efc5_221525

July 27, 2020

0.0.1 EA614 2020.1

0.1 EFC5

Aluno: Marcos Diaz

RA: 221525

0.1.1 Atividades

2 (a) Sequência x[n] Preparação:

[33]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.signal as sgn
```

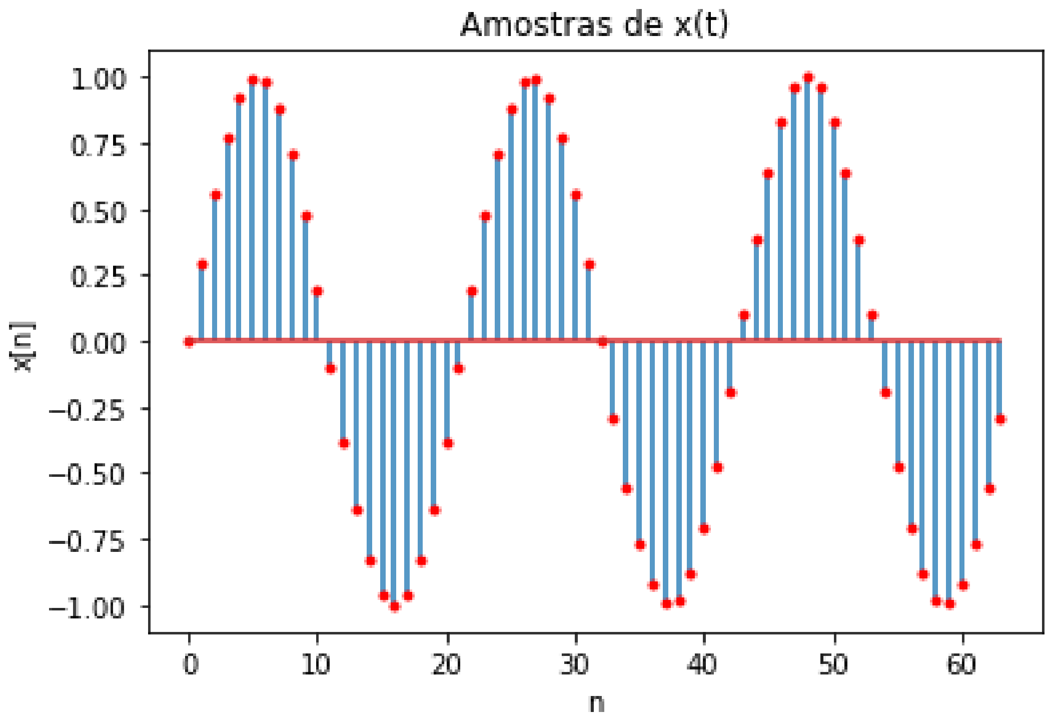
Domínio

[34]:
```
f0 = 3
fs = 64
N = 64
n = np.linspace(0, N-1, N)
```

x[n]:

[35]:
```
x = [np.sin(2*np.pi*f0*n/fs) for n in n]
```

[36]:
```
plt.title("Amostras de x(t)")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("x[n]")
g = plt.stem(n, x, markerfmt='r.', linefmt=None, use_line_collection=True)
```



Amostras de x(t)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
x[n]
0
10
20
30
40
50
60
n

- $x[n] = \text{sen}\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) w_N[n]$
- $w_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

$\underbrace{\text{TRANSFORMADAS DE SINAIS DISCRETOS}}$ $X(e^{j\Omega})$

- $\mathcal{F}\{x[n]\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left\{\text{sen}\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right)\right\} * \mathcal{F}\{w_N[n]\}$
- $\mathcal{F}\left\{\text{sen}\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right)\right\} = \mathcal{F}\{\text{sen}(\Omega_0 n)\}$ [redacted]

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}\right)\right\} = \frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\right]$$

- $\mathcal{F}\{w_N[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_N[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{0}^{N-1} e^{-j\Omega n} \xrightarrow{\text{SOMA DA PG}}$

$$= \frac{e^{-j\Omega(N-1)} - 1}{e^{-j\Omega} - 1} = X_2(\Omega)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{x[n]\} = \frac{1}{2\pi} X_2(\Omega) * \frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\right]$$

$$= \frac{1}{2j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(X_2(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - X_2(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\right)$$

$$= \frac{1}{2j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-j(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)(N-1)} - 1}{e^{-j(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)} - 1} - \frac{e^{-j(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)(N-1)} - 1}{e^{-j(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)} - 1}\right)$$

$$= X(e^{j\Omega})$$

2 (b) Transformada de x[n]

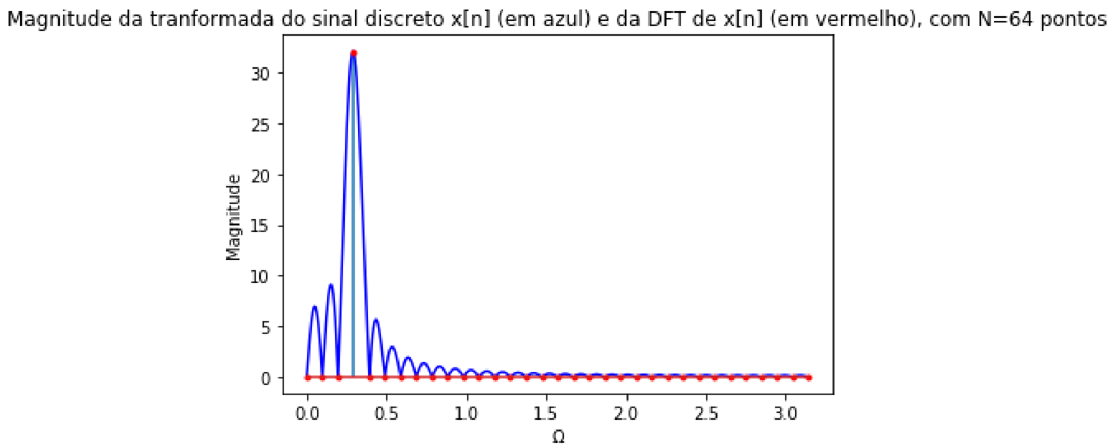
2 (c) DFT É esperado um espectro imaginário e par, pois x(t) é real e ímpar.

[37]:
```
N=64
# X(K)
k = np.linspace(0, N-1, N)
dft_x = np.fft.fft(x, n=N)
omega = 2*np.pi/N*k
```

```
# X(e^(j*omega))
w, h = sgn.freqz(x)

plt.title("Magnitude da tranformada do sinal discreto x[n] (em azul) e da DFT de x[n] (em vermelho), com N=64 pontos")
plt.xlabel("Ω")
plt.ylabel("Magnitude")

g2 = plt.plot(w, np.abs(h), 'b')
g = plt.stem(omega[:int(N/2)+1], np.abs(dft_x)[:int(N/2)+1], markerfmt='r.', linefmt=None, use_line_collection=True)
```



(Utilizei a função plot() para o gráfico da transformada de sinal discreto (em azul) para aproximar seu caráter contínuo, ainda que, por ser uma transformada digital, ela também seja contínua)

Vemos que a DFT apresenta uma única frequência dominante (em $2\pi\frac{fo}{fs}$, aproximadamente 0,3), apresentando uma forma igual à da resposta em frequência da senoide analógica (|H(jw)|). Isso ocorreu pois o número de pontos da DFT é igual ao tamanho do sinal discreto, ou seja, para a transformada o sinal discreto limitado é uma janela de um sinal discreto ilimitado no tempo.

Já a forma da transformada contínua do sinal discreto apresenta uma forma próxima da função sinc em torno da frequência fundamental da senoide. Isso é explicado pois a trasnformada considera que o sinal é uma multiplicação da senoide por uma janela retangular, cuja trasnformada é a função sinc.

Nota-se aqui uma diferença importante entre a trasnformada de tempo dicreto e a DFT: a primeira admite que o sinal discreto representa o único intervalo não nulo do sinal; a segunda considera que esse sinal discreto é uma janela de um sinal que se estende periodicamente até o infinito.

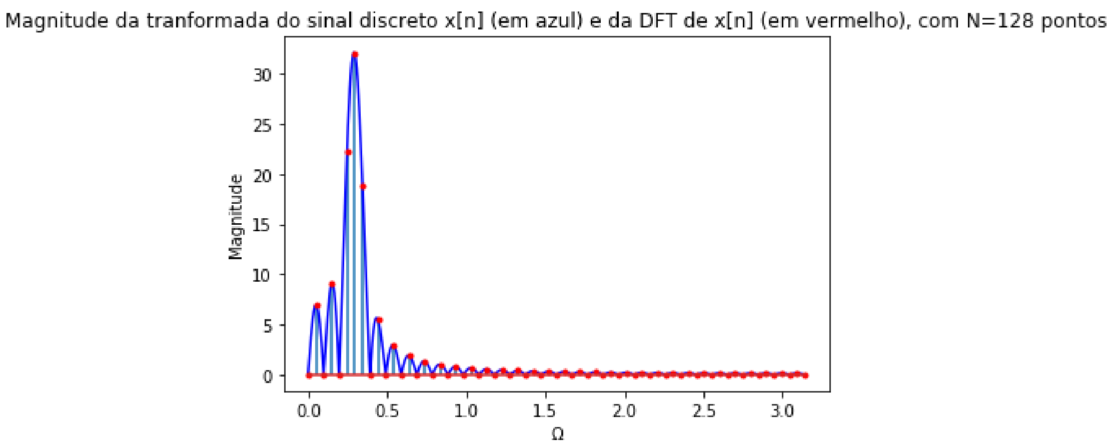
2 (d) DFT com 2N pontos

[38]:
```python
N=128
# X(K)
k = np.linspace(0, N-1, N)
dft_x = np.fft.fft(x, n=N)
omega = 2*np.pi/N*k

# X(e^(j*omega))
w, h = sgn.freqz(x)

plt.title("Magnitude da tranformada do sinal discreto x[n] (em azul) e da DFT␣
↪de x[n] (em vermelho), com N=128 pontos")
plt.xlabel("Ω")
plt.ylabel("Magnitude")

g2 = plt.plot(w, np.abs(h), 'b')
g = plt.stem(omega[:int(N/2)+1], np.abs(dft_x)[:int(N/2)+1], markerfmt='r.',␣
↪linefmt=None, use_line_collection=True)
```



É visível que a DFT representa amostras da transformada para tempo discreto e o espectro obtido não é mais representativo da resposta em frequência da senoide analógica.

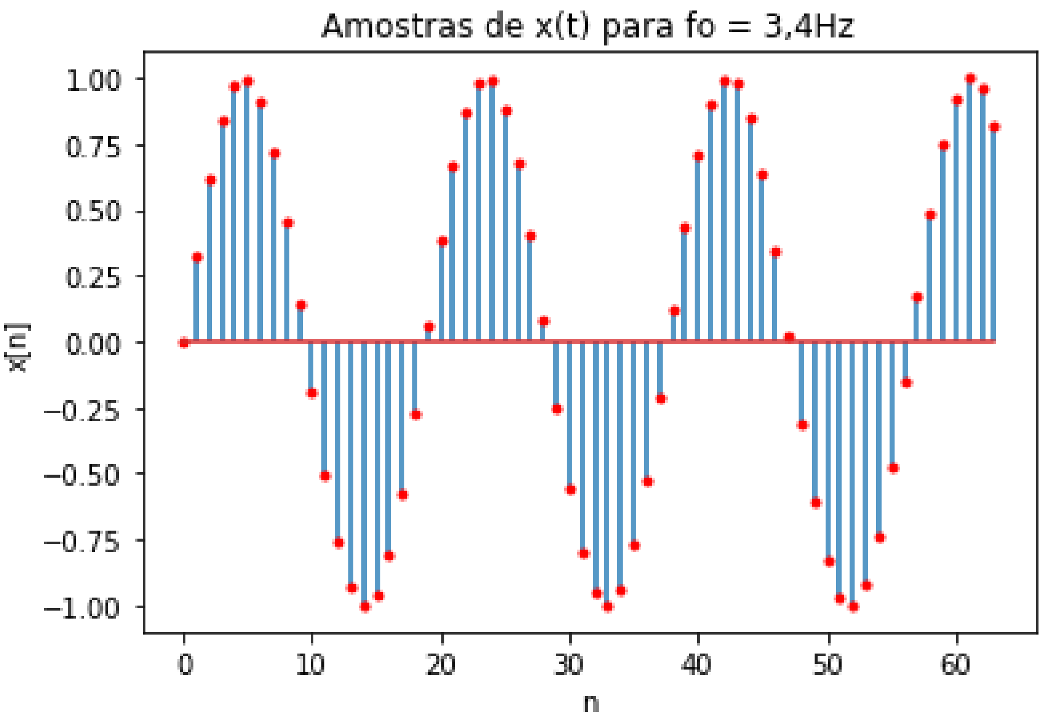
Isso ocorre pois agora, com N>M, o sinal de entrada tem "zero padding", ou seja, é uma janela de uma função descontínua com valores nulos nos instantes pós n=64. Ou seja, a DFT não mais aproxima o espectro da senoide analógica pura, mas sim o espectro de uma senóide com anulamentos periódicos. Assim, torna-se somente uma amostragem da trasnformada de tempo contínuo.

A transformada de tempo discreto não muda, pois ela smepre considerou o sinal discreto como único intervalo de tempo com magnitude não nula, diferente da DFT que considera janelas.

2 (e) Nova frequência fundamental

[39]:
```
f0 = 3.4
x2 = [np.sin(2*np.pi*f0*n/fs) for n in n]
```

[40]:
```
plt.title("Amostras de x(t) para fo = 3,4Hz")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("x[n]")
g = plt.stem(n, x2, markerfmt='r.', linefmt=None, use_line_collection=True)
```



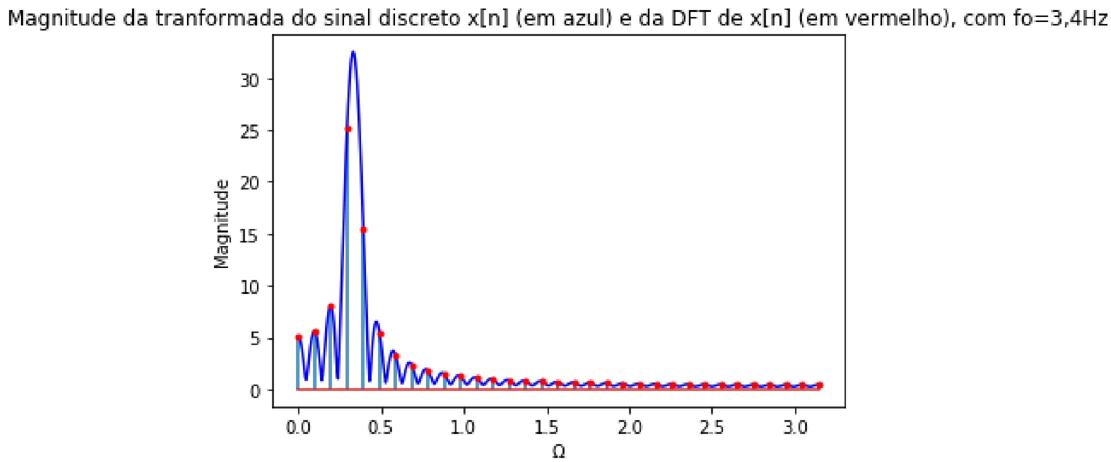
Percebe-se que a janela escolhida não respeita o novo período da senoide. Observa-se também períodos incompletos na amostra.

[41]:
```
N=64
# X(K)
k = np.linspace(0, N-1, N)
dft_x = np.fft.fft(x2, n=N)
omega = 2*np.pi/N*k

# X(e^(j*omega))
w, h = sgn.freqz(x2)

plt.title("Magnitude da tranformada do sinal discreto x[n] (em azul) e da DFT␣
 ↪de x[n] (em vermelho), com fo=3,4Hz")
plt.xlabel("Ω")
plt.ylabel("Magnitude")
```

```
g2 = plt.plot(w, np.abs(h), 'b')
g = plt.stem(omega[:int(N/2)+1], np.abs(dft_x)[:int(N/2)+1], markerfmt='r.',␣
 ↪linefmt=None, use_line_collection=True)
```



Observamos que a DFT não aproxima mais a transformada de tempo discreto, já que seu valor máximo não mais se encontra na frequência fundamental de 3,4Hz. Isso ocorre pois a janela contém períodos não interos nas extremidades, de modo que o sinal que a DFT tenta transformar não é uma amostragem da senóide pura, mas um sinal deformado.

(A deformação fica clara se imaginarmos que uma réplica do sinal x[n] está adjacente ao ponto n=63, de modo que coexistem dois arcos positivos da senoide adjacentes)