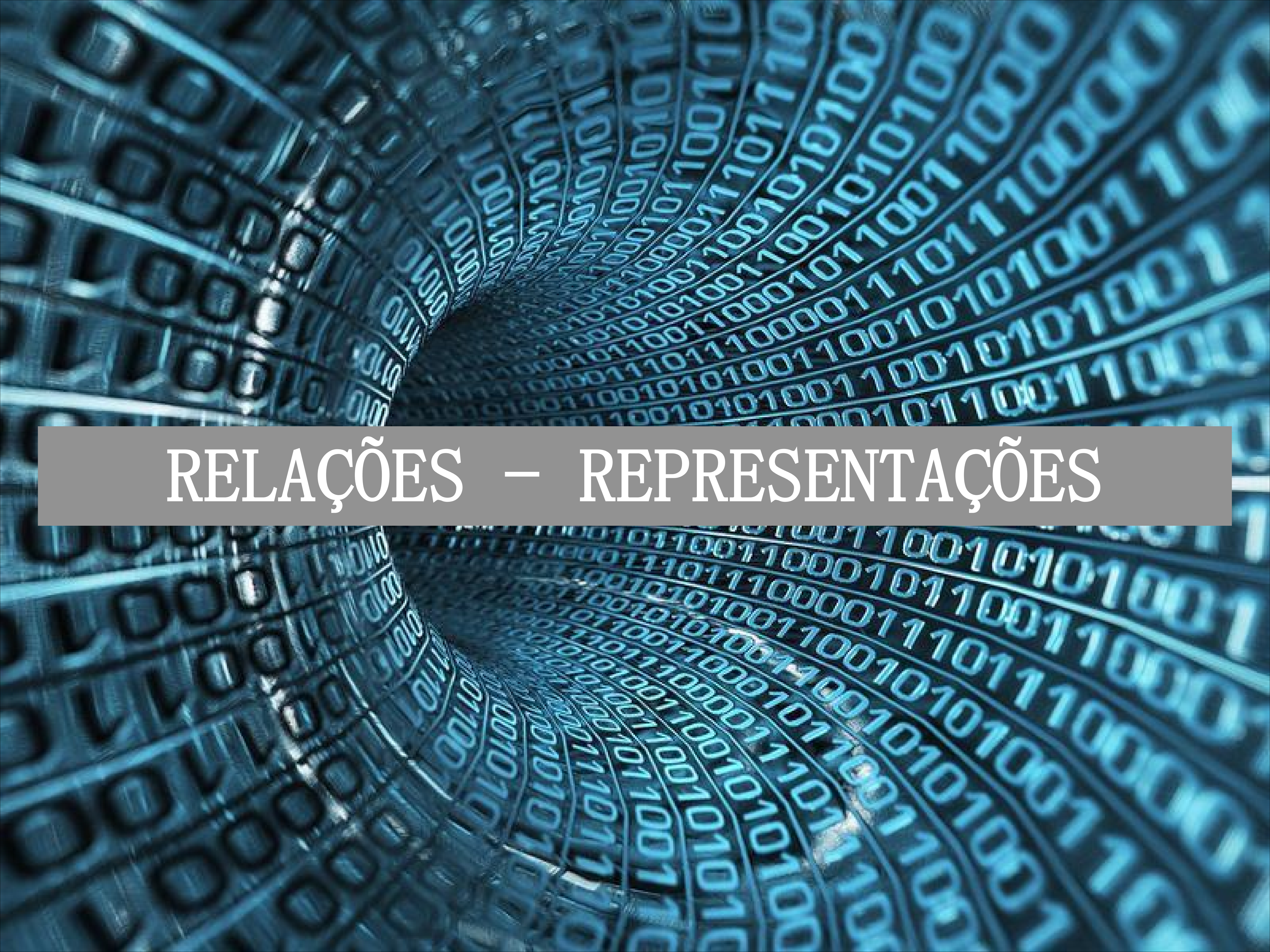
Funções

Matemática Aplicada I

Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Escola Agrícola de Jundiaí - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

RELAÇÕES – REPRESENTAÇÕES



Grafos

- Endorrelação R: A→A pode ser vista como grafo
  - Será visto que toda endorrelação é um grafo
    - nem todo grafo é uma endorrelação
- Endorrelação como grafo - facilita o estudo
  - visão mais clara do relacionamento e das propriedades
  - Conveniente para relações com poucos pares

Grafo orientado: um grafo orientado, ou dígrafo, convite em um conjunto V de vértices (ou nós) junto com um conjunto E de pares ordenados de elementos V chamados de arestas (ou arcos). O vértice a é chamado de vértice inicial de uma aresta (a, b) e o vértice b é chamado de vértice final da aresta

Grafos

- Nodos
  * elementos de A - ponto ou círculo

- Setas, arcos, arestas
  * pares da relação

Exemplo:

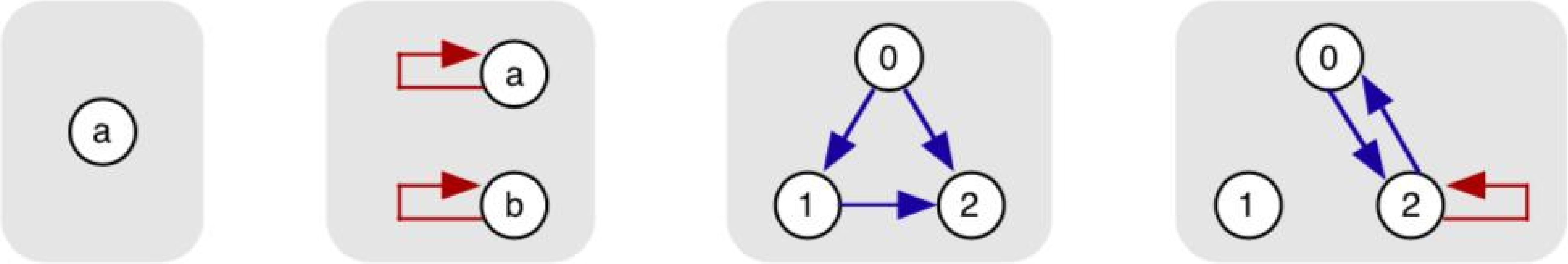
Sejam A={a}, B={a, b} e C={0, 1, 2}

R1= ∅ : A → A

R2={(a,a), (b,b)}

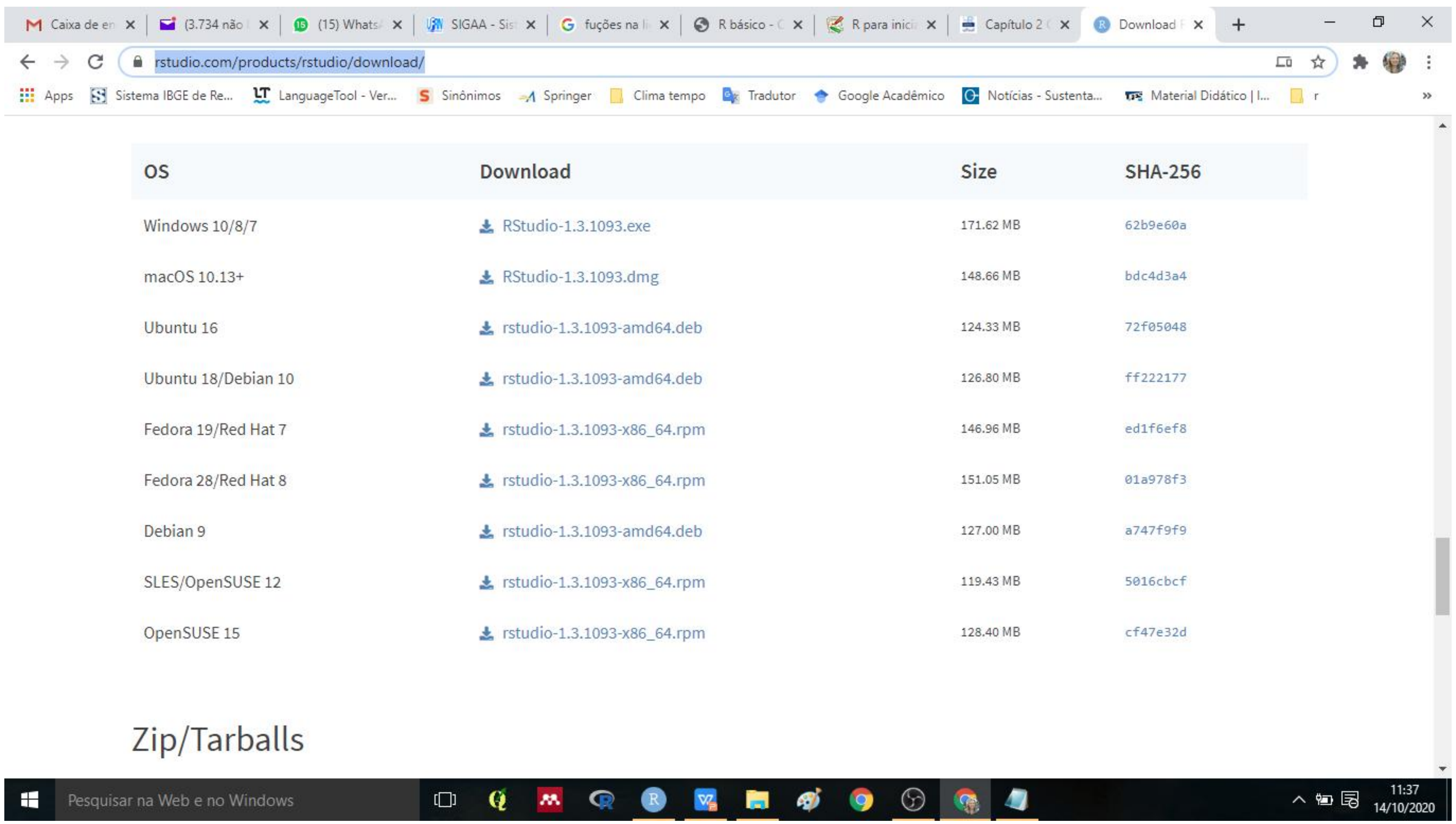
R3 = {(0,1), (0,2), (1,2)}

R4 = C →C ——— R={(0,2), (2,0), (2,2)}



Instalando o RStudio

- https://rstudio.com/products/rstudio/download/

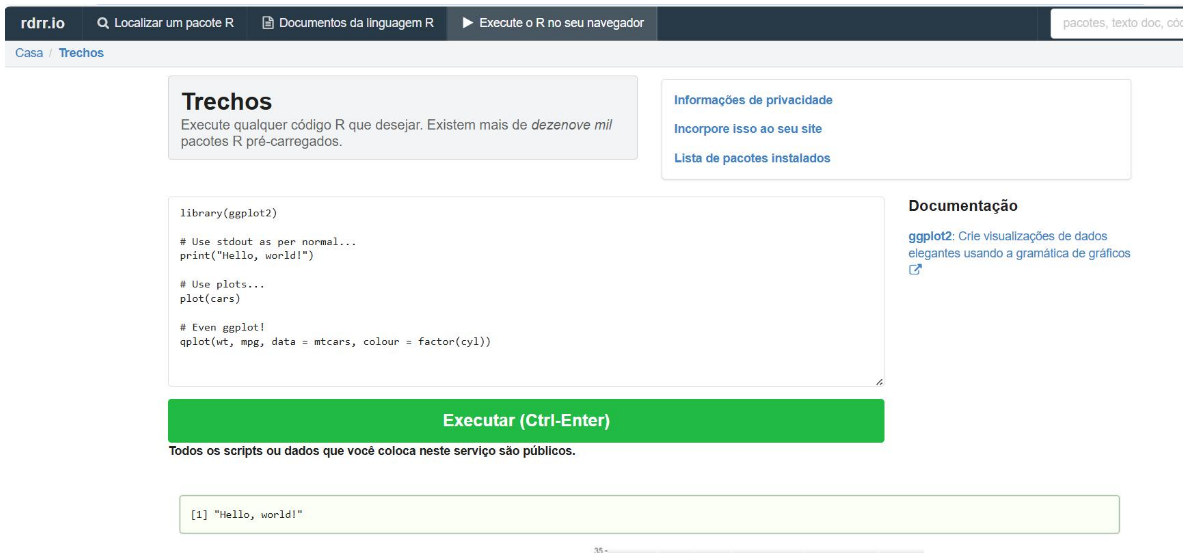


Escolha sua plataforma – Sistema operacional e instale o RStudio

Abro o Rstudio on line

- https://https://posit.cloud

- https://rdrr.io/snippets/



Escolha sua plataforma - Sistema operacional e instale o RStudio

Algebra dos conjuntos no R

- # Definição de dois conjuntos
- A <- c(1, 2, 3, 4, 5)
- B <- c(4, 5, 6, 7)

- # Remover elementos duplicados, se houver
- A <- unique(A)
- B <- unique(B)

- # União (A ∪ B)
- uniao <- union(A, B)
- cat("União (A ∪ B):", uniao, "\n")

Algebra dos conjuntos no R

- # Interseção (A ∩ B)
- intersecao <- intersect(A, B)
- cat("Interseção (A ∩ B):", intersecao, "\n")

- # Diferença (A - B)
- diferenca_A_B <- setdiff(A, B)
- cat("Diferença (A - B):", diferenca_A_B, "\n")

- # Diferença (B - A)
- diferenca_B_A <- setdiff(B, A)
- cat("Diferença (B - A):", diferenca_B_A, "\n")

Algebra dos conjuntos no R

- # Diferença simétrica (elementos que estão em A ou B, mas não em ambos)
- diferenca_simetrica <- setdiff(union(A, B), intersect(A, B))
- cat("Diferença Simétrica (A Δ B):", diferenca_simetrica, "\n")

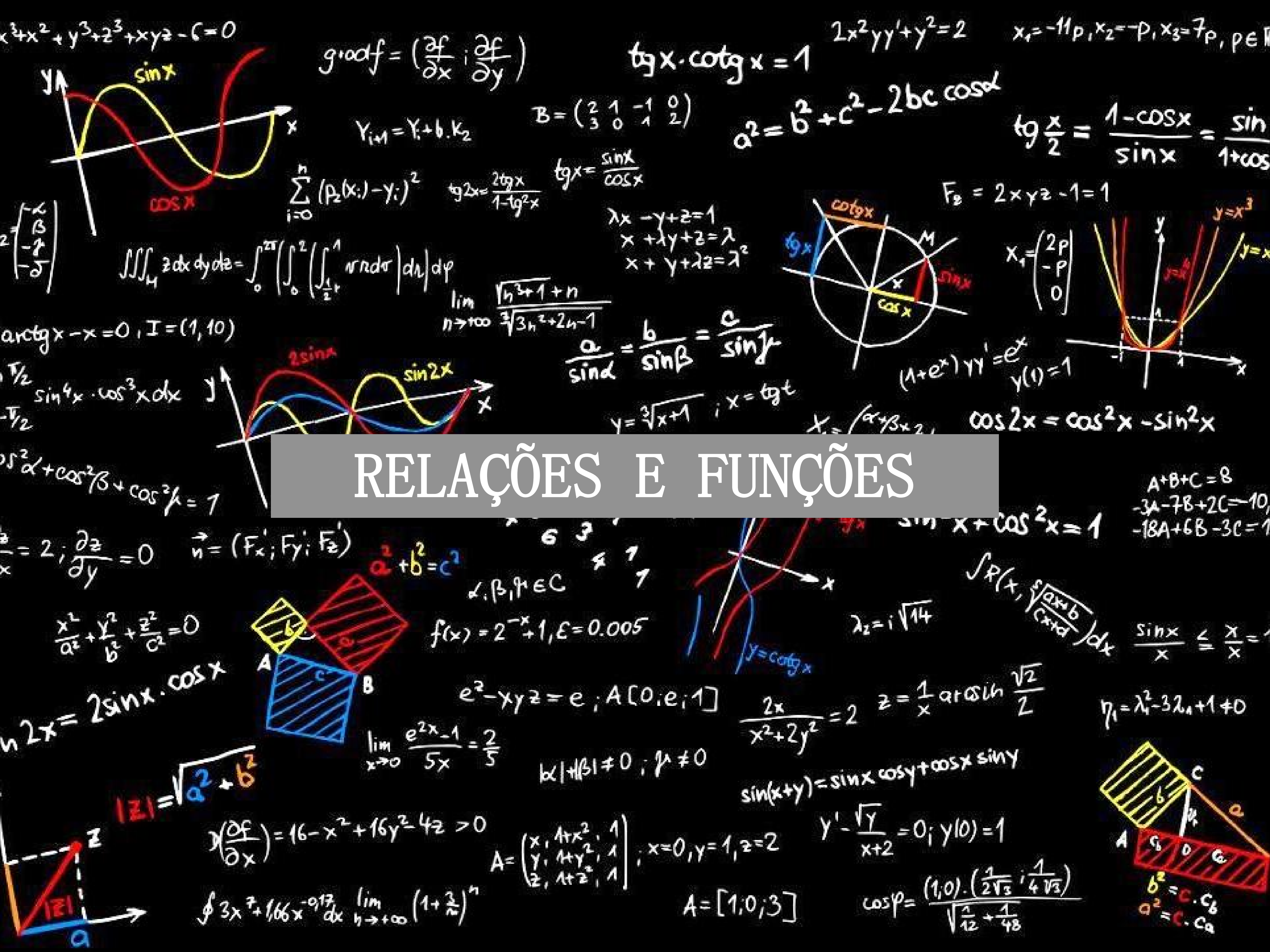
- # Verificação de subconjunto (A ⊆ B)
- subconjunto <- all(A %in% B)
- cat("A é subconjunto de B?:", subconjunto, "\n")

Algebra dos conjuntos no R

```r
# Função para gerar o conjunto das partes (power set)
conjunto_das_partes <- function(conjunto) {
  n <- length(conjunto)
  partes <- list()

  for (i in 0:n) {
    combinacoes <- combn(conjunto, i, simplify = FALSE)
    partes <- c(partes, combinacoes)
  }

  return(partes)
}
```

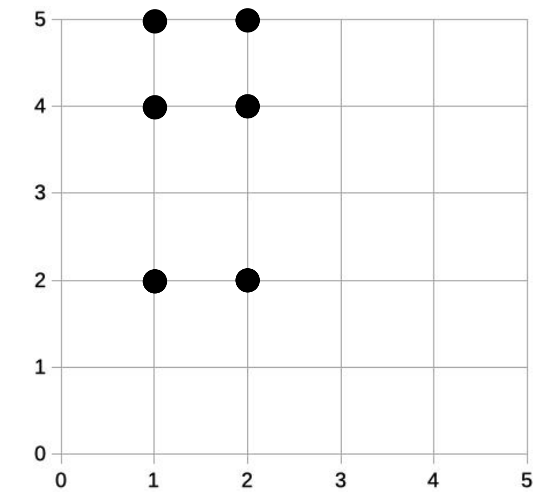


RELAÇÕES E FUNÇÕES

Produto Cartesiano

Produto Cartesiano: Sejam A e B conjuntos não vazios, chama-se produto cartesiano de um conjunto A por um conjunto B o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), com o primeiro elemento em A e o segundo elemento em B

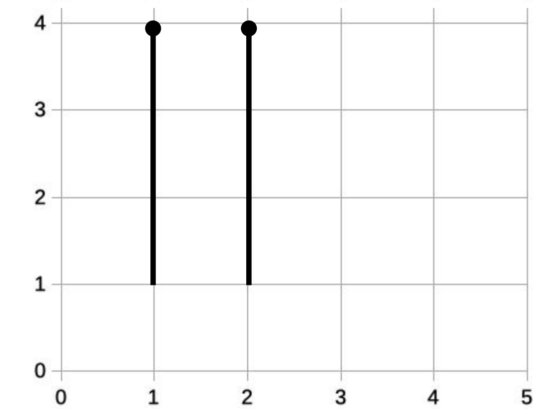
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A e b \in B\}$$



EXEMPLO

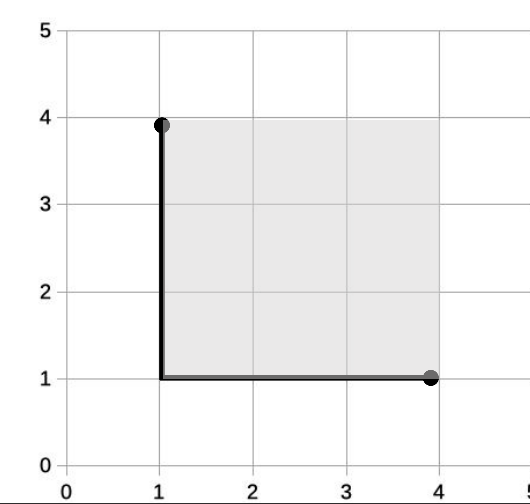
$$A = \{1,2\} e B = \{2,4,5\} e C = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 4\}$$

$i) A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (2,5)\}$



$ii) A \times C = \{(a, c) | a \in A e c \in C\}$

$iii) C \times C = \{(a, b) | a \in C e b \in C\} = \{(a, b) | a \in [1,4[e b \in [1,4[\}$



Relação Binária

Relação Binária: chama-se relação binária de um conjunto A em um conjunto B qualquer subconjunto AxB

$Se\ \ R\ \ é\ uma\ relação\ de\ \ A\ \ \ em\ \ \ B,\ então\ \ R \subset A \times B$

$Caso\ (a,b) \in R,\ dizemos\ que\ \ a\ \ \ se\ relaciona\ com\ \ \ b\ \ \ e\ escrevemos\ a\ sentença$

$aRb\ \ ou\ \ b = R(a).\ Ou\ de\ outro\ modo,\ o\ conjunto\ dessa\ relação\ pode\ ser\ descrito$

$$R = \{(a,b) \in A \times B |\ aRb\}\ \ \ ou\ \ \ R = \{(a,b) \in A \times B | b = R(a)\}$$

EXEMPLO

$$A = \{1,2\}\ \ \ e\ \ \ B = \{2,4,6\}$$

Os conjuntos R1, R2 e R3 são relações binárias de A em B, isto é são subconjuntos de AxB

$$R_1 = \{(1,2)\}$$
$$R_2 = \{(1,2), (1,4), (2,6)\}$$
$$R_3 = \{(a,b) | b = 2a\} = \{(1,2), (2,4)\}$$

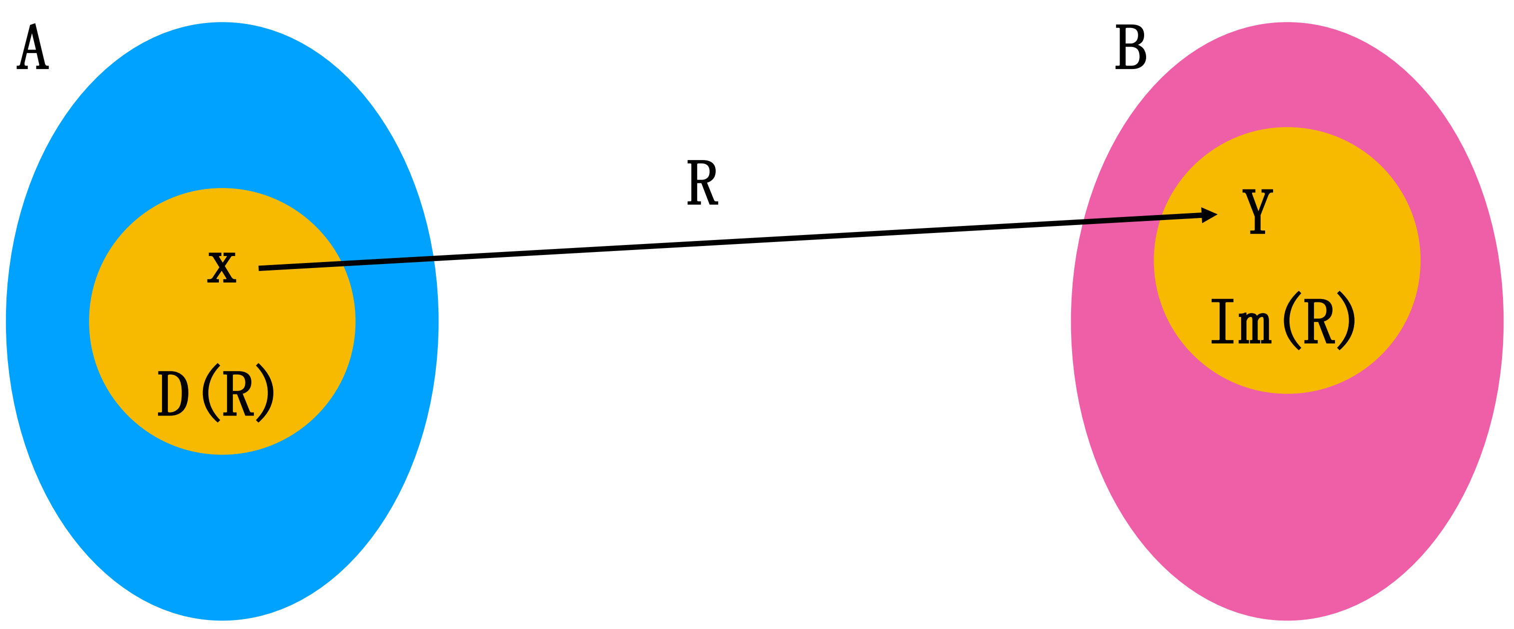
Relação Binária

$$Seja R = \{(x, y) \in A \times B | y = R(x)\} uma relacao$$

Domínio: chama-se domínio de R, indicado por D(R) ou D_R, o conjunto de valores da variável x de A que formam os pares ordenados de R

Contra-domínio: o conjunto B denomina-se contradomínio da relação R, e é indicado por CD(R)

Imagem: o conjunto de valores da variável y de B que formam os pares de R chama-se conjunto de imagem da relação, e é indicado por Im(R)



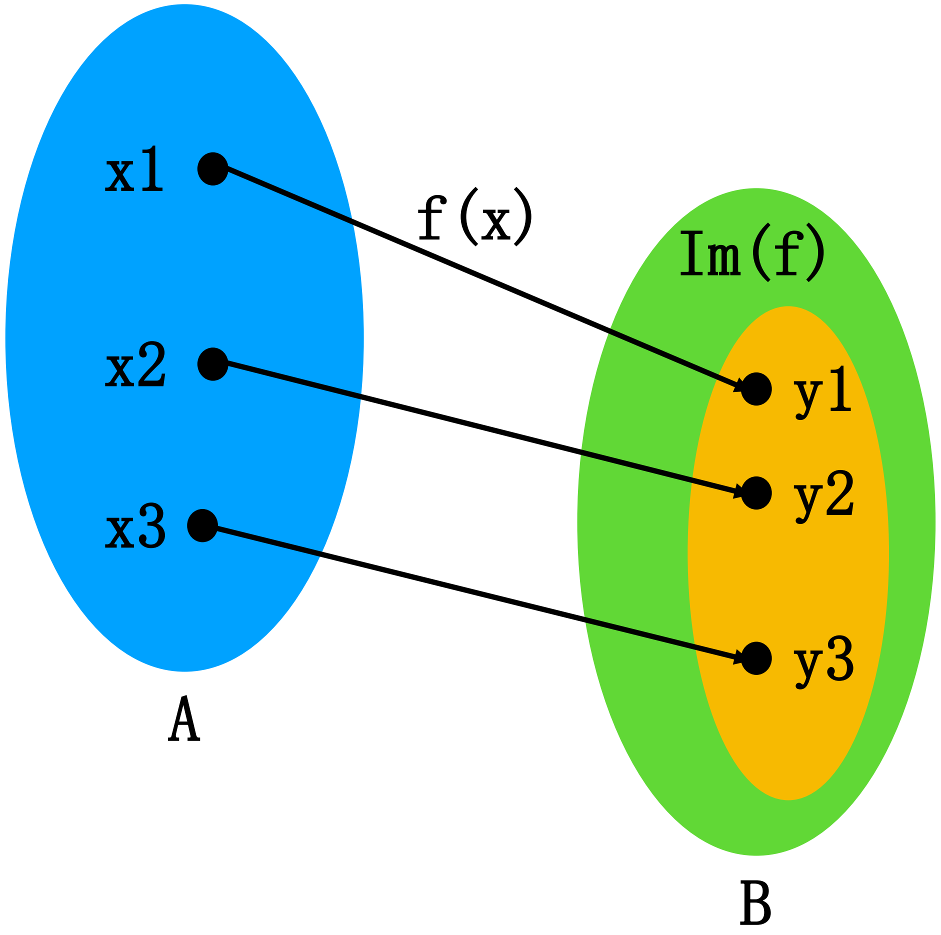
Funções

Função: diz-se que uma relação *f* de A em B é uma função de A em B se cada elemento do conjunto A corresponde um único elemento do conjunto B.
Todos os elementos de A devem estar em correspondência com os elementos de B

1. Um conjunto A, chamado o domínio da função;

2. Um conjunto B, chamado o contradomínio da função;

3. Uma correspondência f, que associa a cada elemento x de A um único elemento y de B



Para indicar uma função de A em B, ou seja, a conexão entre x e y usualmente escreve-se y = f (x). A notação utilizada é:

$$f: A \rightarrow B,\ y=f(x) \text{ ou}$$

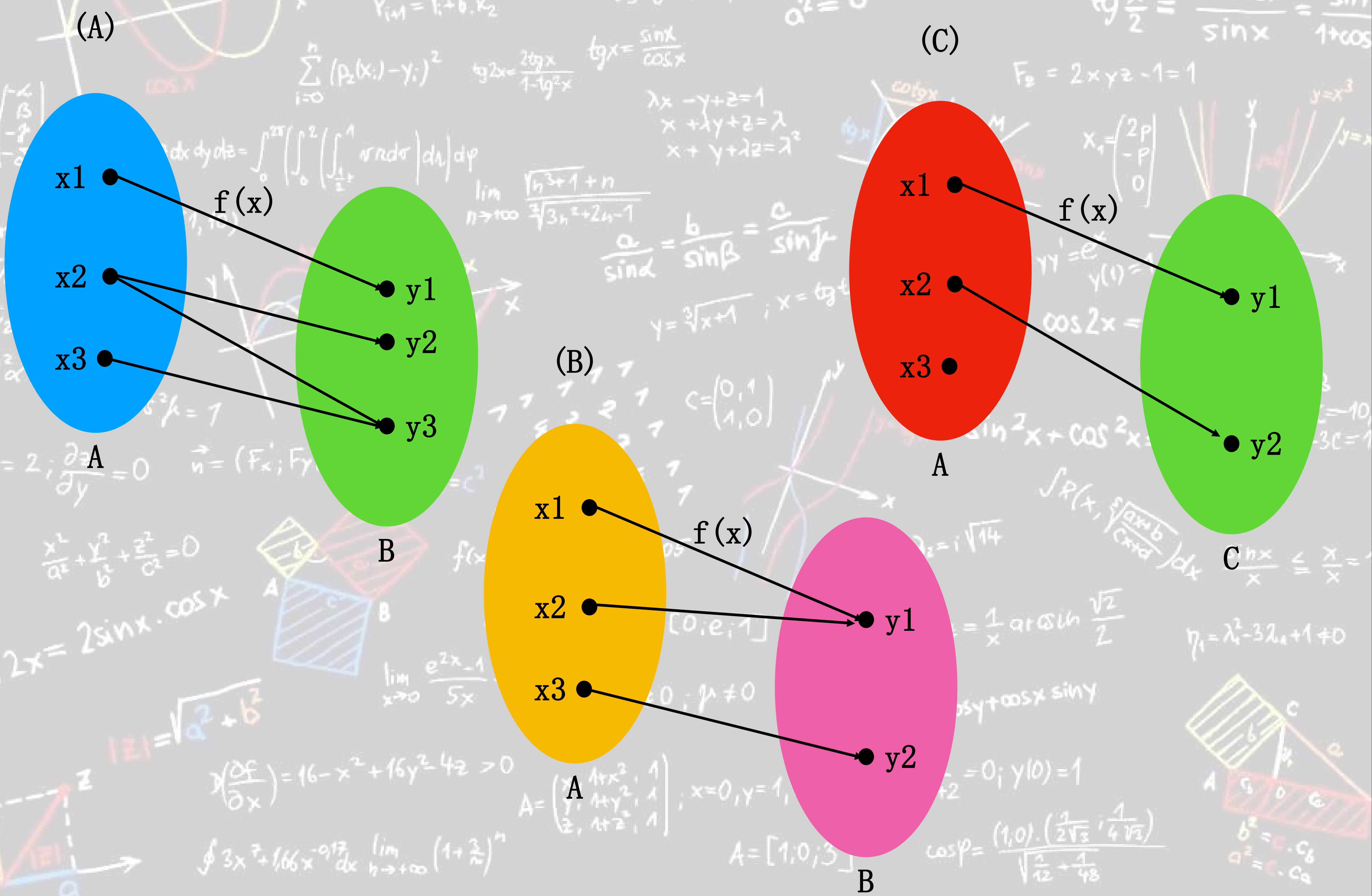
$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y$$

A imagem da função f, é o subconjunto de B que consiste em todos os valores possíveis f(x), para cada x ∈ A, isto é,

Im f = {y∈A: y=f(x), para algum x∈A} = {f(x): x∈X} = f(X)

Qual das seguintes representações não é uma função?

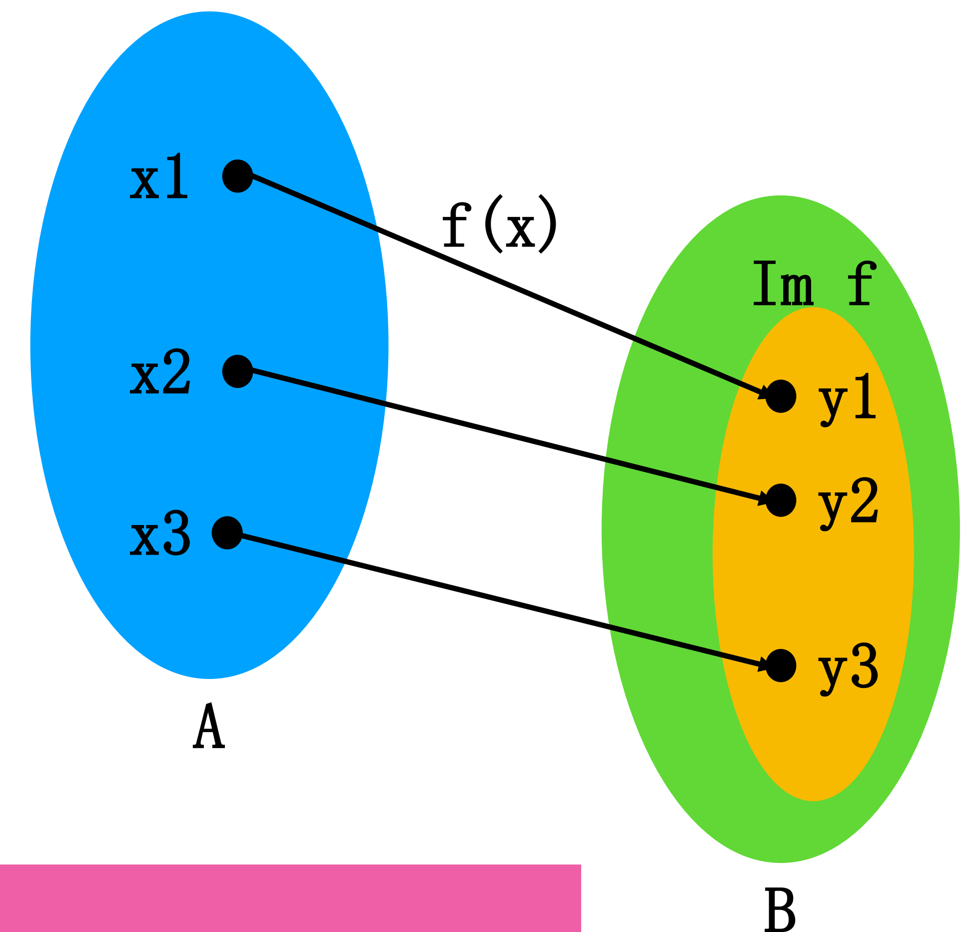


Função Real

Uma função $f: A \to B, y = f(x)$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de função real de variável real, visto que a variável x assume os números reais de A enquanto, correspondentemente, pela lei $y = f(x)$, y assume valores reais em B

- Muitas vezes por simplificação, deixamos de explicitar o domínio e contradomínio da função f, falando apenas de f(x)

- Fica então implícito que o contradomínio é o conjunto dos números reais, e o domínio é o "maior" subconjunto de números reais para os quais faça sentido a lei



Variável x
Função de x, f(x)
f(x) variável dependente de x, x variável independente

Exemplos

Convenção de domínio: Se uma função é dada por uma fórmula e o domínio não é declarado explicitamente, a convenção é que o domínio é o conjunto de todos os números para os quais a formula faz sentido

Exemplo: Encontre o domínio de cada função

$$(a) f(x) = \sqrt{x+2} \quad (b) \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

Solução:

(a) Como a raiz quadrada de um número negativo não é definida (como um número real), o domínio de f consiste em todos os valores de x tais que $x+2 \geqslant 0$ ou seja $x \geqslant -2$
O domínio é $[-2, +)$

(b) Uma vez que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

E a divisão por zero não é permitida, vemos que g(x) não está definia em $x=0$ ou $x=1$.
O domínio é

$$\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$$

Funções Elementares

Função constante

$$f: A \to \mathbb{R}, f(x) = c, A \subset \mathbb{R}$$

Função linear (afim)

Função linear ou polinomial de 1º grau

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$$

O coeficiente linear b indica o ponto (0,b) onde a reta intercepta o eixo y, e a o coeficiente angular

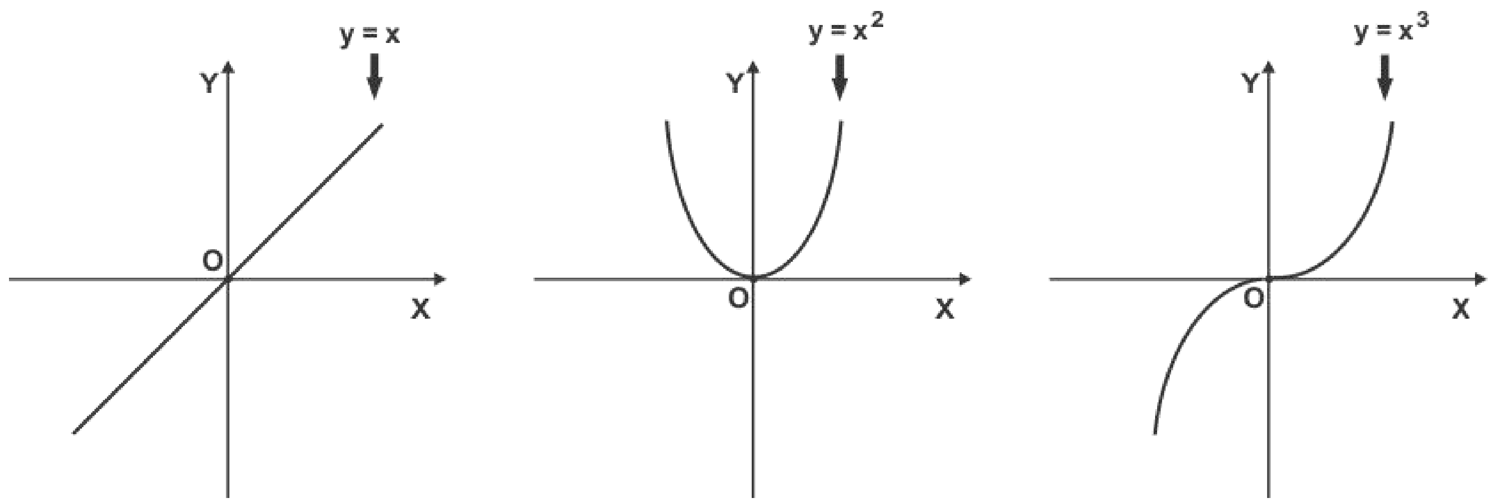
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Função polinomial

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a0$$

Onde n é um número inteiro não negativo e os números a0, a1,⋯, an são constantes chamadas de coeficientes do polinômio. Se o coeficiente dominante an≠0, então o grau do polinómio é n

Funções Elementares



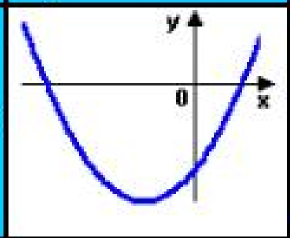
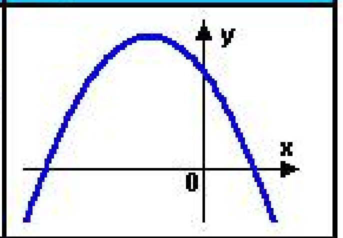
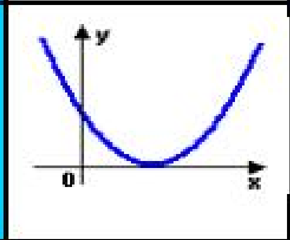
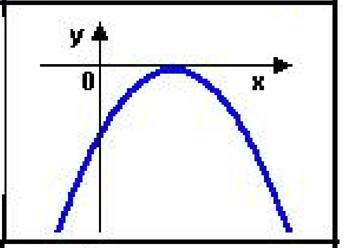
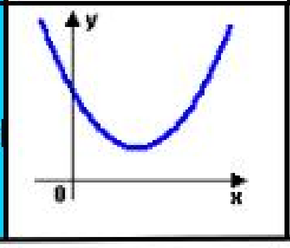
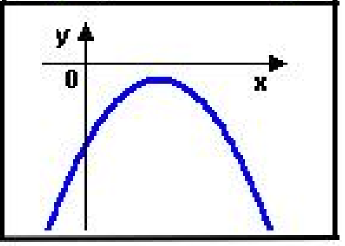
Função polinomial (cont.)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

Caso particular da função quadrática, e determinação de intersecção com os eixos.
x=0 para intersecção com o eixo y, e y=0 para interseção com o eixo x (zeros da função)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se a>0, a parábola tem a concavidade voltada para cima e o vértice é o ponto mínimo da função
se a<0 a parábola tem concavidade voltada para baixo e o vértice é o ponto máximo da função

delta Δ	a parábola no plano cartesiano	a > 0 concavidade para cima	a < 0 concavidade para baixo
$\Delta > 0$	corta o eixo horizontal em dois pontos		
$\Delta = 0$	toca em um ponto o eixo horizontal		
$\Delta < 0$	não corta o eixo horizontal		

https://www.youtube.com/watch?v=N0iqgER9Zcc

Funções Elementares

Funções potências

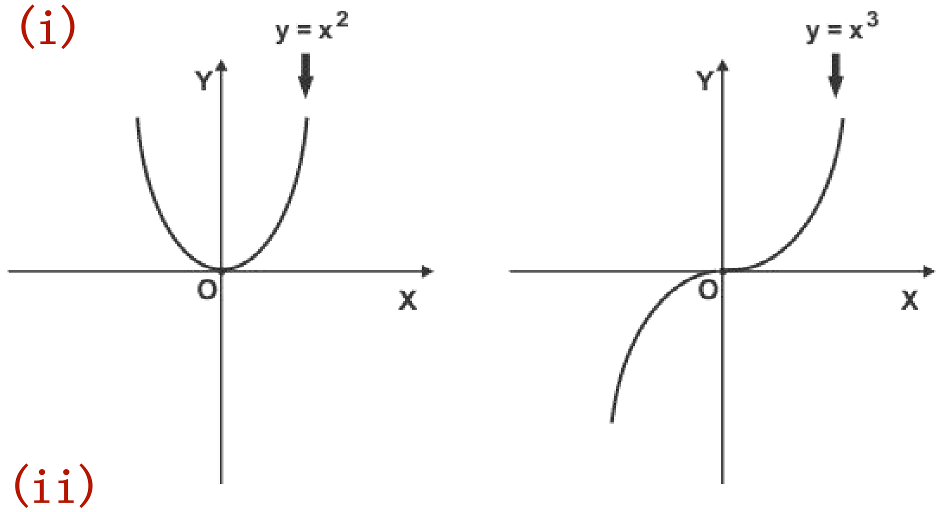
$$f(x) = x^a$$

onde a é uma constante, é chamada função potência.
Existem vários casos a considerar

(i) a=n, onde n é um inteiro positivo

São polinómios com um termo somente. A forma do gráfico depende de x: se for par, então f(x) é par e de forma semelhante à parábola (x^2), senão é ímpar e de forma semelhante a x^3. À medida que n cresce, gráfico de $y=x^n$ torna-se mais achatado próximo de zero, e mais inclinado em $|x| \geqslant 0$.

(i)

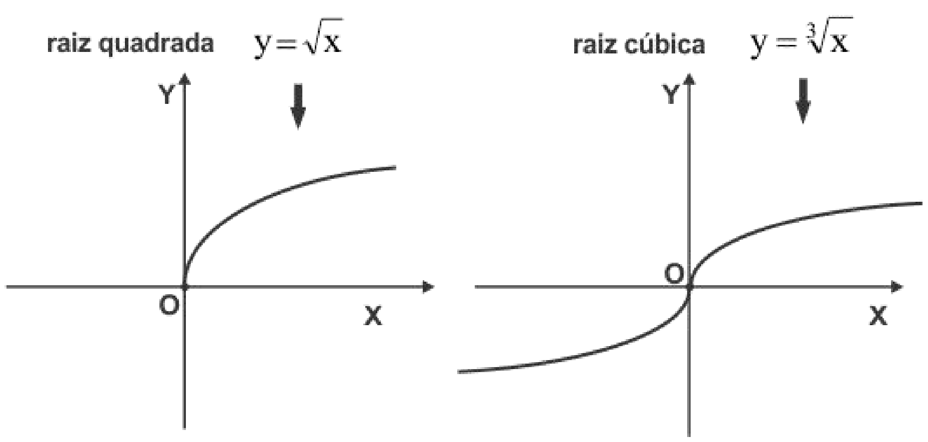


(ii) a=1/n, onde n é um inteiro positivo

é uma função raiz, para n=2 é a função raiz quadrada.
Para valores pares de de o gráfico de y é semelhante ao da raíz quadrada, para n ímpar, semelhante ao de raiz cúbica.

$$f(x) = x^{1/n}$$

(ii)



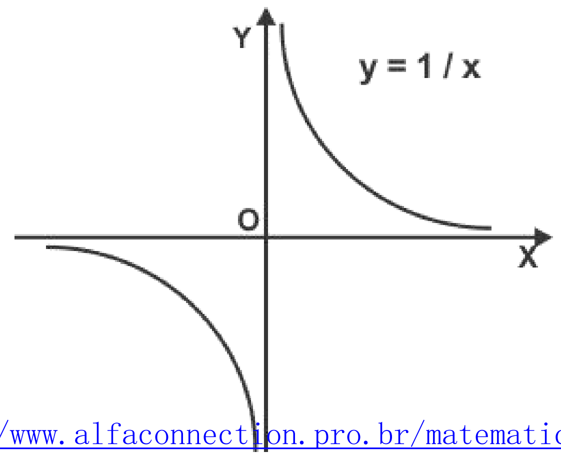
Função raiz de ordem n, sendo n um número inteiro e positivo → $y=\sqrt[n]{x}$

(iii) a=-1

Função recíproca, é uma hipérbole com os eixos coordenados como suas assimptotas.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(iii)



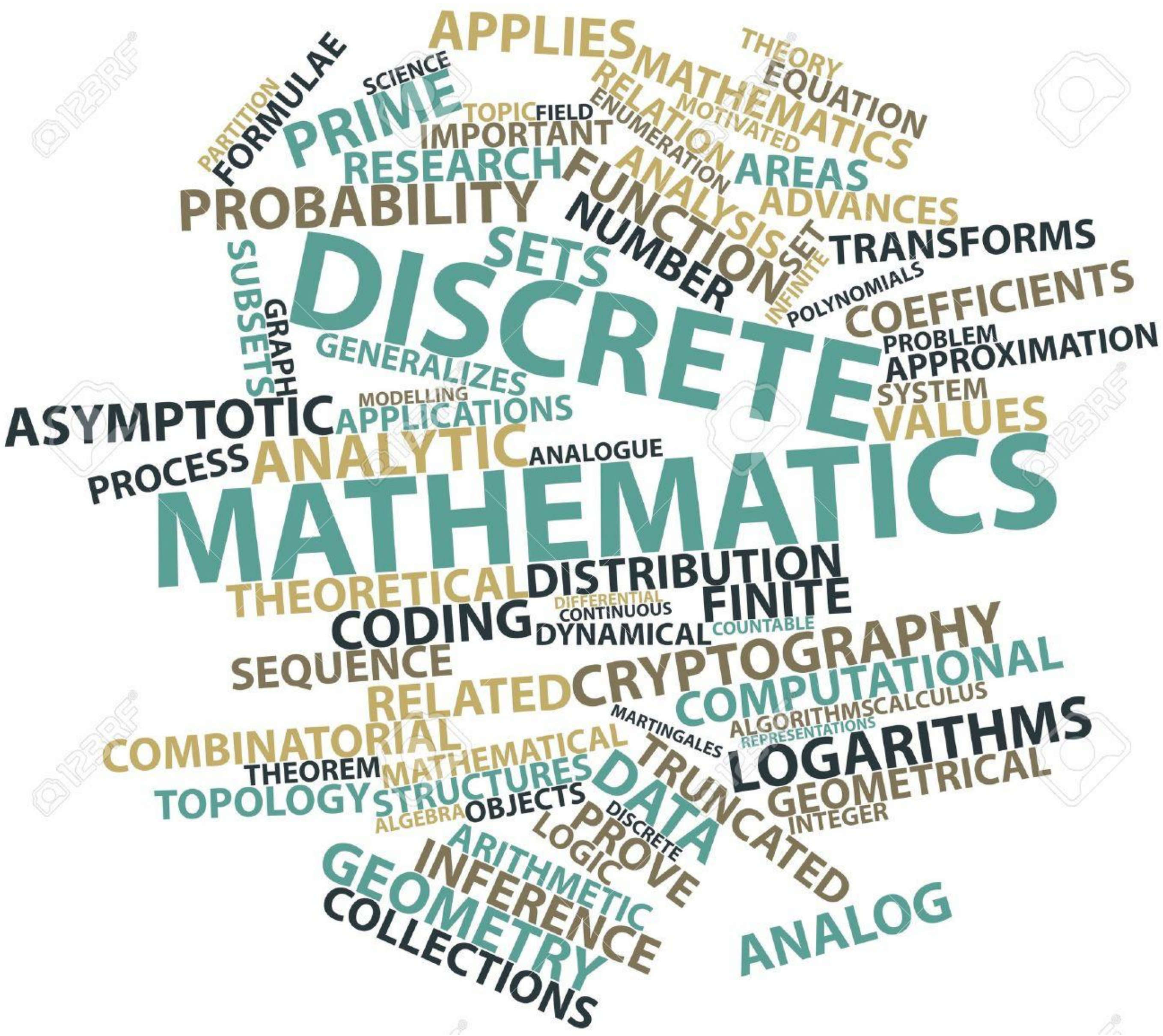
https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/

Dicas de Pesquisas

Domínio e contradomínio
https://www.youtube.com/watch?v=Y1urlgE0lBU&list=TLPQMjExMDIwMjBlZ6kBkQLY-w&index=6
Igualdade de funções
https://www.youtube.com/watch?v=lc6EoZAj7sQ
https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/

Objetivos da Aula

- Funções
  - Funções Elementares
  - Tipos de Funções
  - Operações com Funções
- Funções Lineares
  - Sistemas Lineares (introdução)



Funções Elementares

Função raiz quadrada

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

Propriedades da raiz quadrada

$$P1) \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \geq 0$$

$$P2) \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$$

$$P3) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x_1 \times x_2} = \sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2}$$

$$P4) \forall x_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$$

Função modular

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

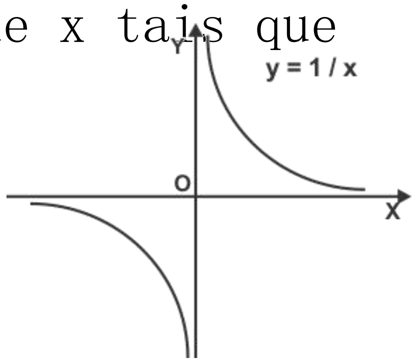
Funções Elementares

Função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Onde P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de x tais que Q(x)≠0.
Exemplo disso é a função recíproca já discutida.

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

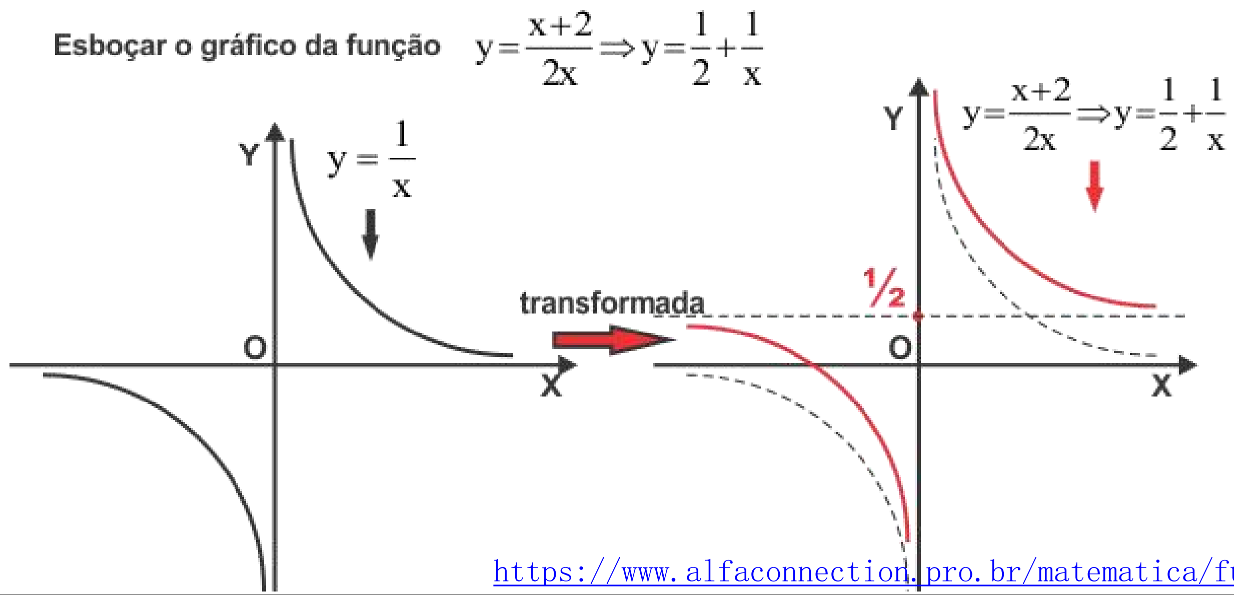


Função algébrica

Uma função f é chamada de função algébrica se puder ser construída por meio de operações algébricas como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes, a partir de polinômios.

Exemplo:

$$f(x) = \frac{x+2}{2x}$$



https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/

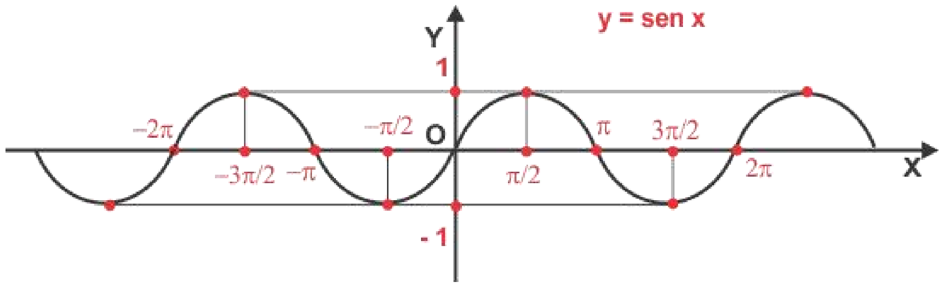
Funções Elementares

Funções trigonométricas

$$f: \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = senx$$

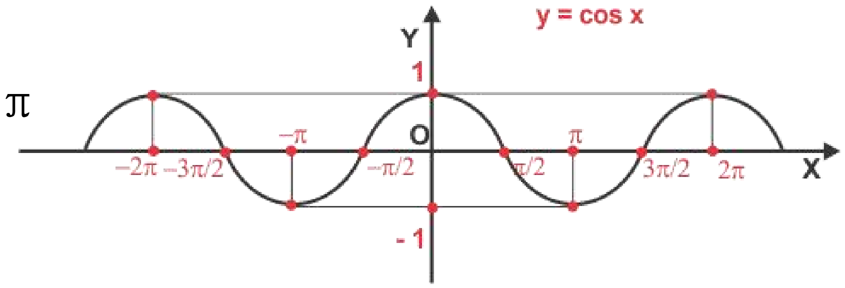
$$f: \mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = cosx$$

Em valores absolutos $|senx| \leq 1|cosx| \leq 1$



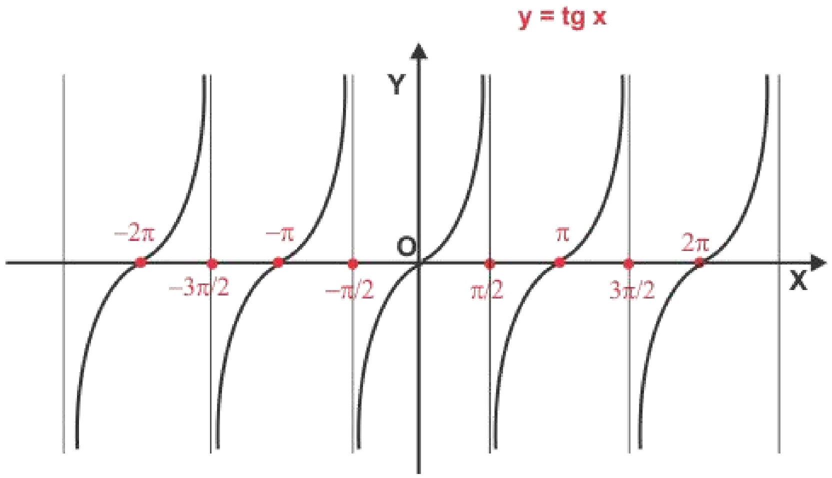
Os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π

$$senx = 0quandox = n\pi, nenumerointeiro$$



Uma propriedade importante destas funções é que são **periódicas**

$$sen(x + 2\pi) = senxcos(x + 2\pi) = cosx$$



Funções Elementares

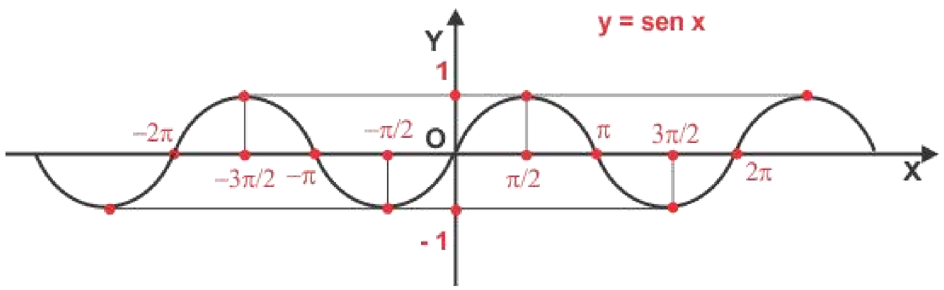
Funções trigonométricas (cont.)

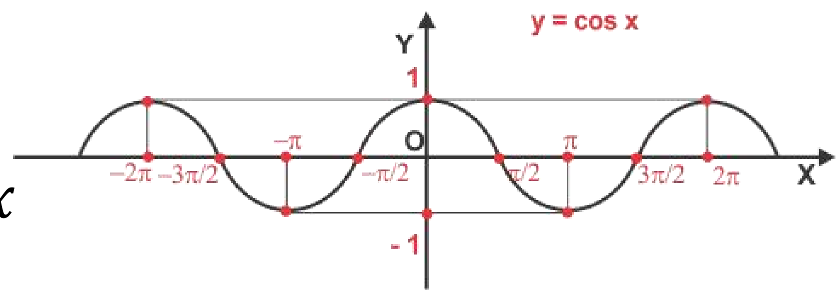
A **função tangente** relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

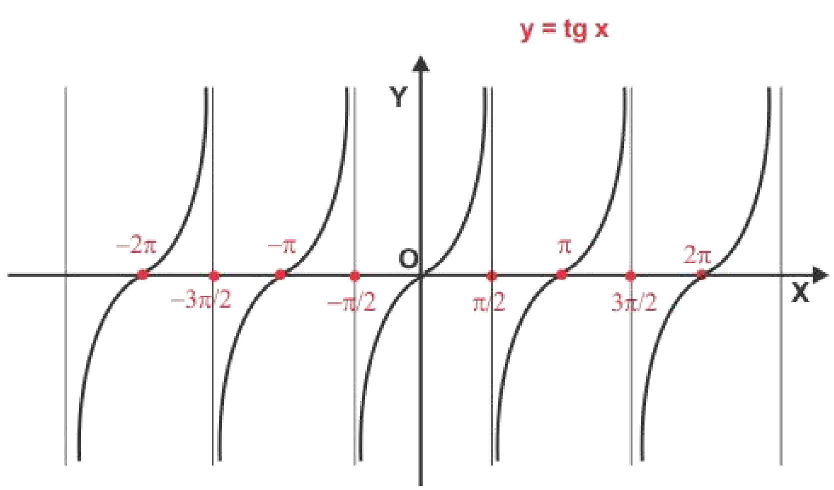
$$tgx = \frac{senx}{cosx}$$

não está definida quando cos x = 0, ou seja $x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2$

A função tangente é **periódica** $tg(x + \pi) = tg(x), paratodoox$







As restantes funções trigonométricas, cossecante, secante e cotangente, são as recíprocas de seno, cosseno e tangente

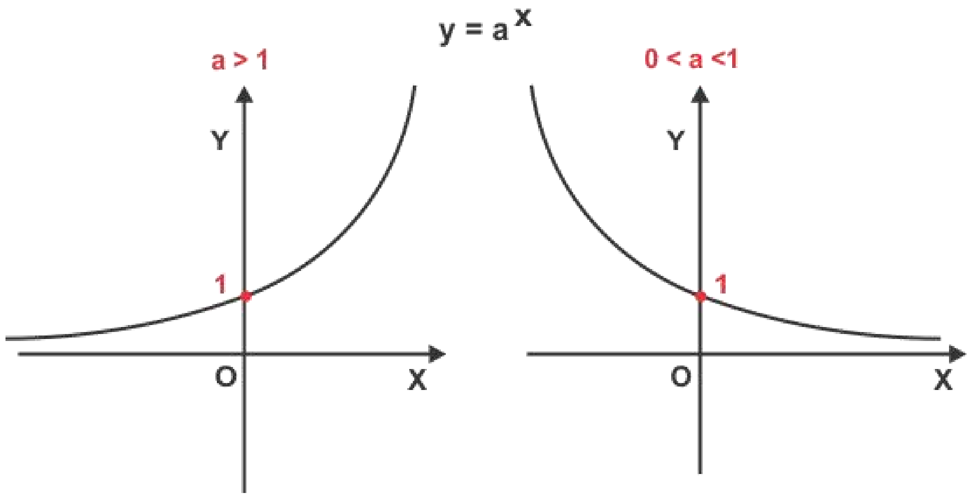
https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/

Funções Elementares

Funções exponenciais

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, f(x) = a^x$$

Onde a base a é uma constante positiva. São inversas das funções logarítmicas

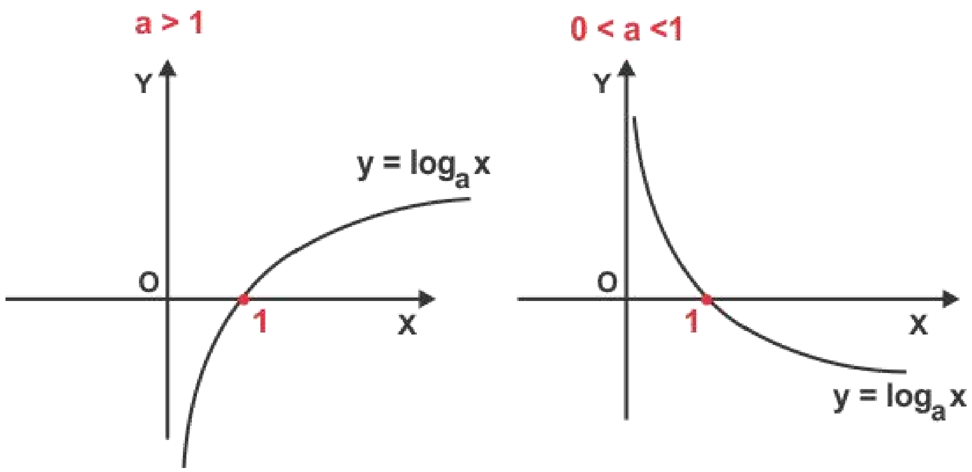


As funções exponenciais são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (a>1) ou decaimento radioativo (a<1)

Funções logarítmicas

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = log_a x$$

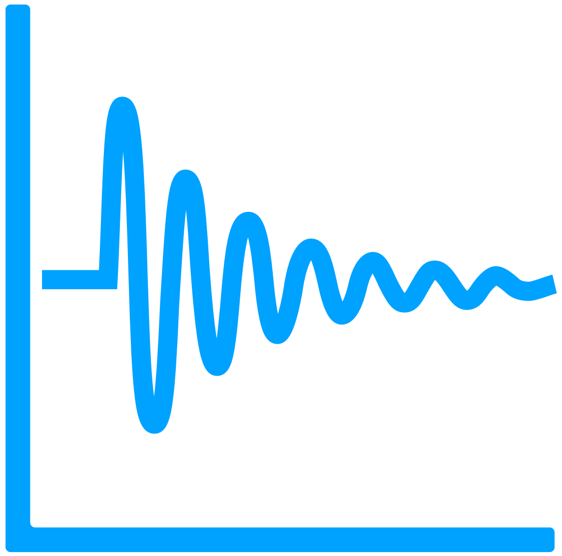
Onde a base a é uma constante positiva. São inversas das funções exponenciais



https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/

Representações de Funções

- Tabelas
- Gráficos
- Equações
  - A partir da equação de uma função é sempre possível obter uma tabela e o respectivo gráfico
  - Nem sempre é possível obter uma equação de uma função a partir de um conjunto de dados ou de um gráfico
- Quando é possível, temos a formulação de um **modelo matemático**
- A partir de um modelo matemático, podemos realizar **previsões** (estimativas) de fenômenos



Exemplo 1

- Custo para colocar 20l de gasolina depende do preço x

$$f(x) = 20x$$

- Encontre um possível conjunto para o domínio e a imagem, esboçando seu gráfico, e calcule f(3,74) e f(3,89), interpretando os resultados

- A gasolina em Natal está variando entre R$ 3,54 e R$ 3,999. Assim, o domínio é descrito como:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | 3{,}54 \leq x \leq 3{,}999 reais\}$$

- Como f(x) pode variar de R$ 70,80 a R$ 79,98, temos que a imagem pode ser descrita como:

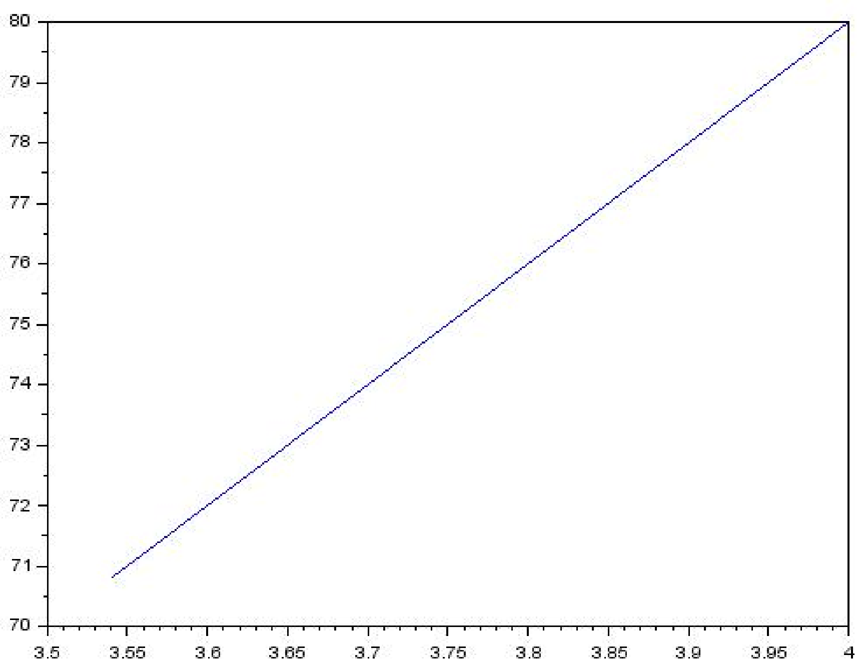
$$I = \{f(x) \in \mathbb{R} | 70{,}80 \leq x \leq 79{,}98 reais\}$$

Exemplo 1

- Substituindo x por alguns valores do domínio, descobrimos os valores de f(x) correspondentes e podemos obter a tabela e o gráfico da função

x	3,54	3,65	3,72	3,79	3,86	3,999
f(x)	70,80	73,00	74,40	75,80	77,20	79,98

- **Scilab:**
  - `-->x = [3.54 3.65 3.72 3.79 3.86 3.999]`
  - `-->fx = [70.80 73.00 74.40 75.80 77.20 79.98]`
  - `plot2d(x, fx)`



- **Determine**
  - f(3,74) = 20.(3,74) = 74,80
  - f(3,89) = 20.(3,89) = 77,80

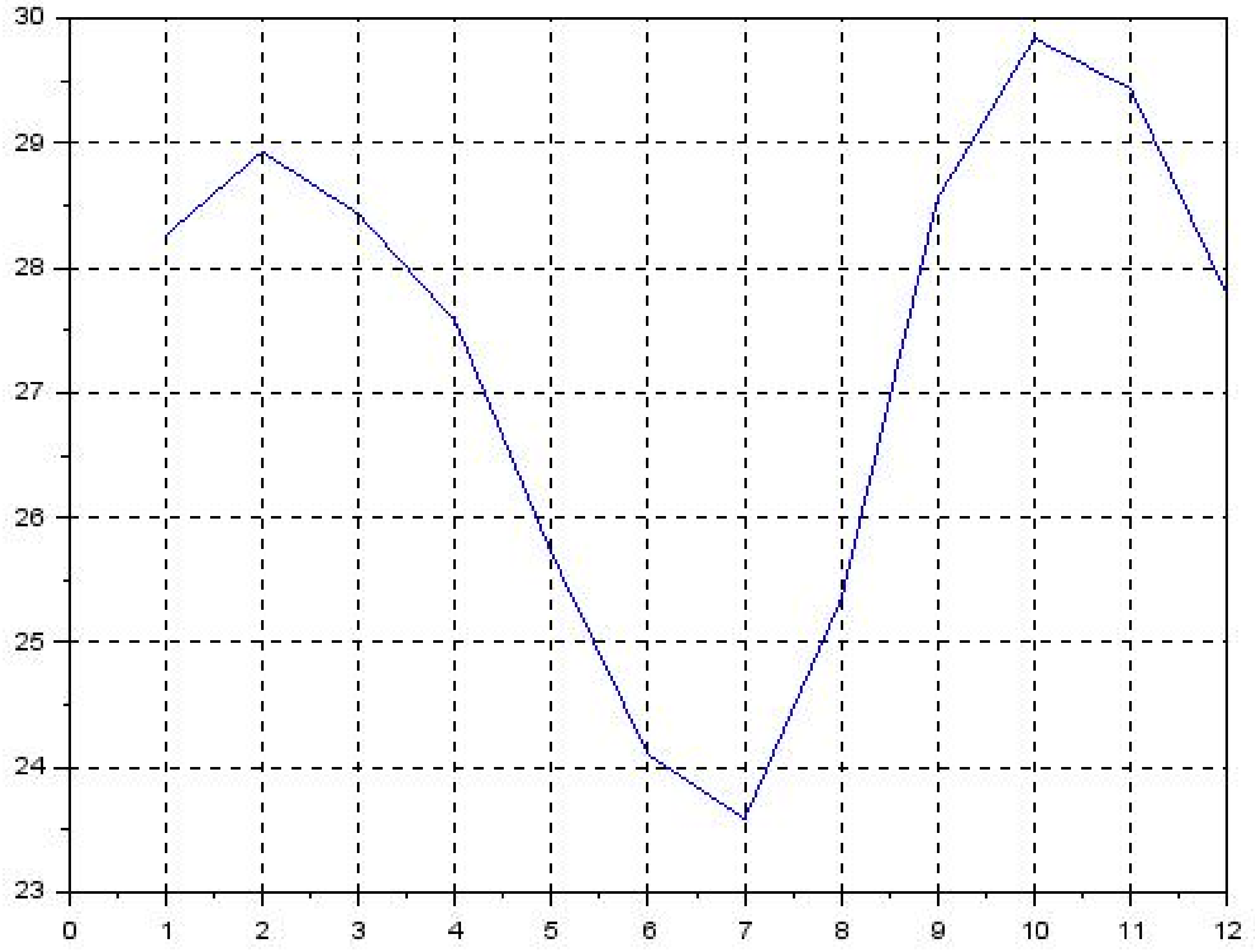
Exemplo 2

- Temperaturas médias mensais na superfície do solo sem cobertura vegetal, às 9hs, no período de 1980 a 1989, em Goiânia:

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
28.26	28.93	28.43	27.57	25.71	24.10	23.59	25.35	28.56	29.84	29.43	27.78

- Determine o domínio e a imagem da função, e esboce o gráfico
  - Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 12 meses\}$
  - Imagem: $I = \{f(x) \in \mathbb{R} | 23,59 \leq f(x) \leq 29,84 \; graus\ celcius\}$

Exemplo 2



OPERAÇÕES COM FUNÇÕES
&
TIPOS DE FUNÇÕES

Operações com funções

Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $D_f \cap D_g \neq 0$

1) Adição (subtração) de funções

$(f+g): D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,

2) Produto de Funções

$(f.g): D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$, tal que $(f.g)(x) = f(x).g(x)$,

3) Quociente de duas funções

$\left(\frac{f}{g}\right): D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,

4) Produto de uma constante por uma função

Seja $k \in \mathbb{R}$,

$(kf): D_f \to \mathbb{R}$, $(kf)(x) = kf(x)$

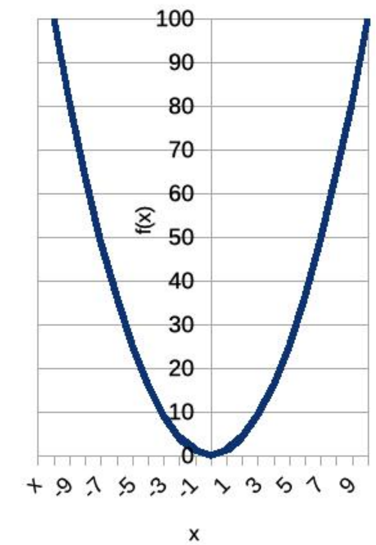
Tipos de Funções

Função Par e Ímpar (Simetria)

Seja o conjunto A, $A \subset \mathbb{R}$, *tal que, para todo* $x \in A$, *exista* $(-x) \in A$

Diz−se que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *é uma função par, se* $f(-x) = f(x)$

Simetria em relação ao eixo yy

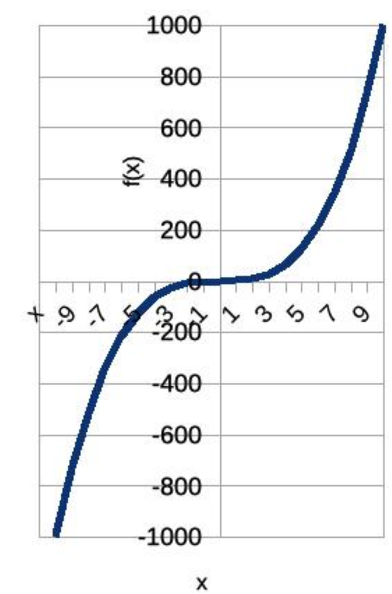


Exemplo: $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Diz−se que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ *é uma função ímpar, se* $f(-x) = -f(x)$

Simetria em relação à origem



Exemplo: $f(x) = x^3$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

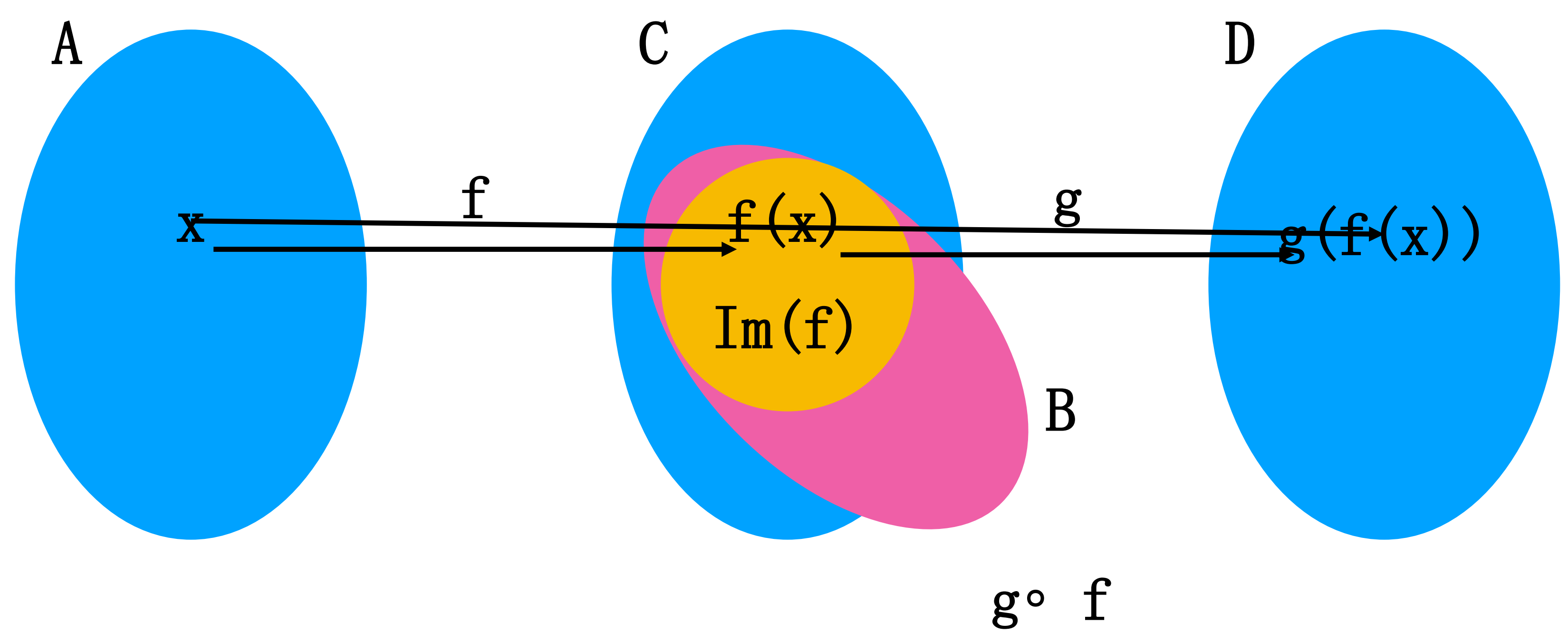
https://www.youtube.com/watch?v=5Z2BojI2pSw

Tipos de Funções

Função Composta

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: C \to D$ *funções tais que,* $Im(f) \subset (D(g) = C)$

A função $g \circ f: A \to D, x \mapsto g(f(x))$ *denomina-se* *composta de g e f ou g composto com f*



Se $Im(f) \not\subset D(g)$ *então a função composta* $g \circ f$ *não pode ser definida*

Contudo se existir $H \subset D_f = A$ *tal que* $Im(f/H) \subset D_g$ *então pode-se definir a composta* $g \circ (f/H)$ *de* H *em* D

Função Composta

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = x + 3.$$

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Cálculo de $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = 2x + 3.$$

Cálculo de $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6.$$

x	$f(x) = 2x$	$(g \circ f)(x) = 2x + 3$	$(f \circ g)(x) = 2x + 6$
0	0	3	6
1	2	5	8
-1	-2	1	4

Função Composta

Se tivermos três funções

$$f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D,$$

então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ou seja, a ordem de agrupamento não altera o resultado final da composição (mas **não** a ordem em que você aplica f, g e h).

Em resumo, **função composta** é a aplicação sequencial de funções: o resultado de uma vira a entrada da próxima.

Função Composta

Escolhemos três funções simples:

1. $f(x) = 2x$
2. $g(x) = x + 3$
3. $h(x) = x^2$

Todas têm domínio e contradomínio em $\mathbb{R}$.

1. $h \circ (g \circ f)$
   - Primeiro $g \circ f$:
   $$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = 2x + 3.$$
   - Depois h desse resultado:
   $$\big[h \circ (g \circ f)\big](x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h(2x + 3) = (2x + 3)^2.$$
2. $(h \circ g) \circ f$
   - Primeiro $h \circ g$:
   $$(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) = h(x + 3) = (x + 3)^2.$$
   - Depois f desse resultado:
   $$\big[(h \circ g) \circ f\big](x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = (h \circ g)(2x) = (2x + 3)^2.$$

Em ambos os casos chegamos à **mesma expressão**:

$$(h \circ (g \circ f))(x) \;=\; \big((h \circ g) \circ f\big)(x) \;=\; (2x + 3)^2.$$

Tipos de Funções

Função Composta (cont.)

Exemplo:

Considere as funções f e g

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = 1 + \sqrt{x}$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - 1$$

$Se Im(f) \subset D(g), então g \circ f \text{ pode ser definida}$

$f \text{ é crecente em} \mathbb{R}_+ e f(0) = 1 \text{ é o menor valor do conjunto imagem, logo,}$

$Im(f) = [1, +\infty[. Portanto Im(f) \subset D(g)$

$A \text{ funçã} o g \circ f \text{ terá} \mathbb{R}_+ \text{ como domínio, coincidente com o domínio da funçã} o f$

$e \text{ contradomínio} \mathbb{R}, \text{ coincidente com o da funçã} o g$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + \sqrt{x}) = 2(1 + \sqrt{x}) - 1 = 1 + 2\sqrt{x}$$

Tipos de Funções

Igualdade de Funções

$$Dados f: A \to \mathbb{R} e g: B \to \mathbb{R}, onde A e B são funções iguais se A = B$$

$$e f(x) = g(x) para todo x de A$$

Exemplo:

Verifique se as funções f e g são iguais

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^4} e g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

Temos que

$$D(f) = D(g) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x^4} = |x^2| = x^2 = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo iguais.

Tipos de Funções

Função Crescente e Decrescente

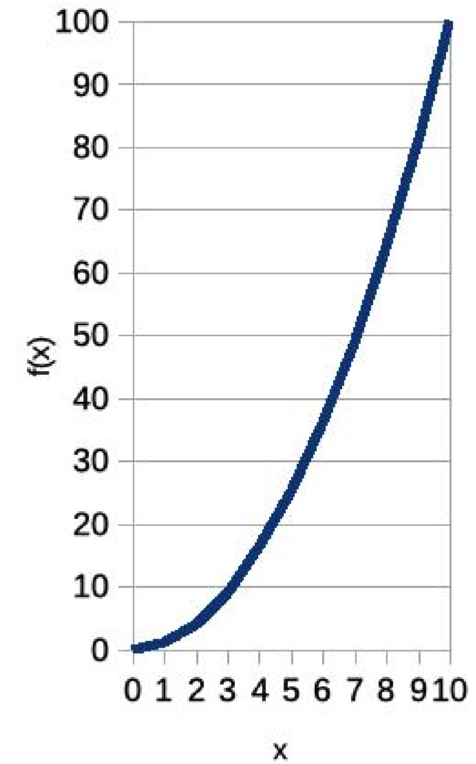
$$Seja\, f: D(f) \to \mathbb{R}\, uma\ função\ e\, A \subset D(f) \subset \mathbb{R}$$

$Dizemos\ que\, f\ é\ crescente\ em\, A\, se\, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$Dizemos\ que\, f\ é\ estritamente\ crescente\ em\, A\, se\, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$Dizemos\ que\, f\ é\ decrescente\ em\, A\, se\, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$Dizemos\ que\, f\ é\ estritamente\ decrescente\ em\, A\, se\, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2$



Exemplo:

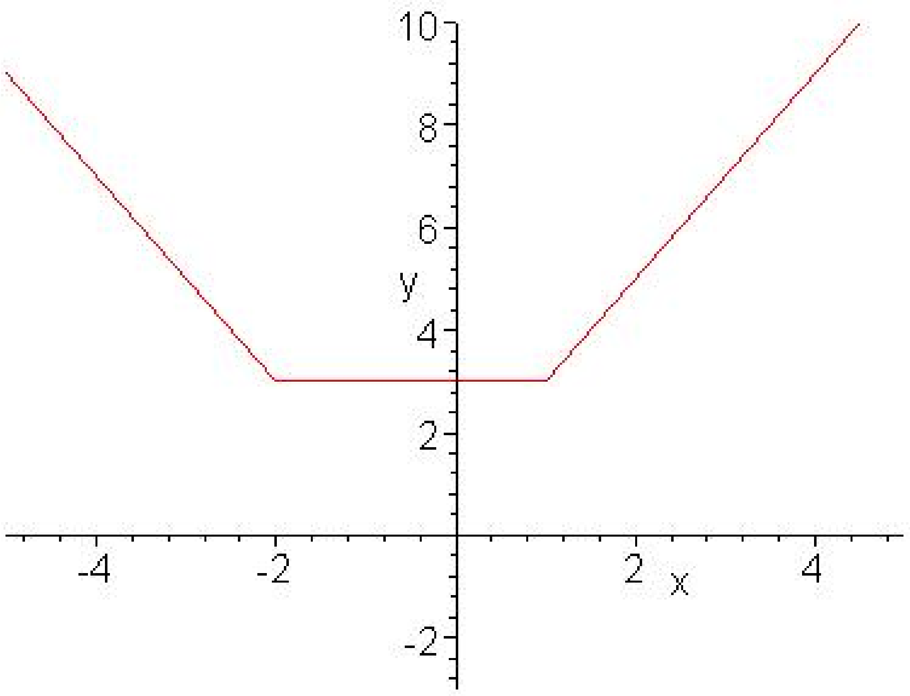
Considere a função f $\quad f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

f(x) é estritamente crescente no domínio, pois

$$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[, 0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

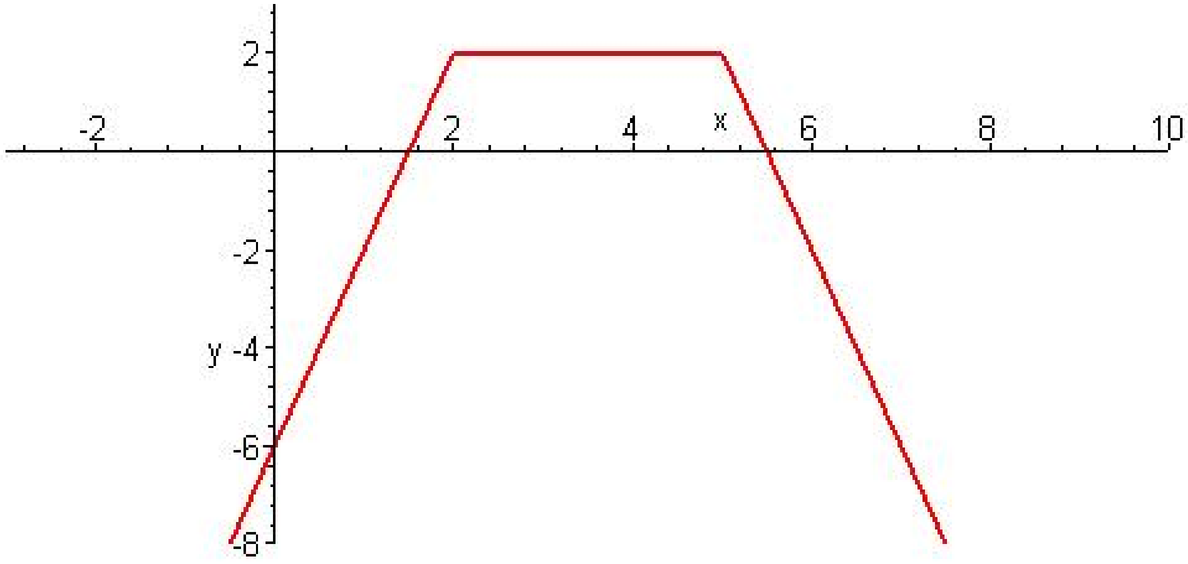
Exemplo 3

- Decrescente para x <= -2
- Constante para -2 < x < 1
- Crescente para x >= 1



Exemplo 4

- Crescente para x <= 2
- Constante para 2 < x < 5
- Decrescente para x >= 5



Tipos de Funções

Função injetora: Diz-se que uma função f é injetora se a diferentes valores de x correspondem valores distintos de f(x)

$$f: A \to B, A \subset \mathbb{R} e B \subset \mathbb{R}, e injetora se, \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) ou$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

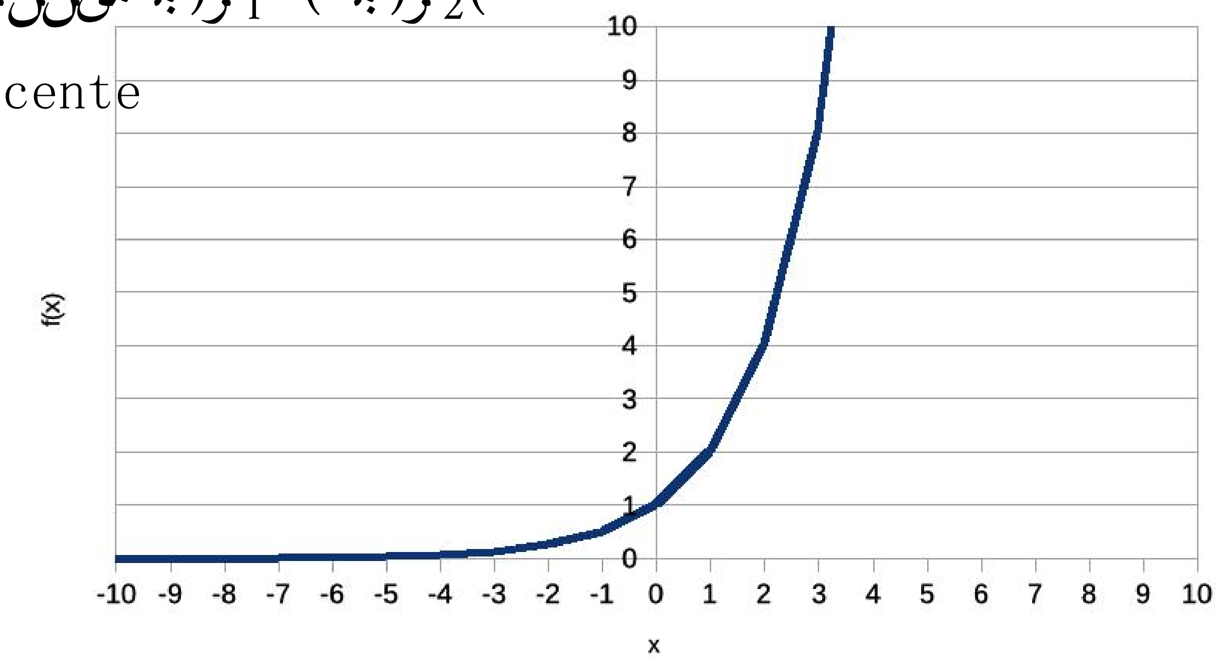
Se uma função f é estritamente crescente ou estritamente decrescente então f é injetora

A função f não é injetora se existirem e y>0 corresponde a um único x

Exemplo:

A função f é injetora pois é estritamente crescente

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$$



Tipos de Funções

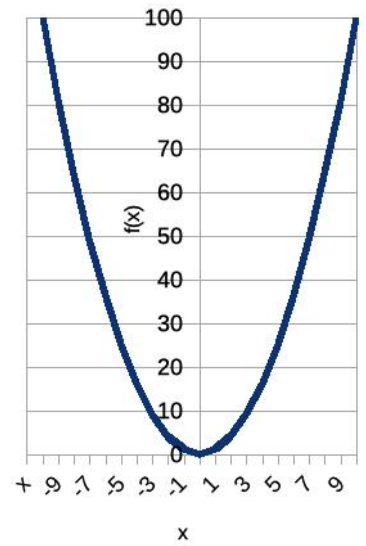
Função sobrejetora: diz-se que uma função f:A->B é sobrejetora se Im(f)=B

$$f: A \rightarrow B, A \subset \mathbb{R} e B \subset \mathbb{R}, e sobrejetora \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A tal que f(x) = y$$

Exemplo:
A função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}, f(x) = x^2 e sobrejetora, pois Im(f) = \mathbb{R}_{+}$$

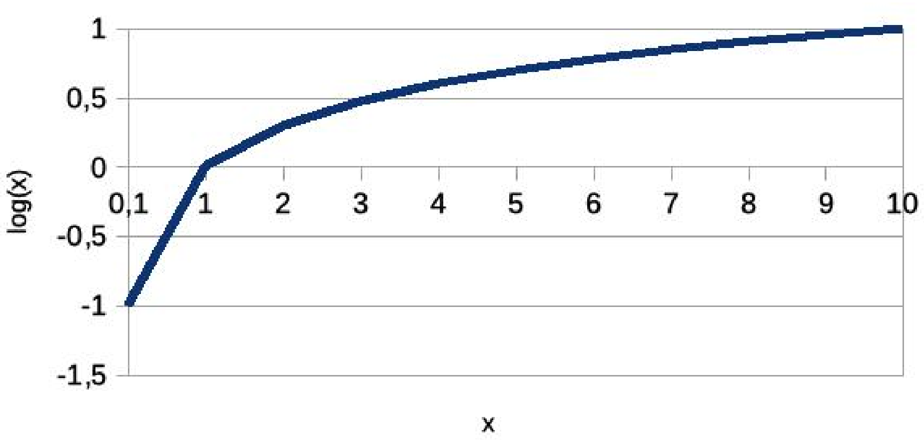
mas não é injetora pois não é estritamente crescente ou decrescente
Portanto não é sobrejetora



Função bijetora: diz-se que uma função f: A->B é bijetora se for injetora e sobrejetora

Exemplo:
A função $f: \mathbb{R}_{+}^{*} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = log_a(x), 0 < a \neq 1$

é bijetora, pois é injetora e sobrejetora



Tipos de Funções

Função inversa

$$Seja f: A \to B \text{ uma função bijetora.}$$

$$Diz\text{–}se\ que\ f^{-1}: B \to A \text{ é inversa de } f\text{, se para cada } y \in B \text{ existe um único } x \in A$$

$$tal\ que\ y = f(x)$$

$$(f^{-1} e inversa de f) \Leftrightarrow (\forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x))$$

Exemplo:

Determine a função inversa de f $f: [-2, +\infty[\to \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{3x+6}$

$$\forall x_1, x_2 \in [-2, +\infty[, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3x_1+6} = \sqrt{3x_2+6} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{3x_1+6})^2 = (\sqrt{3x_2+6})^2 \Rightarrow |3x_1+6| = |3x_2+6|$$

As expressões são positivos ou zero, então $3x_1 + 6 = 3x_2 + 6 \Rightarrow x_1 = x_2$, f é injetora

Tipos de Funções

Exemplo (continuação):
Se f é sobrejetora então

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [-2, +\infty[, tal que f(x) = y$$

$$y = \sqrt{3x+6} \Rightarrow x = \frac{y^2-6}{3}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists \frac{y^2-6}{3} \in [-2, +\infty[, tal que f(x) = f(\frac{y^2-6}{3}+) =$$

$$= \sqrt{3\frac{y^2-6}{3}+6} = \sqrt{y^2} = |y| = y, pois y \geq 0$$

f é sobrejetora. Portanto f é bijetora.

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [-2, +\infty[, sendo x = f^{-1}(y) = \frac{y^2-6}{3}$$

Representação Gráfica de Funções

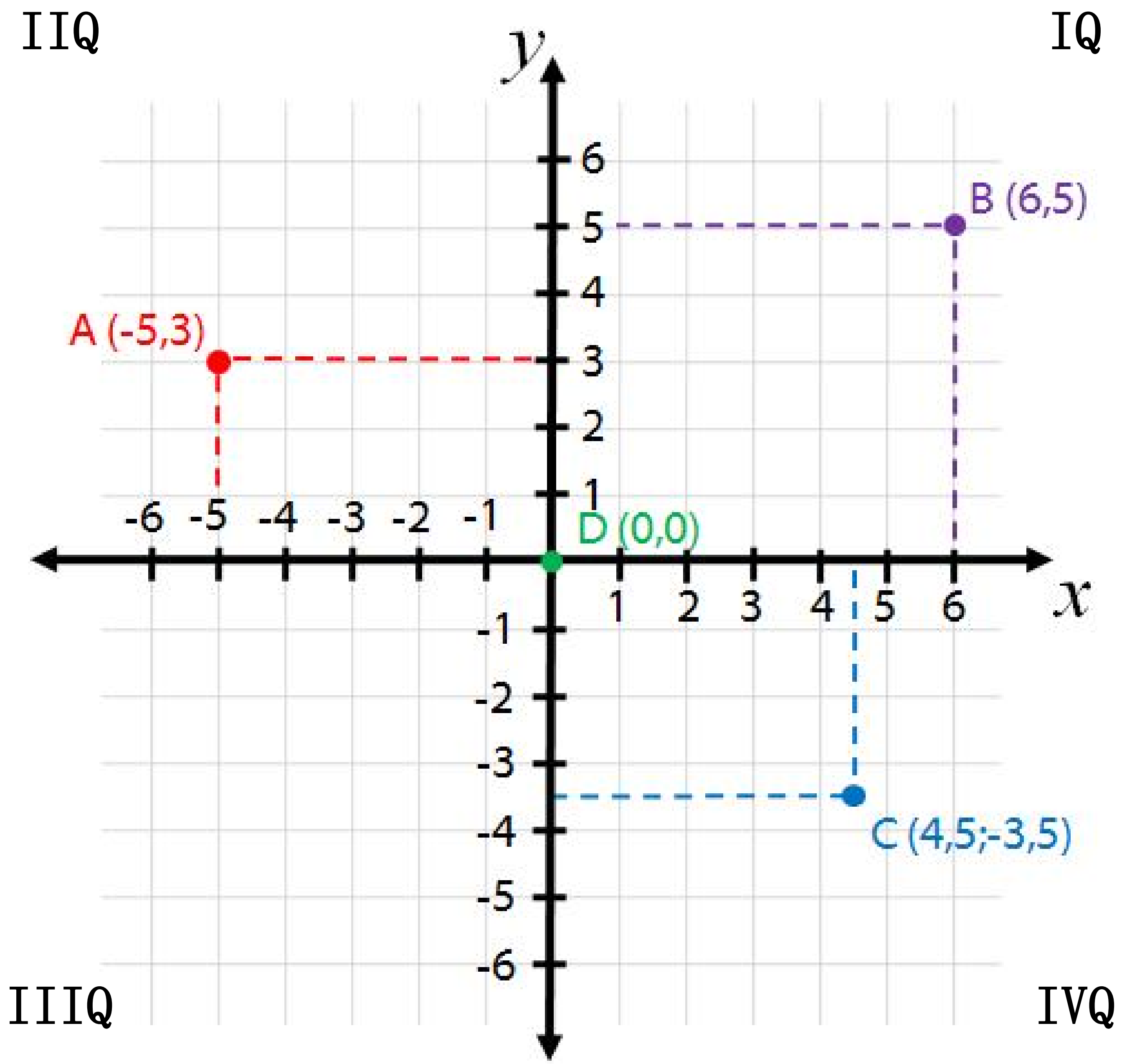
Plano Cartesiano

O gráfico de uma função f : X → Y é o conjunto de todos os pontos (x, y) do produto cartesiano X×Y tais que

y=f(x), isto é,

Graf(f)={(x,y)∈X×Y :y=f(x)}

Para esboçar o gráfico de uma função f devemos determinar, se existir, as interseções com os eixos coordenados, isto é
(0, f(0)) ou (x, f(x) = 0)

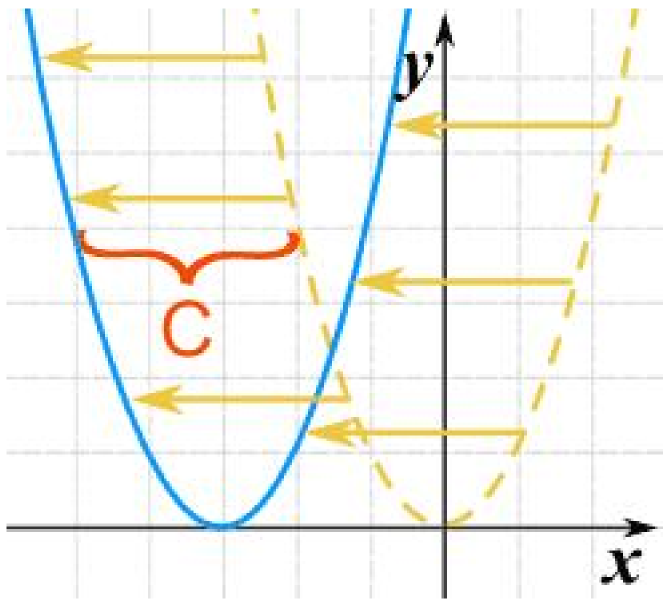


Transformações de Funções

Suponha c>1

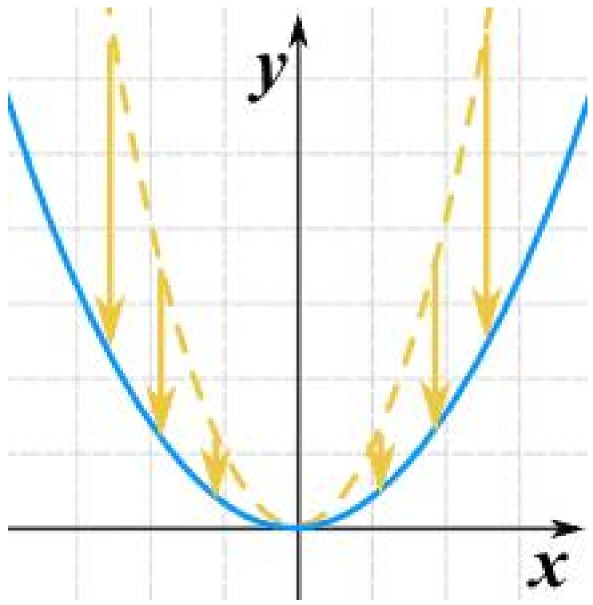
- Deslocamentos Verticais e Horizontais

  - $y = f(x) + c$ Desloca o gráfico de y em c unidades para cima
  - $y = f(x) - c$ Desloca o gráfico de y em c unidades para baixo
  - $y = f(x - c)$ Desloca o gráfico de y c unidade para a direita
  - $y = f(x + c)$ Desloca o gráfico de y em c unidades para a esquerda

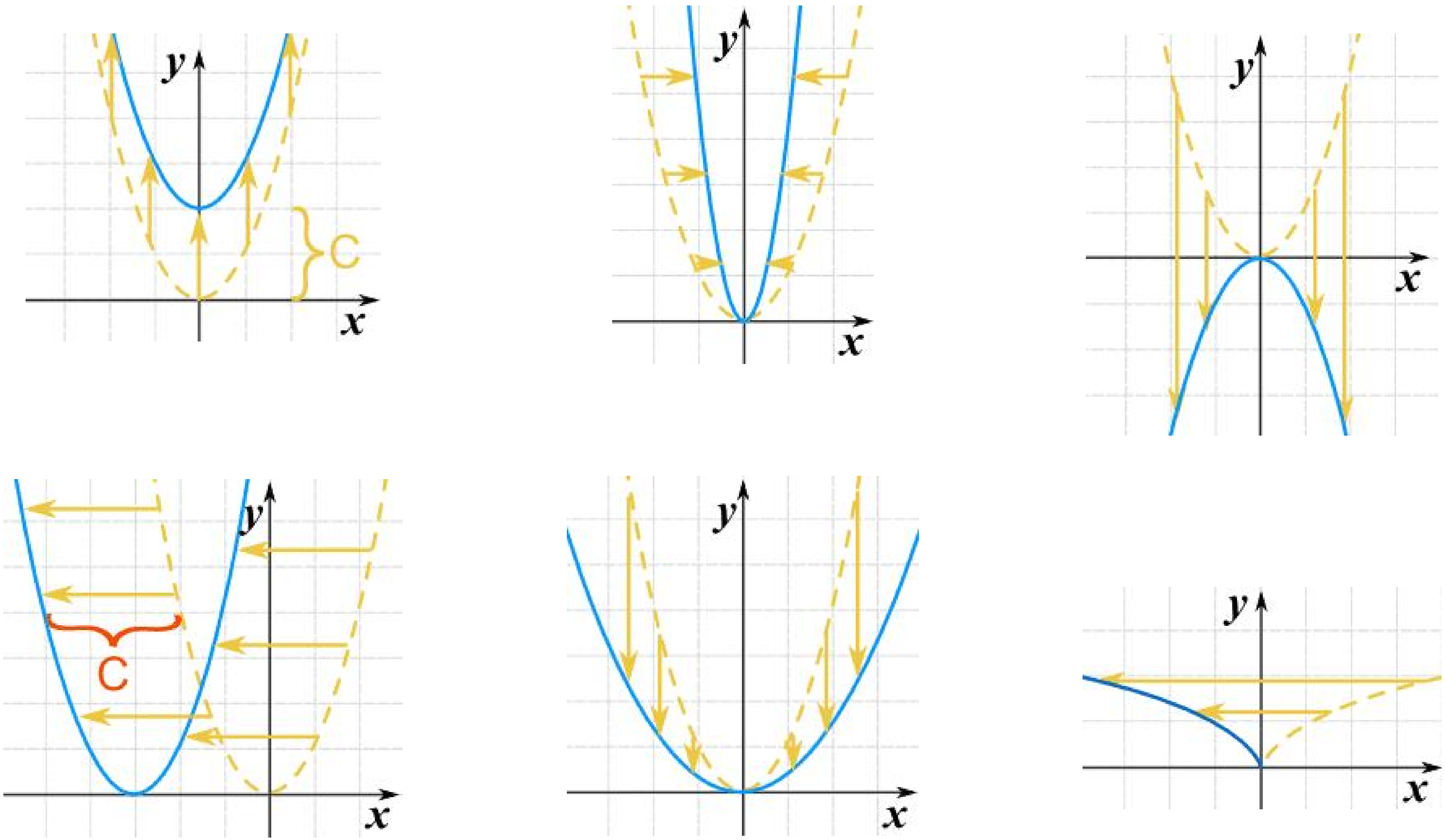


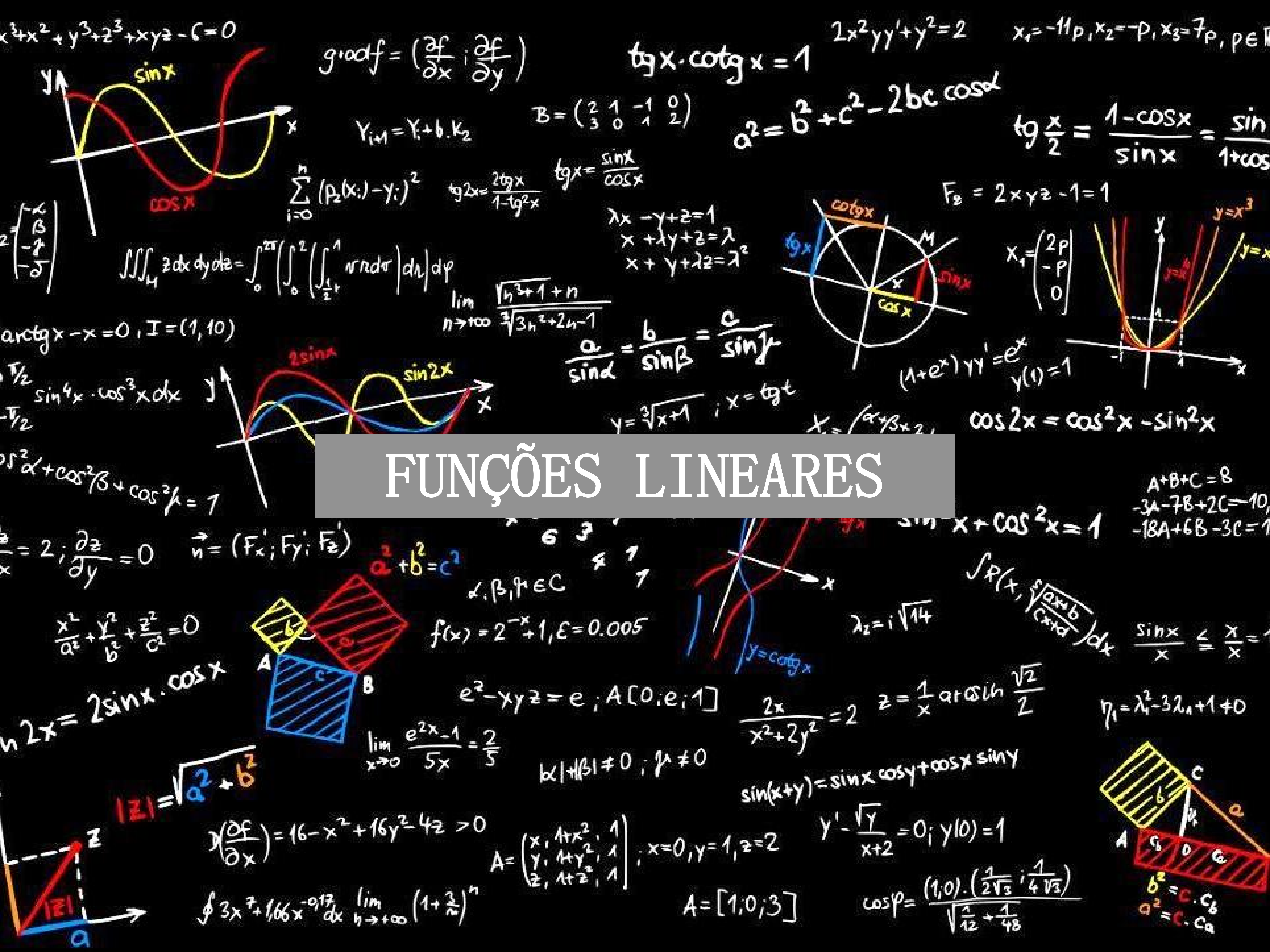
- Reflexões e Expansões Horizontais e Verticais

  - $y = cf(x)$ Expande o gráfico de y verticalmente por um fator de c
  - $y = \frac{1}{c} f(x)$ Comprime o gráfico de y verticalmente por uma fator de c
  - $y = f(cx)$ Comprime o gráfico de y horizontalmente por um fator de c
  - $y = f(\frac{1}{c} x)$ Expande o gráfico de y horizontalmente por um fator de c
  - $y = -f(x)$ Reflete o gráfico de y em torno do eixo x
  - $y = f(-x)$ Reflete o gráfico de y em torno do eixo y



Transformações de Funções





FUNÇÕES LINEARES

Função Constante

Função constante: uma função f recebe o nome de constante quando a cada elemento de x pertencente ao domínio, associa sempre o mesmo elemento c

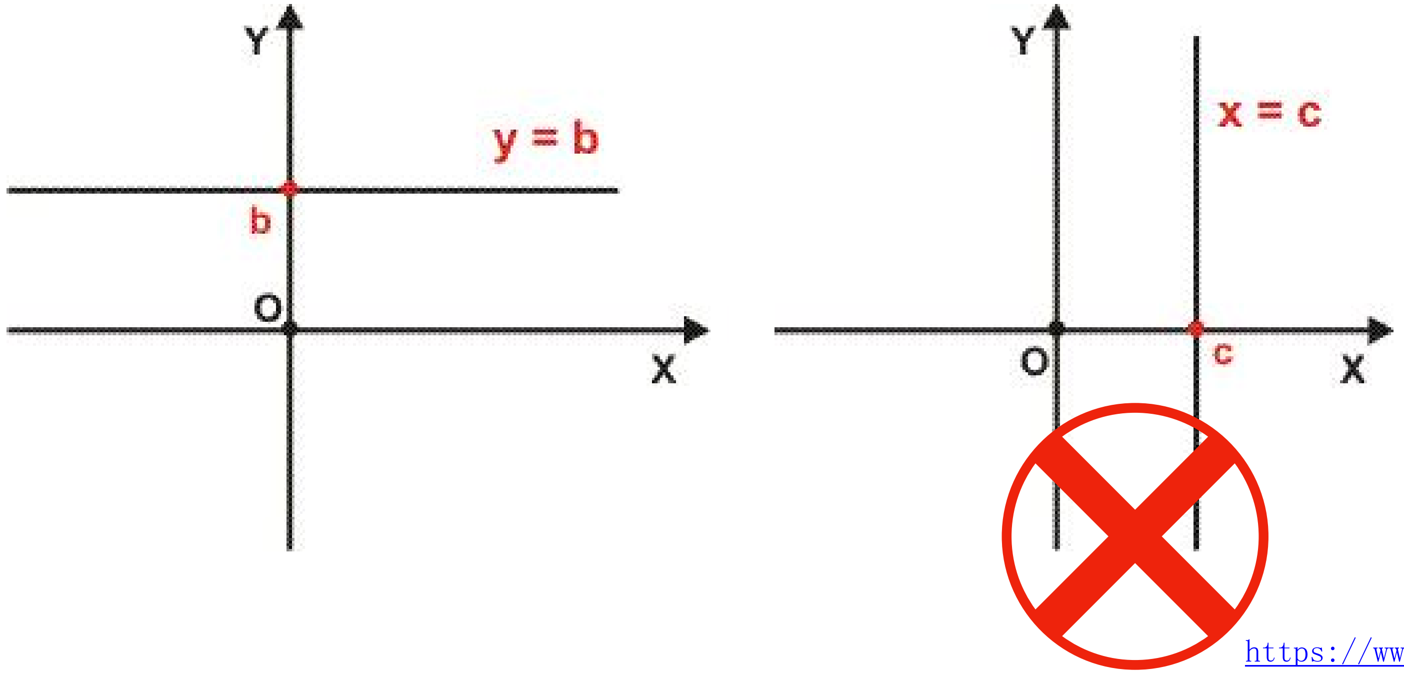
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x, passando pelo ponto (0, c)

Exemplos: Construir os gráficos das aplicações de R em R definidas por

(a) y=3

(b) y=1



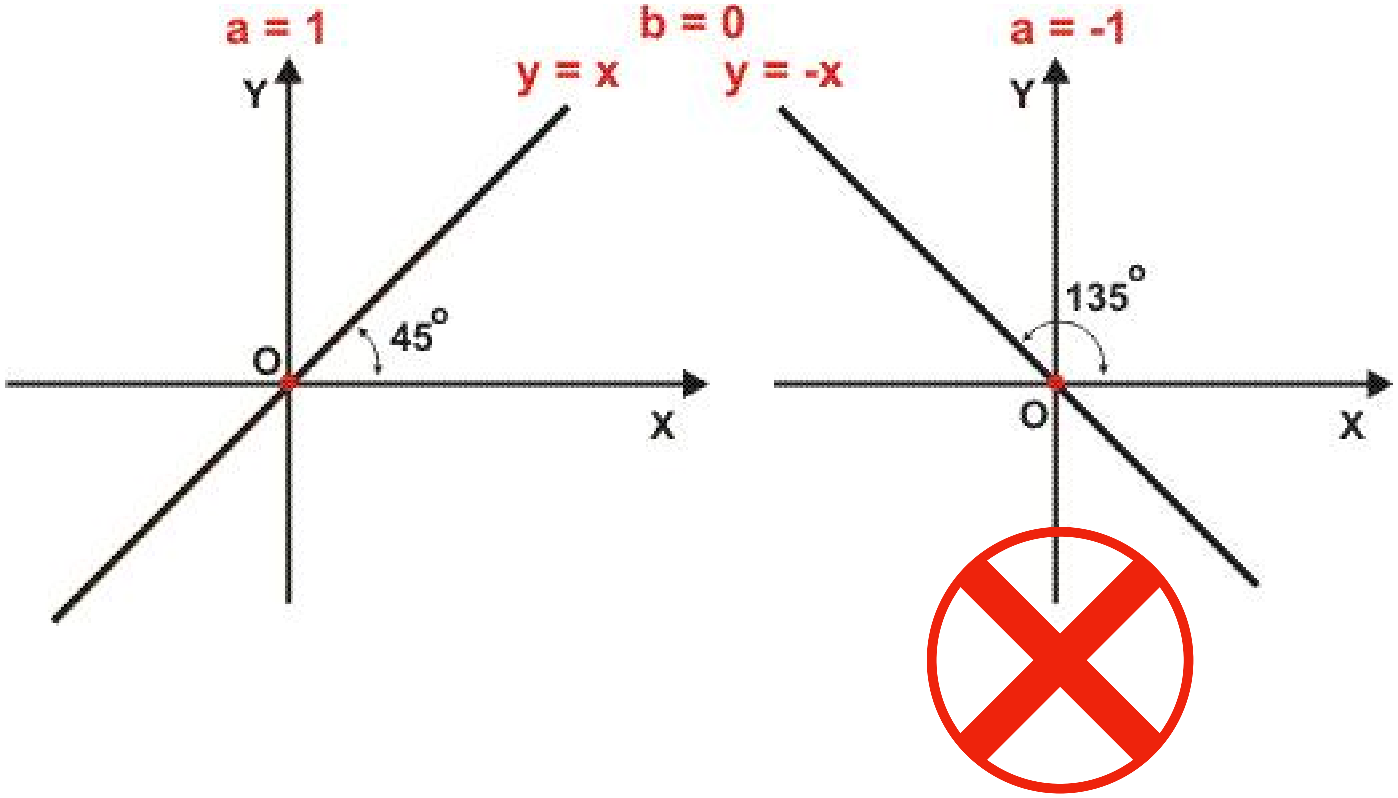
https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoe

Função Identidade

Função identidade: uma função f recebe o nome de identidade quando a cada elemento de x pertencente ao domínio, associa o próprio x

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$$

O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissectrizes do primeiro e 3 quadrantes.
A imagem é o conjunto R



https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoe

Função Linear

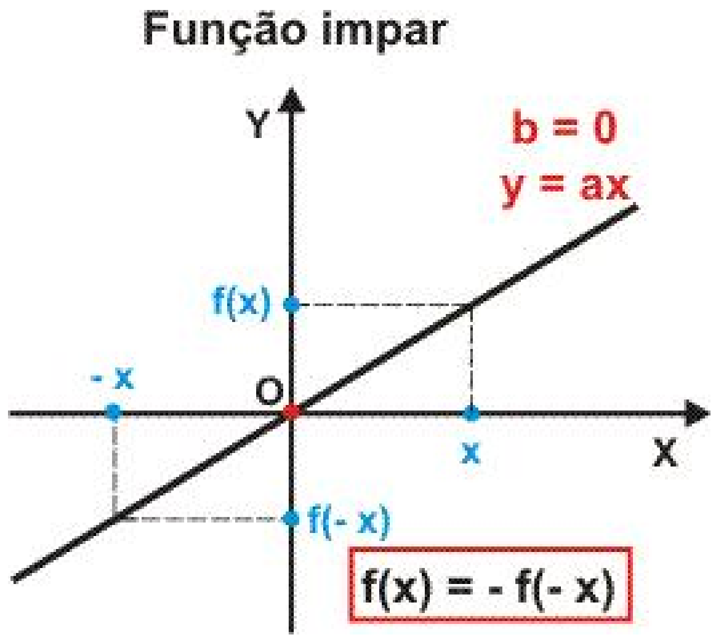
Função linear: uma função f recebe o nome de linear quando a cada elemento de x pertencente ao domínio, associa o elemento ax em que a≠0 é um número real dado

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax, a \neq 0$$

Demonstra-se que o gráfico da função linear é uma reta que passa na origem. De fato, qualquer que seja o y real, existe

$$x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}, a \neq 0, tal que$$

$$f(x) = f(\frac{y}{a}) = a.\frac{y}{a} = y$$



Nota: se a=0 teríamos a função constante y=0

Função Afim

Função afim: uma função f recebe o nome de afim quando a cada elemento de x pertencente ao domínio, associa sempre o mesmo elemento (ax+b) real, em que $a \neq 0$ e b são números reais dados

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0$$

Note-se que para b=0, a função afim se transforma na função linear y=ax. Assim, a função linear é um caso particular da função afim

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Função Afim – Coeficientes

Declive: O coeficiente a da função y = ax + b é denominado coeficiente angular ou declive da reta representada no plano cartesiano

Coeficiente linear: O coeficiente b da função y = ax + b é denominado coeficiente linear

Exemplos:
(1) Na função y=2x+1 o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1.

Nota: Observe que se x=0 y=1, portanto o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y

(2) Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto (1,3) e tem coeficiente angular igual a 2
A equação procurada é y=ax+b, em que a=2
Substituindo x=1, y=3 e a=2 na equação, obtém-se

$$3 = 2.1 + b \Rightarrow b = 1$$

A equação procurada é

$$y = 2x + 1$$

Função Afim - Zero

Zero da função: O zero de uma função é todo o número cuja imagem é nula, isto é f(x)=0

Assim para determinarmos o zero de uma **função afim**, basta resolver a equação de 1º grau

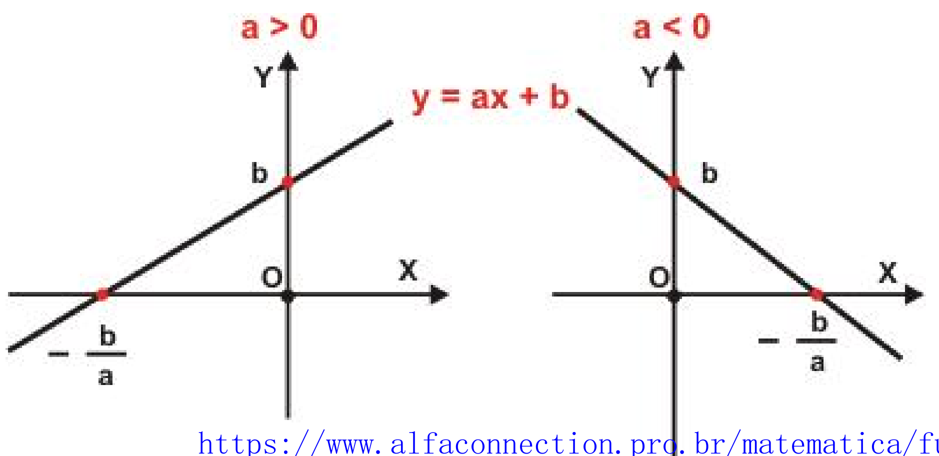
$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemplos:

(1) O zero da função f(x)=2x-1 é x=1/2 pois

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

O zero da função é a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos x



https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes

Definição

- Dada uma função linear $f(x) = ax+b$:
- Se $a > 0$, temos uma **função crescente**
- Se $a < 0$, temos uma **função decrescente**
- Se $a = 0$, temos uma **função constante**

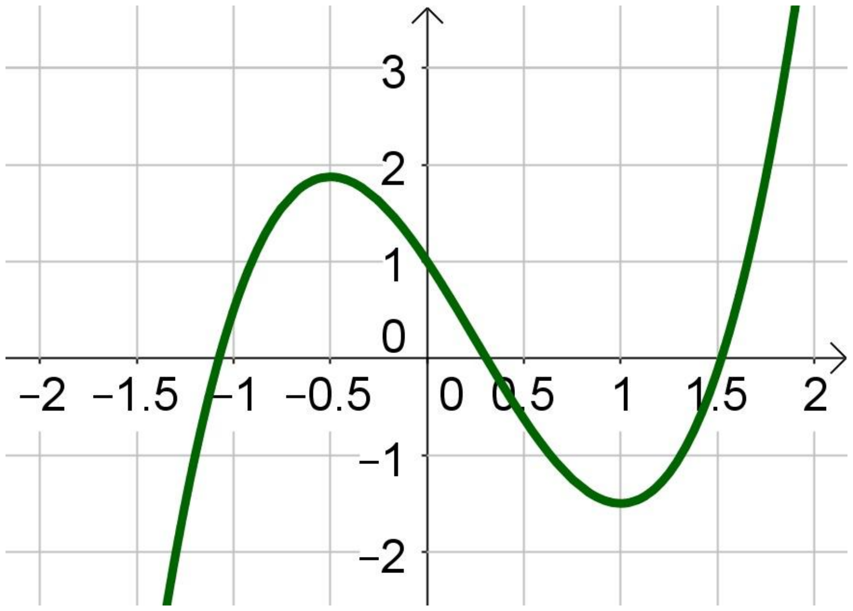
Sinal de uma Função

Seja a função f:A->B definida por f(x). O objectivo é resolver o problema **"para que valores de x temos f(x)>0, f(x)=0 ou f(x)<0?"**

Resolver este problema significa estudar o sinal da função y=f(x) para cada x pertencente ao seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função quando ela está representada no plano cartesiano basta examinar se a ordenada a cada ponto da curva é positiva, nula ou negativa.

Exemplo:
Estude o sinal de f(x)



Função Afim - Sinal

Sinal da função afim

Considerando que x=-b/a, zero da função afim f(x)=ax+b, é o valor de x para o qual f(x)=0, examinemos então para que valores ocorre f(x)>0 ou f(x)<0

Devem ser considerados 2 casos:

(I) a>0

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

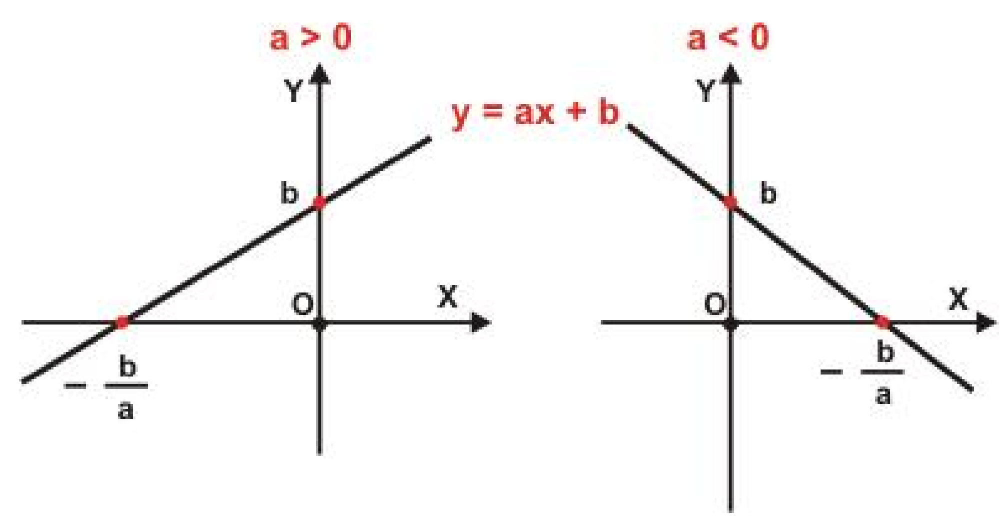
(II) a<0

$$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Valor de a	Valor de x	x_1
a > 0	−	+
a < 0	+	−

Sinal de y = f (x)



https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoe

Exemplo 5

- Função linear caracteriza-se por representar um **crescimento** ou **decrescimento** constantes
  - Uma função é dita linear se qualquer mudança na variável independente causa uma mudança proporcional na variável dependente

Exemplo: Em determinada época do ano, com temperatura mínima do ar igual a 9, a temperatura mínima da superfície do solo f é predita em função do resíduo de planta e biomassa na superfície x (g/m^2)

x	10	20	30	40	50	60	70
f(x)	7.24	7.30	7.36	7.42	7.48	7.54	7.60

- Calculando as variações da função pelas variações na variável, temos:
  - $\Delta f/\Delta x = (7.36-7.30)/(30-20) = 0.006\ m^2\,^oC/g$
  - $\Delta f/\Delta x = (7.42-7.36)/(40-30) = 0.006\ m^2\,^oC/g$
- Razão entre os valores da função e da variável é uma **constante**

Exemplo 5

- Qualquer mudança na variável independente, expressa por x, causa uma mudança proporcional na variável dependente
- No caso do exemplo: $\Delta f = 0.006\ \Delta x$
- Equação geral: **$f(x) = y = ax + b$** (reta), em que a e b são constantes
  - O coeficiente **a** é o coeficiente angular, ou a taxa de variação
  - No exemplo, $a = 0.006$
- O coeficiente **b** é o coeficiente linear
- O coeficiente angular deve ser calculado a partir da variação da função pela variação da variável

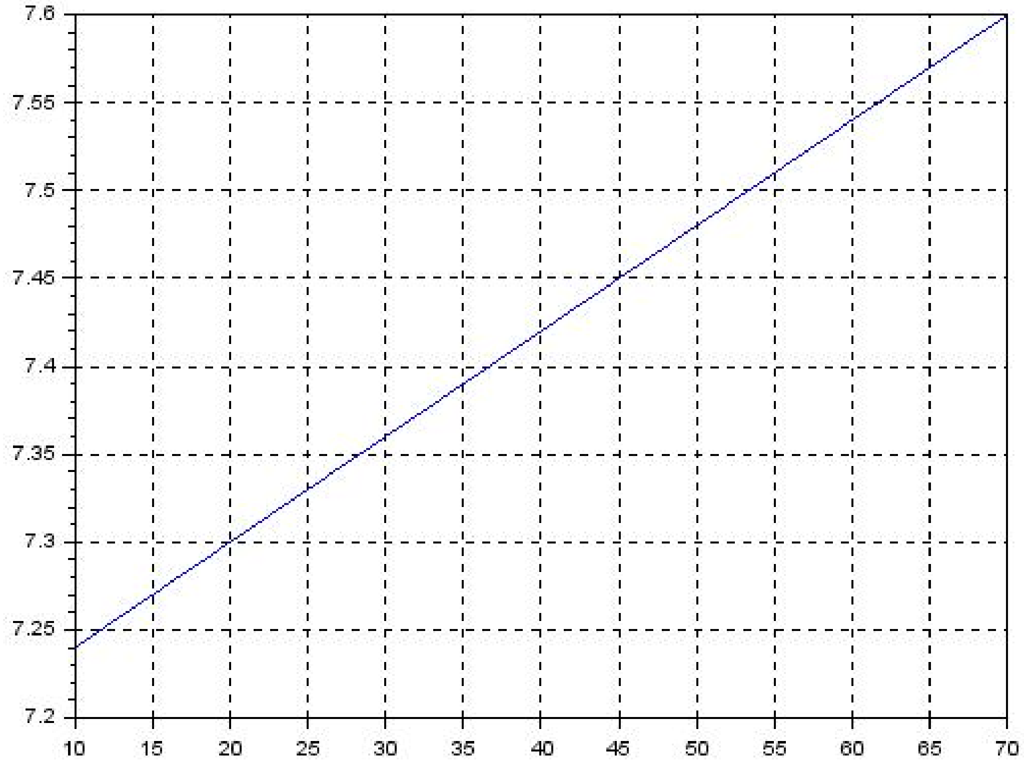
$$\Delta f/\Delta x = (7.30-7.24)/(20-10) = 0.006\ m^{2oC}/g$$

- Logo, $y = 0.006x + b$

Exemplo 5

- Para calcular b, utiliza-se um ponto arbitrário da tabela
- Exemplo: (40, 7.42)
- 7.42 = 0.006.(40) + b => b = 7.42 - 0.24 => b = 7.18
- Assim, a equação que descreve a temperatura é:
  - y = 0.006x + 7.18
  - Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 70 g/m^2\}$
  - Imagem: $I = \{f(x) \in \mathbb{R} | 7{,}18 \leq f(x) \leq 7{,}60 \quad {}^oC\}$

Função linear crescente
Quanto maior a quantidade de resíduo no solo, maior será a temperatura mínima do solo



Exemplo 6

- Sabe-se que nem toda luz que incide sobre um dossel vegetativo chega à superfície do solo.

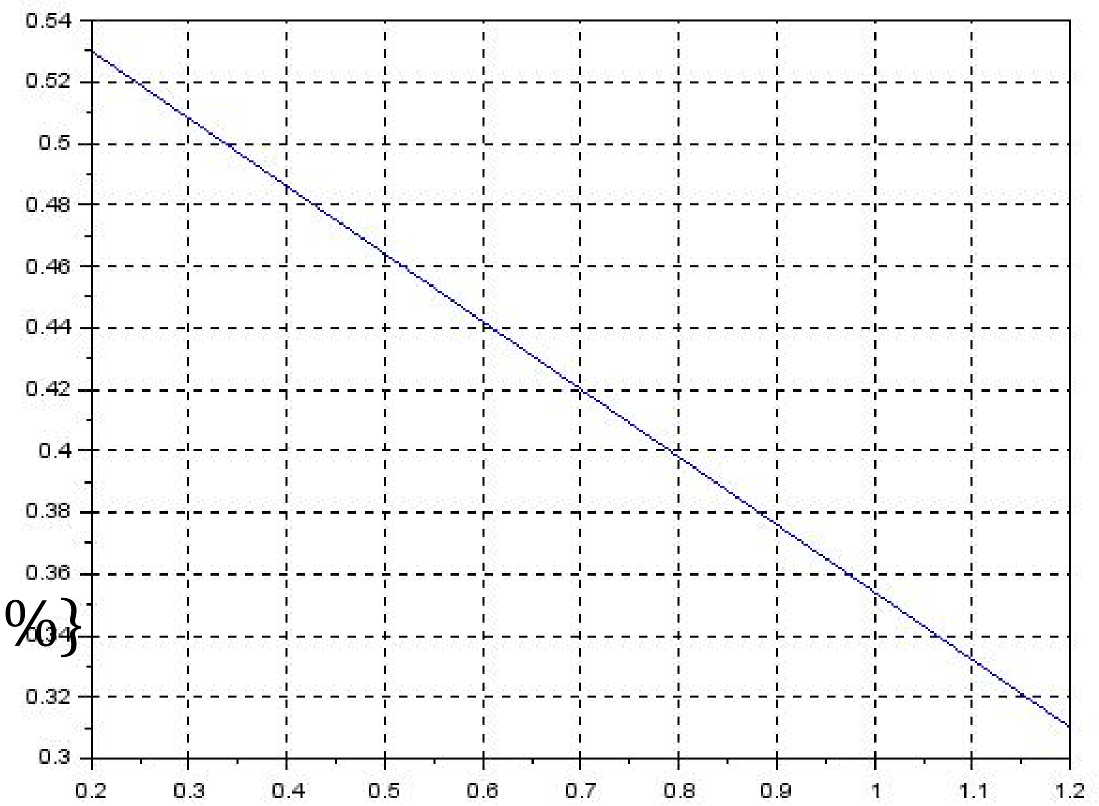
- Tem-se uma possível relação entre o espaçamento das linhas de uma cultura de soja x (m) e a fração da radiação solar que é extinta pela planta g (%).

x (m)	g (x) (%)	$\Delta g/\Delta x$
0.2	0.53	
0.4	0.486	-0.22
0.6	0.442	-0.22
0.8	0.398	-0.22
1.0	0.354	-0.22
1.2	0.31	-0.22

- Encontre a equação descrita por esses dados, seu gráfico e os conjuntos domínio e imagem

Exemplo 6

- y = ax + b
  - a=Δg/Δx=-0.22
  - 0.354=-0.22.(1.0)+b⇒b=0.574
- Assim, a equação é: g(x) = -0.22x + 0.574
  - Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} | 0{,}2 \leq x \leq 1{,}2m\}$
  - Imagem: $I = \{f(x) \in \mathbb{R} | 0{,}31 \leq f(x) \leq 0{,}53\%\}$
- Observação: como o coeficiente angular é negativo, trata-se de uma função **decrescente**



Exemplo 7

- Considerando que a tonelada (t) de calcário custe R$ 15,00 e que a tonelada de superfosfato simples custe R$ 150,00, quais as possibilidades de calcário e de superfosfato que podem ser compradas com R$ 900,00?

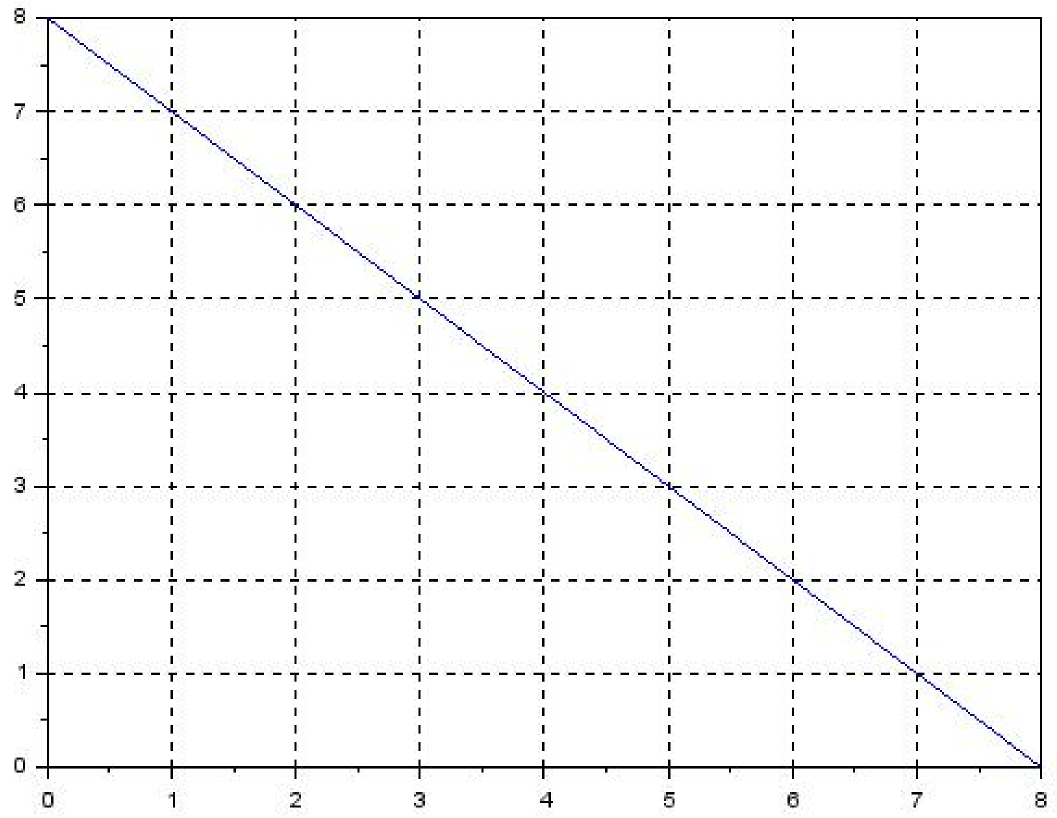
Solução:

- $15x + 150y = 900$
- $150y = 900 - 15x \Rightarrow y = 6 - 0.1x$
- Construindo a tabela:

x(t)	5	6	6.5	7	7.5
y(t)	5.5	5.4	5.35	5.3	5.25

Exemplo 8

- Considerando o exemplo anterior, suponha que se possam somente transportar 8t
- Descreva a equação e o gráfico relativamente ao transporte
- Em seguida, encontre as quantidades de superfosfato e calcário que correspondem tanto às exigências do custo quanto às do transporte



Solução (transporte):

$$x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$$

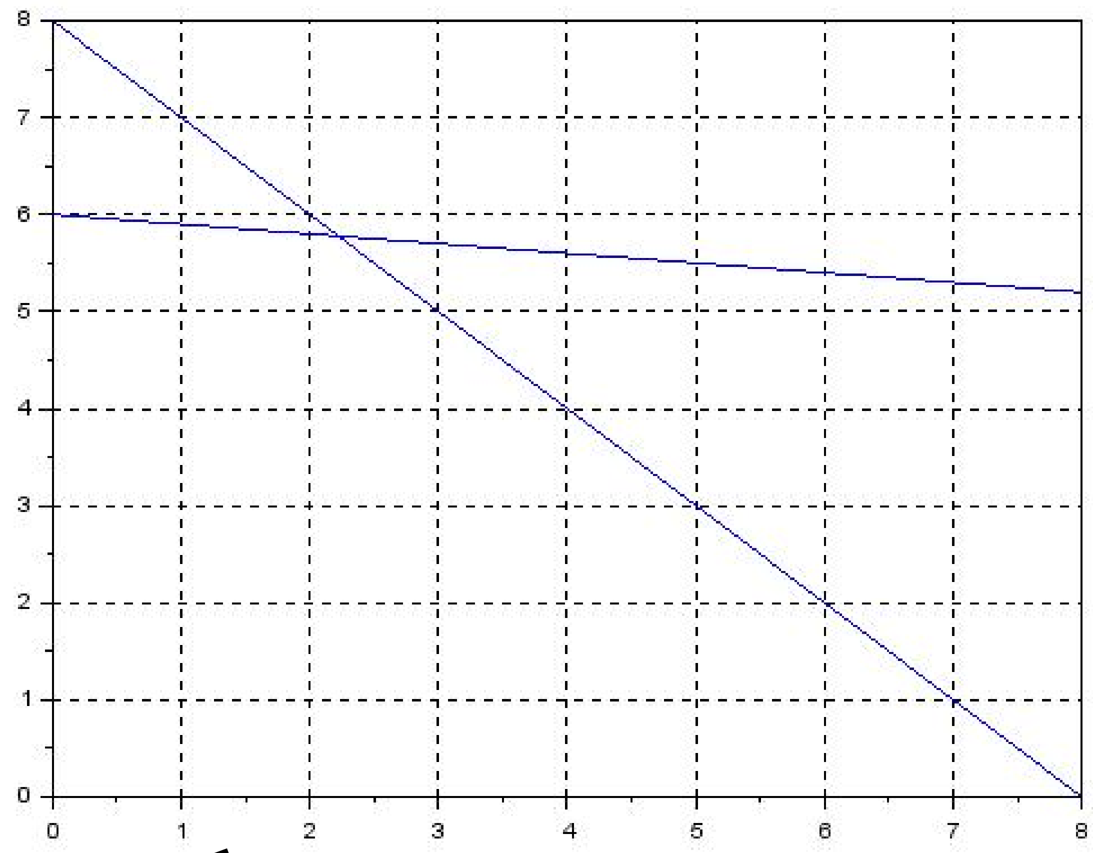
Exemplo 8

Solução(custo+transporte):

$$\begin{cases} 15x + 150y = 900 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

- Resolvendo o sistema, temos: x = 2.22t e y = 5.78t

- Graficamente: ponto de interseção entre as duas retas dos gráficos passados



Sistema Linear

Sistemas Lineares

Exemplos:
Resolva analiticamente e graficamente o sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solução analítica:
Existem diversos processos analíticos pelos quais podemos resolver um sistema de equações. Vejamos dois.

(1) Substituição
Consiste em substituir o valor de uma das incógnitas obvio a partir de uma das equações, na outra, temos

$$x - y = -3 \Leftrightarrow x = y - 3$$

E substituímos x por esse valor na segunda equação,

$$2(y - 3) + 3y = 4 \Leftrightarrow 2y - 6 + 3y = 4 \Leftrightarrow y = 2$$

Que levamos à primeira equação, encontrando

$$x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1$$

A solução do sistema é o par ordenado (-1, 2)

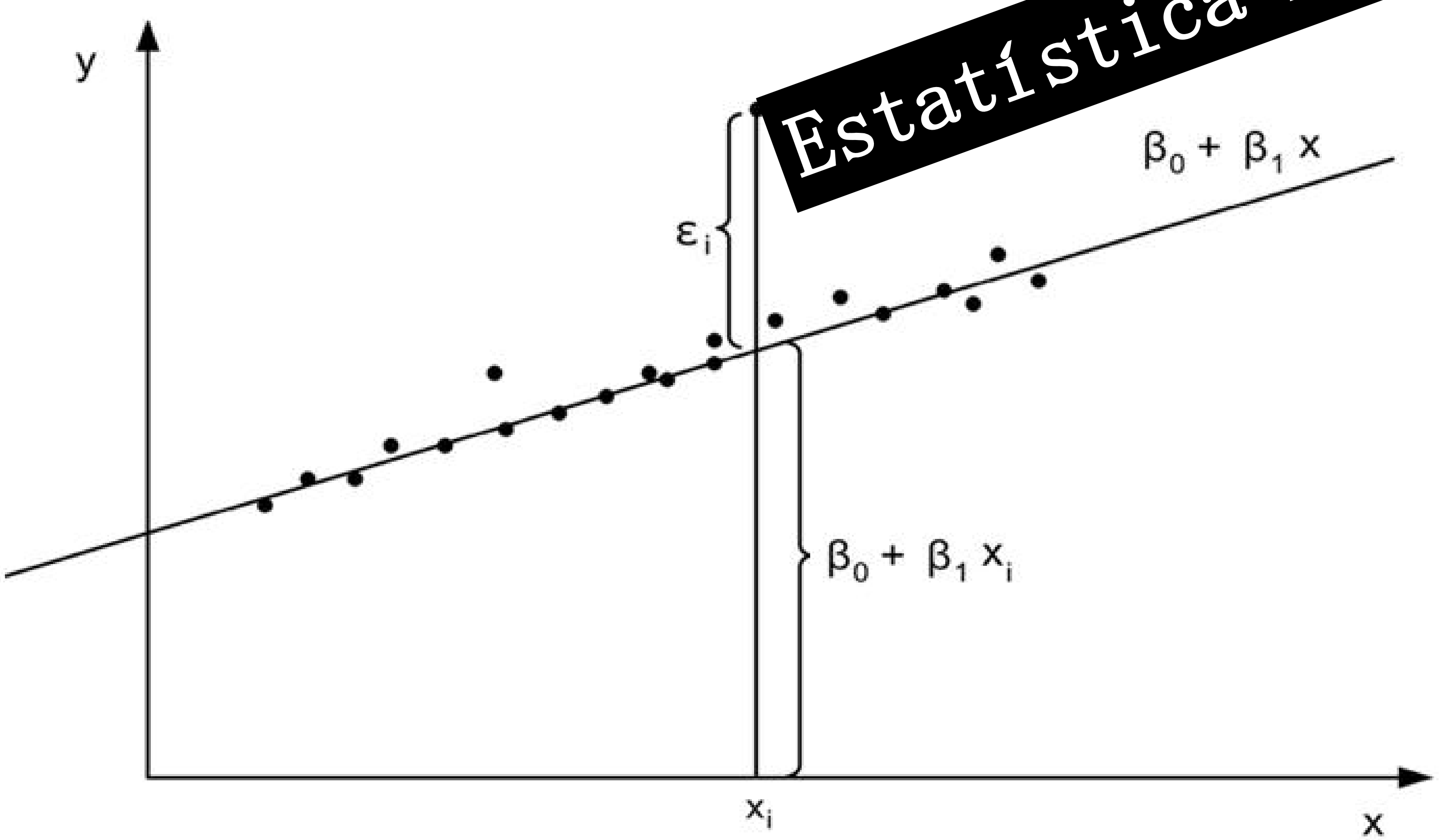
REGRESSÃO
AJUSTE DE DADOS EXPERIMENTAIS A MODELO

Regressão

- Ajuste de estrutura de modelo conhecido a dados experimentais

- Minimizar erro quadrático

Estatística Aplicada



Método dos Mínimos Quadrados

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i]^2.$$

$$\frac{\partial L(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial L(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i.$$

Análise de Resíduos


DA TEORIA À PRÁTICA

Exercício 1

- Encontre os coeficientes angular e linear das retas dadas pelas equações seguintes e construa o gráfico correspondente
  - a) $y = 3x$
  - b) $y = 5$
  - c) $2x - 4y = 12$
  - d) $x/2 + y/5 = 2$
- **Respostas:**
  - a) $a = 3$ e $b = 0$
  - b) $a = 0$ e $b = 5$
  - c) $a = 0.5$ e $b = -3$
  - d) $a = -2.5$ e $b = 10$

Exercício 2

- Considerando os dados a seguir, referentes à produção de matéria seca de uma planta y (g/m^2), como função da quantidade de radiação fotossinteticamente ativa x (W/m^2), encontre a equação para os dados.

x	0	100	200	300	400	500
y	0	190	380	570	760	950

Resposta: $y = 1{,}9x$

Exercício 3

- A produção de grãos de trigo y (mg/ha) foi obtida como função linear da quantidade de água no solo x (cm). A partir da tabela a seguir, encontre a equação correspondente.

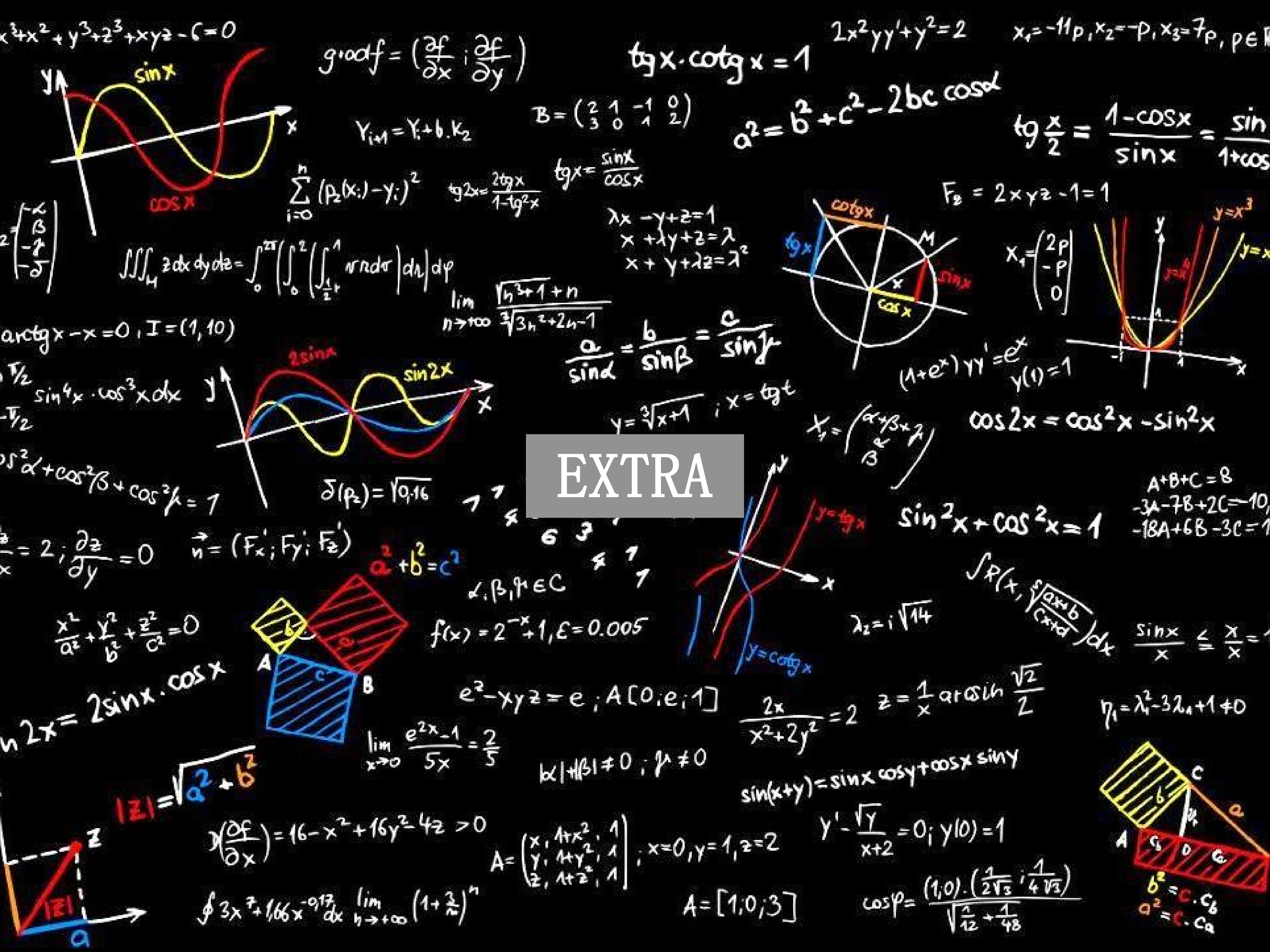
x	50	52	54	56	58	60	62
y	4.58	4.98	5.38	5.78	6.18	6.58	6.98

Resposta: $y = 0.2x - 5.42$

Bibliografia

- Stewart, J. (2013). Cálculo, vol. 1, 7ª edição. Editora Thompson, 34.
- Ávila, G. (1998). Introdução ao cálculo. Rio de Janeiro: LTC, 3.
- Material Didático Matemática Aplicada I, Leonardo Teixeira, EAJ-UFRN
- Barboni, A., & Paulette, W. (2007). Fundamentos de Matemática: Cálculo e Análise. Editora LTC, São Paulo.
- Iezzi, G., Murakami, C., Stewart, J., & Learning, E. T. (2004). Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções, volume 1. São Paulo: Atual Editora.
- Outras referências: https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/

EXTRA



tgx·cotgx=1
a²=b²+c²−2bc cosα
sinx
cosx
2sinx
sin2x
cos2x=cos²x−sin²x
sin²x+cos²x=1
a²+b²=c²
sin2x=2sinx.cosx
|z|=√(a²+b²)
sin(x+y)=sinx cosy+cosx siny
f(x)=2^(−x)+1, ε=0.005
α,β,γ∈C
arctgx−x=0, I=(1,10)
y=tgx
y=cotgx
cotgx
tgx
cosx
sinx

Função Afim – Imagem

Teorema: O conjunto de imagem da função afim f definida por f(x)=ax+b, com a≠0 é R
De fato, qualquer que seja y real existe

$$x = \frac{y-b}{a}, tal que$$

$$f(x) = f(\frac{y-b}{a}) = a.\frac{y-b}{a} + b = y$$

Função Afim – Crescimento e Decrescimento

Teoremas:

(I) A função afim f(x)=ax+b é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

Demonstração:

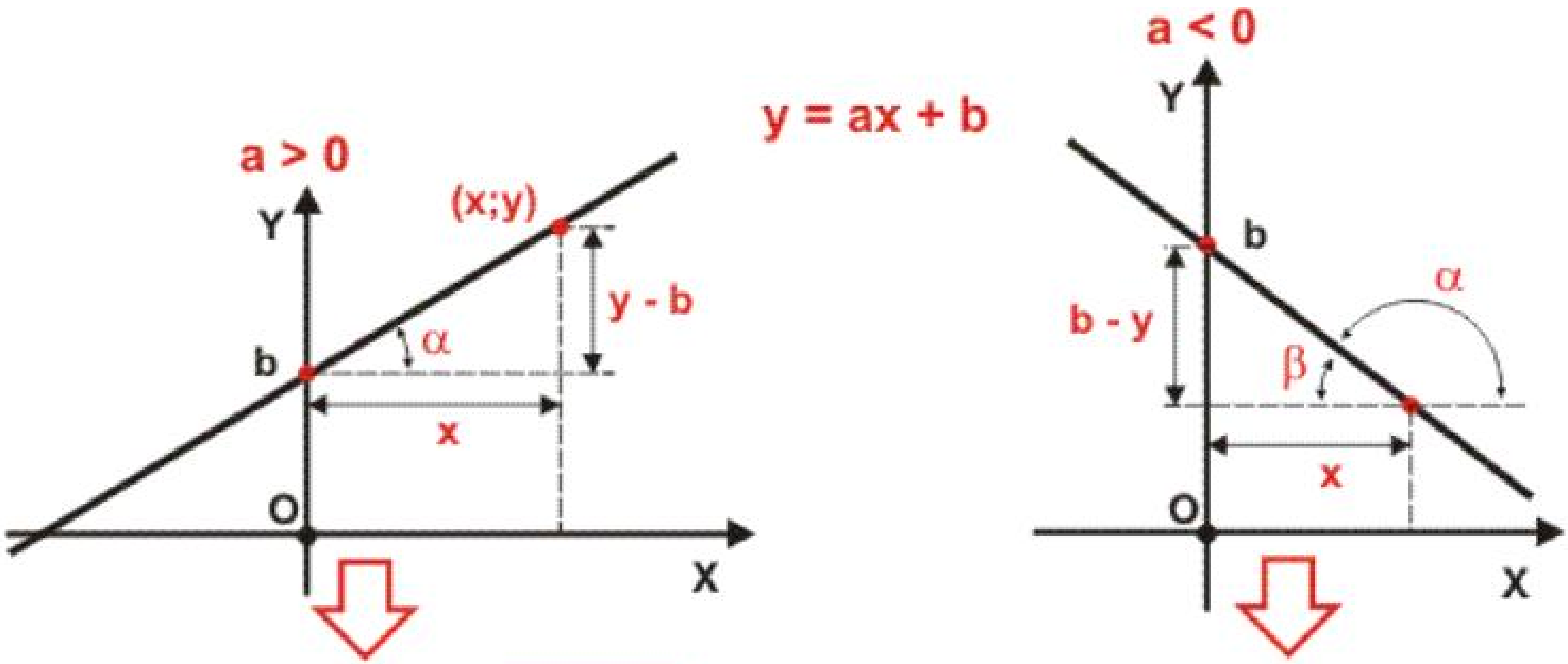
$$f(x) = ax + b crescente \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

(II) A função afim f(x)=ax+b é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo

Demonstração análoga (**Exercício**)

Interpretação Geométrica



$$y = ax + b \Rightarrow a = \frac{y-b}{x} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \boxed{a = \text{tg}\alpha}$$

$$y = ax + b \Rightarrow a = \frac{y-b}{x} \Rightarrow a = -\frac{b-y}{x} \Rightarrow a = -\text{tg}\beta \Rightarrow \boxed{a = \text{tg}\alpha}$$

https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoe

Próxima Aula

- Sistemas Lineares

Bibliografia

- Rosen, K. H. (2009). Matemática discreta e suas aplicações. McGrawHill.

- Gersting, Judith L. Fundamentos matemáticos para a ciência da computação. Livros Tecnicos e Cientificos, 2001.

- Material Didático Matemática Aplicada I, Prof. Leonardo Teixeira, EAJ-UFRN

- Menezes, Paulo Blauth. Matemática discreta para computação e informática. Vol. 2. Bookman, 2010.

https://www.youtube.com/watch?v=Frmwdter-vQ&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I

https://www.youtube.com/watch?v=125pPCIRjZ8

https://www2.unifap.br/herondino/files/2014/04/Graficos_no_R.pdf

Funções

Questões?

Tásia do Vale
tasiavale@ufrn.br

Matemática Aplicada I
Análise e Desenvolvimento de Sistemas

ESCOLA AGRICOLA DE JUNDIAÍ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE