II Unidade

Resolução de Sistemas Lineares

Matemática Aplicada I

Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Escola Agrícola de Jundiaí - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Solução de Sistema Linear Compatível

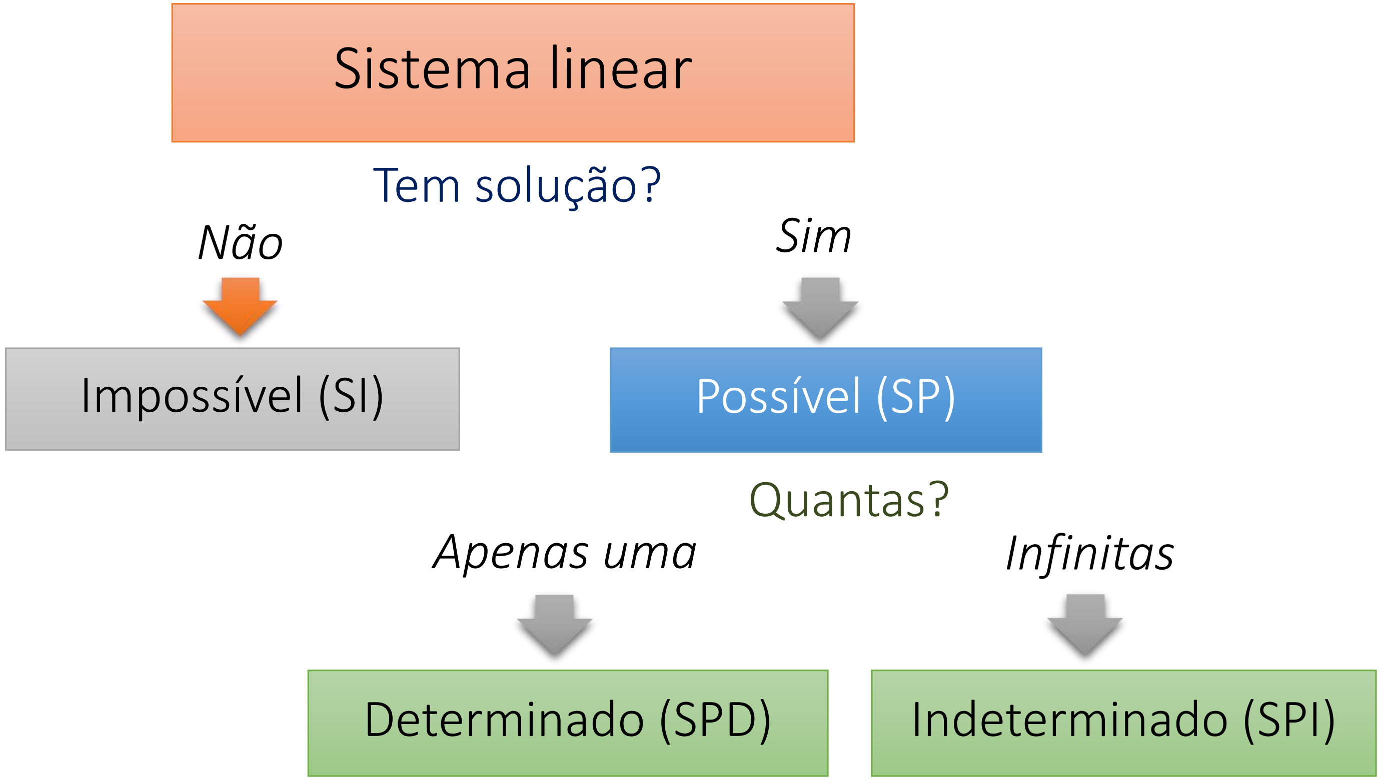
1. Um Sistema de Equações Lineares (SEL) é **Compatível ou Consistente** quando admite solução. Pode ser:

   a) Determinado (SPD): há uma única solução
   b) Indeterminado (SPI): há infinitas soluções

2. Sistema Impossível (ou **Incompatível ou Inconsistente**) (SI): não há solução.

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

- Quanto ao número de soluções, um sistema pode ser possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.



EXEMPLO 1

- $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Na 1ª equação, $y = 3x - 5$.

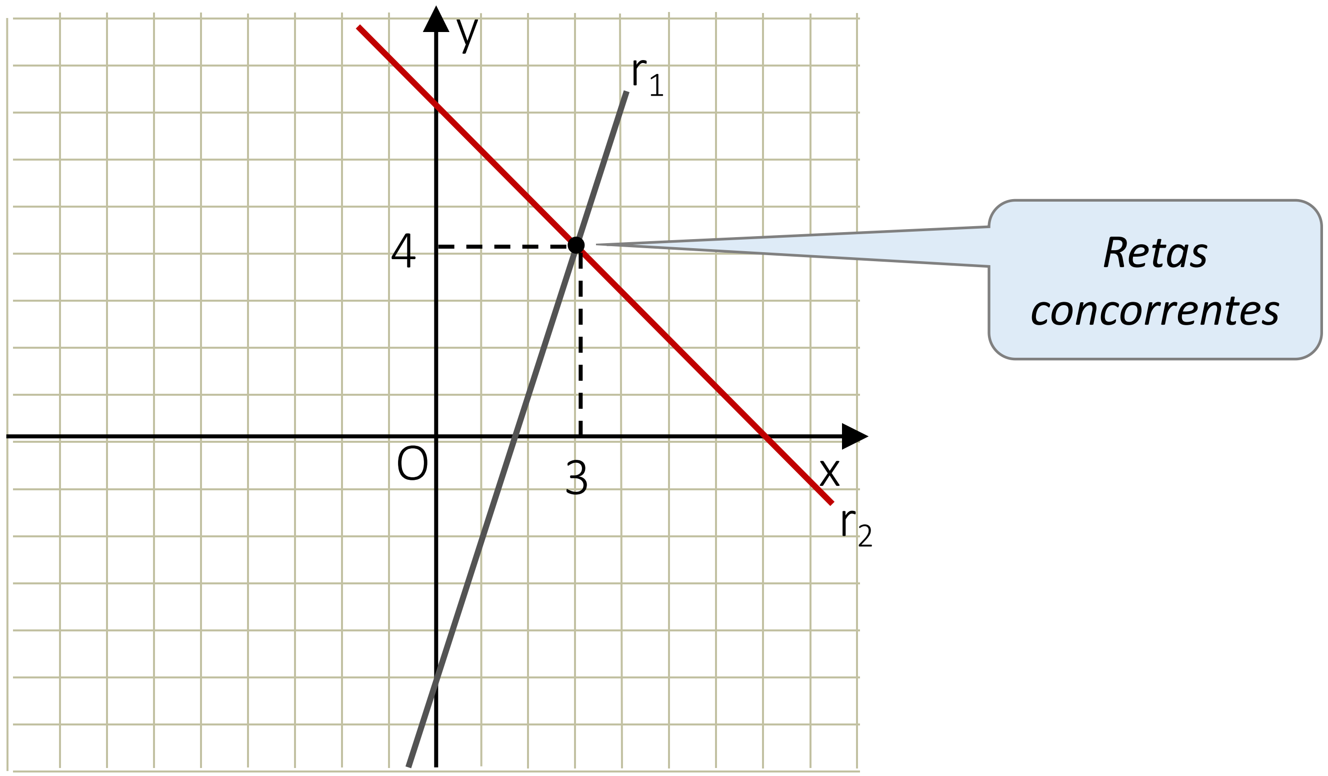
Subst. na 2ª equação, $x + 3x - 5 = 7 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$

$y = 3x - 5 \rightarrow y = 3.3 - 5 \rightarrow y = 4$

Solução (3, 4)

✓ Um sistema linear pode ter uma única solução. No caso, ele é chamado sistema possível e determinado (SPD).

- Veja a interpretação gráfica do sistema $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$



EXEMPLO 2

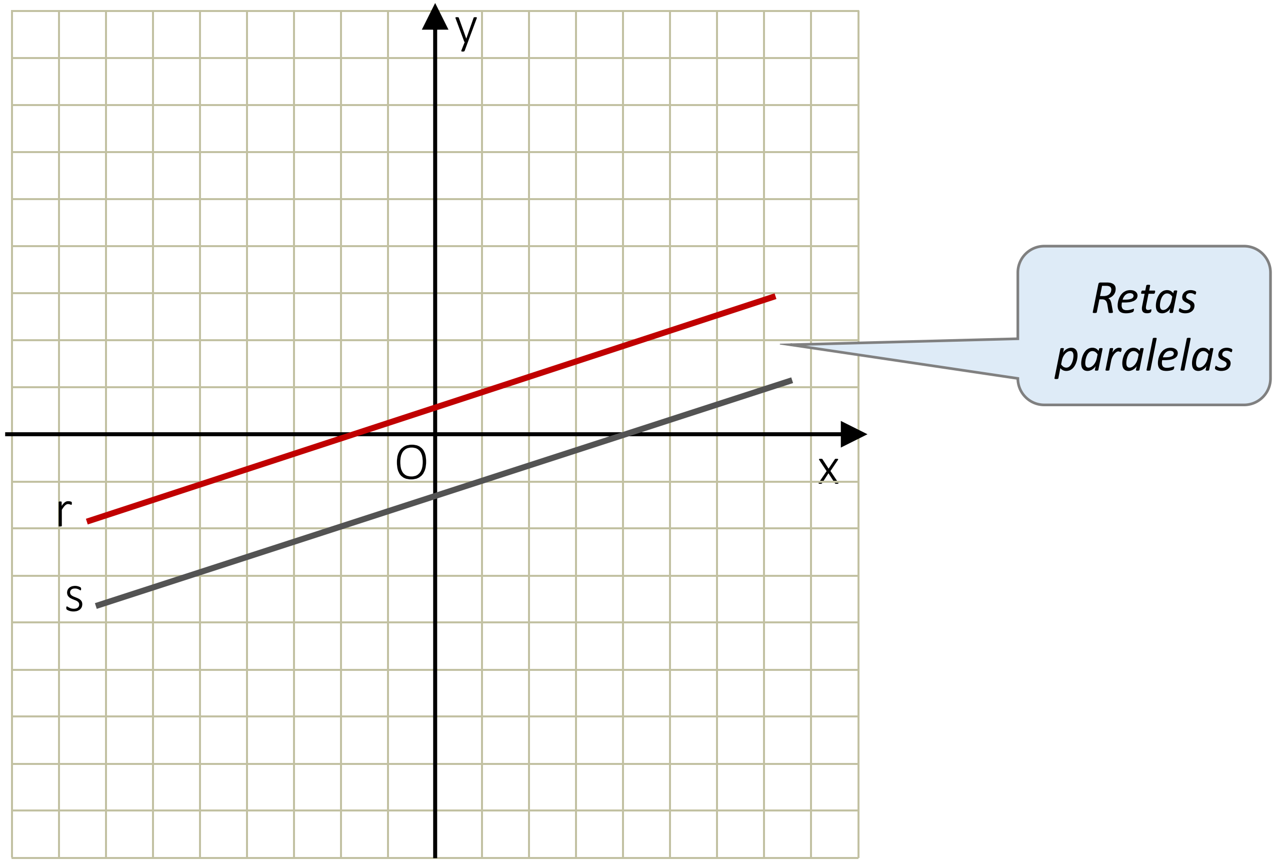
❖ $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 3 \end{cases}$

Na 1ª equação, $x = 4 + 3y$.

Subst. na 2ª equação, $-2(4 + 3y) + 6y = 3 \rightarrow -8 - 6y + 6y = 3 \rightarrow 0y = 11$

✓ Um sistema linear pode não ter solução. No caso, ele é chamado sistema impossível (SI).

❖Veja a análise geométrica do sistema $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 3 \end{cases}$



EXEMPLO 3

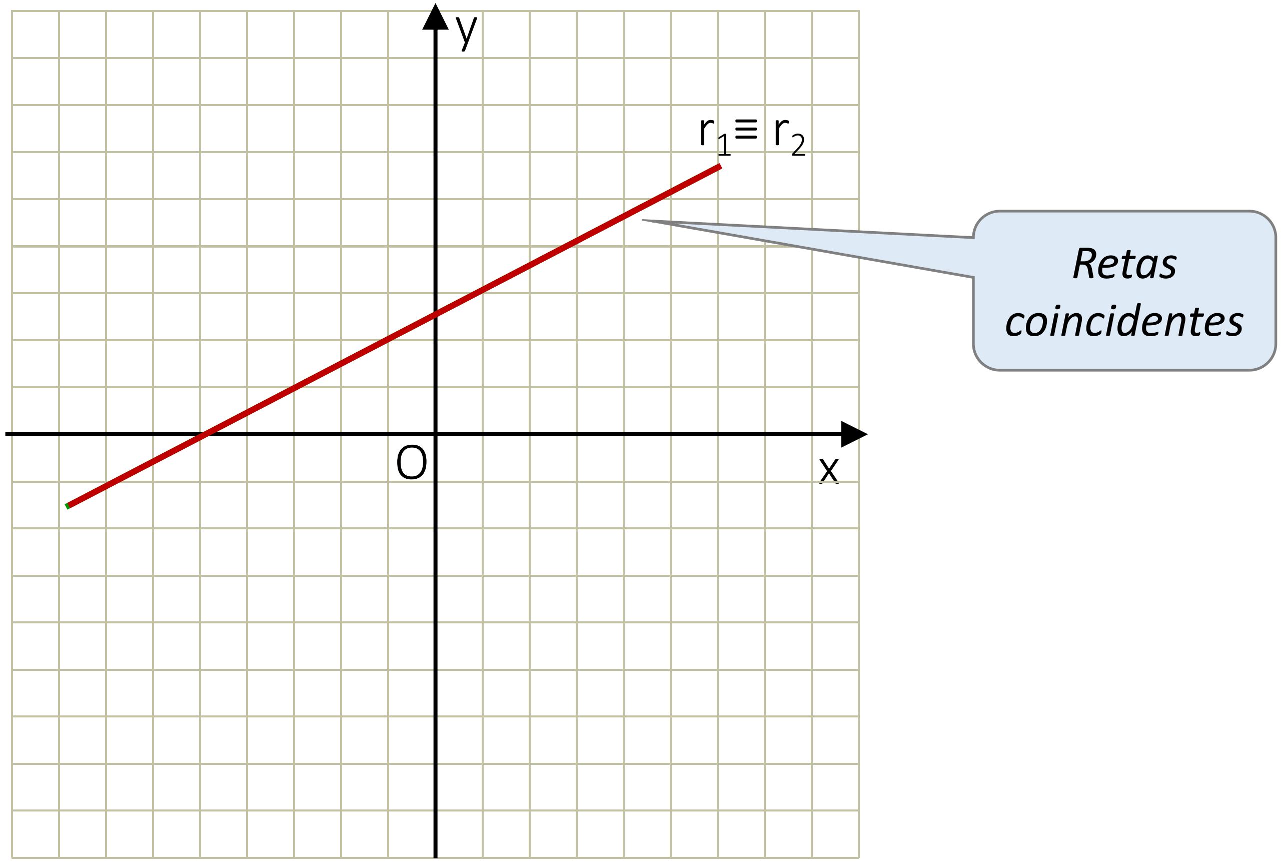
❖ $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}$

Na 1ª equação, $x = 2y - 5$.

Subst. na 2ª equação, $-2(2y - 5) + 4y = 10 \rightarrow -4y + 10 + 4y = 10 \rightarrow 0y = 0$

✓ Um sistema linear pode ter infinitas soluções. No caso, ele é chamado sistema possível e indeterminado (SPI).

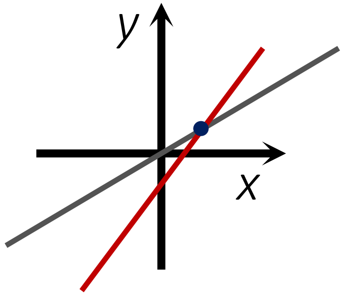
❖Veja a análise gráfica do sistema $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases}$



RESUMO (EQUAÇÕES COM DUAS VARIÁVEIS)

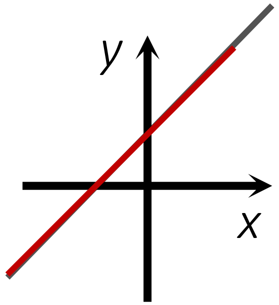
SISTEMA

- Possível
  (Possui solução)
  - Determinado
    (Uma única solução)



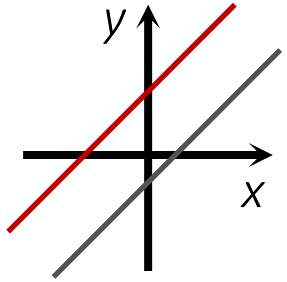
Retas concorrentes

  - Indeterminado
    (Infinitas soluções)



Retas coincidentes

- Impossível
  (Não possui solução)



Retas paralelas

Observação: Matriz é denotado em Matemática para denotar uma coleção retamgular de números. Por enquanto só estaremos interessados em matrizes aumentadas de Sistemas Lineares.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

denominada ***matriz aumentada*** do sistema. Por exemplo, a matriz aumentada do sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{é} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Procedimentos para escalonamento de sistemas

Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

- ✓ Fixamos como 1ª equação uma das que possuem o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero;
- ✓ Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita das demais equações;
- ✓ Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

EXEMPLO 1

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 0x + y - z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$$

O sistema é inconsistente, porque essa equação não é satisfeita por valor algum de x, y e z.

Um sistema escalonado é impossível (SI) só quando apresenta uma equação impossível.

EXEMPLO 2

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 0x + y - z = 2 \\ 0x + 0y + 3z = 3 \end{cases}$$

a) 3ª equação: $3z = 3 \longrightarrow \mathbf{z = 1}$

b) 2ª equação: $y - z = 2 \longrightarrow y - \mathbf{1} = 2 \longrightarrow \mathbf{y = 3}$

c) 1ª equação: $x - y + z = 4 \longrightarrow x - \mathbf{3} + \mathbf{1} = 4 \longrightarrow \mathbf{x = 6}$

Solução (6, 3, 1)

Um sistema escalonado é possível e determinado (SPD) quando o número de equações é igual ao número de incógnitas.

EXEMPLO 3

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ \mathbf{0}x + y - 2z = 3 \\ \mathbf{0}x + \mathbf{0}y + \mathbf{0}z = \mathbf{0} \end{cases}$$

- ✓ A última equação é *nula*. Por isso, ela deve ser *eliminada*.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ \mathbf{0}x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Um sistema escalonado é possível e indeterminado (SPI) quando o número de equações é menor que o número de incógnitas.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 0x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Troca de variável: $z = k$

2ª equação: $y - 2z = 2 \rightarrow y - 2k = 3 \rightarrow y = 2k + 3$

1ª equação: $x - y + z = 3 \rightarrow x - (2k + 3) + k = 3 \rightarrow x - 2k - 3 + k = 3 \rightarrow x = k + 6$

Solução geral: $(k + 6, 2k + 3, k)$

$k = -1 \rightarrow (5, 1, -1)$
$k = 0 \rightarrow (5, 1, -1)$
$k = 1 \rightarrow (7, 5, 1)$...

Um sistema escalonado é possível e indeterminado (SPI) - Substituindo vários valores de k nessas equações, podemos obter as várias soluções do sistema. Por exemplo, tomando t = -1, 0 ou 1, obtemos a solução.

Sistema escalonado é possível e indeterminado (SPI)

DEFINIÇÃO 1 - Se um sistema linear tem uma infinidade de soluções, então um conjunto de equações paramétricas é denominado uma solução geral do sistema se, a partir dessas equações, puderem ser obtidas todas as soluções pela substituição dos parâmetros por valores numéricos.

Os parâmetros de uma solução geral costumam ser denotados pelas letras r, s, t, ..., mas também podemos usar quaisquer letras que não entrem em confli- to com os nomes das variáveis. Em sistemas com mais do que três incógnitas, é conveniente usar índices para os parâmetros, como t1, t2, t3, ...

$$x = 4 + 5y - z \qquad x = 4 + 5s - t, \quad y = s, \quad z = t$$

Escalonamento na forma de matriz

A todo sistema linear podemos associar uma matriz, chamada matriz completa do sistema ou matriz aumentada.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2y + z = 7 \\ -x + z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1x - 2y + 3z = 1 \\ 0x + 2y + 1z = 7 \\ -1x + 0y + 1z = 5 \end{cases}$$

1) **Matriz aumentada ou completa:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Etapas para escalonamento

Passo 1. Localizamos a coluna mais à esquerda que não seja constituída inteiramente de zeros.

Passo 2. Permutamos a primeira linha com uma outra linha, se necessário, para obter uma entrada não nula ao topo da coluna encontrada no Passo 1.

Passo 3. Se a entrada que agora está no topo da coluna encontrada no Passo 1 é a, mul- tiplicamos a primeira linha inteira por 1/a para introduzir um pivô.

Passo 4. Somamos múltiplos convenientes da primeira linha às linhas inferiores para obter zeros em todas as entradas abaixo do pivô.

Passo 5. Agora escondemos a primeira linha da matriz e recomeçamos aplicando o Pas- so 1 à submatriz resultante. Continuamos dessa maneira até que toda a matriz esteja em forma escalonada.

Passo 6. Começando com a última linha não nula e trabalhando para cima, somamos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores para introduzir zeros acima dos líderes.

EXEMPLO

Escalonar, discutir e resolver, se possível, o sistema $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 1 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

Associando o sistema a uma matriz aumentada temos: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&-1&5\\1&3&1\\3&-1&4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&3&1\\2&-1&5\\3&-1&4\end{pmatrix} \; x(-2)$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-7&3\\3&-1&4\end{pmatrix} \; x(-3) \rightarrow \begin{pmatrix}1&3&1\\0&-7&3\\0&-10&1\end{pmatrix} \begin{matrix} x10\\ x7\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-70&30\\0&-70&7\end{pmatrix} \; x(-1) \rightarrow \begin{pmatrix}1&3&1\\0&-70&30\\0&0&-23\end{pmatrix}$$

- ✓ A matriz está escalonada.
- ✓ A última linha representa a equação $0x + 0y = -23 \rightarrow$ SI

Técnica de Solução de sistemas

1. Crammer
2. Eliminação gaussiana
3. Eliminação de Gauss-Jordan
   a) Fase direta, para frente
   b) Fase inversa, para trás

- **Regra de Crammer**

Para encontrarmos soluções de um sistema 3x3, com incógnitas x, y e z, utilizando a regra de Crammer, é necessário calcularmos o determinante da matriz incompleta e suas variações. Temos então que:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$z = \frac{D_z}{D}$$

D → determinante da matriz incompleta do sistema.

Diferença entre Gauss e Gauss-Jordan

A eliminação de Gauss transforma em uma matriz na forma escalonada por linhas. Já a eliminação de Gauss-Jordan transforma a matriz em uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas. Esse algoritmo é mais eficiente que aplicar a eliminação de Gauss duas vezes.

Técnica de Solução de sistemas

1) Eliminação Gaussiana 2) Eliminação Gauss-Jordam

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - \frac{3}{2}L_3}{\overset{L_1 \to L_1 - 3L_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

Matriz Escalonada

$\downarrow$

Eliminação Gaussiana

$\downarrow$

Matriz Escalonada Reduzida por linhas

$\downarrow$

Eliminação de Gauss-Jordan

Exemplos: Matriz escalonada, mas não reduzida por linhas: solução por Gauss (Gaussiana)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos: Matriz escalonada reduzida por linhas: solução por Gauss-Jordam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz em forma escalonada não reduzida por linhas - não tem zeros necessariamente acima de cada pivô

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Assim, colocando qualquer número real no lugar dos asteriscos, todas as matrizes dos seguintes tipos estão em forma escalonada.

Matriz em forma escalonada reduzida por linhas- tem zeros necessariamente acima de cada pivô

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

por meio de uma sequência de operações elementares nas linhas, colocando zeros abaixo e acima de cada pivô, então o conjunto de soluções está visível ou pode ser obtido convertendo certas equações lineares à forma paramétrica.

a) Fase direta, para frente

b) Fase inversa, para trás

Operações elementares nas linhas, colocando zeros abaixo e acima de cada pivô,

a) Fase direta, para frente

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso completa a fase direta, pois não há zeros abaixo dos pivôs.

b) Fase inversa, para trás

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isso completa a fase inversa, pois não há zeros acima dos pivôs.

Propriedades da Matriz escalonada reduzida por linhas

1) Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não-nulo da linha é um 1. Chamamos este número 1 de **líder** ou **pivô**;

2) Se existirem linhas constituídas somente de zeros, elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz;

3) Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistem só de zeros, o líder da linha inferior ocorre mais à direita que o líder da linha superior;

4) Cada coluna que contém um líder tem zeros nas demais entradas.

1) Eliminacão de Gauss

- Técnica de Solução de sistemas utilizada com a substituição inversa:
  - Exemplos:

1)

$$\begin{cases} x+3z=-8 \\ 2x-4y=-4 \\ 3x-2y-5z=26 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -14 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{-1}{4} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & -2 & -14 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/3 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 44 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{L_3 \to \frac{-1}{11} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=-4 \end{cases}$$

- **Neste caso o sistema tem uma única solução.**

1) Eliminacão de Gauss

- Exemplos:
  - 3) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-1z=3 \\ 2x+2y+2z=1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \overset{L_3 \to \frac{-1}{7} L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to L_2 + 5L_3}{\overset{L_1 \to L_1 - 9L_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Neste caso dizemos que o sistema **não tem solução**, ou que é **impossível.**

2) Eliminacão de Gauss-Jordam

- Exemplos:
  - 2) $\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ 2x+y+4z=0 \\ x-y+2z-4t=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_2 \to \frac{1}{3}L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \to L_1 + L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3 \to \frac{-1}{3}L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}L_3}{\overset{L_1 \to L_1 + \frac{1}{3}L_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}$$

- **Neste caso o sistema tem infinitas soluções e é dito <u>indeterminado.</u>**

Sistemas Lineares Homogêneos

Cada sistema de equações lineares homogêneo é consistente, pois todos esses sistemas têm x1 = 0, x2 = 0, . . . , xn = 0 como uma solução.

Essa solução é denominada solução trivial ou solução nula; quaisquer outras solução, se as houver, são ditas não triviais.

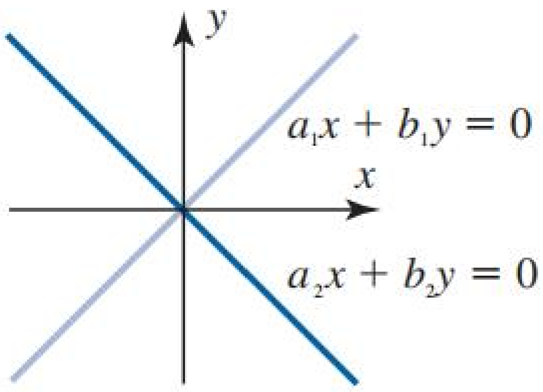
$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}
$$

$$a_1x + b_1y = 0 \quad (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1} \textbf{ não ambas nulas})$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2} \textbf{ não ambas nulas})$$

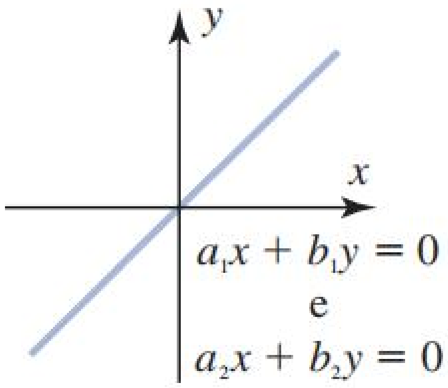
Sistemas Lineares Homogêneos

- O sistema tem somente a solução trivial.



Somente a solução trivial

- O sistema tem uma infinidade de soluções além da solução trivial.



Uma infinidade de soluções

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 4x_4 + 2x_5 \qquad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \qquad &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Associando, agora, os valores arbitrários r, s e t às variáveis livres x2, x4 e x5, respectiva- mente, podemos expressar o conjunto de soluções parametricamente por

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r,$$
$$x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, x_6 = 0$$

Note que a solução trivial é obtida com r = s = t = 0. E

Erro de arredondamento e instabilidade

Muitas vezes, há uma lacuna entre a teoria matemática e sua implementação prática, e as eliminações gaussiana e de Gauss-Jordan são bons exemplos disso. O problema é que oscomputadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de arredondamento; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções.

Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos instáveis. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondamento e a instabilidade. Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana

- Exercícios:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 15 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 8x_2 - 9x_3 = 14 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -12 \\ -8x_1 - 9x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

Livros:

- I. Silva, Cláudio Xavier da. II. Filho, Benigno Barreto. Matemática aula por aula, 2 : ensino médio – São Paulo : FTD, 2009.
- Dante, Luiz Roberto. Matemática : volume único - Ática. São Paulo : Ática, 2005.
- I. Iezzi,Gelson. II. Dolce, Osvaldo. III. Degenszajn, David. IV. Périgo, Roberto. Matemática : volume único – São Paulo : Atual, 2002.
- **ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. Bookman, 2001.**