

Trabalho computacional EDO – SME0340

Marcos Vinícius Firmino Pietrucci

Aluno

1. Dedução do sistema de EDO

Inicialmente, nos foi fornecido o seguinte sistema de equações relativas ao movimento do pêndulo:

$$\begin{cases} mx'' = Tx & (1) \\ my'' = Ty - mg & (2) \\ L^2 = x^2 + y^2 & (3) \end{cases}$$

Vamos trabalhar com esse sistema a fim de transformá-lo num sistema de EDOs de primeira ordem.

Vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) \quad (4)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t) \quad (5)$$

A seguir vamos derivar a equação (3)

$$(L^2)' = (x^2 + y^2)'$$

$$0 = xu + yv \quad (6)$$

Esta equação (6) será importante futuramente, ademais, derivamos (6) mais uma vez.

$$(0)' = (2xu + 2yv)'$$

$$0 = u^2 + u'x + v^2 + v'y \quad (7)$$

De posse da equação (7), vamos por outro caminho. Olhamos agora para as equações (1) e (2), e isolaremos as derivadas segundas:

$$x'' = \frac{Tx}{m}$$

$$y'' = \frac{Ty}{m} - g$$

Aplicando a substituição de variável (4) e (5):

$$u' = \frac{Tx}{m} \quad (8)$$

$$v' = \frac{Tx}{m} - g \quad (9)$$

Finalmente, de posse das equações (7), (8) e (9) montamos o subsistema:

$$\begin{cases} 0 = u^2 + u'x + v^2 + v'y \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u' = \frac{Tx}{m} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} v' = \frac{Tx}{m} - g \end{cases} \quad (9)$$

Substituindo as equações (8) e (9) em (7)

$$0 = u^2 + \frac{Tx}{m} * x + v^2 + \left(\frac{Tx}{m} - g\right)y$$

$$0 = u^2 + \frac{Tx^2}{m} + \frac{Ty^2}{m} - gy + v^2$$

$$0 = u^2 + \frac{T}{m} * (x^2 + y^2) - gy + v^2$$

Substituindo (3) nesta equação:

$$0 = u^2 + \frac{TL^2}{m} - gy + v^2$$

Nosso objetivo agora é isolar T'

$$\frac{L^2}{m}T = -u^2 - v^2 + gy$$

$$\left(\frac{L^2}{m}T\right)' = (-u^2 - v^2 + gy)'$$

$$\frac{L^2}{m}T' = -2uu' - 2vv' + gy'$$

Substituindo as equações (8) e (9) na equação

$$\frac{L^2}{m} T' = -2u \frac{Tx}{m} - 2v \left(\frac{Tx}{m} - g \right) + gv$$

$$\frac{L^2}{m} T' = -2 \frac{T}{m} (ux - vy) + 2gv + gv$$

Aqui, lembremos da equação (6), que é exatamente o que está nos primeiros parênteses. Isto nos permite zerar todo o termo que multiplica $(ux - vy)$.

$$\frac{L^2}{m} T' = 3gv$$

Finalmente, isolamos T' na equação

$$T' = 3g \frac{m}{L^2} v \quad (10)$$

Feito toda essa discussão e trabalho algébrico, finalmente obtemos o sistema de EDOs de primeira ordem. Este sistema é formado pelas equações (4), (5), (8), (9) e (10).

$$[1] \begin{cases} u = x' & (4) \\ v = y' & (5) \\ u' = \frac{Tx}{m} & (8) \\ v' = \frac{Tx}{m} - g & (9) \\ T' = 3g \frac{m}{L^2} v & (10) \end{cases}$$

Sistema [1] de EDOs de primeira ordem

2. Resolver numericamente

Com o NUSP de final 2, a mim foi atribuído o método preditor-corretor para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Este método é basicamente o método introduzido como “Trapezoidal explícito”. A equação do método preditor-corretor é a seguinte:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \rightarrow \text{Preditor}$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})] \rightarrow \text{Corretor}$$

O preditor é uma aproximação inicial, feita pelo método de Euler. O corretor é um ajuste fino, feito pelo método trapezoidal implícito. Combinando a previsão do método de Euler com a correção do método trapezoidal implícito, obtemos \bar{y}_{n+1} , que é a aproximação mais precisa. Este método é chamado de preditor-corretor.

Aplicando as condições iniciais fornecidas ao sistema [1], sendo elas:

$$(x(0), y(0)) = (L, 0)$$

$$(u(0), v(0)) = (0, 0)$$

$$T(0) = 0$$

$$m = L = 1$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$[2] \begin{cases} u = x' & (1) \\ v = y' & (2) \\ u' = Tx & (3) \\ v' = Tx - g & (4) \\ T' = 3gv & (5) \end{cases}$$

Sistema [2] de EDOs de primeira ordem

Desse sistema [2], posso escrever as seguintes equações para os preditores e corretores (os corretores possuem uma barra em cima):

Os preditores:

$$T_{n+1} = T_n + h (3gv_n)$$

$$u_{n+1} = u_n + h (T_n x_n)$$

$$v_{n+1} = v_n + h (T_n y_n - g)$$

$$x_{n+1} = u_{n+1}$$

$$y_{n+1} = v_{n+1}$$

Os corretores:

$$\bar{x}_{n+1} = x_n + \left(\frac{h}{2}\right) (x_n + x_{n+1})$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) (y_n + y_{n+1})$$

$$\bar{T}_{n+1} = T_n + \left(\frac{h}{2}\right) (3gv_n + 3gv_{n+1})$$

$$\bar{u}_{n+1} = u_n + \left(\frac{h}{2}\right) ((T_n x_n) + (T_{n+1} \bar{x}_{n+1}))$$

$$\bar{v}_{n+1} = v_n + \left(\frac{h}{2}\right) (T_n y_n + T_{n+1} \bar{y}_{n+1} - 2g)$$

De posse dessas equações, implementei o método de forma iterativa no MATLAB. Os resultados estão na seção seguinte.

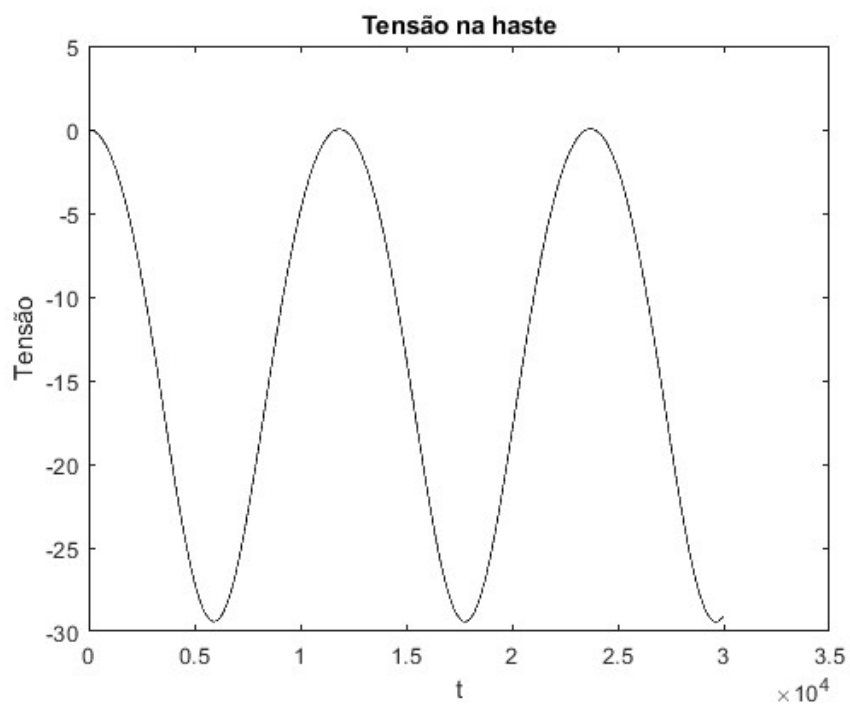
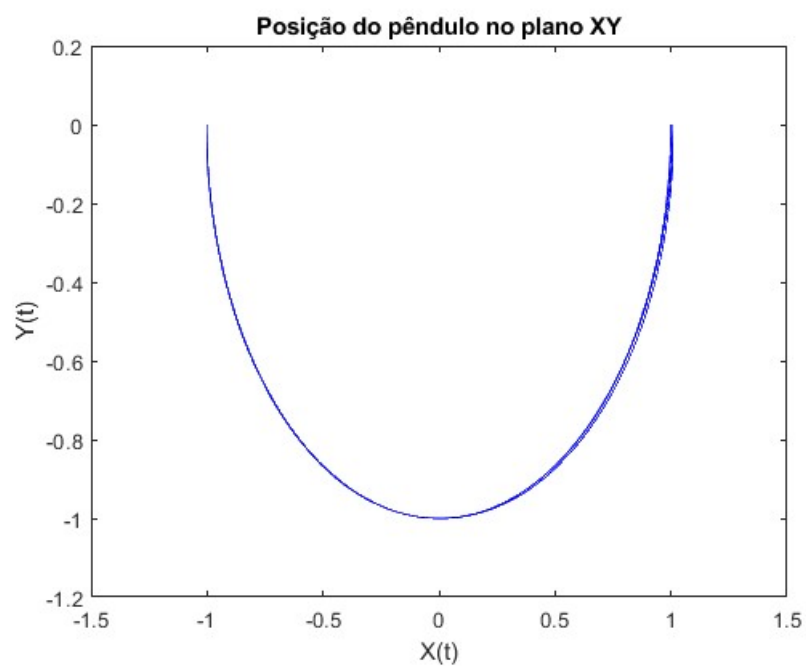
3. Resultados e discussão

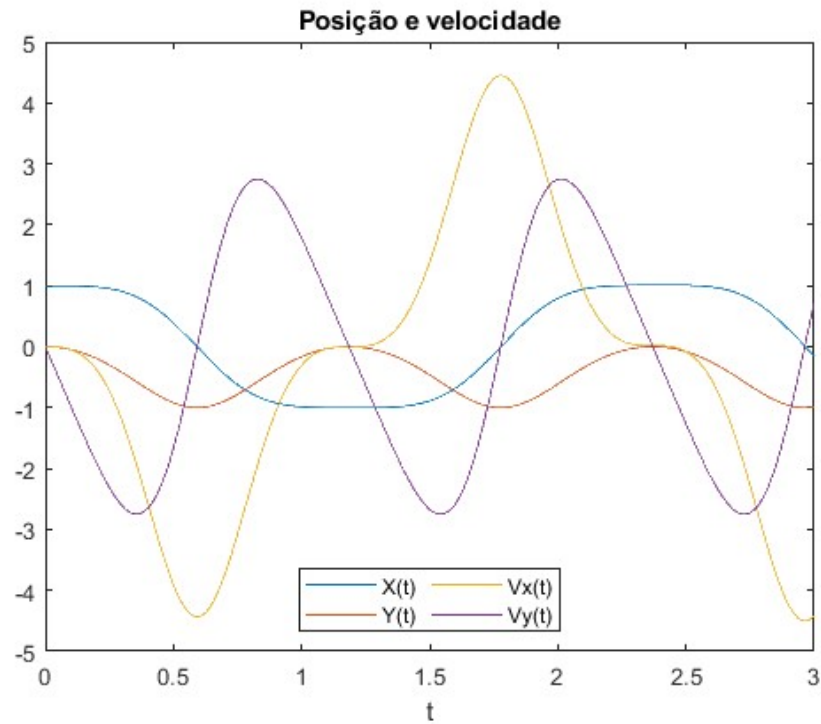
Após numerosos testes com as variáveis 'h' e 'tempo final', descobri que o método calcula os valores com boa acurácia se atribuirmos à essas variáveis os valores:

$$h = 0.0001 \text{ s}$$

$$t_f = 3.0 \text{ s}$$

Finalmente, posto as condições iniciais, o programa foi executado e gerou os seguintes resultados em forma de gráficos:



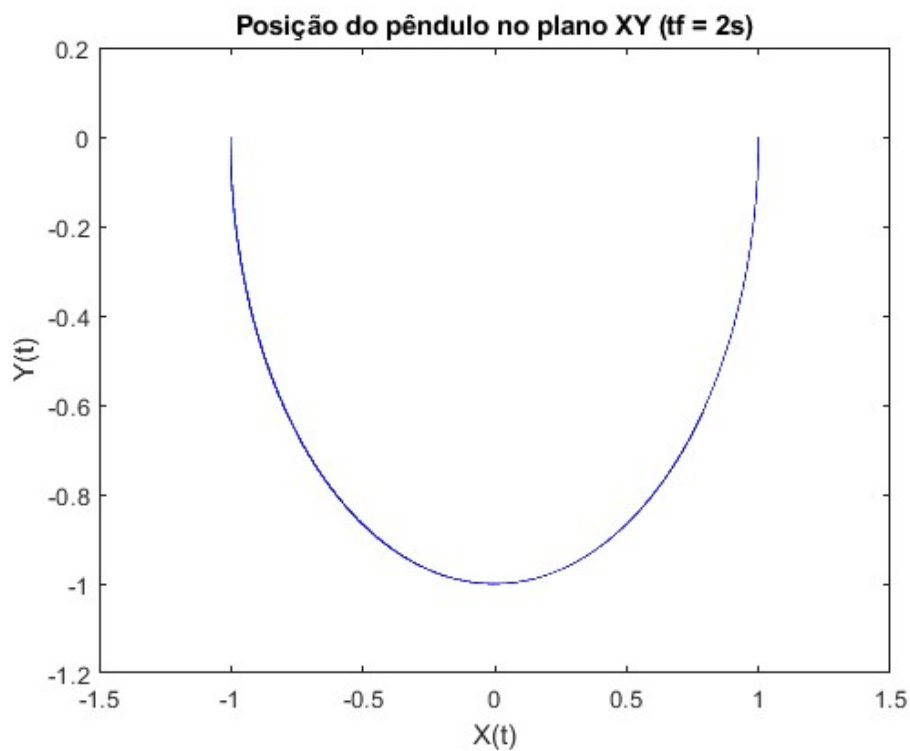


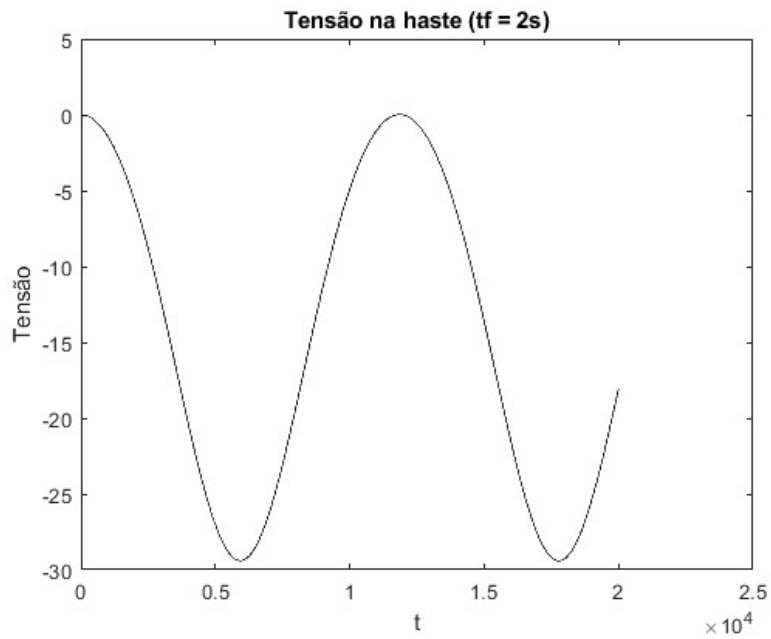
Estes gráficos revelam que o resultado obtido foi muito positivo. O método alcançou uma precisão muito boa e os gráficos ficaram bem próximos do esperado.

Reduzindo-se o tempo total, obtemos um resultado ainda mais preciso, porém com menos tempo de simulação:

$$h = 0.0001 \text{ s}$$

$$t_f = 2.0 \text{ s}$$



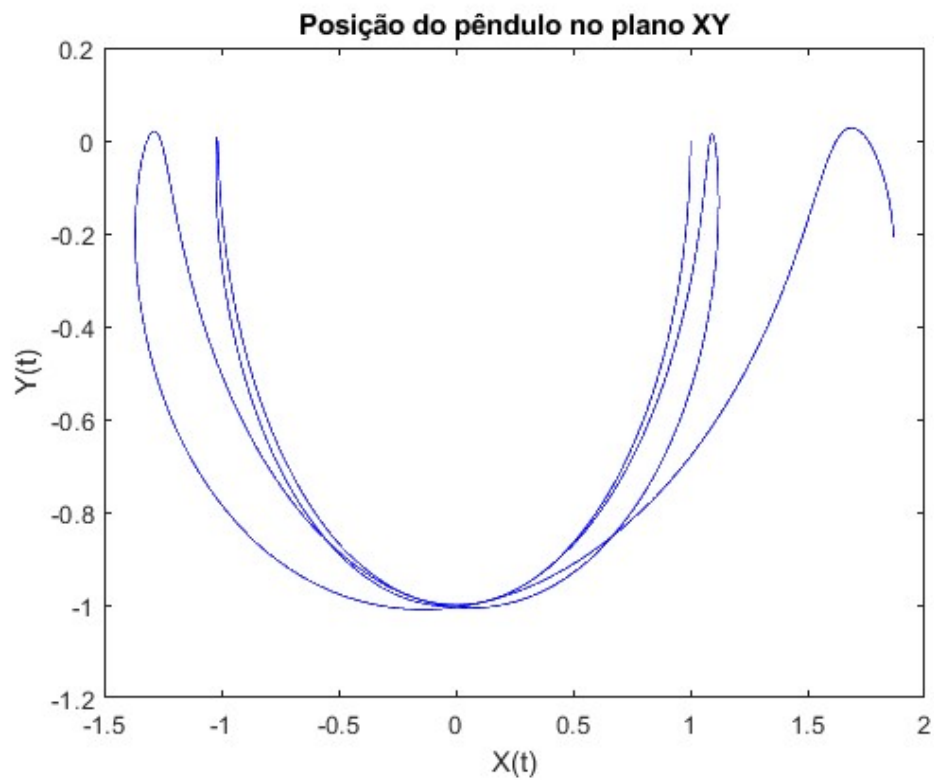


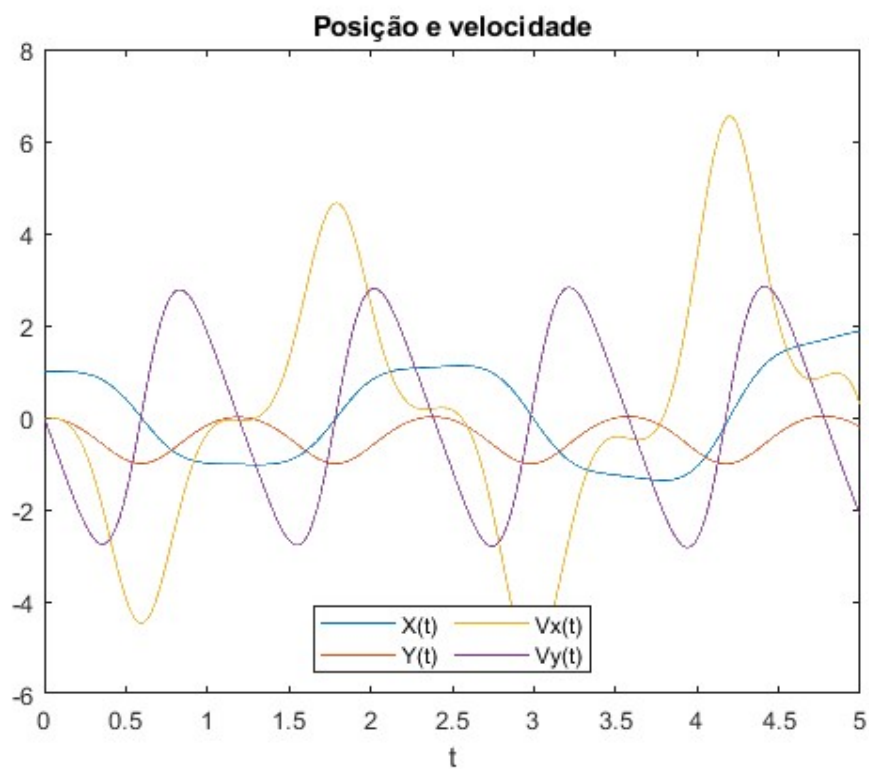
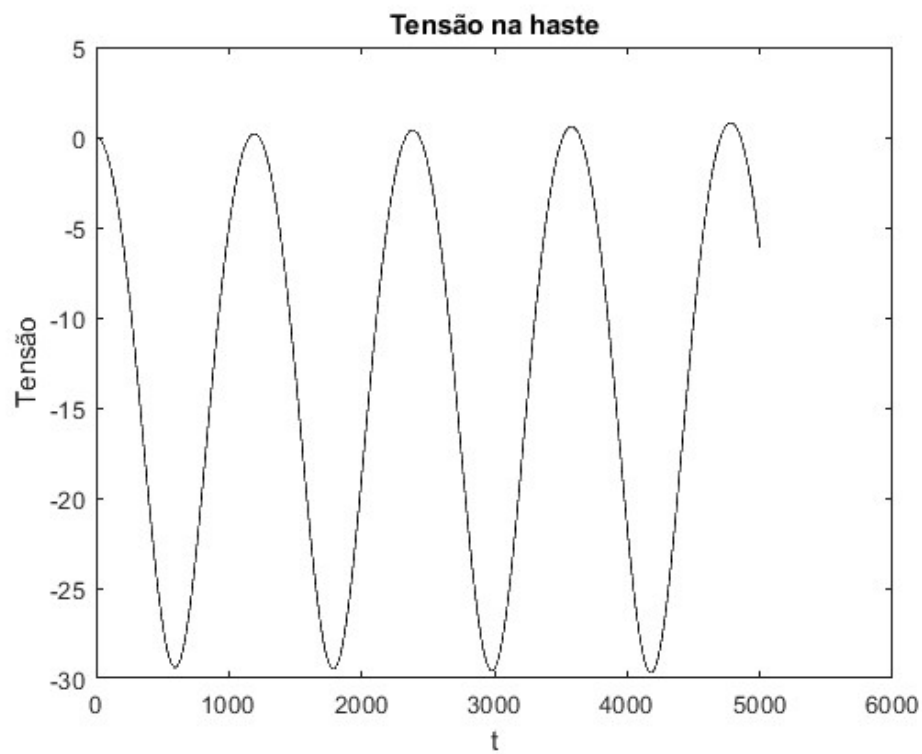
Para fins de discussão, gerei também outros gráficos, porém usando uma condição inicial diferente:

$$h = 0.001 \text{ s}$$

$$t_f = 5.0 \text{ s}$$

Os resultados com estes parâmetros estão a seguir:





Nota-se uma perda de eficácia do método, a qual fica nítida no cálculo da posição do pêndulo no plano XY. Note como a posição e as velocidades do pêndulo são diferentes do esperado. Concluímos que $h = 0.001 \text{ s}$ não é pequeno o suficiente, o que deixa o método preditor-corretor impreciso.

Uma observação importante é quanto ao sinal da tensão na haste. Nota-se que durante todo o gráfico a tensão é negativa. Isso se deve ao fato de que o vetor da tensão é sempre contrário ao referencial adotado como positivo, pois a tensão é uma força restauradora. Por isso T poderia ser substituído por $-T$ sem nenhum prejuízo, o que não foi feito para respeitar as equações fornecidas pelo enunciado.

Posto todos estes dados, é notável que o método preditor-corretor, usando os parâmetros cujos testes foram melhores, gerou resultados positivos e bem próximos da realidade. Também ficou claro que quanto menor o h e menor o tempo total de simulação, mais preciso é método, as custas de mais memória e de mais processamento. Conclui-se que o método preditor-corretor é preciso o suficiente e útil para resolução numérica de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.