① Lógica

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\overline{p \oplus q}$ $p \Leftrightarrow q$	$\overline{(p \Leftrightarrow q)}$ $p \oplus q$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0
		pero sin embargo también incluso tanto como	o también o incluso o ... a no ser a menos que	implica entonces por lo tanto luego	si y sólo si siempre y cuando es equivalente	

- Propiedades

① Conmutativa: $p \overset{\wedge}{\vee} q \equiv q \overset{\wedge}{\vee} p$

② Asociativa: $p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\wedge}{\vee} r) \equiv p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\wedge}{\vee} r)$

③ Distributiva: $p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\vee}{\wedge} r) \equiv (p \overset{\wedge}{\vee} q) \overset{\vee}{\wedge} (p \overset{\wedge}{\vee} r)$

④ Morgan: $\overline{(p \overset{\wedge}{\vee} q)} \equiv \bar{p} \overset{\vee}{\wedge} \bar{q}$

⑤ Absorción: $p \overset{\wedge}{\vee} (p \overset{\vee}{\wedge} q) \equiv p$

- Equivalencias

① Definiciones:
- $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$
- $p \oplus q \equiv (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$

② Transformaciones:
- $p \rightarrow (q \overset{\wedge}{\vee} r) \equiv (p \rightarrow q) \overset{\wedge}{\vee} (p \rightarrow r)$
- $(p \overset{\wedge}{\vee} q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \overset{\vee}{\wedge} (q \rightarrow r)$

③ Negación a ambos lados
- $p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$
- $p \Leftrightarrow q \equiv \bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$
- Nota: $p \vee q \equiv \bar{\bar{p}} \vee q \equiv \bar{p} \rightarrow q$

- Demostración

M. Ponens	M. Tollens	Silogismo	S.l. Disyunt.	Resolución
p	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \vee q$
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow s$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee r$
$\therefore q$	$\therefore \bar{p}$	$\therefore p \rightarrow s$	$\therefore q$	$\therefore q \vee r$

Biblia combinatoria

Al cambiar orden, ¿Mismo grupo?
- Sí → ¿Rep?
  - Sí → $SR_{m,n}$: $\dfrac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$
  - No → $C_{m,n}$: $\dbinom{m}{n} \Leftrightarrow \dfrac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$
- No → ¿Se usan todas? (opciones, elem,...)
  - Sí → ¿Rep?
    - Sí → $PR_{n,x,y,z}$: $\dfrac{n!}{x!\cdot y!\cdot z!}$
    - No → P_n: $n!$
  - No → ¿Rep?
    - Sí → $VR_{m,n}$: m^n
    - No → $V_{m,n}$: $\dfrac{m!}{(m-n)!}$

$P_c = \dbinom{m}{n}\cdot(n-1)!$

Tartaglia

$\dbinom{m}{0} = \dbinom{m}{m} = 1$

$\dbinom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$

```
        1
       1 1
      1 2 1
     1 3 3 1
    1 4 6 4 1
      . . .
```

$\approx$

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \dots & & & \end{matrix}$$

$\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$

Bin. Newton

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 \pm \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \dots \pm \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

Ppio del Palomar

Tengo $K+1$ palomas y los meto en K cajas. Por lo tanto, existe una caja con 2 palomas.

G. Tengo N elementos y K cajas donde insertarlos. Al menos hay una caja con $\left\lceil \dfrac{N}{K} \right\rceil$ elementos. (redondeo para arriba)

Ejemplo: en un grupo de 367 personas, al menos 2 cumplen el mismo día.

Conjuntos

$|A|$ = Cardinal de A = nº elementos que pertenecen a A.

A = Conjunto que cumple una propiedad.

$A^c = X - A$ = Complementario de A; Conjunto de elementos que no cumplen A. (Todos elem. los que cumplen p).

Regla de la suma:
- Tarea 1 se puede hacer de m formas
- Tarea 2 se puede hacer de n formas.
- No se pueden hacer ambas a la vez

} Se pueden hacer ambas tareas de $m+n$ formas.

Regla del producto:
- Un procedimiento se divide en 2 tareas.
- Tarea 1 puede tener m resultados.
- Tarea 2 puede tener n resultados.

} El procedimiento se puede llevar a cabo de $m \cdot n$ formas.

$A \cap B$ = elementos que cumplen propiedad de A y propiedad de B. (Ambas a la vez)

$A \cup B = A + B - A \cap B$ = elementos que cumplen prop. A ó propiedad B. (No ambas a la vez)

Función generadora en partes de tamaño k

$$F(x) = (1 + x^1 + x^2 + x^3 \dots + x^n) \cdot (1 + (x^k)^1 + (x^k)^2 + \dots + (x^k)^n) \cdot (1 + (x^{k'})^1 + (x^{k'})^2 + \dots + (x^{k'})^{n'})$$

$p(n)$ = particiones de n. (nº de particiones)

$p(n \mid \text{propiedad})$ = particiones de n que verifica prop.

$p(n \mid \text{nº partes} \leq r) = p(n+r \mid \text{con exactamente } r \text{ partes})$

Ej. $p(3 \mid \text{nº partes} \leq 2) = p(3+2 \mid \text{exact. } 2 \text{ partes})$ $\begin{cases} 1+2,\ 3 \\ 3+2,\ 4+1 \end{cases}$

$$p(n \mid \text{cada parte de tam. } i) = \frac{1}{1-x^i}$$

$$p(n \mid \text{partes de tam. } i, j, k) = \frac{1}{1-x^i} \cdot \frac{1}{1-x^j} \cdot \frac{1}{1-x^k}$$

$$p(n \mid \text{cada parte de tam. } i \text{ aparece como máx. } k \text{ veces}) = \frac{1-x^{i(k+1)}}{1-x^i}$$

$$p(n \mid \text{partes pares}) = \frac{1}{1-x^{2k}} \quad \Big| \quad p(n \mid \text{partes imp.}) = \frac{1}{1-x^{2k+1}}$$

Cálculo de $p(n)$

$P(x) = \frac{1}{1-x^i}$ (gen. $\{p(n)\}$)

$Q(x) = (1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)$

$P(x)\,Q(x) = 1$. Son inversas.

$$1 = P(x)\,Q(x) = (1 + p(1)x + p(2)x^2 + \dots + p(n)x^n)(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots)$$

Igualo coef.:

$$0 = p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) \dots$$

Por lo tanto:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) \dots$$

$$p(7) = p(6) + p(5) - p(2) - p(0)$$

$$p(7) = 11 + 7 - 2 - 1 = 18 - 3 = 15$$

[redacted]

- **F. Generadoras exponenciales: usadas cuando al escoger, el orden importa.**

Formato

$$x_1 + x_2 \dots + x_n = r \quad \left.\begin{matrix} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ \dots \\ a_n \leq x_n \leq b_n \end{matrix}\right\}$$ Buscar coef. de x^n en $G(x) = \left(\frac{x^{a_1}}{a_1!} + \frac{x^{a_1+1}}{a_1+1!} \dots \frac{x^{b_1}}{b_1!}\right) \dots \left(\frac{x^{a_n}}{a_n!} \dots \frac{x^{b_n}}{b_n!}\right)$

Conversiones $\left| e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right.$

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} \dots \frac{x^n}{n!}$$

Coseno hiperbólico $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \frac{x^{par}}{par!}$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} \dots \frac{x^{impar}}{impar!}$$

Buscar el coef. de $\frac{x^r}{r!}$

Nota: $x^r = \frac{r! \cdot x^r}{r!} = r! \cdot \frac{x^r}{r!}$

Nota 2: $\frac{x^r}{(r-1)!} = \frac{r \cdot x^r}{r \cdot (r-1)!} = r \cdot \frac{x^r}{r!}$

$$e^{3x} = \frac{(3x)^1}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} \dots \frac{(3x)^n}{n!}$$

- Ejemplo

Formar palabras de long. 4 con A, B, C, Al menos A debe aparecer 2 veces.
Como importa el orden ($AABC \neq BCAA$), debo usar una F. Gen. Exponencial

Formato:

$$l_a + l_b + l_c = 4 \left\{\begin{matrix} 2 \leq l_a \leq 4 \\ 0 \leq l_b, l_c \leq 2 \end{matrix}\right\} x^{l_a} + x^{l_b} + x^{l_c} = x^4;$$ Para cada solución, tendré $\frac{l_a + l_b + l_c}{l_a!\, l_b!\, l_c!}$ reordenaciones posibles.

$$F(x) \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)}_{a} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)}_{b} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)}_{c};$$

De cada una de estas series debo elegir un elemento, que multiplicado por los restantes a elegir debe ser x^4. Aplico conversiones.

$$F(x) = \left(e^x - \frac{x^0}{0!} - \frac{x^1}{1!}\right) \cdot e^x \cdot e^x = (e^x - x - 1) \cdot e^{2x};$$ Sigo operando...

$F(x) = e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}$; Vuelvo a sustituir por las series de sumas infinitas.

$$F(x) = \left(1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} \dots \frac{(3x)^n}{n!}\right) - \left(1 + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} \dots \frac{(2x)^n}{n!}\right) - \left(x + \frac{x(2x)^1}{1!} + \frac{x(2x)^2}{2!} \dots \frac{x(2x)^n}{n!}\right)$$

Como debo buscar $r = 4$; Busco coef. de $\frac{x^4}{4!}$;

Solución $= \sum \frac{4!}{l_a! \cdot l_b! \cdot l_c!}$

$c_1 \Rightarrow n = 4$; $\frac{(3x)^4}{4!} = 81 \frac{x^4}{4!}$; $c_1 = 81$

$c_2 \Rightarrow n = 4$; $\frac{(2x)^4}{4!} = 16 \cdot \frac{x^4}{4!}$; $c_2 = 16$

$c_3 \Rightarrow n = 3$; $\frac{x^1(2x)^3}{3!} \Rightarrow \frac{8x^4}{3!}$ } Aplico nota 2 (ver arriba) $\Rightarrow \frac{8x^4}{3!} \cdot \frac{4}{4} = 8 \cdot 4 \cdot \frac{x^4}{4!} = 32 \frac{x^4}{4!}$; $c_3 = 32$

Nº total de reordenaciones para soluciones: $c_1 - c_2 - c_3 = 81 - 16 - 32 = 33$

Recordemos $F(x) = e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}$

• F. Generadoras

1.- Conversiones

① $1 + z + z^2 \dots z^m = \dfrac{1 - z^{m+1}}{1 - z}$

② $\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} z^n = z^0 + z^1 + z^2 \dots$

③ $\dfrac{1}{(1 - z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + m - 1}{n} z^n$

④ $1 + x + x^2 + \dots x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1 - x)^{-1}$

Consideraciones

$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k \cdot \binom{k + n - 1}{k}$

$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + n - 1}{k} x^k \quad \Big| \quad \binom{-n}{k} = \binom{k + n - 1}{k}$?

Formato

$x_1 + x_2 + x_3 \dots x_n = r$; $\quad a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$, $\dots$, $a_n \leq x_n \leq b_n$

① Ejemplo

Nº soluciones $x_1 + x_2 + x_3 = 15$; $\quad 2 \leq x_1 \leq 5$, $3 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3$

$G(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \cdot (x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \cdot (x^4 + x^5 + \dots x^n)$; Saco factor común:

$G(x) = x^2 \cdot (1 + x + x^2 + x^3) \cdot x^3 (1 + x + x^2 + x^3) \cdot x^4 \cdot (1 + x + x^2 + \dots x^{n-4})$; combino fact. común y saco serie (Conv. ④)

$G(x) = x^9 \cdot (1 + x + x^2 + x^3)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; Aplico ①, ②

$G(x) = x^9 \cdot \left(\dfrac{1 - x^4}{1 - x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{x^9 \cdot (1 - x^4)^2 \cdot 1}{(1 - x)^2 \cdot (1 - x)}$; Expando el polinomio:

$G(x) = x^9 \cdot (1 - 2x^4 + x^8) \cdot (1 - x)^{-3}$; Aplico consideración 2.

$G(x) = (x^9 - 2x^{13} + x^{17}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k + (3 - 1)}{k} \cdot x^k$; Cociente 15 $\begin{cases} x^{15} = x^9 \cdot \underline{x^6} & (a) \\ x^{15} = x^{13} \cdot \underline{x^2} & (b) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} C_{15a} \Rightarrow k = 6;\ 1\, x^9 \cdot \binom{6 + 2}{6} x^6 \\ C_{15b} \Rightarrow k = 2;\ -2x^{13} \cdot \binom{2 + 2}{2} x^2 \end{array}\right\} \ C_{15} = \left[1 \cdot \binom{6 + 2}{6}\right] + \left[-2 \cdot \binom{2 + 2}{2}\right] = 16$ //

Particiones de un entero

Dado un número n, se puede expresar como K combinaciones de sumas de números $n_1 \dots n_k \leq n$

Ejemplo: particiones de 5:

$$\left.\begin{array}{l|l} p_1 = 5 & p_4 = 2+2+1 \\ p_2 = 3+1+1 & p_5 = 1+1+1+1+1 \\ p_3 = 4+1 & p_6 = 3+2 \\ & p_7 = 2+1+1+1 \end{array}\right\}$$

$K = 7$;

$p(5) = 7 \Rightarrow$ nº particiones de $5 = 7$

$p(n \mid P) \Rightarrow$ particiones de n que cumplen la propiedad P

Diagrama de Ferrer

Un D.d Ferrer representa una partición concreta de un nº n, de mayor a menor. (+) ⇣ (−)

Ej. $p(18) = 7+5+4+1+1$;

Diagrama

```
x x x x x x x
x x x x x
x x x x
x
x
```

$r_1 = 5$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $r_4 = 3$, $r_5 = 2$, $r_6 = 1$, $r_7 = 1$

$r_c =$ nº de marcas en la columna c.

$p(n, k) \Rightarrow$ nº de particiones de n como suma de $\{1, 2, 3, \dots k\}$

$\hookrightarrow p(n,k) = p(n, k-1) + p(n-k, k)$

$p(n, 1) = 1$ | $p(\emptyset) = 1$ (convenio).

$p(0, k) = \emptyset$

Por lo tanto, $p(n,k) = p(n, k-1) + p(n-k, k-1) + p(n-2k, k-1) \dots$

```
0          1
1        1   1
2      1   2   1
3    1   3   3   1
4  1   4   6   4   1
5 1  5  10  10   5   1
```

Rel. Recurrencia 1er orden

Forma general

$a_{n+1} = d\, a_n$; $n \geq 0$; $d = cte$; $a_0 = A$; Solución $= A \cdot d^n$; $n \geq 0$

Ejemplo 1:

Para la sucesión 5, 15, 45, 135... podemos ver que $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ y $a_{n+1} = 3a_n$

Vemos que
$a_0 = 5$
$a_1 = 15 = 3 \cdot a_0$
$a_2 = 45 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 3 \cdot a_0$
$a_3 = 135 = 3a_2 = 3 \cdot 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a_0$

Vemos que $a_n = 3^n \cdot a_0$

$a_n = 3^n \cdot 5$

Ejemplo 2: banco interés anual 6%. Deposito 1000€, ¿cuánto tengo en 1 año?
Interés mensual = 0'06 / 12 = 0'0005;
Vemos que $a_0 = 1000$;
$a_1 = a_0 + (a_0 \cdot \text{interés}) \Leftrightarrow$ primer mes
$a_2 = a_1 + (a_1 \cdot \text{interés}) \Leftrightarrow$ segundo mes
...
$a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} \cdot \text{interés}) \Leftrightarrow$ n mes $\Leftrightarrow a_n = 1'0005 \cdot a_{n-1}$; Buscando a_0 ...

$a_n = 1000 \cdot (1'0005)^n$; Para 1 año es $a_{12} = 1000 \cdot (1'0005)^n = 1061'68$

- Hallar rel. recurrencia de 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42...

$a_0 = 0$
$a_1 = 2 = a_0 + 2$
$a_2 = 6 = a_1 + 4$
$a_3 = 12 = a_2 + 6$
$a_4 = 20 = a_3 + 8$
...
$a_n = ? = a_{n-1} + 2n$;

Rel lineales homogéneas de orden k

Formato

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} \pm c_2 \cdot a_{n-2} \pm \dots c_k \cdot a_{n-k}$; $n \geq k$; $a_0 = i$, $a_1 = j$, $\dots$ $a_k = k$

1. Encontrar ecuación característica: $r^x - c_1 \cdot r^{x-1} - c_2 \cdot r^{x-2} \dots = 0$;
2. Encontrar raíces (soluciones) de la ec. característica. Ojo con la multiplicidad.
   - Si no es múltiple (1 única sol. con mismo nº) $\Rightarrow R_1^n$
   - Si hay multiplicidad (+ de una) $\Rightarrow R_1^n,\ n \cdot R_1^n,\ n^2 \cdot R_1^n$
3. Sol. general: $a_n = A \cdot R_1^n + B \cdot R_2^n \pm \dots Z \cdot R_k^n$
4. Sol especif. $\Rightarrow$ Sustituir por cond. iniciales y resolver sist. ecuaciones.

Ejemplo 1:

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

1. $r^2 - 5r + 6 = 0$; $r \begin{cases} 3 = R_1 \\ 2 = R_2 \end{cases}$ | 2. Soluciones $\{3^n, 2^n\}$ | 3. S. Gen $\Rightarrow a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

4. Sol. específica:

$$a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0; \quad a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1;$$

$$\left.\begin{aligned} -2A - 2B &= -2 \\ 2A + 3B &= 0 \\ \hline B &= -2 \end{aligned}\right.$$

~~$A = -B$~~

$$\left.\begin{aligned} B &= -2 \\ A &= 3 \end{aligned}\right\} a_n = +3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

Ejemplo 2:

$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ para $n \geq 3$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$

1. Ec. Car $= r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$; $\begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}$ | 2. Sol. $\{2^n, n \cdot 2^n, n^2 \cdot 2^n\}$

3. S. Gen $\Rightarrow a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

4. S. Específica:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + C \cdot 0^2 \cdot 2^0 \\ a_1 &= A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C \cdot 1^2 \cdot 2^1 \\ a_2 &= A \cdot 2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C \cdot 2^2 \cdot 2^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 1 &= A \\ 0 &= 2A + 2B + 2C \\ -4 &= 4A + 8B + 16C \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 0 \end{aligned}\right\} a_n = 1 \cdot 2^n - 1 \cdot n \cdot 2^n + 0$$

Ejemplo 3.

$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3}$ para $n \geq 3$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -3$

1. EC. $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$; 2. Sol. ~~$\{1^n, (-4)^n\}$~~ $\{(-2)^n, n \cdot (-2)^n, 1^n\}$

3. S.Gen $\Rightarrow$ ~~$a_n = A \cdot 1^n + (-4)^n \cdot B$~~

$a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot n \cdot (-2)^n + C$

4. S. Especif.

~~$a_0 = A \cdot 1^0 + (-4)^0 \cdot B$; $a_1 = A \cdot 1^1 + (-4)^1 \cdot B$; $a_2 = A \cdot 1^2 + (-4)^2 \cdot B$; $1 = A + B$; $0 = A - 4B$; $-3 = A + 16B$~~ ; $A =$; $B =$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A(-2)^0 + B \cdot 0 \, (-2)^0 + C \\ a_1 &= A(-2)^1 + B \cdot 1 \cdot (-2)^1 + C \\ a_2 &= A(-2)^2 + B \cdot 2 \, (-2)^2 + C \end{aligned}\right| \left.\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A - 2B + C &= 0 \\ 4A + 8B + C &= -3 \end{aligned}\right| \left.\begin{aligned} A &= 8/9 \\ B &= -5/6 \\ C &= 1/9 \end{aligned}\right\} a_n = \frac{8}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}(-2)^n \cdot n + \frac{1}{9}$$

¿Siempre $n^s \cdot d^k$?
$d \cdot d^k$

• Ej. $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$ (1)

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = -3$

① Sol. gen. homogénea:

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$; $r \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow$ Sol. $\{2^n, 2^n \cdot n, 2^n \cdot n^2\}$

Tenemos que la sol. gen. es $(A + B\cdot n + C\cdot n^2)\cdot 2^n$

② Busco sol. particular de la dada:

$F(n) = (1 + 1n)\cdot 3^n$; $s = 3$; Como s no es raíz de la ec. caract., busco sol particular de la forma $(p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^n$

Para hayarla, sustituyo esa forma en la ec. dada. (1)

$a_n = (p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^n$;
$a_{n-1} = (p_0 + p_1 (n-1))\cdot 3^{n-1}$;
$a_{n-2} = (p_0 + p_1 (n-2))\cdot 3^{n-2}$;
$a_{n-3} = (p_0 + p_1 (n-3))\cdot 3^{n-3}$;

$$(p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^n = 6\cdot(p_0 + p_1\cdot(n-1))\cdot 3^{n-1} - 12(p_0 + p_1\cdot(n-2))3^{n-2} + 8\cdot(p_0 + p_1\cdot(n-3))\cdot 3^{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$$

$ax + b = zx + j$

Divido la igualdad por 3^{n-3}: ~~para quitar~~

$$(p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^3 = 6\cdot(p_0 + p_1\cdot(n-1))3^2 - 12(p_0 + p_1(n-2))3^1 + 8\cdot(p_0 + p_1(n-3))3^0 + (1+n)\cdot 3^3$$

Dos polinomios son iguales si sus coef. también lo son:

Coef. n: $(p_1 \cdot n)$

$27 \cdot p_1 = [6\cdot 9\cdot p_1] + [-12\cdot 3\cdot p_1] + [8\cdot 1\cdot p_1] + [27]$;

$27p_1 = 54p_1 - 36p_1 + 8p_1 + 27$; $p_1\cdot(27 - 54 + 36 - 8) = 27$; $1\cdot p_1 = 27$;

$\boxed{p_0 = -135}$

$\boxed{p_1 = 27}$

Coef. término indep.:

$27p_0 = [6\cdot 9 p_0] + [-12\cdot 3\cdot p_0] + [8\cdot 1\cdot p_0] + [27] + [6\cdot 9\cdot(-1)\cdot p_1] + [-12\cdot 3\cdot(-2)\cdot p_1] + [8\cdot 1\cdot(-3)p_1]$

~~$p_0\cdot(27 - 54 + 36 - 8) = 27$; $p_0 =$~~

$p_0\cdot(27 - 54 + 36 - 8) = -1458 + 1944 + [-648] + 27$

$p_0 \cdot 1 = -135$

Forma $f(n) = [-135 + 27\cdot n]\cdot 3^n$

• Una vez tengo p_0 y p_1 busco:

$A =$; $F(n) = [-135 + 27 \cdot n] \cdot 3^n$;

$B =$; $H(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

$C =$ Tendremos que $a_0 = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n + (-135 + 27 n) \cdot 3^n$

$D =$

$E =$

Sust. por cond. ini:

$a_0 \Rightarrow 1 = A - 135$; $A = 136$;

$a_1 \Rightarrow 0 = 2A + 2B + 2C - (3 \cdot 135) + (3 \cdot 27)$

$a_2 \Rightarrow -3 = 4A + 8B + 16C - 1215 + 486$

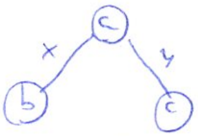
$A = 136$

$B = 117/4$

$C = -13/4$

<u>Sol.</u> $a_n = 136 \cdot 2^n + \frac{117}{4} \cdot n \cdot 2^n - \frac{13}{4} + (-135 + 27 \cdot n) \cdot 3^n$

Ejemplo: $G(\{a,b,c\},\{x,y\})$



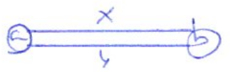
$p(x) = \{b, a\}$
x es <u>incidente</u> con a, b
a, c son <u>adyacentes</u>

• Aprendiendo Grafos

① Terminología

$G(V, E, p)$
- V: conjunto de vértices $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$
- E: conjunto de aristas $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$
- p: app. de incidencia. $p(\text{arista}_1) = \{\text{nodoextremo}_1, \text{nodoextremo}_2\}$

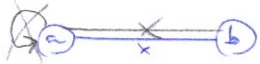
Aristas <u>paralelas</u>: inciden sobre los mismos nodos.



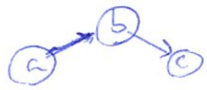
x, y son paralelas

<u>Bucles</u>: arista que sólo incide en un nodo
$p(x) = \{a\}$

<u>Grafo simple</u>
- No tiene bucles
- App. incidencia inyectiva



<u>Grafo dirigido</u>
Las aristas tienen extremo inicial y final.



<u>Grafo etiquetado</u>
Las aristas tienen peso.

② Vértices

Grado de un vértice
- Grafo no dirigido. nº de aristas que inciden en el. (Bucles ×2).
  Ej.  $\delta(a) = 1 + 1 + \underbrace{2}_{\text{Bucle}} = 4$
- Grafo dirigido:
  - Grado entrada: aristas entrantes - $\delta^-(\text{nodo})$
  - Grado salida: aristas salientes $\delta^+(\text{nodo})$

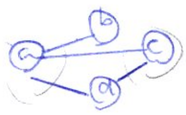
$\delta^-(x) = 2$
$\delta^+(x) = 2$

<u>Características</u>

① Σ Grados de V's = 2 · nº de aristas $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |E|$

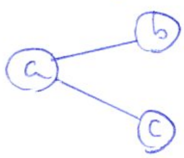
$\delta(a) + \delta(b) = 2 \cdot 1$

② El nº de vértices de grado impar es par.



③ nº ~~arista~~s $= \Sigma\, \delta^+(v) = \Sigma\, \delta^-(v)$

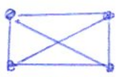
④ Un subgrafo de un grafo es una parte del grafo que es grafo por sí misma.



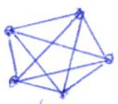
Grafo

Subgrafo

<u>Grafo completo</u>: grafo que posee exactamente 1 arista entre cada par de vértices.

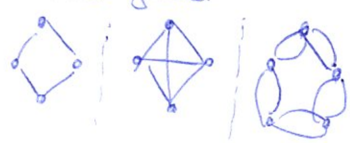


K_4

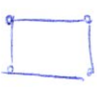


K_5

<u>Grafo regular</u>
Aquel cuyos vértices tienen todos el mismo grado.



<u>Ciclo de n vértices</u>: nº vértices = nº aristas.

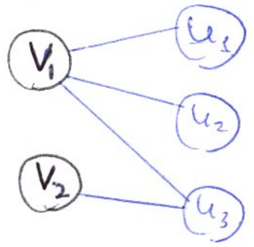


C_4

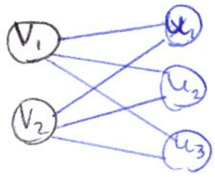
C_6

Grafo bipartido

Grafo con 2 conjuntos de vértices. Cada vértice de un conjunto se relaciona sólo con los del otro conjunto.

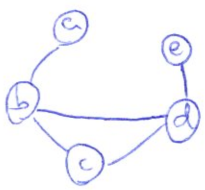


Si todos los vértices de un conjunto se relacionan con todos los vértices del otro, le llamamos completo. ($K_{m,n}$).



Lista de adyacencia

Representar el grafo señalando sus vértices adyacentes.

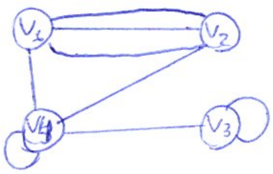


Vértice	Vértices adyacentes
a	b
b	c, d
c	b, d
d	b, c
e	d

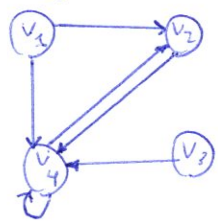
Matriz de adyacencia

Pues lo de antes pero con una matriz.

- Si el grafo es no dirigido, es una matriz simétrica.
- Si el grafo es dirigido, se pone el nº de aristas que van de un vértice a otro.



$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ v_2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$



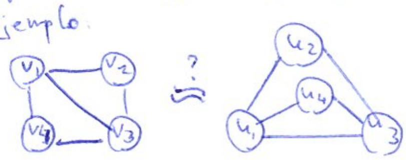
$$\begin{array}{c|cccc} \text{a} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{de...} & & & & \end{array}$$

Grafos isomorfos

Dos grafos son isomorfos si aunque los dibujos diferentes los dibujos son equivalentes.

1. ¿Mismo nº vértices?
2. ¿Mismo nº aristas?
3. ¿Mismo nº grados?
4. Equivalencia. ☺

Ejemplo.



1. Mismo nº vértices: 4
2. Mismo nº aristas: 5
3. Mismo nº grados:

$\delta(v_1) = 3$	$\delta(u_1) = 3$
$\delta(v_2) = 2$	$\delta(u_2) = 2$
$\delta(v_3) = 3$	$\delta(u_3) = 3$
$\delta(v_4) = 2$	$\delta(u_4) = 2$

✓

Caminos

Un camino es una sucesión de aristas que conectan un vértice con otro.

↳ Longitud: nº de aristas que se atraviesan.

Circuito: empieza y acaba en el mismo vértice.

Caminos de long k

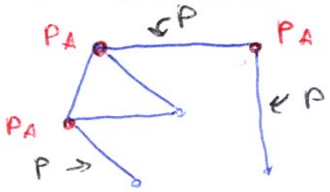
$(\text{Matriz adyacencia})^k \Rightarrow$ Muestra cant. de caminos de long. k de un vértice a otro.

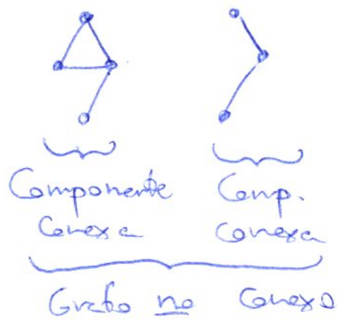
Conexión

Un grafo es conexo si hay un camino entre cada par de vértices.

• Grafos conexos

G es conexo si todos los vértices están conectados.
Puente: arista que si se quita, deja de ser un grafo conexo.
Pto. articulación: vértice que si se quita, pasa a ser un grafo no conexo.





• Grafo euleriano: se puede recorrer todos sus vértices sin pasar por la misma arista más de una vez. Ciclo euleriano.

Ciclo euleriano:

Vértices de grado par. Bucle.

Camino de Euler

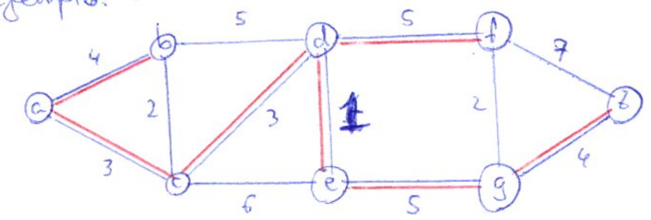
Nº vértices grado par: $\begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$

• Algoritmo de Dijkstra

Un grafo es ponderado si cada arista tiene un peso (coste).

Longitud: peso de todas las aristas del camino.

Ejemplo: de $a \to z$



Notación para Dijkstra

$S_n\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ = vértices a las que se ha llegado en paso n.

$L_n(v)$ = Coste de llegar a v en paso n.

$w(v_1, v_2)$ = peso de arista que une v_1 y v_2.

Paso 0:

$S_0\{\emptyset\}$

$L_0(a) = 0$

$L_0(\text{resto}) = \infty$

Añado a.

Paso 1:

$S_1 = \{a\}$

$L_1(b) = \min\{L_0(b), L_1(a) + w(a,b)\} = 4$

$L_1(c) = \min\{L_0(c), L_1(a) + w(a,c)\} = 3$

$L_1(\text{resto}) = \infty$

Tomo c.

Paso 2:

$S_2 = \{a, c\}$

$L_2(b) = \min\{L_1(b), L_1(c) + w(c,b)\} = \min\{4, 5\} = 4$

$L_2(d) = \min\{L_1(d), L_1(c) + w(c,d)\} = \min\{\infty, 6\} = 6$

$L_2(e) = \min\{L_1(e), L_1(c) + w(c,e)\} = \min\{\infty, 9\} = 9$

$L_2(\text{resto}) = \infty$

Tomo b.

Paso 3:

$S_3 = \{a, c, b\}$

$L_3(d) = \min\{L_2(d), L_2(b) + w(b,d), L_2(c) + w(c,d)\} = \min\{6, 9, 6\} = 6$

$L_3(e) = \min\{L_2(e), L_2(b) + w(b,e)\} = \min\{9, \infty\} = 9$

$L_3(\text{resto}) = \infty$

Tomo d.

Paso 4:

$S_4 = \{a, c, b, d\}$

$L_4(e) = \min\{L_3(e), L_3(d) + w(d,e)\} = \min\{9, 11\} = 7$

$L_4(f) = \min\{L_4(f), L_3(d) + w(d,f)\} = \min\{\infty, 11\} = 11$

$L_4(\text{resto}) = \infty$

Tomo e.

Paso 5:

$S_5 = \{a, c, b, d, e\}$

$L_5(f) = \min\{L_4(f), L_4(e) + w(e,f)\} = \min\{11, \infty\} = 11$

$L_5(g) = \min\{L_4(g), L_4(e) + w(e,g)\} = \min\{\infty, 12\} = 12$

$L_5(z) = \infty$

Tomo f.

Paso 6:

$S_6 = \{a, c, b, d, e, f\}$

$L_6(g) = \min\{L_5(g), L_5(f) + w(f,g)\} = \min\{12, 13\} = 12$

$L_6(z) = \min\{L_5(z), L_5(f) + w(f,z)\} = \min\{\infty, 11+7\} = 19$

Tomo g.

Paso 7

$S_7\{a, c, b, d, e, f, g\}$

$L_7(z) = \min\{L_6(z), L_6(g) + w(g,z)\} = \min\{19, 12+4\} = 16$

Tomo z.

$\exists n \to$ existe n
$\forall n \to$ para todo n

- CC. Discretas

- Morales. (Tut. X y J 12-13 y 15-18h). | 13 Marzo → PEC 1, 8 Mayo → PEC 2
- Rosen.

① Lógica

p	q	$p \wedge q$ (y)	$p \vee q$ (ó)	$p \to q$ (entonc)	$p \Leftrightarrow q$ ($\overline{p \oplus q}$)	$p \oplus q$ ($\overline{p \Leftrightarrow q}$)
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

- Proposición: frase que es V o F (1, 0)
- Predicado: proposición / afirmación q. depende de una variable.
- Todo 1's: tautología.
- Todo 0's: contradicción.

- **Propiedades**
  ① Conmutativa: $p \overset{\wedge}{\vee} q \equiv q \overset{\wedge}{\vee} p$
  ② Asociativa: $p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\wedge}{\vee} r) \equiv (p \overset{\wedge}{\vee} q) \overset{\wedge}{\vee} r$
  ③ Distributiva: $p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\vee}{\wedge} r) \equiv (p \overset{\wedge}{\vee} q) \overset{\vee}{\wedge} p (\overset{\wedge}{\vee} r)$
  ④ Morgan: $\overline{(p \overset{\wedge}{\vee} q)} \equiv \bar{p} \overset{\vee}{\wedge} \bar{q}$
  ⑤ Absorción: $p \overset{\wedge}{\vee} (p \overset{\vee}{\wedge} q) \equiv p$
  Nueva → ⑥ Invent: $r \equiv r \vee r$

- **Equivalencias**

Definiciones
- $p \to q \equiv \bar{p} \vee q$
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$
- $p \oplus q \equiv (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Transformaciones
- $p \to (q \overset{\wedge}{\vee} r) \equiv (p \to q) \overset{\wedge}{\vee} (p \to r)$
- $(p \overset{\wedge}{\vee} q) \to r \equiv (p \to r) \overset{\vee}{\wedge} (q \to r)$

Neg. a ambos lados
- $p \to q \equiv \bar{q} \to \bar{p}$
- $p \Leftrightarrow q \equiv \bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$
- $p \vee q \equiv \bar{\bar{p}} \vee q \equiv \bar{p} \to q$

- **Demostración**

Modus Ponens	Modus Tollens	Silogismo	Silog. disyunt.	Resolución	Conjunción	Adición
p	$\bar{q}$	$p \to q$	$p \vee q$	$p \vee q$	p	p
$p \to q$	$p \to q$	$q \to s$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee r$	q	
$\therefore q$	$\therefore \bar{p}$	$\therefore p \to s$	$\therefore q$	$\therefore q \vee r$	$\therefore p \wedge q$	$p \vee$ cualq

- **Forma normal conjuntiva**
  Conjunción de disyunciones: $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$ } Tauth. → Todas ciertas; Contradicc → Al menos 1 falsa
  Ej. $(\bar{p} \wedge q \vee r) \wedge (s \vee q) \wedge (\bar{s} \vee r) \wedge \bar{s}$

- **Forma normal disyuntiva**
  Disyunción de conjunciones: $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n$ } Tauth → Al menos 1 cierta; Contradic → Todas falsas.

- **Robinson** (hipótesis → tésis)
  ① Negar tésis
  ② FNC de todas proposiciones.
  ③ Explotar resolución. $\left\{ \begin{array}{l} \bar{p} \vee s \\ p \end{array} \right.$

5 Grimaldi

a) $\overline{(p \vee \bar{q})} \to \bar{p}$;

p	q	p	$\vee$	$\bar{q}$	$\overline{(p\vee\bar q)}$	$\boxed{\to}$	$\bar{p}$
0	0	0	ϕ	1	0	ϕ	1
0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0

b) $p \to (q \to r)$;

p	q	r	p	$\boxed{\to}$	$(q$	$\to$	$r)$
0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	ϕ	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

g) $q \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$;

p	q	p	$\boxed{\leftrightarrow}$	$(\bar{p}$	$\vee$	$\bar{q})$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

h) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

p	q	r	$[(p\to q)$	$\wedge$	$(q\to r)]$	$\boxed{\to}$	$(p\to r)$
0	0	0	ϕ	1	1	1	1
0	0	1	ϕ	1	1	1	1
0	ϕ	0	ϕ	0	0	1	1
0	1	1	ϕ	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	ϕ	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

⊛ Ejemplo apuntes

p	q	r	$(p \vee q)$	$\wedge$	$\bar{r}$	$\boxed{\overline{((p\vee q)\wedge\bar r)}}$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1

⊛ Ejemplo transf.

$(p \wedge q) \to r \equiv \overline{(p \wedge q)} \vee r \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \vee r \equiv (\bar{p} \vee r) \vee (\bar{q} \vee r) \equiv$

$(p \to r) \wedge (q \to r)$

2.20 Grimaldi p.77

p : Morais estudia
q : Morais juega
r : Morais aprueba

p_1 : si morais estudia, entonces aprueba $\equiv p \to r$
p_2 : si morais no juega, entonces estudia $\equiv \bar{q} \to p$
p_3 : morais suspende $\equiv \bar{r}$

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q \equiv$
$((p \to r) \wedge (\bar{q} \to p) \wedge (\bar{r})) \to q$

Tabla

p	q	r	$((p\to r)$	$\wedge$	$(\bar q\to p)$	$\wedge\ \bar r))$	$\to$	q
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	1

√ √

6 P.75

a) $\overline{[p \wedge (q \vee r)] \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)} \equiv \overline{p \wedge (q \vee r)} \vee \overline{((\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r)} \equiv \bar{p} \vee \overline{(q \vee r)} \vee \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \wedge \bar{r} \equiv$

$\bar{p} \vee (\bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q) \wedge \bar{r}$

Discretas - Resumen validar y refutar

Si sospechamos q. es falso

$A \longrightarrow B$ donde $A := T$ y $B := F$.

1. Pasar premisas a FNC
2. Escribir exp. como $A \longrightarrow B \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots p_n) \longrightarrow c$
3. Buscar valores para los literales que hagan q. $A := 1$ y $B := 0$.

Ej. ①

$$\begin{array}{ll} (p \wedge q) \to r & \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \vee r \\ (q \wedge r) \to p & \equiv \bar{q} \vee \bar{r} \vee p \\ \bar{p} & \bar{p} \\ \hline \bar{r} & \therefore \bar{r} \end{array}$$

② $A \to B \equiv (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r} \vee p) \wedge (\bar{p}) \to \bar{r}$

$r := T$ para q. $(\bar{r}) = F$ y $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) := T$.

$p := F$ para q. $(\bar{p}) = T$ y $(\bar{q} \vee \bar{r} \vee p) := T$. ③

El valor de q. es indiferente.

Si sospechamos q. es verdadero

Dos opciones:

- Tirar de leyes de inferencia y tratar de llegar a la conclusión.
- Algoritmo: (Robinson). Pasar premisas y conclusión a FNC.
  1. Pasar premisas
  2. Negar conclusión
  3. Explotar resolución.

Ejemplo 1ra versión

1. $\overline{(q \vee t)}$
2. $(s \to r) \vee (s \to t)$
3. $r \to (p \wedge q)$

$\therefore \bar{s}$

① Ley de Morgan: $\overline{(q \vee t)}$ $\therefore \bar{q} \wedge \bar{t}$

② Desagreg.: $\bar{q} \wedge \bar{t}$ $\therefore \bar{q}$ $\therefore \bar{t}$

③ Prop. dist.: $(s \to r) \vee (s \to t) \equiv s \to (r \vee t)$

④ Def.: $s \to (r \vee t) \equiv \bar{s} \vee (r \vee t) \equiv (\bar{r} \wedge \bar{t}) \to \bar{s}$

⑤ $\bar{q}$, $(\bar{p} \vee \bar{q}) \to \bar{r}$ $\therefore \bar{r}$

⑥ $\bar{r}$, $\bar{t}$, $(\bar{r} \wedge \bar{t}) \to \bar{s}$ $\therefore \bar{s}$

Ejemplo 2da versión

1. $\overline{(q \vee t)}$
2. $(s \to r) \vee (s \to t)$
3. $r \to (p \wedge q)$

4. $\bar{s}$

① FNC

1. $\bar{q} \wedge \bar{t}$
2. $(\bar{s} \vee r) \vee (\bar{s} \vee t)$
3. $(\bar{r} \vee p) \wedge (\bar{r} \vee q)$
4. $\bar{s}$

② Neg. conclusión: 4. $\bar{\bar{s}} \equiv s$

③ $C_1 = \bar{q} \wedge \bar{t}$, $C_2 = \bar{s} \vee r \vee t$, $C_3 = \bar{r} \vee p$, $C_4 = \bar{r} \vee q$, $C_5 = s$

① C_3: $\bar{r} \vee q$; C_1: $\bar{q}$ $\therefore \bar{r}$

② $\bar{s} \vee t \vee r$; C_5: $\bar{r}$ — $\bar{s} \vee t$

③ $\bar{s} \vee t$; C_5: s — t

④ t; C_1: $\bar{t}$ — ○

Como se llega a resolvente con conclusión válida, es válido.

Cuantificadores y lógica de predicados

Definiciones

$x, y, z \ldots \Rightarrow$ elementos, personas, etc.
$\exists x \Rightarrow$ existe algún ~~x~~
$\forall x \Rightarrow$ para todo x
$P(x) \Rightarrow x$ cumple P
$\overline{P(x)} \Rightarrow x$ <u>no</u> cumple P

- Se pueden utilizar el resto de conectivos lógicos.
  ↳ $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, etc.

Ej. 1. Toda matriz con $\det \neq 0$ es inversible.

$x \Leftarrow$ matriz
$D(x) \Leftarrow \det \neq 0$
$I(x) \Leftarrow$ tiene inversa

$\forall x \; D(x) \rightarrow I(x)$

Ej. 2: todos los alcalaínos son españoles.

$x \Leftarrow$ persona
$A(x) \Leftarrow x$ es alcalaíno
$E(x) \Leftarrow x$ es español

$\forall x \; A(x) \rightarrow E(x)$

Ej. 3 Al menos un español es pobre.

$x \Leftarrow$ persona
$E(x) \Leftarrow x$ es esp.
$P(x) \Leftarrow x$ es pobre

$\exists x \; E(x) \rightarrow P(x)$

Ej. 4 Todo cura tiene bicicleta.

$x \Leftarrow$ persona
$C(x) \Leftarrow x$ es cura
$y \Leftarrow$ medio transp.
$B(y) \Leftarrow y$ es bicicleta
$P(x,y) \Leftarrow x$ posee y

$\forall x \; (C(x) \rightarrow \exists y \; (B(y) \wedge P(x,y)))$

Inferencias de predicados

$\therefore \forall x \; P(x)$
$\therefore P(c)$ para cualq. c

↑ Gen. Universal: si $P(c)$ se cumple para cualq. c, $P(x)$ se cumple para cualq. x
↓ Esp. Universal.

$\therefore \exists x \; P(x)$
$\therefore P(c)$ para algún c.

↑ Gen. Exist.
↓ Esp. exist.

Si $P(c)$ se cumple para algún c, $P(x)$ se cumple para algún x

Ej. 1

$\forall x \; (C(x) \rightarrow S(x))$
$\exists a \; \overline{S}(a)$
$\therefore \overline{C}(a)$

Ej. 2

1. $\forall x \forall y \; [P(x) \rightarrow R(x,y)]$
2. $\exists x \exists y \; [Q(y) \wedge \overline{R}(x,y)]$
3. $\forall x \exists y \; [P(w) \vee S(x,y)]$

4. $\exists x \exists y \; [S(x,y)]$

5. $Q(b) \wedge \overline{R}(a,b)$ — Esp. Exist. 2
6. $P(b) \rightarrow R(a,b)$ — Esp. Univ. 1
7. $\overline{R}(a,b)$ — Simplif. 5.
8. $\overline{P}(a)$ — Modus Tollens (5,6)
9. $\exists y \; [P(a) \wedge S(a,y)]$ — Esp. Univ. (3)
10. $P(a) \vee S(a,c)$ — Esp. Exist. 9.
11. $S(a,c)$ — Resolución (10,8).
12. $\exists x \exists y \; S(x,y)$ — Gen. Exist. (11)

Ejercicios Discretas - T1 - Lógica

1) p: es rico ; q: es feliz

1) $\bar{p} \wedge \bar{q}$
3) $p \to q$
6) $\bar{q} \to \bar{p}$
9) $\bar{p} \vee (p \wedge \bar{q})$

2) 6) $(p \to \bar{r}) \vee (q \to \bar{r})$ = Tuviste gripe y no aprobaste Disc. ó tomaste una aspirina y no aprobaste disc.

3) $2+2=4 = p := 1$
$2+1=5 = q := 0$
$5+5=8 = r := 0$
$2+7=9 = t := 1$

6) $p \to \overline{(q \to r)} \approx 1 \to \overline{(0 \to 0)} \approx 1 \to (\bar{1}) \approx 1 \to 0 \approx 0$

7) $\overline{t \Leftrightarrow (q \to r)} \equiv \overline{1 \Leftrightarrow (0 \to 0)} \equiv \overline{1 \Leftrightarrow 1} \equiv 0$

4) 1) a → alto
g → galán
$a \wedge g$

3) c → caen
d → ↑desemp.
$c \to d$

7) r → rico
e → enr. feliz
a → ana feliz

$r \to (e \wedge a)$

5) l)

p	q	r	$(\bar{p}$	$\Leftrightarrow$	$\bar{q})$	$\Leftrightarrow$	$(q \Leftrightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1
			1)	2)	1)	3)	2)

e)

p	q	r	$(p$	$\oplus$	$q)$	$\to$	$(p$	$\oplus$	$\bar{r})$
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
			1)	2)	1)	3)	1)	2)	1)

6) $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$

p	$\rightarrow$	q	$\bar{p}$	$\vee$	q
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1)	2)	1)	1)	2)	1)

$p \leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})$

p	$\leftrightarrow$	q	p	$\vee$	q	$\wedge$	$\bar{p}$	$\vee$	$\bar{q}$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1)	3)	1)	1)	2)	1)	3)	1)	2)	1)

8) Caballeros & Rufianes

2) A: Los dos caballeros | p = A caballero | A: $p \wedge q$
B: A es rufián | q = B caballero | B: $\bar{p}$

Casos:

- Ambos V: $(p) \wedge (q) \wedge (p \wedge q) \wedge \bar{p} \equiv 0$ (contradicc.; no puede ser).
- Ambos F: $(\bar{p}) \wedge (\bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge p \equiv 0$ ''
- A: V; B: F: $(p) \wedge (\bar{q}) \wedge (p \wedge q) \wedge p \equiv 0$
- A: F; B: V: $(\bar{p}) \wedge (q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge \bar{p} \equiv 1$. Única solución congruente.

5) A: Los 2 somos rufianes | p = A cab. | A: $\bar{p} \wedge \bar{q}$
B: - | q = B cab

Casos:

- Ambos V: $(p) \wedge (q) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv 0$
- Ambos F: $(\bar{p}) \wedge (\bar{q}) \wedge (p \vee q) \equiv 0$
- A: V; B: F: $(p) \wedge (\bar{q}) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q}) \equiv 0$
- A: F; B: V: $(\bar{p}) \wedge (q) \wedge (p \vee q) \equiv 1$ → A → rufián; B → caballero.

9) FNC

h) $[(p \wedge q) \vee ((p \vee r) \rightarrow q)] \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\equiv \overline{[(p \wedge q) \vee (\overline{(p \vee r)} \vee q)]} \vee (\bar{q} \vee r)$

$\equiv [\overline{(p \wedge q)} \wedge \overline{((\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee q)}] \vee (\bar{q} \vee r)$

$\equiv [(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\overline{(\bar{p} \wedge \bar{r})} \wedge \bar{q})] \vee (\bar{q} \vee r)$

$\equiv [(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (p \vee r) \wedge (\bar{q})] \vee (\bar{q} \vee r)$

$\equiv (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \cancel{\bar{q} \vee r}) \wedge (p \vee r \vee \bar{q}) \wedge \cancel{(\bar{q} \vee \bar{q})} \wedge \cancel{(p \vee r \vee r)} \wedge (\bar{q} \vee r)$

$\equiv (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee r)$

Ejercicios T1 Discretas - Lógica

9) b) $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow q)$

$\equiv [(p \to q) \vee ((p \wedge q) \leftrightarrow q)] \wedge [\overline{(p \to q)} \vee \overline{((p \wedge q) \leftrightarrow q)}]$

$\equiv [(\bar{p} \vee q) \vee ((\cancel{(p \wedge q) \to q}) \wedge (q \to (p \wedge q)))] \wedge [\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{((\cancel{(p \wedge q) \to q}) \vee (q \to (p \wedge q)))}]$

$\equiv [(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee (p \wedge q))] \wedge [(p \wedge \bar{q}) \vee \overline{(\bar{q} \vee (p \wedge q))}]$

$\equiv [\cancel{(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \wedge (\bar{q} \wedge q)}] \wedge [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \overline{(p \wedge q)})]$

$\searrow 0$

$\equiv [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \equiv [(p \wedge q) \vee (q \wedge \bar{p}) \vee \cancel{(q \wedge \bar{q})}]$

$\equiv [(p \wedge \bar{q}) \vee (q \wedge \bar{p})] \equiv [((p \wedge \bar{q}) \vee q) \wedge ((p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p})] \equiv [(p \vee q) \wedge \cancel{(q \vee \bar{q})} \wedge \cancel{(p \vee \bar{p})} \wedge (q \vee \bar{p})]$

$\equiv [(p \vee q) \wedge (q \wedge \bar{p})]$

10) Si pq. todo puede pasarse a FNC.

11) Func. Completa:

1) $\{\neg, \wedge, \vee\} \to$ Si, todo puede expresarse en FNC y FND.

2) $\{\neg, \wedge\} \to$ Si: $(p \wedge q) \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})}$

3) $\{\neg, \vee\} \to$ Si: $(p \vee q) \equiv \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}$

12) NAND | NOR

$p \mid q$ | $p \downarrow q$

1) $p \mid q \equiv \overline{(p \wedge q)}$

2) $p \downarrow q \equiv \overline{(p \vee q)}$

3) $\{\downarrow\} \Rightarrow \bar{p} \equiv p \downarrow p \equiv p \mid p$

$\Rightarrow p \wedge q \equiv \overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \equiv \bar{p} \downarrow \bar{q} \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$\Rightarrow p \vee q \equiv \overline{(p \downarrow q)} \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

13) Entrada: Fórmula del cálculo proposicional.

Salida. $\begin{cases} F \text{ satisf.} \to \text{Si} \\ F \text{ no satisf.} \to \text{No.} \end{cases}$

14) 2) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ p \to q \\ \bullet\ \bar{q} \end{array}\right\} \begin{array}{l} p := 0 \\ q := 0 \end{array}$

4) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ p \vee q\ \checkmark \\ \bullet\ \bar{r} \vee \bar{s}\ \checkmark \\ \bullet\ (\bar{p} \to q) \to (r \wedge s)\ \checkmark \\ \bullet \end{array}\right\} \begin{array}{l} p := 1 \\ q := 0 \\ r := 0 \\ s := X \end{array}$

15)

1) Todo estudiante de Inf. debe estudiar EEDD:

I = estudiante de inf.
D = curso de disc.
P(x, y) = estudiante x cursa y

$\forall x \in I, \exists y \in D : P(x,y)$

2) Al menos un estudiante de esta clase tiene un portátil

E: estud. clase
O: ordenador portátil
P(x, y): est. x tiene portátil y

$\exists x \in E, \exists y \in O : P(x,y)$

16) 1) Todo usuario sólo tiene acceso a una única bandeja de correo.

m ← correo
u ← usuario
A(u, m) → u accede a m
D(m, n) → m distinto de n

$\forall u \; \exists m : A(u,m) \wedge [\forall n \; D(n,m) \rightarrow \overline{A(n,m)}]$

2) Hay un proceso q. sigue en func. durante todas las cond. de error sólo si el núcleo trabaja adecuadamente.

p ← proceso
e ← error
H(e) ← se produce e.
S(x, y) ← el estado de x es y.

$\exists p \; \forall e \; (H(e) \rightarrow S(p, \text{func.}) \rightarrow S(\text{núcleo, trab. adecuad.}))$

17) 2) I(x) → x est. inform.
E(x) → x est eedd.

$\forall x \quad (I(x) \rightarrow E(x))$
$\exists x \quad (E(x) \rightarrow I(x))$

Contradicción.

4) C(x) → x come cereales
S(x) → x está sano

$\forall x \quad [C(x) \rightarrow S(x)]$
$\exists a \quad \overline{S(a)}$

$\therefore \quad \overline{C(a)}$

18) 1) Para q. se cumpla debe usarse espec. universal: $\forall x \quad H(x)$

19) 5) $\forall x \, P(x) \wedge \exists x \, \overline{P(x)} \equiv \forall x \, P(x) \wedge \overline{\forall x} \, P(x) \equiv 0$; Contradicción.

6) $\forall x \, P(x) \rightarrow \exists x \, P(x)$; Tautología.

Ejercicios Discretas - T1 - Lógica

20) a)

1) $\bar{p} \to q$
2) $\overline{(p \vee r)}$

$\therefore q$

1) $\overline{(p \vee r)} \equiv \bar{p} \wedge \bar{r}$
3) $\bar{p}$ (por 2)
4) $\bar{r}$ (por 2)
5) q (MP (1,3))

b)

1) $p \to q$
2) $\bar{r} \to p$

$\therefore r \vee q$

3) $\bar{r} \to q$ (silogismo (2,1))
4) $r \vee q$ (def. 3).

c)

1) $\overline{(q \vee t)}$
2) $(s \to r) \vee (s \to t)$
3) $r \to (p \wedge q)$

$\therefore \bar{s}$

4) $\bar{q} \wedge \bar{t}$ (morgan(1))
5) $\bar{q}$ (disy. 4)
6) $\bar{t}$ (disy. 4)
7) $\bar{r}$ (MT (3,5)
8) $s \to (r \vee t)$ (prop. dist.)
9) $\bar{s}$ (MT (8, 6, 7))

d)

1) $p \vee t$
2) $s \leftrightarrow t$
3) $s \leftrightarrow \bar{w}$

$\therefore w \to p$

4) $(s \to \bar{w}) \wedge (\bar{w} \to s)$ (definic3)
5) $(\bar{t} \to p)$ (def. 1)
6) $(s \to t) \wedge (t \to s)$ (def. 2)
7) $(w \to \bar{s})$ (def. y desc.g. 4)
8) $\bar{w} \vee \bar{s}$ (def. 7)
9) $\bar{w} \vee \bar{t}$ (resol. 8 y 6)
10) $t \vee p$ (def. 5)
11) $\bar{w} \vee p$ (res. 9, 10)
12) $w \to p$ (def 11).

21) Demos. q. no son válidos

a)

1) $p \vee r$
2) $p \to q$

$\therefore q$

1) paso premisas a FNC. : $(p \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q)$
2) Añado la consec.: $[(p \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q)] \to q$
3) Busco valores q. afirmen premisas y nieguen cons.

$p := 0$
$r := 1$
$q := 0$

b)

1) $\bar{p}$
2) $p \to q$

$\therefore \bar{q}$

Busco contrad. de la forma $A \to B$, $A = 1$ & $B = 0$.

FNC : $[(\bar{p}) \wedge (\bar{p} \vee q)] \to \bar{q}$

$p := 0$
$q := 1$

d)

1) $(p \wedge q) \to r$
2) $(q \wedge r) \to p$
3) $\bar{p}$

$\therefore \bar{r}$

FNC : $[((p \wedge q) \to r) \wedge ((q \wedge r) \to p) \wedge (\bar{p})] \to \bar{r}$

$p := 0$
$q := 1$ ~~[illegible]~~
$r := 1$

FNC: $[(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r} \vee p) \wedge (\bar{p})] \to \bar{r}$

22) Ej's tipo examen. Demostrar validez o refutar arg's.

a) 1) $p \vee r$
2) $p \to q$
$\therefore q$

Sospecho q. es falso. Busco valores q. afirmen premisa y nieguen conclusión.
$\Rightarrow [(p \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q)] \to q$ $\begin{cases} r := 1 \\ p := 0 \\ q := 0 \end{cases}$

Como encuentro valores q. afirman premisa y niegan conclusión, el arg. es no válido.

b) 1) $\bar{p}$
2) $p \to q$
$\therefore \bar{q}$

Sosp. q. el arg. es falso:
$\Rightarrow [(\bar{p}) \wedge (\bar{p} \vee q)] \to q$ $\begin{cases} p := 0 \\ q := 0 \end{cases}$ Falso

b)' 1) $(p \wedge q) \to r$
2) $\bar{p} \to q$
$\therefore \bar{p}$

Sosp. que es falso.
Transf. a FNC
$\Rightarrow [((p \wedge q) \to r) \wedge (\bar{p} \to q)] \to \bar{p}$
$\Rightarrow [(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee q)] \to \bar{p}$
$\left.\begin{matrix} p := 1 \\ q := 0 \\ r := x \end{matrix}\right\}$ Falso

c) 1) $p \to q$
2) $\overline{(q \wedge r)}$
$\therefore \bar{p}$

Sosp. q. es falso: $[(p \to q) \wedge \overline{(q \wedge r)}] \to \bar{p}$
FNC $\Rightarrow [(\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})] \to \bar{p}$ $\begin{cases} p := 1 \\ q := 1 \\ r := 0 \end{cases}$

d) 1) $p \to q$
2) $q \to r$
3) $s \to r$
$\therefore (p \vee s) \to r$

4) $p \to r$ (silogismo 1,2)
5) $(p \vee s) \to r$ (prop. dist. 4,3)
Arg. válido.

e) 1) $\bar{p} \vee q$
2) $q \to r$
3) $p \to \bar{r}$
$\therefore \bar{p}$

4) $p \to q$ (def. 1)
5) $p \to r$ (silog. 2,4)
6) $\bar{p} \vee r$ (def. 5)
7) $\bar{p} \vee \bar{r}$ (def. 3)
8) $\bar{p}$ (resol. 6,7)
Por tanto, el arg. es válido.

f) 1) r
2) p
$\therefore (q \to p) \wedge (s \to r)$

3) $\bar{s} \vee r$ (adición 1)
4) $s \to r$ (def. 3)
5) $\bar{q} \vee p$ (ad. 2)
6) $q \to p$ (def. 5)
7) $(q \to p) \wedge (s \to r)$ (conj. 4,6)

g) 1) $\bar{p} \wedge q$
2) $\bar{p} \to (q \to r)$
3) $(q \wedge r) \to s$
$\therefore s$

4) $\bar{p}$ (desag. 1)
5) q (desag. 1)
6) $q \to r$ (MP 4,2)
7) r (MP 5,6)
8) $(q \wedge r)$ (agreg. 5,7)
9) s (MP 8,3)
Válido

h) 1) $\overline{(q \vee t)}$
2) $(\bar{s} \to r) \vee (s \to t)$
3) $r \to (p \wedge q)$
$\therefore \bar{r}$

4) $\bar{q} \wedge \bar{t}$ (De Morgan 1)
5) $\bar{q}$ (desag. 4)
6) $r \to q$ (dist. 3)
7) $\bar{r}$ (MT 5,6)
Válido

Ejercicios Discretas - T1 - Lógica

23)

p: tomo tren
q: llego tarde
r: falto cita
s: sentirse mal
t: ir a casa
u: conseguir empleo

1) $(p \wedge q) \to r$
2) $(r \wedge s) \to \bar{t}$
3) $\bar{u} \to (s \wedge t)$

$\therefore (p \wedge q) \to u$

Paso a FNC:
1) $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$
2) $(\bar{r} \vee \bar{s} \vee \bar{t})$
3) $(u \vee s)$
4) $(u \vee t)$

Exploto resoluciones
5) $(\bar{r} \vee \bar{t} \vee u)$ (R 2, 3)
6) $(\bar{r} \vee u)$ (R 4, 5)
7) $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee u)$ (R 6, 1)
8) $((\overline{\bar{\bar{p}} \vee \bar{\bar{q}}}) \vee u)$ (dob. neg 7)
9) $((\overline{p \wedge q}) \vee u)$ (De Morg. 8)
10) $((p \wedge q) \to u)$ (def. 9)

24) 2)

t: tormenta cont.
n: anochece
c: cenar
d: dormir
m: concierto

1) $(t \vee n) \to (c \vee d)$
2) $(c \vee d) \to \bar{m}$
3) m

$\therefore t$

4) $(t \vee n) \to \bar{m}$ (Sil. 1, 2)
5) $\overline{(t \vee n)}$ (MT 3, 4)
6) $\bar{t} \wedge \bar{n}$ (Morgan 5)
7) $\bar{t}$ (desag. 6)

Válido

4) r: rico
f: feliz
d: frust.
c: camino rosas
t: tener todo

1) $\overline{(r \wedge f)} \to (d \wedge c)$
2) $f \to \bar{t}$

$\therefore d$

Paso a FNC
1) $r \vee d$
2) $f \vee d$
3) $r \vee c$
4) $f \vee c$
5) $\bar{f} \vee \bar{t}$

$\therefore d$

Sosp. q es falso:
$[(r \vee d) \wedge (f \vee d) \wedge (r \vee c) \wedge (f \vee c) \wedge (\bar{f} \vee \bar{t})] \to d$

r := 1
f := 1
d := 0
c := x
t := 0

Estos valores afirman premisas y niegan conclusión. Por tanto, el argumento es falso.

25)

p → pelo
q → leche
r → mamífero
s → pezuñas
t → rumia
u → ungulado
v → cuello largo
w → jirafa
x → rayas negras
y → cebra

1) $(p \vee q) \to r$
2) $[r \wedge (s \vee t)] \to u$
3) $(u \wedge v) \to w$
4) $(u \wedge x) \to y$
5) $(p \wedge s \wedge x)$

$\therefore y$

6) x (desag. 5)
7) p (desag. 5)
8) $p \vee q$ (add. 7)
9) r (MP 8, 1)
10) s (desag. 5)
11) $s \vee t$ (add 10)
12) $r \wedge (s \vee t)$ (ag. 11, 9)
13) u (MP 12, 2)
14) $u \wedge x$ (agg. 13, 6)
15) y (MP 4, 14)

Válido

26) Refut. por resolución.

1) $p \to q$
2) $q \to r$

$\therefore p \to r$

3) $\bar{p} \vee q$ (def. 1)
4) $\bar{q} \vee r$ (def. 2)
5) $p \wedge \bar{r}$ (def $\overline{\text{concl.}}$)
6) $\bar{p} \vee r$ (resol. 3, 4)
7) p (desag. 5)
8) $\bar{r}$ (desag. 5)
9) r (resol. 6, 7)
10) $\square$ (resol. 9, 8)

Por tanto, es cierto.

$\overline{p \to r} \equiv \overline{\bar{p} \vee r} \equiv p \wedge \bar{r}$

27) Robinson

1) $p \to (q \to r)$
2) $(r \land s) \to t$
3) $\bar{w} \to (s \land \bar{t})$

$\therefore p \to q \to w$

1) FNC.

1) $\bar{p} \lor \bar{q} \lor r$
2) $\bar{r} \lor \bar{s} \lor t$
3) $w \lor \bar{t}$
4) $w \lor s$

2) Niego concl.

$\therefore \overline{(p \to q \to w)}$

$\therefore \overline{(\bar{p} \lor \bar{q} \lor w)}$

5) $(p \land q \land \bar{w})$

3) Exploto resoluciones

6) p
7) q } Desag. 5
8) $\bar{w}$
9) s (R 8, 4)
10) $\bar{t}$ (R 8, 3)
11) $\bar{p} \lor r$ (R 7, 1)
12) r (R 6, 11)
13) $\bar{r} \lor t$ (R 2, 9)
14) t (R 13, 12)
15) $\square$ (R 10, 14)

28) Más Robinson

1) $p \to (r \land s)$
2) $r \to (t \lor v)$
3) $t \to \bar{p}$
4) $(v \lor \bar{r}) \to \bar{s}$

$\therefore \bar{p}$

FNC

1) $\bar{p} \lor r$
2) $\bar{p} \lor s$
3) $\bar{r} \lor t \lor v$
4) $\bar{t} \lor \bar{p}$
5) $\bar{v} \lor \bar{s}$
6) $r \lor \bar{s}$
7) p

Forma visual de exp. res.

$(\cancel{\bar{p}} \lor r) \land (\cancel{\bar{p}} \lor s) \land (\cancel{\bar{r}} \lor \cancel{t} \lor v) \land (\bar{t} \lor \cancel{\bar{p}}) \land (\cancel{\bar{v}} \lor \bar{s}) \land (r \lor \bar{s}) \land (p)$

29)
1) $\exists x\, [A(x) \to \overline{B(x)}]$
2) $\exists x\, [A(x) \land C(x)]$

$\therefore \exists x\, [C(x) \land \overline{B(x)}]$

4) $A(a) \to \overline{B(a)}$ (EE 1)
5) $A(a) \land C(a)$ (EE 2)
6) $C(a)$ (desag. 5)
7) $(A(a) \land C(a)) \to \overline{B(a)}$ (ag. 4)
8) $C(a) \to \overline{B(a)}$ (dist. 7)
9) $C(x) \to \overline{B(x)}$ GE (8)

Ejercicios Discretas - T2 - Téc. Bás. Recuento

Ejemplos de apuntes

18) Nº de 3 dígitos con cifras $\{1,2,3,4,5,6\}$.
\# reordenaciones de una fracción del conjunto $V(m,n) = V(6,3) = \frac{6!}{3!} = 120$

opciones ⟶ 6 5 4

19) Reord. bolas del 1 al 8.
\# reord. de todo el cjto. $= P(8) = 8! = 40320$ formas.
b) ¿Y si b.4 y b5 deben ir juntas?

2 casos $\left\{ \begin{array}{l} b4 - b5 \Rightarrow \text{el resto queda } P(7) \\ b5 - b4 \Rightarrow P(7) \end{array} \right\}$ $2 \cdot P(7) = 2 \cdot 7! = 10080$.

20) Cadenas bin. long 13 con 10 ceros exactos.
\# subconjuntos q. cumplen condición = \# formas de distribuir 2 subconjuntos en |A|+|B| esp.

opc 0: 10 9 8 7 ... 0 0 0
opc 1: 3 3 3 3 ... 3 2 1

$C(10,13) = C(3,13) = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10! \cdot 3!}$

21) 10 hombres; 14 mujeres; 6 puestos {3 mujer, 3 hombre}

opc hombre: 10 9 8
opc mujeres: 14 13 14 13 12 11

$= C(10,3) \cdot C(14,3) = \binom{10}{3} \cdot \binom{14}{3} = 43680$

22) De cuantas formas 3 números de $\{1 \ldots 9\}$ suman 11?

9 9 9 $= 11$ $\binom{11+3-1}{11} = 78$

Ejercicios Discretas - T2 - Recuento

1) $A \Rightarrow$ cjto. ; $|A| = n$ } Demostrar q. hay $2^n - 2$ apps. suprayectivas
$B \Rightarrow \{0, 1\}$; entre A y B.

$f(A \to B)$
a_1 (2 opc)
a_2 (2 opc)
⋮
a_n (2 opc)

Hay 2^n posibilidades.
Las únicas 2 apps. q. no son suprayectivas son las que todos los valores de A se proyecten exclusiv. en 0 o exclus. en 1. Por tanto, hay 2 no suprayectivas.

Pos suprayectivas $= 2^n - 2$.

2) Con 500 nombres, de cuantas formas se pueden asignar 1, 1 y 2, 1 y 2 y 3?

R_1: 500 (1 nombre)
R_2: $500 \cdot 499$ (2 n)
R_3: $500 \cdot 499 \cdot 498$ (3 n)

$R = 500 + 500 \cdot 499 + 500 \cdot 499 \cdot 498$

3) # Matrículas con 4 letras y 3 dígitos?

|Letras| = 27
|Díg.| = 10

27 — 27   10 10 10

$R = 27^4 \cdot 10^3$

4) # números de 5 cifras q.

a) Sin rep.:
9 9 8 7 6
$9^2 \cdot \frac{8!}{5!}$

b) Pares? $\{0, 2, 4, \cancel{6}, 8\}$
$9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45000$

d) impares? $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
9 10 10 10 5
$= 45k$

c) q. contengan 3 nueves.
2 casos:

- Empiezan por 9:

	9				
9's		2	1	0	0
$\bar{9}$'s		9	9	9	9

$\binom{4}{2} \cdot 9^2 = 486$

- No empieza por 9:

9's		3	2	1	
$\bar{9}$'s	8				9

$\binom{4}{3} \cdot 8 \cdot 9 = \frac{4!}{3! \, 1!} \cdot 8 \cdot 9 = 288$

Total: 774

5) Hay 6 personas. Cada par son amigos o enemigos.
Probar q. existen 3 amigos o 3 enemigos mutuos.

Sean $P\{A, B, C, D, E, F\}$; $|P| = 6$;

Relaciones $\left\{ \begin{array}{l} \text{Amigos } (A) \\ \overline{\text{Amigos}} \ (A) \end{array} \right\}$ Al menos hay una relación con $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil$ elem

- Si están 3 en amigos:
  - Si son 2 amigos entre sí, con A forman un grupo de 3 amigos mutuos.
  - Si ~~no~~ son amigos 2 a 2, forman un grupo de 3 enemigos mutuos.

6) 10 calcetines grises $\}$ cajón.
10 calc. marrones

a) Debe coger 3 para asegurarse de que alguno hace juego.

b) Peor caso: 10 marrones + 2 grises = 12.

7) $X = \{\text{personas}\}$. Demos. q. existen 2 $x' \in X$ q. tienen el mismo nº amigos.

$\text{Amigo}(x, x') = \text{True} = \text{Amigo}(x', x)$.

$f(x_i)$ = nº de amigos de x_i.

No puede pasar a la vez q. $f(x_n) = 0$ & $f(x_y) = n-1$.

- Suponiendo q. $f(x_i) = 0$;

Persona	~~X~~ Amigos ($f(x_i)$)	Caja
x_1	0	C_1
x_2	⋮	⋮
⋮		
x_n	$x-2$	C_{n-1}

Para n personas y n-1 cajas, hay al menos 1 caja con 2 personas (mismo nº de amigos). (0 y n-1 son mutuamente excluyentes: si pasa uno, no puede pasar el otro).

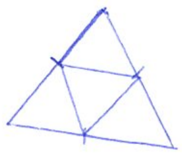
- Suponiendo q. $f(x_i) = n-1$

Persona	~~X~~ Amigos ($f(x_i)$)	Caja
x_1	1	C_1
x_2	2	C_2
⋮	⋮	⋮
x_n	$n-1$	C_{n-1}

Lo mismo de arriba.

• Ejercicios Discretas - T2 - Recuento

8) 5 ptos. en triángulo de $l = 1$. (equilátero).
Demos. q. al menos 2 están a distancia $d < 1/2$.



Al menos 2 puntos caen en el mismo subtriángulo de $l = 1/2$.

5 puntos ; 4 cajas.
Si $l' = 1/2$, los 2 ptos. de la caja están a $d < 1/2$.

9)

10) Identidad de Vandermonde.

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \cdot \binom{n}{k}$$

$|A| = m$; $A \{a_1, a_2 \dots a_m\}$
$|B| = n$; $B \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
$|A \cup B| = m + n$; $A \cup B = \{a_1, \dots a_m, b_1, \dots b_n\}$

Si tengo que tomar r elementos, y de un subconjunto cojo k, del otro tengo q. tomar (r - k).

11) Hallar coef. de x^7 en.

a) $(3x + 1)^{10}$;

$$\binom{10}{7}(3x)^7 \cdot (1)^3 = 120\,(3x)^7 \cdot 1$$

b) $(3x + x^2 + 2)^8$; $\displaystyle\sum_{i+j+k=8} \frac{8!}{i!\,j!\,k!}\, 3^i \cdot x^i \cdot x^{2 \cdot j} \cdot 2^k$;

$2j + i = 7$ en los sig. combos:

$i = 1$	$j = 3$	$k = 4$
$i = 3$	$j = 2$	$k = 3$
$i = 5$	$j = 1$	$k = 2$
$i = 7$	$j = 0$	$k = 1$

$$\frac{8!}{1! \cdot 5! \, 4!} \cdot 3 \cdot 2^4 + \frac{8!}{3!\,2!\,3!}\, 3^2 \cdot 2^3 + \dots$$

c) $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^{11}$ ~~to~~ $(3x + 2x^{-1})^{11}$; $\binom{11}{9} \cdot (3x)^7 + (2 \cdot x^{-1})^2 = 55 \cdot (3x)^9 + (2x)^{-2}$

2 1 3 5 7/2 1 1 1 1

2 1 3 3 3

4 2 1 3 5 5

2 1 5 3 5

6

8

12) ¿?

13) ¿?

Impar $\{1,3,5,7,9\}$

Par $\{0,2,4,6,8\}$

14) # cifras con 6 decimales con nº impar de dígitos impares?

1 impar
- Empieza impar $\boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;}$ $= 5^6$ (5 5 ... 5)
- Empieza par $\boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;}$ $= 4 \cdot \binom{5}{1} \cdot 5 \cdot 5^4$ (4 opc. par prim. · formas de dist. 1 impar en 5 ptos · # imp. · opc. pares)

par: 4 5 5 5 5 5

imp: 1 1 0 0 0 0

3 impares
- Emp impar $= 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^3$ (5 opc. de primer imp. · formas de dist. 2 impares en 5 puestos · # impares · opc. pares rest.)
- Emp. par $= 4 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2$ (4 op. prim. · [formas de distrib. 3 impares en 5 puestos · opciones impares] · opciones pares en puestos rest.)

5 impares
- Emp. impar $= 5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 5^4 \cdot 5^1$
- Emp. par $= 4 \cdot \binom{5}{5} \cdot 5^5$

b) # cifras con 6 decim. con nº impar de dígitos impares, sin repetir.

1 imp.
- Emp. por imp. = opc. impares · formas de colocar pares sin repetir $= 5 \cdot 5!$
- Emp. por par = opc pares · opc. imp. · opc pares sin rep. $= 4 \cdot \binom{5}{1} \cdot 5 \cdot 4!$

3 imp.
- Emp. imp $= 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{5!}{2!}$ = (opciones primer impar · formas de poner 2 impares en 5 puestos · $\frac{4! \text{ opc. impares}}{2! \text{ puestos q. no se rellenan}}$ · $\frac{5! \text{ opc. pares}}{2! \text{ puestos q. no se rellenan}}$)
- Emp. par $= 4 \cdot \binom{5}{3} \cdot \frac{5!}{2!} \cdot \frac{4!}{2!}$

5 imp.
- Emp. imp $= 5 \cdot 4! \cdot 5$
- Emp. par $= 4 \cdot 5!$

Ej. Discretas – T2 – Recuento

15) 7 partidos; 5 candidatos / partido; elegir 5 diputados. max. (Puede tomar ceros).

a) # formas dist. de votar = Formas de elegir 0, 1, 2 ... 5.

↳ $\binom{7\cdot 5}{0} + \binom{7\cdot 5}{1} + \binom{7\cdot 5}{2} + \dots + \binom{7\cdot 5}{5}$

b) # formas dist. de votar si no elige más de 1 / partido.

↳ formas de elegir 0 o 1 candidato / partido · formas de elegir 1, 2 ... 5 partidos.

↳ $\left[\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\right] \cdot \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \dots + \binom{7}{5}\right] = [5+1] \cdot [1+7+21+35+35+21]$

$= 6 \cdot 120 = 720.$

16) 5 dados. Prob. de:

6	5	5	4	3
p	p			

a) Pareja; Pos (pareja) $= \dfrac{\text{\# casos favorables}}{\text{\# casos totales}}$

casos totales = $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$ opciones

casos fav. = 6 pos. parejas · $\binom{5}{2}$ formas de poner esas parejas · $\frac{5!}{2!}$ elem. restantes ≠ pareja $= \binom{5}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

b) Doble pareja:

casos fav. $= \left[\dfrac{6 \text{ pos par.} \binom{5}{2} \text{f.} \cdot 5 \text{ pos par.} \cdot \binom{3}{2} \text{f.} \cdot 4 \text{ opc. rest.}}{2 \text{ formas de reordenar mismo resultado}}\right] = 1800$

c) Trío: tres iguales

casos fav: 6 opc. · $\binom{5}{3}$ formas de poner los 3 en 5 pos. · $(5 \cdot 4)$ opc. restantes

d) Póker: 4 iguales: $6 \cdot \binom{5}{4} \cdot 5$

e) Repóker: 5 ig: $6 \cdot \binom{5}{5}$

e) Full: pareja y trío: $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot \binom{3}{3}$

f) Escalera: todos consecutivos: 2 opc. $\begin{cases} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \end{cases}$

17) Se toman 4 cartas de una baraja de 40. (Con reempl.).
a) ¿?

18)

19) Formas rep. la mano en el mus:
Formas de sel 4 de 40 · formas de 4 de 36 ...
$\binom{40}{4} \cdot \binom{36}{4} \cdot \binom{32}{4} \cdot \binom{28}{4} = \Delta$

20) Formas de recibir 2 reyes en el mus. (3 = reyes también).

$$P(2 \text{ reyes/persona}) = \frac{\binom{32}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{28}{2} \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{2} \cdot \binom{2}{2}}{\Delta}$$

21) Ordenar 10 mujeres y 5 hombres de forma q. no haya 2 hombres juntos.
5 hombres en 11 pos.
Reord. mujeres: 10!
Reord. hombres: 5!
Formas de reordenar mezclando: $10! \cdot 5! \cdot \binom{11}{5}$

23) 30 sobres iguales a 20 vecinos distintos;
¿Cuántas formas de distrib.?
$b_1 + b_2 \dots b_{20} = 30; \quad 1 \leq b_n \leq (30-20)$
Hace una pasada y mete 1 sobre en cada una;
$b_1 + b_2 \dots b_{20} = 10, 0 \leq b_n \leq 10;$
Formas de poner 10 elem. idénticos en 20 pos.:
$\binom{20}{1} \cdot 10 + \binom{20}{2} \cdot p(10|2) + \binom{20}{3} + p(10|3) \dots \binom{20}{10} \cdot p(10|10)$

$p(n|m) \equiv$ formas de partir n en m partes.

• Ejercicios Discretas - T2 - Recuento

24) Examen; 10 preguntas; 100 puntos; Cada preg. vale al menos 5.

$p_1 + p_2 \ldots p_{10} = 100; \; 5 \leq p_n;$

Reparto 5 puntos a cada preg:

$p'_1 + p'_2 \ldots p'_{10} = 50; \; 0 \leq p_n \leq 50$

$\binom{10}{1} \cdot 50 + \binom{10}{2} \cdot p(50|2) + \binom{10}{3} \cdot p(50|3) \ldots \binom{10}{10} \cdot p(50|10)$

25) Enteros pos. < 1 000 000 q. tienen un 9 y la suma de sus díg. = 15;

$\boxed{\;|\;|\;|\;|\;|\;}$ = formas de elegir una pos. donde poner 9 + formas de repartir 6 puntos entre 5 elementos.

$\binom{6}{1} \cdot \left[\binom{5}{1} \cdot 6 + \binom{5}{2} \cdot p(6|2) + \binom{5}{3} \cdot p(6|3) + \binom{5}{4} \cdot p(6|4) + \binom{5}{5} \cdot p(6|5) \right]$

26) Polígonos: (nº lados = nº vértices).

a) Triángulos en un polígono de n lados:

* formas de elegir 3 vértices de n vértices: $\binom{n}{3}$

b) Probar que nº vértices (pentágono) = nº diag (pentágono).

Diagonal. segmento que une 2 vértices no consecutivos.

↳ Por tanto, cada vértice tiene [(nº vértices) - 2] diag.

$$N^o \text{ diag.} = \frac{n^o \text{ vértices} \cdot (n^o \text{ vértices} - 3)}{2};$$

$$n = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \Rightarrow 2n = n \cdot (n-3) \Rightarrow n^2 - 5n = 0;$$

Si $n = 5 \Rightarrow 25 - \cancel{5} \cdot 5 = 0;$

27)

28) Caballos carrera 5 participantes. De cuántas formas puede acabar? Admiten empates.

- llegan todos a la vez = 1.
- $1+4$: $\binom{5}{4} \cdot 2!$
- $2+3$: $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 2!$
- $2+2+1$. $\binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot 3!$
- $1+1+3 = \binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1} \cdot 3!$
- $1+1+1+2 = \binom{5}{2} \cdot 4!$
- $1+1+1+1+1 = 5!$

29)

30) 6 cronos jugadores + 6 cronos de federaciones

a) Hago parejas de jug-fed: 6 parejas, $\left\langle \begin{matrix} J-F : 6! \\ F-J : 6! \end{matrix} \right\} 2 \cdot 6!$

b) Consideremos 2 subconjuntos $\begin{cases} 6 \text{ elem } J-F \\ 6 \text{ elem } J-F \end{cases}$

Formas de elegir subc. · Selección de pareja · Elem rest. =

$\binom{2}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot 10!$

c) $12! - \left[\binom{2}{1} \cdot \binom{6}{1} \cdot 10!\right]$

31) $\{a, b, c\}$; $\begin{cases} 8 \text{ a's} \\ 3 \text{ b's} \\ 5 \text{ c's} \end{cases}$

a) $8+3+5 = 16$; En 16 pos. distrib. 8 a's, 3 b's, 5 c's $\Rightarrow \dfrac{16!}{8! \; 3! \; 5!}$

b) Sin a's consec. = Tot. − Con a's consec ;

Con a's consecutivas $= \dfrac{(16-8)!}{(8-8)! \cdot 3! \cdot 5!}$;

$R = \dfrac{16!}{8! \cdot 3! \cdot 5!} - \dfrac{8!}{3! \cdot 5!}$

• Problemas T2 - Discretas - Recuento

32)

a) 6 personas en 6 butacas = 6!

b) 6 p. en mesa redonda = (6-1)! = 5!

c) 3 C, 3 P, que no se sienten juntos ni C's ni P's:

C 3 2 1
P 3 2 1

$3! \cdot 3!$

35) Caravana de 6 coches y 6 furgos, distintas.

No haya 2 furgos juntas.

a) Que si puedan ir juntas: 12!

b) Que no:

- Que haya coche al principio:

|C1|F1| . --- |C6|F6| es $6! \cdot 6!$

- Que haya furgo al ppio:

|F|C| --- |F|C| $\}\ 6! \cdot 6!$ $\}\ 6! \cdot 6! \cdot 6!$

|F|C|C|F| .. |C|F|

|F|C|F|C|C| .. |C|F| $\}\ 6$

⋮

36) Lanza moneda 10 veces.

$p(\text{2 caras exactas}) : \dfrac{\text{casos fav}}{\text{casos pos}} = \dfrac{\binom{10}{2}}{2^{10}}$

$p(\text{como mucho 3 caras}) : \dfrac{\text{casos fav}}{\text{casos pos}} = \dfrac{\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}}{2^{10}}$

F. Generadoras MK III

Conversiones de series

① $(1 + x + \dots + x^n)^m = (1 - x^{n+1})^m \cdot (1-x)^{-m}$

② $(1 + x + \dots + x^n + \dots)^n = (1-x)^{-n}$

③ $1^{0\cdot k} + x^{1\cdot k} + \dots + x^{n\cdot k} = (1 - x^k)^{-1}$

Conversiones combinacionales

① $(1 - x^m)^n = \binom{n}{0}\cdot x^{0\cdot m} - \binom{n}{1} x^{1\cdot m} + \binom{n}{2} x^{2m} \dots$

② $(1 - x^m)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \cdot x^{k\cdot m}$

③ $(1 + x)^{-n} = (-1)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \cdot x^k$

Buscar k en $(1 - x^m)^{-n} = \binom{k+n-1}{k} x^{k\cdot m}$

Buscar k en $(1 - x^m)^{n} = \binom{k+n-1}{k} \cdot x^{k\cdot m} \cdot (-1)^k$ (si k par, positi)

F. Generadoras exponenciales

① $\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^m = (e^x)^m$

② $\frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (pares)

③ $\frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (impares)

④ $1 + x + \frac{x^2}{2!} + [GAP] + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = e^x - [GAP]$

$= e^x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$

⑤ $e^{mx} \cdot e^{nx} = e^{(n+m)x}$

⑥ $e^{mx} \cdot x^n = x^n \cdot e^{mx}$

$e^{nx} = 1 + nx + \frac{(nx)^2}{2!} + \dots + \frac{(nx)^k}{k!}$

Buscar k en $e^{nx} = \frac{(nx)^k}{k!}$

$x^m \cdot e^{nx} = 1 + (nx^m) + \dots \frac{n\cdot x^{m+k}}{k!}$

Buscar k en $x^m e^{nx} \Rightarrow \frac{(nx)^{m+k}}{k!}$

	k
e^{nx}	$\frac{(nx)^k}{k!}$
$x^m e^{nx}$	$\frac{(nx)^{k+m}}{k!}$
e^x	$\frac{x^k}{k!}$

Ej. Discretas - T3 - F. Generadoras

1) Ejemplo: descartando limitaciones implícitas

$x_1 + x_2 + x_3 = 15;$

① $3 \leq x_1 \; [\leq 11]$

② $2 \leq x_2 \; [\leq 10]$

③ $2 \leq x_3 \; [\leq 10]$

① $\Rightarrow (x^3 + \dots + x^{11} + \dots) \equiv x^3 \cdot (1 + x + \dots + x^8 + \dots)$

② $\Rightarrow (x^2 + \dots + x^{10} + \dots) \equiv x^2 \cdot (1 + x + \dots + x^8 + \dots)$

③ $\Rightarrow (x^2 + \dots + x^{10} + \dots) \equiv x^2 \cdot (1 + x + \dots + x^8 + \dots)$

$G(x) = x^3 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot (1 + x + \dots + x^8 + \dots)^3$

$G(x) = x^7 \cdot (1 + x + \dots + x^8 + \dots)^3; \quad (1 + x + \dots + x^n + \dots)^m = (1-x)^{-m}$

$G(x) = x^7 \cdot (1-x)^{-3};$

- Busco coef. de $(15 - 7 = 8)$ en $(1-x)^{-3};$

Sé que $(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \cdot x^k;$

El coef. de x^8 será $\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = 45$

2) Ejemplo 2

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24;$

① $3 \leq x_i \leq 8$

① $\Rightarrow (x^3 + x^4 + \dots + x^8) \equiv x^3 \cdot (1 + x + \dots + x^5)$

②, ③, ④ $\equiv$ ①

$G(x) = [x^3 \cdot (1 + x + \dots + x^5)]^4$

$G(x) = x^{12} \cdot (1 + \dots + x^5)^4; \quad (1 + \dots + x^n)^m = (1 - x^{n+1})^m \cdot (1-x)^{-m}$

$G(x) = x^{12} \cdot (1 - x^6)^4 \cdot (1-x)^{-4};$

Busco coef. de $(24 - 12 = 12)$ en $[(1-x^6)^4 \cdot (1-x)^{-4}]$

a) $(1-x^6)^4 = \binom{4}{0} x^{0 \cdot 6} - \binom{4}{1} x^6 + \binom{4}{2} x^{12} \dots$

b) $(1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4-1}{k} \cdot x^k$

Posibles combos $\begin{cases} a)\ 0 & b)\ 12 \Rightarrow \binom{15}{12} \cdot \binom{4}{0} \\ a)\ 6 & b)\ 6 \Rightarrow \binom{9}{6} \cdot \left[-\binom{4}{1}\right] \\ a)\ 12 & b)\ 0 \Rightarrow \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{0} \end{cases}$

$\text{Coef.} = \binom{4}{0}\binom{15}{12} + \left[-\binom{9}{6} \cdot \binom{4}{1}\right] + \binom{4}{2}\binom{3}{0} = \binom{15}{12} - \binom{9}{6} \cdot 4 + \binom{4}{2}$

3) Ej. 3 : Exponenciales

Con $\{A, B, C\}$, cadena long. 4 con 2 A's al menos.

$l_A + l_B + l_C = 4$; | ① $\Rightarrow \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)$ ③ = ②

① $2 \leq l_A [\leq 4]$ | ② $\Rightarrow \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)$

② $2 \leq l_B, l_C [\leq 2]$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2;$$

Sabemos q. $\left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right) = e^x$;

$$G(x) = \left[e^x - \frac{1}{0!} - \frac{x}{1!}\right] \cdot (e^x)^2;$$

$$G(x) = (e^x - x - 1) \cdot (e^{2x}) = e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}$$

Sabemos q. $x^r = \frac{r! \cdot x^r}{r!}$; Buscamos x^4; Volvemos a transf.

$$G(x) = \left[1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \dots\right] - \left[1x + \frac{(2x)x}{1!} + \frac{(2x)^2 \cdot x}{2!} + \dots\right] - \left[1 + \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots\right]$$

Busco coef. de $\frac{x^4}{4}$:

a) $\frac{(3x)^4}{4!} \Rightarrow \frac{81 x^4}{4!}$; Coef. = 81

b) $\frac{(2x)^3 \cdot x}{3!} \Rightarrow \frac{4 \cdot 8 x^4}{4 \cdot 3!}$; Coef = 8·4

c) $\frac{(2x)^4}{4!} \Rightarrow \frac{16 x^4}{4!}$; Coef. = 16

El coef. de x^4 en $e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}$ es:

$81 - 32 - 16 = 33$

Ej. Discretas - T3 - F. Gen.

$$\int_1^3 \left[\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4\pi^2}\right] \cdot dx$$

1)

$$\binom{63}{57} - \left[\binom{7}{2} \cdot \binom{15}{1}\right]$$

$$f(x) = 7x^3 + 12x - 3$$

2) a) x^3 en $(1+2x)^{-7} \Rightarrow (-1)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \cdot x^k \Rightarrow (-1)^3 \cdot \binom{3+7-1}{3} \cdot (2x)^3$

$= -\binom{9}{3} \cdot 8$

b) x^n en $(1-x)^{-4} \Rightarrow (1-x)^{-n} ; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \cdot x^k \Rightarrow \binom{n+3}{n}$. para cualq. x^n

c) x^{2r} en $(1-x)^{-r} \Rightarrow \binom{2r+r-1}{r} = \binom{3r-1}{r}$ para cualq. x^{2r}

3) a) $a_n = n^2 + n = n \cdot (n+1)$; $G(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$

b) $b_n = 2n^2$; $G(x) = (n^2+n)x^n$

$$\binom{5}{1}$$

5) // TODO

$p \wedge q \to r$

$p \to (q \wedge r)$

①

7) a) $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3 = 6$

b) $(1+x+x^2+x^3)^4 = r$

8) b) $(1+x \dots x^4)^3 = r$

e) $(1 \dots x \dots)^2 + (\cancel{x} \dots x^3 + x^5 \dots x^{2k}) + (x + x^3)$

c) $(1+x^2+x^4+x^8)(x+x^3+x^5+x^7)(1+x \dots x^n \dots)^2$

9) 25 ficheros de 7 tipos, a tomar entre 2 y 6 / tipo.

$f_1 + f_2 + f_3 \dots f_7 = 25$

$2 \leq f_i \boxed{\leq 6}$; $G(x) = \left[(x^2+x^3 \dots x^6)^7\right] = (x^2)^7 \cdot (1+x \dots x^4)^7$

$G(x) = x^{14} \cdot \underbrace{(1-x^5)^7 \cdot (1-x)^{-7}}_{\text{Busco aquí el coef. de } x^{11}}$

a) $(1-x^5)^7 \Rightarrow \binom{7}{0} \cdot 1 - \binom{7}{1} x^5 + \binom{7}{2} x^{10} \dots$

b) $(1-x)^{-7} \Rightarrow \binom{k+7-1}{k} \cdot x^k$

Combos:

a)	b)	
0	11	$\Rightarrow \binom{17}{11} \cdot \binom{7}{0}$
5	6	$\Rightarrow -\binom{7}{1} \cdot \binom{12}{6}$
10	1	$\Rightarrow +\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{1}$

$R = \binom{17}{11} + \left[-\binom{7}{1} \cdot \binom{12}{6}\right] + \left[\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{1}\right]$

10) a) $p_1 \dots p_5 = 35$; $0 \leq p_i$

b) $p_1 \dots p_5 = 35$; $1 \leq p_i$

c) $p_1 \dots p_5 = 35$; $2 \leq p_i$

d) $p_1 \dots p_5 = 35$; $10 \leq p_1$; $0 \leq p_i$, si $i \in (2 \dots 5)$

e) $p_1 \dots p_5 = 35$; $10 \leq p_1, p_2$; $0 \leq p_i \boxed{\leq 5}$ $i \in (3, 4, 5)$

Ej. Discretas - T3 - F. Generadoras

11) $P = \frac{\text{\# casos fav}}{\text{\# casos pos.}}$; # posibles $= 6^{12}$

casos fav = coef. de x^{30} en $G(x)$; $t_1 + t_2 \dots + t_{12} = 30$

$1 \leq t_i \leq 6$

$G(x) = (x + x^2 \dots + x^6)^{12}$

12) Enteros de 4 cifras que suman 18:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 18; \\ 1 \leq e_1 \leq 9 \\ 0 \leq e_i \leq 9 \quad (i \in (2,3,4)) \end{array}\right\} \begin{array}{l} G(x) = (x \dots x^9) \cdot (1 \dots x^9)^3 \\ G(x) = x \cdot \underbrace{(1 \dots x^9 \dots)^4}_{\text{Busco coef. de } x^{17}} = x \cdot (1-x)^{-4} \end{array}$$

$(1-x)^{-4} \Rightarrow \binom{17+4-1}{17} \cdot x^{17}$; Coef. $= \binom{20}{17}$ formas.

13) Moneda de 1€ a monedas de (5, 10, 20, 50) cént.:

$5m_5 + 10m_{10} + 20m_{20} + 50m_{50} = 100;$

m_n = # monedas de n céntimos.

$G(x) = (1 + x^5 \dots x^{100}) \cdot (1 + x^{10} + x^{20} \dots x^{100}) \cdot (1 + x^{20} + x^{40} \dots x^{100}) \cdot (1 + x^{50} + x^{100})$

$G(x) = (1-x^5)^{-1} (1-x^{10})^{-1} (1-x^{20})^{-1} (1-x^{50})^{-1}$

$\hookrightarrow$ Busco coef. de x^{100} en $G(x)$.

14) 250 papeletas, 100 personas, 6 peluches

$p_1 + p_2 \dots p_{100} = 6;$

$0 \leq p_1, \dots, p_{50} \leq 3$

$0 \leq p_{51}, \dots, p_{100} \leq 2$

$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^{50} \cdot (1 + x + x^2)^{50}$

$G(x) = (1-x^4)^{50} \cdot (1-x)^{-50} \cdot (1-x^3)^{50} \cdot (1-x)^{-50}$

$G(x) = \underbrace{(1-x^4)^{50}}_{a)} \underbrace{(1-x^3)^{50}}_{b)} \underbrace{(1-x)^{-100}}_{c)}$

Busco coef. de x^6 en $G(x)$.

a) $(1-x^4)^{50} \Rightarrow \binom{50}{0} - \binom{50}{1}x^4 + \binom{50}{2}x^8 \dots$

b) $(1-x^3)^{50} \Rightarrow \binom{50}{0} - \binom{50}{1}x^3 + \binom{50}{2}x^6 \dots$

c) $(1-x)^{-100} \Rightarrow \binom{k+100-1}{k} \cdot x^k$

a)	b)	c)	
0	0	6	$\Rightarrow \binom{105}{6}$
0	6	0	$\Rightarrow + \binom{50}{2}$
0	3	3	$\Rightarrow - \binom{50}{1} \cdot \binom{102}{3}$
4	0	2	$\Rightarrow - \binom{50}{1} \cdot \binom{101}{2}$

Resultado $= \binom{105}{6} + \binom{50}{2} - \left[\binom{50}{1} \cdot \binom{102}{3} + \binom{50}{1}\binom{101}{2}\right]$

15) $5m_5 + 10m_{10} + 20m_{20} + 50m_{50} = 75$;

$G(x) = (1-x^5)^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{20})^{-1}(1-x^{50})^{-1}$

16) $I_{15}\ \{1,2,\dots,15\}$; # subconjuntos de 4 elem, ninguno consec.

Subconj. $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$a_i - a_{i-1} \geq 2$; $\quad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 15$

$1 \leq s_1 \leq 9 \Rightarrow a_2 - a_1$

$2 \leq s_2 \leq 10 \Rightarrow a_3 - a_2$

$2 \leq s_3 \leq 10 \Rightarrow a_4 - a_3$

$2 \leq s_4 \leq 10 \Rightarrow 15 - a_4$

$0 \leq s_5 \leq 10 \Rightarrow a_1$

$G(x) = (x + \dots + x^9 + \dots)\cdot(x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots)^3 (1 + \dots + x^n + \dots)$

$G(x) = x^7 \cdot (1 + x + \dots)^5$

$G(x) = x^7 \cdot \underbrace{(1-x)^{-5}}_{\text{Busco coef. de } x^8}$

17) $\left.\begin{array}{l} p_1 + \dots + p_{10} = 100 \\ 5 \leq p_n \leq 20 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} p_1 + \dots + p_{10} = 50 \\ 0 \leq p_n \boxed{\leq 15} \end{array}$

$G(x) = (1 + x + \dots + x^n + \dots)^{10}$

$G(x) = (1-x)^{-10}$; Busco coef. de x^{50}

$\text{Coef.} = \binom{60-1}{50} x^{50}$; $\text{Coef.} = \binom{59}{50}$.

18) 3000 sobres en pkts. de 25 a 4 estudiantes; $150 \leq$ est. ≤ 1000

$25e_1 + 25e_2 + 25e_3 + 25e_4 = 3000$

$150 \leq e_i \leq 1000$

$G(x) = (x^{150} + x^{175} + \dots + x^{1000})^4$

Suponiendo q. reparto 150 a cada uno:

$25e_1 + 25e_2 + 25e_3 + 25e_4 = 2400$

$0 \leq e_i \leq 850$

$G(x) = (1 + x^{25} + x^{50} + \dots + x^{850})^4$

$G(x) = (1-x^{25})^{-4}$; Busco coef. de x^{2400}

19) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 60$;

$0 \leq e_1, e_2 \leq 25$

$0 \leq e_3, e_4 \leq 30$

$G(x) = (1 + x + \dots + x^{25})^2 \cdot (1 + x + \dots + x^{30})^2$

$G(x) = (1-x^{26})^2 (1-x)^{-2} (1-x^{31})^2 (1-x)^{-2}$

$G(x) = \underbrace{(1-x^{26})^2}_{a)} \underbrace{(1-x^{31})^2}_{b)} \underbrace{(1-x)^{-4}}_{c)}$

Busco coef. x^{60} en $G(x)$

a) $(1-x^{26})^2 \Rightarrow (-1)^k \binom{2}{k} x^{26k}$

b) $(1-x^{31})^2 \Rightarrow (-1)^k \binom{2}{k} x^{31k}$

c) $(1-x)^{-4} \Rightarrow \binom{k+4-1}{k} x^k$

Combos

a)	b)	c)
0	0	60
26	0	34
26	31	3
52	0	8
0	31	29

$R = \binom{63}{60} + \left[-\binom{2}{1} + \binom{37}{34}\right] + \left[-\binom{2}{1}\cdot\left(-\binom{2}{1}\cdot\binom{6}{3}\right)\right] + \left[\binom{2}{2}\cdot\binom{11}{8}\right] + \left[-\binom{2}{1}\cdot\binom{32}{29}\right]$

- $\not{N}$ nºs q. empiecen por 0, 00, etc.

Ej. Discretas - T3 - F. Generadoras

Nº de cifras $\Rightarrow c_1 + \dots + c_{10} \Rightarrow \left[\left(\frac{x^3}{3!}\right)\left(\cancel{x^2} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(\cancel{\frac{x^1}{1!}} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \dots\right)^8 \right] = \frac{x^3}{6}(e^x - x - 1)($

$c_n = \not{N}\; n$

$\uparrow$ doses 3   3ses   resto

2.1) Nºs de 10 cifras con 3 doses y al menos 2 ceros, que suman 60.

→ Importa orden, uso exp.

$n_1 + n_2 + \dots + n_{10} = 60;$

$n_1, n_2, n_3 = 2$

$n_4 \dots n_{10} \geq 0$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2!}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^0}{0!}\right)^2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^5$$

$$G(x) = \frac{x^8}{8} \cdot 1 \cdot \cancel{(e^x)^5}\; \left(e^x - \frac{x^2}{2!}\right)^5$$

$$G(x) = \frac{1}{8} \cdot x^8 \cdot \underbrace{\left[e^{5x} - \frac{1x^{10}}{32}\right] \cancel{\tfrac{\cdot}{/}}\, e^{5x}}_{\text{Busco coef. de } x^{52}} \Rightarrow$$

2.2) Barco con 12 banderas V, R, B, N. (48 en tot.).

a) $\not{}$Señales con b. verdes pares y b. negras impares?

$b_V + b_R + b_B + b_N = 12;$

$b_V = $ par

$b_N = $ impar

$$G(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2$$

$$G(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)(e^x)^2$$

$$G(x) = (e^{2x})\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^{3x} + e^x}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(e^{3x} + e^x)(e^x - e^{-x}) = (e^{4x} \cancel{- e^{2x}} \cancel{+ e^{2x}} - e^0)\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{e^{4x}}{4} = \frac{1}{4}(e^{4x} - 1);$$ Busco coef. de x^{12} en $G(x)$;

Coef. $\Rightarrow$

$$e^{4x} = 1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2!} + \dots + \frac{(4x)^{12}}{12!}\;;\; \text{Coef.} = \frac{12! \cdot 4^{12} x^{12}}{12!} + 1$$

$$\text{Coef.} = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{12! \cdot 4^{12}}{12!} + 1 - 1\right] = \frac{1}{4} \cdot 4^{12} = 4^{11}$$

b) Al menos 3 blancas ó ninguna. Blancas

Resto banderas

$$F(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^3\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) = (e^x)^3 \cdot \left(e^x - x - \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$F(x) = e^{3x} \cdot \left(e^x - x - \frac{x^2}{2!}\right) = e^{4x} - xe^{3x} - \frac{x^2}{2}e^{3x}$$

21) Nºs de 10 cifras con al menos dos 0's y exact. tres 2's.

$c_0 + c_1 + \dots + c_9 = 10;$

- **Funciones gen. exp.**

Ejemplo: palabras long. 4 con $\{A, B, C\}$ con al menos 2 A's.

$A \Leftrightarrow \ell_1$
$B \Leftrightarrow \ell_2$
$C \Leftrightarrow \ell_3$

$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 4$
$2 \leq \ell_1 \leq 4$
$0 \leq \ell_2 \leq 2$
$0 \leq \ell_3 \leq 2$

Posible sol: $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 1$, $\ell_3 = 1$

PERO hay reordenaciones: AABC, ABCA, etc.
$\hookrightarrow \dfrac{4!}{2!\,1!\,1!}$

Sabemos q. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\text{Sol.} = \left[\text{coef. de } x^4 \text{ en } \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)^2 \right] \cdot 4!$$

- **Particiones de un entero**

Ejemplo: particiones de $n = 5$: $P(5)$:

$\Rightarrow 5$ $\Rightarrow 3+1+1$ $\Rightarrow 1+1+1+1+1$
$\Rightarrow 4+1$ $\Rightarrow 2+1+1+1$
$\Rightarrow 3+2$ $\Rightarrow 2+2+1$

Nota: $P(0) = 1$.
Es una fun. recursiva. Para cal. $P(n)$ necesito calcular $P(n-1), P(n-2) \ldots P(0)$.

Para $P(5)$:

$P(0) = 1$ $P(1) = 1$
$P(2) = 2$ $P(3) = 3$
$P(4) = 5$ $P(5) = 7$

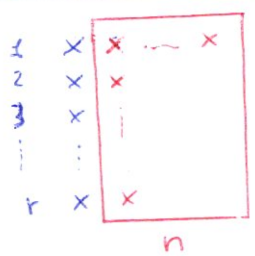
Nota 2: $p(n \mid \rho) \sim$ particiones de n q. cumplen ρ
$\hookrightarrow$ Ejemplo $p(15 \mid \text{partes pares}) = 0$
$\hookrightarrow$ Ej. 2: $p(5 \mid \text{partes dist.}) = 3$

Diag. Ferrer

Cada diag. representa las particiones.
Ej. $p = 7 + 5 + 4 + 1 + 1$:

$$\begin{array}{lllllll} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & & & & & & \\ \times & & & & & & \end{array}$$

Teorema examen: probar $p(n \mid \text{num. partic.} \leq r) = p(n+r \mid \text{num partes} = r)$



Repasar.

14 Una partición es autoconjug. es aquella q. si intercambio filas y columnas queda el mismo diag. de Ferrer.

$p(n \mid \text{particiones autoconj.}) = p(n \mid \text{partes distintas e impares})$

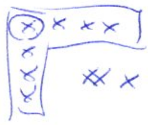
q. con partes dist. e impares.

$p(11)$:

```
x x x x x x x          no es          x x x
x x x            <============>       x x
x                   autoconjug.       x x
                                      x
7 + 3 + 1                             x
                                      x
                                      x
                                 3+2+2+1+1+1+1
```

Para q. sea autoconjug. #filas = #columnas

Sabemos q. #filas · 2 − 1 = # elem. x en fila y columna



$\# x$ = impar

Recursivamente hacia adentro

Para hallar $P(n)$:

$$P(x) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots + p(n)x^n + \dots$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

q. $p(9) = 3+3+3$ si $i=3$

$$f_n = p(n \mid \text{cada parte es } i) \begin{cases} 1 & \text{si } n = ki \\ 0 & \text{si } n \neq ki \end{cases}$$

$\hookrightarrow F(x) = 1 + x^i + x^{2i} + \dots + x^{ni} = (1-x^i)^{-1}$

$f_n = p(n \mid \text{cada parte es } i \text{ ó } j)$

$\cancel{n} = ki + tj$

$\hookrightarrow F(x) = (1-x^i)^{-1} \cdot (1-x^j)^{-1}$

$f_n = p(n \mid \text{cada parte es } i, j, k \dots) \rightarrow F(x) = (1-x^i)^{-1}(1-x^j)^{-1}(1-x^k)^{-1}$

¿Y si no ponemos restricc.? $\Rightarrow P(x) = \prod_{k=\phi}^{\infty} (1-x^k)^{-1}$ (producto)

• Ej.'s T3 ×2

33 $(p(16 \mid \text{cada parte es primo})) \cap (p(16 \mid \text{cada parte es impar}))$

$\hookrightarrow = p(16 \mid \text{cada parte es } 3, 5, 7, 11, 13)$

$3 \cdot \ell_1 + 5\ell_2 + 7\ell_3 + 11\ell_4 + 13\ell_5 = (1+x^3+x^6+x^9\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}\ldots)(1+x^7+x^{14}\ldots)$
$(1+x^{11}\ldots)(1+x^{13}\ldots)$

$= (1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}(1-x^7)^{-1}(1-x^{11})^{-1}(1-x^{13})^{-1} \overset{\text{taylor}}{\Rightarrow}$

expand (~)
f = (~)
f.taylor(x,0,16)

30 $p_k(n) \to$ particiones de n en k partes.

$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots p_1(n-k)$

$p_5(9) = p_5(4) + \overset{1+1+1+1}{p_4(4)} + \overset{1+1+2}{p_3(4)} + \overset{1+3 \,\&\, 2+2}{p_2(4)} + \overset{4}{p_1(4)} =$

$1 + 1 + 2 + 1$

31 $q_{n,d}$ = particiones de n en d partes dist.

$q_{n,d} = q_{n-d,d} + q_{n-d,d-1} \quad (1 \leq d \leq n)$

$q_{5,3} = q_{2,2} + q_{2,1}$

1+2+3 $\quad\quad \downarrow$
~~1+2+2~~ $\quad\quad 2$

32 $D(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) \Rightarrow$ ptes. dist. $\Big\} \Rightarrow \frac{1}{1-x} \ldots \frac{1}{1-x^3} \quad (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$

$I(x) = \prod_{i=0}^{\infty}(1-x^{2i+1})^{-1} \Rightarrow$ ptes impares $\Big\} \quad \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5}$

$(1+y)(1-y) = 1-y^2$;

$D(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \ldots$

$I(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \ldots$

Por tanto quedan los impares

Ejercicio

$P(100) = \prod_{k=1}^{100} (1-x^k)^{-i}$, el coeficiente de x^{100} es el nº de particiones

- Imaginemos $p(n \mid$ cada parte sólo sale 2 veces como máx.$)$

$\hookrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1+x^i+x^{2i})$

- $p(n \mid$ cada pt. dist. = cada parte sólo sale $\{0,1\}$ veces$) \Rightarrow \prod_{i=0}^{\infty} (1+x^i)$

$p(100 \mid$ cada pt. dist$) = \prod_{i=0}^{\infty} (1+x^i)$

$P(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1-x^k)^{-1}$

$Q(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (1+x^i)^{1}$

Son inversas: $P(x) \cdot Q(x) = 1$.

$1 = P(x)Q(x) = (1 + p(1)\cdot x + p(2)\cdot x^2 \pm p(n)\cdot x^n \pm)$
$= (1 + x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} \pm)$

$0 = p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - p(n-15) \pm$

Ej:

$P(14) = p(13) + p(12) - p(9) - p(7) + p(2)$

- $P(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26)$

Serie: $+1, +2, -5, -7, +12, +15, -22, -26$

$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8$

Ej. Discretas - T4 - Recurrencias

1) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

① Car.: $r^2 - 5r + 6 = 0$; $r \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$; Sol. $\{3^n, 2^n\}$

② Sol. gen: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$

③ Sol. espec.: | Sol. especif.

$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right\}$ $A = -B + 1$; $-3B + 2B = -3$; $B = 3$; $A = -2$

2) $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ para $n \geq 3$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$

① Car.: $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$; $r \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}$ | Sol $\{2^n, n \cdot 2^n, n^2 \cdot 2^n\}$

② Sol. general: $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

③ S. especifica:

~~A + B + C~~

$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ 2A + 2B + 2C = 0 \\ 4A + 8B + 16C = -4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{array}$

3) $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3}$ para $n \geq 3$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -3$

① Car: $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$; $r \begin{cases} 1 \\ -2 \\ -2 \end{cases}$

② Sol.: $A \cdot 1^n + B(-2^n) + C \cdot n(-2)^n$

③ Sol. espec.:

$\begin{array}{l} A + B = 1 \\ A - 2B + 2C = 0 \\ 1A + 4B + 8C = -3 \end{array}$ | $\begin{array}{l} A = 9 \\ B = 9 \\ C = 6 \end{array}$

4) $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$

$a_0 = 1$ | Ec. car.: $r^3 - 6r^2 + 12r - 8$; $r \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}$

$a_1 = 0$

$a_2 = -3$ | Sol. general: $(A + B\cdot n + C\cdot n^2)\cdot 2^n$

~~Sol. particular:~~

~~A~~

Sol. particular

$F(n) = (1+3)\cdot 3^n$; $S = 3$; No es raíz.

Busco $m^n (p_t \cdot n^t)\cdot s^n$

$a_n = (D + En)\cdot 3^n$; sustituyo en la ec. caract.

$(D+En)\cdot 3^n - 6\cdot(D+E(n-1))\cdot 3^{n-1} + 12(D+E(n-2))\cdot 3^{n-2} - 8(D+E(n-3))3^{n-3}$

$+ (1+n)\cdot 3^n =$

Divido entre 3^{n-3}:

$27\cdot(D+En) - 54(D+En-E) + 36(D+En-2E) - 8(D+En-3E) + 27(1+n) = 0$

$\cancel{27D} + \cancel{27En} - \cancel{54D} - \cancel{54En} + \cancel{54E} + \cancel{36D} + \cancel{36En} - \cancel{54E}$

$\cancel{-8D} - \cancel{8En} + 24E + 27 + \cancel{27n} = 0$;

$D + En + 27n + 36 + 24E = 0$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$a_0 = 0$

$a_1 =$

$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$

$r^2 - 7r + 10 = 0 = (r-2)(r-5)$

$a_n = A\,2^n + B\,5^n$

$a_n^{(p)} = (Cn^2 + Dn + E)\,3^n$

$(Cn^2 + Dn + E)\,3^n = 7\,(C(n-1)^2 + D(n-1) + E)\,3^{n-1}$
$-10\,(C(n-2)^2 + D(n-2) + E)\,3^{n-2} + n^2\,3^n$

Div. entre 3^{n-2}.

$9(Cn^2 + Dn + E) = 21\,(C(n^2 - 2n + 1) + D(n-1) + E)$
$-10\,(C(n^2 - 4n + 1) + D(n-2) + E) + 9n^2$

Para q. 2 pol. sg. deben ser ig. sus coef.

n^2: $9C = 21C - 10C + 9 \iff 2C = -9$

n: $9D = -42C + 21D + 40C - 10D \iff -2C + 2D = 0$

ter. indep.: $9E = 21C - 21D + 21E - 40C + 20D - 10E \iff 2E - 19C - D = 0$

$C = D = \frac{9}{2}$; $E = -45$ ✱ → arriba

✱ Sol. gen.:

$a_n = A\,2^n + B\,5^n - \left(\frac{9}{2}n^2 + \frac{9}{2} + 45\right)3^n$

Particularizo: (sust. a_0 y a_1)

$n=0 \to A + B - 45 = 0$

$n=1 \to 2A + 5B - 162 = 0$

$\left.\begin{array}{l} A = 21 \\ B = 24 \end{array}\right\}\ a_n = \frac{72}{3}2^n + \frac{62}{3}5^n - \left(\frac{9}{2}n^2 + \frac{9}{2}n + 45\right)3^n$

• $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + \underline{n^2}\ 5^n$

$a_0 = 0,\ a_1 = 2$

e) $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 2n+3 \equiv a_n - a_{n+1} + 2n + 3 = 0; \\ a_0 = 1 \end{cases}$

Homo:

$-a_n + a_{n+1} = 0;\ a_{n+1} = a_n;$ Sol. gen. $\Rightarrow a_n = A.$ (Ec. car. $= (1-r)$

Particular

$a_n^{(p)} = n \cdot (B + Cn) = Bn + Cn^2$ // Porque 1 es raíz.

$$B \cdot (n+1) + C(n^2+2n+1) - Bn - Cn^2 = 2n+3$$

$n \quad B + 2C - B = 2 \Rightarrow C = 1$

$t.i \quad B + C = 3 \Rightarrow B = 2$

Sol. particular: $a_n^{(p)} = n^2 + 2n$

Sol. tot.: $a_n = n^2 + 2n + A$

$$\boxed{a_n = (n+1)^2}$$

Cadenas binarias con nº impar de treses

$a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1} = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$

para $(n \geq 2)$

$a_1 = 1$

$a_0 = 0$

Solución: $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$

Resolución de recurrencias

Homogéneas

Forma: $a_n = x a_{n-1} + y a_{n-2} \pm \dots z a_{n-m}$; $a_1 = i$, $a_2 = j$ ... $a_m = k$

(1) Ec. caract.: $r^3 = a r^2 \pm b r \pm c \dots$; $r \begin{cases} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{cases}$ | Si hay multip. $r_2 \cdot + r_2' \cdot n + r_2'' \cdot n^2 \dots$

(2) Solución general: $A \cdot r_1^n + B r_2^n \pm \dots C r_n^n$

(3) Solución particular:

$a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n \dots$

$a_m = A \cdot r_1^m + B \cdot r_2^m \dots$

No homo

Forma: $a_n = x a_{n-1} + y a_{n-2} \pm \dots F(n)$

$F(n) = (a \dots b) \cdot s^n$

Si s es raíz: busco ec. $n^m (p_t \cdot n^t) \cdot s^n$

Si s no es raíz: busco ec. $(p_t \cdot n^t) \cdot s^n$

S_A

S_B

S_C

S_D

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 2^n & (n \geq 0) \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2^{\cancel{n+1}\, n} & (n \geq 1) \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n =$ // Sustituyo a_n

$\sum (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$

$1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^n =$

$1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n =$

$1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n = 1 + 2x \cdot G(x) + \cancel{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1-2x} - 1 \right];$

$G(x) = 1 + 2x \cdot G(x) + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{1-2x} - 1 \right]$

$(1-2x) G(x) = 1 + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{1-2x} - 1 \right] =$

$1 + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{1-2x} = 1 + \frac{2x}{1-2x} \cdot 1 = \frac{1}{1-2x}$

Ejemplo 3

$$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3} \quad \text{para } n \geq 3 \quad \left| \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -3 \end{array} \right.$$

⚠ Ojo

① Ec. caract. $r^3 + 3r^2 - 4$; $\left. \begin{array}{l} r_0 = -2 \\ r_1 = -2 \\ r_2 = 1 \end{array} \right\} \{ (-2)^n, \ (-2)^n \cdot n, \ 1^n \}$

② Sol gen $\Rightarrow A \cdot (-2)^n + B \cdot (-2)^n \cdot n + C \cdot (1)$

③ Sist. ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a_0 & \text{———} & 1 = A + C \\ a_1 & \text{———} & 0 = -2A - 2B + C \\ a_2 & \text{———} & -3 = 4A + 8B + C \end{array} \quad \left| \quad \left. \begin{array}{l} A + C = 1 \\ -2A - 2B + C = 0 \\ 4A + 8B + C = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 8/9 \\ B = -5/6 \\ C = 1/9 \end{array} \right.$$

④ $a_n = \frac{8}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}(-2)^n \cdot n + \frac{1}{9}$

- Rel. recurrencia lineales

Ejemplo

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n > 2$ | $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

① Ec. característica:

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$; Sol. $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ Base de soluciones: $\{2^n, 3^n\}$

② Sol. general: $A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$;

③ Sustituyo por a_0, a_1 $\begin{cases} n=0;\ a_0 \Rightarrow 1 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 \\ n=1;\ a_1 \Rightarrow 0 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 \end{cases}$

④ Resuelvo sist. ec.

$$\left.\begin{matrix} A + B = 1 \\ 2A + 3B = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A = 3 \\ B = -2 \end{matrix}$$

⑤ Sustituyo en sol. general: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

Ejemplo 2

$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ ≥ 3; | $a_0 = 1$, $a_1 = \emptyset$, $a_2 = -4$

① Ec. característica: $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$; $\begin{matrix} r_1 = 2 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 2 \end{matrix}$ | Base sol. $\{2^n, n \cdot 2^n, n^2 \cdot 2^n\}$

② Sol. general: $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

③ Sistema ec.:

$$\begin{matrix} n_0 — a_0 — 1 = A\,2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + C \cdot 0^2 \cdot 2^0 = A \\ n_1 — a_1 — 0 = A\,2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C \cdot 1^2 \cdot 2^1 = 2A + 2B + 2C \\ n_2 — a_2 — -4 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 4A + 8B + 16C \end{matrix} \quad \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \\ C = \emptyset \end{matrix}$$

④ Sust. ec. general:

$a_n = 1 \cdot 2^n - 1 \cdot n \cdot 2^n + 0$

$a_n = 2^n - n \cdot 2^n = (1-n) \cdot 2^n$

• Rel. rec. lineales no homogéneas

Ejemplo

$$4.1.- \; a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)\overset{s}{3^n} \quad \text{para } n \geq 3 \quad \left| \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -3 \end{array} \right.$$

① Sol. general a la homogénea asociada:

$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

Como s no es raíz, tendrá la forma: $(D + E \cdot n)3^n$

$p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} \dots + p_1 n + p_0) s^n$

$a_n = (D + E \cdot n) \cdot 3^n$

$a_{n-1} = (D + E(n-1))3^{n-1}$

$a_{n-2} = (D + E(n-2))3^{n-2}$

$a_{n-3} = (D + E(n-3))3^{n-3}$

~~$a_{n-4} = (D + E(n$~~

$(D + En) \cdot 3^n = 6 \cdot (D + E(n-1)) \cdot 3^{n-1} - 12(D + E(n-2)) \cdot 3^{n-2} + 8(D + E(n-3)) \cdot 3^{n-3} + (1+n) \cdot 3^n$

$= (6D + 6En - 6E)3^{n-1} + (-12D - 12En + 14E)3^{n-2} + (8D + 8En - 24E) \cdot 3^{n-3} + (1+n)3^n$

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = n^2$ para $n \geq 2$ $\quad\Big|\quad a_0 = 0,\ a_1 = 2$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - n^2$

Sol. ec. car. $= t^2 - t - 2 = 0$; $t \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$; Sol. $\{2^n, (-1)^n\} \Rightarrow A\cdot 2^n + B\cdot(-1)^n$

Considero polinomio grado 2 $\Rightarrow a_n = \boxed{An^2 + Bn + C}$

$(An^2+Bn+C) - (A(n-1)^2 + B(n-1) + C) - 2(A(n-2)^2 + B(n-2) + C) = n^2$

$(An^2+Bn+C) - (An^2 - A - 2An + Bn - B + C) - 2(An^2 + 4A - 4An + Bn - 2B + C) = n^2$

$\cancel{An^2} + \cancel{Bn} + \cancel{C} - \cancel{An^2} + A + 2An - \cancel{Bn} + B - \cancel{C} - 2An^2 - 8A + 8An - 2Bn + 4B - 2C = n^2$

$(-2A)n^2 + (10A - 2B)n + (-9A + 5B - 2C) = n^2$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - n^2$

$An^2+Bn+C = [A(n-1)^2 + B(n-1) + C] + 2[A(n-2)^2 + B(n-2) + C] - n^2$

$An^2+Bn+C = [An^2 + A - 2An + Bn - B + C] + 2[An^2 + 4A - 4An + Bn - 2B + C] - n^2$

$An^2+Bn+C = An^2 + A - 2An + Bn - B + C + 2An^2 + 8A - 8An + 2Bn - 4B + 2C - n^2$

$An^2+Bn+C = [3A - 1]n^2 + [-10A + 3B]n + [9A - 5B + 3C]$

$A = 3A - 1 \Rightarrow -2A = -1$; $A = 1/2$

$B = -10A + 3B \Rightarrow 2B = -10A$; $B = -5A = -5/2$

$C = 9A - 5B + 3C$

$-2C = 9A - 5B = 9/2 - 25/4 = \frac{18}{4} - \frac{25}{4} = \frac{-7}{4}$

MAL

$+2C = -9A + 5B$

$+2B = +10A$

$+2A = +1$

$A = 1/2$,

$B = 5\cdot 1/2 = 5/2$

$2C = -9\cdot 1/2 + 5\cdot 5/2 = -9/2 + 25/2 \Rightarrow C = 4$

$a_n = A\cdot 2^n + B(-1)^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 4$;

$a_0 = 0 \Rightarrow A + B - 4 = 0$

$a_1 \Rightarrow 2A - B - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 4 = 2$

$\left|\begin{array}{l} A + B = 4 \\ 2A - B = 9 \end{array}\right\} \quad A = 13/3,\ B = -1/3$

$$a_n = \frac{13}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 4$$

Demostraciones - Anexo - Discretas

① Probar que $7^n - 6n - 1$ es múltiplo de 36.

Ejemplo: $n=1$; $7-6-1=0$; $36 \cdot 0 = 0$ ✓

Supongo que si es cierto para n, lo será para $n+1$.

$$36 = 7^n - 6n - 1 \Longleftrightarrow 7^{n+1} - 6(n+1) - 1 = 36$$

Sé que $7^{n+1} - 6 \cdot (n+1) - 1 = 7 \cdot \boxed{7^n} - 6 \cdot n - 6 - 1 =$

$$= 7 \cdot (7^n - 1)(-6n) - 36n + 36n$$

$$= 7 \cdot (7^n - 1 - 42n) + 36n$$

$$= \underbrace{7 \cdot \underbrace{(7^n - 6n - 1)}_{\text{Si esto es múltiplo de 36...}} + 36n}_{\text{Esto debe de serlo}}$$

$$a_n = A \cdot 2^n + B n \cdot 2^n + C n^2 2^n + D \cdot x^0$$

$$(r-2)(r-2)(r-2) \cdot (r) = (r^2 - 2r - 2r - 4)(r-2)(r)$$

$$(r^2 - 4r - 4)(r-2)(r)$$

$$(r^3 - 4r^2 + \cancel{8} - 2r^2 + 8r + 8)(r)$$

$$(r^3 - 6r^2 + 8r + 16)(r)$$

$$r^4 - 6r^3 + 8r^2 + 16r$$

$$\overset{r^4}{a_n} = 6\overset{r^3}{a_{n-1}} + 8\overset{r^2}{a_{n-2}} + 16\overset{r}{a_{n-3}}$$

$n \geq 3$

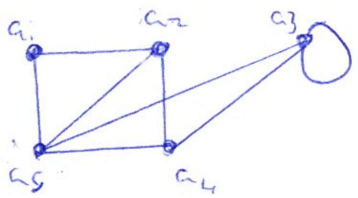
$a_n = A$

$a \; = \;$

- Problemas T5

3) 15 vértices; Puede tener cada uno grado 5?
R: no, no puede tener grado impar.

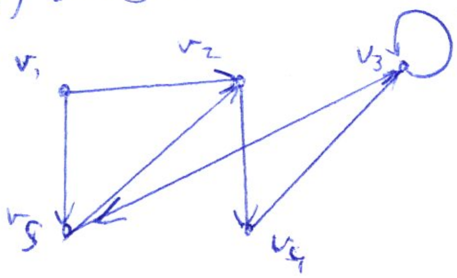
5) Matriz ady.
b)



$$\Rightarrow A \begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ a_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ a_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Simple { Todos 0's y 1's
No hay 1's en diagonal ppal

b_2) Dirigido



$$A = \begin{array}{c|ccccc|c} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & \text{Grado salida} \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & = 2 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & = 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & = 2 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 1 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & = 2 \end{array}$$

8) Son isomorfos?
=> # vértices
aristas
grado (v)

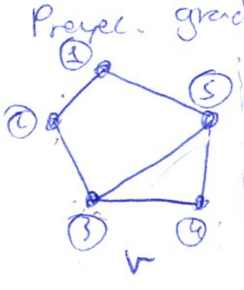
a) # v = 8 en ambos
a = 7 en ambos

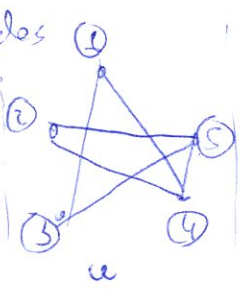
grados | g. - #v | 1 × 4 | 2 × 2 | 3 × 2 | a_2 | 1 × 4 | 2 × 2 | 3 × 2 |

g { a_1 => 1 1 1 1 2 2 3 3
{ a_2 => 1 1 1 1 2 2 3 3

Debo mirar también si puedo proyectar vértices de a_1 en a_2

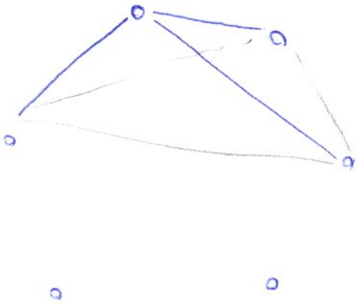
b) # v = 5
a = 6
Proyec. grados





$v_1 = u_3 \Rightarrow 2$
$v_2 = u_1 \Rightarrow 2$
$v_3 = u_4 \Rightarrow 3$
$v_4 = u_2 \Rightarrow 2$
$v_5 = u_5 \Rightarrow 3$

10)

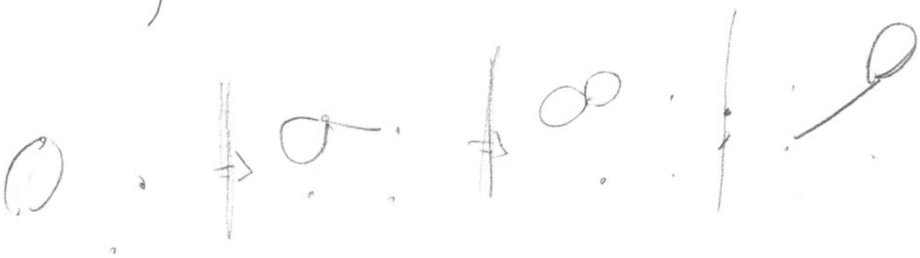


1) Cojo un vértice.
Ady. (grafo) + Ady (compl) = 5.
↓
2) Supongo = 3.
3) Si no está en grafo, está en complementario

9) G_1, G_2, G_3 → 4 vértices y 2 aristas.
Veros. q. 2 son isomorfos.

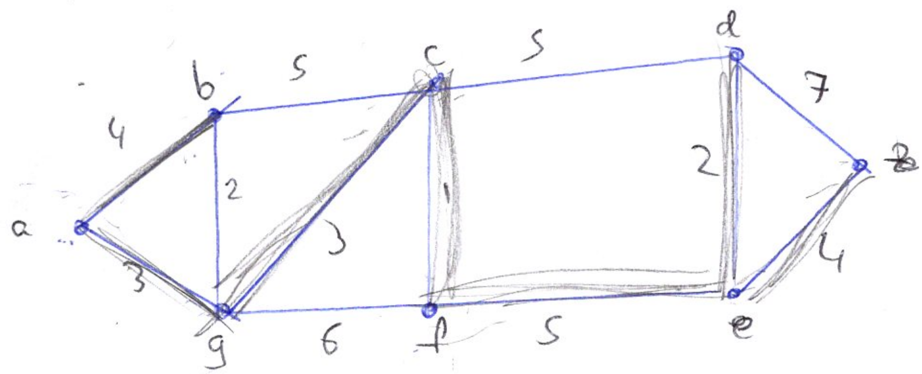
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

No simples ⇒



Simples ⇒

↳ Si tengo 3 simples y solo hay 2 posibilidades de que haya 2 aristas, al menos 2 son isomorfos



S = camino
l_n = coste de ir a n

Dijkstra

Paso 0

$S_0 = \emptyset$

$l_0(a) = 0, \emptyset$

Paso 1

$S_1 = \{a\}$

$l_1(b) = \min(\inf, 4) = \min(l_0(b), l_0(a) + w(a,b)) = 4$

$l_1(g) = \min(\inf, 3) = \min(l_0(g), l_0(a) + w(a,g)) = 3$ ← Tomo este

$l_1(..) = \infty$ // No los esc. pq.

Paso 2

$S_2 \{a, g\}$

$l_2(b) = \min(l_1(b), l_1(g) + w(g,b)) = 4$; ← Tomo este (a)

$l_2(c) = \min(l_1(c), l_1(g) + w(g,c)) = 6$ (a, g)

Poner camino que marcas ahora.

~~$l_2(g)$~~

$l_2(f) = \min(l_1(f), l_1(g) + w(g,f)) = 9$, (a, g)

Paso 3

$S_3 = \{a, g, b\}$

$l_3(c) = \min(l_2(c), l_2(b) + w(b,c)) = 6$, (a, g)

Paso 6

$S = \{a, g, b, c, f, d\}$

$l_6(e) = \min(l_5(e), l_5(d) + w(d,e)) = 12$ (a, g, c, f)

$l_6(z) = \min(l_5(z), l_5(d) + w(d,z)) = 18$ (a, g, c, d)

Problemas TS

15)

$$G=(V,E) \quad |V|=n \\ \delta(x)+\delta(y)\geq n-1 \quad \forall x,y\in V$$ $\Rightarrow$ Demos q. G es conexo.

1) Suponemos q. no es conexo.
2) Por tanto, tiene, al menos, dos componentes conexos.

$G_1=(V_1,E_1)$; $|V_1|=p$ | $v\in V_1$

$G_2=(V_2,E_2)$; $|V_2|=q\leq n-p$ | $w\in V_2$

Se tiene $\delta(v)+\delta(w) \leq p-1+n-p-1=n-2$

Por hipótesis tenemos q. $\delta(v)+\delta(w)\geq n-1$

Contradicción

Por tanto, G debe de ser conexo.

13) $G=(V,E)$

orden p

2 comp. conexas

Probar que $|E|\geq\frac{1}{4}(p^2-2p)$

$G_1=(V_1,E_1)$ | $|V_1|=r$ | $|E|=|E_1|+|E_2|$ | $r>p$

$G_2=(V_2,E_2)$ | $|V_2|=p-r$

Si son completos y tengo r vértices, tengo $\left(\frac{r\cdot(r-1)}{2}\right)$ aristas en G_1 y $\left(\frac{p-r\cdot(p-r-1)}{2}\right)$ aristas en G_2.

$$\left(\frac{r\cdot(r-1)}{2}\right)+\left(\frac{p-r\cdot(p-r-1)}{2}\right)=\frac{r^2-r+p^2-2rp-p+r^2+r}{2}$$

$$=\frac{2r^2-2rp+p^2-p}{2}=r^2-rp+\frac{p^2-p}{2};$$

$$¿\,r^2-rp+\frac{p^2-p}{2}\geq\frac{1}{4}(p^2-2p)? \Leftrightarrow 4r^2-4rp+2p^2-\cancel{2p}\geq p^2-\cancel{2p}\Rightarrow$$

$4r^2-4rp+p^2\geq0$

$(2r-p)^2\geq0$

Ejercicios Discretas - TS

23) - T ← árbol binario completo con n vértices

a) Demos. q. n es impar.

En cada nivel k, hay 2^k vértices.

En nivel 0 hay 1 vértice.

Par + Impar = Impar ;

$2^k + 1$ = Impar.

Nº vértices $= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^d = 2^{d+1} - 1$

b) Nº vértices de grado $1 = 2^d = \frac{n+1}{2}$ (ult. nivel)

Nº vértices de grado 2 = 2 (raíz)

Nº vértices de grado $3 = 2^{d+1} - 1 - 1 - 2^d$ (ramas intermedias)

1) Examen

T - árbol completo m-ario $\underbrace{\text{con n vértices}}$ tiene $\frac{(m-1)n+1}{m}$ vértices de grado 1?

d = prof. de T ;

$n = 1 + m + m^2 + \ldots + m^d = \frac{m^{d+1} - 1}{m}$ = nº tot. de vértices

vértices de grado $1 = m^d$

Sí.

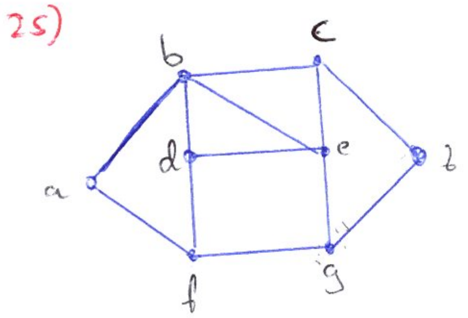
Quiero prob. q. $m^d = \frac{(m-1)n+1}{m}$

$(m-1)n = m^{d+1} - 1$

$(m-1)n + 1 = m^{d+1}$

$\frac{(m-1)n+1}{m} = m^d$

25)

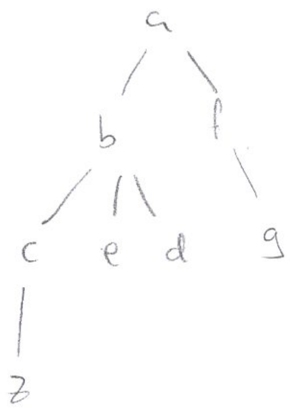


BEP: a, b, c, e, d, f, g, z

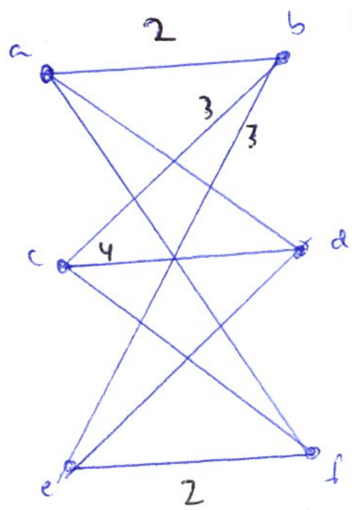
BEP2: a, b, e, g, f, d, z, c

BEA: a, b, f, c, e, d, g, z

BEA



28)



1 → {~~e,b~~}

2 → {~~a,b~~}, cf, ef

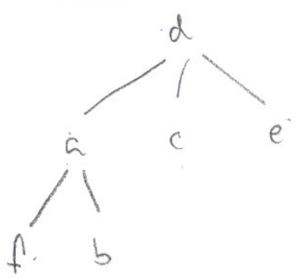
3 → bc, ad, ed, af

4 → ed

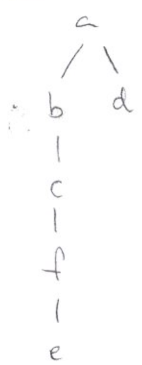
sucesores() = den. sucesores
min () = den. mínimo sin bucles.

Paso 0 → min(todos vértices) = eb
Paso 1 → min(sucesores(eb)) = ab
Paso 2 → ef
Paso 3 → fc
Paso 4 → de

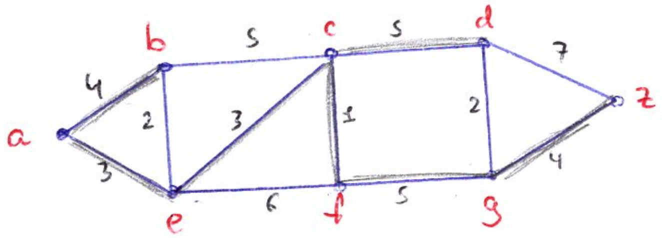
BEA desde d.



BEP



Ej. Discretas - TS - Dijkstra



Paso 0

$S_0 = \{\emptyset\}$

$L_0(a) = 0$

$L_0(b) = L_0(c) = \dots = \infty$

Tomo a.

Paso 1

$S_1 = \{a\}$

$L_1(b) = \min(L_0(b), L_0(a) + w(a,b)) = \min(\infty, 4) = 4, a$

$L_1(e) = \min(L_0(e), L_0(a) + w(a,e)) = \min(\infty, 3) = 3, a$

$L_1(c) = L_1(f) = \dots = \infty$

Tomo e por ser el más barato.

Paso 2

$S_2 = \{a, e\}$

$L_2(b) = \min(L_1(b) = L_1(a) + w(a,b), L_1(e) + w(e,b)) = \min(4, 5) = 4, a$

$L_2(c) = \min(L_1(c), L_1(e) + w(e,c)) = \min(\infty, 6) = 6, (e)$

$L_2(f) = \min(L_1(f), L_1(e) + w(e,f)) = \min(\infty, 9) = 9, (e)$

Tomo b.

Paso 3

$S_3 = \{a, e, b\}$

$L_3(c) = \min(L_2(c), L_2(b) + w(b,c)) = \min(6, 9) = 6, (e, a)$

$L_3(f) = \min(L_2(f), L_2(f)) = 9, (e)$

$L_3(d) = L_3(g) = \dots = \infty$

Tomo c

Paso 4

$S_4 = \{a, e, b, c\}$

$L_4(f) = \min(L_3(f), L_3(c) + w(c,f)) = \min(9, 7) = 7, (c, e, a)$

$L_4(d) = \min(L_3(d), L_3(c) + w(c,d)) = \min(\infty, 11) = 11, (c, e, a)$

$L_4(g) = L_4(z) = \infty$. Tomo f.

~~$L_4(g) = \min(L_3(g), L_3($~~

Paso 5

$S_5 = \{a, e, b, c, f\}$

$L_5(d) = \min(L_4(d), L_4(c) + w(c,d)) = \min(11, 11) = 11, (c, e, a)$

$L_5(g) = \min(L_4(g), L_4(f) + w(f,g)) = \min(\infty, 7 + 5) = 12, (f, c, e, a)$

$(L_5(z) = \infty)$

Tomo g.

Paso 6

$S_6 = \{a, e, b, c, f, g\}$

$L_6(d) = min(L_5(d), L_5(g) + w(g,d)) = min(11, 12+2) = 11, (e, ...)$

$L_6(z) = min(L_5(z), L_5(g) + w(g,z)) = min(\infty, 12+4) = 16, (g, e, ...)$

Tomo d.

Paso 7

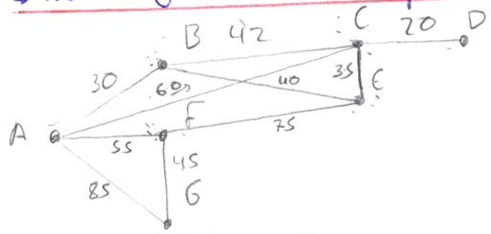
$S_7 = \{a, e, b, c, f, g, d\}$

$L_{6}z = min((L_6(z), L_6(d) + w(d,z)) = min(16, 18) = 16, (g, e, ...)$

Tomo z y finalizo.

Camino = (a, g, f, c, e, a)

Otro Dijkstra así rápido y cutre



Paso 0

$S_0 \{\emptyset\}$

$L_0(\cdot) = \infty$

$L_0(a) = 0$

Paso 1

$S_1 = \{a\}$

$L_1(b) = min(\infty, 30) = \boxed{(30, a)}$

$L_1(c) = m(\infty, 60) =$

$L_1(f) = m(\infty, 55) =$

$L_1(g) = m(\infty, 85) =$

$L_1(...) = \infty$

Paso 2

$S_2 = \{a, b\}$ $m(60, \cancel{80}) = 60$

$L_2(c) = m(\infty, 70) = 70$

$L_2(e) = m(\infty, 70) = \boxed{55,}$ (a)

$L_2(f) = m(55, \infty)$

$L_2(g) = m(85, \infty) = 85$

Paso 3

$S_3 = (a, b, f)$

$L_3(c) = m(60, \infty) = 60, (a)$

$L_3(e) = m(70, 130) =$

$L_3(g) = m(85, 100) =$

Paso 4

$S_4 = \{a, b, f, c\}$

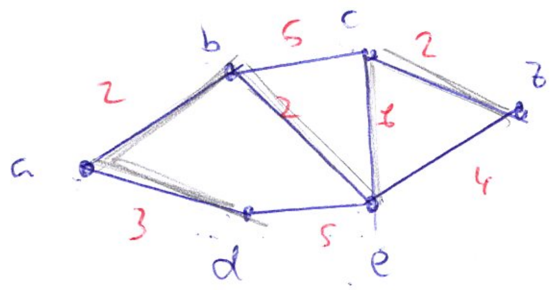
$L_4(e) = m(70, 95) = 70\ (a, b)$

$L_4(d) = m(\infty, 80) = 80, (a, c, d)$

Paso 5

$L_5(d) = m(80, \infty) = 80\ (a, c, d)$

Dijkstra



P0

$S_0 = \{\emptyset\}$

$l_0(a) = 0$

$l_0(\ldots) = \infty$

Tomo a

P1

$S_1 = \{a\}$

$l_1(b) = \min\{(l_0(b), l_0(a) + w(a,b)) = \min(\infty, 2) = 2, (a)$; Tomo b.

$l_1(d) = \min((l_0(d), l_0(a) + w(a,d)) = \min(\infty, 3) = 3, (a)$

$l_1(\ldots) = \infty$

P2

$S_2 = \{a, b\}$

$l_2(d) = \min((l_1(d), l_1(b) + w(b,d)) = \min(3, \infty) = 3, (a)$ ⇐ Tomo d

$l_2(c) = \min((l_1(c), l_1(b) + w(b,c)) = \min(\infty, 7) = 7, (b,a)$

$l_2(e) = \min((l_1(e), l_1(b) + w(b,e)) = \min(\infty, 4) = 4, (b,a)$

P3

$S_3 = \{a, b, d\}$

$l_3(c) = \min((l_2(c), l_2(d) + w(d,c)) = \min(7, \infty) = 7, (b,a)$

$l_3(e) = \min((l_2(e), l_2(d) + w(d,e)) = \min(4, 8) = 4, (b,a)$ ⇐ Tomo e

$l_3(z) = \infty$

P4

$S_4 = \{a, b, d, e\}$

$l_4(c) = \min((l_3(c), l_3(e) + w(e,c)) = \min(7, 5) = 5, (a,b,e)$ ⇐ Tomo c

$l_4(z) = \min((l_3(z), l_3(e) + w(e,z)) = \min(\infty, 8) = 8, (a,b,e)$

P5

$S_5 = \{a, b, d, e, c\}$

$l_5(z) = \min((l_4(z), l_4(c) + w(c,z)) = \min(8, 7) = 7, (a,b,e,c)$

Tomo z y fin.

$\boxed{\text{Camino} = a, b, e, c, z}$

$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$; $n \geq 3$

$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = -4$

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$; $r \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}$ | $S.G. = 2^n, n \cdot 2^n, n^2 \cdot 2^n$

	1	-6	12	-8
2		2	-8	8
	1	-4	4	0

$(r-2) \cdot (r^2 - 4r + 4)$

$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$

$S.C = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

$n = 0 \Rightarrow A = 1$

$n = 1 \Rightarrow 2A + 2B + 2C = 0$

$n = 2 \Rightarrow 4A + 8B + 16C = -4$

$A = 1$

$C = -1$

$B = 0$

$8B + 16C = 8$

$-8B - 8C = 0$

$8C = 8$; $C = 1$

$a_n = 2^n - (n^2 \cdot 2^n)$

$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3}$; $n \geq 3$ | $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -3$

$r^3 + 3r^2 - 4 = 0$;

Ejercicios Dijkstra - EC. Discretas

	sa	sb	sc	ad	bd	cd	at	ct	dt
cap	5	4	3	6	2	7	3	5	4
f_1	3	2	'3,	1	'2,	1	2	2	'4,

Paso 2

s — a — d, t es camino; s — b; s — c

	s	a	t
c	5	3	
f	3	2	
c-f	2	1	

=> min = 1.

Incremento flujo en 1 en s-a-t

	sa	sb	sc	ad	bd	cd	at	ct	dt
f_2	4	2	'3,	1	'2,	1	'3,	2	'4,

Paso 3

s — a — d; s — b; s — c — t

	s	c	t
c	3		
f			
c-f			

1) Tratado ig.
2) Luego se resta α

s — a ← d ← c — t ∈

	s	a	d ← c	t
c	5	6	+7	5
f	4	1	+1	2
c-f	1	5	+6	3

$\alpha = 1$

	sa	sb	sc	ad	bd	cd	at	ct	dt
f_3	'5,	2	'3,	2	'2,	0	2	3	'4,

Paso 4

s — b — x | No hay más pasos ni opciones: se ha alcanzado el flujo máx:

$$\sum x t = 2 + 3 + 4 = 10$$

Corte min $\begin{cases} S = \text{última opc. val.} = s, b \\ T = \text{lo que entra al sumidero} = \{a, c, d, t\} \end{cases}$

• Extra 2014

	sA	sB	sC	AD	BD	DE	CD	CE	DU	EF	EV	FU	FV	UT	VT
cap	10	18	22	10	8	10	16	6	12	18	12	14	16	26	28
f_0	0	0	...				—	—	—	—	—	—	—		0
f_1	10	0	0	10	0	-	-	0	10	0	—	—	0	10	0
f_2	10	2	0	10	2	0	0	0	12	0	0	0	0	12	0
f_3	10	12	0	10	2	10	0	0	12	0	10	0	0	12	10
f_4			2					~~2~~			12				12
f_5			6					6		4		4		16	
f_6															

Paso 1

S — A — D — U — T ∈ camino
S — B — E — F
E — V
S — C

	S	A	D	U	T
c	10	10	12	26	
f	0	0	0	0	
c-f	10	10	12	26	

$\alpha = 10$; Incremento

Paso 2

S — B — D — U — T ∈
B — E — F
E — V
S — C

	S	B	D	U	T
c	18	8	12	26	
f	0	0	10	10	
c-f	18	8	2	16	

$\alpha = 2$

Paso 3

S — B — D
B — E — F — U
E — V — T ∈ camino
S — C

	S	B	E	V	T
c	18	10	12	28	
f	2	0	0	0	
c-f	16	10	12	28	

$\alpha = 10$

Paso 4

S — B — D
S — C — E — F — U
E — V — T ∈

	S	C	E	V	T
c	22	6	12	28	
f	0	0	10	10	
c-f	22	6	2	18	

$\alpha = 2$

P5

S — B — D
S — C — E — F — U — T ∈
F — V

	S	C	E	F	U	T
c	22	6	18	14	26	
f	2	2	0	0	12	
c-f	20	4	18	14	14	

$\alpha = 4$

P6

S — B — D — x
S — C — x

Fin

S = S, B, D, C

T = U, V, T

	sb	se	sh	bc	bf	ef	ei	hi	cd	fj	if	ij	cd	jg	gd	jt	dt
cap	6	8	4	4	3	2	14	10	10	10	12	6	10	10	9	12	8
f_0	0	0															0
f_1	4			4					4								4
f_2	6				2					2				2	2		6
		2				2				4				4	4		8

Paso 1

b - c - d - t
s < e - f - j
h \ i

	S	b	c	d	t
c	6	4	10	8	
f	0	0	0	0	
c-f	6	4	10	8	

$\alpha = \min = 4$

Paso 2

b - f - j - g - d - t
s < e - i - X
h - X

	S	b	f	j	g	d	t
c	6	3	10	10	9	8	
f	4	0	0	0	0	4	
c-f	2	3	10	10	9	4	

$\alpha = 2$

Paso 3

~~b~~ b → X
s - e - f - j - g - d - t
h → X   i   \ t

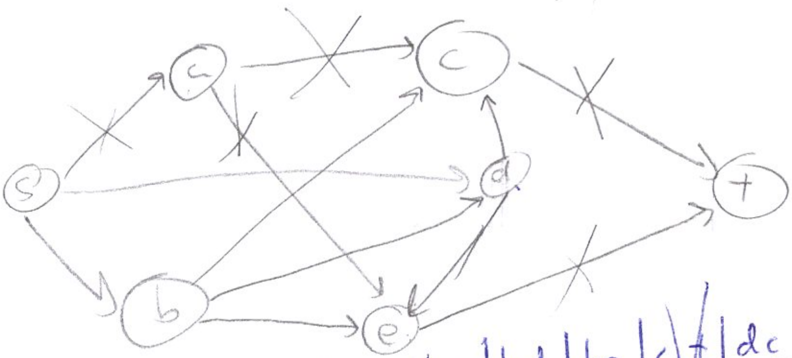
	S	e	f	j	g	d	t
c	8	2	10	10	9	8	
f	0	0	2	2	2	6	
c-f	8	2	8	8	7	2	

$\alpha = 2$

Paso 4

s < e - i - f
h → X   \ j - g - d
\ t

	S	e	i	j	t
c					
f					
c-f					



	sa	sb	sd	ac	ae	bc	bd	be	~~ct~~	dc	de	ct	et
cap	50	50	15	10	40	20	30	20		20	15	10	45
f_0	10											10,	0
f_1	10			10,									45,
f_2	50,				40,								

Paso I

S < A < C — TE ; E
S < D.
S < B.

S	A	C	T
c	50	10	10
f	0	0	0
cf	50	10	10

$\alpha = 10$

P2

S < A — E — T
S < D — C
S < B

S	A	E	T
	50	40	45
	10	0	0
	40	40	45

$\alpha = 40$

$S = \{A, B, C, D, E, S\} / T = \{T\}$ = Corte min "n" a saturada

Ejemplo 6.33.

	sa	sb	sc	ad	bd	cd	at	ct	dt
cap	5	4	3	6	2	7	3	5	4
f_i	3	2	"3"	1	"2"	1	2	2	"4"

$s \begin{cases} a < t, d \\ b \\ c \end{cases}$ $\Big\}$ $s \underset{2}{\overset{c-f}{—}} a \underset{1}{\overset{c-f}{—}} t \Big\} \alpha = 1$

	sa	sb	sc	ad	bd	cd	at	ct	dt
f_2	4	2	"3"	1	"2"	1	3	2	"4"

$s \begin{cases} a - d \leftarrow c — t \\ b \\ c \times \text{saturada} \end{cases}$ $\Big\}$ $s \underset{1}{—} a \underset{5}{—} \underbrace{d \leftarrow c}_{\text{sentido cont.}} \underset{3}{—} t \qquad \alpha = 1$

1

	sa	sb	sc	ad	bd	cd	at	ct	dt
f_3	"5"	2	"3"	2	"2"	0	"3"	3	"4"

$s \begin{cases} a \times \text{saturada} \\ b — d \times \text{saturada} \end{cases}$ $\Big\}$ No puedo ir a ningún lado, fin.

$S = \{s, b\}$ | Flujo max $= f_3$; Val. max $= 5 + 2 + 3 = 10$ (sa, sb, sc)

$T = \{a, c, d, t\}$

$c(S,T) =$ suma cap. q. parten de S y llegan a T.

$\hookrightarrow c(s,a) + c(s,c) + c(b,d) = 10$

Tías asesinadas.

Preguntas APA

Scala

- Objetos factory

Case Classes

Pattern Matching

Objetos Singleton, Singleton standalone como Aplicación

Rich wrappers

Clases Abstractas

Traits

Jerarquía de clases

Currying

Operadores: infijo, prefijo, postfijo

List() → nil

Objetos singleton

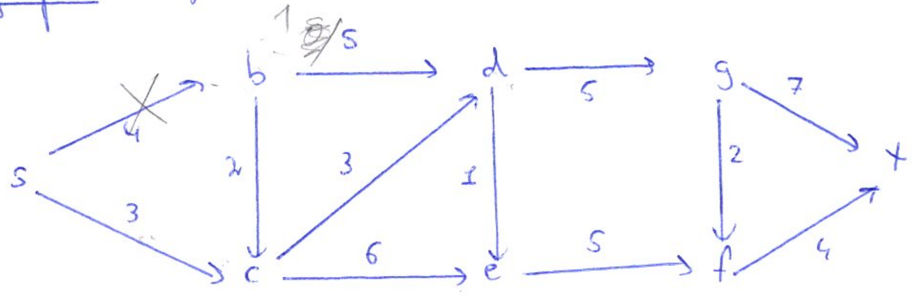
Clases estáticas. 1 sola instancia

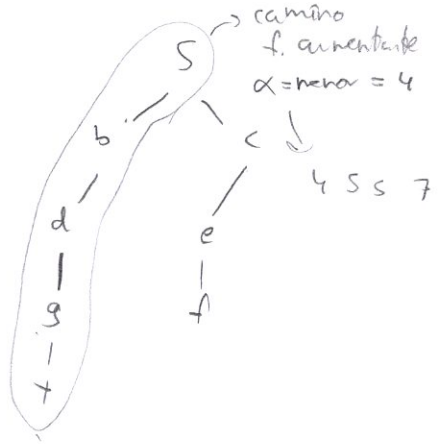
Se puede asociar a una clase.

Objeto singleton + clase: Companion object + Companion class

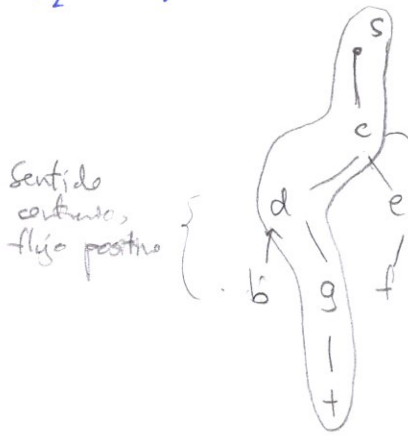
Objeto singleton sin clase: singleton standalone.

Ejemplo flujo máximo





	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
cap	4	3	2	5	3	6	1	5	5	2	4	7
f_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_2	4	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	4



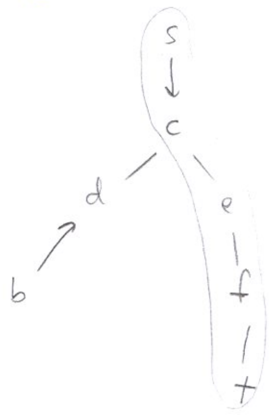
(no puedo ir a b. pq. está saturado)
(no tomo bc por ser sent. contrario y es 0).

camino f. aumentante:

s c d g t
3 3 1 3 } α = 1

	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
f_3	4	1	0	4	1	0	0	5	0	0	0	5

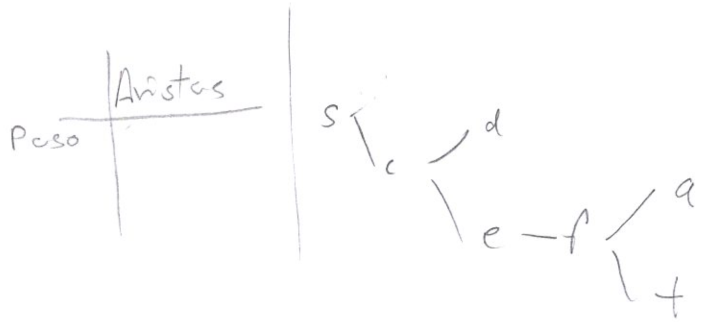
s c e f t
2 6 (t-f=5) 4 } α = 2



	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
f_4	4	3	0	4	1	2	0	5	2	0	2	5

Fin pq. las dos salidas de la fuente están saturadas.

Flujo máximo:
Val max = Σ salidas = 7



T6 - Discretas

Alg. flujo máximo

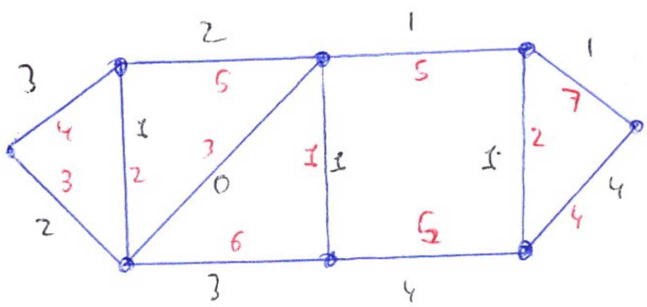
Red de transporte.

Fuente: inicio

Sumidero: destino

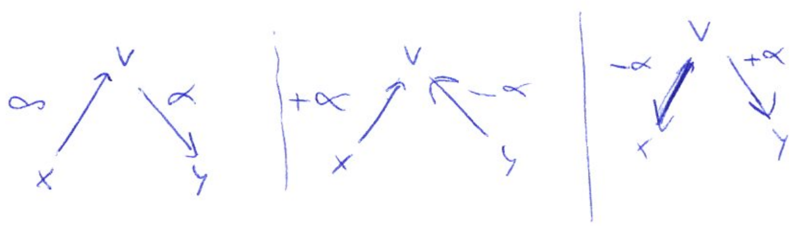
Flujo: asignación de valores a aristas tal que
- flujo ≤ capacidad de arista
- no hay pérdidas:
  - → flujo entrada = flujo salida por vértices

Ejemplo



Valor de flujo = Σ cada flujo = .

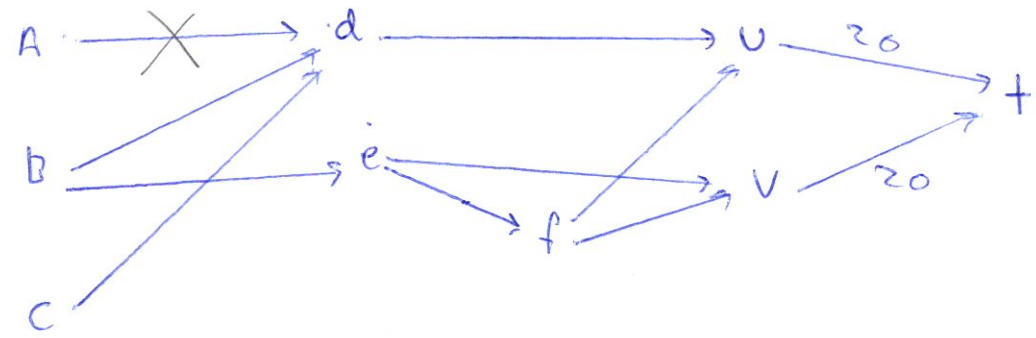
Optimización:
Encontrar camino q.
- Si sentido camino → no saturada
- Si sentido contrario → flujo positivo.



No entiendo nada

5. Red transporte examen 20XX.

(5)



SA	SB	SC	Ad	Bd	Be	Cd	Ce	dU	ef	eV	fU	fV	Vt	Ut
8	16	16	8	8	8	8	10	12	10	10	10	10	20	20

f_0 0 ... 0

s < A — d — u — t ⇐ ; B — e < f, v ; C

S	A	d	u	t
8	8	10	20	

} $\alpha = 8$

f_1 8 0 0 '8, 0 0 0 0 8 0 0 0 0 8 0

Paso 2

s < B < d < u, A ; e — f ; e — V ; C

S	B	d	u	t
c	4	8	10	20
f	0	0	8	8
r	4	8	2	12

} $\alpha = 2$; Actualizo...

f_2 { '8, , 2, 0, '8, , 2, 0, 0, '10, , 0, 0, 0, 0, 10, , 0 }

Paso 3

s < B < d ← A ; e < f — u ; v — t ⇐ ; C

S	B	e	V	t
	16	8	10	20
	2	0	0	0

f_3 { '8, , 10, 0, '8, , 2, '8, , 0, 0, '10, , 0, 8, 0, 0, 10, 8 }

Paso 4

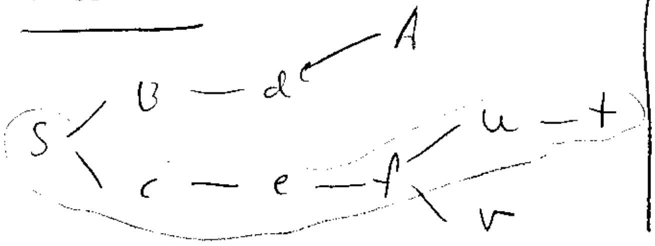
s < B — d ← A ; C — e < f — u ; v — t ⇐

S	C	e	V	t
c	16	8	10	20
f	0	0	8	8
r	16	8	2	12

} $\alpha = 2$

f_4 { '8, , 10, 2, '8, , 2, '8, , 0, 2, '10, 0, '10, , 0, 0, 10, 10

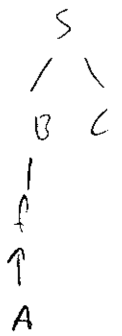
Paso 5



s	c	e	f	u	t
c'	16	8	12	16	20
f	2	2	0	0	10
r	14	6	12	10	10; $\alpha = 6$
		↑			

$\to f_s = \{"8", 10, 8, "8", 2, "8", 0, "8", "10", 6, "10", 6, 0, 16, 10\}$

Paso 6



Corte

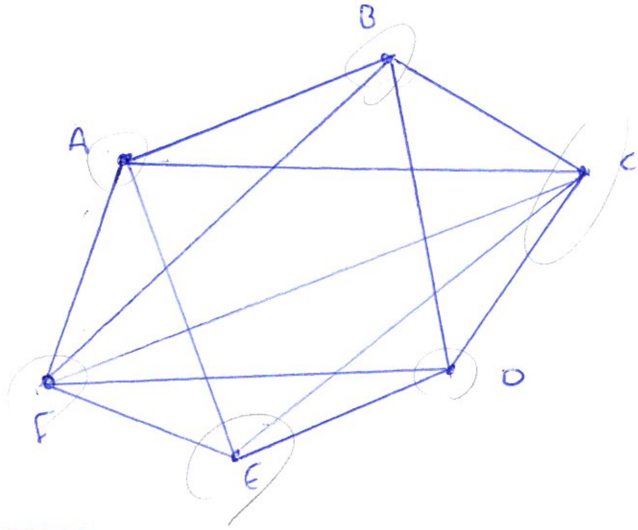
$S = \{A, B, C, d\}$

$T = \{e, f, u, v, t\} = \sum f_s = 26$

$cap(S,T) = cap(B,e) + cap(c,e) + cap(A,u) = 8 + 8 + 10 = 26$

2 Coloración de grafos

Conf. = { A, B, C, D, E, F }



Color 1 → A, D

Color 2 → B, E,

Color 3 → C

Color 4 → F

Nº cromático = # colores ≤ 4.

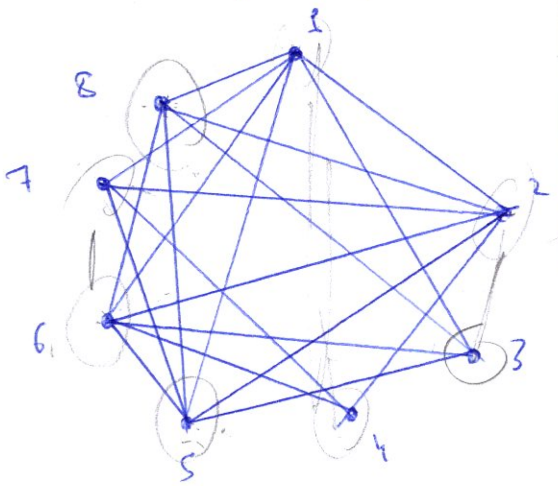
Como A, B, C, F forman un grafo completo: Nº crom ≥ 4.

Por tanto, el nº crom = 4

6.10

8 ordenadores y 9 paquetes con múltiples paquetes/ord.

Vértices = ordenadores
Aristas = Compartir pkt.



Lista de adyacencia		Color
1	2, 3, 5, 6, 7, 8	a { 1, 4 }
2	1, 4, 5, 6, 7, 8	b { 2, 3 }
3	1, 5, 6, 8	b { 2, 3 }
4	2, 6, 7	a
5	1, 2, 3, 6, 7, 8	c { 5 }
6	1, 2, 3, 4, 5, 8	d { 6, 7 }
7	1, 2, 4, 5,	d
8	1, 2, 3, 5, 6	e { 8 }

nº ≤ 5

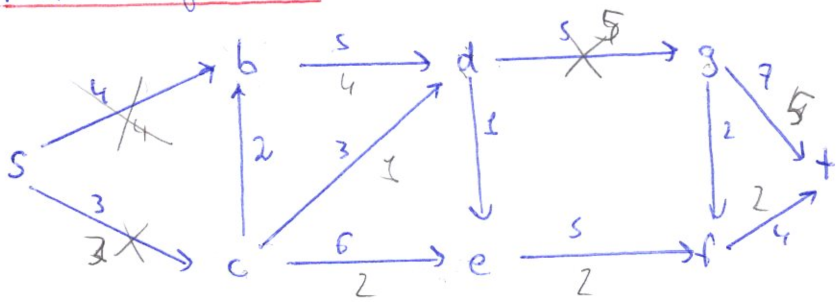
a) nº cromático ≤ 5

b) Probar nº crom ≥ 5 :

Grafo completo formado por 1, 2, 5, 6, 8

• Ej.s T6 - Discretas

① Hallar flujo máx



	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
capacidad	4	3	2	5	3	6	1	5	5	2	4	7
f_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

} Estado inicial.

Paso 1: Búsq. en anchura

s — b — d — g — t ⇐ Camino f. aum.
s — c — e — f

s	b	d	g	t
	4	5	5	7

; Menor = 4 ; Sumo 4 a todo el camino.

	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
f_1	4	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	4

Paso 2: No puedo ir a b porque ya está saturado.

s — c — d — b
s — c — d — g — t ⇐ Camino f. aum
s — c — e — f

	s	c	d	g	t
costes	3	3	5	7	
ya ocup.	0	0	4	4	
rest.	3	3	1	3	

} $\alpha = 1$

	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
f_2	4	1	0	4	1	0	0	5	0	0	0	5

Paso 3:

	s	c	e	f	t
cap	3	6	5	4	
usado	1	0	0	0	
rest	2	6	5	4	

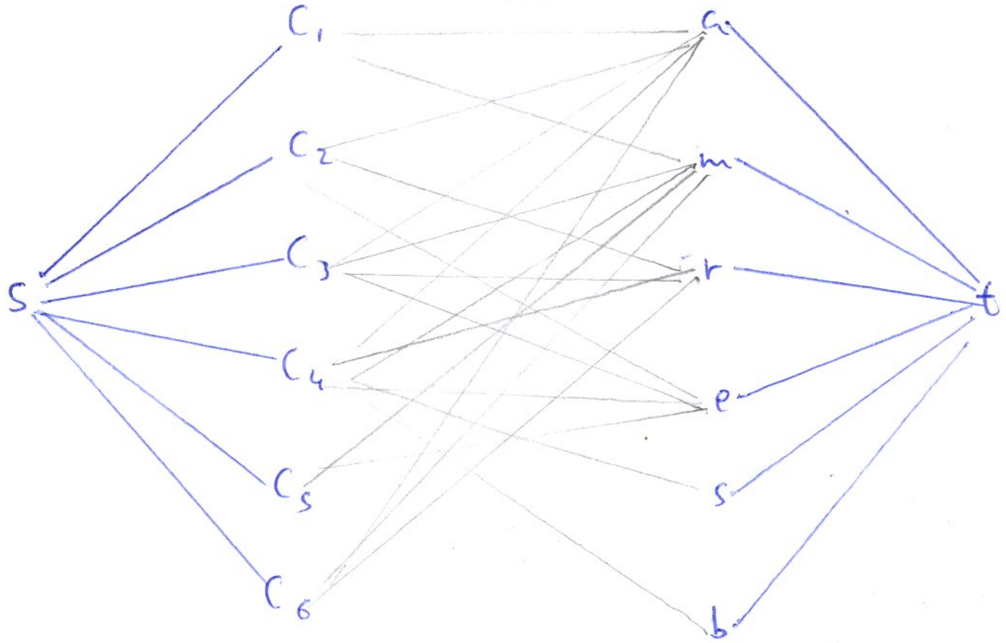
} $\alpha = 2$

	sb	sc	bc	bd	cd	ce	de	dg	ef	gf	ft	gt
f_3	4	3	0	4	1	2	0	5	2	0	2	5

Fin ya que sb y sc están a tope.

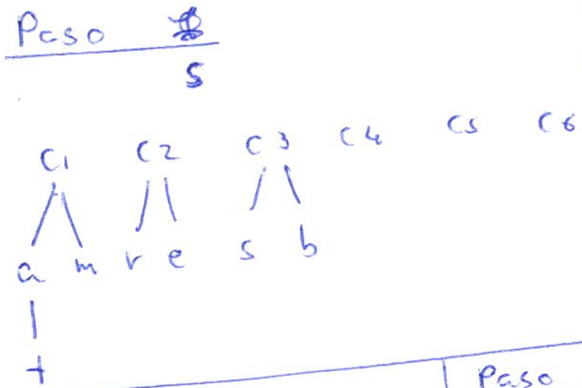
6.18 Cada comisión, un representante distinto.

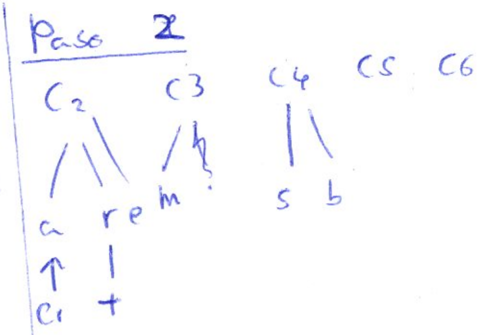
Mirar enunciado q. esto es un horror

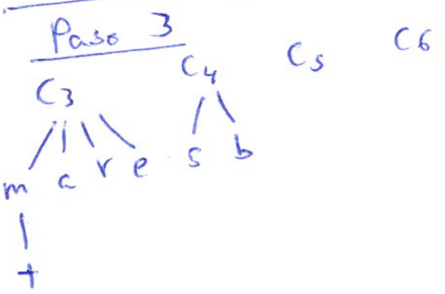


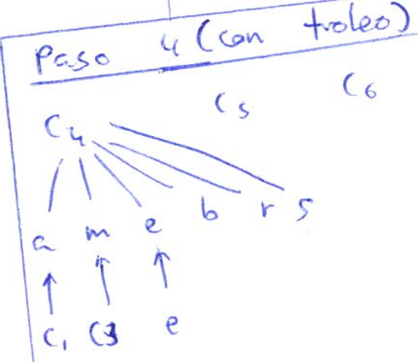
Aristas con flujo = 1

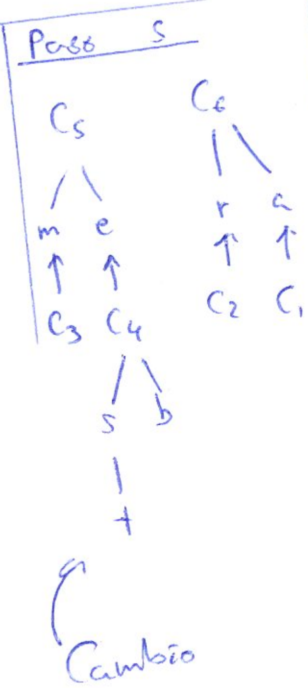
Paso	Arista
1	s-c1, C1-a, a-t
2	s-c2, c2-r, r-t
3	s-c3, c3-m, m-t
4	s-c4, ~~c4~~-e, e-t
5	s-c5, c5-e, c4-s, s-t

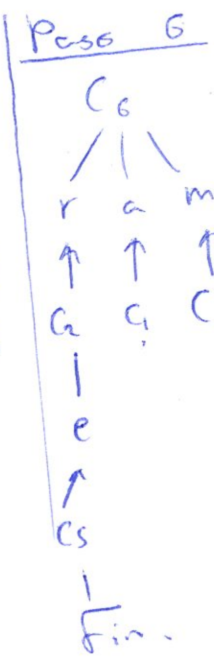








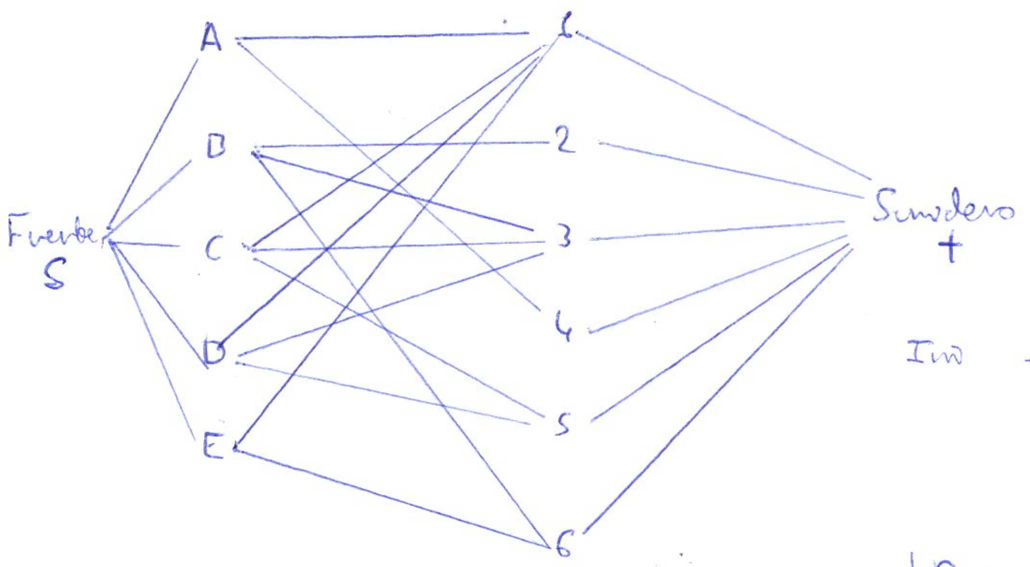




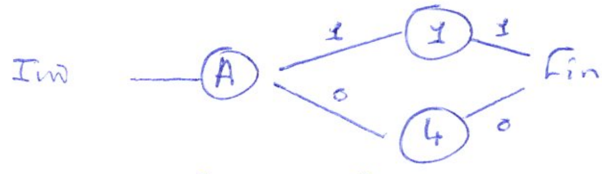
Nº emparejamientos = 5.

• Más coloración de grafos

6.36. Es un grafo dirigido ($\longrightarrow$)

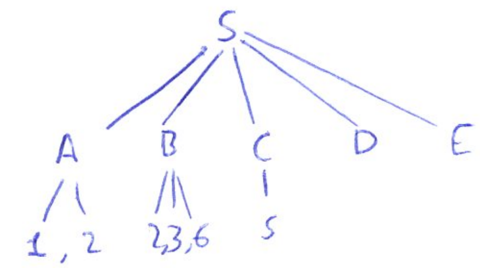


Trabajamos con capacidad 1 para todas las aristas.
Flujo ini = 0.
Si tomo 1, no tomo 0.



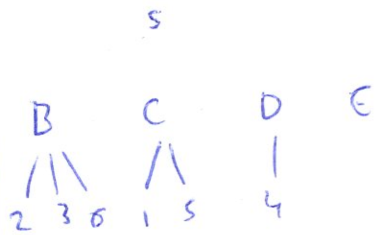
Empiezo A1.

Paso 0



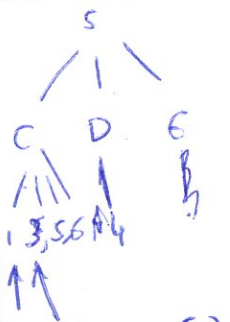
Toma A1

Paso 1



Tomo B2

Paso 3



A Tomo C3

Paso 4

D4

Paso 5

E6