Examen de Estructuras Discretas
Grado de Ingeniería Informática. Julio-2016

1. (**2 puntos**) Elegir a) o b), y c):

   a) Definir función generadora ordinaria y exponencial. Explicar, brevemente, en que tipo de problemas son útiles las funciones generadoras.

   b) Dar las definiciones de grafo y árbol.

      b1) ¿Si en un grafo el número de aristas es igual al número de vértices menos uno, el grafo en un árbol? Justificar la respuesta.

   c) Justificar por medio de las propiedades de las operaciones lógicas, si $p \oplus q$ es lógicamente equivalente a $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$.

2. (**2 puntos**) Responder a uno de los dos casos siguientes, es decir, a), incluidos a1 y a2, o b):

   a) Se considera el conjunto

   $$\{p_1, p_2, p_3, p_4, -p_5, -p_6, -p_7, -p_8, -p_9, -p_{10}\}$$

   siendo p_i números primos distintos entre sí.

      a_1) ¿Cuántas productos diferentes pueden obtenerse con 6 números distintos? ¿Y si los factores pueden repetirse?

      a_2) ¿En cada uno de los dos casos del apartado anterior, cuántos serán positivos?

   b) Hallar las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ que contengan a una de las sucesiones $123, 456, 789$.

3. (**2,5 puntos**) ¿De cuántas formas diferentes podemos repartir 16 tareas entre dos alumnos y dos alumnas, teniendo en cuenta que cada alumno debe desarrollar al menos una tarea y cada alumna al menos dos tareas? Resolver por los dos métodos vistos en clase, es decir, resolución de una ecuación entera y por medio de funciones generadoras.

4. (**2 puntos**) Se la relación de recurrencia no homogénea $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6n^2 + 26n - 25$ con las siguientes condiciones iniciales: $a_0 = 5$ y $a_1 = 1$.

5. (**1,5 puntos**) Dada la red de transporte que aparece en la página siguiente

   a) Calcular el flujo máximo desde el punto 1 al punto 7, aplicando el algoritmo correspondiente e indicando las sucesivas iteraciones.

   b) Calcular la capacidad del corte mínimo, indicando como se obtiene.

Observaciones:
1) Tiempo: de 15:00 a 18:00.
2) Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
3) No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.
4) Responder cada pregunta en folios independientes.

Soluciones de Examen de Estructuras Discretas

Grado de Ingeniería Informática. Julio-2016

1. (**2 puntos**) Elegir una de las siguientes opciones, es decir, a) o b):

   a) Definir función generadora ordinaria y exponencial.

   b) Dar las definiciones de grafo y árbol.

   b1) ¿Si en un grafo el número de aristas es igual al número de vértices menos uno, el grafo en un árbol? Justificar la respuesta.

   c) Justificar por medio de las propiedades de las operaciones lógicas, si $p \oplus q$ es lógicamente equivalente a $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$.

   Sol. $(p \bigoplus q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ (definición de $\bigoplus$)
   $\equiv (p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge (\sim q \vee (\sim p \wedge q))$ (distributividad)
   $\equiv ((p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)) \wedge ((\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q))$ (distributividad)
   $\equiv (1 \wedge (p \vee q)) \wedge ((\sim q \vee \sim p) \wedge 1)$ (leyes complementario)
   $\equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$ (leyes de identidad)
   $\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (conmutatividad)

2. (**2 puntos**) Responder a uno de los dos casos siguientes:

   a) Se considera el conjunto

   $$\{p_1, p_2, p_3, p_4, -p_5, -p_6, -p_7, -p_8, -p_9, -p_{10}\}$$

   siendo p_i números primos distintos entre sí.

   a_1) ¿Cuántas productos diferentes pueden obtenerse con 6 números distintos? ¿Y si los factores pueden repetirse?
   Sol. Con seis números diistintos pueden obtenerse $C_{10,6} = \binom{10}{6} = 210$ productos diferentes. Y si los factores pueden repetirse pueden obtenerse $CR_{10,6} = \binom{10+6-1}{6} = 5005$.

   a_2) ¿En cada uno de los dos casos del apartado anterior, cuántos serán positivos?
   Sol. En el primer caso del apartado anterior,serán positivos $\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{2} + \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{6} = 106$. En el segundo caso del apartado anterior, serán positivos

   $$CR_{4,6} + CR_{6,2}CR_{4,4} + CR_{6,4}CR_{4,2} + CR_{6,6} = \binom{9}{6} + \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} + \binom{11}{6} = 2541.$$

   b) Hallar las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ que contengan a una de las sucesiones 123, 456, 789.
   Sol. Sea

   $$A = \{\text{ permutaciones que contienen el } 123\} \Rightarrow \mid A \mid = 7 \cdot 6! = 7!$$

   $$B = \{\text{ permutaciones que contienen el } 456\} \Rightarrow \mid B \mid = 7 \cdot 6! = 7!$$

   $$C = \{\text{ permutaciones que contienen el } 789\} \Rightarrow \mid B \mid = 7 \cdot 6! = 7!$$

   Hay 7 posiciones para el primer dígito y quedan seis hueco libres para seis números

   $$A \bigcap B = \{\text{ permutaciones que contienen el } 123 \text{ y } 456\} \Rightarrow \Rightarrow \mid A \bigcap B \mid = 5!$$

   $$A \bigcap C = \{\text{ permutaciones que contienen el } 123 \text{ y } 789\} \Rightarrow \mid A \bigcap C \mid = 5!$$

   $$B \bigcap C = \{\text{ permutaciones que contienen el } 456 \text{ y } 789\} \Rightarrow \mid B \bigcap C \mid = 5!$$

   Los bloques de tres números actúan cada uno como un elemento y quedan tres huecos libres para tres elementos

   $$A \bigcap B \bigcap C = \{\text{ permutaciones que contienen el } 123, 456 \text{ y } 789\} \Rightarrow$$

$$| A \bigcap B \bigcap C |= 3!$$

Los bloques 123, 456 y 789 actúan cada uno como un elemento, entonces

$$| A \bigcup B \bigcup C |= 3 \cdot 7! - 3 \cdot 5! + 3! = 14766.$$

3. (**2,5 puntos**) ¿De cuántas formas diferentes podemos repartir 16 tareas entre dos alumnos y dos alumnas, teniendo en cuenta que cada alumno debe desarrollar al menos una tarea y cada alumna al menos dos tareas?

   Sol. La ecuación entera asociada a la solución es $x_1+x_2+x_3+x_4 = 16$ con $x_1, x_2 \geq 1$ y $x_3, x_4 \geq 2$. De ella se obtiene la siguiente ecuación $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10$ con $y_i \geq 0$ e $i = 1, 2, 3, 4$. Donde $y_1 = x_1+1$, $y_2 = x_2+1$, $y_3 = x_3+2$ y $y_4 = x_4+2$. El Â´nmero de soluciones de las dos ecuaciones coincide y, considerando la segunda ecuación, coincide con $CR_{10,4} = \binom{10+4-1}{10}$.

   O bien a través de la siguiente función generadora que permite encontrar la solución

   $$F(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^2(x^2 + x^3 + \ldots)^2$$

   La solución es el coeficiente de x^{16}, es decir,

   $$F(x) = (x + x^2 + x^3 + \ldots)^2(x^2 + x^3 + \ldots)^2 = x^2(1 + x + \ldots)^2 \cdot x^4(1 + x + \ldots)^2 =$$

   $= x^6(1 + x + \ldots)^4$. Y la solución es el coeficiente de x^{16} de $F(x)$ o del coeficiente de x^{10} de $(1 + x + \ldots)^4 = (1 - x)^{-4}$, que según el binomio de exponente negativo es $\binom{10+4-1}{10}$.

4. (**2 puntos**) Se la relación de recurrencia no homogénea $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6n^2 + 26n - 25$ con las siguientes condiciones iniciales: $a_0 = 5$ y $a_1 = 1$

   Sol. La ecuación característica es $r^2 - r - 6 = 0$ con raíces -2 y 3. La solución de la relación homogénea asociada es $a_n = A(-2)^n + B3^n$. La solución particular es de la forma $a_n^p = b_2 \cdot n^2 + b_1 \cdot n + b_0$ que sustituyendola en la relación de recurrencia nos proporciona $b_2 = 1, b_1 = 0, b_0 = 0$. Por tanto,la solución general es de la forma $a_n = A(-2)^n + B3^n + n^2$ y considerando las condiciones iniciales se obtiene el siguiente sistema: $a_0 = 5 = A+B$, $a_1 = 1-2A+3B+1$, de donde $A = 3, B = 2$. Por tanto, la solución general es $a_n = 3(-2)^n + 2 \cdot 3^n + n^2$.

5. (**1,5 puntos**) Dada la red de transporte de la figura

   a) Calcular el flujo máximo desde el punto 1 al punto 7, aplicando el algoritmo correspondiente e indicando las sucesivas iteraciones.

   b) Calcular la capacidad del corte mínimo, indicando como se obtiene.