Examen de Estructuras Discretas (Bloque 1)
Grado de Ingeniería Informática. Curso 2015-2016

1. **(2 puntos)**

   a) Definir partición de un número entero y demostrar que

   $$p(n| \text{ con parte máxima de tamaño } r) = p(n \mid \text{ con r partes })$$

   b) Dar la definición de desorden y dar la expresión para el cálculo del número de desórdenes de n elementos.

   c) Determinar el coeficiente de x^{11} en $(2-x)^{-9}$ y en $(2-x)^{9}$.

   d) Definir el Principio del Palomar y dar un ejemplo donde se pueda aplicar.

2. **(2,5 puntos)** Encontrar el número de formas de repartir a 25 estudiantes entre 4 ordenadores, con al menos dos en cada ordenador:

   a) Encontrar la solución sin utilizar funciones generadoras;

   b) Comprobar que se llega a la misma solución utilizando funciones generadoras.

3. **(2 puntos)** Utilizando funciones generadoras resolver:

   - ¿ Cuántas secuencias de longitud r se pueden formar con un número par de doses y un número impar de treses con los dígitos $\{1, 2, 3\}$.

4. **(1,5 punto)** ¿Es válido el siguiente razonamiento? Justificar la respuesta

$$\begin{array}{l} p \wedge q \to r \\ q \wedge r \to p \\ \sim p \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$$

Observaciones: 1) Tiempo: 2 horas.
2) Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
3) No está permitido el uso de dispositivos electrónicos, ni calculadoras.
4) Responder cada pregunta en folios independientes.

Soluciones Examen de Estructuras Discretas (Bloque 1)

Grado de Ingeniería Informática. Curso 2015-2016

1. **(2 puntos)**

   a) Definir partición de un número entero y demostrar que

   $$p(n| \text{ con parte máxima de tamaño } r) = p(n \mid \text{ r partes })$$

   b) Dar la definición de desorden y dar la expresión para el cálculo del número de desórdenes de n elementos.

   c) Determinar el coeficiente de x^{11} en $(2-x)^{-9}$ y en $(2-x)^9$.
   Sol. El coeficiente de x^{11} en $(2-x)^9$ es cero ya que $11 > 9$. En $(2-x)^{-9} = 2^{-9}(1-x/2)^{-9}$ el coeficiente es $2^{-9}(-1)^{11}C(-9,11) = 2^{-9}(-1)^{11}(-1)^{11}C(9+11-1,11)$.

   d) Definir el Principio del Palomar y dar un ejemplo donde se pueda aplicar.

   Sol. El resto de respuestas las pueden encontrar en los apuntes de la asignatura y de clase.

2. **(2,5 puntos)** Encontrar el número de formas de repartir a 25 estudiantes entre 4 ordenadores con al menos dos en cada ordenador.

   a) Encontrar la solución sin utilizar funciones generadoras.
   Sol. Número de soluciones de la ecuación $O_1+O_2+O_3+O_4 = 25$, con $2 \leq O_i, i = 1,2,3,4$ Lo que es equivalente a hallar número de soluciones de $O_1'+O_2'+O_3'+O_4' = 17$, con $0 \leq O_i', i = 1,2,3,4$, lo que es igual a $CR(4,17) = C(17+4-1,3)$.

   b) Comprobar que se llega a la misma solución utilizando funciones generadoras.
   Sol.
   $$f(x) = (x^2+x^3+\ldots)^4 = x^2(1+x+x^2+\ldots)^4 = x^8(1-x)^{-4},$$
   buscamos el coeficiente de x^{25} en $f(x)$ o el coeficiente de x^{17} en el binomio negativo $(1-x)^{-4}$ que es $C(4+17-1,3)$.

3. **(2 puntos)** Utilizando funciones generadoras resolver: ¿ Cuántas secuencias de longitud r se pueden formar con un número par de doses y un número impar de treses con los dígitos $\{1,2,3\}$.

   Sol.
   $$f(x) = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots) =$$
   $$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^x-e^{-x}}{2}e^x = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}e^x = \frac{e^{3x}-e^x}{4}$$
   Nuestra recuento es el coeficiente de $\frac{x^r}{r!}$, i.e., $1/4(3^r-1)$.

4. **(1,5 punto)** ¿Es válido el siguiente razonamiento? Justificar la respuesta

   $$\begin{array}{l} p \wedge q \to r \\ q \wedge r \to p \\ \sim p \\ \hline \therefore \sim r \end{array}$$

   Sol. Un razonamiento es no válido, cuando de proposiciones ciertas se dedducen conclusiones falsas. En este caso, basta asignar: $\sim r \to 0$, $\sim r \to 1$, $p \to 0$ y $q \to 0$ para comprobar que las tres primeras proposiciones son ciertas y la conclusión es falsa al mismo tiempo.