- Apuntes Matemáticas Avanzadas - UAH

(1) Aritmética entera

(1) Teoría de conjuntos

Un conjunto A contiene n elementos $a_1, a_2 \dots a_n$: $A\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Un subconjunto R contiene elementos de un conjunto A relacionado con un conjunto B: $R = A \times B$

$R\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots (a_n, b_n)\}$

(2) Relaciones: propiedades

- Reflexiva: $\exists\ a \in A \Rightarrow \exists\ (a,a) \in R$
- Simétrica: $\exists\ a, b \in A \Rightarrow (a,b), (b,a) \in R$
- Antisimétrica:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ a, b \in A \\ \exists\ (a,b) \in R \\ a \neq b \end{array}\right\} \nexists\ (b,a) \in R$$

- Transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\ a, b, c \in A \\ \exists\ (a,b) \in R \\ \exists\ (b,c) \in R \end{array}\right\} \exists\ (a,c) \in R$$

Relación de orden: conjunto que cumple propiedades:
- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva

(3) Divisibilidad

Un nº a divide a un nº b si existe x tal que $a \cdot x = b$ ($a \mid b$ si $\exists\, x$ tq. $ax = b$)

- Propiedades
  - $a \mid a$: $5/5$
  - $\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid c \end{array}\right\} a \mid c$: $\left.\begin{array}{l} 5 \mid 10 \\ 10 \mid 20 \end{array}\right\} 5 \mid 20$
  - $a \mid b \Rightarrow a \leq b$: $5 \mid 10 \Rightarrow 5 \leq 10$
  - $\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid a \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = b \\ \text{ó} \\ a = -b \end{array}$

(4) División euclídea

Sea d = divisor y D = dividendo, q = Cociente y r = resto.

$d \mid D$: $D = d \cdot q + r$

Ej. 1: $33 = 2 \cdot 15 + 3$

Ej. 2: $-7 = 2 \cdot (-4) + 1$

5. Máximo común divisor

Se define como mcd a aquel nº más alto que divide a 2 nºs.

- Propiedades
  - $mcd(a, \emptyset) = a$.
  - $mcd(a, b, c) = mcd(mcd(a,b), c)$
- Dos nºs son coprimos entre sí si su mcd $= 1$: $mcd(25, 36) = 1$. $\Big\}$ 25 y 36 son coprimos entre sí.

6. Algoritmo de Euclides

Permite calcular el $mcd(n1, n2)$.

Técnica: $mcd(a, b) = mcd(b, (a \% b))$ para $a > b$.

7. Teorema de Bezout

$mcd(a, b) = ax + by$. $(x, y) \rightarrow$ nºs de Bezout.

8. Interpretación matricial

Técnica: ir restando la columna menor a la columna mayor hasta que salga 0.

Ejemplo: $mcd(25, 36)$

$$\begin{pmatrix} 36 & 25 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -9 \\ -10 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 25 & \boxed{-9} \\ -36 & \boxed{13} \end{pmatrix} \Bigg\}$$

mcd = 1
nº Bezout = −9 y 13

9. Th. fundamental de la aritmética

Un nº p es primo si sus únicos divisores son 1 y p.

Existen infinitos nº's primos.

Todo entero es producto de nº's primos: $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$

Ejemplo: $8 = 2^3$; $15 = 3^1 \cdot 5^1$ ...

10. Mínimo común múltiplo

Múltiplo común a a y b más cercano a 0.

$mcm(a, b) = c \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$ $\Big\}$ Comunes y no comunes al mayor exponente.

$\Big\}$ $mcm(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{mcd(a,b)}$

11. Ecuación diofántica

$ax + by = c$

Buscamos soluciones enteras para x e y. Resolución

1. Hallar $mcd(a, b)$ con interpret. matricial.
2. Comprobar que $mcd(a,b) \mid c$. Si falso, no tiene solución.
3. Solución

$$\underbrace{\begin{cases} x = \underbrace{x_1 \cdot \dfrac{c}{mcd(a,b)}}_{\text{Solución particular}} + x_2 \cdot t \\ y = y_1 \cdot \dfrac{c}{mcd(a,b)} + x_2 \cdot t \end{cases}}_{\text{Solución general}} \quad \begin{pmatrix} mcd & \emptyset \\ x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios T1 Mates Avanzadas

1 Hallar mcd (180, 146) por el método de división euclídea

$180/146 = 1\cdot 146 + 34$; $mcd(180,146) = mcd(146,34)$

$146/34 = 4\cdot 34 + 10$; $mcd(146,34) = mcd(34,10)$

$34/10 = 3\cdot 10 + 4$; $mcd(34,10) = mcd(10,4)$

$10/4 = 2\cdot 4 + 2$; $mcd(10,4) = mcd(4,2)$

$4/2 = 2\cdot 2 + 0$; $mcd(4,2) = mcd(2,0) = 2$.

2 mcd (12, 15)

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$mcd(15,12) = 3$

Nº Bezout = 1 y -1.

3 mcd (12, 5)

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$$

mcd = 1

Nº Bezout = -2 y 5.

4 mcd (6, 8, 12)

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$mcd(6,8,12) = 2$

Nº Bezout $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$

5 mcd(120, 146, 180)

$$\begin{pmatrix} 180 & 146 & 120 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 60 & 26 & 120 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 26 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 17 & -4 \\ -4 & -20 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 15 & -10 \\ -4 & -16 & 17 \end{pmatrix}$$

mcd = 2

Nº Bezout = {1, 2, -4}

6 Demostrar q. hay infinitos nº's primos

1. Supongo que los primos son finitos.
2. $N = \Sigma$. todos los primos + 1. ; $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$.
3. p_1 divide a N, por lo que p_1 divide a 1.
4. Ningún nº divide a 1, por lo tanto hay infinitos nº's primos.

Y tú te lo crees porque lo digo yo.

7 Resolver ec. diofántica: $213x - 1123y = 18$.

① $$\begin{pmatrix}1123 & 213\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}58 & 213\\ 1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}58 & 39\\ 1 & -3\\ -5 & 16\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}19 & 39\\ 4 & -3\\ -21 & 16\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}19 & 1\\ 4 & -11\\ -21 & 58\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1\\ 213 & -11\\ -1123 & 58\end{pmatrix}$$

mcd = 1
Nº Bezout: $\begin{cases}-11\\ 58\end{cases}$

② $mcd(213, 1123) \mid 18$? $\Rightarrow 1 \mid 18$? → Si. ✓ Tiene solución.

③ Solución $\begin{cases} x = x_1 \cdot \dfrac{c}{mcd} + x_2 \cdot t \\ y = y_1 \cdot \dfrac{c}{mcd} - y_2 \cdot t \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 & mcd \\ x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \cdot \dfrac{18}{1} - 213t = -198 - 213t \\ x = 58 \cdot \dfrac{18}{1} + 1123t = 1044 + 1123t \end{cases} t \in \mathbb{Z}$

8 Resolver ec. diofántica: $15x + 40y = 1000$

① $$\begin{pmatrix}15 & 40\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}15 & 10\\ 1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5 & 10\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5 & 0\\ 3 & -8\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

② $mcd(15, 40) \mid 1000$? → $5 \mid 1000$? → Si, tiene solución.

③ Sol. $\begin{cases} x = 3 \cdot \dfrac{1000}{5} + 8t = 600 + 8t \\ y = -1 \cdot \dfrac{1000}{5} - 3t = -200 - 3t \end{cases}$

9 Resolver ec. diofántica $2x + 4y + 7z = 5$

① $$\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 7 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

② $1 \mid 5$? → Si, tiene solución.

③ $$\begin{aligned} x &= -3 \cdot \tfrac{5}{1} + 2t_1 - 7t_2 \\ y &= 0 \cdot \tfrac{5}{1} - 1t_1 + 0t_2 \\ z &= 1 \cdot \tfrac{5}{1} + 0t_1 + 2t_2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= -15 + 2t_1 - 7t_2 \\ y &= 0 - 1t_1 \\ z &= 5 + 2t_2 \end{aligned}$$

10 Resolver ec. diofántica: $2200x + 1221y - 2332z + 101101t = 22$

① $$\begin{pmatrix}2200 & 1221 & 2332 & 101101\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}979 & 1221 & 1111 & 979\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & -82\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}979 & 242 & 132 & 0\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0 & -81\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}55 & 110 & 132 & 0\\ 8 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0 & -81\\ -7 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}55 & 0 & 22 & 0\\ 8 & -16 & -17 & -1\\ -1 & 4 & 2 & -81\\ -7 & 13 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}11 & 0 & 22 & 0\\ 40 & -16 & -17 & -1\\ -5 & 4 & 2 & -81\\ -37 & 13 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}11 & 0 & 0 & 0\\ 40 & -16 & -97 & -1\\ -5 & 4 & 12 & -81\\ -37 & 13 & 89 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

② $mcd(2200, 1221, 2332, 101101) \mid 22$? → $11 \mid 22$? → Si. Tiene solución.

$$\begin{cases} x = 40 \cdot \dfrac{22}{11} + 16n_1 + 97n_2 + 1n_3 \\ y = -5 \cdot \dfrac{22}{11} + 4n_1 + 12n_2 + 81n_3 \\ z = -37 \cdot \dfrac{22}{11} - 13n_1 - 89n_2 + 0n_3 \\ t = 0 \cdot \dfrac{22}{11} + 0n_1 + 0n_2 - 1n_3 \end{cases}$$

4) Resolución de ecuaciones de congruencias

Dado $nx \equiv b \pmod{m}$, llegar a $x \equiv b' \pmod{m}$. $b' = b \cdot [n]_m^{-1}$

Resolver $[n]_m^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} n & m \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots ; [n]_m^{-1} = x_1$.

Nota: si $mcd(n, m) \neq 1$, No tiene solución.

Ej. $3x \equiv 4 \pmod{11}$;

Busco $[3]_{11}^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{4} & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$[n]_m^{-1} = [3]_{11}^{-1} = x_1 = 4$

$b' = b \cdot [n]_m^{-1} = 4 \cdot 4 = 16$;

$x \equiv 16 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{11}$

Ej. 2: $2x \equiv 1 \pmod{7}$

$[2]_7^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $[n]_m^{-1} = [2]_7^{-1} = -3$; $b' = 1 \cdot (-3) = -3$;

$x \equiv -3 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{7}$

5) Resolución sist. ec. congruencias aka teorema Chino del resto

Técnica: ir cogiendo ecuaciones de dos en dos, y fusionándolas en 1 hasta que sólo quede una.

Dado:

1. $x_1 \equiv n_1 \pmod{m_1}$
2. $x_2 \equiv n_2 \pmod{m_2}$

Nota: $x \equiv n \pmod{m} = x = n + mK$

1. $mcd(m_1, m_2) \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow \checkmark$ tiene solución.
2. Sustituir 1 en 2 y despejar: $m_1 \cdot K = n_2 - n_1 \pmod{m_2}$
3. Despejar K: $K \equiv n_3 \pmod{m_2}$
4. Sustituir en 1 y hallar nueva ecuación: $x \equiv m_1 \cdot n_3 \pmod{m_1 \cdot m_2}$

Ejemplo

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod{12} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{array}\right\}$

1. $mcd(12, 7) = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$ mcd $= 1$; tiene solución.
2. $x = 4 + 12k$; Sustituyo en 2: $4 + 12k \equiv 3 \pmod{7}$; $12k \equiv 6 \pmod{7}$
3. Busco k: $b' = b \cdot [n]_m^{-1}$; Busco $[12]_7^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -7 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}$; $[12]_7^{-1} = 3$;
   $b' = 6 \cdot 3 = 18$; $k \equiv 18 \pmod{7} \Rightarrow k \equiv 4 \pmod{7}$
4. Sust. en 1: $x = 4 + 12k$; $x = 4 + 12(4 + 7t)$; $x = 4 + 48 + 84t$; $\boxed{x \equiv 52 \pmod{84}}$

Apuntes Matemáticas Avanzadas - UAH

2) Aritmética modular

1) Congruencias en $\mathbb{Z}_n$

$a \equiv b \pmod m$: a es congruente con b en módulo m: $m \mid (a-b)$

$a \% m = b$;

Ej: $7 \equiv 3 \pmod 4$: $7 \% 4 = 3$

Ej. 2: $12 \equiv 7 \pmod 5$: $12 \% 5 = 7$

2) Función phi de Euler (φ)

Devuelve cuantos nº's son coprimos antes de un número.

Ej $\varphi(7) = 6 : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ej 2 $\varphi(6) = 2 : \{1, 5\}$

- Propiedades

1.- $\varphi(\text{primo}) = \text{primo} - 1$ Ej. $\varphi(5) = 5 - 1 = 4$

2.- $\varphi(\text{primo}^e) = \text{primo}^e \cdot \left(1 - \frac{1}{\text{primo}}\right)$ Ej. $\varphi(5^2) = 5^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 25 - 5 = 20$

3.- Siendo m y n coprimos entre sí:

$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. Ej. $\varphi(28) = \varphi(4 \cdot 7) = \varphi(4) \cdot \varphi(7) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(7) =$

$\left[2^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] \cdot (7-1) = [4 - 2] \cdot 6 = 12.$

4.- $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$;

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Ej. $n = 540 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 5$

$$\varphi(n) = 540 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 540 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 540 \cdot \left(\frac{8}{30}\right) = 144$$

3) Teorema de Euler

Usado para calcular restos en potencias grandes.

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$

Ej. resto de dividir 3^{50} entre 14. $\begin{cases} a = 3 \\ m = 14 \end{cases}$ $3^{\varphi(14)} \equiv 1 \pmod{14}$;

$\varphi(14) = \varphi(2) \cdot \varphi(7) = 1 \cdot 6 = 6$; $3^6 \equiv 1 \pmod{14}$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ \hline 2 & 8 \end{array}$$

$3^{50} \equiv x \pmod{14}$;

$(3^6)^8 \cdot 3^2 \equiv x \pmod{14}$;

$3^2 \equiv x \pmod{14}$;

$9 \equiv x \pmod{14}$;

Ejercicios T1 Mates Avanzadas (II)

1 Sist. ec. diofánticas $\begin{cases} (1)\ 11x + 3y - 5z = 20 \\ (2)\ 3x + 7y + 10z = 10 \end{cases}$

(1) Resolver la primera:

$$\begin{pmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & t_1 & t_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -11 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

$\left. \begin{aligned} x &= -20 + 3t_1 - 1t_2 \\ y &= 80 - 11t_1 + 2t_2 \\ z &= t_2 \end{aligned} \right\}$ $1 \mid 20 \to$ tiene sol.

(2) Sustituyo en (2):

$3(-20 + 3t_1 - 1t_2) + 7(80 - 11t_1 + 2t_2) - 5(t_2) = 10;$

$-60 + 9t_1 - 3t_2 + 560 - 77t_1 + 14t_2 - 5t_2 = 10;$

$68t_1 - 21t_2 = 490;$

(3) Resuelvo nueva ec. diofántica:

$$\begin{pmatrix} 68 & 21 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -4 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \quad\quad k \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 21 & -4 \\ -68 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \end{array} \end{array}$$

$\left. \begin{aligned} t_1 &= -4 \cdot 490/1 + 21k = -1960 + 21k \\ t_2 &= 13 \cdot 490/1 - 68k = -6370 - 68k \end{aligned} \right.$

(4) Sustituyo sol. en (1) para hallar x, y, z:

$x = -20 + 3t_1 - 1t_2 = -20 + 3 \cdot (-1960 + 21k) - 1(-6370 - 68k) = 470 - 5k$

$y = 80 - 11t_1 + 2t_2 = 80 - 11 \cdot (-1960 + 21k) + 2(-6370 - 68k) = 8900 - 95k$

$z = t_2 = (-6370 - 68k) = -6370 - 68k$

} Solución final

2 Sist. ec. diofánticas $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 5 \\ 5x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$ | Versión UCAM

(1) Resto una a la otra:

$2(7x + 2y + 3z = 5)$

$3(5x + 3y - 2z = 3)$

$29x + 13y \quad / \quad 19$

(2) mcd(29, 13):

$$\begin{pmatrix} 29 & 13 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -4 \\ -29 & 9 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{aligned} x &= -4 \cdot 19 + 13k = -76 + 13k \\ y &= 9 \cdot 19 - 29k = 171 - 29k \end{aligned} \right.$

$x = -76 + 13k \Rightarrow 2 - 13k;$

$y = 171 - 29k \Rightarrow -3 + 29k;$

(3) Sustituyo en 1ª:

$7(2 - 13k) + 2(-3 + 29k) + 3z = 5;$

$\left. \begin{aligned} z &= -1 + 11k \\ y &= -3 + 29k \\ x &= 2 - 13k \end{aligned} \right\}$ Solución

Matemáticas avanzadas – Ej. tema 2

1 Resolver sist. congruencias

① $\left.\begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 6 \pmod 8 \\ x \equiv 8 \pmod{49} \end{array}\right\}$ $x = 4+5t;\ 4+5t \equiv 6 \pmod 8;\ 5t \equiv 2 \pmod 8;$ $t \equiv 2 \pmod 8;\ x = 4+5(2+8k);\ x \equiv 14 \pmod{40}$ $\left\{\begin{array}{l} x \equiv 14 \pmod{40} \\ x \equiv 8 \pmod{49} \end{array}\right.$

② $\left.\begin{array}{l} x \equiv 29 \pmod{40} \\ x \equiv 8 \pmod{49} \end{array}\right\}$ $x = 14 + 40t;\ 14 + 40t \equiv 8 \pmod{49};\ 40t \equiv -6 \pmod{49}$ $t \equiv 17 \pmod{49};\ x = 14 + 40(17 + 49k) = 14 + 680 + 1960k$ $\Big\}$ $x \equiv 694 \pmod{1960}$

2

$\left.\begin{array}{l} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ 4x \equiv 7 \pmod 9 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 4 \pmod 9 \end{array}\right\}$ $x = 4+5t;\ 4+5t \equiv 4 \pmod 9;\ 5t \equiv 0 \pmod 9;$ $t \equiv 0 \pmod 9;\ x = 4+5(0+9k) = 4+45k$ $\Big\}$ $x \equiv 4 \pmod{45}$

3

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod 5 \\ 2x \equiv 1 \pmod 7 \\ 3x \equiv 4 \pmod{11} \end{array}\right\}$

$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ $x \equiv -3 \pmod 7;\ x \equiv 4 \pmod 7$

$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ $x \equiv 5 \pmod{11}$

$\left\{\begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod 7 \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{array}\right\}$ $x = 4+7t;\ 4+7t \equiv 5 \pmod{11};\ 7t \equiv 1 \pmod{11};$

$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ $\Big\}$ $t \equiv 8 \pmod{11};$ $x \equiv 4 + 7(8+11k)$ $\Big\}$ $x \equiv 60 \pmod{77}$

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 60 \pmod{77} \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{array}\right\}$ $x = 60 + 77t;\ 60 + 77t \equiv 2 \pmod 5;\ 77t \equiv -58 \pmod 5$

$\begin{pmatrix} 77 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -15 & x \end{pmatrix}$ $\Big\}$ $t \equiv (-2)\cdot(-58) \pmod 5$; $t \equiv 1 \pmod 5$

$x = 60 + 77(1+5k) = 60 + 77 + (77 \cdot 5k)$ $\Big\}$ $x \equiv 137 \pmod{385}$

4 Calcular resto de dividir 11^{999} entre 17.

$11^{999} \equiv ? \pmod{17};\ \varphi(17) = 16;\ 11^{\varphi(mod)} \equiv 1 \ (mod\ mod);$

$11^{16} \equiv 1 \pmod{17};\ 999 = 16 \cdot 62 + 7;$

$11^{999} = (11^{16})^{62} \cdot 11^7$; Sabemos q. $11^{16} \equiv 1 \pmod{17}$;

$(11^{16})^{62} \equiv 1 \pmod{17};\ 1 \cdot 11^7 \equiv ? \pmod{17};$

$11^7 = 11^6 \cdot 11^1 = (11^2)^3 \cdot 11;$

$11^2 \equiv 2 \pmod{17};\ (2)^3 = \cancel{(8) \cdot 3^3 \equiv 10 \pmod{17}};$

$11^6 \equiv 8 \pmod{17}$

$11^7 \equiv 8 \cdot 11 \pmod{17};$

$88 \equiv 3 \pmod{17};$ $11^{999} \equiv (11^{16})^{62} \cdot 11^7 \equiv 1 \cdot 11^6 \cdot 11^1 \equiv 1 \cdot (11^2)^3 \cdot 11 \equiv 1 \cdot (2)^3 \cdot 11 \equiv 8 \cdot 11 \equiv 88 \equiv 3 \pmod{17}$

5 Resto de 2^{68} entre 19

$\varphi(19);\ \varphi(p) = p-1;\ \varphi(19) = 18;\ 68 = 18 \cdot 3 + 14;$ Si $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}, (2^{18})^3 \equiv 1 \pmod{19}$,

$(2^{18})^3 \cdot 2^{14} \equiv 2^{14} \pmod{19};\ 2^{14} = (2^2)^7 = (4^2)^3 \cdot 4 = 16^3 \cdot 4,$

$16^3 \equiv 16^2 \cdot 16;$

$16^2 \equiv 9 \pmod{19}$

$9 \cdot 16 \equiv 11 \pmod{19}$

$11 \cdot 4 \equiv 6 \pmod{19}$

$2^{68} \equiv (2^{18})^3 \cdot 2^{14} \equiv 1 \cdot 4^7 \equiv 16^3 \cdot 4 \equiv 9 \cdot 16 \cdot 4 \equiv 11 \cdot 4 \equiv 6 \pmod{19}$

6) ¿Cómo calculas el resto de $2^{68} \pmod{19}$ si no sabes q. 19 es primo?

R: voy hallando congruencias de la factorización de 2^{68}.

$2^{68} = (2^2)^{34} = (4^2)^{17} = (16)^{16} \cdot 16 = (16^2)^8 \cdot 16 = (256)^8 \cdot 16;$

$$\left.\begin{array}{l} 256 \equiv 9 \pmod{19};\ (9)^8 \cdot 16 = (9^2)^4 \cdot 16; \\ 81 \equiv 5 \pmod{19};\ (5)^4 \cdot 16 = 25^2 \cdot 16; \\ 625 \equiv 17 \pmod{19};\ (17) \cdot 16 = 272; \\ 272 \equiv 6 \pmod{19};\ \cancel{4 \cdot 16 = 64}; \\ \cancel{64 \equiv 7 \pmod{19}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 272 \equiv 6 \pmod{19} \\ 2^{68} \equiv 6 \pmod{19} \end{array}$$

Apuntes Mates Avanzadas - UAH

3 Polinomios, Anillos y congruencias polinómicas

1 Resolución de congruencias polinómicas

Dado un polinomio $P(x)$, hallar posibles soluciones en mod m.
Tres posibles casos:

1. m = producto de primos. Ej. mod 21 ; $21 = 3 \cdot 7$
2. m = potencia de primos. Ej. mod 9 ; $9 = 3^2$
3. Producto de potencia de primos. Ej. mod $45 = 5 \cdot 3^2$

Caso 1

1. Factorizar módulo
2. Encontrar soluciones para cada primo, haciendo tabla de valores.
3. Hacer teorema chino de los restos para cada solución de cada primo con cada solución de cada primo. El rdo. es una posible solución de x. nº sol. x = nº sol p_1 · nº sol p_2 ··· nº sol. p_n

Caso 2

1. Factorizar módulo
2. Encontrar soluciones para el primo.
3. Levantamiento de Hensel: extender soluciones de (mod p) a (mod p^α). Levantamiento de Hensel, extender soluciones de (mod p) en la ecuación polinómica.
   - ↳ Para ello, se sustituye cada sol. en (mod p) en la ecuación polinómica. Después, se se resuelve y se tachan elementos con potencia ≥ 2. Después, se resuelve despejando t.

Caso 3 : Combinación de ambas.

1. Resolver potencias de primos. (Caso 2).
2. Con esas soluciones, combinar como en el Caso 1 con las soluciones de productos de primos. (teorema chino restos).

Ej. caso 1: $x^2 + 15x + 8 \equiv 0 \pmod 9$
Ej. caso 2: $x^2 + 15x + 8 \equiv 0 \pmod{21}$
Ej. caso 3: $x^2 + 3x + 20 \equiv 0 \pmod{45}$

2 Alg. extendido de Euclides para polinomios

- $\underline{x^2 + 15x + 8 \equiv 0 \pmod{21}}$

① $21 = 3 \cdot 7$;

② Soluciones mod 3: $1+3t$; $2+3t$

$f(0) = 8$;
$f(1) = 24$; ✓
$f(2) = 42$; ✓

③ Soluciones mod 7:

$f(0) = 8$ | $f(4) = 84$
$f(1) = 24$ | $f(5) = 108$
$f(2) = 42$ | $f(6) = 134$
$f(3) = 62$ | $f(7) = 162$

$x = 2 + 7t$
$x = 4 + 7t$

mod 3 $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ mod 7 $\begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

Casos
1, 2
1, 4
2, 2
2, 4

③ Como tengo 2 y 2 soluciones para mod 3 y mod 7, tendré $2 \cdot 2 = 4$ sol. para mod 21.

Caso 1

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{array}\right\}$ $x = 1+3t$; $1+3t \equiv 2 \pmod 7$; $t \equiv 5 \pmod 7$;
$x = 1+3(5+7k) = 16 + 21k$; $\boxed{x \equiv 16 \pmod{21}}$

Caso 2

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{array}\right\}$ $x = 1+3t$; $1+3t \equiv 4 \pmod 7$; $t \equiv 1 \pmod 7$
$x = 1+3(1+7k) = 4+21k$; $\boxed{x \equiv 4 \pmod{21}}$

Soluciones $\begin{cases} x \equiv 16 \pmod{21} \\ x \equiv 4 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{21} \\ x \equiv 2 \pmod{21} \end{cases}$

Caso 3

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{array}\right\}$ $x = 2+3t$; $2+3t \equiv 4 \pmod 7$; $t \equiv 3 \pmod 7$;
$x = 2+3(3+7k)$; $\boxed{x \equiv 11 \pmod{21}}$

Caso 4

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{array}\right\}$ $x = 2+3t$; $2+3t \equiv 2 \pmod 7$; $t \equiv 0 \pmod 7$;
$x = 2+3t = 2+3(0+7k) = 2+21k$; $\boxed{x \equiv 2 \pmod{21}}$

- $\underline{x^2 + 15x + 8 \equiv 0 \pmod 9}$

① $9 = 3^2$; Encuentro sol. mod 3 y levanto a mod 9.

② Sol. mod 3: 1 y 2 (ej. anterior). $\begin{cases} 1+3t \\ 2+3t \end{cases}$

③ Levanto a mod 9:

$(1+3t)^2 + 15(1+3t) + 8 \equiv 0 \pmod 9$;
$\cancel{9t^2} + 51t + 24 \equiv 0 \pmod 9$
$51t \equiv -24 \pmod 9$; $t \equiv 6 \pmod 9$
$t = 1+3k$;
$x \equiv 1+3(2+3k)$
$x \equiv 7 \pmod 9$

$(2+3t)^2 + 15(2+3t) + 8 \equiv 0 \pmod 9$
$\cancel{9t^2} + 57t + 42 \equiv 0 \pmod 9$
$57t \equiv -42 \pmod 9$; $t \equiv 3 \pmod 9$
$57t \equiv 3 \pmod 9$ $t = 1+3k$;
$2+3(1+3k) = 5+9k$
$x \equiv 5 \pmod 9$

Soluciones
1. $x \equiv 7 \pmod 9$
2. $x \equiv 5 \pmod 9$

$\begin{pmatrix} 57 & 9 \\ & \end{pmatrix}$

- ~~$x^2 + 102x + 2 \equiv 0 \pmod{343}$~~
- $x^2 + 3x + 20 \equiv 0 \pmod{45}$

(1) Factorizar módulo:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Bigg\} \; 45 = 5 \cdot 3^2$$

(2) Soluciones para 5:

$f(0) = 20 \to \checkmark$
$f(1) = 24 \quad \times$
$f(2) = 30 \to \checkmark$
$f(3) = 38 \quad \times$
$f(4) = 48 \quad \times$

$x = 0 + 5t$
$x = 2 + 5t$

(3) Soluciones para 3:

$f(0) = 20$
$f(1) = 24 \to \checkmark$
$f(2) = 30 \to \checkmark$

$x = 1 + 3t$
$x = 2 + 3t$

(4) Levanto soluciones en mod 3 a mod 9:

- Para $1+3t$:

$(1+3t)^2 + 3(1+3t) + 20 \equiv 0 \pmod 9$
$\cancel{9t^2} + 15t + 24 \equiv 0 \pmod 9$
$15t \equiv -24 \pmod 9$; $t \equiv 2 \pmod 3$
$t = 2 + 3k$;

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ x = 1 + 3(2+3k) \\ x \equiv 7 \pmod 9 \end{cases}$

- Para $2+3t$:

$(2+3t)^2 + 3(2+3t) + 20 \equiv 0 \pmod 9$
$\cancel{9t^2} + 21t + 30 \equiv 0 \pmod 9$
$21t \equiv -30 \pmod 9$; $t \equiv 6 \pmod 9$
$t = 2 + 3k$

$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ x = 2 + 3(2+3k) \\ x \equiv 8 \pmod 9 \end{cases}$

(5) Combino soluciones: mod 5 $\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

mod 9 $\begin{cases} 7 \\ 8 \end{cases}$

Quedarán $2 \cdot 2 = 4$ soluciones

Caso 1

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod 9 \end{array}\right\}$ $x = 0 + 5t$; $5t \equiv 7 \pmod 9$; $t \equiv 5 \pmod 9$; $x = 5(5+9k)$; $\underline{x \equiv 25 \pmod{45}}$

Caso 2

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod 5 \\ x \equiv 8 \pmod 9 \end{array}\right\}$ $x = 5t$; $5t \equiv 8 \pmod 9$; $t \equiv 7 \pmod 9$; $x = 5(7+9k)$; $\underline{x \equiv 35 \pmod{45}}$

Caso 3

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 7 \pmod 9 \end{array}\right\}$ $\underline{x \equiv 7 \pmod{45}}$

Caso 4

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 8 \pmod 9 \end{array}\right\}$ $\underline{x \equiv 17 \pmod{45}}$

Soluciones:

1. $x \equiv 25 \pmod{45}$
2. $x \equiv 35 \pmod{45}$
3. $x \equiv 7 \pmod{45}$
4. $x \equiv 17 \pmod{45}$

- Matemáticas Avanzadas - UAH

④ Interpolación

① Interpolación por dif. divididas

Dadas los puntos $x_0, x_1 \dots x_n$ y sus $f(0), f(1) \dots f(n)$ asociados, construimos tabla y vamos aplicando:

$$\begin{array}{c|c} x_1 & f(1) \\ x_2 & f(2) \end{array} \quad \frac{f(2)-f(1)}{x_2-x_1}$$

$P(x)$ progresivo: $p_0 + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + p_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

$P(x)$ regresivo: $r_0 + r_1(x-x_n) + r_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + r_n(x-x_n)\dots(x-x_0)$

Progresivo: diagonal superior.

Regresivo: diagonal inferior.

Ejemplo

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
1	2 (p_0)			
		$\frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$ (p_1)		
3	3		$\frac{-1-1/2}{4-1} = -\frac{1}{2}$ (p_2)	
		$\frac{2-3}{4-3} = -1$		$\frac{3/5-(-1/2)}{8-1} = \frac{11}{70}$ (p_3, r_3)
4	2		$\frac{2-(-1)}{8-3} = \frac{3}{5}$ (r_2)	
		$\frac{10-2}{8-4} = 2$ (r_1)		
8	10 (r_0)			

$P(x)$ progresivo:

$$2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)(x-3) + \frac{11}{70}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$P(x)$ regresivo:

$$10 + 2(x-8) + \frac{3}{5}(x-8)(x-4) + \frac{11}{70}(x-8)(x-4)(x-3)$$

Ejemplo 2

$f(-1)=3$
$f'(-1)=-1$
$f(2)=2$
$f'(2)=3$
$f''(2)=4$
$f'''(2)=12$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f''''(x)$	$f'''''(x)$
-1	3	-1	$\frac{-1/3-(-1)}{2-(-1)} = \frac{2}{9}$	$\frac{10/9-2/9}{2-(-1)} = \frac{8}{27}$	0	$\frac{46/81-0}{2-(-1)} = \frac{46}{243}$
-1	3	$2-3/2-(-1) = -1/3$	$10/9$	$\frac{-10/9+2}{2-(-1)} = \frac{8}{27}$	$\frac{2-8/27}{3} = 46/81$	
2	2	$3/1!$	$4/2! = 2$	$12/3! = 2$		
2	2	$3/1!$	$4/2! = 2$			
2	2	$3/1!$				
2	2					

→ Cuando tenemos derivadas en el propio enunciado, las pondremos directamente sobre la tabla, dividiendo entre el factorial de la columna derivada. Ej. $f'''(9) \Rightarrow \frac{f'''(x)}{9/3!}$ Por ser la 3ª derivada

Ejemplo 3

$f(-2)=9$
$f'(-2)=-3$
$f(1)=6$
$f'(1)=9$
$f''(1)=12$
$f'''(1)=36$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f''''(x)$	$f'''''(x)$
-2	9	$-3/1!$	$\frac{-1-(-3)}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$	$\frac{\frac{10}{3}-\frac{2}{3}}{1-(-2)} = \frac{8}{9}$	0	$\frac{\frac{46}{27}-0}{3} = \frac{46}{81}$
-2	9	$\frac{6-9}{1-(-2)} = -1$	$\frac{9-(-1)}{1-(-2)} = \frac{10}{3}$	$\frac{\frac{10}{3}-6}{1-(-2)} = \frac{8}{9}$	$\frac{6-\frac{8}{9}}{1-(-2)} = \frac{46}{27}$	
1	6	$9/1!$	$12/2! = 6$	$36/3! = 6$		
1	6	$9/1!$	$12/2! = 6$			
1	6	$9/1!$				
1	6					

$$P(x) = 9 - 3\cdot(x+2) + \frac{2}{3}(x+2)^2 + \frac{8}{9}(x+2)^2(x-1) + \frac{46}{81}(x+2)^2(x-1)^3$$

2) Interpolación por Lagrange

Dado $\left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_0 & x_1 & x\ldots & x_n \\ \hline f(x) & y_0 & y_1 & y_{\ldots} & y_n \end{array} \right\}$ Se monta un polinomio de la forma:

$P(x) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 \ldots y_n \cdot L_n$

① Hallar $L_0 \ldots L_n$. Cada L_i tiene la forma $L(x_j) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$

↳ Osease, irse saltando el x_j tomado.

② Una vez halladas las L_i's, montar polinomio.

Ejemplo

X	1	3	5	7
f(x)	-2	1	2	-3

$L_0 = \dfrac{(x-3)(x-5)(x-7)}{(1-3)(1-5)(1-7)} = \dfrac{(x-3)(x-5)(x-7)}{-48}$

$L_1 = \dfrac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(3-1)(3-5)(3-7)} = \dfrac{(x-1)(x-5)(x-7)}{16}$

$L_2 = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(5-1)(5-3)(5-7)} = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-7)}{-16}$

$L_3 = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(7-1)(7-3)(7-5)} = \dfrac{(x-1)(x-3)(x-5)}{48}$

$P(x) = -2 \cdot L_0 + 1 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 - 3 \cdot L_3 =$

$-2 \cdot \left[\dfrac{(x-3)(x-5)(x-7)}{-48}\right] + \left[\dfrac{(x-1)(x-5)(x-7)}{16}\right] + 2 \cdot \left[\dfrac{(x-1)(x-3)(x-7)}{-16}\right] \rightarrow$

$-3 \cdot \left[\dfrac{(x-1)(x-3)(x-5)}{48}\right]$

$P(x) = -\dfrac{4}{48} \cdot (x-9)(x^2+10x-27)$

3) Error en interpolación

Como la interpolación es una aproximación a la función, está sujeta a errores.

Fórmula: $|f(x) - P(x)| = \dfrac{f^{n+1}(\alpha)}{(n+1)} \cdot (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_n)$ $\left\{ \begin{array}{l} n = \text{nº datos de la tabla} \\ \alpha = \end{array} \right.$

Ejemplo

Calcular error en ej. anterior, en $x = 4$.

$|f(x) - P(x)| =$

Derivadas parciales

- F. con varias incógnitas

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = Derivada de la función respecto a x: "todo lo que no sea x son números"

Ejemplo

$$f(x,y,z) = \frac{xyz^2}{2xy-z} \quad ; \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(xyz^2)'\cdot(2xy-z) - (xyz^2)\cdot(2xy-z)'}{(2xy-z)^2} = \frac{(yz^2)(2xy-z) - (xyz^2)(2y)}{(2xy-z)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2xy^2z^2} - yz^3 - \cancel{2xy^2z^2}}{(2xy-z)^2} = \frac{-yz^3}{(2xy-z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xyz^2)'\cdot(2xy-z) - (xyz^2)(2xy-z)'}{(2xy-z)^2} = \frac{(xz^2)\cdot(2xy-z) - (xyz^2)(2x)}{(2xy-z^2)}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2yz^2} - xz^3 - \cancel{2x^2yz^2}}{2xy-z^2} = \frac{-xz^3}{2xy-z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(xyz^2)'\cdot(2xy-z) - (xyz^2)(2xy-z)'}{(2xy-z)^2} = \frac{(2xyz)(2xy-z) - (xyz^2)(-1)}{(2xy-z)^2}$$

$$= \frac{4x^2y^2z - 2xy^2z + xyz^2}{(2xy-z)^2} = \frac{4x^2y^2z - xy^2z}{(2xy-z)^2} =$$

Ptos críticos en f. de 2 variables

$f(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$

① Hallar derivadas parciales de primer y segundo orden.

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 28x - 6x^2 + 4y$ | $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 4x$ | $f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = 28 - 12x$ | $f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = 4$ | $f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 4$ | $f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 4$

② Ptos. críticos

Igualar a 0 las primeras derivadas parciales.

$f_x, f_y = 0;$

$f_x \Rightarrow 28x - 6x^2 + 4y = 0;\ 14x - 3x^2 + 2y = 0;$

$f_y \Rightarrow 4y + 4x = 0;\ y = -x;$

③ Resuelvo el sistema

$\left.\begin{array}{l} \boxed{1}\ 14x - 3x^2 + 2y = 0 \\ \boxed{2}\ y = -x \end{array}\right\}$ Sustituyo $\boxed{2}$ en $\boxed{1}$; $14x - 3x^2 - 2x = 0;\ -3x^2 + 12x = 0;\ x(-3x + 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

④ Puntos críticos: Máximos, mínimos, silla.

$P1\{0,0\} \Rightarrow D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (28 - 12x) \cdot 4 - (4)^2 = 96 - 48x$

$P2\{4,-4\} \Rightarrow D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2;$

⑤ Evaluación Ptos críticos

$f_{xx} = 28 - 12x$
$f_{yy} = 4$
$D = 96 - 48x$

$PC_1 = \{0,0\} \left\{\begin{array}{l} f_{xx} = 28 > 0 \\ f_{yy} = 4 > 0 \\ D = 96 > 0 \end{array}\right\}$ Mínimo local

$PC_2\{4,-4\} \left\{\begin{array}{l} f_{xx} = -20 < 0 \\ f_{yy} = 4 > 0 \\ D = -96 < 0 \end{array}\right\}$ Punto de silla.

$D < 0 \Rightarrow$ Pto. Silla.

$D > 0 \begin{cases} F_{xx} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ F_{xx} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2017-2018

Examen Final. 22 de Junio de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sean $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, a y α números enteros y p un número primo. Entonces,

$$f(a+\alpha p) \equiv f(a) + \alpha p f'(a) \pmod{p^2},$$

donde $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

c) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0,y_0) tales que: 1) el límite de $f(x,y)$ en (x_0,y_0) es igual a cero y 2) $g(x,y)$ está acotado en un entorno de (x_0,y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Sea n un entero impar. Probar que la ecuación diofántica

$$nX + (n+2)Y = a$$

$\begin{pmatrix} n & n+2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & -\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?(n, 1) → Coprimos

tiene solución para todo entero a. Calcular todas las soluciones para el caso $n = 999$ y $a = 7$.

$\frac{\text{monedas}}{12} = k;\ r = 6$

$x \equiv 6 \pmod{12}$
$x \equiv 2 \pmod{11}$
$x \equiv 1 \pmod{10}$
$x \equiv 0 \pmod{9}$

3.- *(2 ptos.)* Doce piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de monedas de oro. Por desgracia, sobran seis monedas por lo que se desata una pelea en la que muere un pirata. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos monedas, vuelven a pelear y muere otro. En el siguiente reparto vuelve a sobrar una moneda y solamente después de que muera otro es posible el reparto a partes iguales. Sabiendo que el número de monedas es mayor que dos mil y menor que tres mil, ¿cuántas monedas de oro componían el botín?

monedas = 12k + 6
monedas = 11k + 2
monedas = 10k + 1
monedas = 9k + 0

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

5.- *(1 ptos.)* Consideremos la función $g(x,y) = (x^3+y^2)e^{cos(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x,y)$ en el punto $(1,0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

$xk + \frac{6}{k}$

$xk + \frac{1}{k}$

18 66
30 78
42 90
54

$\left.\begin{array}{l} \cancel{x} \equiv 6 \pmod{12} \\ x \equiv 1 \pmod{10} \end{array}\right\}$?

$42 \equiv 6 \pmod{12}$
$42 \equiv 1 \pmod{10}$

54 102
66 114
78 126
90 138

6.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$. Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$x \equiv 1 \pmod{6}$

$$\begin{array}{r} 110 \\ 9 \\ \hline 990 \end{array}$$

$\begin{array}{r|l} 990 & 12 \\ 96 & 82 \\ \hline 30 & \\ 6 & \end{array}$

$x \equiv 1 \pmod{2}$
$x \equiv 1 \pmod{5}$

$x \equiv 1 \pmod{12}$
~~$x \equiv 1 \pmod{2}$~~
$x \equiv 1 \pmod{6}$

$x \equiv 1 \pmod{8}$
$x \equiv 1 \pmod{3}$
$x \equiv 1 \pmod{2}$

Universidad de Alcalá

Apellidos: BARRANQUERO FDEZ
Pág.:
Nombre: MARCOS
Fecha: 22 - 6 - 2018
Titulación: GII - MAÑANAS
Asignatura: MATEMÁTICAS AVANZADAS
Curso / grupo:

3

$\boxed{1}$ $x \equiv 6 \pmod{12}$
$\boxed{2}$ $x \equiv 2 \pmod{11}$
$\boxed{3}$ $x \equiv 1 \pmod{10}$
$\boxed{4}$ $x \equiv 0 \pmod{9}$

① $x = 6 + 12t$; Sustituyo en $\boxed{2}$: $6 + 12t \equiv 2 \pmod{11}$; $12t \equiv 7 \pmod{11}$

$\begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -11 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$ $t \equiv 7 \pmod{11}$; $x = 6 + 12(7 + 11k)$

$x \equiv 90 \pmod{132}$

$2000 \le x < 3000$

② $\boxed{1}$ $x \equiv 90 \pmod{132}$
~~$\boxed{2}$ $x \equiv 1 \pmod{10}$~~
$\boxed{3}$ $x \equiv 0 \pmod{9}$

$x = 90 + 132t$; Sust. en $\boxed{2}$: $90 + 132t \equiv 1 \pmod{10}$; $132t \equiv -89 \pmod{10}$

$132t \equiv 1 \pmod{10}$; $\begin{pmatrix} 132 & 10 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 0 \\ -13 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \\ -13 & \dots \end{pmatrix}$ $t \equiv 2 \pmod{10}$

$132t \equiv 1 \pmod{10}$
$264 \equiv 4 \pmod{10}$

$64t \equiv 1 \pmod{20}$
$32t \equiv \frac{1}{2} \pmod{20}$

12
11
9

12
99
108
108
1188

$2t \equiv 1 \pmod{2}$
$t \equiv 1 \pmod{1}$

132 | 2
64

$9 \equiv 0 \pmod{9}$
$18 \equiv 0 \pmod{9}$
$27 \equiv 0 \pmod{9}$

$9 \equiv 9 \pmod{10}$
$18 \equiv 8 \pmod{10}$
$27 \equiv 7 \pmod{10}$

$1 + 10t \equiv 0 \pmod{9}$
$10t \equiv -1 \pmod{9}$
$10t \equiv 8 \pmod{9}$

$\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -9 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

$t \equiv 8 \pmod{9}$

$x = 6 + 12k$
$x = 3 + 6k$;
k

$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

132
90
000
1188
11880

$x \equiv 3 \pmod{6}$
$x \equiv 5 \pmod{24}$

$x = 3 + 6t$; $3 + 6t \equiv 5 \pmod{24}$
$6t \equiv 2 \pmod{24}$;

$\begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 3 6
1 3 24

$3t \equiv 2 \pmod{12}$

132
− 08
104

104
+ 8
112

$x \equiv 1 \pmod{10}$
$x \equiv 0 \pmod{9}$

$1 + 10t \equiv 0 \pmod{9}$
$10t \equiv 8 \pmod{9}$
$t \equiv 8 \pmod{9}$

90
114
0

$1 + 10(8 + 9k) \equiv 81 \pmod{90}$

$x \equiv 81 \pmod{90}$
$x \equiv 90 \pmod{132}$

$x = 81 + 90t$
$81 + 90t \equiv 90 \pmod{132}$
$90t \equiv 9 \pmod{132}$

$\begin{pmatrix} 132 & 90 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 42 & 90 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 42 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix}$

$x = 81 + 90t$
$x = 81 + 90(114 + 132k)$
$x =$

$t \equiv -18 \pmod{132}$
$t \equiv 114 \pmod{132}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$

$6+12t \equiv 1 \pmod{6}$

$12t \equiv \cancel{-5} \pmod{6}$

$12t \equiv 5 \pmod{6}$

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = 1 + 2\cdot(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1\,(x+1)^2(x-1) - \frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x+1)^2(x-1)^3$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f''''(x)$	$f'''''(x)$
-1	1					
		2				
-1	1		$-\frac{1}{2}$			
		1		1		
1	3		$\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{4}$	
		4		$1/2$		$1/4$
1	3		$5/2!$		$\frac{1}{4}$	
		4		1		
1	3		$5/2!$			
		4				
1	3					

$$\frac{3-1}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{4-1}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1-2}{1-(-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{1-(-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = 1/4$$

$$\frac{1}{2}-1 = \frac{\frac{-1}{2}}{2} = -1/4$$

$$\frac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1-(-1)} = \frac{\frac{2}{4}}{2} = \frac{2}{8} = 1/4$$

$x \equiv$ (mod

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 6 \pmod{12} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{array}\right\} x \equiv 90 \pmod{132}$

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 90 \pmod{132} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \end{array}\right\} x = 90 + 132t;$

$90 + 132t \equiv 2 \pmod{10}$

$132t \equiv -88 \pmod{10}$

$132t \equiv 2 \pmod{10}$

$\begin{pmatrix} 132 & 10 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \quad 220 + 660k$

$\left.\begin{array}{l} x \equiv 220 \pmod{660} \\ x \equiv 0 \pmod{9} \end{array}\right\}$

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 6 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{array}\right\} x \equiv 90 \pmod{132}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 90 \pmod{132} \\ x \equiv 0 \pmod{9} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 90 + 132t; \\ 90 + 132t \equiv 0 \pmod{9} \\ 132t \equiv -90 \pmod{9} \\ 132t \equiv 0 \pmod{9} \\ t \equiv 0 \pmod{9} \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} x \equiv 90 + 132(0 + 9k) \\ x \equiv 90 \pmod{1188} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -90 \\ 90 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ 9 \\ \hline 1188 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1188 \\ 90 \\ \hline 1278 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1278 & 6 \\ \hline 17 & 217 \\ 78 & \\ 8 & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 999 & 1001 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 999 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-499} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 500 & -1 \\ -499 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 500 & -1001 \\ -499 & 999 \end{pmatrix}$$