Tema Grafos (resumen)

La teoría de grafos se utiliza para resolver problemas en casi cualquier disciplina. Por ejemplo, se usan grafos para determinar si un circuito puede ser implementado en una placa plana. Son fundamentales para estudiar redes de comunicación, de transporte, o de cualquier otro tipo. Por ejemplo, la red de metro se modela usualmente en forma de grafo. En particular la teoría de grafos nos permitirá encontrar el camino más corto entre dos puntos de una de estas redes, o encontrar circuitos óptimos que recorran todos los puntos de la red. Las ideas fundamentales de la teoría de grafos se remontan al siglo XVIII. Ya entonces el matemático suizo Leonard Euler utilizó implícitamente ideas de la teoría de grafos para resolver el famoso problema de los puentes de Konigsberg. Otro de los grandes problemas de la matemática modelable por grafos es el teorema de los cuatro colores, que fue propuesto por primera vez en 1852, por Augustus De Morgan en una carta a Sir William Rowan Hamilton. Además es éste un teorema paradigmático en el sentido de que la única demostración existente requirió la utilización de ordenadores.

Definiciones básicas

En esta primera sección del tema, introducimos la terminología básica de la teoría de grafos. El concepto de grado de un vértice nos permite dar el primer teorema importante de la teoría de grafos (el teorema del apretón de manos), y establecer un criterio sobre la posibilidad de que entre dos grafos exista un isomorfismo. A continuación presentamos algunos tipos particulares de grafos, que son útiles en aplicaciones prácticas. Finalmente vemos las diferentes formas de representar un grafo como estructuras de datos (aparte de su estructura gráfica), más sencillas que la enumeración completa de los vértices y las aristas, puesto que estas representaciones son las que se pueden introducir en un ordenador para efectuar cálculos.

Definición. Un grafo $G = (V, A)$ consiste en un conjunto finito V cuyos miembros se llaman vértices y una familia finita A de pares no ordenados de vértices a cuyos elementos llamaremos aristas o arcos. Al subconjunto $\{u, v\}$ de A también lo denotaremos por uv.

Definición. Dado un grafo $G = (V, A)$

i) se llama bucle o lazo a toda arista de la forma vv,

ii) se llama aristas múltiples a las aristas que aparecen repetidas en *A,*

iii) se dice que un grafo es simple si no tiene bucles ni aristas múltiples,

iv) se dice que dos vértices son adyacentes si están unidos por una arista,

v) se dice que aristas son adyacentes si tienen un vértice en común,

vi) se dice que una arista y un vértice son incidentes si el vértice es extremo de la arista,

vii) se dice que un vértice es aislado si no es adyacente a ningún otro vértice.

Grados

Definición. Dado un grafo $G = (V, A)$ se llama grado de un vértice al número de aristas incidentes en él, contando los bucles como dos aristas. Se denota por $\delta(v)$ al grado del vértice *v.* Por otra parte *por* $\delta(u,v)$ denotará el número de aristas que unen *u* y *v.*

Proposición. Dado un grafo G = (V, A) , se verifica que $\sum \delta(v) = 2\ |A|$, es decir, la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de sus aristas.

Corolario. El número de vértices de grado impar es par.

Definición. Llamáremos subgrafo de un grafo G = (V, A) a cualquier otro grafo G'= (V', A') con A' contenido en A y V' contenido en V.

Isomorfismos de grafos

Definición. Se dice que dos grafos G = *(V, A)* y G' = *(V', A')* son isomorfos si existe una biyección entre sus aristas de tal forma que dos vértices de *V* son adyacentes en G si y solo si lo son sus imágenes en *G'.*

Observación. Si G = *(V, A)* y G' = *(V', A')* son isomorfos, entonces los cardinales de los conjuntos de vértices y de aristas son iguales, y las sucesiones de grados de G y G' coinciden. También han de tener ciclos de la misma longitud. Se dice que estas propiedades son invariantes respecto de isomorfismos de grafos. Además, si uno de estos invariantes no se conserva podemos afirmar que los grafos no son isomorfos.

Tipos de grafos.

Definición. Se dice que G = (V,A) es

i) un grafo regular de grado *n* si todos sus vértices tiene grado *n,*
ii) un grafo completo si cada par de vértices está unido por una arista (se denota por K_n al grafo completo de *n* vértices),
iii) un ciclo si V = {v_I, v_2, …., v_n}, n≥3,y A = {{v_I,v_2},{v_2,v_3}, ... ,{v_n,v_I}} (se denota por en al ciclo de *n* vértices),
iv) una rueda de *n+1* vértices, con V = {v_0, v_I, v_2, …., v_n}, n≥3, y A = { {v_I,v_2},{v_2,v_3}, ... ,{v_n,v_I}, {v_0,v_1},{v_0,v_2},{v_0,v_3}, ... ,{v_0,v_n} }. Se denota por Wn.
v) un cubo si sus vértices y aristas están relacionados como los de un cubo n-dimensional (se denota por Qn al cubo asociado al cubo n-dimensional),
vi) un grafo bipartito si V = V_1 U V_2, siendo V_1 y V_2 conjuntos disjuntos, y cada arista de A une un vértice de V_1 y otro de V_2,
vii) un grafo bipartito completo si V = V_1 U V_2 y dos vértices de V están unidos por una arista de A si y solo si un vértice está en V_1y el otro en V_2 (se denota por $K_{r,s}$ al grafo bipartito completo donde V_1 tiene *r* vértices y V_2 tiene *s* vértices).

Ejemplo. Una red de *n* ordenadores conectados a una unidad central estarán dispuestos formando un grafo del tipo *Wn.* Por otra parte, en un ordenador que tenga múltiples procesadores para efectuar procesamiento en paralelo, en el caso de que tenga n^2 procesadores, éstos se pueden conectar formando una red en forma de cuadrilátero, aunque una de las formas de conexión más importantes es la de 2^n ordenadores según el grafo *Qn.*

Representación de grafos

Definición. Dado un grafo G, la tabla de adyacencia de G es una tabla cuya primera son loa vértices de G, debajo se colocan los vértices adyacentes

Ejemplo. La tabla de adyacencias de la rueda W_4, de cinco vértices, siendo el centro el v_5

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_2	V_3	V_4	V_2	V_1
V_4	V_1	V_2	V_1	V_2
V_5	V_5	V_5	V_5	V_3
				V_4

Definición. Dado un grafo G con vértices V = {v_I, v_2, …., v_n} y aristas A = { a_I, a_2, …., a_n}, la matriz de adyacencia de G es una matriz M= (mij) de n filas y n aristas donde m_{ij} indica el número de aristas definidas por los vértices v_i y v_j.

Ejemplo Matriz de adyacencia del Rafo completo K_4

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conexión

Uno de los problemas más frecuentes de aplicación de grafos es a problemas sobre rutas. Estos problemas pueden modelizarse por un grafo donde los vértices representan distintos lugares y las aristas representan rutas entre ellos.

El primer problema que se plantea es el de la existencia de un camino entre dos puntos. Esto motiva la definición de camino entre dos vértices de un grafo y los conceptos relacionados de grafo conexo y de componentes conexas de un grafo, conceptos con los que comenzamos la sección. A continuación abordamos el problema de la existencia de caminos y ciclos eulerianos y hamiltonianos. El primero de ellos tiene solución completa. Damos además el algoritmo de Fleury para encontrarlo. Respecto al segundo problema, no se conocen condiciones necesarias y suficientes sencillas para la existencia de caminos hamiltonianos en un grafo. Daremos algunas condiciones suficientes sencillas que garantizan su existencia o su no existencia, y algunos criterios sencillos para su construcción.

Grafos conexos

Definición. Dado un grafo G = *(V, A)* se dice que G es un grafo conexo si para cualesquiera *par de vértices u, v de V* existe un camino de *u* a *v.* Se dice que G es disconexo si no es conexo.

Definición. Dado un grafo G = *(V, A),* G se puede descomponer de forma única en una unión de subgrafos conexos disjuntos dos a dos. A cada uno de estos subgrafos se les llama componentes conexas de G.

Definición. Dado un grafo G se llama arista puente a toda arista que al ser suprimida hace que el grafo resultante tenga más componentes conexas que el original.

Observación. Sea G un grafo de n vértices $(n > 3)$, con matriz de adyacencia A. Entonces las entradas de A^k representan el número de caminos de longitud k entre los vértices. Por tanto, G es conexo si y solo si $A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$ no tiene ceros.

Grafos Eulerianos

Definición. Dado un grafo G se llama camino euleriano en G a todo camino que recorre todas las aristas de G una única vez. Se llama grafo euleriano a todo aquel grafo que tiene un camino cerrado euleriano.

Teorema. Un grafo G conexo es euleriano si y solo si el grado de cada vértice es par.

Corolario. Un grafo G conexo posee un camino euleriano no cerrado si y solo tiene solamente dos vértices impares.

Ejemplos. Problemas de caminos eulerianos son el de los puentes de Kónisberg, el del recorrido del caballo de ajedrez haciendo todos los movimientos posibles y el del recorrido por las aristas de un cubo, todos ellos con solución negativa.

Observación. (Algoritmo de Fleury). Sea $G = (V, A)$ un grafo y supongamos que queremos construir un camino euleriano. Para ello tomamos un vértice cualquiera v_0 Escogemos a continuación una arista a_1 incidente a v_0 y el otro vértice v_1 incidente a a_1. En general, si hemos construido un camino $v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, v_{p-1}$ entonces elegimos a_p incidente a v_{p-1} tal que no sea, salvo que sea la única alternativa, arista puente de G-$\{a_1, a_2, ... , a_{p-1}\}$. Continuando este proceso, hasta haber elegido todas las aristas, se obtiene un camino euleriano en G.

Grafos hamiltonianos

El problema dual de encontrar caminos en un grafo que recorran todos los vértices una y solo una vez fue estudiado por el matemático irlandés W.R.Hamilton (1805-65).

Definición. Dado un grafo G se llama camino hamiltoniano en G a todo camino que recorre todos los vértices de G una única vez salvo los extremos si es cerrado, en cuyo caso se llama ciclo hamiltoniano.

Se llama grafo hamiltoniano a todo aquel grafo que tiene un ciclo hamiltoniano.

Observación. Si un grafo G tiene un vértice de grado 1, entonces G no es hamiltoniano.

Por otra parte si un vértice de *G* tiene grado 2, entonces las dos aristas incidentes en él han de estar contenidas en ese orden en cualquier camino hamiltoniano. Además si sabemos que dos aristas incidentes en un vértice están, podemos suprimir el resto de aristas incidentes en ese vértice.

Proposición. *Los grafos completos son hamiltonianos (en general cualquier grafo con n vértices que contenga un ciclo de longitud n es hamiltoniano). Por otra parte, el grafo bipartito completo $K_{r,s}$ es hamiltoniano si y solo $r = s$.*

Ejemplos. Ejemplos de caminos hamiltonianos son el recorrido del caballo de ajedrez pasando por todas las casillas y el del recorrido en un cubo formado por cubos más pequeños que pase por todos éstos.

Observación. No existen algoritmos deterministas en tiempo polinómico que nos den un ciclo hamiltoniano en un grafo (es un problema NP-completo).

Grafos planos

El problema clásico de las tras casas y los servicios de agua, luz y gas nos proporciona el ejemplo de un grafo que no puede ser dibujado en el plano.

Definición 4.3.1. Se dice que un grafo G es plano si puede dibujarse en el plano de forma que las aristas no se corten o se corten solo en vértices.

Ejemplo. Son grafos planos k_4, y $K_{2,2}$

Teorema. (Fórmula de Euler). *Si* G= *(V, A) es un grafo plano, simple, conexo que delimita r regiones del plano, entonces* G *verifica la fórmula de Euler* $|V| - |A| + r = 2$.

Corolario. *Si* G= *(V, A) es un grafo plano, simple, conexo y* $|V| > 3$, *entonces* $|A| < 3|V| - 6$.

Ejemplo 4.3.5. K_5 no es plano.

Corolario 4.3.6. *Si* G= *(V, A) es un grafo plano, simple, conexo, con* $|V| > 3$ *y* G *no tiene ciclos de longitud* 3, *entonces* $|A| < 2|V| - 4$.

Ejemplo. $K_{3,3}$ no es plano.

Teorema 4.3.8 (Kuratowski, 1930). *Un grafo* G *es plano si y solo si no contiene ningún subgrafo isomorfo a K_5, K_{33}, o alguno de éstos con vértices añadidos en las aristas.*

Coloración de grafos

Cuando se colorean las regiones de un mapa, a regiones con frontera común (consistente en más de un punto) se le asignan colores diferentes. Se conjeturó durante mucho tiempo que cuatro colores eran suficientes para colorear cualquier mapa con estas restricciones. Este hecho no pudo demostrarse hasta 1976. Los matemáticos estadounidenses, K.Appel, W.Haken y J.Koch demostraron el teorema de los cuatro colores, siguiendo un razonamiento de caso por caso, llevado a cabo por ordenador. Demostraron que si el teorema de los cuatro colores fuera falso, entonces existiría un contraejemplo perteneciente a uno de 2000 tipos posibles y posteriormente probaron, siendo necesarias más de 1000 horas de cálculo por ordenador, que ninguno de estos tipos posibles proporcionaba un contraejemplo.

Algunas de las aplicaciones de la coloración de grafos pueden ser la de establecer calendarios de exámenes, o la de asignar sectores de memoria, para almacenar diferentes variables usadas frecuentemente, durante la ejecución de un programa.

Coloración de vértices

Definición. Una coloración de un grafo G es una asignación de colores a sus vértices de forma que vértices adyacentes tengan colores distintos.

Una n-coloración de un grafo G es una coloración de G que utiliza únicamente *n* colores distintos.

Definición. Se llama número cromático de un grafo G y se denota por $\chi(G)$ al menor número *n* para el que existe una n-coloración de G.

Ejemplo. $\chi(K_n) = n$ y $\chi(C_n) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \\ 2 & si \quad n\ par \\ 3 & si \quad n \geq 3, impar \end{cases}$

Propiedades. Sea G = (V, A) un grafo. Entonces

i) $\chi(G) = 2$ solo si G es bipartido,

ii) $\chi(G) = \Delta(G) + 1,\ \Delta(G) = \max\{\delta(v) \mid v \in V\}$

iii) si G' es un subgrafo de G, $\chi(G') \leq \chi(G)$

Teorema. *Si* G *es un grafo plano, entonces* $\chi(G) \leq 4$. *Además, existen grafos planos cuyo número cromático es exactamente 4.*

Observación (Algoritmo voraz de coloración). Sea = *(V, A)* un grafo y supongamos que V = {v_1, v_2, ..., v_n} donde $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq ...... \geq \delta(v_n)$. Asignemos el color 1 a v_1 Si v_2 es adyacente a v_1 le asignamos el color 2 a v_2 en caso contrario le asignamos el color 1. En general, si hemos coloreado v_1, v_2, …., v_{p-1}, entonces asignamos a v_p el menor color de entre los no asignados a ningún vértice adyacente a v_p .Continuando este proceso se obtiene una coloración de G que utiliza a lo sumo $\Delta(G)+1$ colores (Welsh, 1963).

Coloración de aristas

Definición. Una coloración de las aristas de un grafo G es una asignación de colores a su aristas de forma que aristas adyacentes tengan colores distintos. Una *n*-coloración de las aristas de un grafo G es una coloración de las aristas de G que utiliza unicamente *n* colores distintos.

Definición. Se llama número cromático de aristas de un grafo G y se denota por $\chi_1(G)$ al menor número *n* para el que existe una *n*-coloración de las aristas de G.

Propiedades. Sea G = (V, A) un grafo. Entonces

i) $\chi_1(G) = \Delta(G)$ si G es bipartido,

ii) $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G)+1$.

Árboles

Un árbol es un tipo particular de grafo sin circuitos que es particularmente útil en Informática. Comenzamos la sección con las definiciones básicas referentes a árboles, para introducir a continuación el concepto de árbol generador de un grafo. Finalmente damos algoritmos para obtener el árbol generador mínimo de un grafo con pesos. Los árboles se pueden utilizar por ejemplo para construir redes de comunicaciones con gasto mínimo, o para modelar procedimientos que se desarrollen en sucesión. Ésto los hace particularmente útiles para el estudio de algoritmos de extracción, como el de localizar elementos en una lista.

Definición. Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos.

Ejemplo. Un ejemplo apropiado de árbol es la estructura en directorios, subdirectorios y archivos de un ordenador.

Proposición. *Sea* G *un grafo. Son equivalentes:*

i) G *es un árbol,*

ii) para cada par de vértices distintos de G, *existe un único camino entre ambos con todas las aristas distintas,*

iii) G *es conexo y todas sus aristas son puentes,*

iv) G *es conexo y* |V| =|A|-1

Árboles generadores

Definición. Un árbol generador de un grafo conexo G es un subgrafo de G que contiene todos los vértices de G y que además es árbol.

Proposición. Todo grafo conexo tiene al menos un árbol generador.

Árboles generadores minimales

Definición. Un árbol generador minimal de un grafo conexo con pesos G es un árbol generador de G que tiene la menor suma posible de pesos en sus aristas.

Proposición. *Todo grafo conexo con pesos tiene un árbol generador minimal.*

Existen algoritmos para obtener árboles generadores minimales de un grafo. El primero de ellos data de 1957 y se debe a R.Prim. El segundo fue descubierto por J.Kruskal en 1956.

Observación (Algoritmo de Prim). Sea G un grafo con pesos de n vértices. De entre todas las aristas de G de menor peso elegimos una a_1. De entre todas las aristas incidentes en uno de los vértices de a_1 Yen uno de los restantes vértices, elegimos una de las de menor peso. Así obtenemos un árbol T_2 con dos aristas, a_1 y a_2. En general, si hemos obtenido T_k, de entre todas las aristas incidentes en un vértice de T_k y en un vértice no en elegimos una de las de menor peso, y construimos T_{k+1} a partir de T_k añadiendo dicha arista. Repitiendo este proceso n -1 veces, se obtiene un árbol generador minimal de G.

Observación (Algoritmo de Kruskal). Sea G un grafo con pesos con n vértices. De entre todas las aristas de G de menor peso elegimos una a_1. A continuación elegimos, de entre las restantes aristas que no formen un ciclo con a_1, una arista a_2 de las de menor peso. Así obtenemos un grafo G_2 con dos aristas, a_1 y a_2. En general, si hemos obtenido G_k, de entre todas las aristas que no formen un ciclo con las aristas de G_k, elegimos una de las de menor peso, y construimos G_{k+1} a partir de G_k añadiendo dicha arista. Continuando este proceso, hasta escoger n-1 aristas, se obtiene un árbol generador minimal de G.

Búsqueda en grafos

Supongamos que queremos realizar una búsqueda en un grafo G. Podemos seguir dos estrategias. Podemos profundizar siempre hacia un vértice del siguiente nivel hasta que no podamos continuar, para repetir a continuación este proceso a lo largo de otra rama o bien podemos avanzar explorando completamente cada nivel antes de pasar al siguiente. En cualquiera de los dos casos el proceso de búsqueda se hace siguiendo un árbol generador del grafo.

Búsqueda en profundidad (BEP)

Se parte de un vértice v_1 se pasa a otro adyacente v_2. De éste se pasa a otro adyacente a v_2 distinto de v_1 y se continúa este proceso hasta llegar a un vértice tal que todos sus vértices adyacentes hayan sido ya visitados. Entonces se retrocede vértice a vértice hasta que se encuentre uno que tenga un vértice que no hallamos visitado todavía. Y se procede por éste de forma análoga.

De esta forma se construye un árbol generador T de la componente conexa de G que contiene a v_1. Además en el proceso de construcción de T cada arista de T es recorrida dos veces.

Intuitivamente es como si consideráramos el grafo como un laberinto y lo recorreríamos tocando siempre la pared derecha.

La búsqueda en profundidad nos da uno de los posibles árboles generadores del grafo.

Búsqueda en anchura (BEA)

Se parte de un vértice v_1 se pasa a todos los adyacentes. De cada uno de éstos se pasa a sus adyacentes que no hayan sido considerados y se continúa este proceso hasta que no haya vértice con vértices adyacentes que no hayan sido visitados.

De esta forma se construye un árbol generador T de la componente conexa de G que contiene a v_1.

La búsqueda en anchura se utiliza cuando se persigue algún tipo de optimización, como caminos con el menor número de aristas.