Álgebra dos Conjuntos

Tásia do Vale

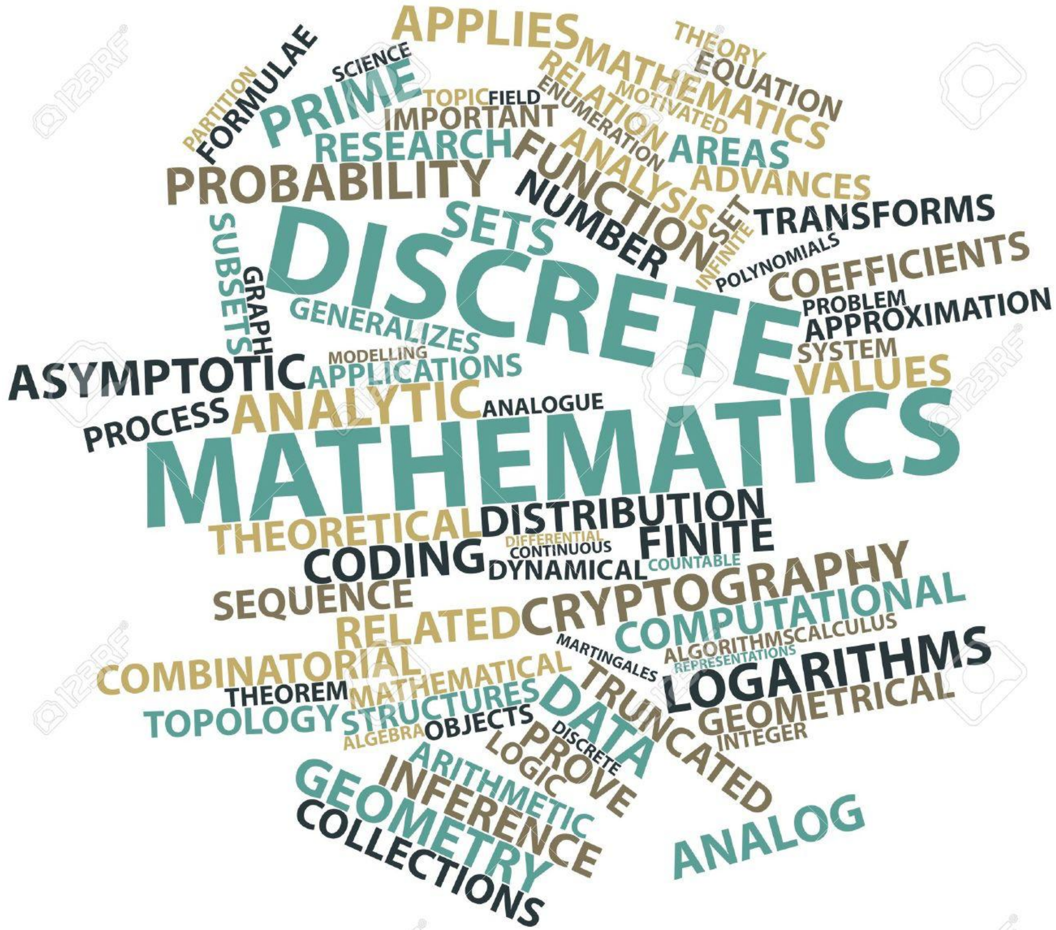
Matemática Aplicada I

Análise e Desenvolvimento de Sistemas

Escola Agrícola de Jundiaí - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Objetivos da Aula

Álgebra dos Conjuntos



Álgebra de Conjuntos

1. **Operações Reversíveis**
   a) Complemento,
   b) União,
   c) Interseção e
   d) Diferença
2. Conjunto das Partes
3. Produto Cartesiano
4. União Disjunta

Revisão - Identidade dos Conjuntos

Identidade	*Nome*
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	Propriedades dos elementos neutros
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Propriedades de dominação
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Propriedades idempotentes
$\overline{(\overline{A})} = A$	Propriedades da complementação
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Propriedades comutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Propriedades associativas
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Propriedades distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Leis de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Propriedades de absorção
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Propriedades dos complementares

1 Operações Reversíveis

♦ Operação reversível

- a partir do resultado, pode-se recuperar os operando originais
- Importante em muitas aplicações na Computação e Informática

Backtracking

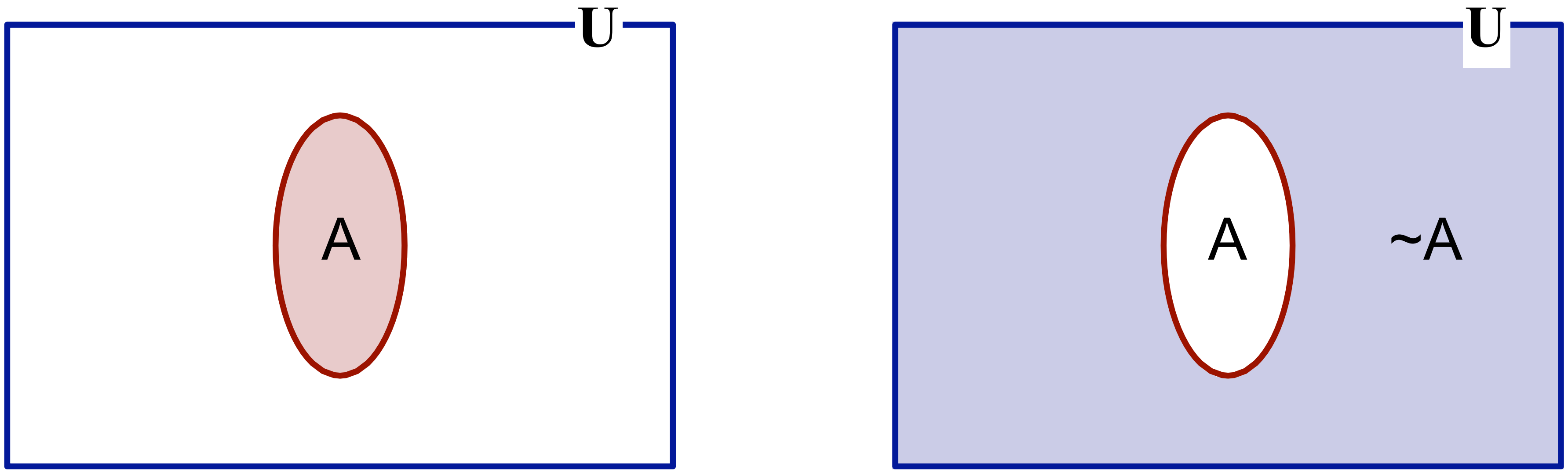
Operação de débito e crédito em um terminal bancário automático

- *composição* de diversas pequenas operações componentes

Queda de sistema (luz…) entre duas operações componentes

- sistema poderia ficar inconsistente
- exemplo: débito realizado, mas o crédito, não
- fundamental desfazer o que foi parcialmente feito
- recuperação facilitada quando a operação é reversível

a) Complemento



Def: Complemento

Complemento de um conjunto $A \subseteq \mathbf{U}$

$$A' \quad \text{ou} \quad \sim A$$

$$\sim A = \{ x \in \mathbf{U} \mid x \notin A \}$$

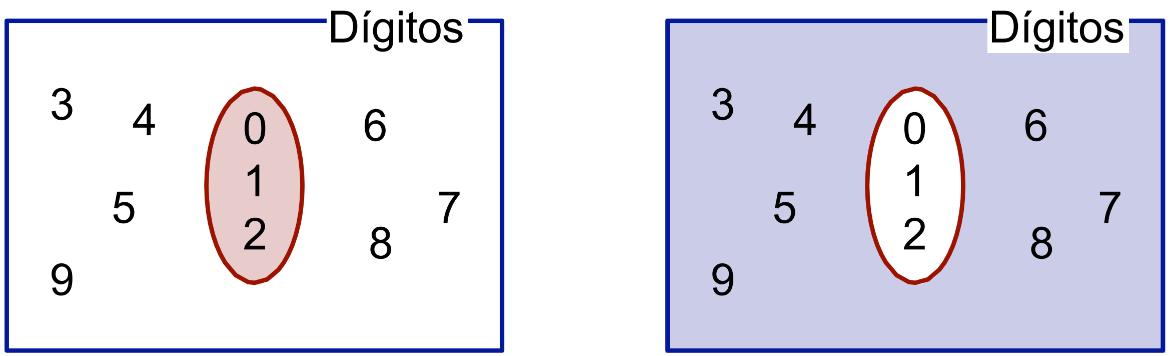
♦ Relacionando com a Lógica

- complemento corresponde à negação
- símbolo ~ é um dos usados para a negação

Exp: Complemento

Dígitos = { 0, 1, 2,..., 9 } conjunto universo e A = { 0, 1, 2 }

- ~A = { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }



Ex: …Complemento

$\mathbf{N}$ conjunto universo e $A = \{0, 1, 2\}$

- $\sim A = \{x \in \mathbf{N} \mid x > 2\}$

Para qualquer conjunto universo $\mathbf{U}$

- $\sim \varnothing = \mathbf{U}$
- $\sim \mathbf{U} = \varnothing$

$\mathbf{R}$ conjunto universo

- $\sim \mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- $\sim \mathbf{I} = \mathbf{Q}$

b) Complemento, União e Intersecção

$\mathbf{U}$ conjunto universo. Para qualquer $A \subseteq \mathbf{U}$

- $A \cup \sim A = \mathbf{U}$
- $A \cap \sim A = \varnothing$

$p \lor \neg p$ é tautologia(redundancia)

$p \land \neg p$ é contradição

♦ Propriedade Duplo Complemento

- para qualquer $A \subseteq \mathbf{U}$

$$\sim\sim A = A$$

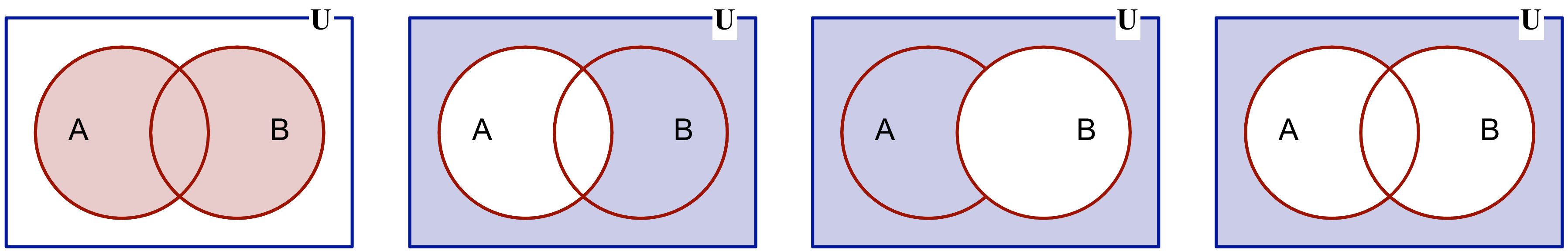
- relacionamento com lógica
  - ∗ A: todos elementos x tais que $x \in A$
  - ∗ $\sim A$: todos elementos x tais que $x \notin A$ $\qquad \neg(x \in A)$
  - ∗ $\sim\sim A$: todos elementos x tais que $\neg\neg(x \in A)$ $\qquad x \in A$
- complemento é reversível: $\sim(\sim A) = A$

♦ Propriedade da Teoria de Morgan

- relacionada com o complemento
- envolve a união e a intersecção

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B \qquad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$



$A \cup B$ $\quad\sim A$ $\quad\sim B$ $\quad\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

♦ Essa propriedade permite concluir

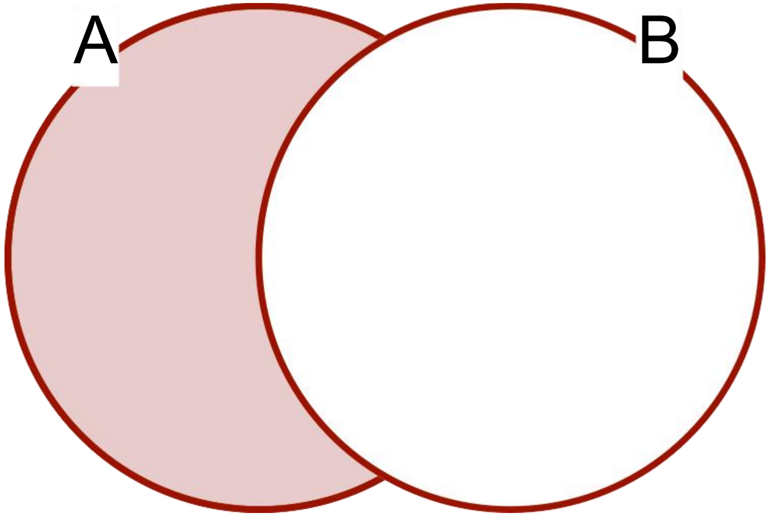
- intersecção pode ser calculada em termos do complemento e união

$$A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$$

- união pode ser calculada em termos do complemento e intersecção

$$A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$$

c) Diferença: derivada da intersecção e complemento



Def: Diferença

A e B conjuntos

$$A - B$$

$$A - B = A \cap \sim B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

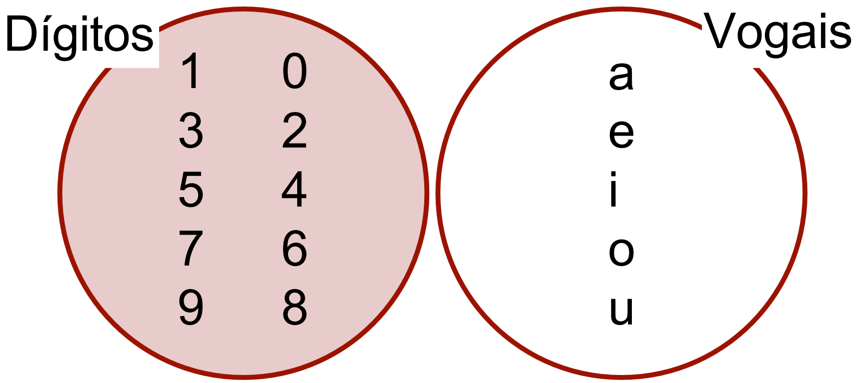
c) Diferença

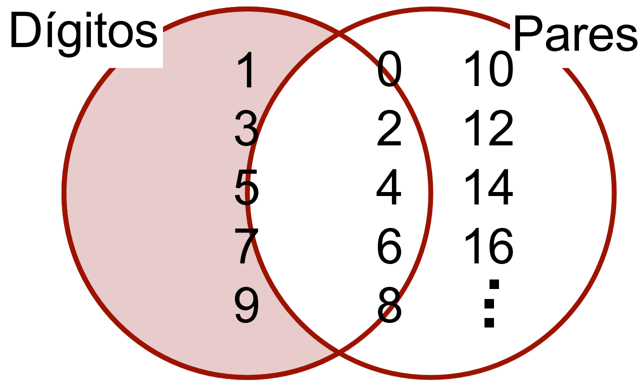
Dígitos = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

Vogais = { a, e, i, o, u }

Pares = { 0, 2, 4, 6,... }

- Dígitos - Vogais = Dígitos
- Dígitos - Pares = { 1, 3, 5, 7,9 }





Ex: ...Diferença

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x > 2\}$ e $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 = x\}$

- $A - B = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$
- $B - A = \{0, 1\}$

$\mathbf{R}$ (reais), $\mathbf{Q}$ (racionais) e $\mathbf{I}$ (irracionais)

- $\mathbf{R} - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$
- $\mathbf{R} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}$
- $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = \mathbf{Q}$

Universo $\mathbf{U}$ e $A \subseteq \mathbf{U}$

- $\varnothing - \varnothing = \varnothing$
- $\mathbf{U} - \varnothing = \mathbf{U}$
- $\mathbf{U} - A = \sim A$
- $\mathbf{U} - \mathbf{U} = \varnothing$

Exercício 1

Dados os conjuntos
$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B = \{ 4, 5, 6, 7 \}$ e
$C = \{ 4, 5, 6, 8\}$,
descubra o resultado de: $(A - C) \cap (B - C)$

Solução

Solução:

(A - C) = {0,1,2,3}

(B-C) = {7}

S = ∅

2. Conjunto das Partes, Conjunto Potência

A conjunto

$$\mathbf{P}(A) \quad \text{ou} \quad 2^A$$

$$\mathbf{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$$

Ex: Conjunto das Partes

$A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{a, b, c\}$

- $\mathbf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- $\mathbf{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$
- $\mathbf{P}(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $\mathbf{P}(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Quantos elementos tem $\mathbf{P}(X)$?

Ex ...Conjunto das Partes

$D = \{ a, \varnothing, \{ a, b \} \}$

- $\mathbf{P}(D) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ \varnothing \}, \{ \{ a, b \} \}, \{ a, \varnothing \}, \{ a, \{ a, b \} \}, \{ \varnothing, \{ a, b \} \}, \{ a, \varnothing, \{ a, b \} \} \}$

Quantos elementos tem $\mathbf{P}(X)$?

♦ Número de elementos de P(X)

- número de elementos de
  - X é n
  - $\mathbf{P}(X)$ é 2^n

- justifica a notação 2^X
  - prova por indução introduzida adiante

♦ Reversabilidade de $\mathbf{P}(X)$?

- uma solução: união de todos os conjuntos de $\mathbf{P}(X)$
- como fica o cálculo da união se o número de elementos do conjunto das partes for infinito?
  - *não* será discutido

Exp: Reversabilidade do Conjunto das Partes

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} = \{ a \}$

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} \cup \{ b \} \cup \{ a, b \} = \{ a, b \}$

Resultante: $\{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$

- Operando: $\varnothing \cup \{ a \} \cup \{ b \} \cup \{ c \} \cup \{ a, b \} \cup \{ a, c \} \cup \{ b, c \} \cup \{ a, b, c \} = \{ a, b, c \}$

3. Produto Cartesiano

♦ Noção de sequência finita

- necessária para definir produto cartesiano
  - ∗ em particular, seqüência de dois elementos

♦ Sequência de n componentes: n-upla ordenada

- n objetos (não necessariamente distintos) em uma ordem fixa

♦ 2-upla ordenada ou par ordenado

<x,y> ou (x,y)

n-upla ordenada

$\langle x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n\rangle$ ou $(x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n)$

- **Não confundir**

Elemento $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ com Conjunto com elementos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

- **A ordem é importante**

$$x, y \text{ diferente } y, x$$

Def: Produto Cartesiano

A e B conjuntos

$$A \times B$$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

- **Produto cartesiano de A com ele mesmo**

$$A \times A = A^2$$

Produto Cartesiano

O produto cartesiano dos conjuntos A1, A2,…, An, indicado por A_1 x A_2 x… x A_n é o conjunto de n-uplas ordenadas (a_1,a_2,…,a_n) em que a_i pertence a A_i, para i=1,2,…, n

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, parai = 1,2, \ldots, n\}$$

Exemplo: Qual o produto cartesiano de A={0,1}, B={1,2}, C={0,1,2}

Solução:

AxBxC = *{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)}*

Produto Cartesiano

A = {a}, B = {a, b}, C = {0,1,2)

$A\ x\ B$ = {<a,a>,<a,b>}

$B\ x\ C$ = {<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>}

$C\ x\ B$ ={<0,a>,<0,b>,<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>}

{A ^2} = {<a,a>}

{B ^2}={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>}

$A\ x\ \mathbb{N}$ = {<a,0>,<a,1>,<a,2>,<a,3>,…}

A operação Produto Cartesiano **não é comutativa**

$$B\ x\ C \neq C\ x\ B$$

♦ Conclusões

- *Não-Comutatividade*
  - $B \times C$ e $C \times B$ são *diferentes*
  - $(B \times C) \cap (C \times B) = \varnothing$ disjuntos
- *Não-Associatividade*
  - $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ são *diferentes* por quê?

Exp: Produto Cartesiano

$A = \{0, 1, 2\}$

- $A \times \varnothing = \varnothing$ por quê?
- $\varnothing \times A = \varnothing$ por quê?
- $\varnothing^2 = \varnothing$

- **Distributividade do produto cartesiano sobre a união**

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

- **Distributividade do produto cartesiano sobre a intersecção**

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

- **Reversabilidade do produto cartesiano ?**
  - como fazer?
  - nem sempre é válida
    - quando o produto cartesiano resulta no vazio

Pratique a distributividade da união e intersecção para os produtos cartesianos dos seguintes conjuntos

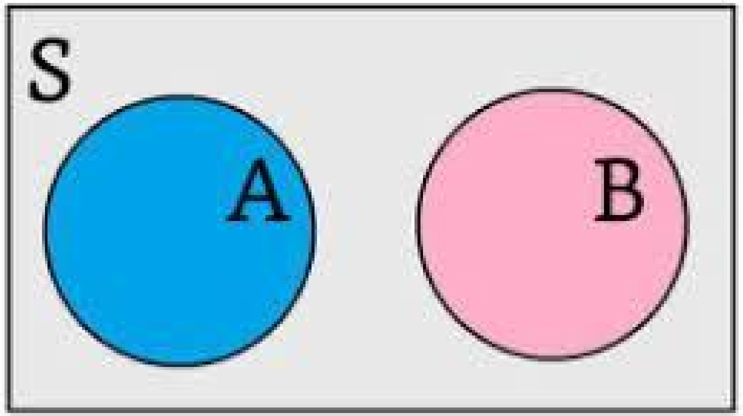
Verificar as duas propriedades para $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$ e $C = \{2,3\}$

4.União Disjunta

•O conjuntos: e são disjuntos pois não possuem elementos em comum.

•O conjunto dos <u>números pares</u> e o conjuntos dos <u>números impares</u> são disjuntos, pois não existe um número que seja par e impar ao mesmo tempo.

•O conjunto dos <u>números primos</u> e o conjunto dos números pares não são disjuntos pois o número **2** é par e primo ao mesmo tempo.



$$A \cap B = \emptyset$$

Ex: União Disjunta

- **Pessoas da família Silva e Souza**
  - Silva = { João, Maria, José }
  - Souza = { Pedro, Ana, José }
- **Conjunto resultante da união**

$$\text{Silva} \cup \text{Souza} = \{ \text{João, Maria, Pedro, Ana, José} \}$$

  - José ocorre uma única vez?
  - *não* reflete uma “reunião familiar”
    - José Silva *não* é o mesmo José Souza

Ex: Reconhecimento de Linguagens e Complemento

Um compilador, na fase de análise, reconhece a linguagem, ou seja, verifica se um dado programa p é, de fato, um programa válido para a linguagem L

$L \subseteq \sum^{*}$

$\sim L = \{x \in \sum^{*} \mid x \notin L\}$

O compilador verifica se $p \in L$ ou se $p \notin L$

Se o programa não pertence à linguagem, o compilador deve alertar o programador para que este corrija os eventuais problemas do programa

Exercício

Abra o software R on line

```
x <-c(1,4,6,0,22,10)
y <-c(2,4,6,4,2,0)
w<-x*y
w
x/y
union(x,y)
?intersection(x,y)

union(x, y)
intersect(x, y)
setdiff(x, y)
setequal(x, y)
```

Na janela do script digite o seguinte algorítimo. Obs: Para limpar tela do Console digite as teclas CTRL+L

Função	R
União	union(x,y)
Interseção	intersection(x,y)
Diferencia simétrica	setdiff(x,y)
Igual	setequal(x,y)
Pertence	is.element(el,x)

Exercício 2

Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus n alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:

• 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;
• 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;
• 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;
• 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;
• 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente, $A \cap B = \emptyset$. Concluímos que o número n de alunos dessa turma é

Bibliografia

- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlor. Fundamentos de Matemática Elementar- Conjuntos e Funções (Cap II e III)
- Rosen, K. H. (2009). Matemática discreta e suas aplicações. McGrawHill.
- Gersting, Judith L. Fundamentos matemáticos para a ciência da computação. Livros Tecnicos e Cientificos, 2001.
- Material Didático Matemática Aplicada I, Prof. Leonardo Teixeira, EAJ-UFRN
- Menezes, Paulo Blauth. Matemática discreta para computação e informática. Vol. 2. Bookman, 2010.