- ~~Rel.~~ Rel. rec. lineales no homogéneas

Ejemplo

$$4.1.- a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)\overset{s}{3^n} \quad \text{para } n\geq 3 \quad \begin{vmatrix} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -3 \end{vmatrix}$$

① Sol. general a la homogénea asociada:

$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot n\cdot 2^n + C\cdot n^2\cdot 2^n$

Como s no es raíz, tendrá la forma: $(D + E\cdot n)3^n$

$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) s^n$

$a_n = (D + E\cdot n)\cdot 3^n$

$a_{n-1} = (D + E(n-1))3^{n-1}$

$a_{n-2} = (D + E(n-2))3^{n-2}$

$a_{n-3} = (D + E(n-\overset{?}{3}))3^{n-3}$

~~$a_{n-4} = (D+E(n$~~

$(D + En)\cdot 3^n = 6(D + E(n-1))\cdot 3^{n-1} - 12(D+E(n-2))\cdot 3^{n-2} + 8(D+E(n-3))\cdot 3^{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$

$= (6D + 6En - 6E)3^{n-1} + (-12D - 12En + 14E)3^{n-2} + (8D + 8En - 24E)\cdot 3^{n-3} + (1+n)3^n$

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = n^2$ para $n \geq 2$ $\quad \left| \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \end{array} \right.$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - n^2$

Sol. ec. car. $= t^2 - t - 2 = 0$; $t \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right\}$ Sol. $\{2^n, (-1)^n\} \Rightarrow A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$

Considero polinomio grado 2 $\Rightarrow a_n = \boxed{An^2 + Bn + C}$

$(An^2 + Bn + C) - (A(n-1)^2 + B(n-1) + C) - 2(A(n-2)^2 + B(n-2) + C) = n^2$

$(An^2 + Bn + C) - (An^2 + A - 2An + Bn - B + C) - 2(An^2 + 4A - 4An + Bn - 2B + C) = n^2$

$\cancel{An^2} + \cancel{Bn} + \cancel{C} \cancel{- An^2} - A + 2An \cancel{- Bn} + B \cancel{- C} - 2An^2 - 8A + 8An - 2Bn + 4B - 2C = n^2$

$(-2A)n^2 + (10A - 2B)n + (-9A + 5B - 2C) = n^2$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - n^2$

$An^2 + Bn + C = [A(n-1)^2 + B(n-1) + C] + 2[A(n-2)^2 + B(n-2) + C] - n^2$

$An^2 + Bn + C = [An^2 + A - 2An + Bn - B + C] + 2[An^2 + 4A - 4An + Bn - 2B + C] - n^2$

$An^2 + Bn + C = An^2 + A - 2An + Bn - B + C + 2An^2 + 8A - 8An + 2Bn - 4B + 2C - n^2$

$An^2 + Bn + C = [3A - 1]n^2 + [-10A + 3B]n + [9A - 5B + 3C]$

$A = 3A - 1 \Rightarrow -2A = -1$; $A = 1/2$

$B = -10A + 3B \Rightarrow 2B = -10A$; $B = -5A = -5/2$

$C = 9A - 5B + 3C$

$-2C = 9A - 5B = 9/2 - 25/4 = \frac{18}{4} - \frac{25}{4} = \frac{-7}{4}$ MAL

$+2C = -9A + 5B$
$+2B = +10A$
$+2A = +1$

$A = 1/2$,
$B = 5 \cdot 1/2 = 5/2$

$2C = -9 \cdot 1/2 + 5 \cdot 5/2 = -9/2 + 25/2 \Rightarrow C = 4$

$a_n = A \cdot 2^n + B(-1)^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 4$;

$a_0 = 0 \Rightarrow A + B - 4 = 0$
$a_1 \Rightarrow 2A - B - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 4 = 2$

$\left| \begin{array}{l} A + B = 4 \\ 2A - B = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 13/3 \\ B = -1/3 \end{array}$

$a_n = \frac{13}{3} 2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n - 4$

- Ejercicios Discretas - T1

① Construir tabla de verdad de $p \vee (q \wedge r)$ y $(p \vee q) \wedge r$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

② Tabla verdad $[p \wedge (p \to q)] \to q$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

③ Tabla $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow \bar{r} \to (p \to q)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$(p \to q)$	$\bar{r}$	$\bar{r} \to (p \to q)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1

④ ¿Es válido el arg.?

✗ $\boxed{1}$ $p \to q$
✗ $\boxed{2}$ $q \to (r \wedge s)$
$\boxed{3}$ $\bar{r} \vee (\bar{t} \vee u)$
✗ $\boxed{4}$ $p \wedge t$

$\therefore u$

① p | (simplif.)
② t | (simplif.)
③ $p \to (r \wedge s)$ | Silogismo
④ $r \wedge s$ | M. Ponens
⑤ r | simplif.
⑥ $\bar{t} \vee u$
⑦ u

⑤ ¿Es válido?

$\boxed{1}$ $(\bar{p} \vee \bar{q}) \to (r \wedge s)$
$\boxed{2}$ $r \to t$
$\boxed{3}$ $\bar{t}$

$\therefore p$

① $\bar{r}$ (M.Ponens)
② Como r es falso, $r \wedge s$ es falso.
③ $(\bar{p} \vee \bar{q})$: como $r \wedge s$ es falso, la prem. es falsa.
④ $p \wedge q$: De Morgan sobre ③
⑤ p : Simplif. de ④

⑥ ¿Válido?

$\boxed{1}$ $\bar{p} \leftrightarrow q$
$\boxed{2}$ $q \to r$
$\boxed{3}$ $\bar{r}$

$\therefore p$

~~① $(\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$~~
~~② $\bar{q}$ (M.Tollens)~~
~~③ $\bar{p} \wedge q$ no puede ser vdad, por tanto sólo puede serlo $p \wedge \bar{q}$.~~
~~④ p (Simplif.)~~

② $\bar{q}$ M.T.
③ $(\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$
④ Supongo que la ~~premisa~~ conclusión es cierta
⑤ $(\bar{p} \vee q) \to$ Falso! tenemos $\bar{q}$ y p. $\to$ Contradicción!
⑥ $(p \vee \bar{q}) \to$ Verdadero!
⑦ No es válido

1 Lógica

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \oplus q$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0
		pero sin embargo también incluso tanto como	o también o incluso o ... ... a no ser a menos que	implica entonces por lo tanto luego	si y sólo si siempre y cuando es equivalente	

- **Propiedades**

1. Conmutativa: $p \overset{\wedge}{\vee} q \equiv q \overset{\wedge}{\vee} p$
2. Asociativa: $p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\wedge}{\vee} r) \equiv p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\wedge}{\vee} r)$
3. Distributiva: $p \overset{\wedge}{\vee} (q \overset{\vee}{\wedge} r) \equiv (p \overset{\wedge}{\vee} q) \overset{\vee}{\wedge} (p \overset{\wedge}{\vee} r)$
4. Morgan: $\overline{(p \overset{\wedge}{\vee} q)} \equiv \bar{p} \overset{\vee}{\wedge} \bar{q}$
5. Absorción: $p \overset{\wedge}{\vee} (p \overset{\vee}{\wedge} q) \equiv p$

- **Equivalencias**

1. Definiciones:
   - $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$
   - $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$
   - $p \oplus q \equiv (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$
2. transformaciones:
   - $p \rightarrow (q \overset{\wedge}{\vee} r) \equiv (p \rightarrow q) \overset{\wedge}{\vee} (p \rightarrow r)$
   - $(p \overset{\wedge}{\vee} q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \overset{\vee}{\wedge} (q \rightarrow r)$
3. Negación a ambos lados
   - $p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$
   - $p \Leftrightarrow q \equiv \bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$
   - Nota: $p \vee q \equiv \bar{\bar{p}} \vee q \equiv \bar{p} \rightarrow q$

- **Demostración**

M. Ponens	M. Tollens	Silogismo	Sil. Disyunt.	Resolución
p	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \vee q$
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow s$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee r$
$\therefore q$	$\therefore \bar{p}$	$\therefore p \rightarrow s$	$\therefore q$	$\therefore q \vee r$

Biblia combinatoria

Al cambiar orden, ¿Mismo grupo?

- Sí: ¿Rep?
  - Sí: $CR_{m,n}$: $\frac{(m+n-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$
  - No: $C_{m,n}$ $\binom{m}{n} \Leftrightarrow \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$
- No: ¿Se usan todas? (opciones, elem,...)
  - Sí: ¿Rep?
    - Sí: $PR_{n,x,y,z}$: $\frac{n!}{x!\cdot y!\cdot z!}$
    - No: P_n : $n!$
  - No: ¿Rep?
    - Sí: $VR_{m,n}$: m^n
    - No: $V_{m,n}$ $\frac{m!}{(m-n)!}$

$P_c = \binom{m}{n}\cdot(n-1)!$

Tartaglia

$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$

```
         1
        1 1
       1 2 1
      1 3 3 1
     1 4 6 4 1
       . . .
```

≈

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\cdots$$

Bin. Newton

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 \pm \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \dots \pm \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

Ppio del Palomar

Tengo $K+1$ palomos y los meto en K cajas. Por lo tanto, existe una caja con 2 palomos.

G. Tengo N elementos y K cajas donde insertarlos. Al menos hay una caja con $\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil$ elementos. (redondeado para arriba)

Ejemplo: en un grupo de 367 personas, al menos 2 cumplen el mismo día.

Conjuntos

$|A|$ = Cardinal de A = nº elementos que pertenecen a A.

A = Conjunto que cumple una propiedad.

$A^c = X - A$ = Complementario de A; Conjunto de elementos que no cumplen A. (Todos elem. los que cumplen p).

Regla de la suma: Tarea 1 se puede hacer de m formas. Tarea 2 se puede hacer de n formas. No se pueden hacer ambas a la vez. } Se pueden hacer ambas tareas de $m+n$ formas.

Regla del producto. Un procedimiento se divide en 2 tareas. Tarea 1 puede tener m resultados. Tarea 2 puede tener n resultados. } El procedimiento se puede llevar a cabo de $m \cdot n$ formas.

$A \cap B$ = elementos que cumplen propiedad de A y propiedad de B. (Ambas a la vez)

$A \cup B = A + B - A \cap B$ = elementos que cumplen prop. A ó propiedad B. (No ambas a la vez)

Función generadora en partes de tamaño k

$$F(x) = (1 + x^1 + x^2 + x^3 \pm \dots x^n) \cdot (1 + (x^k)^1 + (x^k)^2 \pm \dots (x^k)^n) \cdot (1 + (x^{k'})^1 + (x^{k'})^2 \pm \dots (x^{k'})^{n'})$$

$p(n)$ = particiones de n. (nº de particiones)

$p(n \mid \text{propiedad})$ = particiones de n que verifica prop.

$p(n \mid \text{nº partes} \leq r) = p(n + r \mid \text{con exactamente } r \text{ partes})$

Ej. $p(3 \mid \text{nº partes} \leq 2) = p(3+2 \mid \text{exact. } 2 \text{ partes}) \begin{cases} 1+2, 3 \\ 3+2, 4+1 \end{cases}$

$$p(n \mid \text{cada parte de tam. } i) = \frac{1}{1-x^i}$$

$$p(n \mid \text{partes de tam. } i, j, k) = \frac{1}{1-x^i} \cdot \frac{1}{1-x^j} \cdot \frac{1}{1-x^k}$$

$$p(n \mid \text{cada parte de tam. } i \text{ aparece como máx. } k \text{ veces}) = \frac{1-x^{i(k+1)}}{1-x^i}$$

$$p(n \mid \text{partes pares}) = \frac{1}{1-x^{2k}} \quad ; \quad p(n \mid \text{partes imp.}) = \frac{1}{1-x^{2k+1}}$$

Cálculo de $p(n)$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = \dfrac{1}{1-x^i} \quad (\text{gen. } \{p(n)\} \\ Q(x) = (1-x)(1-x^2) \dots (1-x^n) \end{array}\right\} P(x)\,Q(x) = 1. \text{ Son inversas.}$$

$$1 = P(x)\,Q(x) = (1 + p(1)x + p(2)x^2 \pm \dots p(n)x^n)(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} \pm \dots)$$

Igualo coef.:

$0 = p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) \dots$

Por lo tanto:

$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) \dots$

$p(7) = p(6) + p(5) - p(2) - p(0)$

$p(7) = 11 + 7 \quad 2 - 1 = 18 - 3 = 15$

[redacted]

- F. Generadoras exponenciales: usadas cuando al escoger, el orden importa.

Formato

$x_1 + x_2 \pm x_n = r$ $\quad \left.\begin{matrix} a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ \dots \\ a_n \leq x_n \leq b_n \end{matrix}\right\}$ Buscar coef. de x^n en $G(x) = \left(\frac{x^{a_1}}{a_1!} + \frac{x^{a_1+1}}{a_1+1!} \pm \frac{x^{b_1}}{b_1!}\right) \dots \left(\frac{x^{a_n}}{a!} \pm \frac{x^{b_n}}{b_n!}\right)$

Buscar el coef. de $\frac{x^r}{r!}$

Conversiones

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \frac{x^{par}}{par!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} \pm \frac{x^{impar}}{impar!}$$

Nota: $x^r = \frac{r! \cdot x^r}{r!} = r! \cdot \frac{x^r}{r!}$

Nota 2: $\frac{x^r}{(r-1)!} = \frac{r \cdot x^r}{r \cdot (r-1)!} = r \cdot \frac{x^r}{r!}$

$$e^{3x} = \frac{(3x)^1}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} \pm \frac{(3x)^n}{n!}$$

- Ejemplo

Formar palabras de long. 4 con A, B, C, Al menos A debe aparecer 2 veces.
Como importa el orden (AABC ≠ BCAA), debo usar una F. Gen. Exponencial

Formato:

$l_a + l_b + l_c = 4 \left\{\begin{matrix} 2 \leq l_a \leq 4 \\ 0 \leq l_b, l_c \leq 2 \end{matrix}\right.$ $\Big\}\ x^{l_a} + x^{l_b} + x^{l_c} = x^4;$ $\Big\{$ Para cada solución, tendré $\frac{l_a + l_b + l_c}{l_a!\, l_b!\, l_c!}$ reordenaciones posibles.

$$F(x) \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)}_{a} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)}_{b} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)}_{c};$$

De cada una de estas series debo elegir un elemento, que multiplicado por los restantes a elegir debe ser cx^4. Aplico conversiones.

$$F(x) = \left(e^x - \frac{x^0}{0!} - \frac{x^1}{1!}\right) \cdot e^x \cdot e^x = (e^x - x - 1) \cdot e^{2x};$$ Sigo operando...

$F(x) = e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}$; Vuelvo a sustituir por las series de sumas infinitas.

$$F(x) = \left(1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} \pm \frac{(3x)^n}{n!}\right) - \left(1 + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} \pm \frac{(2x)^n}{n!}\right) - \left(x + \frac{x(2x)^1}{1!} + \frac{x(2x)^2}{2!} \pm \frac{x(2x)^n}{n!}\right)$$

Como debo buscar $r = 4$; Busco coef. de $\frac{x^4}{4!}$;

Solución $= \sum \frac{4!}{l_a! \cdot l_b! \cdot l_c!}$

$c_1 \Rightarrow n = 4;\ \frac{(3x)^4}{4!} = 81\ \frac{x^4}{4!};\ c_1 = 81$

$c_2 \Rightarrow n = 4;\ \frac{(2x)^4}{4!} = 16 \cdot \frac{x^4}{4!};\ c_2 = 16$

$c_3 \Rightarrow n = 3;\ \frac{x^1(2x)^3}{3!} \Rightarrow \frac{8x^4}{3!}$ $\Big\}$ Aplico nota 2 (ver arriba) $\Rightarrow \frac{8x^4}{3!} \cdot \frac{4}{4} = 8 \cdot 4 \cdot \frac{x^4}{4!} = 32\ \frac{x^4}{4!};\ c_3 = 32$

Nº total de reordenaciones para soluciones: $c_1 - c_2 - c_3 = 81 - 16 - 32 = 33$

Recordemos $F(x) = e^{3x} - xe^{2x} - e^{2x}$

F. Generadoras

1.- Conversiones

① $1 + z + z^2 \ldots z^m = \dfrac{1 - z^{m+1}}{1 - z}$

② $\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3} z^n = z^0 + z^1 + z^2 \ldots$

③ $\dfrac{1}{(1 - z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + m - 1}{n} z^n$

④ $1 + x + x^2 + \ldots x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Consideraciones

$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k \cdot \binom{k + n - 1}{k}$?

$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + n - 1}{k} x^k$ | $\binom{-n}{k} = \binom{k + n - 1}{k}$

Formato

$x_1 + x_2 + x_3 \ldots x_n = r$;
$a_1 \leq x_1 \leq b_1$
$a_2 \leq x_2 \leq b_2$
$\ldots$
$a_n \leq x_n \leq b_n$

① Ejemplo

Nº soluciones $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;
$2 \leq x_1 \leq 5$
$3 \leq x_2 \leq 6$
$4 \leq x_3$

$G(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \cdot (x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \cdot (x^4 + x^5 + \ldots x^n)$; Saco factor común:

$G(x) = x^2 \cdot (1 + x + x^2 + x^3) \cdot x^3 (1 + x + x^2 + x^3) \cdot x^4 \cdot (1 + x + x^2 + \ldots x^{n-4})$; combino fact. común y saco serie (Conv. ④)

$G(x) = x^9 \cdot (1 + x + x^2 + x^3)^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; Aplico ①, ②

$G(x) = x^9 \cdot \left(\dfrac{1 - x^4}{1 - x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{x^9 \cdot (1 - x)^2 \cdot 1}{(1 - x)^2 \cdot (1 - x)}$; Expando el polinomio:

$G(x) = x^9 \cdot (1 - 2x^4 + x^8) \cdot (1 - x)^{-3}$; Aplico consideración 2.

$G(x) = (x^9 - 2x^{13} + x^{17}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k + (3 - 1)}{k} \cdot x^k$; Cociente 15
$x^{15} = x^9 \cdot \underline{x^6}$ (a)
$x^{15} = x^{13} \cdot \underline{x^2}$ (b)

$C_{15a} \Rightarrow k = 6$; $1\, x^9 \cdot \binom{6 + 2}{6} x^6$
$C_{15b} \Rightarrow k = 2$; $-2x^{13} \cdot \binom{2 + 2}{2} x^2$

$C_{15} = \left[1 \cdot \binom{6 + 2}{6}\right] + \left[-2 \cdot \binom{2 + 2}{2}\right] = 16$ //

Particiones de un entero

Dado un número n, se puede expresar como K combinaciones de sumas de números $n_1 \dots n_k \leq n$

Ejemplo: particiones de 5:

$p_1 = 5$ | $p_4 = 2+2+1$
$p_2 = 3+1+1$ | $p_5 = 1+1+1+1+1$
$p_3 = 4+1$ | $p_6 = 3+2$
 | $p_7 = 2+1+1+1$

$K = 7$;
$p(5) = 7 \Rightarrow$ nº particiones de 5 = 7.
$p(n|P) \Rightarrow$ particiones de n que cumplen la propiedad P

Diagrama de Ferrer

Un D.d. Ferrer representa una partición concreta de un nº n, de mayor a menor. (+) ⇣ (−)

Ej. $p(18) = 7+5+4+1+1$;

Diagrama:

x x x x x x x
x x x x x
x x x x
x
x

$r_1 = 5$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $r_4 = 3$, $r_5 = 2$, $r_6 = 1$, $r_7 = 1$

r_c = nº de marcas en la columna c.

$p(n,k) \Rightarrow$ nº de particiones de n como suma de $\{1,2,3,\dots k\}$

$\hookrightarrow p(n,K) = p(n,K-1) + p(n-K,K)$

$p(n,1) = 1$ | $p(\emptyset) = 1$ (convenio).
$p(0,K) = \emptyset$

Por lo tanto, $p(n,k) = p(n,k-1) + p(n-k,k-1) + p(n-2k,k-1) \dots$

0   1
1   1 1
2   1 2 1
3   1 3 3 1
4   1 4 6 4 1
5   1 5 10 10 5 1

Rel. Recurrencia 1er orden

Forma general

$a_{n+1} = d\, a_n$; $n \geq 0$; $d = cte$; $a_0 = A$; Solución $= A \cdot d^n$; $n \geq 0$

- Ejemplo 1:

Para la sucesión 5, 15, 45, 135... podemos ver que $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ y $a_{n+1} = 3a_n$

Vemos que

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 5 \\ a_1 &= 15 = 3 \cdot a_0 \\ a_2 &= 45 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 3 \cdot a_0 \\ a_3 &= 135 = 3a_2 = 3 \cdot 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a_0 \end{aligned}\right\}$$

Vemos que $a_n = 3^n \cdot a_0$

$a_n = 3^n \cdot 5$

- Ejemplo 2: banco interés anual 6%. Deposito 1000€, ¿cuánto tengo en 1 año?

Interés mensual $= 0'06 / 12 = 0'0005$;

Vemos que $a_0 = 1000$;

$a_1 = a_0 + (a_0 \cdot \text{interés}) \Leftrightarrow$ primer mes

$a_2 = a_1 + (a_1 \cdot \text{interés}) \Leftrightarrow$ segundo mes

...

$a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} \cdot \text{interés}) \Leftrightarrow$ n mes $\Leftrightarrow a_n = 1'0005 \cdot a_{n-1}$; Buscando a_0 ...

$a_n = 1000 \cdot (1'0005)^n$; Para 1 año es $a_{12} = 1000 \cdot (1'0005)^n = 1061'68$

- Hallar rel. recurrencia de 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42...

$a_0 = 0$

$a_1 = 2 = a_0 + 2$

$a_2 = 6 = a_1 + 4$

$a_3 = 12 = a_2 + 6$

$a_4 = 20 = a_3 + 8$

...

$a_n = ? = a_{n-1} + 2n$;

Rel lineales homogéneas de orden k

Formato

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} \pm c_2 \cdot a_{n-2} \overset{\pm}{\cdots} c_k \cdot a_{n-k}\ ;\ n \geq k\ ; \quad \begin{matrix} a_0 = i \\ a_1 = j \\ \vdots \\ a_k = k \end{matrix}$$

① Encontrar ecuación característica: $r^x - c_1 \cdot r^{x-1} - c_2 \cdot r^{x-2} \ldots = 0;$

② Encontrar raíces (soluciones) de la ec. característica: Ojo con la multiplicidad.
- Si no es múltiplo (1 única sol. con mismo nº) $\Rightarrow R_1^n$
- Si hay multiplicidad (+ de una) $\Rightarrow R_1^n,\ n \cdot R_1^n,\ n^2 \cdot R_1^n$

③ Sol. general: $a_n = A \cdot R_1^n + B \cdot R_2^n \overset{+}{\cdots} Z \cdot R_k^n$

④ Sol especif. $\Rightarrow$ Sustituir por cond. iniciales y resolver sist. ecuaciones

Ejemplo 1:

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

① $r^2 - 5r + 6 = 0;\ r \begin{cases} 3 = R_1 \\ 2 = R_2 \end{cases}$ | ② Soluciones $\{3^n, 2^n\}$ | ③ S. Gen $\Rightarrow a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

④ Sol. específica:

$a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0$; $-2A - 2B = -2$

$a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1$; $2A + 3B = 0$

$B = -2$

~~$A = -B$,~~ $B = -2$, $A = 3$ $\Big\}$ $a_n = +3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

Ejemplo 2:

$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ para $n \geq 3$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$

① Ec. Car $= r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0;\ \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases}$ | ② Sol. $\{2^n, n \cdot 2^n, n^2 \cdot 2^n\}$

③ S. Gen $\Rightarrow a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

④ S. Específica:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + C \cdot 0^2 \cdot 2^0 \\ a_1 &= A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C \cdot 1^2 \cdot 2^1 \\ a_2 &= A \cdot 2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C \cdot 2^2 \cdot 2^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 1 &= A \\ 0 &= 2A + 2B + 2C \\ -4 &= 4A + 8B + 16C \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 0 \end{aligned} \Big\}\ a_n = 1 \cdot 2^n - 1 \cdot n \cdot 2^n + 0$$

Ejemplo 3:

$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3}$ para $n \geq 3$; $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -3$

① EC. $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$; ② Sol. ~~$\{1^n, (-4)^n\}$~~ $\{(-2)^n, n \cdot (-2)^n, 1^n\}$

③ S. Gen $\Rightarrow$ ~~$a_n = A \cdot 1^n + (-4)^n \cdot B$~~

$a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot n \cdot (-2)^n + C$

④ S. Especif.

~~$a_0 = A \cdot 1^0 + (-4)^0 \cdot B$~~ ~~$1 = A + B$~~

~~$a_1 = A \cdot 1^1 + (-4)^1 \cdot B$~~ ~~$0 = A - 4B$~~

~~$a_2 = A \cdot 1^2 + (-4)^2 \cdot B$~~ ~~$-3 = A + 16B$~~

$A =$

$B =$

$$\begin{aligned} a_0 &= A\,(-2)^0 + B \cdot 0\,(-2)^0 + C \\ a_1 &= A\,(-2)^1 + B \cdot 1\,(-2)^1 + C \\ a_2 &= A\,(-2)^2 + B \cdot 2\,(-2)^2 + C \end{aligned} \quad \begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A - 2B + C &= 0 \\ 4A + 8B + C &= -3 \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} A &= 8/9 \\ B &= -5/6 \\ C &= 1/9 \end{aligned}\right\} a_n = \frac{8}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}(-2)^n \cdot n + \frac{1}{9}$$

¿Siempre $n^s \cdot d^k$? $d \cdot d^k$

• Ej. $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$ (1)

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = -3$

(1) Sol. gen. homogénea:

$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0;\ r \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow$ Sol. $\{2^n, 2^n \cdot n, 2^n \cdot n^2\}$

Tenemos que la sol. gen. es $(A + B\cdot n + C\cdot n^2)\cdot 2^n$

(2) Busco sol. particular de la dada:

$F(n) = (1+1n)\cdot 3^n$; $s = 3$; Como s no es raíz de la ec. caract., busco sol particular de la forma $(p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^n$

Para hayarla, sustituyo esa forma en la ec. dada. (1)

$a_n = (p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^n$;
$a_{n-1} = (p_0 + p_1 (n-1))\cdot 3^{n-1}$;
$a_{n-2} = (p_0 + p_1 (n-2))\cdot 3^{n-2}$;
$a_{n-3} = (p_0 + p_1 (n-3))\cdot 3^{n-3}$;

$$(p_0 + p_1 \cdot n)\, 3^n = 6\cdot(p_0 + p_1\cdot(n-1))\cdot 3^{n-1} - 12(p_0 + p_1\cdot(n-2))3^{n-2} + 8\cdot(p_0 + p_1\cdot(n-3))\cdot 3^{n-3} + (1+n)\cdot 3^n$$

$ax + b = z x + j$

Divido la igualdad por 3^{n-3}: ~~para quitar~~

$$(p_0 + p_1 \cdot n)\cdot 3^3 = 6\cdot(p_0 + p_1\cdot(n-1))3^2 - 12(p_0 + p_1(n-2))3^1 + 8\cdot(p_0 + p_1(n-3))3^0 + (1+n)\cdot 3^3$$

Dos polinomios son iguales si sus coef. también lo son:

Coef. n: $(p_1 \cdot n)$:

$27 \cdot p_1 = [6\cdot 9 \cdot p_1] + [-12\cdot 3\cdot p_1] + [8 \cdot 1 \cdot p_1] + [27]$;

$27 p_1 = 54 p_1 - 36 p_1 + 8 p_1 + 27;\ p_1 \cdot (27 - 54 + 36 - 8) = 27;\ 1\cdot p_1 = 27;$ $\boxed{p_1 = 27}$

$\boxed{p_0 = -135}$

Coef. término indep.:

$27p_0 = [6\cdot 9 p_0] + [-12\cdot 3 \cdot p_0] + [8\cdot 1\cdot p_0] + [27] + [6\cdot 9\cdot(-1)\cdot p_1] + [-12\cdot 3\cdot(-2)\cdot p_1] + [8\cdot 1\cdot(-3)p_1]$

~~$p_0 \cdot (27 - 54 + 36 - 8) = 27;\ p_0 =$~~

$p_0 \cdot (27 - 54 + 36 - 8) = -1458 + 1944 + [-648] + 27$

$p_0 \cdot 1 = -135$

Forma $f(n) = [-135 + 27\cdot n]\cdot 3^n$

• Una vez tengo p_0 y p_1 busco:

A =

B =

C =

D =

E =

; $F(n) = [-135 + 27 \cdot n] \cdot 3^n$;

$H(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

Tendremos que $a_0 = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n + (-135 + 27n) \cdot 3^n$

Sust. por cond. ini:

$a_0 \Rightarrow 1 = A - 135$; $A = 136$;

$a_1 \Rightarrow 0 = 2A + 2B + 2C - (3 \cdot 135) + (3 \cdot 27)$

$a_2 \Rightarrow -3 = 4A + 8B + 16C - 1215 + 486$

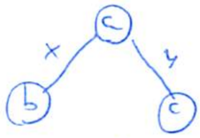
$A = 136$

$B = 117/4$

$C = -13/4$

Sol. $a_n = 136 \cdot 2^n + \frac{117}{4} \cdot n \cdot 2^n - \frac{13}{4} + (-135 + 27 \cdot n) \cdot 3^n$

Ejemplo: $G(\{a,b,c\},\{x,y\})$



$p(x) = \{b, a\}$

x es <u>incidente</u> con a, b

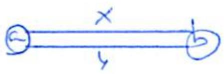
a, c son <u>adyacentes</u>

• Aprendiendo Grafos

① Terminología

$$G(V, E, p) \begin{cases} V: \text{conjunto de vértices } \{v_1, v_2 \dots v_n\} \\ E: \text{conjunto de aristas } \{a_1, a_2 \dots a_n\} \\ p: \text{app. de incidencia. } p(\text{arista}_1) = \{\text{nodoextremo}_1, \text{nodoextremo}_2\} \end{cases}$$

Aristas paralelas: inciden sobre los mismos nodos.



x, y son paralelas

Bucles: arista que solo incide en un nodo

$p(x) = \{a\}$

Grafo simple

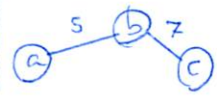
- No tiene bucles
- App. incidencia inyectiva

Grafo dirigido

Las aristas tienen extremo inicial y final.

Grafo etiquetado

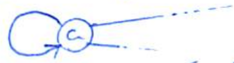
Las aristas tienen peso.



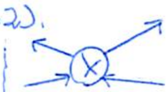
② Vértices

Grado de un vértice:

- Grafo no dirigido. nº de aristas que inciden en el. (Bucles x2).

  Ej.  $\delta(a) = 1 + 1 + \underbrace{2}_{\text{Bucle}} = 4$

- Grafo dirigido:
  - Grado entrada: aristas entrantes - $\delta^-(\text{nodo})$
  - Grado salida: aristas salientes $\delta^+(\text{nodo})$



$\delta^-(x) = 2$

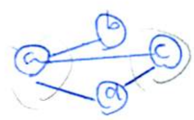
$\delta^+(x) = 2$

Características

① $\sum$ Grados de V's = 2 · nº de aristas $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |E|$

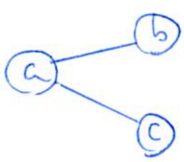
$\delta(a) + \delta(b) = 2 \cdot 1$

② El nº de vértices de grado impar es par.



③ nº aristas $= \sum \delta^+(v) = \sum \delta^-(v)$

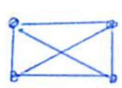
④ Un subgrafo de un grafo es una parte del grafo que es grafo por sí misma.



Grafo

Subgrafo

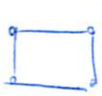
Grafo completo: grafo que posee exactamente 1 arista entre cada par de vértices.



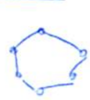
K_4

K_5

Grafo de n vértices: nº vértices = nº aristas.



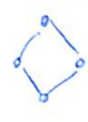
C_4

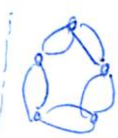


C_6

Grafo regular

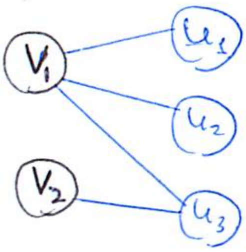
Aquel cuyos vértices tienen todos el mismo grado.



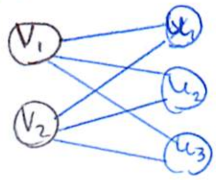


Grafo bipartido

Grafo con 2 conjuntos de vértices. Cada vértice de un conjunto se relaciona sólo con los del otro conjunto.

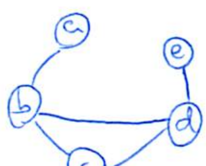


Si todos los vértices de un conjunto se relacionan con todos los vértices del otro, le llamamos completo. ($K_{m,n}$).



Lista de adyacencia

Representar el grafo señalando sus vértices adyacentes.

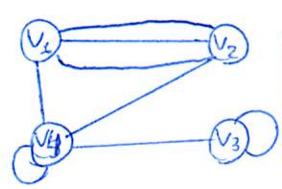


Vértice	Vértices adyacentes
a	b
b	c, d
c	b, d
d	b, c
e	d

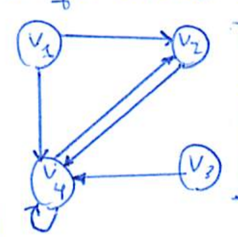
Matriz de adyacencia

Pues lo de antes pero con una matriz

- Si el grafo es no dirigido, es una matriz simétrica.
- Si el grafo es dirigido, se pone el nº de aristas que van de un vértice a otro.



$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ v_2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$



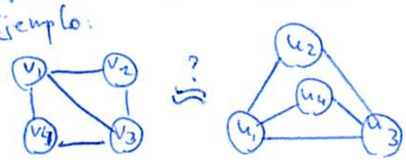
$$\begin{array}{c|cccc} a & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{de...} & & & & \end{array}$$

Grafos isomorfos

Dos grafos son isomorfos si aunque los dibujos diferentes los dibujos son equivalentes.

1. ¿Mismo nº vértices?
2. ¿Mismo nº aristas?
3. ¿Mismo nº grados?
4. Equivalencia. ☺

Ejemplo:



1. Mismo nº vértices: 4
2. Mismo nº aristas: 5
3. Mismo nº grados:

$\delta(v1) = 3$	$\delta(u_1) = 3$
$\delta(v2) = 2$	$\delta(u_2) = 2$
$\delta(v3) = 3$	$\delta(u_3) = 3$
$\delta(v4) = 2$	$\delta(u_4) = 2$

✓

Caminos

Un camino es una sucesión de aristas que conectan un vértice con otro.
↳ Longitud: nº de aristas que se atraviesan.

Circuito: empieza y acaba en el mismo vértice.

Caminos de long. k

$(\text{Matriz adyacencia})^k$ ⇒ Muestra cant. de caminos de long. k de un vértice a otro.

Conexión

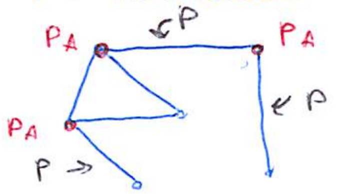
Un grafo es conexo si hay un camino entre cada par de vértices.

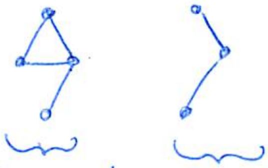
• Grafos conexos

G es conexo si todos los vértices están conectados.

Puente: arista que si se quita, deja de ser un grafo conexo.

Pto. articulación: vértice que si se quita, pasa a ser un grafo no conexo.



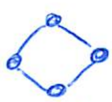


Componente conexa | Comp. conexa

Grafo no conexo.

• Grafo euleriano: se puede recorrer todos sus vértices sin pasar por la misma arista más de una vez: ciclo euleriano.

Ciclo euleriano:



Vértices de grado par. Bucle.

Camino de Euler

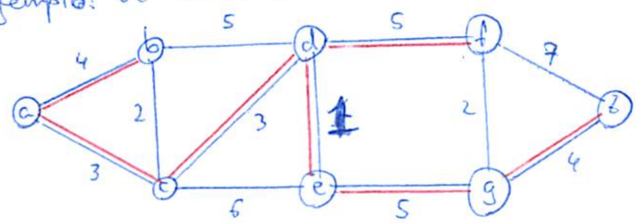
Nº vértices grado par: { 2, 0

Algoritmo de Dijkstra

Un grafo es ponderado si cada arista tiene un peso (coste).

Longitud: peso de todas las aristas del camino.

Ejemplo: de $a \rightarrow z$



Notación para Dijkstra

$S_n\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ = vértices a los que se ha llegado en paso n.

$L_n(v)$ = Coste de llegar a v en paso n.

$w(v_1, v_2)$ = peso de arista que une v_1 y v_2.

Paso 0:

$S_0\{\emptyset\}$

$L_0(a) = 0$

$L_0(\text{resto}) = \infty$

Añado a.

Paso 1:

$S_1 = \{a\}$

$L_1(b) = \min\{L_0(b), L_1(a) + w(a,b)\} = 4$

$L_1(c) = \min\{L_0(c), L_1(a) + w(a,c)\} = 3$

$L_1(\text{resto}) = \infty$

Tomo c.

Paso 2:

$S_2 = \{a, c\}$

$L_2(b) = \min\{L_1(b), L_1(c) + w(c,b)\} = \min\{4, 5\} = 4$

$L_2(d) = \min\{L_1(d), L_1(c) + w(c,d)\} = \min\{\infty, 6\} = 6$

$L_2(e) = \min\{L_1(e), L_1(c) + w(c,e)\} = \min\{\infty, 9\} = 9$

$L_2(\text{resto}) = \infty$

Tomo b.

Paso 3:

$S_3 = \{a, c, b\}$

$L_3(d) = \min\{L_2(d), L_2(b) + w(b,d), L_2(c) + w(c,d)\} = \min\{6, 9, 6\} = 6$

$L_3(e) = \min\{L_2(e), L_2(b) + w(b,e)\} = \min\{9, \infty\} = 9$

$L_3(\text{resto}) = \infty$

Tomo d.

Paso 4:

$S_4 = \{a, c, b, d\}$

$L_4(e) = \min\{L_3(e), L_3(d) + w(d,e)\} = \min\{9, 11\} = 7$

$L_4(f) = \min\{L_4(f), L_3(d) + w(d,f)\} = \min\{\infty, 11\} = 11$

$L_4(\text{resto}) = \infty$

Tomo e.

Paso 5:

$S_5 = \{a, c, b, d, e\}$

$L_5(f) = \min\{L_4(f), L_4(e) + w(e,f)\} = \min\{11, \infty\} = 11$

$L_5(g) = \min\{L_4(g), L_4(e) + w(e,g)\} = \min\{\infty, 12\} = 12$

$L_5(z) = \infty$

Tomo f.

Paso 6:

$S_6 = \{a, c, b, d, e, f\}$

$L_6(g) = \min\{L_5(g), L_5(f) + w(f,g)\} = \min\{12, 13\} = 12$

$L_6(z) = \min\{L_5(z), L_5(f) + w(f,z)\} = \min\{\infty, 11+7\} = 19$

Tomo g.

Paso 7

$S_7\{a, c, b, d, e, f, g\}$

$L_7(z) = \min\{L_6(z), L_6(g) + w(g, z)\} = \min\{19, 12+4\} = 16$

Tomo z.