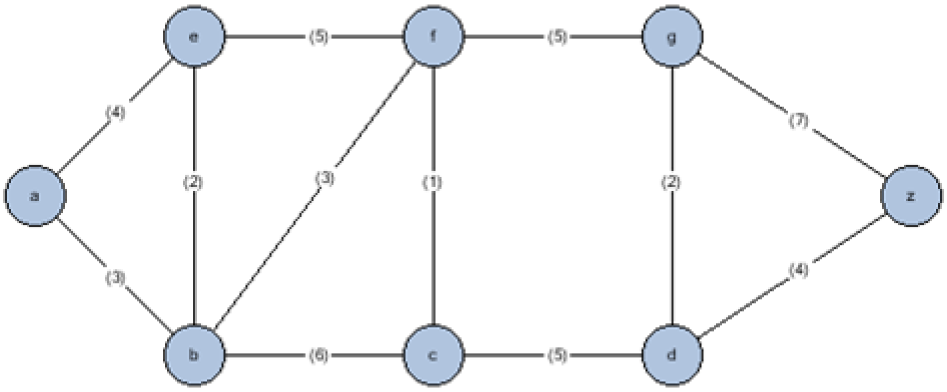
16.- Para los grafos ponderados de la siguiente figura encontrar, utilizando el algoritmo de Dijkstra, la distancia mínima entre el vértice entre a y z y un camino de longitud mínima entre a y z.



Ruta de distancia mínima de *a* a *z*

Paso 0: $S_0 = \varnothing$, $L_0(a) = 0$, $C_0(a) = \varnothing$, L_0(los demás) $= \infty$, C_0(los demás) $= \varnothing$,

Paso 1: $S_1 = \{a\}$,
$L_1(v) =$ mín $\{ L_0(v), L_0(a) + w(a,v) \}$
$L_1(e) =$ mín $\{ L_0(e), L_0(a) + w(a,e) \} =$ min $\{\infty, 4\} = 4$, etiqueta de e: 4(a)
$L_1(b) =$ mín $\{ L_0(b), L_0(a) + w(a,b) \} =$ min $\{\infty, 3\} = 3$,etiqueta de b: 3(a)
$L_1(f) =$ mín $\{ L_0(f), L_0(a) + w(a,f) \} =$ min $\{\infty, \infty\} = \infty$,
$L_1(c) = L_1(g) = L_1(d) = L_1(z) = \infty$ Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso b

Paso 2: $S_2 = \{a, b\}$,
$L_2(v) =$ mín $\{ L_1(v), L_1(b) + w(b,v) \}$
$L_2(e) =$ mín $\{ L_1(e), L_1(b) + w(b,e) \} =$ min $\{4, 3+2\} = 4$, etiqueta de e: 4(a)
(el mínimo se obtiene con el anterior)
$L_2(f) =$ mín $\{ L_1(f), L_1(b) + w(b,f) \} =$ min $\{\infty, 3+3\} = 6$, etiqueta de A: 6(a,b)
(el mínimo se obtiene pasando por b, añadir b al camino mínimo fijado anteriormente)
$L_2(c) =$ mín $\{ L_1(c), L_1(b) + w(b,c) \} =$ min $\{\infty, 3+6\} = 9$, etiqueta de Y: 9(a,b)
(añadir b al camino fijado en el paso anterior)
$L_2(g) =$ mín $\{ L_1(g), L_1(b) + w(b,g) \} =$ min $\{\infty, 3+\infty\} = \infty$
$L_2(d) = L_2(z) = \infty$
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso e

Paso 3: $S_2 = \{a, b, e\}$,
$L_3(v) =$ mín $\{ L_2(v), L_2(e) + w(e,v) \}$
$L_3(f) =$ mín $\{ L_2(f), L_2(e) + w(e,f)\} =$ min $\{6, 4+5\} = 6$, etiqueta de W: 6(a,b)
(camino anterior)
$L_3(c) =$ mín $\{ L_2(c), L_2(e) + w(e,c) \} =$ min $\{9, 4+\infty\} = 9$, etiqueta de Y: 9(a,b)
(camino anterior)
$L_3(g) =$ mín $\{ L_2(g), L_2(e) + w(e,g) \} =$ min $\{\infty, 4+\infty\} = \infty$,
$L_2(d) = L_2(z) = \infty$
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso f

Paso 4: S_4= {a, b, e, f},
$L_4(v) = \text{mín} \{ L_3(v), L_3(f) + w(v,f) \}$
$L_4(c) = \text{mín} \{ L_3(c), L_3(f) + w(f,c) \} = \min \{9, 6+1\} = 7$, etiqueta de c: 7(a,b,f)
(añadir f al camino anterior)
$L_4(g) = \text{mín} \{ L_3(g), L_3(f) + w(f,g) \} = \min \{\infty,6+5\}=11$(a,b,f),
(añadir f al camino anterior)
$L_2(d) = L_2(z) =\infty$

Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso c

Paso 5: S_5= {a, b, e, f, c},
$L_5(v) = \text{mín} \{ L_4(v), L_4(c) + w(c,v) \}$
$L_5(d) = \text{mín} \{ L_4(d), L_4(c) + w(c,d) \} = \min \{\infty, 7+5\} = 12$, etiqueta de d: 12(a,b,f,c)
(añadir c al camino fijado antes)
$L_5(g) = \text{mín} \{ L_4(g), L_4(c) + w(c,g) \} = \min \{11, 7+ \infty\}=11$, etiqueta de g: 11(a,b,f)
(camino anterior)
$L_5(z) = \text{mín} \{ L_4(z), L_4(c) + w(c,z) \} = \min \{\infty, 7+ \infty\}=\infty$,
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso g

Paso 6: S_6= {a, b, e, f, c, g},
$L_6(v) = \text{mín} \{ L_5(v), L_5(g) + w(g,v) \}$
$L_6(d) = \text{mín} \{ L_5(d), L_5(g) + w(g,d) \} = \min \{12, 11+12\} = 12$, etiqueta de d: 12(a,b,f,c)
(camino anterior)
$L_6(z) = \text{mín} \{ L_5(z), L_5(g) + w(g,z) \} = \min \{\infty, 11+7\} = 18$, etiqueta de z: 18(a,b,f,g)
(añadir g al camino fijado antes)
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso d

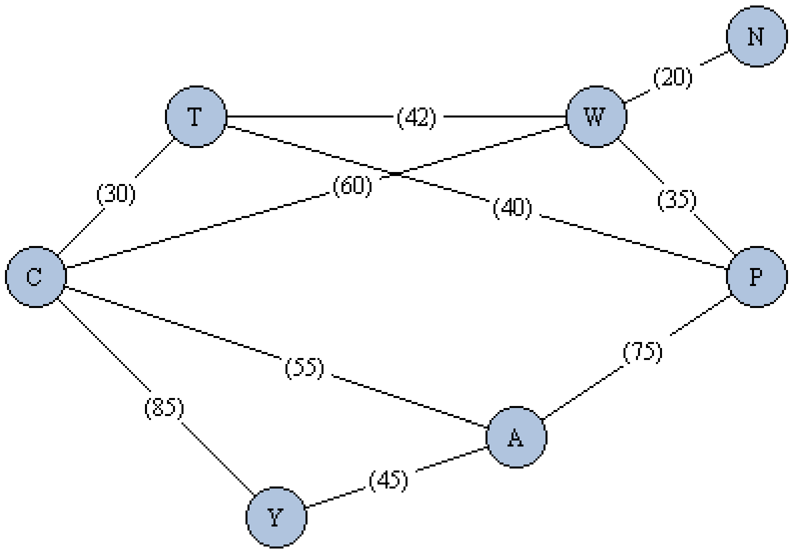
Paso 7: S_7= {a, b, e, f, c, g, d},
$L_7(v) = \text{mín} \{ L_6(v), L_6(d) + w(d,v) \}$
$L_7(z) = \text{mín} \{ L_6(z), L_6(d) + w(d,z) \} = \min \{18, 12+4\} = 16$, etiqueta de z: 16(a,b,f,c,d)
(añadir d al camino fijado antes)

Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso z.
S_8= {a, b, e, f, c, g, d,z},

Al incluir z en el conjunto distinguido de vértices el algoritmo termina.
El camino a seguir viene dado por la etiqueta de z: 16(a,b,f,c,d)
El camino mínimo se obtiene siguiendo las aristas a-b-f-c-d-z y su longitud es 16

Observación: el camino mínimo de a hasta g terminaría en el paso 6, la etiqueta de g al añadirlo al conjunto distinguido es 11(a,b,f), el camino mínimo de a hasta g tiene longitud 11 y es a-b-f-g

17.- El siguiente grafo representa un mapa de carreteras. Encontrar la distancia mínima y un camino de longitud mínima entre distintas ciudades.



Ruta de distancia mínima de N a C

Paso 0: $S_0= \varnothing$, $L_0(N) = 0$, $C_0(N) =\varnothing$, L_0(los demás) = ∞, C_0(los demás) =$\varnothing$,

Paso 1: $S_1= \{C\}$,
$L_1(V) =$ mín { $L_0(V)$, $L_0(C) + w(C,V)$ }
$L_1(T) =$ mín { $L_0(T)$, $L_0(C) + w(C,T)$ } = min {∞, 30} = 30, etiqueta de T: 30(C)
$L_1(W) =$ mín { $L_0(W)$, $L_0(C) + w(C,W)$ } = min {∞, 60} = 60, etiqueta de W: 60(C)
$L_1(A) =$ mín { $L_0(A)$, $L_0(C) + w(C,A)$ } = min {∞, 55} = 55, etiqueta de A: 55(C)
$L_1(Y) =$ mín { $L_0(Y)$, $L_0(C) + w(C,Y)$ } = min {∞, 85} = 85, etiqueta de Y: 85(C)
$L_1(P) = L_1(N) = L_1(W) =\infty$
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso T

Paso 2: $S_2= \{C, T\}$,
$L_2(V) =$ mín { $L_1(V)$, $L_1(T) + w(T,V)$ }
$L_2(W) =$ mín { $L_1(W)$, $L_1(T) + w(T,W)$ } = min {60,30+42} = 60, etiqueta de W: 60(C)
$L_2(A) =$ mín { $L_1(A)$, $L_1(T) + w(T,A)$ } = min {55, 30+∞}= 55, etiqueta de A: 55(C)
$L_2(Y) =$ mín { $L_1(Y)$, $L_1(T) + w(T,Y)$ } = min {85, 30+∞} = 85, etiqueta de Y: 85(C)
$L_2(P) =$ mín { $L_1(P)$, $L_1(T) + w(T,P)$ } = min {∞,30+40}=70, etiqueta de P: 70(C,T)
$L_2(N) =\infty$
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso A

Paso 3: $S_2= \{C, T, A\}$,
$L_3(V) =$ mín { $L_2(V)$, $L_2(A) + w(A,V)$ }
$L_3(W) =$ mín { $L_2(W)$, $L_2(A) + w(A,W)$} = min {60,55+∞} = 60, etiqueta de W: 60(C)
$L_3(Y) =$ mín { $L_2(Y)$, $L_2(A) + w(A,Y)$ } = min {85, 55+45} = 85, etiqueta de Y: 85(C)
$L_3(P) =$ mín { $L_2(P)$, $L_2(A) + w(A,P)$ } = min {70,55+75}=70, etiqueta de P: 70(C,T)
$L_3(N) =\infty$
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso W

Paso 4: $S_4= \{C, T, A,W\}$,
$L_4(V) =$ mín { $L_3(V)$, $L_3(W) + w(W,V)$ }
$L_4(Y) =$ mín { $L_3(Y)$, $L_3(W) + w(W,Y)$ } = min {85, 60+∞} = 85, etiqueta de Y: 85(C)

$L_4(P)$ = mín { $L_3(P)$, $L_3(W)$ + w(W,P) } = min {70,60+35}=70, etiqueta de P: 70(C,T)
$L_4(N)$ = mín { $L_3(N)$, $L_3(W)$ + w(W,N) } = min {∞,60+20}=80, etiqueta de P: 80(C,W)
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso P

Paso 5: S_5= {C, T, A, W, P},
$L_5(V)$ = mín { $L_4(V)$, $L_4(P)$ + w(P,V) }
$L_5(Y)$ = mín { $L_4(Y)$, $L_4(P)$ + w(P,Y) } = min {85, 70+∞} = 85, etiqueta de Y: 85(C)
$L_5(N)$ = mín { $L_4(N)$, $L_4(P)$ + w(P,N) } = min {80,70+ ∞ }=80, etiqueta de N: 80(C,W)
Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso N

Paso 6: S_6= {C, T, A,W, P, N}
Al incluir N en el conjunto distinguido de vértices el algoritmo termina.
El camino a seguir viene dado por la etiqueta de N: 80(C, T)
El camino mínimo se obtiene siguiendo las aristas C-W-N y su longitud es 80

22.- Sea T un árbol binario con n vértices que sólo contiene vértices de grados 1 y 3.
Demostrar que el número de vértices de grado 3 es (n − 2)/2.

Sea p = número de vértices de grado 3, n-p es el número de vértices de grado 1
Si tiene n vértices, el número de aristas es n-1
2(n-1) = 2*nº aristas = $\sum_{v\in V} grado(v) = \sum_{v\in Vg1} grado(v) + \sum_{v\in Vg3} grado(v)$ =

$= \sum_{v\in Vg1} 3 + \sum_{v\in Vg3} 1$ = 3*p + 1(n-p)
2(n-1) = 2p+n , p = (n-2)/2

23.- Un árbol m−ario se dice completo si todos sus vértices internos tienen exactamente m vértices hijos. Sea T un árbol binario completo con n vértices.
a) Demostrar que n es impar.
b) Demostrar que el número de vértices de grado 1 es (n + 1)/2.
c) Encontrar el número de vértices de cada grado posible.

a) Si tiene k niveles el número de vértices es igual a $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k$, y este número es impar.
b) Los vértices de grado 1 son las hojas, que los vértices del último nivel, hay 2^k.
   Por tanto: $n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = \frac{1-2^{k+1}}{1-2} = 2^{k+1} - 1$,
   $n+1 = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$, el número de hojas es $2^k = \frac{(n+1)}{2}$
c) Hay un vértice de grado 2, el vértice raíz.
   Hay vértices de grado 3, los que no son raíz ni hojas.
   De grado 3 hay $2 + 2^2 + \ldots + 2^k = \frac{2-2^{k+1}}{1-2} = 2(2^k - 1)$