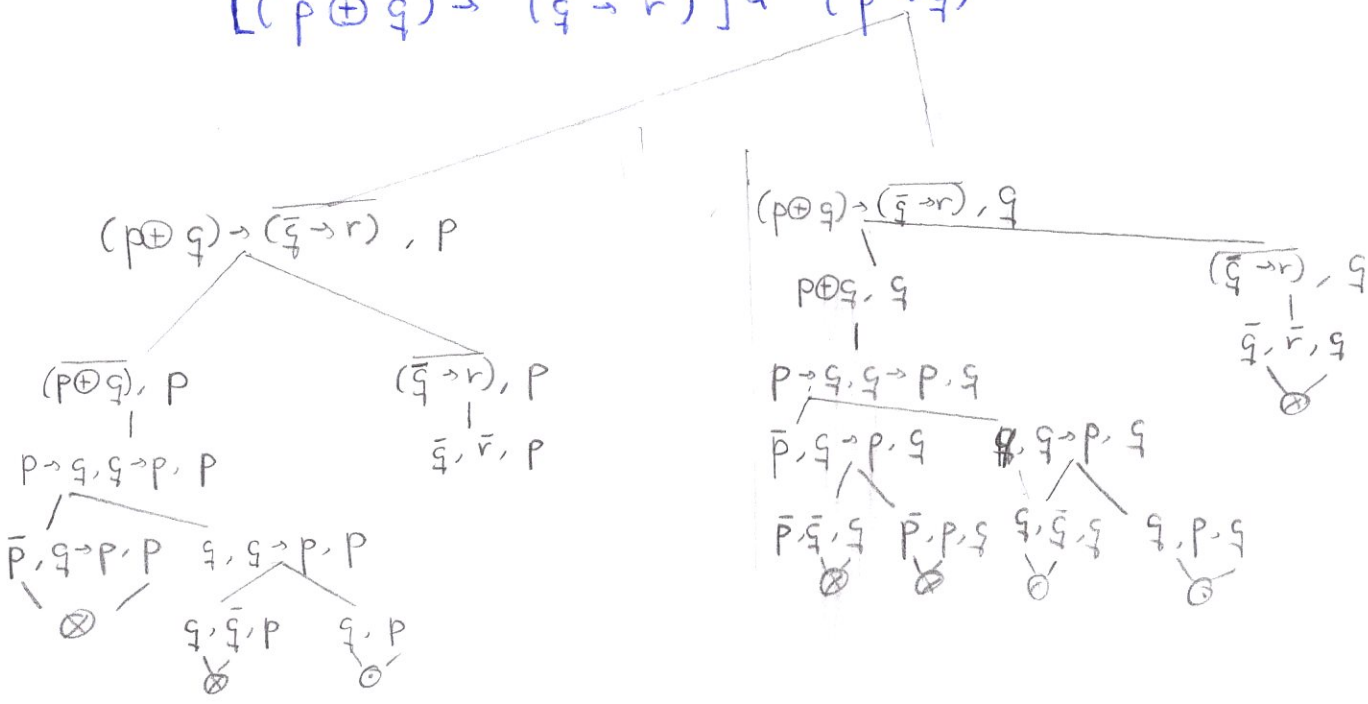
$p, \bar{q}$ — $\odot$

El tablero es abierto, $\bar{F}$ es válida, y por tanto satisfacible.

F es inválida.

4) Construir tablero (Ex. 2013).

$$[(p \oplus q) \to \overline{(\bar{q} \to r)}] \wedge (p \vee q)$$



2) 2018

Ejercicios CRA - T3

1) append(.(a,.(b, nil)), .(c, nil), Z)

1) Definición

$$\text{concatenar}(L_1, L_2)\begin{cases} \text{construir}(hd(L_1), \text{concat}(tl(L_1), L_2)) & \text{si } L_1 \neq [\,] \\ L_2 & \text{si } L_1 = [\,] \end{cases}$$

2) append(.(a, .(b, nil)), .(c, nil), Z)

C_1 = append(nil, L, L) ~~← (nil, L, L))~~

~~C_2 = append(.(X, L_1), L_2, .(X, L_3)))~~

C_2 = (.(X, L), L_1, .(X, L_2)) ← append(L, L_1, L_2)

~~C_3~~

append(.(a, .(b, nil)), .(c, nil), Z)

{ X ← a
L ← .(b, nil)
L_1 ← .(c, nil)
Z ← .(a, L_2') } C_2

append(.(b, nil), .(c, nil), L_2')

{ X ← .(b, nil),
L ← nil
L_1 ← .(c, nil)
L_2 ← (.(b, L_2'))

append(nil, .(c, nil), L_2'))

C_1 { X ← nil,
L ← .(c, nil)
L_2' ← .(c, nil))

reverse (A, B)

reverse (a, b, c)

reverse (nil, nil)

reverse ([x, nil], X)

reverse ([1, 2, 3], [3 | reverse (tl([1, 2, 3]))) = reverse (.(X, L), .(X, reverse (L)))

append (nil, L, L)

append (.(X, L), L_1, .(X, L_2)) ← append (L, L_1, L_2)

reverse (.(X, L), L_1) ← reverse (L_1, L_2), append (L_2, (X, nil), L_1)

6 CRA - Listas

nil ← [ ]

∘ ← const. listas ⇒ $\circ(a,b) = [a,b]$

hd (lista) → cabeza
tl (lista) → cola

$append(l_1, l_2, l_1 + l_2) = True$

$$conc(L_1, L_2)\begin{cases} cons(hd(L_1), conc(tl(L_1), L_2)) & si\ L_1 \neq [\,] \\ L_2 & si\ L_1 = [\,] \end{cases}$$

cons = construir
conc = concatenar

$c_1 = append(nil, L, L)$

$c_2 = append(\circ(X, L_1), L_2, \circ(X, L_2))$

[1, 2, 3], [4, 5]

[1, 2, 3, 4] [5]

$\leftarrow append(\circ(a, \circ(b, nil)), \circ(c, nil), z)$

$c_2 \mid \{X \leftarrow a, L_1 \leftarrow (b, nil), L_2 \leftarrow (c, nil), z \leftarrow \circ(a, L_2)\}$

$\leftarrow append(\circ(b, nil), \circ(c, nil), L_2)$

$c_3 = append(x, L), L_1, (x, L_2)) \leftarrow append(L, L_1, L_2)$

c_2

$\{X \leftarrow b, L \leftarrow nil, L_1 \leftarrow \circ(c, nil), L_2 \leftarrow \circ(b, L_2')\}$

$append(nil, \circ(c, nil), L_2)$

$c_1 \mid \{L_1 \leftarrow \circ(c, nil), L_2' \leftarrow \circ(c, nil)\}$ $\square$

[1, 2, 3], [4, 5, 6]

éxito; $\{z \leftarrow \circ(a, \circ(b, \circ(c, nil)))\}$

1, [2, 3], [4, 5, 6]

1, 2, [3] [4, 5, 6]

$append(\circ(X, L_1), L_2, \circ(X, L_2)) \Rightarrow \circ(X, append(X, L), L_2, \circ(X, L_2))$

$$\boxed{p \to q \equiv \overline{p} \vee q}$$

$\forall X \exists y \forall z [\overline{s(X,y)} \vee t(X,z)]$

$\overline{s(X, f(X))} \vee t(X, z)$

$\forall X \forall y\ p(x) \to (r(x) \wedge s(x,y))$

$\forall X \forall y\ p(x) \to r(x)$ ①

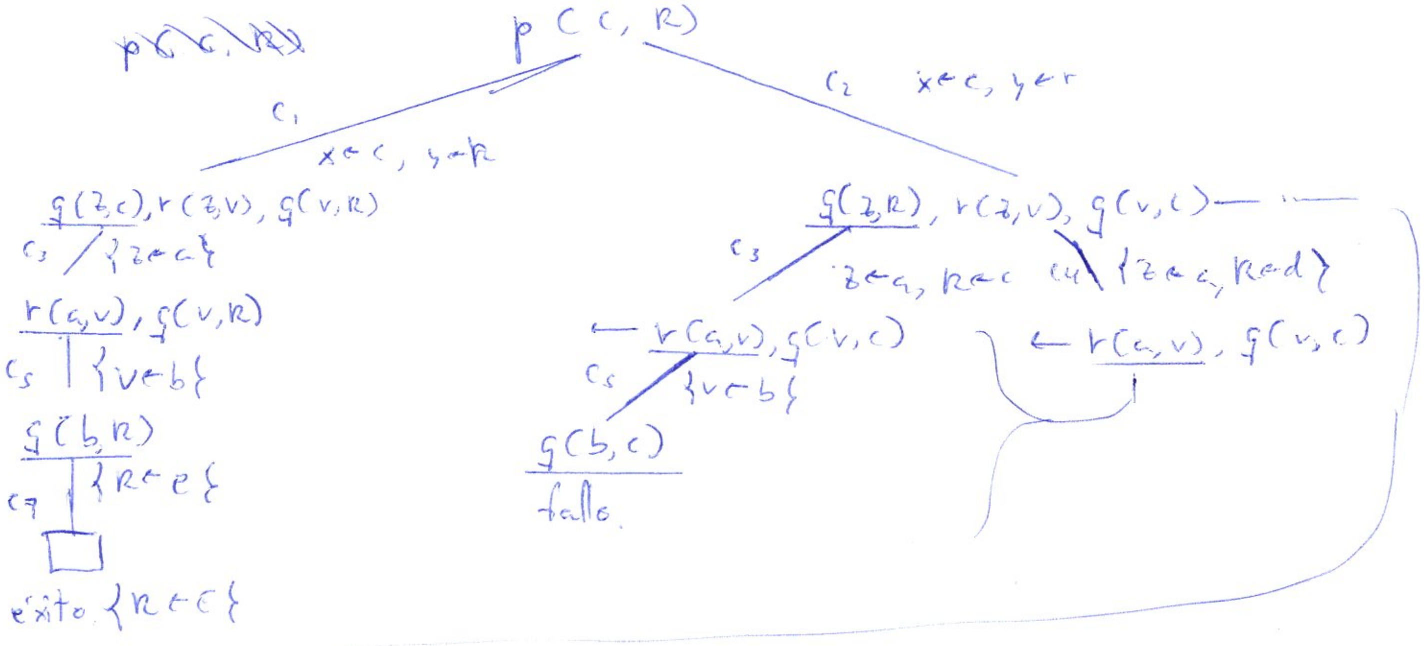
$\forall x \forall y\ p(x) \to s(x,y)$ ②

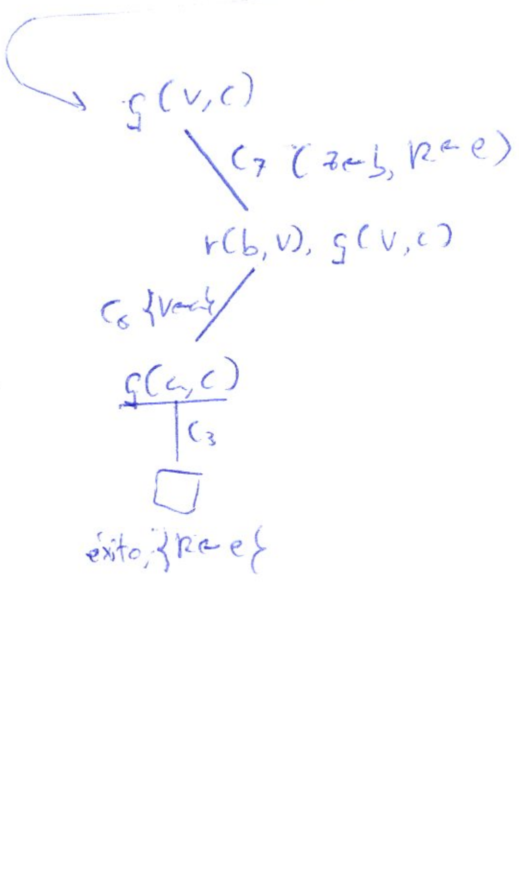
① $\overline{p(x_1)} \vee r(x_1)$

② $\overline{p(x_2)} \vee s(x_1, y_1)$

CRA

Ejemplo 3.13





ap(nil, L_2) :- L_2.

ap(L_1, L_2) :- ap([X|T], [T|L2]

• Más CRA - LSD

$\underline{append(Y, Z, .(a, .(b, .(c, nil))))}$

C_1 {$Y \leftarrow nil$, $Z \leftarrow .(a, .(b, .(c, nil)))$}

$\boxed{\ }$; éxito {$Y \leftarrow nil$, $Z \leftarrow .(a, .(b, .(c, nil)))$}

C_2 {$Y \leftarrow .(X, L)$, $Z = L_1$

{ $.(a, .(b, .(c, nil))) = .(X, L_2)$

$\hookrightarrow X = a$, $L_2 = .(b, .(c, nil))$

Unificar: ver que una expresión cuadra con una cláusula

• 3 - 2013

C_1 Reverse $(L_1, L_2) \leftarrow$ reverse_aux (L_1, nil, L_2)

Cuando tenga la lista $.(X, L_1)$ & Z, concatenar cabeza a Z.

C_2 reverse_aux $(.(X, L_1), Z, L_2) \leftarrow$ reverse_aux$(L_1, .(X, Z), L_2)$

C_3 reverse_aux (nil, L_1, L_1)

Si usamos concatenar, hay q. definirla.

reverse(L) { cons(reverse(cola), (cabeza))

[ ], si $L = [\ ]$

$\leftarrow$ $\underline{reverse(.(a, .(b, .(c, nil))), R)}$

C_1 {$L_1 \leftarrow .(a, .(b, .(c, nil)))$, $L_2 \leftarrow R$}

$\leftarrow$ $\underline{reverse\_aux(.(a, .(b, .(c, nil))), nil, R)}$

C_2 {$X \leftarrow a$, $L_1 \leftarrow .(b, .(c, nil))$, $Z \leftarrow nil$, $L_2 \leftarrow R$}

$\underline{reverse\_aux(.(b, .(c, nil)), .(a, nil), R)}$

C_2 {$X \leftarrow b$, $L_1 \leftarrow .(c, nil)$, $Z \leftarrow .(a, nil)$, $L_2 \leftarrow R$}

$\underline{reverse\_aux(.(c, nil), .(b, .(a, nil)), R)}$

C_2 {$X \leftarrow c$, $L_1 \leftarrow nil$, $Z \leftarrow .(b, .(a, nil))$, $L_1 \leftarrow R$}

$\underline{reverse\_aux(nil, .(c, .(b, .(a, nil))), R)}$

C_3 {$L \leftarrow .(c, .(b, .(a, nil)))$, $R \leftarrow .(c, .(b, .(a, nil)))$}

$\boxed{\ }$ éxito

~~reverse_aux(~~

reverse { cons(reverse(cola(L)), cabeza(L)) si $L \neq [\ ]$

[ ], si $L = [\ ]$

$C_1 = q(x_1, y_1) \leftarrow p(x_1, y_1)$

$C_2 = q(x_2, y_2) \leftarrow p(x_2, z_2), q(z_2, y_2)$

$C_3 = p(a, b)$

$C_4 = p(b, c)$

OBJ. $q(x, c)$

$q(x, c)$

$C_1 \{x_1 \leftarrow x, y_1 \leftarrow c\}$

$p(x, c)$

$C_4 \{x \leftarrow b\}$

$\square$

éxito.

$C_2 \{x_2 \leftarrow x,$

$p(x, z), q(z, c)$

$C_1 = append(nil, L, L_2)$

$C_2 = append((X, L), L_1, .(X, L_2)) \leftarrow append(L, L_1, L_2)$

$\leftarrow append(.(a, .(b, nil)), .(c, nil), Z)$

$C_2 \begin{cases} X \leftarrow a \\ L \leftarrow .(b, nil) \\ L_1 \leftarrow .(c, nil) \\ Z \leftarrow .(a, L_2) \end{cases}$ // Al revés por ser return.

$\leftarrow append(.(b, nil), .(c, nil), L_2')$

$C_2 \begin{cases} X \leftarrow b \\ L \leftarrow nil \\ L_1 \leftarrow .(c, nil) \\ L_2 \leftarrow (b, L_2') \end{cases}$ // Al revés por ser return

$append(nil, .(c, nil), (L_2'))$

$L \leftarrow nil$

$L_1 \leftarrow .(c, nil)$

$L_2' \leftarrow .(c, nil)$

$Z = .(a, L_2) = .(a, .(b, L_2')) = .(a, .(b, .(c, nil)))$

$Z = (a, b, c)$

• CRA - Ejercicios tipo examen

Resolución SLD

13, 2)

a)

$$\text{concatenar}(L_1, L_2)\begin{cases} \overset{\text{construir}}{\cancel{\text{Concatenar}}}(hd(L_1), \text{concatenar}(tl(L_1), L_2)) \text{ si } L_1 \neq [\,] (\\ \\ L_2 \quad \text{si} \quad L_1 = [\,] \quad (2)\end{cases}$$

$c_1 = \text{append}(nil, L_1, L_1)$

$c_2 = \text{append}(\cdot(X, L_1), L_2, \cdot(X, L_2)) \Rightarrow \text{append}(\cancel{\text{append}}.$

b) $\text{append}(\cdot(a, \cdot(b, nil)), \cdot(c, nil), Z)$

$\text{append}(\cdot(a, \cdot(b,nil)), \cdot(c,nil), Z)$
$\leftarrow$
$\cdot(a, \text{append}(\cdot(b,nil), \cdot(c,nil), \cancel{Z})$

$$\Downarrow \quad c_2\begin{cases} X \leftarrow a \\ L_1 \leftarrow \cdot(b,nil) \\ L_2 \leftarrow \cdot(c,nil) \\ \cdot(X, L_2)) \leftarrow \cancel{Z} \quad Z' \leftarrow L_2 \leftarrow \cdot(a, \cdot(c,nil)) \end{cases}$$

$\text{append}(\cdot(b,nil), \cdot(c,nil), \cancel{Z'}) \cdot(a, .$

$$\Downarrow \quad c_2\begin{cases} X \leftarrow b \\ L_1 \leftarrow nil \\ L_2 \leftarrow \cdot(c,nil) \\ \cdot(X, L_2) \leftarrow \cancel{LA} \leftarrow (b, \end{cases}$$

Sin repeticiones

$C_1 = \text{sin-rep}(L, L_1) \leftarrow \text{sin-rep-aux}(L, nil, L_1)$

$C_2 = \text{sin-rep-aux}(.(X, L), Z, L_1) \leftarrow \begin{cases} \text{pertenece}(X, Z) \\ \text{sin-rep-aux}(L, Z, L_1) \end{cases}$

$C_3 = \text{sin-rep-aux}(.(X,L), Z, L_1) \leftarrow \text{sin-rep-aux}(L, .(X, Z), L_1)$

$C_4 = \text{sin-rep-aux}(nil, Z, Z)$

$C_5 = \text{pertenece}(X, .(X, L))$

$C_6 = \text{pertenece}(X, .(Y, L)) \leftarrow \text{pertenece}(X, L)$

$\text{sin-rep}(.(a, .(a, nil)), R)$

$L \leftarrow .(a, .(a, nil))$

$L_1 \leftarrow R$

$\text{sin-rep-aux}(.(a, .(a, nil)), nil, R)$