



MARCOS VINICIUS FIGUEIREDO SOUSA

**MÉTODOS DE SUPRESSÃO E MITIGAÇÃO DE RUÍDO
QUÂNTICO EM QPUS APLICADOS AO ALGORITMO DE
GROVER**

LAVRAS – MG

2025

MARCOS VINICIUS FIGUEIREDO SOUSA

**MÉTODOS DE SUPRESSÃO E MITIGAÇÃO DE RUÍDO QUÂNTICO EM QPUS
APLICADOS AO ALGORITMO DE GROVER**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Física, para a obtenção do título de Bacharel.

Prof. Dr. Moises Porfírio Rojas Leyva

Orientador

LAVRAS – MG

2025

**Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da Biblioteca
Universitária da UFLA, com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).**

Sousa, Marcos Vinicius Figueiredo
MÉTODOS DE SUPRESSÃO E MITIGAÇÃO DE RUÍDO
QUÂNTICO EM QPUS APLICADOS AO ALGORITMO DE
GROVER / Marcos Vinicius Figueiredo Sousa. – Lavras :
UFLA, 2025.
80 p. : il.

Monografia (graduação) –Universidade Federal de Lavras,
2025.

Orientador: Prof. Dr. Moises Porfírio Rojas Leyva.
Bibliografia.

1. Ruído Quântico. 2. Interação de qubits. 3. Computação
Quântica. I. Leyva, Moises Porfírio Rojas. II. Título.

MARCOS VINICIUS FIGUEIREDO SOUSA

**MÉTODOS DE SUPPRESSÃO E MITIGAÇÃO DE RUÍDO QUÂNTICO EM QPUS
APLICADOS AO ALGORITMO DE GROVER**

**METHODS FOR SUPPRESSION AND MITIGATION OF QUANTUM NOISE IN QPUS
APPLIED TO THE GROVER'S ALGORITHM.**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Curso de Engenharia Física, para a obtenção do título de Bacharel.

APROVADA em 30 de Fevereiro de 2016.

Prof. MSc. Antônio Banca Um UFM
Prof. DSc. João Banca Dois FCO
Profa. Esp. Eliza Banca Três BELMIS
Prof. Esp. Carlos Banca Quatro IBGPLUS

Prof. Dr. Moises Porfírio Rojas Leyva
Orientador

**LAVRAS – MG
2025**

Espaço reservado a dedicatória.

AGRADECIMENTOS

Espaço reservado aos agradecimentos.

*Espaço reservado a epígrafe.
(Autor Desconhecido)*

RESUMO

A computação quântica é uma área emergente da ciência da computação que se baseia nos princípios da mecânica quântica para processar informações. Um dos conceitos fundamentais dessa área é a superposição quântica, que permite que os qubits assumam múltiplos estados simultaneamente, possibilitando a realização de cálculos exponencialmente mais rápidos para certos problemas. Um dos algoritmos de destaque nesse contexto, e foco principal deste trabalho, é o Algoritmo de Grover, utilizado para busca em bases de dados não estruturadas, proporcionando aceleração quadrática em relação aos métodos clássicos. Este estudo tem como objetivo analisar a estrutura e o funcionamento do Algoritmo de Grover, avaliando sua eficiência teórica e prática por meio de cálculos analíticos, simulações computacionais e implementações em hardwares quânticos reais. Além disso, serão exploradas técnicas para aprimorar a confiabilidade das execuções em dispositivos quânticos físicos, que são susceptíveis a erros devido à presença de ruído quântico, originado principalmente da interação entre os qubits e o ambiente. Para transpor esses desafios, serão investigados métodos de otimização, supressão e mitigação de ruído, buscando melhorar a precisão dos resultados obtidos nas *Quantum Processing Units* (QPUs). Dessa forma, este trabalho pretende não apenas aprofundar o conhecimento sobre a implementação e aplicabilidade do Algoritmo de Grover, mas também avaliar estratégias que aumentem sua robustez em ambientes ruidosos, contribuindo para o avanço da computação quântica.

Palavras-chave: Simulação Quântica; Processamento Quântico; Decoerência.

ABSTRACT

Quantum computing is an emerging field of computer science that is based on the principles of quantum mechanics to process information. One of its fundamental concepts is quantum superposition, which allows qubits to exist in multiple states simultaneously, enabling exponentially faster computations for certain problems. One of the prominent algorithms in this context, and the main focus of this work, is Grover's Algorithm, which is used for searching in unstructured databases, providing a quadratic speedup compared to classical methods. This study aims to analyze the structure and functioning of Grover's Algorithm, evaluating its theoretical and practical efficiency through analytical calculations, computational simulations, and implementations on real quantum hardware. In addition, techniques will be explored to enhance the reliability of executions on physical quantum devices, which are susceptible to errors due to the presence of quantum noise, primarily caused by the interaction between qubits and the environment. To overcome these challenges, methods of noise optimization, suppression, and mitigation will be investigated, seeking to improve the accuracy of results obtained in Quantum Processing Units (QPUs). Thus, this work aims not only to deepen the understanding of the implementation and applicability of Grover's Algorithm but also to evaluate strategies that increase its robustness in noisy environments, contributing to the advancement of quantum computing.

Keywords: Quantum Simulation; Quantum Processing; Decoherence.

INDICADORES DE IMPACTO

O presente trabalho promove impactos significativos nos campos tecnológico e educacional, além de contribuir potencialmente para avanços econômicos e sociais a longo prazo. Do ponto de vista tecnológico, a pesquisa auxilia no desenvolvimento de técnicas que aumentam a confiabilidade e, por conseguinte, a aplicabilidade dos computadores quânticos, permitindo uma maior fidelidade nos resultados obtidos e reduzindo as limitações impostas pelos ruídos quânticos intrínsecos às atuais *Quantum Processing Units* (QPUs). Esses avanços são fundamentais para acelerar a adoção da computação quântica em setores estratégicos, como criptografia, inteligência artificial e otimização de processos industriais. No âmbito acadêmico e educacional, o estudo pode agir como um fomentador da formação de novos pesquisadores e profissionais capacitados, ao instigar o desenvolvimento de novas áreas de pesquisa e ainda integrar conhecimentos teóricos e experimentais essenciais para o avanço da computação quântica no Brasil. A pesquisa contribui diretamente para a área temática de Tecnologia e Produção da Política Nacional de Extensão, uma vez que busca aprimorar a aplicabilidade de algoritmos quânticos e desenvolver técnicas de mitigação de erros aplicáveis a diferentes domínios. Além disso, o projeto está alinhado com os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) da ONU, especialmente o ODS 9, que incentiva a inovação e fortalecimento de pesquisas científicas em países em desenvolvimento, como é o caso do Brasil, e o ODS 4, que visa a educação de qualidade, pois o estudo promove o ensino e a pesquisa em computação quântica no país, uma vez que é apresentado de forma didática e de fácil entendimento. Embora os impactos diretos ainda sejam mais perceptíveis no ambiente acadêmico e de pesquisa, o desenvolvimento de técnicas de mitigação de ruído tem o potencial de beneficiar indústrias e empresas que futuramente empregarão a computação quântica para resolver problemas complexos em menor tempo e com maior eficiência. Dessa forma, este trabalho representa um passo relevante para a evolução da computação quântica e sua aplicabilidade prática, fortalecendo o Brasil como um agente ativo nessa revolução tecnológica global.

IMPACT INDICATORS

This work promotes significant impacts in the technological and educational fields, as well as potentially contributing to long-term economic and social advances. From a technological perspective,

the research aids in the development of techniques that enhance the reliability and, consequently, the applicability of quantum computers, enabling greater fidelity in the results obtained and reducing the limitations imposed by the intrinsic quantum noise present in current Quantum Processing Units (QPUs). These advances are essential for accelerating the adoption of quantum computing in strategic sectors such as cryptography, artificial intelligence, and industrial process optimization. In the academic and educational sphere, the study can act as a catalyst for the training of new researchers and skilled professionals by encouraging the development of new research areas while integrating theoretical and experimental knowledge essential for the advancement of quantum computing in Brazil. The research directly contributes to the Technology and Production area of the National Extension Policy, as it seeks to improve the applicability of quantum algorithms and develop error mitigation techniques applicable to different domains. Furthermore, the project aligns with the United Nations Sustainable Development Goals (SDGs), particularly SDG 9, which promotes innovation and strengthens scientific research in developing countries, such as Brazil, and SDG 4, which aims for quality education, as the study fosters teaching and research in quantum computing in the country, presenting the topic in a didactic and easily understandable manner. Although the direct impacts are still more noticeable in the academic and research environment, the development of noise mitigation techniques has the potential to benefit industries and companies that will eventually employ quantum computing to solve complex problems in less time and with greater efficiency. Thus, this work represents a significant step toward the evolution of quantum computing and its practical applicability, strengthening Brazil as an active player in this global technological revolution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Lista com 2^n itens e um elemento ω marcado.	16
Figura 3.2 – Esquematização da estrutura do Algoritmo de Grover.	17
Figura 3.3 – Plano Bidimensional e Amplitude dos estados da base.	18
Figura 3.4 – Reflexão dos estados $ s\rangle$ e $ \omega\rangle$, respectivamente.	20
Figura 3.5 – Segunda reflexão dos estados $ s\rangle$ e $ \omega\rangle$, respectivamente.	21
Figura 3.6 – Operador de Difusão parcial	23
Figura 3.7 – Operador de Difusão completo	24
Figura 3.8 – Esquematização do Algoritmo de Grover.	24
Figura 4.1 – Dependências do Programa	26
Figura 4.2 – Inicialização do Circuito Quântico	27
Figura 4.3 – Módulo Preparação Inicial	27
Figura 4.4 – Circuito Quântico Virtual - Superposição	27
Figura 4.5 – Módulo Oráculo	29
Figura 4.6 – Circuito Quântico Virtual - Oráculo	29
Figura 4.7 – Módulo Operador de Difusão	31
Figura 4.8 – Circuito Quântico Virtual - Amplificação, U_0 e U_s .	32
Figura 4.9 – Trecho para formação do Circuito Quântico Virtual.	32
Figura 4.10 – Circuito Quântico Virtual - Algoritmo de Grover Completo.	32
Figura 4.11 – Trecho de acesso à <i>IBM Quantum Platform</i> .	34
Figura 4.12 – Trecho para Simulação Ideal.	35
Figura 4.13 – Trecho para Simulação com Ruído.	35
Figura 4.14 – Trecho para Compilação.	36
Figura 4.15 – Trecho para Execução em QPU via Sampler.	37
Figura 4.16 – Trecho para Construção do Observável.	38
Figura 4.17 – Trecho para Execução em QPU via Estimate.	39
Figura 5.1 – Distribuição ideal de probabilidades (simulação via Statevector).	42
Figura 5.2 – Distribuição de probabilidades (simulação via AerSimulator).	43

Figura 5.3 – Resultados de <code>ibm_brisbane</code> .	45
Figura 5.4 – Resultados de <code>ibm_torino</code>	46
Figura 5.5 – Probabilidades do estado $ 1111\rangle$ via Estimate.	49
Figura 1 – Aplicação das portas H 's na preparação inicial.	64
Figura 2 – Aplicação do oráculo U_f , que inverte o sinal do estado $ 1111\rangle$.	65
Figura 3 – Aplicação das portas <i>Hadamard</i> no início da operação de difusão.	65
Figura 4 – Aplicação das portas X no operador de difusão.	65
Figura 5 – Aplicação da porta <i>MCZ</i> no operador de difusão.	66
Figura 6 – Segunda aplicação das portas X no operador de difusão.	66
Figura 7 – Aplicação final das portas <i>Hadamard</i> na primeira iteração.	67
Figura 8 – Aplicação do oráculo U_f na segunda iteração.	67
Figura 9 – Aplicação das portas <i>Hadamard</i> na operação de difusão da segunda iteração.	68
Figura 10 – Aplicação das portas X no operador de difusão da segunda iteração.	68
Figura 11 – Aplicação da porta <i>MCZ</i> na segunda iteração do operador de difusão.	69
Figura 12 – Segunda aplicação das portas X na segunda iteração do operador de difusão.	69
Figura 13 – Aplicação final das portas <i>Hadamard</i> na segunda iteração.	70
Figura 14 – Aplicação do oráculo U_f na terceira iteração.	70
Figura 15 – Aplicação das portas <i>Hadamard</i> na operação de difusão da terceira iteração.	71
Figura 16 – Aplicação das portas X no operador de difusão da terceira iteração.	71
Figura 17 – Aplicação da porta <i>MCZ</i> na terceira iteração do operador de difusão.	72
Figura 18 – Última aplicação das portas X na terceira iteração do operador de difusão.	72
Figura 19 – Probabilidades finais de $ \psi\rangle$ após as três iterações do Algoritmo de Grover.	73
Figura 20 – Amplitude e probabilidades após medição final do circuito.	73
Figura 21 – Implementação de porta <i>MCZ</i> a partir de <i>MCX</i> e H 's	78
Figura 22 – Porta <i>MCZ</i> construída a partir de <i>MCX</i> e H 's	78

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Configurações dos Computadores Quânticos utilizados	15
Quadro 5.1 – Comparação entre diferentes cenários de execução do Algoritmo de Grover	52

LISTA DE SÍMBOLOS

H	Porta Lógica Quântica Hadamard	4
X	Porta Lógica Quântica X	4
Z	Porta Lógica Quântica Z	4
$C_x, CNOT$	Porta Lógica Quântica C_X ou $CNOT$	4
C_Z	Porta Lógica Quântica C_Z	4
MCX	Porta Lógica Quântica MCX	4
DD	<i>Dynamical Decoupling</i>	5
ZNE	<i>Zero-Noise Extrapolation</i>	5
$TREX$	<i>Twirled Readout Error eXtinction</i>	5
PEA	<i>Probabilistic Error Amplification</i>	5
PEC	<i>Probabilistic Error Cancellation</i>	5
$NISQ$	<i>Noisy Intermediate-Scale Quantum</i>	5
U_f	Operador Oráculo	19
MCZ	Porta Lógica Quântica Z -multi-controlada	19
U_s	Operador de Difusão	20
k	Fator de Otimização do Algoritmo de Grover	24

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	3
2.1	Métodos de Supressão e Mitigação	5
2.1.1	Supressão	5
2.1.2	Mitigação	9
3	Ferramentas e Métodos	14
3.1	Dispositivos Quânticos	14
3.1.1	Simuladores	14
3.1.2	Computadores	15
3.2	Visão Geral do Algoritmo de Grover	16
3.2.1	Estrutura	17
3.2.2	Preparação Inicial	18
3.2.3	Oráculo (U_f)	19
3.2.4	Operador de Difusão (U_s)	20
3.2.5	Fator de Otimização (k)	24
4	PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS	25
4.1	Círculo quântico virtual	25
4.1.1	Preparação Inicial do Círculo Quântico	26
4.1.2	Oráculo	28
4.1.3	Difusão	30
4.1.4	Fator k	30
4.2	Plataforma <i>IBM Quantum</i>	33
4.2.1	Procedimento de autenticação	33
4.2.2	Simulação ideal via <i>Statevector</i>	34
4.2.3	Simulação com ruído via <i>AerSimulator</i>	34
4.2.4	Execução via <i>Sampler</i>	36
4.2.5	Execução via <i>Estimate</i>	36
5	Resultados e Análise	41

5.1	Resultado Ideal (Teórico)	41
5.2	Resultado com Ruído (<i>AerSimulator</i>)	42
5.3	Resultado Real em <i>Hardware Quânticos</i>	44
5.3.1	Via <i>Sampler</i>	44
5.3.2	Via <i>Estimate</i>	48
5.4	Comparação e Discussão	52
5.5	Análise Qualitativa dos Métodos de Supressão e Mitigação	53
5.6	Resumo e conclusões	55
6	CONCLUSÃO	57
	REFERÊNCIAS	59
	APENDICE A – Demonstração do Circuito	64
	APENDICE B – Construção de Observáveis no <i>Qiskit</i>	74
	APENDICE C – Demonstração da Porta <i>MCZ</i> a partir de <i>MCX</i> e <i>Hadamard</i>	76
	APENDICE D – Reconstrução de probabilidades multi-qubit a partir de valores esperados	79

1 INTRODUÇÃO

No início do desenvolvimento dos primeiros computadores, com a *Máquina de Turing* em 1936 e, posteriormente, a criação dos transistores nos Laboratórios da *Bell Telephone*, em 1947 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 2025), e sua evolução até passar a ser utilizado na construção de processadores, muito já se pensava a respeito dos incríveis feitos que essa emergente tecnologia poderia proporcionar, e realmente podemos ver tal expectativa sendo concretizada nos dias atuais, com os computadores sendo acessíveis até mesmo da palma da mão, com os *smartphones*, algo inimaginável àquela época.

Contudo, embora ainda seja – e continuará sendo – extremamente útil, existem novos problemas que exigem uma forma diferente de processamento, como Richard Feynman afirmou em 1981 na primeira Conferência da Física da Computação, na qual sugeriu que computadores quânticos poderiam realizar simulações que são impossíveis de serem realizadas pelos computadores clássicos, mesmo aqueles mais robustos. Isso se deve à natureza intrínseca aos próprios problemas, como, por exemplo, a simulação de moléculas grandes ou materiais complexos, que exigem um poder de processamento que cresce exponencialmente com o aumento do número de partículas. Em adição, Feynman também descreveu o mundo físico como “quântico”, e como tal, sistemas físicos (quânticos) apenas seriam adequadamente simulados por meio de computadores que utilizassem princípios quânticos de processamento (FEYNMAN, 1982).

A partir desse ponto, muitos adeptos e fomentadores da ideia contribuíram com conhecimento, como David Deutsch, que propôs o primeiro algoritmo quântico, mesmo que com aplicações limitadas, foi demonstrada uma eficiência muito superior aos algoritmos clássicos (DEUTSCH, 1985), além de servir de suporte para o desenvolvimento de outros algoritmos importantes, como os Algoritmos de Simon (SIMON, 1994) e de Shor . Também Peter Shor mostrou com seu algoritmo quântico de fatoração que um algoritmo quântico poderia fatorar números inteiros exponencialmente mais rápido que algoritmos clássicos (SHOR, 1994). E, ainda, Lov Grover, que apresentou um algoritmo de busca em listas desordenadas, que opera por meio de uma técnica de amplificação tanto de amplitudes quanto das probabilidades e que possui melhora quadrática na eficiência em relação a métodos clássicos conhecidos (GROVER, 1996).

Seguindo o viés já apresentado, este trabalho tem por objetivo se envolver no estudo, construção, melhoria de resultados e análise do Algoritmo de Grover aplicado a um sistema de quatro qubits, a fim de melhor compreendê-lo, e ainda conseguir gerar conteúdo que poderá ser base para novos trabalhos. As melhorias propostas neste trabalho estão relacionadas aos métodos de supressão – que é uma estratégia preventiva, aplicada durante a execução do circuito quântico para minimizar a geração de erros – e de mitigação – ocorre após a execução do circuito quântico, com técnicas que tentam corrigir ou compensar os erros nos resultados obtidos – de ruídos quânticos gerados pelas *Quantum Processing Unit* (QPUs) nos Computadores Quânticos (CQs). Ambas estratégias possuem diversos métodos incluídos no *Qiskit*, alguns deles serão empregados, suas influências na qualidade final dos resultados serão analisadas e discutidas no discorrer deste texto.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A computação quântica vem ganhando destaque por sua capacidade de solucionar problemas considerados intratáveis para sistemas clássicos. Entre os algoritmos quânticos, o Algoritmo de Grover se destaca por oferecer uma melhoria quadrática na busca em bases de dados não estruturadas. Entretanto, a presença de ruídos nas QPUs – oriundos de fontes como decoerência, interação com o meio, imperfeições nas operações quânticas, dentre outras – impõe desafios que requerem a implementação de estratégias que tornem os erros menos impactantes no resultado final. Este referencial teórico visa fundamentar os conceitos necessários para a compreensão tanto do funcionamento e posterior implementação do Algoritmo de Grover quanto dos métodos de supressão e mitigação de ruídos que serão aplicados.

Na computação quântica, os *quantum bits*, ou bits quânticos – chamados de *qubits* – são a unidade fundamental de informação. Diferente dos bits clássicos, que assumem apenas os valores 0 ou 1, os qubits podem assumir estados de superposição, que podemos entender como uma condição em que o qubit “pode também assumir os dois valores simultaneamente. Nessa situação, diz-se que um qubit está em superposição de estados, ou coerência” (CUZZIOL, 2023); além disso, o computador quântico é capaz de realizar o processamento paralelo das informações contidas nos qubits, denominado de paralelismo quântico – quer dizer, o CQ consegue atuar em todos os qubits de forma síncrona, logo, é possível processar toda a informação simultaneamente. Outro conceito extremamente importante quando se fala não apenas de computação quântica especificamente, mas presente no cerne da mecânica quântica, é o que chamamos de emaranhamento quântico, que é uma “consequência direta da condição de superposição” (RIGOLIN, 2008), e, em palavras simples, pode ser entendido como uma forte correlação entre diferentes partículas, de modo que o estado de uma não pode ser descrito de forma desvinculada ao estado da outra, independentemente da distância que as separam, devido ao princípio da não localidade, que Einstein chama de “ação fantasmagórica à distância”. Ainda segundo Rigolin 2008, “os estados emaranhados podem ainda serem usados para se realizar eficientemente tarefas impossíveis de serem executadas por meio de recursos clássicos [...], como o teletransporte quântico”.

Os *chips* quânticos da IBM (QPUs) operam utilizando qubits supercondutores, que são projetados para reduzir a sensibilidade ao ruído de carga e aumentar a estabilidade dos estados

quânticos. Para manter a supercondutividade, esses qubits operam a temperaturas extremamente baixas, próximas do zero absoluto. Esses qubits são manipulados pelas portas lógicas quânticas, isto é, o estado de qubit é modificado pela aplicação de pulsos eletromagnéticos de micro-ondas que induzem transições nos níveis de energia dos mesmos (EITCA, 2024) Dentre as portas lógicas quânticas existentes, podem ser citadas algumas como, por exemplo, as portas *Hadamard* (*H*), *Pauli-X* (*X*), *Pauli-Z* (*Z*), *X-Controlada* (C_x , *CNOT*), *Z-Controlada* (C_z) e a porta *Toffoli* (*X-Multi-Controlada* de três qubits (*MCX*), que são portas lógicas quânticas muito conhecidas, e disponíveis no *Qiskit*, e quase todas serão abordadas no decorrer deste documento, visto que serão necessárias para a construção do circuito quântico (mais detalhes sobre construção e operação de cada uma serão dados no Capítulo 4). Essas portas lógicas operam de forma a explorar as peculiaridades da mecânica quântica para efetuar cálculos complexos (NIELSEN; CHUANG, 2010).

O Algoritmo de Grover, foco deste objeto, foi proposto por Grover 1996 e tem como objetivo acelerar a busca em bases de dados não ordenadas. Seu funcionamento pode ser resumido em três etapas principais: inicialização, em que há a criação do Espaço de Pesquisa, que nada mais é que a superposição uniforme de todos os estados possíveis; aplicação do oráculo, uma operação que marca (adicionando uma fase negativa) o(s) estado(s) que correspondem à solução do problema; e, por fim, aplicação do Operador de Difusão ou de Amplificação, que amplifica a probabilidade do estado marcado, tornando-o mais provável de ser medido (Qiskit Community, 2023). A eficiência do algoritmo de Grover se evidencia na sua capacidade de reduzir o número de buscas necessárias em comparação com os métodos clássicos, o que o torna uma ferramenta promissora em diversas aplicações, como a quebra de sistemas criptográficos e otimização de buscas (GROVER, 1996).

Apesar do potencial dos algoritmos quânticos, os computadores quânticos atuais sofrem com a presença de ruído – decorrente de decoerência dos qubits, imperfeições nas portas lógicas, interação com o meio e erros de leitura. Esses fatores podem degradar significativamente a fidelidade dos resultados dos algoritmos, e uma fidelidade alta é crucial para garantir que os estados quânticos sejam preservados com alta precisão durante as operações (JOZSA, 1994). Tomando por base esta asserção, fica evidente a necessidade e a importância da utilização de métodos que possam restringir a influência do ruído quântico, de modo a garantir fidelidades maiores nos estados finais após as operações, gerando, por conseguinte, melhores e mais confiáveis resultados.

O *Qiskit SDK* possui uma gama de ferramentas para supressão e mitigação de ruído quântico, e é intuito deste trabalho aplicar algumas delas ao circuito quântico e analisar suas efetividades, emph. e., a capacidade de cada método de melhorar o resultado final. São eles: Otimização do circuito compilado, Desacoplamento Dinâmico (DD), Compilação Aleatória (*Pauli Twirling*), Extrapolação de Erro Zero (ZNE), Extinção de Erro de Leitura Giratória (TREX), Amplificação de Erro Probabilístico (PEA), Cancelamento de Erro Probabilístico (PEC).

2.1 Métodos de Supressão e Mitigação

Como discutido por Preskill 2018, o mundo experimenta no cenário atual a era da tecnologia Quântica de Escala Intermediária Ruidosa (NISQ, na sigla em inglês para *Noisy Intermediate-Scale Quantum*), que descreve o “tamanho” dos CQs disponíveis atualmente em termos de quantidade de qubits (entre 50 e algumas centenas), enquanto o termo “ruidoso” faz jus ao objeto de estudo desta produção: ruído quântico, que, ainda segundo ele, advém da incapacidade de se controlar fielmente as interações dos qubits.

“[...] com esses dispositivos barulhentos não esperamos ser capazes de executar um circuito que contenha muito mais do que cerca de 1000 portas — isto é, 1000 operações fundamentais de dois qubits — porque o ruído sobrecarregará o sinal em um circuito muito maior do que isso. Essa limitação no tamanho do circuito impõe um teto ao poder computacional da tecnologia NISQ. Eventualmente, faremos melhor, usando correção de erro quântico para escalar para circuitos maiores.” (PRESKILL, 2018).

Dado o exposto, torna-se imprescindível a utilização de pelo menos alguns dos métodos que serão aqui introduzidos, cabendo ao usuário optar por aqueles que mais se adequam às características intrínsecas a cada circuito, específicas de cada aplicação. É esperado que este compêndio seja útil para servir de fonte de pesquisa para auxiliar nessa tomada de decisão.

2.1.1 Supressão

As técnicas de supressão de ruído em computação quântica visam reduzir o surgimento do ruído durante o processamento ou execução do circuito (como decoerência e erros de porta), e, por conseguinte, evitar os efeitos indesejados sem recorrer, necessariamente, a códigos completos de

correção de erros. Essas técnicas são especialmente relevantes no contexto dos dispositivos NISQ, onde a presença de ruído ainda é significativa. As técnicas de supressão contempladas pelo *Qiskit* e que aqui também o serão, são:

Otimização do Circuito Quântico

A otimização ocorre na fase de compilação, e é um método que deve ser utilizado durante o processo de mapeamento do circuito quântico virtual¹ para o circuito quântico físico² utilizando para isso a função “transpile”, que possui quatro possíveis níveis: nível 0, que não há otimização; nível 1, que combina decomposição otimizada de portas de um qubit com cancelamento de portas inversas consecutivas; nível 2, que utiliza um método de cancelamento comutativo em vez de cancelamento de C_X ’s, resultando na diminuição de portas redundantes; nível 3, que é o nível de otimização mais eficaz, embora mais exigente em se tratando de poder computacional, pois emprega vários métodos, inclusive decomposição otimizada de portas de um qubit, usada no nível um, e cancelamento comutativo aplicado no nível dois, além de outros métodos como coleção de subcircuitos de dois qubits, consolidação de portas lógicas (blocos) consecutivas atuantes em um mesmo qubit para um único bloco mais otimizado, e, por fim, utiliza síntese unitária, que pode fazer uma simplificação das portas por suas portas-base (IBM Quantum, 2025m).

Decomposição Otimizada de Portas de um Qubit (IBM Quantum, 2025l): Esse método visa otimizar cadeias de portas de qubit único combinando-as em uma única porta. As condições empregadas pelo algoritmo para tomar a decisão de substituir o conjunto original de portas por uma nova configuração são: se a corrente original estava fora da base: substituir; se a cadeia original estava na base, mas a ressíntese é menor erro: substituir; se a cadeia original contém uma porta de pulso: não substitua; se a cadeia original equivale à identidade: substituir por nulo; O erro é calculado como uma multiplicação dos erros de portas individuais naquele qubit.

Cancelamento Inverso (IBM Quantum, 2025k): O objetivo desse método é identificar e remover pares de portas quânticas consecutivas que são inversas uma da outra, otimizando assim

¹ Um circuito quântico virtual refere-se à representação abstrata e idealizada de um circuito quântico, em que não há interferência de ruídos quânticos ou limitações tecnológicas da implementação física.

² Um circuito quântico físico é aquele implementado em hardware real, também chamado *backend*, utilizando as portas lógicas que o mesmo suporta.

o circuito ao eliminar operações redundantes. Ao aplicá-lo, é possível reduzir a profundidade do circuito e minimizar possíveis fontes de erro, contribuindo para a execução mais eficiente de algoritmos quânticos.

Cancelamento Comutativo (IBM Quantum, 2025b): O objetivo desse método é identificar e remover portas auto-inversas redundantes, aproveitando as relações de comutação no circuito. As portas consideradas incluem: H , X , Y , Z , C_X , C_Y , C_Z . Ao aplicá-lo, é possível reduzir a complexidade do circuito, eliminando operações redundantes e melhorando a eficiência da execução em dispositivos quânticos.

Coleção de Subcircuitos de 2 Qubits (IBM Quantum, 2025a): é uma ferramenta de análise que identifica e agrupa subcircuitos compostos por portas de dois qubits que são adjacentes (vizinhos) e atuam nos mesmos qubits. Esses blocos coletados podem ser posteriormente otimizados ou sintetizados de maneira mais eficiente por outras passagens do *transpile*. Ao utilizá-la, é possível preparar o circuito para otimizações subsequentes, como a consolidação de operações ou a redução da profundidade do circuito, melhorando a eficiência da execução em dispositivos quânticos.

Consolidação de Blocos de Portas Consecutivas (IBM Quantum, 2025c): Essa é uma transformação que substitui sequências de portas consecutivas atuando nos mesmos qubits por um único nó unitário. Geralmente, esses blocos são selecionados anteriormente por outra ferramenta, como a Coleção de Subcircuitos de 2 Qubits. Essa consolidação permite que o subcircuito seja resincronizado posteriormente, potencialmente resultando em uma implementação mais otimizada. Além disso, é possível reduzir a complexidade do circuito, agrupando operações em unidades únicas que podem ser mais eficientes para execução em hardware quântico.

Síntese Unitária (IBM Quantum, 2025n): O objetivo dessa função é sintetizar operações unitárias, substituindo sequências de portas por implementações equivalentes que sejam mais eficientes ou que atendam a restrições específicas do hardware. Funciona através da análise do circuito em busca de subcircuitos unitários e os reescreve utilizando um conjunto específico de portas base, visando otimizar o circuito de acordo com as características do *backend* (CQ) alvo.

Desacoplamento Dinâmico (DD)

“Circuitos quânticos são executados em *hardware* IBM como sequências de pulsos de micro-ondas que precisam ser agendados e executados em intervalos de tempo precisos.” (IBM Quantum, 2025f). Durante uma operação qualquer, alguns *qubits* podem passar alguns intervalos de tempo sem que estejam sendo utilizados, devido à existência de lacunas nos circuitos; esses *qubits* podem acabar interagindo entre si de forma não controlada e indevida. Essas interações são responsáveis por gerar quantidades significativas de erros no resultado final. O *Dynamical Decoupling* (DD) é muito útil para este tipo de circuitos, onde há lacunas, pois “é uma técnica de controle quântico que consiste em aplicar sequências personalizadas de pulsos ao sistema quântico considerado para cancelar (ou fazer a média) da interação com o ambiente” (LÓPEZ; WU; LIAN-AO, 2023), ou seja, são inseridas sequências de pulsos de micro-ondas nos *qubits* ociosos que são propositalmente simétricos, para que sua média total seja cancelada, de modo que se equivalham à operação de identidade, isto é, não causem perturbações no sistema. Esses pulsos controlados agem de modo a suprimir erros de interação indevida, ao impedir que haja a interação entre *qubits*.

Compilação Aleatória (*Pauli Twirling*)

O método de *Pauli twirling* ou *Randomized Compiling* é uma técnica de supressão de erros que transforma canais de ruído arbitrários em canais do tipo Pauli, os quais são mais fáceis de modelar e corrigir. A ideia central é aplicar, de forma aleatória, operações do grupo de Pauli – como os operadores I , X , Y e Z – antes e depois de um canal de ruído. Ao se fazer a média (ou “*twirling*”) sobre essa distribuição aleatória de operações, os termos não diagonais (ou seja, os erros coerentes) tendem a se cancelar, resultando em um canal de ruído que age de forma puramente estocástica³.

Em outras palavras, o ruído original, que pode apresentar comportamentos complexos e coerentes, é transformado em um ruído que se comporta como uma mistura probabilística de erros simples (por exemplo, erros de *bit-flip* ou *phase-flip*). Essa transformação facilita tanto a análise

³ Um erro estocástico ocorre de forma aleatória, seguindo uma distribuição probabilística, ao contrário dos erros coerentes, que se manifestam de maneira sistemática. Esse comportamento possibilita que técnicas de correção e mitigação sejam aplicadas de forma mais eficaz, pois os efeitos do ruído podem ser tratados estatisticamente (NIELSEN; CHUANG, 2010)

teórica quanto a mitigação prática dos erros, pois canais de ruído do tipo Pauli são bem compreendidos e possuem uma estrutura que pode ser incorporada em protocolos de correção de erros e técnicas de mitigação, como o *randomized benchmarking*.

"Realizado sozinho, ele pode mitigar ruído coerente porque o ruído coerente tende a se acumular quadraticamente com o número de operações, enquanto o ruído de Pauli se acumula linearmente. O twirling de Pauli é frequentemente combinado com outras técnicas de mitigação de erros que funcionam melhor com ruído de Pauli do que com ruído arbitrário"(IBM Quantum, 2025d).

Conforme discutido por Emerson *et al.* 2005, essa técnica é fundamental para converter erros que se acumulam de maneira prejudicial em erros estocásticos, cuja influência pode ser controlada e, em muitos casos, mitigada através de métodos de pós-processamento. Trabalhos posteriores, como o de Temme *et al.* 2017, demonstram aplicações práticas dessa técnica para melhorar a fidelidade de circuitos quânticos de curta profundidade, tornando os resultados experimentais mais próximos do ideal.

2.1.2 Mitigação

Técnicas de mitigação são utilizadas como complemento às de supressão, aplicadas no pós-processamento com o intuito de compensar os efeitos dos erros induzidos nos resultados medidos pela ação do ruído que não pode ser totalmente cancelado na supressão.

Extinção de Erro de Leitura Giratória (TREX)

O *Twirled Readout Error eXtinction* (TREX) é uma técnica de mitigação de erros, especificamente projetada para reduzir os erros associados à leitura (*readout*) dos *qubits* durante as medições. Essa abordagem é baseada no conceito de *twirling* de medições, que envolve a aplicação aleatória de operações de Pauli *X* antes das medições, seguida de uma inversão correspondente dos bits medidos. O objetivo principal do TREX é diagonalizar a matriz de transferência de erro de leitura, facilitando sua inversão e, consequentemente, a correção dos erros de leitura.

O funcionamento dessa técnica consiste na substituição (de forma aleatória) do processo de medição, em que uma medição simples é trocada por um processo de medida composto de três etapas: primeiro, os canais são submetidos a Portas *X*, que invertem o estado dos *qubits* (*bit-flip*)

nos quais atuaram; segundo, após as aplicações das Portas X , é realizada uma medição comum; por fim, é feito o ajuste dos estados, de modo que os canais em que houve atuação de Portas X antes da medida têm seu estado corrigido (invertido) classicamente. Essa sequência de operações transforma o canal de erro de leitura original em uma forma diagonal, onde os elementos fora da diagonal principal são minimizados. Essa diagonalização simplifica a inversão da matriz de erro, permitindo uma mitigação mais eficaz dos erros de leitura.

O método TREX apresenta diversas vantagens no contexto da mitigação de erros em medições quânticas. Uma de suas principais qualidades é o fato de não assumir um modelo específico de ruído, o que o torna uma técnica versátil e aplicável a uma ampla variedade de sistemas quânticos. Além disso, ao incorporar uma etapa de randomização com operações de Pauli antes da medição, o TREX contribui para a redução de erros correlacionados entre *qubits*. Outro ponto favorável é a simplicidade de sua implementação: o método exige apenas a inserção de operações quânticas simples antes das medições e a correção clássica correspondente nos resultados, dispensando o uso de circuitos quânticos adicionais complexos ou ajustes estruturais profundos no experimento.

Extrapolação de Ruído Zero (ZNE)

O método de *Zero Noise Extrapolation* (ZNE) é uma técnica de mitigação de ruído baseada em pós-processamento que tem como objetivo estimar o valor ideal de uma medida quântica – ou seja, o valor que seria obtido caso não houvesse ruído no sistema. Essa estimativa é feita a partir da execução de múltiplas versões do mesmo circuito quântico, cada uma com diferentes níveis de ruído artificialmente aumentados. A ideia central é que, ao entender como o ruído afeta os resultados, é possível extrapolar os valores obtidos para o caso em que o ruído é zero.

A implementação do ZNE consiste, em linhas gerais, em três etapas principais. Primeiramente, realiza-se a amplificação do ruído no circuito original. Essa amplificação pode ser feita, por exemplo, repetindo certas portas quânticas, como portas *CNOT*, o que efetivamente aumenta o tempo de execução do circuito e, consequentemente, sua exposição ao ruído. Em seguida, executa-se o circuito várias vezes, cada vez com um fator diferente de amplificação de ruído, e coleta-se os resultados das medidas. Por fim, aplica-se uma técnica matemática de extrapolação – como a

extrapolação linear, quadrática ou de Richardson – para estimar o resultado que o circuito teria fornecido na ausência de ruído.

Entre as vantagens do ZNE, destaca-se o fato de que a técnica não exige modificações no hardware quântico, podendo ser aplicada com acesso apenas à execução de circuitos e ao controle sobre o tempo de operação ou o número de repetições de determinadas portas. Além disso, é uma abordagem compatível com diversos modelos de ruído, o que a torna bastante versátil. No entanto, essa técnica também apresenta desvantagens. A principal delas é o aumento no número total de execuções necessárias, o que pode ser um obstáculo em dispositivos com tempo de acesso limitado. Além disso, o processo de extração pode ser sensível a flutuações estatísticas nos resultados, especialmente em hardwares instáveis ou com ruído não escalável. Dito isso, embora muitas vezes a ZNE possa realmente melhorar os resultados, não é garantido que os resultados gerados sejam sempre condizentes com a realidade. Mesmo assim, trabalhos como o de Giurgica-Tiron et al. 2020 demonstram a eficiência do método para estimativas digitais mitigadas de erro em circuitos quânticos ruidosos.

Amplificação de Erro Probabilística (PEA)

A técnica conhecida como *Probabilistic Error Amplification* (PEA) é uma abordagem que visa amplificar de maneira controlada os efeitos dos erros em circuitos quânticos para facilitar sua quantificação e, posteriormente, a mitigação desses erros. A ideia central é executar versões modificadas do circuito original onde as operações propensas a introduzir erro são replicadas ou escaladas de forma probabilística. Esse procedimento resulta em um cenário no qual os efeitos do ruído são enfatizados, permitindo extrair informações mais precisas sobre a natureza e a magnitude dos erros presentes no sistema.

O método se fundamenta na premissa de que, ao amplificar o erro, é possível utilizar técnicas matemáticas de extração para estimar o valor que seria obtido em um cenário ideal, ou seja, na ausência de ruído. Essa abordagem é particularmente útil para dispositivos NISQ, onde o ruído é inevitável e pode comprometer a fidelidade dos resultados dos algoritmos quânticos. Ao amplificar os erros, o PEA torna mais fácil identificar e corrigir os erros coerentes, convertendo-os

em erros estocásticos, os quais tendem a se comportar de forma mais aleatória e, portanto, podem ser gerenciados de maneira mais eficaz por técnicas de correção ou mitigação.

O PEA compartilha fundamentos com outras técnicas de mitigação de erros, como o *Zero Noise Extrapolation* (ZNE) e o *Probabilistic Error Cancellation* (PEC). No entanto, a diferença reside no foco: enquanto o ZNE e o PEC procuram reduzir o impacto dos erros por meio de estratégias de pós-processamento e inversão do canal de ruído, o PEA intencionalmente amplifica o sinal de erro para que ele se torne mensurável com maior precisão e, então, possa ser compensado. Essa estratégia permite que as variações induzidas pelo ruído sejam mais facilmente analisadas, servindo de base para métodos de correção que ajustem os valores esperados dos observáveis.

Trabalhos publicados, como o de Temme et al. 2017 e Endo et al. 2018, discutem de maneira aprofundada como a amplificação e o cancelamento probabilístico dos erros podem melhorar a precisão dos resultados em circuitos quânticos ruidosos. De acordo com Temme et al. 2017, amplificar os erros de forma controlada permite uma melhor estimativa dos efeitos do ruído, possibilitando uma correção mais efetiva e elevando a fidelidade dos resultados. Já Endo et al. 2018 demonstram a aplicabilidade prática de técnicas de mitigação em dispositivos quânticos de curto tempo de execução, ressaltando a importância de estratégias que convertam erros coerentes em erros estocásticos, os quais são mais fáceis de serem gerenciados. No entanto, em seu trabalho, Kim et al. 2023 alertam sobre como alguns “resultados podem desviar arbitrariamente do resultado desejado” quando se tenta aplicar a amplificação de ruídos em modelos que sejam mesmo que ligeiramente mais complexos.

Em resumo, o PEA consiste em amplificar os erros de forma probabilística, para então utilizar técnicas de extração que estimem o valor ideal do circuito, ou seja, o valor que se obteria na ausência de ruído. Essa abordagem se mostra promissora para melhorar a precisão dos resultados em dispositivos quânticos atuais e é uma ferramenta complementar importante de mitigação de ruído quântico.

Cancelamento de Erro Probabilístico (PEC)

O *Probabilistic Error Cancellation* é uma das técnicas mais potentes de mitigação de erros em sistemas quânticos NISQ, pois permite obter estimativas não enviesadas dos valores esperados

de observáveis mesmo na presença de ruído significativo. A ideia central do PEC é representar cada operação quântica ideal como uma combinação linear de operações ruidosas que o hardware realmente implementa, usando quasi-probabilidades η_i que podem assumir valores negativos ou maiores que 1 para “inverter” estatisticamente o efeito do ruído (Unitary Fund, 2025).

Na prática, isso significa primeiro caracterizar o canal de ruído do dispositivo por meio de protocolos de tomografia (por exemplo, *Pauli-Lindblad tomography*), de modo a aprender o comportamento exato de $U_{ruidoso,i}$, o canal ruidoso que substitui a operação ideal U_{ideal} (Unitary Fund, 2025; IBM Quantum, 2025g). Em seguida, cada porta ideal é decomposta como

$$U_{ideal} = \sum_i \eta_i U_{ruidoso,i},$$

onde cada $U_{ruidoso,i}$ é uma implementação ruidosa realizável no *hardware*, e η_i são os coeficientes da distribuição de quasi-probabilidade associada.

Para estimar o valor esperado de um observável O , o PEC executa um conjunto de circuitos ruidosos, amostrados de acordo com a distribuição de probabilidade $P(i) = \frac{|\eta_i|}{\gamma}$, sendo $\gamma = \sum_i |\eta_i|$ o fator de sobrecusto, e computa uma média ponderada que incorpora o sinal $sign(\eta_i)$. Esse procedimento produz um estimador não enviesado, mas requer $O(\gamma^2)$ execuções do circuito, o que costuma crescer exponencialmente com a profundidade do circuito (TAKAGI; TAJIMA; GU, 2023).

Essa sobrecarga de amostragem é rigorosamente limitada por resultados recentes que estabelecem limites universais para o custo de protocolos de mitigação de erros, mostrando que qualquer método genérico – incluindo o PEC – precisa de um número de amostras proporcional a γ^2 para alcançar uma dada precisão com alta probabilidade (TAKAGI, 2021).

Em síntese, o Cancelamento Probabilístico de Erro oferece estimativas estatisticamente exatas dos valores esperados em circuitos quânticos ruidosos, mas demanda um custo de amostragem elevado – governado pelo fator γ – e rigorosa caracterização do canal de ruído. Por essa razão, ele é particularmente indicado para circuitos de baixa profundidade e cenários onde a precisão não enviesada seja crucial para os resultados (JNANE et al., 2024).

3 FERRAMENTAS E MÉTODOS

Esta seção visa descrever as ferramentas e os métodos utilizados para o desenvolvimento e a avaliação do algoritmo de Grover em dispositivos quânticos. Inicialmente, apresenta-se o uso de simuladores quânticos, em especial o *AerSimulator*, que permite a emulação de circuitos quânticos sob condições realistas de ruído, possibilitando uma análise mais próxima do comportamento esperado em hardware físico.

Em seguida, são detalhadas as características dos computadores quânticos utilizados nos testes, especificamente os *backends* disponibilizados pela IBM Quantum. A escolha de múltiplos dispositivos com diferentes configurações visa proporcionar uma avaliação comparativa do desempenho do algoritmo em distintas arquiteturas e condições operacionais.

Por fim, é abordada a estrutura matemática e funcional do Algoritmo de Grover, descrevendo-se as principais etapas necessárias para sua implementação e destacando-se os conceitos fundamentais que sustentam sua eficiência em relação aos métodos clássicos de busca.

Esse conjunto de ferramentas e procedimentos estabelece a base metodológica para os experimentos realizados, permitindo uma análise abrangente dos resultados obtidos.

3.1 Dispositivos Quânticos

3.1.1 Simuladores

Para avaliar o desempenho do algoritmo de Grover em condições que refletem as imperfeições de um dispositivo quântico real, será utilizado o simulador *AerSimulator* (Qiskit Development Team, 2025a), uma classe pertencente ao *Qiskit Aer* (Qiskit Development Team, 2025b), que, por sua vez, é um módulo do *Qiskit*. Este simulador possibilita a emulação de circuitos quânticos com a inclusão de modelos de ruído específicos de cada QPU, proporcionando uma análise mais realista do algoritmo desenvolvido. Isso ocorre porque o *AerSimulator* é capaz de reproduzir, de forma aproximada, o comportamento de dispositivos reais, previamente selecionados, permitindo avaliar o desempenho do algoritmo de Grover sob as limitações físicas e operacionais típicas do *hardware* quântico. Para fins de comparação, serão utilizados os modelos de ruído correspondentes aos mesmos dispositivos quânticos (*backends*) reais que, posteriormente, computarão o algoritmo.

3.1.2 Computadores

Para realizar os testes, foram utilizados dois diferentes *backends*: `ibm_brisbane` e `ibm_torino`. O `ibm_brisbane` é um processador baseado na tecnologia *Eagle r3*, com 127 *qubits* e conectividade otimizada para execução de circuitos de médio porte. Já o `ibm_torino` é um dispositivo mais recente, baseado na arquitetura *Heron r1*, com 133 *qubits* e melhorias no tempo de coerência e fidelidade de portas. Todos são de acesso livre através do serviço de computação em nuvem IBM Quantum (IBM Quantum, 2025i).

Esses *backends* correspondem a Processadores Quânticos (QPUs) supercondutores que operam com *qubits* físicos implementados por circuitos de transmon. A IBM disponibiliza informações detalhadas sobre cada um de seus dispositivos, incluindo a topologia de acoplamento, as portas quânticas nativas, bem como métricas importantes para a execução de algoritmos, como tempos de coerência (T_1 e T_2), fidelidades de operação e taxas de erro de leitura (IBM Quantum, 2025h).

O uso desses *backends* permite avaliar o desempenho do algoritmo de Grover não apenas em ambientes simulados, mas também em dispositivos físicos sujeitos a ruído real, decoerência e demais limitações tecnológicas inerentes aos atuais computadores quânticos de uso geral (PRESKILL, 2018). Além disso, cada *backend* possui configurações distintas de conectividade entre *qubits* e diferentes níveis de fidelidade operacional, o que possibilita uma análise comparativa do impacto dessas variáveis na execução do algoritmo. O Quadro 3.1 mostra como exemplo, dois *backends* disponíveis na *IBM Quantum Platform*, e que serão utilizados tanto para simulações quanto para as execuções nas QPU's reais.

Quadro 3.1 – Configurações dos Computadores Quânticos utilizados

Backends	Nº qubits	CLOPS	QPU	Portas Base
<code>ibm_brisbane</code>	127	180k	Eagle r3	ECR, ID, RZ, SX, X
<code>ibm_torino</code>	133	210k	Heron r1	CZ, ID, RX, RZ, RZZ, SX, X

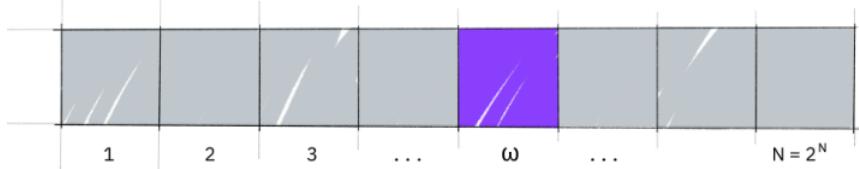
Fonte: (IBM Quantum, 2025i)

Nesse quadro pode-se analisar a quantidade de *qubits* (N° qubits), o número de CLOPS¹ (*Circuit Layer Operations Per Second*), o tipo de processador (QPU) e as portas base² de cada *backend*.

3.2 Visão Geral do Algoritmo de Grover

Como já mencionado, o Algoritmo de Grover apresenta um método de busca em listas que não possuem qualquer tipo de ordenação com uma eficiência de ordem quadrática, por meio de uma técnica de amplificação tanto de amplitudes quanto das probabilidades. Seja a ilustração apresentada na Figura 3.1,

Figura 3.1 – Lista com 2^n itens e um elemento ω marcado.



Fonte: Github/Qiskit

Aqui tem-se ilustrado um conjunto contendo $N = 2^n$ elementos organizados aleatoriamente. Nele, há um termo ω destacado, nomeado "winner", que é justamente o elemento procurado. Se quisesse-se buscar o item marcado por meio de computação clássica, seriam necessárias, em média, $\frac{N}{2}$ iterações, contudo, ao implementarmos o Algoritmo de Grover, esse valor cai para \sqrt{N} , que é um avanço significativo, principalmente quando considera-se manipular conjuntos com grandes quantidades de itens (Qiskit Community, 2023).

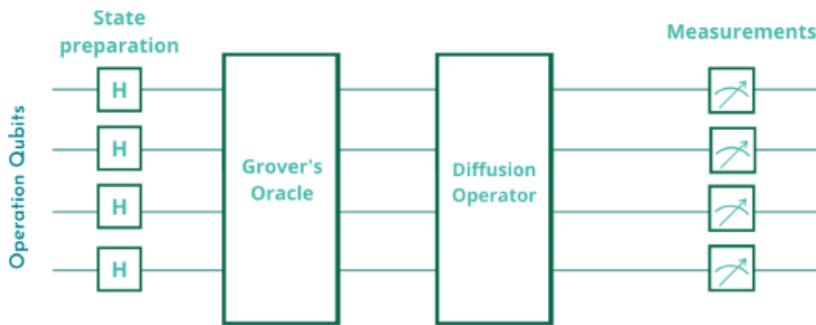
¹ CLOPS é uma métrica criada pela IBM para medir quantas camadas de portas quânticas um processador consegue executar por segundo. Camadas, por sua vez, são as operações que podem ser executadas em paralelo, *i. e.*, portas lógicas atuando em diferentes canais (*qubits*) de forma independente podem ser executados ao mesmo tempo.

² Portas Base, ou *basis gates*, representam o conjunto de operações nativas que um processador quântico consegue executar diretamente no *hardware*, *i. e.* as portas que não precisam ser reescritas no processo de compilação do circuito virtual para o físico.

3.2.1 Estrutura

Para que seja possível compreender a atuação do algoritmo, é preciso entender sua estrutura, que conta com três partes necessárias para que possa ser implementado, sendo elas: preparação inicial do estado, determinação do Oráculo (marcação do estado buscado) e amplificação da amplitude e probabilidade (aplicação do Operador de Grover ou Operador de Difusão). Isso pode ser exemplificado pelo esquema da Figura 3.2.

Figura 3.2 – Esquematização da estrutura do Algoritmo de Grover.



Fonte: Github/Qiskit.

Na preparação do estado há a criação do que chamaremos de espaço de pesquisa, é o conjunto que contém o elemento marcado e onde ele será procurado.

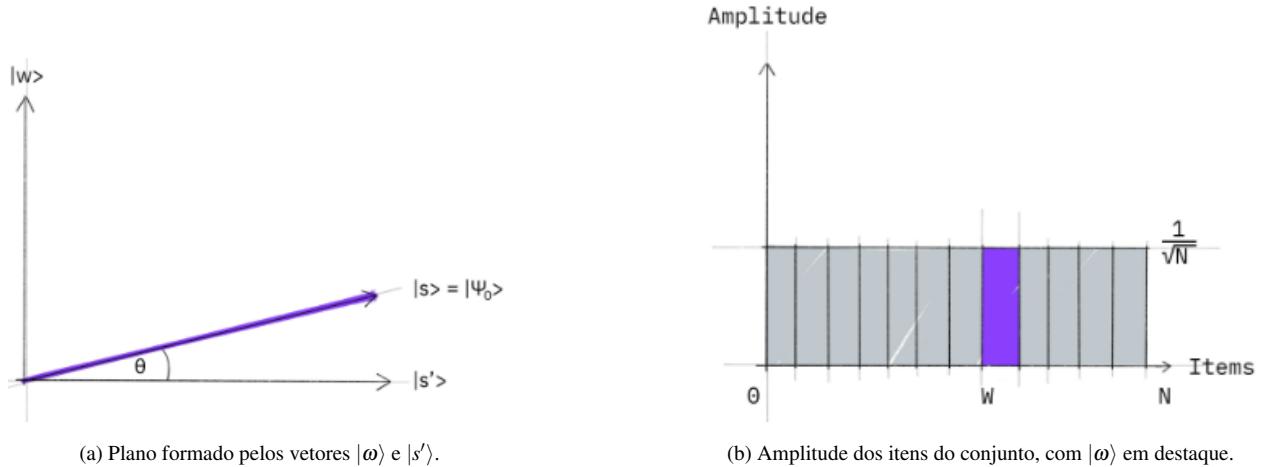
Feito isso, seguiremos para a determinação do item que queremos encontrar, que é feita pelo Oráculo. A atuação do Oráculo consiste em inverter a fase do elemento de interesse, ou seja, ele marca o item buscado. Caso haja mais de um item de interesse, o Oráculo deve agir em todos eles, marcando-os, de modo que sejam destacados pelo difusor.

Por fim, utiliza-se o Operador de Difusão para aumentar a amplitude do estado marcado, enquanto decresce as demais, sendo assim uma garantia de que na medida final, o resultado obtido seja aquele procurado.

Quando trabalha-se com o Algoritmo de Grover, pode-se reduzir o problema a um espaço de duas dimensões, sendo necessário considerar apenas o estado buscado – *winner*, $|\omega\rangle$ –, e a superposição uniforme, $|s\rangle$. Contudo, esses não são vetores perpendiculares entre si, uma vez que $|\omega\rangle$ ocorre em superposição com amplitude $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Para contornar isso, cria-se um vetor $|s'\rangle$

que é perpendicular a $|\omega\rangle$, formando assim o plano bidimensional apresentado na Figura 3.3a. Na Figura 3.3b, estão ilustradas as amplitudes dos itens contidos no conjunto, evidenciando o elemento *winner*.

Figura 3.3 – Plano Bidimensional e Amplitude dos estados da base.



Fonte: Github/*Qiskit*.

3.2.2 Preparação Inicial

A Preparação Inicial é a etapa inicial do algoritmo, na qual o Espaço de Pesquisa é criado, matematicamente descrito como uma superposição uniforme e pela Equação 3.1, e possui tamanho dado por $N = 2^n$, com n sendo o número de qubits.

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |bin(x)\rangle, \quad (3.1)$$

com $x \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

Se uma medição for realizada na base $|x\rangle$, de acordo com o Quinto Postulado da Mecânica Quântica (NEUMANN, 1955), a superposição colapsa, podendo resultar em qualquer um dos estados de mesma probabilidade $\frac{1}{N} = \frac{1}{2^n}$.

Em termos de circuito quântico, a superposição explicitada pela Equação 3.1 pode ser construída facilmente aplicando a porta Hadamard em cada um dos qubits, que se iniciam no estado

fundamental $|0\rangle$, como representado pela Equação 3.2.

$$|s\rangle = H^{\otimes n} |0\rangle^n \quad (3.2)$$

O vetor $|s\rangle$ que aparece na Figura 3.3a pode ser escrito em coordenadas polares, como

$$|s\rangle = \sin \theta |\omega\rangle + \cos \theta |s'\rangle, \quad (3.3)$$

em que

$$\theta = \arcsin \langle s|\omega\rangle = \arcsin \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (3.4)$$

3.2.3 Oráculo (U_f)

Tomando a premissa de que o elemento ω procurado está em um determinado conjunto contendo $N = 2^n$ itens, $0, 1, 2, \dots, N - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, podemos recorrer a uma função $f : 0, 1, 2, \dots, N - 1 \rightarrow 1, -1$ que atua na amplitude dos elementos para marcar o buscado, sendo f tal que

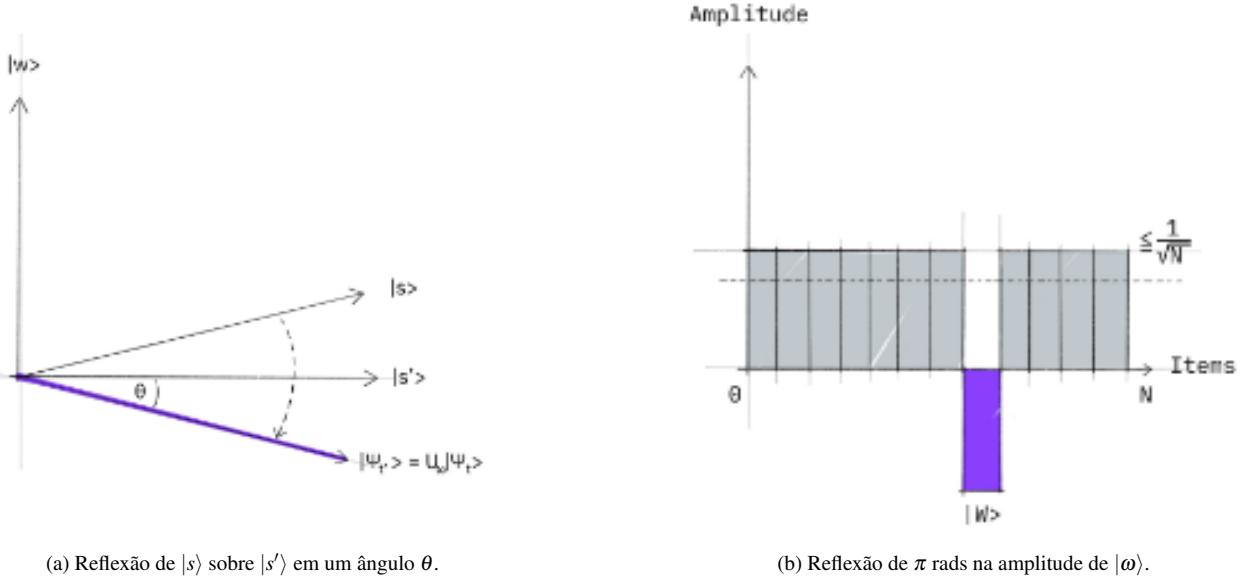
$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x = \omega \\ 1, & \text{se } x \neq \omega \end{cases} \quad (3.5)$$

Em outras palavras, o Oráculo, denotado por U_f , nada mais é que uma função que gera a reflexão em um ângulo θ de $|s\rangle$ sobre $|s'\rangle$, bem como a reflexão da amplitude do elemento de interesse $|\omega\rangle$, que pode ser visualizado com a ajuda da Figura 3.4.

De modo geral, a construção dos Oráculos no Algoritmo de Grover pode ser realizada utilizando portas lógicas quânticas do tipo X e MCZ , seguindo a seguinte regra de formação:

1. Para cada qubit cujo valor no estado buscado seja $|0\rangle$, aplica-se uma porta X nesse qubit, realizando assim um *bit-flip*;
2. Em seguida, aplica-se uma porta (MCZ) sobre todos os qubits, marcando o estado desejado com um fator de fase;

Figura 3.4 – Reflexão dos estados $|s\rangle$ e $|\omega\rangle$, respectivamente.



Fonte: Github/Qiskit.

3. Por fim, aplica-se novamente a porta X nos mesmos qubits que sofreram o *bit-flip* na primeira etapa, revertendo as alterações realizadas inicialmente.

3.2.4 Operador de Difusão (U_s)

A aplicação do Operador de Difusão, denotado por U_s , consiste em operações de amplificação sobre o estado $|s\rangle$, gerando uma reflexão adicional do mesmo.

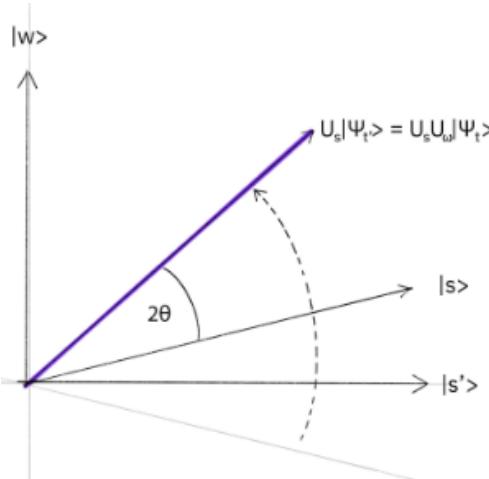
$$U_s = 2 |s\rangle \langle s| - I \quad (3.6)$$

Essa transformação mapeia o estado de $|s\rangle$ para $(U_s U_f) |s\rangle$ e completa a transformação, tal como está apresentado na Figura 3.5.

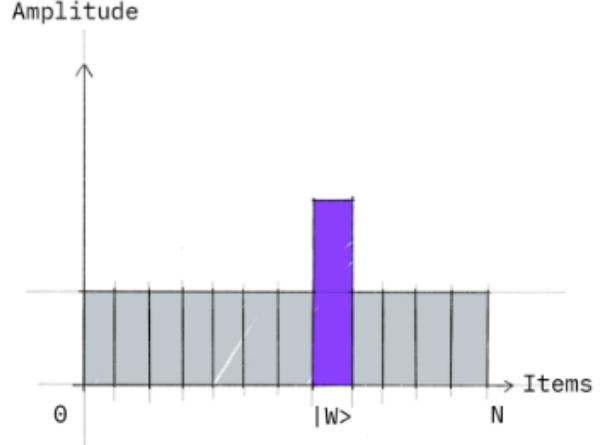
Duas reflexões sempre resultam em uma rotação, que leva o estado inicial $|s\rangle$ para mais perto do elemento *winner*, $|\omega\rangle$.

Como esta é uma reflexão sobre $|s\rangle$, busca-se adicionar uma fase negativa a cada estado ortogonal a $|s\rangle$. A maneira como pode-se fazer isso é aplicar uma transformação que leva o estado

Figura 3.5 – Segunda reflexão dos estados $|s\rangle$ e $|\omega\rangle$, respectivamente.



(a) Segunda reflexão de $|s\rangle$ sobre $|s'\rangle$.



(b) Segunda reflexão na amplitude de $|\omega\rangle$.

Fonte: Github/*Qiskit*.

$|s\rangle \rightarrow |0\rangle$, com isso, em vez de U_s , chamar-se-á U_0 . Dessa forma, a Equação 3.6 se torna:

$$U_0 = 2 |0\rangle\langle 0| - I \quad (3.7)$$

Essa operação aplica uma fase negativa a todos os estados ortonormais a $|0\rangle$, como será demonstrado.

Aplicação do Operador U_0 em $|s\rangle$, com $|s\rangle$ podendo ser um conjunto arbitrário com $N - 1$ itens:

$$U_0 |s\rangle = (2|0\rangle\langle 0| - I) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |bin(x)\rangle,$$

Expandindo, tem-se:

$$\begin{aligned} 2 |0\rangle\langle 0| \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |bin(x)\rangle \right) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |bin(x)\rangle \\ 2 |0\rangle \left(\sum_{x=0}^{N-1} \langle 0| bin(x)\rangle \right) &= \sum_{x=0}^{N-1} |bin(x)\rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como $\langle 0 | \text{bin}(x) \rangle = 1$ apenas se $x = 0$ (enquanto todos os outros termos se tornam 0), o único termo que sobrevive é:

$$2|0\rangle\langle 0|\text{bin}(0)\rangle = 2|0\rangle\langle 0|0\rangle = 2|0\rangle = 2|\text{bin}(0)\rangle$$

Então, em síntese, tem-se:

$$\begin{aligned} U_0|s\rangle &= 2|\text{bin}(0)\rangle - \sum_{x=0}^{N-1}|\text{bin}(x)\rangle \\ &= 2|\text{bin}(0)\rangle - |\text{bin}(0)\rangle - |\text{bin}(1)\rangle - |\text{bin}(2)\rangle - \cdots - |\text{bin}(N-1)\rangle \\ &= |\text{bin}(0)\rangle - \sum_{x=1}^{N-1}|\text{bin}(x)\rangle \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ou seja, a amplitude $|\text{bin}(0)\rangle$ aumenta em relação aos demais que invertem.

Tendo sido demonstrada a forma matemática, passa-se agora para a apresentação da obtenção do circuito quântico que realiza essa operação.

O Operador de Difusão em termos de portas lógicas é dado por:

$$U_s = H^{\otimes n} U_0 H^{\otimes n} \tag{3.10}$$

Como já visto, a atuação de U_0 é aplicar uma fase negativa a todos os estados ortogonais a $|s\rangle$, e, para isso, deve ser realizada a seguinte sequência:

1. Aplicação de portas X em todos canais para *bit-flip* dos estados;

$$|00\cdots 0\rangle \rightarrow |11\cdots 1\rangle$$

2. Aplicação de porta MCZ , com alvo no último canal, pois dessa forma o último estado recebe uma inversão de fase;

$$MCZ_{[N \times N]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}_{[N \times N]} \tag{3.11}$$

3. Novamente aplica-se portas X para desfazer os *bit-flips*.

$$|11\cdots 1\rangle \rightarrow |00\cdots 0\rangle$$

Após a última etapa, o resultado obtido é:

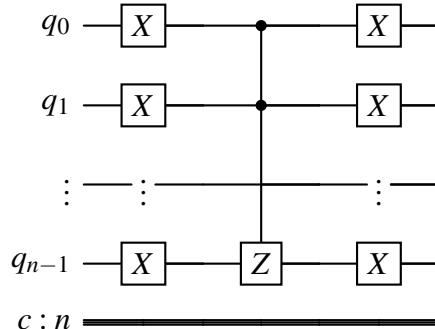
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{[N \times N]}$$

Ou seja, existe ainda uma fase global em U_0 , de modo que o Operador de Difusão, em termos de portas lógicas, é:

$$U_0 = -X^{\otimes n} MCZ X^{\otimes n} \quad (3.12)$$

O trecho de circuito descrito em Equação 3.12 está mostrado na Figura 3.6

Figura 3.6 – Operador de Difusão parcial



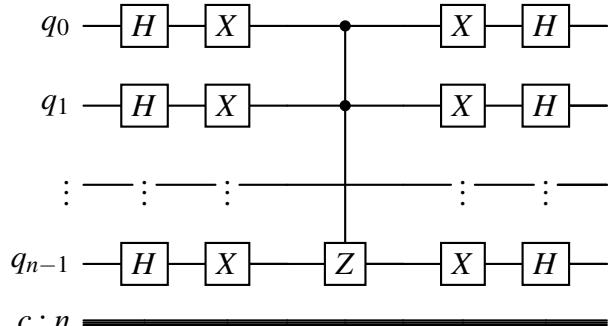
Fonte: do autor

Considerando as Equações 3.10 e 3.12. Tem-se que o Operador de Difusão completo em portas lógicas quânticas são dados pela Equação 3.13 e pela Figura 3.7.

$$U_s = H^{\otimes n} X^{\otimes n} MCZ X^{\otimes n} H^{\otimes n} \quad (3.13)$$

Note que a fase negativa não foi acrescentada, pois não precisa ser considerada no circuito quântico.

Figura 3.7 – Operador de Difusão completo



Fonte: do autor

3.2.5 Fator de Otimização (k)

A fim de otimizar o resultado, a aplicação do Oráculo (U_f) e do Operador de Difusão (U_s) deverão ser executados um número k de vezes para que o resultado obtido seja o mais próximo possível (com maiores amplitudes e probabilidades) do estado esperado $|\omega\rangle$, e pode ser expresso por

$$|\psi_k\rangle = (U_s U_f)^k |s\rangle \quad (3.14)$$

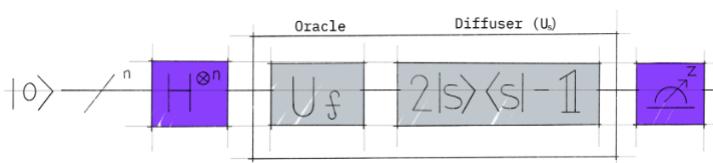
O número ideal k de iterações necessárias para que $|\omega\rangle$ seja obtido é dado por

$$k = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{m}} \quad (3.15)$$

em que N é o tamanho do espaço de pesquisa, e m é a quantidade de itens procurados.

A Figura 3.8 mostra um esquema do Algoritmo de Grover completo, evidenciando o Oráculo e o Operador de Difusão.

Figura 3.8 – Esquematização do Algoritmo de Grover.



Fonte: Github/Qiskit.

4 PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

Este capítulo descreve detalhadamente os procedimentos teóricos e computacionais adotados para a implementação do Algoritmo de Grover. Inicialmente, apresenta-se o procedimento teórico formalizado matematicamente e expresso por meio de circuitos quânticos compostos por portas lógicas elementares.

Posteriormente, será apresentado o procedimento computacional, que envolve a modelagem e a execução do algoritmo utilizando ferramentas de simulação e programação quântica. Esta parte tem como objetivo validar teoricamente o funcionamento do algoritmo e analisar, por meio de experimentos práticos, o seu desempenho em ambientes computacionais quânticos. Assim, este capítulo estabelece as bases necessárias para a compreensão e replicação dos resultados obtidos ao longo deste trabalho.

4.1 Circuito quântico virtual

Um circuito quântico virtual refere-se à representação lógica e idealizada de um algoritmo quântico, descrita em termos de *qubits* e portas lógicas abstratas, independente das restrições físicas ou imperfeições de qualquer hardware específico. Esta abstração permite projetar e testar algoritmos em um ambiente ideal antes de considerar as limitações práticas da implementação em hardware real, onde aspectos como conectividade entre *qubits*, fidelidade de portas e decoerência precisam ser levados em conta.

Nesta seção, serão apresentados de forma integrada os aspectos teóricos e computacionais da implementação do Algoritmo de Grover com 4 qubits e que orientaram a construção do circuito quântico utilizado no processo. Serão apresentados, também, trechos de código escritos em *Python* utilizando a biblioteca *Qiskit*. A combinação entre fundamentação teórica e simulação computacional permite visualizar com clareza o funcionamento do algoritmo, cujo procedimento foi dividido em três etapas principais:

1. a preparação do espaço de pesquisa;
2. a aplicação do oráculo;

3. a operação de difusão.

Cada uma dessas etapas é descrita de forma detalhada em uma estrutura que visa garantir clareza na compreensão do funcionamento do circuito e posterior análise dos resultados.

4.1.1 Preparação Inicial do Circuito Quântico

A princípio, foi necessário determinar o Espaço de Pesquisa $|s\rangle$, *i. e.*, criar uma superposição uniforme dos estados da base de 4 qubits. Como sugere a Equação 3.1, para $n = 4$ qubits, o Espaço de Pesquisa possui $N = 2^4 = 16$ itens, e é dado por:

$$\begin{aligned} |s\rangle &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{15} |bin(x)\rangle \\ &= \frac{1}{4} (|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + \\ &\quad |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para a implementação do circuito quântico virtual em *Qiskit*, deve-se primeiramente importar as dependências e instanciar as variáveis do circuito. As dependências relacionadas à biblioteca *Qiskit* são apresentadas na Figura 4.1 e a importação e declaração dos recursos na Figura 4.2.

Figura 4.1 – Dependências do Programa

```
{
  "QiskitDependencies": {
    "qiskit": "2.1.2",
    "qiskit-aer": "0.17.1",
    "qiskit-ibm-provider": "0.11.0",
    "qiskit-ibm-runtime": "0.41.1"
  }
}
```

Fonte: do autor

A Figura 4.2 mostra `QC_Grover`, que é um objeto instaciado pela classe `QuantumCircuit`. Nela será adicionado todo o circuito. Por sua vez, qubits e bits são instâncias das classes `QuantumRegister` e `ClassicalRegister`, respectivamente, que serão responsáveis pelo armazenamento dos dados e importantes no processo de medição.

Figura 4.2 – Inicialização do Circuito Quântico

```
from qiskit import QuantumCircuit, QuantumRegister,
ClassicalRegister

n = <num_qubits>
qubits = QuantumRegister(n, 'qubit')
bits= ClassicalRegister(n, 'bit')

QC_Grover = QuantumCircuit(qubits, bits)
```

Fonte: do autor

A próxima etapa é a formação do espaço de pesquisa mencionado anteriormente e, para isso, pode-se recorrer à Equação 3.2, que implica no uso de portas *Hadamard* em cada *qubit*. Esse passo é feito usando o módulo `inicializa_s`, apresentado na Figura 4.3.

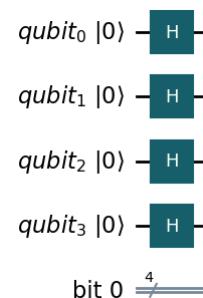
Figura 4.3 – Módulo Preparação Inicial

```
def inicializa_s(qc, qubits):
    for qubit in qubits:
        qc.h(qubit)
    return qc
```

Fonte: do autor

Uma representação visual do circuito quântico virtual relativo a este trecho pode ser acompanhada na Figura 4.4. É relevante notar que todos os *qubits* são inicializados no estado $|0\rangle$.

Figura 4.4 – Circuito Quântico Virtual - Superposição



Fonte: do autor

4.1.2 Oráculo

Para dar prosseguimento, é preciso marcar o estado que se deseja obter, *i. e.*, aplicar o Oráculo (U_f) (Equação 3.5) ao Espaço de Pesquisa (Equação 4.1). Seja $\omega = |1111\rangle$ o estado arbitrariamente escolhido para ser buscado, a aplicação do Oráculo é tal que

$$\begin{aligned} U_f |s\rangle &= \frac{1}{4} U_f [|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + \\ &\quad |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle] \\ &= \frac{1}{4} (|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + \\ &\quad |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + -|1111\rangle) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Que pode ser expresso de acordo com a matriz 16×16

$$(U_f |s\rangle)_{[16 \times 16]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{[16 \times 16]}$$

O desafio seguinte foi determinar a(s) porta(s) lógica(s) que retorna(m) essa matriz. Para isso, pode-se seguir a regra de formação enunciada na Seção 3.2.3 do Capítulo Ferramentas e Métodos. Como o estado buscado é $\omega = |1111\rangle$, não será necessário o uso de portas X , apenas uma MCZ (Equação 3.11) será suficiente, pois o resultado prático que se obtém com a aplicação da porta MCZ é basicamente mudar a fase do último elemento da matriz $N \times N$ à qual ela for aplicada, exatamente o que se intenta obter; portanto, o Oráculo será uma porta MCZ .

Em *Qiskit*, a implementação é feita com o módulo `oraculo_Uw`, mostrado na Figura 4.5. E o circuito quântico virtual relativo a este trecho é mostrado na Figura 4.6¹

¹ Como o *Qiskit* não oferece suporte nativo à porta MCZ , ela é construída combinando portas *Hadamard* e MCX , visto que $MCZ = H MCX H$ (H 's apenas no qubit alvo). A demonstração é feita no Apêndice C.

Figura 4.5 – Módulo Oráculo

```

def mcz_circ (qc):
    qc.h(3)
    qc.mcx ([0, 1, 2], 3)
    qc.h(3)
    return qc

def oraculo_Uw (qc, qubits, winner, QuantumCircuit):
    for i, index in enumerate (winner):
        if index == "0":
            qc.x(i)

    # Para agrupar as portas H MCX H em uma MCZ
    mcz_gate = mcz_circ(qc =
        QuantumCircuit(4, name="mcz")).to_instruction()
    qc.append(mcz_gate, [i for i in range(4)])

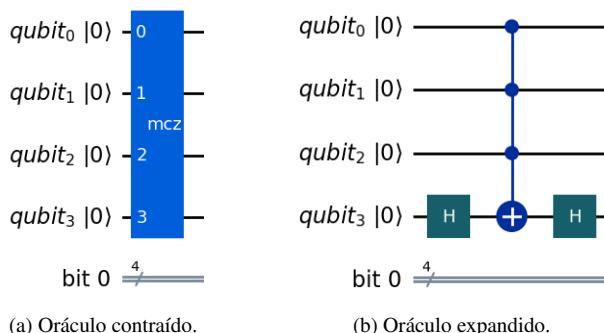
    for i, index in enumerate (winner):
        if index == "0":
            qc.x(i)

```

Fonte: do autor

O módulo `mcz_circ` apenas é usado para agrupar o conjunto de portas H MCX H em um único bloco, para facilitar identificação. Para fins de ilustração, vide Figura 4.6. O parâmetro `winner` representa o estado marcado a ser identificado (por exemplo, $|1111\rangle$).

Figura 4.6 – Circuito Quântico Virtual - Oráculo



Fonte: do autor.

4.1.3 Difusão

A etapa seguinte é a de amplificação do estado buscado, aplicando uma segunda reflexão U_s (Equação 3.6) na resultante da etapa anterior. Conforme demonstrado na Seção 3.2.4, Capítulo Ferramentas e Métodos, a operação que se deseja realizar é dada pela Equação 3.9. Essa operação aplica uma fase negativa a todos os estados ortonormais a $|0\rangle$, *i. e.*, a expansão da Equação 3.9 para quatro qubits resulta em:

$$U_0 |s\rangle = |0000\rangle - |0001\rangle - |0010\rangle - |0011\rangle - \cdots - |1111\rangle \quad (4.3)$$

Ou seja, a amplitude $|0000\rangle$ aumenta em relação aos demais que invertem.

O difusor é representado pela matriz:

$$U_0 = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Para colocar isso em termos de portas lógicas, basta utilizar o conjunto de portas apresentado pela Equação 3.13. Em *Qiskit*, a implementação pode ser feita com o uso do módulo `difusor_Us`, visto na Figura 4.7.

A idealização virtual desse trecho pode ser observada na Figura 4.8. Nela, é possível fazer a equivalência entre U_0 (Equação 3.12) e a Figura 4.8a e entre U_s (Equação 3.13) e a Figura 4.8b.

4.1.4 Fator k

Para que a Equação 3.14 seja de fato satisfeita, deve-se determinar o fator de otimização, *i. e.*, a quantidade de vezes que o Oráculo (U_f) e o Operador de Difusão (U_s) devem ser repetidos. O

valor de k pode ser obtido com a utilização da Equação 3.15, em que tem-se $N = 16$ e $m = 1$.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{m}} \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{16} \\ &= \pi \end{aligned}$$

E como k não pode ser número de ponto flutuante, deve-se arredondar para o inteiro mais próximo, ou seja, para fins práticos,

$$k = 3 \quad (4.5)$$

. Nesse ponto, tem-se que todas as etapas estão concluídas, cabendo, então, uní-las em um único circuito quântico. Em *Qiskit*, isso pode ser feito com o trecho de código mostrado na Figura 4.9, que leva em consideração o valor de k , por meio de um *loop for* no intervalo dado por k . Ao final, aplica-se o método `measure()` ao circuito, que realiza a medição dos *qubits*, colapsando o sistema em um dos estados da base computacional, revelando o resultado da busca.

Figura 4.7 – Módulo Operador de Difusão

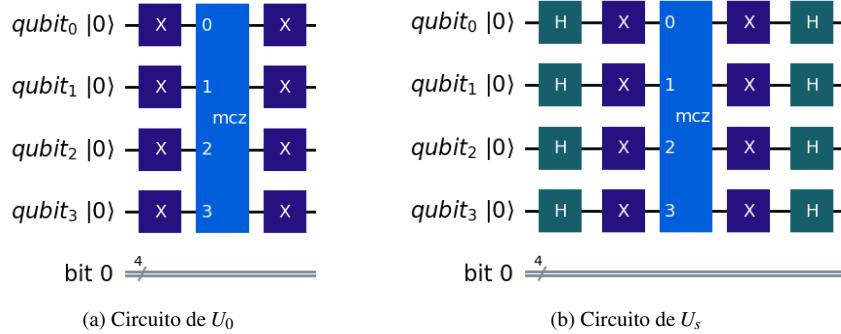
```
def difusor_Us(qc, qubits):
    for qubit in qubits:
        qc.h(qubit)
        qc.x(qubit)

    # Para agrupar as portas H MCX H em uma MCZ
    mcz_gate = mcz_circ(qc = QuantumCircuit(4, name="mcz"))
    .to_instruction()
    qc.append(mcz_gate, [i for i in range(4)])

    for qubit in qubits:
        qc.x(qubit)
        qc.h(qubit)
    return qc
```

Fonte: do autor

Figura 4.8 – Circuito Quântico Virtual - Amplificação, U_0 e U_s .



Fonte: do autor

Figura 4.9 – Trecho para formação do Circuito Quântico Virtual.

```

N = 2**n
k = (round((pi / 4) * sqrt(N)))
marked_state = "<seu_estado>"
inicializa_s(QC_Grover, range(n))

for _ in range(k):
    QC_Grover.barrier([i for i in range(n)])
    oraculo_Uw(QC_Grover, range(n), marked_state, QuantumCircuit)
    difusor_Us(QC_Grover, (range(n)))

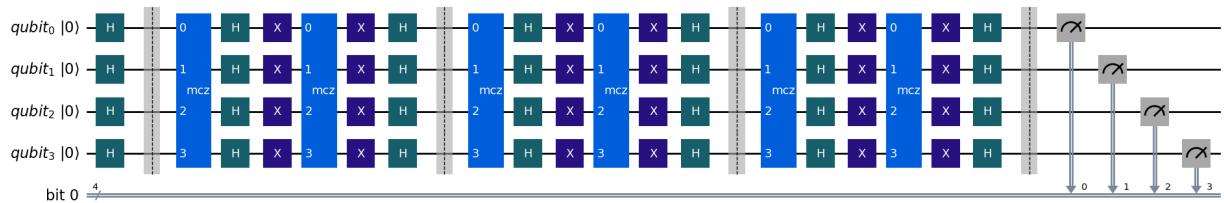
QC_Grover.barrier([i for i in range(n)])
QC_Grover.measure([0,1,2,3],[0,1,2,3])

```

Fonte: do autor

O circuito relativo ao trecho em questão pode ser visto na Figura 4.10. As barreiras (barrier()), nesse caso, são apenas separadores visuais do processo de iteração, e os objetos ao final de cada canal indicam o processo de medição do estado final sendo armazenado nos canais clássicos.

Figura 4.10 – Circuito Quântico Virtual - Algoritmo de Grover Completo.



Fonte: do autor

4.2 Plataforma *IBM Quantum*

Nesta seção, descreve-se e elucida-se por meio de trechos de códigos exemplos o procedimento adotado para o acesso e preparação da simulação do circuito do Algoritmo de Grover utilizando os recursos computacionais da *IBM Quantum Platform* (IBM Quantum, 2025j). Essa plataforma online desenvolvida pela IBM permite a execução de algoritmos em computadores quânticos reais e simuladores avançados disponíveis na nuvem.

O primeiro passo consiste na criação de uma conta na plataforma e posterior autenticação com uma organização habilitada. Dentro do ambiente web, o usuário pode configurar projetos e acessar diferentes dispositivos quânticos, incluindo simuladores ideais (sem ruído), simuladores com ruído e *hardwares* reais. Cada projeto está vinculado a uma *instância*, que define os recursos disponíveis, como prioridade de fila e acesso a dispositivos específicos.

Diferentemente dos ambientes locais de simulação, como os disponíveis via *Aer Simulator* no *Qiskit*, a *IBM Quantum* exige que até mesmo as simulações ideais sejam submetidas remotamente, exigindo autenticação prévia e conexão à nuvem. Com a migração da plataforma para o novo modelo unificado, o canal de acesso deve ser definido como `ibm_quantum_platform`, e é obrigatória a definição explícita da *instância*.

4.2.1 Procedimento de autenticação

A seguir, a Figura 4.11 apresenta um exemplo do código utilizado para salvar e autenticar uma conta na plataforma, utilizando a biblioteca `qiskit_ibm_runtime`:

O token pode ser obtido no perfil do usuário na plataforma, enquanto a `instance` segue o padrão `<hub>/<group>/<project>`, que pode ser consultado no painel de gerenciamento de projetos da *IBM Quantum Platform*. A chamada `set_as_default=True` permite que o serviço seja usado diretamente nos próximos acessos, sem necessidade de repetir a autenticação.

Após essa configuração inicial, torna-se possível listar os dispositivos disponíveis, verificar seus estados (como filas, fidelidades e número de qubits), selecionar o *backend* desejado e submeter os circuitos para execução.

Figura 4.11 – Trecho de acesso à *IBM Quantum Platform*.

```
from qiskit_ibm_runtime import QiskitRuntimeService

QiskitRuntimeService().save_account(
    token="",
    instance="",
    channel="ibm_quantum_platform",
    overwrite=True,
    set_as_default=True
)
service = QiskitRuntimeService()
```

Fonte: do autor

Fluxo de execução na nuvem

O processo completo de execução de um circuito na plataforma envolve:

- Construção do circuito com bibliotecas do Qiskit;
- Escolha do *backend* apropriado (simulador ou QPU);
- Submissão da tarefa à nuvem via QiskitRuntimeService;
- Acompanhamento da execução e análise dos resultados.

4.2.2 Simulação ideal via `Statevector`

Essa seção traz um exemplo de código que gera uma distribuição de probabilidades ideal, utilizando a classe Statevector do Qiskit, apresentada na Figura 4.12, que simula a evolução do estado quântico de forma exata e livre de ruído. Essa abordagem fornece a expectativa teórica para o comportamento do algoritmo de Grover.

Este resultado serve como referência teórica da máxima fidelidade, permitindo a comparação com as demais execuções e a análise da influência dos ruídos nos sistemas quânticos reais.

4.2.3 Simulação com ruído via `AerSimulator`

Essa seção apresenta uma simulação mais próxima da realidade, pois faz uso de informações de ruído da QPU escolhida (definindo <nome_backend>). Para isso, utiliza a classe AerSimulator,

Figura 4.12 – Trecho para Simulação Ideal.

```
from qiskit.quantum_info import Statevector
ideal_distribution = Statevector.
    from_instruction(QC_Grover).
    probabilities_dict()
fig, ax = plt.subplots()
plot_histogram(ideal_distribution,
    title="Distribuicao Ideal de Probabilidades",
    ax=ax)
ax.set_ylabel("Probabilidade")
plt.show()
```

Fonte: do autor

da biblioteca `qiskit_aer`. O código exemplo é mostrado na Figura 4.13. Essa é uma forma de criar uma simulação que busca imitar de forma mais precisa o comportamento prático do circuito, uma vez que a simulação com ruído permite observar a degradação de fidelidade causada por imperfeições reais nos dispositivos quânticos.

Figura 4.13 – Trecho para Simulação com Ruído.

```
from qiskit_aer import AerSimulator
from qiskit.compiler import transpile

service = QiskitRuntimeService()
backend = service.backend('<nome_backend>')

# Gerar simulador com modelo de ruido real
backend_sim = AerSimulator.from_backend(backend)
transpiled_circ_sim = transpile(QC_Grover, backend_sim)
result = backend_sim.run(transpiled_circ_sim,
    shots=<num_shots>).result()
circuits.append(transpiled_circ_sim)
```

Fonte: do autor

Essa abordagem é valiosa para testar e validar circuitos antes da submissão ao *hardware* físico, permitindo ajustes e observação de efeitos de ruído específicos, como erros de porta, leitura e decoerência.

4.2.4 Execução via Sampler

Essa seção traz os procedimentos a serem realizados para a execução em uma QPU. Antes de o circuito ser enviado a alguma QPU propriamente dita, ele precisa ser reescrito em uma linguagem que ela entenda, *i. e.*, o circuito virtual precisa ser reescrito em termos das portas base do *backend* no qual se pretende enviá-lo. Essa é a etapa de compilação mencionada na Seção 3.1.2 e sua implementação é feita com a função `transpile` conforme mostrado na Figura 4.14.

Figura 4.14 – Trecho para Compilação.

```
from qiskit.compiler import transpile

backend_HW = service.backend("<nome_backend>")
transpiled = transpile(QC_Grover, backend_HW,
                      optimization_level=<optim_lvl>)
```

Fonte: do autor

A definição de `<nome_backend>` é o que garante a compilação ideal de acordo com as portas base de cada *backend*, visto que cada tipo de processador pode possuir portas base diferentes. Pode-se também configurar o nível de otimização, explanado na Seção 2.1.1, por meio de `optimization_level`. Concluída essa etapa, segue-se com o circuito compilado.

A Figura 4.15 mostra um trecho de exemplo para execução em QPU's que possibilita também utilizar as técnicas de supressão – *Dynamical Decoupling* (DD) e *Pauli Twirling* introduzidas na Seção 2.1.1 – disponíveis na classe `Sampler` da biblioteca `qiskit_ibm_runtime`.

4.2.5 Execução via Estimate

Por fim, essa seção traz um trecho de exemplo para execução em QPU's que possibilita utilizar as técnicas de mitigação – *Twirled Readout Error eXtinction* (TREX), *Zero-Noise Extrapolation* (ZNE), *Probabilistic Error Amplification* (PEA), e *Probabilistic Error Cancellation* (PEC) introduzidas na Seção 2.1.2 – disponíveis na classe `Estimate` da biblioteca `qiskit_ibm_runtime`.

Um aspecto crucial na execução em *hardware* real é o mapeamento entre *qubits* lógicos (usados no Referênciassec:circuitoVirtual) e *qubits* físicos de cada dispositivo. Esse mapeamento é especificado através da variável `initial_layout`, que determina em quais *qubits* físicos do *ba-*

Figura 4.15 – Trecho para Execução em QPU via Sampler.

```
from qiskit_ibm_runtime import SamplerV2 as Sampler, Batch

def rodar():
    num_shots = <num_shots>
    with Batch(backend=backend_HW):
        sampler = Sampler()
        # Execução com Dynamical Decoupling + Pauli Twirling
        sampler.options.dynamical_decoupling.enable = True
        sampler.options.twirling.enable_gates = True
        job_DD_Twirling = sampler.run([transpiled], shots=num_shots)
    try:
        rodar()
    except Exception as e:
        print(f"Erro: {e}")
```

Fonte: do autor

kend cada *qubit* lógico do circuito será executado. A escolha do mapeamento impacta diretamente a fidelidade do resultado, pois diferentes *qubits* físicos podem ter diferentes taxas de erro, tempos de decoerência e qualidade de conexão. Na implementação, o `initial_layout` é usado tanto na compilação (via `generate_preset_pass_manager`) quanto na construção do observável, onde especifica em quais *qubits* físicos o projetor deve ser medido.

A etapa de compilação é similar àquela feita para o `Sampler`, mas utiliza a função `generate_preset_pass_manager` conforme mostrado na Figura 4.16. Para o `Estimate`, devem ser construídos os observáveis que se deseja medir (vide Apêndice B). No caso do Algoritmo de Grover, o observável é o projetor sobre o estado marcado, *i.e.*, $\hat{O} = |1111\rangle\langle 1111|$ para a implementação de quatro qubits. A construção desse observável é feita com a classe `SparsePauliOp`, também mostrado na Figura 4.16.

A Figura 4.17, por sua vez, mostra com detalhes o trecho de exemplo para execução. Note que, nesse caso, é possível combinar várias técnicas de mitigação, como DD, TREX, Twirling, PEC e ZNE + PEA, em uma única execução. Isso permite avaliar o impacto combinado dessas técnicas na melhoria da fidelidade dos resultados obtidos a partir do circuito quântico executado na QPU.

Figura 4.16 – Trecho para Construção do Observável.

```

from qiskit_ibm_runtime import Options, EstimatorV2 as Estimator
from qiskit.quantum_info import SparsePauliOp, Operator
from qiskit.transpiler.preset_passmanagers import
    generate_preset_pass_manager

options = Options()

estimator = Estimator(<backend>) # Initialize the estimator

pm = generate_preset_pass_manager(
    backend=<backend>,
    initial_layout = <initial_layout>,
    layout_method="trivial",
    optimization_level=3,
)

isa_circuit = pm.run(QC_Grover) # Transpile the circuit

# Create an observable for the target state
target_state = <target_state>
target_index = int(target_state, 2)

proj = np.zeros((2**<num_qubits>, 2**<num_qubits>))
proj[target_index, target_index] = 1

obs = SparsePauliOp.from_operator(Operator(proj))

num_backend_qubits = backend.num_qubits

observable = SparsePauliOp("I" * num_backend_qubits)

observable = observable.compose(obs, qargs=<initial_layout>)

# Prepare the circuit and observable for execution
pub = (isa_circuit, [observable])

```

Figura 4.17 – Trecho para Execução em QPU via Estimate.

```

results = {}
def rodar():
    num_shots = <num_shots>
    with Batch(backend=backend) as batch:
        estimator = Estimator(mode=batch)
        # Set number of shots
        estimator.options.default_shots = num_shots
        # Disable runtime compilation and error mitigation
        estimator.options.resilience_level = 0

        # 1. No error mitigation
        job_none = estimator.run([pub])
        results["No Mitigation"] = job_none

        # 2. Enable Dynamical Decoupling (DD)
        estimator.options.dynamical_decoupling.enable = True
        estimator.options.dynamical_decoupling.sequence_type = "XpXm"

        # 3. Enable Readout Error Mitigation (TREX)
        estimator.options.resilience.measure_mitigation = True

        # 4. Enable Gate Twirling
        estimator.options.twirling.enable_gates = True
        estimator.options.twirling.num_randomizations = "auto"

        # 5. Enable PEC
        estimator.options.resilience.pec_mitigation = True
        estimator.options.resilience.pec.max_overhead = 100

        # 6. Enable ZNE + PEA
        estimator.options.resilience.zne_mitigation = True
        estimator.options.resilience.zne.amplifier = "pea"
        estimator.options.resilience.zne.noise_factors = (1, 3, 5)
        estimator.options.resilience.zne.extrapolator = "exponential"

        job_TREX_Twiling_ZNE_PEA = estimator.run([pub])
        results["TREX + Twiling + ZNE + PEA"] = job_TREX_Twiling_ZNE_PEA

    try:
        rodar()
    except Exception as e:
        print(f"Erro: {e}")

```

Fonte: do autor

A execução real permite não apenas verificar a eficiência do algoritmo em ambiente prático, mas também comparar os efeitos das técnicas de supressão aplicadas, ajudando a entender o comportamento dos sistemas quânticos sob influência de ruído quântico.

5 RESULTADOS E ANÁLISE

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos a partir da implementação do Algoritmo de Grover em diferentes ambientes de execução, com e sem ruído, e com aplicação de técnicas de mitigação. Os testes foram realizados em três cenários distintos: simulação ideal via Statevector, simulação com ruído via AerSimulator, e execução real em QPUs da IBM (`ibm_brisbane` e `ibm_torino`).

Para referência, todas as execuções (simulações e experimentos) utilizaram a mesma configuração lógica do circuito: circuito com 4 qubits, aplicação de $k = 3$ iterações do operador de Grover (ver Figura 4.10) e oráculo que marca o estado alvo $\omega = |1111\rangle$. A implementação do Oráculo está descrita na Seção 4.1.2. Na simulação ideal não há mapeamento lógico → físico; esse mapeamento só é relevante para as execuções em *hardware* real e é discutido na Seção 4.2.5.

***ADICIONAR ESSA DISCUSSAO SOBRE O MAPEAMENTO LÓGICO → FÍSICO

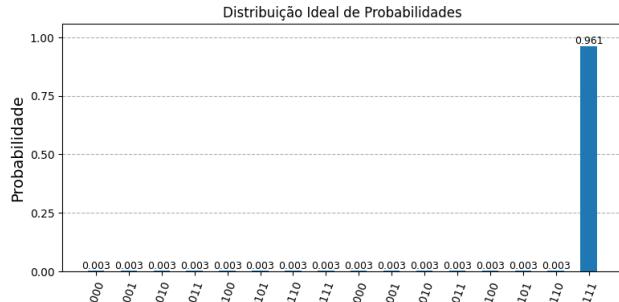
5.1 Resultado Ideal (Teórico)

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos a partir da simulação teórica ideal do circuito do Algoritmo de Grover, como exemplificado na Figura 4.12 da Seção 4.2.2. Esta simulação permite visualizar a distribuição de probabilidades do estado final de maneira exata e sem influência de ruídos externos, servindo de referência teórica para as demais simulações.

A Figura 5.1 mostra o histograma gerado após a aplicação do algoritmo, considerando um circuito com 4 qubits e o estado marcado $\omega = |1111\rangle$. Observa-se que o algoritmo amplifica significativamente a probabilidade de ocorrência do estado marcado, como era esperado teoricamente.

Com o valor ideal de iterações $k = 3$ (resultado 4.5), a probabilidade de medir o estado marcado $|1111\rangle$ foi de 96,1%, enquanto os demais estados apresentam probabilidades próximas de zero. Este comportamento é compatível com a expectativa teórica do algoritmo de Grover, conforme discutido nas seções anteriores e demonstrado também no Apêndice A. Este resultado está em conformidade com as previsões teóricas do algoritmo, conforme também observado por Jesus *et. al.* (2021), que demonstraram a eficácia do *Qiskit* para simulações educacionais e teóricas.

Figura 5.1 – Distribuição ideal de probabilidades (simulação via Statevector).



Fonte: do autor

A distribuição obtida reflete, portanto, a eficiência máxima do algoritmo quando executado em condições ideais. Esta simulação serve como base de comparação para as análises subsequentes, em que serão incluídos fatores realistas como ruído, erro de leitura e imperfeições físicas presentes nos dispositivos quânticos atuais.

5.2 Resultado com Ruído (`AerSimulator`)

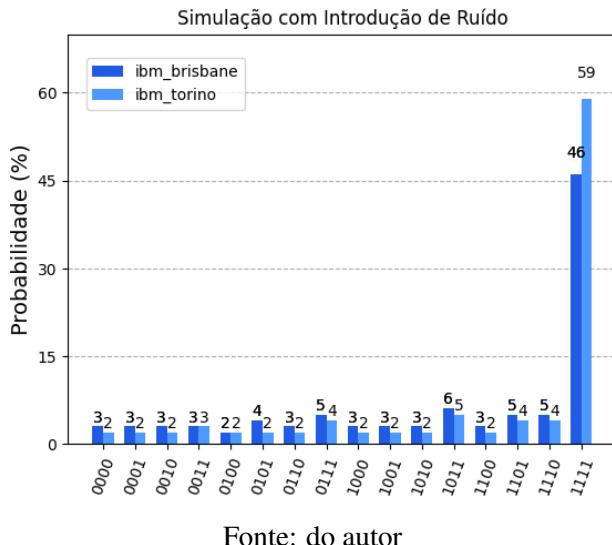
A simulação ideal apresentada na seção anterior assume um sistema quântico livre de ruídos. No entanto, implementações reais são afetadas por diversos tipos de erros, como decoerência, erro de porta, erro de leitura e ruído térmico. Para aproximar a execução do algoritmo à realidade dos dispositivos quânticos atuais, é necessário considerar esses fatores na simulação.

Esta seção tem por premissa a apresentação dos resultados da simulação feita usando dados de ruídos de dois *backends* diferentes, já mencionados no Quadro 3.1. Os modelos de ruídos são fornecidos pela classe `AerSimulator`, e podem ser utilizados como exemplificado na Figura 4.13 da Seção 4.2.3. Este modelo inclui características específicas e atuais do dispositivo real, como fidelidade de portas, taxas de erro de leitura e tempos de decoerência dos qubits, e por isso se faz uma ferramenta valiosa.

Nesta etapa também mantivemos a configuração lógica do circuito (4 qubits e $k = 3$, ver resultado 4.5) e o mesmo oráculo referido na Seção 4.1.2. O `AerSimulator` utiliza os parâmetros de calibração dos *backends* (como descrito na Seção 3.1.1) para construir um modelo de ruído que aproxima o comportamento do dispositivo real na data de captura desses dados.

A Figura 5.2 mostra o histograma da probabilidade final, em termos de porcentagem, de cada estado.

Figura 5.2 – Distribuição de probabilidades (simulação via AerSimulator).



Fonte: do autor

Apesar da presença de ruído, observa-se que o estado marcado $|1111\rangle$ ainda possui a maior probabilidade entre os estados possíveis para ambos os modelos de ruído utilizados, com 46% e 59% para `ibm_brisbane` e `ibm_torino`, respectivamente. No entanto, pode-se notar facilmente que a presença do ruído, mesmo em ambiente simulado, já fornece um resultado bastante distorcido com relação à expectativa teórica (ou ideal), na qual a probabilidade para o estado marcado era superior a 96%.

Ademais, os outros estados apresentam valores não desprezíveis, evidenciando a dispersão causada pelos erros quânticos. Todo esse comportamento é consistente com os achados de (SILVA; JESUS; CRUZ, 2024), que, mesmo usando outras ferramentas de simulação, relataram queda de desempenho em simulações com ruído. Essa é uma observação importante, pois garante resultados obtidos sejam não enviesados.

Essa dispersão mostra que, mesmo em simulações, o ruído tem um impacto significativo na performance do algoritmo, reforçando a necessidade de técnicas de supressão e de mitigação de erros para melhorar a fidelidade dos resultados nos ambientes de execução real.

5.3 Resultado Real em *Hardware* Quânticos

Após a validação teórica e a simulação com ruído, o Algoritmo de Grover foi executado em dois computadores quânticos reais da *IBM Quantum*: `ibm_brisbane` e `ibm_torino`, introduzidos na Seção 3.1.2, utilizando duas classes com propostas distintas: `Sampler` e `Estimate`. A escolha de dois dispositivos teve como objetivo comparar o desempenho do mesmo circuito em arquiteturas físicas distintas, permitindo observar variações de fidelidade de portas e impacto de parâmetros específicos de cada *backend*. A escolha das duas classes, por sua vez, visa explorar diferentes abordagens de execução e análise dos resultados, conforme detalhado nas Seções 5.3.1 e 5.3.2.

Para as execuções em *hardware* real foi necessário transpilar o circuito para o mapa físico do dispositivo, cujo mapeamento específico é discutido na Seção 4.2.5, onde sua importância para a construção dos observáveis é evidenciada.

5.3.1 Via Sampler

A classe `Sampler` é utilizada para executar circuitos quânticos em dispositivos reais, retornando a distribuição de probabilidades dos estados medidos. Entretanto ela possui uma limitação importante: permite apenas a aplicação das técnicas de supressão de erros *Dynamical Decoupling* e *Pauli Twirling* (Seção 2.1.1).

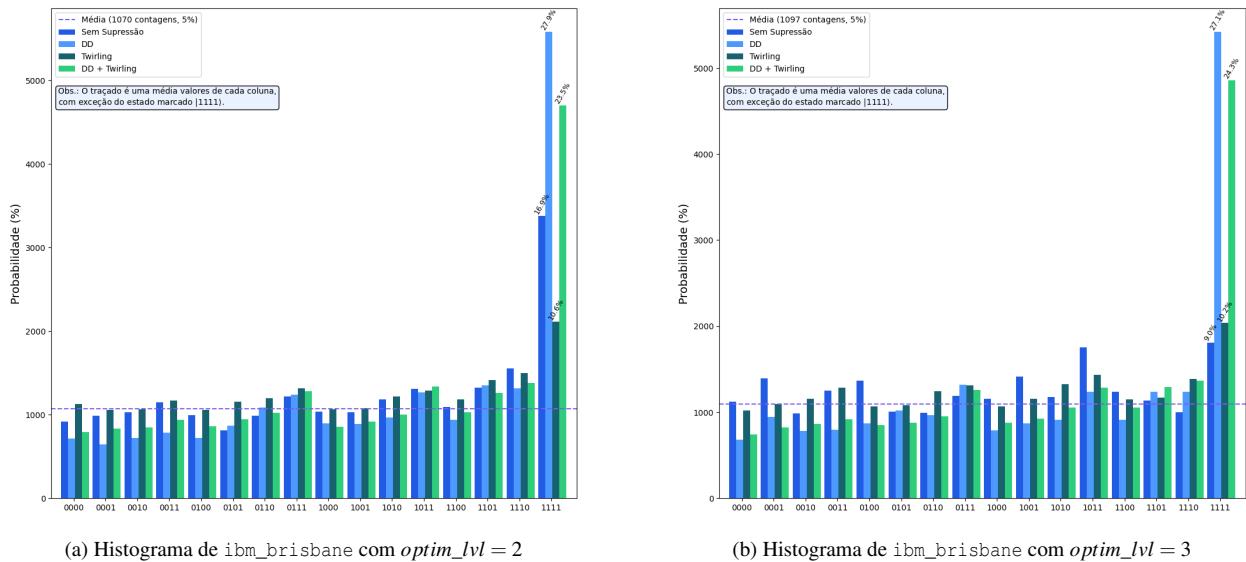
Para cada execução, foram configurados 20000 *shots*, e algumas condições específicas, conforme descritas abaixo:

1. Sem nenhum método de supressão.
2. Desacoplamento Dinâmico (DD) habilitado e Compilação Aleatória (*Pauli Twirling*) desabilitado.
3. Desacoplamento Dinâmico (DD) desabilitado e Compilação Aleatória (*Pauli Twirling*) habilitado.
4. Ambos habilitados.

Esse mesmo padrão foi aplicado com dois níveis diferentes de otimização (2 e 3). Todas essas diferentes preparações foram com o intuito de estudo e avaliação dos efeitos de cada método, inclusive quando aplicados simultaneamente.

A apresentação dos resultados é feita baseada nessas configurações, em que pode-se analisar em cada gráfico as diferenças causadas pelos métodos de supressão para um mesmo nível de otimização. Dito isso, a Figura 5.3 mostra as quatro configurações de supressão aplicadas aos níveis de otimização 2 e 3 (Figuras 5.3a e 5.3b, respectivamente), enquanto a Figura 5.4 replica as mesmas quatro configurações, também com os dois níveis de otimização aplicados a cada histograma (Figuras 5.4a e 5.4b).

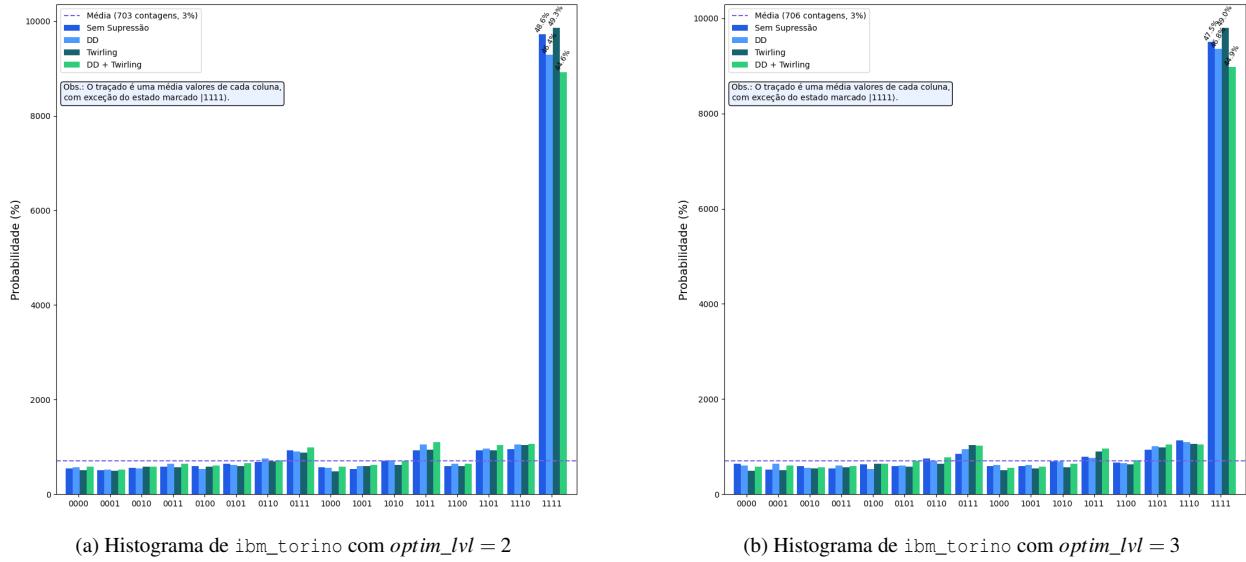
Figura 5.3 – Resultados de `ibm_brisbane`.



Fonte: do autor

Analizando os resultados obtidos nas execuções via Sampler, é possível observar padrões interessantes no comportamento dos métodos de supressão de ruído em ambos os computadores quânticos. Para facilitar a análise, vamos examinar os aspectos principais:

Na comparação entre os níveis de otimização 2 e 3, observa-se pouca variação nos resultados para ambos os dispositivos, com a maior diferença sendo o resultado "Sem supressão" da Figura 5.3, onde pode-se notar em 5.3a ligeiramente maior que em 5.3b. Esta diferença, aparentemente contra-intuitiva já que o nível 3 deveria teoricamente produzir circuitos mais eficientes,

Figura 5.4 – Resultados de `ibm_torino`

Fonte: do autor

pode ser explicada pelo comportamento específico das otimizações em circuitos estruturados como o Algoritmo de Grover: enquanto o nível 2 mantém mais fielmente a estrutura original do circuito (preservando a sequência de operadores de difusão e reflexão), o nível 3 pode tentar consolidar operações através de síntese unitária mais agressiva, potencialmente introduzindo sequências de portas mais complexas que, embora teoricamente equivalentes, podem ser mais susceptíveis a erros quando executadas no *hardware* real. Isso é particularmente relevante no `ibm_brisbane`, onde a maior conectividade entre *qubits* pode levar o otimizador de nível 3 a escolher decomposições que, embora mais compactas, acabam sendo mais sensíveis ao ruído do dispositivo.

Esse comportamento foi também observado por Wu *et al.* (2023), que destacam que níveis mais agressivos de otimização podem reduzir a contagem de portas, mas introduzem sequências mais sensíveis ao ruído, o que compromete a fidelidade do algoritmo em dispositivos NISQ.

- **Dynamical Decoupling (DD):** Quando aplicado isoladamente, o DD mostrou eficácia moderada em ambos os dispositivos, com melhor desempenho absoluto no `ibm_torino`, contudo, ao analisar a Figura 5.3, nota-se um desempenho muito melhor em relação às demais configurações. Isso pode ser explicado pela natureza do DD em cancelar interações indesejadas entre *qubits* ociosos através de pulsos simétricos, como descrito na Seção 2.1.1. O melhor

desempenho no `ibm_torino` sugere que este dispositivo pode ter maior susceptibilidade a erros de decoerência durante períodos de ociosidade dos *qubits*.

- **Pauli Twirling:** A aplicação isolada do Pauli Twirling apresentou resultados bastante diferentes entre os dois computadores: enquanto no `ibm_brisbane` o resultado chegou a ser até pior do que o "Sem supressão"(Figura 5.3a), no `ibm_torino` o resultado de Pauli Twirling retornou a maior probabilidade para o estado marcado. Chen *et al.* (2025) destacam que limitações fundamentais na caracterização do ruído impedem que o Pauli Twirling produza resultados uniformes entre diferentes QPUs, o que explica a discrepância observada entre `ibm_brisbane` e `ibm_torino`.
- **Combinação DD + Twirling:** A aplicação simultânea dos dois métodos produziu bons resultados em ambos os dispositivos, mas ainda permaneceu inferior a: apenas DD no `ibm_brisbane` (Figura 5.3); e a Twirling no `ibm_torino` (Figura 5.4). Resultados semelhantes foram observados por Safi *et al.* (2025), que demonstraram que a aplicação conjunta de DD e Twirling pode ser limitada por restrições de temporização e agendamento de portas, especialmente em dispositivos com maior conectividade. Evert *et al.* (2025) também destacam que a sobreposição de técnicas de mitigação pode gerar conflitos de agendamento ou reduzir a eficácia individual de cada método, o que ajuda a explicar os resultados observados neste trabalho.

O `ibm_torino` apresentou (Figura 5.4), em geral, melhor desempenho que o `ibm_brisbane` (Figura 5.3) em todas as configurações testadas. Essa diferença pode ser atribuída a características específicas de cada dispositivo. Embora o `ibm_torino` possua mais *qubits*, sua arquitetura física e perfil de ruído podem favorecer circuitos como o Algoritmo de Grover. Segundo a *IBM Quantum Documentation* (2025), cada QPU possui parâmetros distintos de fidelidade, tempo de coerência e taxas de erro por porta, que variam não apenas entre dispositivos, mas também ao longo do tempo. Dados públicos da IBM indicam que o `ibm_torino` frequentemente apresenta menores taxas de erro em operações de dois *qubits* (*CX*) e maior estabilidade nas medições, o que pode explicar sua melhor resposta às técnicas de supressão aplicadas neste trabalho. Além disso, a profundidade final dos circuitos transpilados para o `ibm_torino` foi consistentemente menor, o que contribui para

maior fidelidade na execução. Essa diferença pode estar relacionada à forma como o *transpiler* do *Qiskit* otimiza circuitos para cada *backend*, levando em conta o mapa de acoplamento e os tempos de gate específicos de cada QPU.

Esses resultados demonstram a importância da escolha adequada tanto do dispositivo quanto das técnicas de supressão de ruído, e como sua eficácia pode variar significativamente dependendo das características específicas do *hardware* quântico utilizado.

5.3.2 Via Estimate

Após a execução usando a classe `Sampler`, o Algoritmo de Grover foi novamente executado nos mesmos computadores quânticos reais da *IBM Quantum*, porém utilizando a classe `Estimate`. Essa classe, diferentemente da `Sampler`, permite a aplicação das técnicas de mitigação de erros, sendo essa a principal razão para sua utilização. Contudo, enquanto a classe `Sampler` retorna as probabilidades de cada estado, a classe `Estimate` retorna os valores esperados, o que torna a análise dos resultados um pouco diferente: em vez de observar a probabilidade de cada estado, deve-se analisar o valor esperado associado ao estado marcado $|1111\rangle$, para cada configuração de mitigação de erros.

Quando o observável estimado é o projetor sobre o estado marcado $P_\omega = |\omega\rangle\langle\omega|$ com $\omega = 1111$, o valor esperado coincide com a probabilidade de obter ω na medição (ver demonstração no Apêndice B).

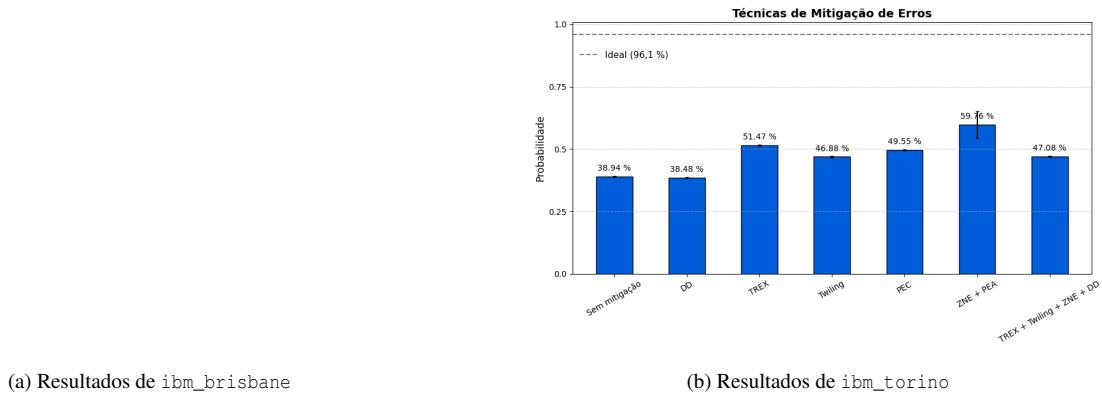
Para essa análise, foram configurados 10000 *shots*, o nível de otimização foi fixado em 3, e as condições específicas de mitigação de erros foram as seguintes:

1. Sem nenhum método de mitigação.
2. Apenas Desacoplamento Dinâmico (DD) habilitado.
3. Apenas Extinção de Erro de Leitura Giratória (TREX) habilitado.
4. Apenas Compilação Aleatória (*Pauli Twirling*) habilitado.
5. Apenas Cancelamento de Erro Probabilístico (PEC) habilitado.

6. Extrapolação de Ruído Zero (ZNE) com Amplificação de Erro Probabilística (PEA) habilitados.
7. Extinção de Erro de Leitura Giratória (TREX), Compilação Aleatória (*Pauli Twirling*) e Extrapolação de Ruído Zero (ZNE) habilitados.

A Figura 5.5 apresenta os resultados obtidos para cada uma dessas configurações, em ambos os computadores quânticos. Cada barra no gráfico representa o valor esperado do estado marcado $|1111\rangle$ sob as diferentes técnicas de mitigação de erros aplicadas.

Figura 5.5 – Probabilidades do estado $|1111\rangle$ via Estimate.



(a) Resultados de `ibm_brisbane`

(b) Resultados de `ibm_torino`

Fonte: do autor

Os resultados obtidos via Estimate fornecem uma perspectiva complementar sobre a eficácia das técnicas de mitigação de erros. Analisando os dados apresentados na Figura 5.5, podemos observar:

- **Dynamical Decoupling:** Quando aplicado isoladamente, o DD mostrou um retorno inferior em relação ao caso base sem mitigação, atingindo 38,48%. Esse resultado está alinhado com a documentação da IBM Quantum (IBM Quantum, 2025f), que destaca que o uso de *Dynamical Decoupling* pode, em certos casos, aumentar a duração do circuito e introduzir mais erros do que os que busca suprimir, especialmente quando aplicado isoladamente em circuitos sensíveis à coerência temporal. Além disso, como explicado na Seção 2.1.1, o DD é mais eficaz na supressão de erros de decoerência durante períodos de ociosidade dos *qubits*, e sua aplicação em circuitos com alta atividade pode não trazer benefícios significativos.

- **TREX:** A técnica de extinção de erro de leitura giratória apresentou resultados significativamente melhores que o caso base, atingindo 51,47% em Figura 5.5b. Esse desempenho está alinhado com os achados de Yang et al. (2025), que demonstraram que métodos de mitigação de erro de leitura como o TREX são especialmente eficazes em algoritmos com saídas esparsas, como o de Grover. Segundo os autores, “nossa *framework* baseado em TREX mostrou melhora substancial na probabilidade de sucesso de algoritmos como a busca de Grover, alcançando até 50% de acurácia em *backends* ruidosos da IBM” (YANG; RAYMOND; UNO, 2025).
- **Pauli Twirling:** Obtendo 46,88% de probabilidade em Figura 5.5b, o método apresentou melhorias significativas comparado ao sem mitigação. O resultado está próximo ao da Figura 5.4, com uma diferença de apenas 2,4 pontos percentuais, mostrando consistência no dispositivo quanto à técnica empregada.
- **PEC:** O Cancelamento de Erro Probabilístico apresentou desempenho moderado, atingindo 49,55% conforme mostrado na Figura 5.5b. Embora tenha superado o caso base sem mitigação, o resultado ficou abaixo de outras técnicas como TREX e ZNE + PEA. Esse comportamento está de acordo com a literatura, que aponta que o PEC pode fornecer estimativas não enviesadas, mas exige um número elevado de amostras (*shots*) para convergência estatística, o que pode limitar sua eficácia prática em dispositivos NISQ. Como discutido na Seção 2.1.2, o alto custo de amostragem e a sensibilidade ao ruído residual tornam o método mais adequado para cenários onde o tempo de execução e os recursos computacionais não são restritivos.
- **ZNE + PEA:** A combinação entre Extrapolação de Ruído Zero (ZNE) e Amplificação de Erro Probabilística (PEA) apresentou os melhores resultados entre todas as técnicas testadas, atingindo 59,76% de probabilidade para o estado marcado, conforme Figura 5.5b. Esse resultado evidencia uma forte sinergia entre as duas técnicas: enquanto o ZNE estima o valor ideal por meio da extrapolação de níveis crescentes de ruído, o PEA atua calibrando o impacto das probabilidades de erro. O ganho de aproximadamente 20% em relação ao caso sem mitigação demonstra a eficácia dessa estratégia híbrida para circuitos sensíveis à coerência.

cia, como o de Grover. O resultado reforça achados recentes que indicam que a combinação de técnicas complementares pode superar abordagens isoladas, especialmente em algoritmos sensíveis à fidelidade como o de Grover.

- **TREX + Twirling + ZNE + DD:** A combinação múltipla dessas quatro técnicas alcançou 47,08%, conforme ilustrado em Figura 5.5b. Embora o valor seja superior ao caso base, o resultado ficou aquém das expectativas para uma estratégia composta, com desempenho inferior ao das melhores técnicas aplicadas isoladamente, como ZNE + PEA e TREX, o que sugere possível sobreposição de efeitos ou aumento excessivo da profundidade do circuito. Esse comportamento reforça que a integração simultânea de técnicas deve ser cuidadosamente otimizada, considerando o equilíbrio entre mitigação efetiva e o acréscimo de complexidade e tempo de execução. Esse resultado sugere que a combinação excessiva de técnicas pode introduzir sobreposição de efeitos ou conflitos de agendamento, como apontado por Evert *et al.* (2025), que destacam que a interação entre métodos de mitigação precisa ser cuidadosamente calibrada para evitar degradação da performance. A complexidade adicional pode ter aumentado a profundidade do circuito ou interferido na coerência temporal, reduzindo a eficácia global da mitigação.

No tocante às QPUs utilizadas, `ibm_torino` manteve seu padrão de melhor desempenho observado nas execuções via Sampler e Estimator, obtendo melhores números que `ibm_brisbane`, pois apresentou

- maior resposta às técnicas de mitigação individuais, como TREX e ZNE
- menor variabilidade entre execuções, indicando maior estabilidade operacional
- resultados mais próximos ao caso ideal, especialmente com técnicas combinadas como ZNE + PEA

Em síntese, os resultados obtidos via Estimate indicam que o conjunto de técnicas de mitigação tem potencial significativo para restaurar parte da fidelidade perdida devido ao ruído. Observa-se que o `ibm_torino` apresentou desempenho superior em todas as configurações, corroborando os resultados da Seção 5.3.1 e reforçando a relevância da escolha adequada do dispositivo

físico. As combinações ZNE + PEA e TREX mostraram-se particularmente eficazes, representando estratégias promissoras para execução de algoritmos de amplitude amplificada em processadores NISQ.

5.4 Comparação e Discussão

O Quadro 5.1 resume os resultados obtidos:

Quadro 5.1 – Comparação entre diferentes cenários de execução do Algoritmo de Grover

Cenário	Prob. de Acerto	Supressão	Mitigação
Sim. Ideal	96,1%	Não aplicável	Não aplicável
Sim. Ruído	46% (brisbane), 59% (torino)	Não aplicável	Não aplicável
Exec. Real	≈ 25% (brisbane), 38-60% (torino)	DD, Twirling	TREX, PEC, ZNE, PEA

Fonte: do autor

A análise comparativa dos resultados apresentados no Quadro 5.1 evidencia a degradação progressiva do desempenho do Algoritmo de Grover à medida que se aumenta a exposição ao ruído e às imperfeições experimentais. No cenário ideal, o circuito atingiu a probabilidade teórica esperada de aproximadamente 96% para o estado marcado, confirmando a coerência entre o modelo matemático e a implementação computacional. Ao incorporar modelos realistas de ruído com o AerSimulator, observou-se uma redução acentuada dessa probabilidade – cerca de 46% para o modelo baseado no backend `ibm_brisbane` e 59% para o `ibm_torino`. Essa diferença já antecipa a superioridade observada no *hardware* real do `ibm_torino`, refletindo sua menor taxa de erro de portas e estabilidade temporal mais consistente.

Nas execuções em *hardware* real, os resultados confirmam o padrão previsto pelos simuladores ruidosos, mas com degradação adicional – aproximadamente 25% no `ibm_brisbane` e valores variando entre 38% e 60% no `ibm_torino`, dependendo da técnica de mitigação aplicada. Essa diferença é tecnicamente relevante: enquanto o `ibm_brisbane` apresentou respostas inconsistentes mesmo após mitigação, o `ibm_torino` manteve comportamento mais estável e previsível, reforçando sua melhor adequação a experimentos que exigem coerência temporal sustentada. Além disso, a proximidade entre os resultados mitigados do `ibm_torino` e os simulados com ruído realista indica que os modelos de ruído utilizados pelo AerSimulator reproduzem, de forma

qualitativa, as principais fontes de erro do dispositivo, embora ainda não capturem fenômenos correlacionados mais sutis, como *crosstalk* e erros de fase acumulativos. Das e Glosch (2025) destacam que a qualidade dos qubits e a eficácia dos códigos de correção de erros variam significativamente ao longo do tempo e entre dispositivos, sendo fortemente influenciadas por fatores como calibração e arquitetura física.

A integração de técnicas de supressão e mitigação também revelou nuances importantes. Estratégias de supressão como *Dynamical Decoupling* e *Pauli Twirling*, quando aplicadas isoladamente, mostraram ganhos modestos e, em alguns casos, até degradação do desempenho, o que está em consonância com as observações anteriores na Seção ???. Em contrapartida, técnicas de mitigação aplicadas após a execução – especialmente a *Zero-Noise Extrapolation* (ZNE) combinada à *Probabilistic Error Amplification* (PEA) – apresentaram os melhores resultados, atingindo até 59,76% no `ibm_torino`. Isso demonstra que abordagens híbridas, que combinam amplificação e extração de ruído, podem recuperar de forma significativa a fidelidade perdida, superando até mesmo o desempenho de combinações múltiplas mais complexas como *TREX + Twirling + ZNE + DD*, cuja sobreposição de efeitos reduziu o ganho esperado. O trabalho recente de Xu *et al.* 2025 demonstra que abordagens como *Pauli Twirling* e *Dynamical Decoupling* são eficazes na supressão de erros coerentes e de despolarização em qubits ociosos, enquanto técnicas de mitigação como *ZNE* e *PEC* têm se mostrado promissoras na reconstrução de resultados ideais a partir de execuções ruidosas. Dessa forma, constata-se que, embora o ruído ainda imponha limitações significativas, o uso coordenado de estratégias de supressão e mitigação é capaz de reduzir de forma mensurável o impacto dos erros quânticos e aproximar os resultados experimentais dos valores teóricos esperados.

5.5 Análise Qualitativa dos Métodos de Supressão e Mitigação

A análise qualitativa dos métodos aplicados confirma que a eficácia das estratégias depende fortemente do equilíbrio entre o tipo de ruído dominante, a profundidade do circuito e a arquitetura da QPU utilizada. Entre os métodos de supressão, o *Dynamical Decoupling* (DD) demonstrou comportamento ambíguo: embora capaz de reduzir a decoerência durante períodos de ociosidade, seu uso em circuitos de Grover – caracterizados por alta densidade de operações – tende a aumentar

a duração total da execução, expondo o sistema a novos erros. Isso explica por que, nos experimentos realizados, o DD isolado apresentou desempenho inferior ao caso sem mitigação e está alinhado com observações recentes sobre a introdução de ruído adicional por sequências DD mal ajustadas em *hardware* real (RAHMAN; EGGER; ARENZ, 2024; TONG; ZHANG; POKHAREL, 2025). O *Pauli Twirling*, por outro lado, mostrou-se mais consistente, pois converte erros coerentes sistemáticos em ruídos estocásticos de tipo Pauli, mais facilmente tratáveis por técnicas como ZNE e PEC. Sua aplicação contribuiu para reduzir as flutuações de fidelidade entre execuções consecutivas, especialmente no `ibm_torino` (Mitiq Project, 2025; IBM Quantum, 2025e).

Em relação às técnicas de mitigação, os resultados apontam o *TREX* como um dos métodos mais eficientes em termos de custo-benefício, apresentando melhora notável na correção de erros de leitura sem introduzir sobrecarga significativa de processamento. Segundo a documentação da *IBM Quantum*, o *TREX* é especialmente eficaz na mitigação de erros de leitura por meio de modelos treinados com dados reais do backend, oferecendo bons resultados com baixo custo computacional (IBM Quantum, 2025e). A *Zero-Noise Extrapolation* (ZNE), por sua vez, confirmou sua utilidade como mecanismo de reconstrução de resultados ideais a partir de execuções com diferentes níveis de ruído artificialmente ampliados. Estudos como o de Cai *et al.* 2022 destacam que a precisão da ZNE depende fortemente da estabilidade estatística do backend e da qualidade das amostras, sendo mais sensível em dispositivos sujeitos a flutuações de calibração. A *Probabilistic Error Amplification* (PEA) mostrou-se especialmente eficaz quando combinada com ZNE, potencializando o efeito da extração e permitindo correções mais robustas em regimes de ruído intermediário (IBM Quantum, 2025e). Já a *Probabilistic Error Cancellation* (PEC) manteve-se como uma técnica teoricamente precisa, capaz de fornecer estimativas não enviesadas, mas limitada em termos práticos devido ao custo exponencial em número de amostras requerido para convergência – fator que restringe sua aplicabilidade em dispositivos NISQ com recursos limitados (CAI et al., 2022; APXML Quantum Learning, 2025).

De modo geral, os resultados corroboram a interpretação de que a mitigação de erros eficaz não depende da simples acumulação de técnicas, mas sim da escolha criteriosa de combinações complementares e compatíveis com o perfil do circuito e da QPU. No contexto deste trabalho, o `ibm_torino` beneficiou-se claramente da sinergia entre ZNE e PEA, alcançando o melhor equilí-

brio entre custo computacional e fidelidade. Já combinações excessivas – como a inclusão simultânea de *DD*, *Twirling*, *TREX* e *ZNE* – resultaram em sobreposição de efeitos e aumento desnecessário da profundidade, reduzindo o ganho global. Assim, esta análise qualitativa reforça que, para algoritmos sensíveis à coerência como o de Grover, abordagens híbridas moderadas tendem a ser mais eficazes do que estratégias de mitigação múltiplas e complexas, especialmente quando aplicadas em arquiteturas NISQ com recursos limitados.

Os métodos de supressão e mitigação de ruído desempenharam papéis complementares na melhoria da fidelidade dos resultados. Enquanto as técnicas de supressão atuaram na redução do ruído durante a execução, as técnicas de mitigação compensaram os efeitos residuais no pós-processamento. A combinação de métodos, como *TREX*, *ZNE* e *PEC*, mostrou-se promissora, embora com custos computacionais adicionais. Para aplicações práticas, a escolha dos métodos deve considerar o equilíbrio entre custo e benefício, bem como as características específicas do dispositivo e do circuito.

5.6 Resumo e conclusões

Este capítulo apresentou e discutiu os resultados obtidos para o Algoritmo de Grover implementado em um circuito de quatro qubits, considerando três cenários distintos: simulação ideal, simulação com ruído e execução em *hardware* quântico real, nos dispositivos *ibm_brisbane* e *ibm_torino*. No regime ideal, com três iterações ($k = 3$) conforme o resultado da Equação 4.5, observou-se a amplificação prevista do estado marcado, atingindo aproximadamente 96% de probabilidade. A introdução de modelos de ruído via AerSimulator reduziu significativamente essa taxa de sucesso, refletindo a influência de erros de porta e decoerência. Quando executado em dispositivos reais, o desempenho sofreu nova redução, atribuída tanto à limitação intrínseca das QPUs quanto à variabilidade das calibrações diárias e à necessidade de mapeamento lógico–físico dos qubits.

Os resultados confirmam três observações principais: primeiro, o comportamento ideal previsto teoricamente é reproduzido de forma precisa nas simulações sem ruído; segundo, as simulações com ruído aproximam qualitativamente o desempenho observado em *hardware*, mas ainda apresentam discrepâncias numéricas devido a efeitos não capturados nos modelos e à natureza di-

nâmica das calibrações; e terceiro, a aplicação de técnicas (combinadas ou não) de supressão (como *Dynamical Decoupling* e *Pauli Twirling*) e de mitigação (como *Zero-Noise Extrapolation*, *Probabilistic Error Cancellation*, *Probabilistic Error Amplification* e TREX) permitiu recuperar parte da fidelidade perdida, mesmo que ao custo de aumento no número de execuções e maior complexidade de pós-processamento.

Em termos de aplicabilidade prática, os resultados indicam que o Algoritmo de Grover pode alcançar desempenho satisfatório em problemas de pequena escala quando executado em dispositivos NISQ, desde que sejam aplicadas estratégias adequadas de otimização e mitigação. Contudo, a presença de ruído ainda limita ganhos expressivos em circuitos maiores, evidenciando a necessidade de abordagens híbridas que integrem técnicas de calibração adaptativa, mitigação probabilística e aprendizado automático. Recomenda-se que estudos futuros explorem a variabilidade temporal das calibrações entre diferentes datas e backends, bem como análises sistemáticas de custo-benefício para combinações específicas de mitigação – como ZNE + PEA – e extensões para circuitos de cinco ou seis qubits.

Assim, embora o Algoritmo de Grover mantenha sua eficiência teórica, sua execução prática em QPUs reais exige uma combinação criteriosa de técnicas de supressão e mitigação. Os resultados aqui obtidos reforçam achados recentes da literatura sobre tolerância ao ruído em sistemas NISQ e apontam para caminhos promissores envolvendo técnicas emergentes, como *quantum switches* (SRIVASTAVA et al., 2025) e métodos de aprendizado de máquina para correção adaptativa (SCIENCE, 2025).

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho de conclusão de curso investigou, de forma empírica e rigorosa, a aplicação e a eficácia de métodos de mitigação e supressão de ruídos quânticos em processadores de *hardware* real (QPUs) da arquitetura IBM Quantum, tendo o Algoritmo de Grover como principal objeto de teste em regime NISQ (*Noisy Intermediate-Scale Quantum*). A pesquisa evidenciou conquistas significativas ao demonstrar que a mitigação de ruído não é apenas um complemento, mas uma necessidade crítica para extrair valor de *backends* atuais.

A principal conquista reside na validação de que a combinação seletiva e complementar de técnicas supera o desempenho das técnicas isoladas, identificando a sinergia entre o *Zero-Noise Extrapolation* (ZNE) e o *Probabilistic Error Amplification* (PEA) como a estratégia mais robusta para o circuito de Grover, elevando a fidelidade do estado-alvo para um patamar superior ao obtido em execuções sem mitigação. Em essência, o estudo comprova que, ao invés da acumulação indiscriminada de métodos, a escolha criteriosa de técnicas que se compensam mutuamente é o caminho mais eficaz para o aumento da fidelidade, alinhando os resultados práticos com as considerações teóricas da otimização de circuitos.

Contudo, o estudo também revelou limitações importantes, fornecendo reconsiderações fundamentais. O desempenho abaixo do esperado da combinação máxima de técnicas (incluindo *Dynamical Decoupling* – DD) demonstrou que a sobreposição de efeitos de mitigação e o aumento excessivo da profundidade do circuito podem, na verdade, degradar a fidelidade geral. Este fato se relaciona diretamente à teoria que suporta o DD, cuja ineeficácia foi verificada em circuitos ativos e densos como o de Grover, onde a falta de ociosidade de *qubits* faz com que a sobrecarga dos pulsos de DD gere mais ruído do que suprime, validando o princípio físico de sua aplicação limitada.

Além disso, a comparação entre diferentes *backends* (`ibm_torino` e `ibm_brisbane`) reforçou a crucialidade da dependência do *hardware*, confirmando que a variabilidade do ruído intrínseco de cada QPU é um fator não negligenciável na obtenção de resultados confiáveis.

Como sugestão para trabalhos futuros, é imperativo investigar a otimização de métodos de extração mais avançados dentro da combinação ZNE - PEA, bem como expandir a análise para QPUs baseadas em tecnologias alternativas (por exemplo, íons presos), verificando a universalidade das conclusões obtidas. Por fim, aprofundar a pesquisa em soluções *hardware-aware*, como

sequências de DD adaptadas ao ruído e à topologia do circuito de Grover, pode pavimentar o caminho para a mitigação de ruído na fronteira entre a mitigação e a correção de erros, solidificando o presente trabalho como uma contribuição valiosa para o desenvolvimento de aplicações quânticas na atual era tecnológica.

REFERÊNCIAS

- APXML Quantum Learning. **Quantum Error Mitigation | ZNE & PEC**. 2025. Online course material. Disponível em: <<https://apxml.com/courses/fundamentals-quantum-machine-learning/chapter-7-hardware-error-mitigation-qml/quantum-error-mitigation-techniques>>.
- CAI, Z. et al. Quantum error mitigation. **arXiv preprint arXiv:2210.00921**, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2210.00921>>.
- CHEN, E. H. et al. **Disambiguating Pauli noise in quantum computers**. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2505.22629>>.
- CUZZIOL, M. Superposição e paralelismo quânticos: possíveis efeitos em algoritmos. **TECCOGS: Revista Digital de Tecnologias Cognitivas**, v. 1, n. 27, p. 28–38, dec 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.23925/1984-3585.2023i27p28-38>>.
- DAS, S.; GLOSH, S. Optimization of quantum error correcting code under temporal variation of qubit quality. **arXiv preprint arXiv:2505.06165**, 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2505.06165>>.
- DEUTSCH, D. Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 400, n. 1818, p. 97–117, 1985.
- EITCA, A. **Como entender o conceito de supercondutividade em termos simples em relação aos qubits supercondutores e aos computadores quânticos?** 2024. Disponível em: <<https://pt.eitca.org/intelig%C3%A1ncia-artificial/eitc-ai-tfqml-tensorflow-aprendizado-de-m%C3%A1quina-qu%C3%A1ntico/implementando-computador-qu%C3%A1ntico/construir-um-computador-qu%C3%A1ntico-com-qubits-supercondutores/como-entender-o-conceito-de-supercondutividade-em-termos-simples-em-rela%C3%A7%C3%A3o-a-qubits-supercondutores-e-computadores-qu%C3%A1nticos>>.
- EMERSON, J.; ALICKI, R.; ZYCKOWSKI, K. Scalable noise estimation with random unitary operators. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, IOP Publishing, v. 7, n. 10, p. S347–S352, 2005.
- ENDO, S.; BENJAMIN, S. C.; LI, Y. Practical quantum error mitigation for near-future applications. **Phys. Rev. X**, American Physical Society, v. 8, p. 031027, Jul 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031027>>.
- EVERT, B. et al. Syncopated dynamical decoupling for suppressing crosstalk in quantum circuits. **arXiv preprint**, 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2403.07836>>.
- FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International Journal of Theoretical Physics**, v. 21, n. 6, p. 467–488, 1982. ISSN 1572-9575. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02650179>>.

GIURGICA-TIRON, T. et al. Digital zero noise extrapolation for quantum error mitigation. In: **2020 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 306–316.

GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: ACM. **Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing**. [S.l.], 1996. p. 212–219.

IBM Quantum. **Collect2qBlocks - Qiskit Transpiler Pass**. 2025. Acessado em: 25 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.transpiler.passes. Collect2qBlocks>>.

IBM Quantum. **CommutativeCancellation - Qiskit Transpiler Pass**. 2025. Acessado em: 25 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.transpiler.passes. CommutativeCancellation>>.

IBM Quantum. **ConsolidateBlocks - Qiskit Transpiler Pass**. 2025. Acessado em: 25 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.transpiler.passes. ConsolidateBlocks>>.

IBM Quantum. **Error mitigation and suppression techniques**. 2025. <<https://docs.quantum.ibm.com/guides/error-mitigation-and-suppression-techniques>>. Acessado em: 5 de abril de 2025.

IBM Quantum. **Error mitigation and suppression techniques**. 2025. IBM Quantum Documentation. Disponível em: <<https://quantum.cloud.ibm.com/docs/en/guides/error-mitigation-and-suppression-techniques>>.

IBM Quantum. **Error mitigation and suppression techniques: Dynamical Decoupling**. 2025. Acessado em: 26 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/guides/error-mitigation-and-suppression-techniques#dynamical-decoupling>>.

IBM Quantum. **Error mitigation and suppression techniques: Probabilistic Error Cancellation (PEC)**. 2025. <<https://docs.quantum.ibm.com/guides/error-mitigation-and-suppression-techniques#probabilistic-error-cancellation-pec>>. Acessado em: 19 de abril de 2025.

IBM Quantum. **Get backend information with Qiskit**. 2025. <https://qiskit.org/documentation/tutorials/circuits_advanced/08_gathering_system_information.html>. Accessed: 2025-05-24.

IBM Quantum. **IBM Quantum Computers**. 2025. <<https://quantum.cloud.ibm.com/computers>>. Accessed: 2025-08-05.

IBM Quantum. **IBM Quantum Platform**. 2025. <<https://quantum.cloud.ibm.com/>>. Accessed: 2025-08-05.

IBM Quantum. **InverseCancellation - Qiskit Transpiler Pass**. 2025. Acessado em: 14 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.transpiler.passes. InverseCancellation>>.

IBM Quantum. **Optimize1qGatesDecomposition - Qiskit Transpiler Pass**. 2025. Acessado em: 14 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.transpiler.passes.Optimize1qGatesDecomposition>>.

IBM Quantum. **Transpiler Stages - Optimization Stage**. 2025. Acessado em: 14 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/guides/transpiler-stages#optimization-stage>>.

IBM Quantum. **UnitarySynthesis - Qiskit Transpiler Pass**. 2025. Acessado em: 25 mar. 2025. Disponível em: <<https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/qiskit.transpiler.passes.UnitarySynthesis>>.

JESUS, G. F. d. et al. Computação quântica: uma abordagem para a graduação usando o qiskit. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, p. e20210033, 2021. Acesso em 11 out. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0033>>.

JNANE, H. et al. Quantum error mitigated classical shadows. **PRX Quantum**, American Physical Society, v. 5, p. 010324, Feb 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.5.010324>>.

JOZSA, R. Fidelity for mixed quantum states. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 41, n. 12, p. 2315–2323, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/09500349414552171>>.

KIM, Y. et al. Scalable error mitigation for noisy quantum circuits produces competitive expectation values. **Nature Physics**, v. 19, n. 5, p. 752–759, 2023. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41567-022-01914-3>>.

LÓPEZ, M.; WU, A.; LIAN-AO. Protectability of ibmq qubits by dynamical decoupling technique. **Symmetry**, v. 15, n. 1, 2023. ISSN 2073-8994. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2073-8994/15/1/62>>.

Mitiq Project. **Zero-Noise Extrapolation with Pauli Twirling**. 2025. Mitiq Documentation. Disponível em: <https://mitiq.readthedocs.io/en/stable/examples/pt_zne.html>.

NEUMANN, J. V. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. Princeton University Press, 1955. (Goldstine Printed Materials). ISBN 9780691028934. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JLyCo3RO4qUC>>.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition**. [S.I.]: Cambridge University Press, 2010.

PRESKILL, J. Quantum Computing in the NISQ era and beyond. **Quantum**, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 2, p. 79, ago. 2018. ISSN 2521-327X. Disponível em: <<https://doi.org/10.22331/q-2018-08-06-79>>.

Qiskit Community. **Grover's Algorithm — Qiskit Textbook**. 2023. <<https://github.com/Qiskit/textbook/blob/main/notebooks/ch-algorithms/grover.ipynb>>. Acessado em: 19 de abril de 2025.

Qiskit Development Team. **AerSimulator — Qiskit Aer Documentation**. 2025. <https://qiskit.github.io/qiskit-aer/stubs/qiskit_aer.AerSimulator.html#aersimulator>. Accessed: 2025-05-24.

Qiskit Development Team. **Qiskit Aer Documentation**. 2025. <<https://qiskit.github.io/qiskit-aer/index.html>>. Accessed: 2025-05-24.

QUANTUM, I. **QPU Information Guide**. 2025. Accessed October 2025. Disponível em: <<https://quantum.cloud.ibm.com/docs/guides/qpu-information>>.

RAHMAN, A.; EGGER, D. J.; ARENZ, C. Learning how to dynamically decouple. **arXiv preprint arXiv:2405.08689**, 2024. Submitted December 6, 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2405.08689>>.

RIGOLIN, G. Emaranhamento quântico. **Physicae**, v. 7, n. 1, p. 1–7, jul. 2008. Disponível em: <<https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/physicae/article/view/13410>>.

SAFI, H. **qsw_crosstalk_mitigation**. 2025. GitHub repository. Commit at time of access. Disponível em: <https://github.com/HilaSafi/qsw_crosstalk_mitigation>.

SCIENCE, S. **Computação Quântica e Estratégias de Mitigação de Ruído**. 2025. Site Simple Science. 9 min ler. Disponível em: <<https://scisimple.com/pt/articles/2025-08-19-computacao-quantica-e-estrategias-de-mitigacao-de-ruido--a98n1y7>>.

SHOR, P. W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In: **IEEE Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**. [S.l.], 1994. p. 124–134.

SILVA, M. H. F. da; JESUS, G. F. d.; CRUZ, C. Effect of pure dephasing quantum noise in the quantum search algorithm using atos quantum assembly. **Entropy**, v. 26, n. 8, 2024. ISSN 1099-4300. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1099-4300/26/8/668>>.

SIMON, D. On the power of quantum computation. In: **Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science**. [S.l.: s.n.], 1994. p. 116–123.

SRIVASTAVA, S. et al. Using quantum switches to mitigate noise in grover's search algorithm. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 58, n. 10, p. 105304, mar. 2025. ISSN 1751-8121. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ad9efc>>.

TAKAGI, R. Optimal resource cost for error mitigation. **Phys. Rev. Res.**, American Physical Society, v. 3, p. 033178, Aug 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.3.033178>>.

TAKAGI, R.; TAJIMA, H.; GU, M. Universal sampling lower bounds for quantum error mitigation. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 131, p. 210602, Nov 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.131.210602>>.

TEMME, K.; BRAVYI, S.; GAMBETTA, J. M. Error mitigation for short-depth quantum circuits. **Physical Review Letters**, APS, v. 119, n. 18, p. 180509, 2017.

TONG, C.; ZHANG, H.; POKHAREL, B. Empirical learning of dynamical decoupling on quantum processors. **PRX Quantum**, American Physical Society, v. 6, p. 030319, Aug 2025. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/h7pq-s159>>.

Unitary Fund. **Mitiq Documentation: Probabilistic Error Cancellation**. 2025. <<https://mitiq.readthedocs.io/en/stable/guide/error-mitigation.html#probabilistic-error-cancellation>>. Acessado em: 19 de abril de 2025.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). **Primeiro Período - 1947 - Transistor**. 2025. Acesso em: 20 fev. 2025. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/mvs/Periodo01-1947-Transistor.html>>.

WU, X. et al. Circuit optimization of grover quantum search algorithm. **Quantum Information Processing**, v. 22, n. 1, p. 69, 2023. ISSN 1573-1332. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11128-022-03727-y>>.

XU, X.-Y.; DING, C.; BAO, W.-S. **Efficient Measurement Error Mitigation with Subsystem-Balanced Pauli Twirling**. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2509.17298>>.

YANG, B.; RAYMOND, R.; UNO, S. Efficient quantum readout-error mitigation for sparse measurement outcomes of near-term quantum devices. **arXiv preprint**, 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/2201.11046v3.pdf>>.

APÊNDICE A – Demonstração do Circuito

Com a finalidade de entender o que acontece em cada parte do circuito + será feita a demonstração passo a passo das operações a cada camada.

Seja $|\psi\rangle$ o estado inicial do espaço formado pelos 4 qubits + com valor inicial dado por $|\psi\rangle = |0000\rangle$. Aplicaremos portas *Hadamard* em cada qubit como parte da primeira etapa do Algoritmo de Grover: a preparação inicial. Essa operação resulta em:

1. Preparação inicial: aplicação das portas *H*'s (Figura 1):

$$\begin{aligned} H^{\otimes 4} |\psi\rangle = |\psi_1\rangle &= \frac{1}{4} \left(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle \right. \\ &\quad \left. + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + |1111\rangle \right) \end{aligned}$$

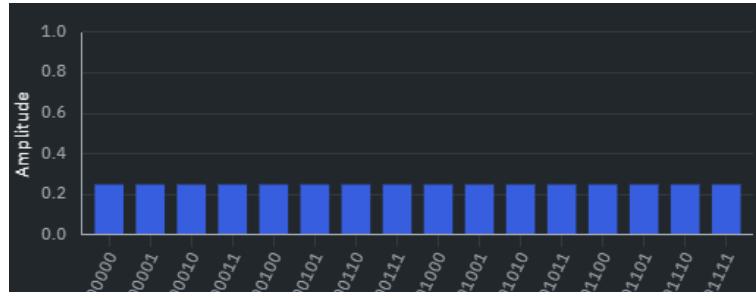


Figura 1 – Aplicação das portas *H*'s na preparação inicial.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

2. Aplicar o oráculo U_f que marca o estado $|1111\rangle$ invertendo seu sinal (Figura 2):

$$\begin{aligned} U_f |\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle &= \frac{1}{4} \left(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle \right. \\ &\quad \left. + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - |1111\rangle \right) \end{aligned}$$

3. Início da operação de difusão: aplicar portas *Hadamard* (Figura 3):

$$\begin{aligned} H^{\otimes 4} |\psi_2\rangle = |\psi_3\rangle &= \frac{1}{8} \left(7 |0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle \right. \\ &\quad \left. + |0111\rangle + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - |1111\rangle \right) \end{aligned}$$

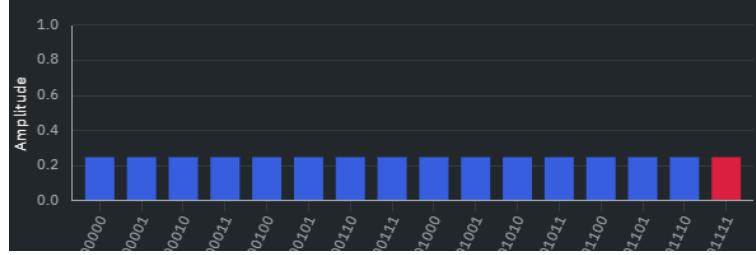


Figura 2 – Aplicação do oráculo U_f , que inverte o sinal do estado $|1111\rangle$.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

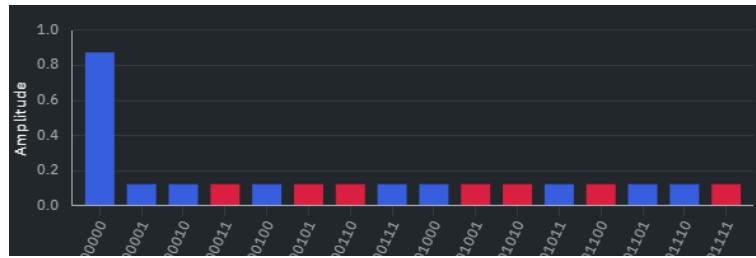


Figura 3 – Aplicação das portas Hadamard no início da operação de difusão.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

4. Aplicar portas X (Figura 4):

$$\begin{aligned}
 X^{\otimes 4} |\psi_3\rangle = |\psi_4\rangle &= \frac{1}{8} \left(7|1111\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle - |1100\rangle + |1011\rangle - |1010\rangle - |1001\rangle + |1000\rangle \right. \\
 &\quad \left. + |0111\rangle - |0110\rangle - |0101\rangle + |0100\rangle - |0011\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle - |0000\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(-|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle + |0111\rangle \right. \\
 &\quad \left. + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + 7|1111\rangle \right)
 \end{aligned}$$

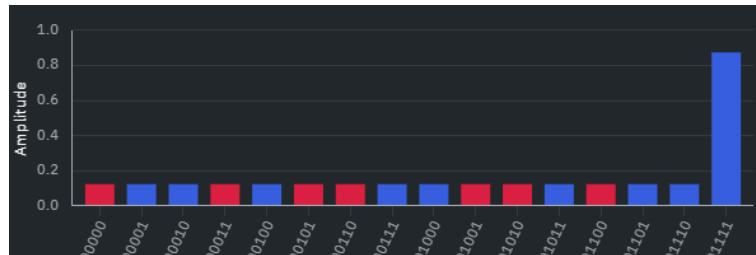


Figura 4 – Aplicação das portas X no operador de difusão.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

5. Aplicar a porta MCZ (Figura 5):

$$MCZ |\psi_4\rangle = |\psi_5\rangle = \frac{1}{8} \left(-|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - 7|1111\rangle \right)$$

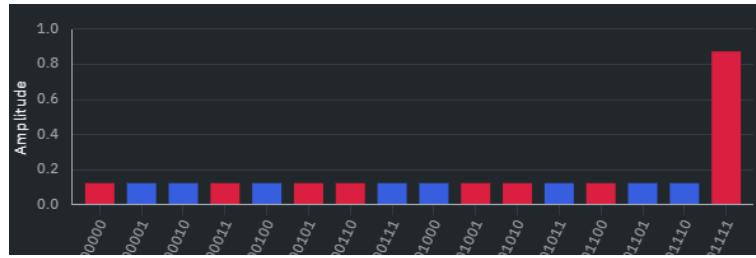


Figura 5 – Aplicação da porta MCZ no operador de difusão.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

6. Aplicar portas X novamente (Figura 6):

$$\begin{aligned} X^{\otimes 4} |\psi_5\rangle = |\psi_6\rangle &= \frac{1}{8} \left(-|1111\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle - |1100\rangle + |1011\rangle - |1010\rangle - |1001\rangle + |1000\rangle + |0111\rangle - |0110\rangle - |0101\rangle + |0100\rangle - |0011\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle - 7|0000\rangle \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(-7|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - |1111\rangle \right) \end{aligned}$$

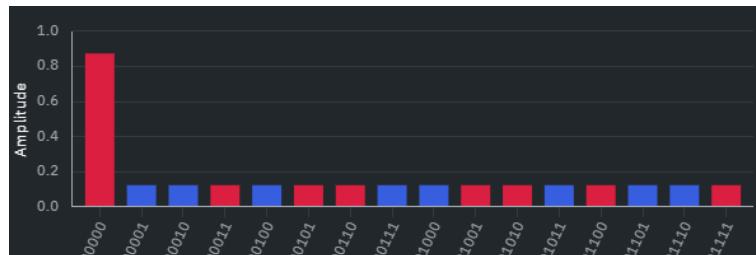


Figura 6 – Segunda aplicação das portas X no operador de difusão.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

7. Aplicar portas *Hadamard* novamente (Figura 7):

$$\begin{aligned}
 H^{\otimes 4} |\psi_6\rangle &= |\psi_7\rangle = \frac{1}{16} \left(-3|0000\rangle - 3|0001\rangle - 3|0010\rangle - 3|0011\rangle - 3|0100\rangle - 3|0101\rangle \right. \\
 &\quad - 3|0110\rangle - 3|0111\rangle - 3|1000\rangle - 3|1001\rangle - 3|1010\rangle \\
 &\quad \left. - 3|1011\rangle - 3|1100\rangle - 3|1101\rangle - 3|1110\rangle - 11|1111\rangle \right) \\
 &= -\frac{3}{16} \left(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle \right. \\
 &\quad \left. + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + \frac{11}{3}|1111\rangle \right)
 \end{aligned}$$

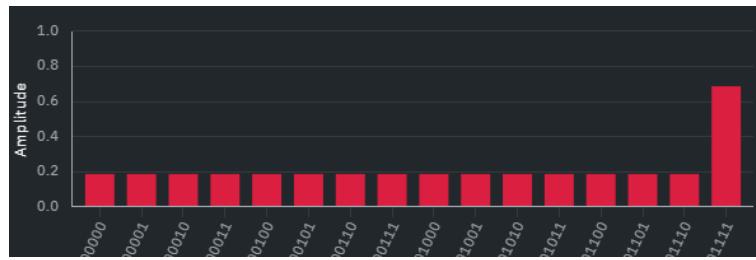


Figura 7 – Aplicação final das portas *Hadamard* na primeira iteração.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

O sétimo passo finaliza a primeira iteração, mas precisamos repetir o processo mais duas vezes.

8. Marcar novamente o estado buscado pelo oráculo U_f (Figura 8):

$$\begin{aligned}
 U_f |\psi_7\rangle &= |\psi_8\rangle = -\frac{3}{16} \left(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle \right. \\
 &\quad + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - \frac{11}{3}|1111\rangle \left. \right)
 \end{aligned}$$

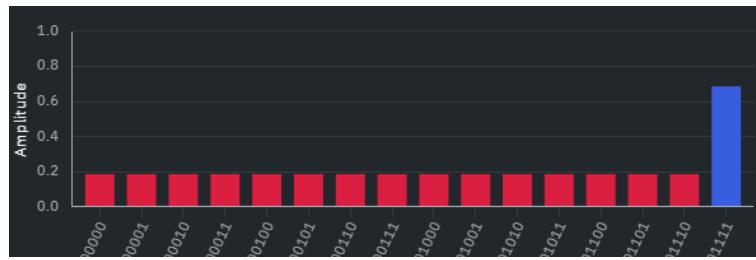


Figura 8 – Aplicação do oráculo U_f na segunda iteração.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

Após o oráculo, devemos aplicar o operador de difusão.

9. Aplicar portas *Hadamard* (Figura 9):

$$H^{\otimes 4} |\psi_8\rangle = |\psi_9\rangle = \frac{7}{32} \left(-\frac{17}{7} |0000\rangle - |0001\rangle - |0010\rangle + |0011\rangle - |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle - |1101\rangle - |1110\rangle + |1111\rangle \right)$$

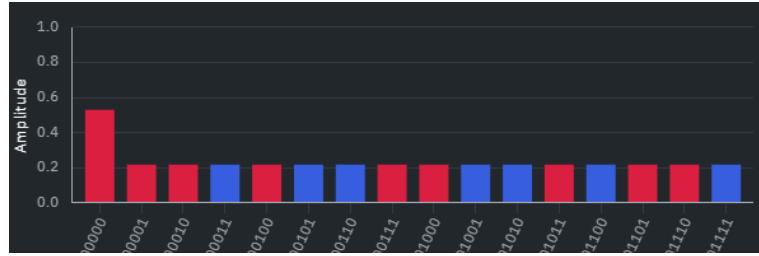


Figura 9 – Aplicação das portas *Hadamard* na operação de difusão da segunda iteração.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

10. Aplicar portas *X* (Figura 10):

$$\begin{aligned} X^{\otimes 4} |\psi_9\rangle = |\psi_{10}\rangle &= \frac{7}{32} \left(-\frac{17}{7} |1111\rangle - |1110\rangle - |1101\rangle + |1100\rangle - |1011\rangle + |1010\rangle + |1001\rangle - |1000\rangle - |0111\rangle + |0110\rangle + |0101\rangle - |0100\rangle + |0011\rangle - |0010\rangle - |0001\rangle + |0000\rangle \right) \\ &= \frac{7}{32} \left(|0000\rangle - |0001\rangle - |0010\rangle + |0011\rangle - |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle - |1101\rangle - |1110\rangle - \frac{17}{7} |1111\rangle \right) \end{aligned}$$

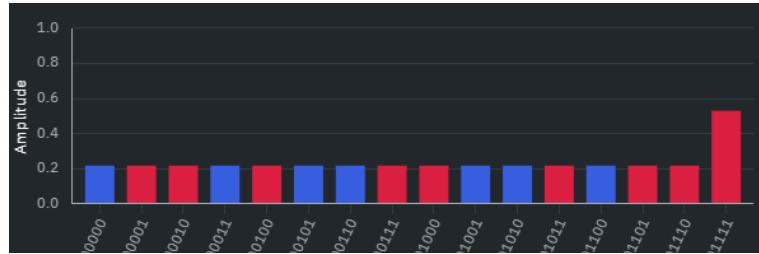


Figura 10 – Aplicação das portas *X* no operador de difusão da segunda iteração.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

11. Aplicar porta MCZ (Figura 11):

$$MCZ|\psi_{10}\rangle = |\psi_{11}\rangle = \frac{7}{32} \left(|0000\rangle - |0001\rangle - |0010\rangle + |0011\rangle - |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle - |1101\rangle - |1110\rangle + \frac{17}{7} |1111\rangle \right)$$

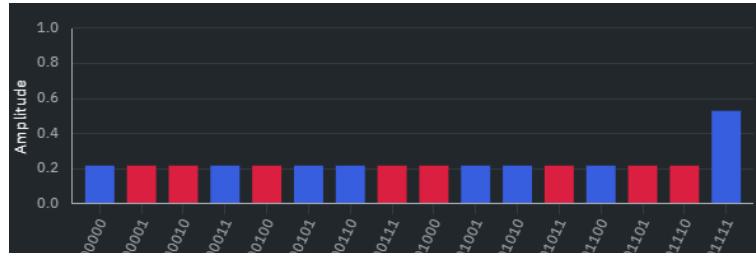


Figura 11 – Aplicação da porta MCZ na segunda iteração do operador de difusão.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

12. Aplicar portas X novamente (Figura 12):

$$\begin{aligned} X^{\otimes 4}|\psi_{11}\rangle &= |\psi_{12}\rangle = \frac{7}{32} \left(|1111\rangle - |1110\rangle - |1101\rangle + |1100\rangle - |1011\rangle + |1010\rangle + |1001\rangle - |1000\rangle - |0111\rangle + |0110\rangle + |0101\rangle - |0100\rangle + |0011\rangle - |0010\rangle - |0001\rangle + \frac{17}{7} |0000\rangle \right) \\ &= \frac{7}{32} \left(\frac{17}{7} |0000\rangle - |0001\rangle - |0010\rangle + |0011\rangle - |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle - |0111\rangle - |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle - |1011\rangle + |1100\rangle - |1101\rangle - |1110\rangle + |1111\rangle \right) \end{aligned}$$

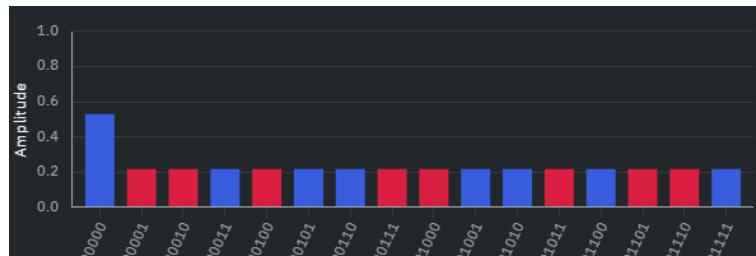


Figura 12 – Segunda aplicação das portas X na segunda iteração do operador de difusão.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

13. Para finalizar a segunda iteração, aplicamos novamente as portas *Hadamard*:

$$H^{\otimes 4} |\psi_{12}\rangle = |\psi_{13}\rangle = \frac{5}{64} \left(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + \frac{61}{5} |1111\rangle \right)$$

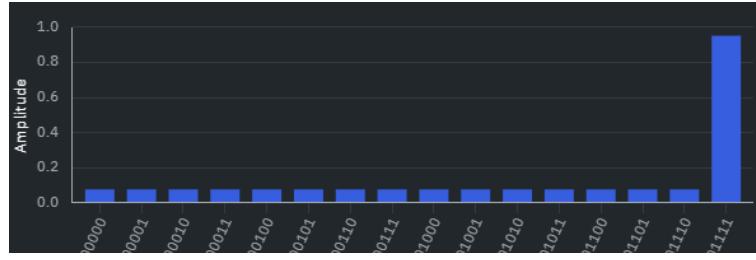


Figura 13 – Aplicação final das portas *Hadamard* na segunda iteração.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

O décimo terceiro passo finaliza a segunda iteração, mas é necessário repetir o processo mais uma vez.

14. Aplicar o oráculo U_f mais uma vez (Figura 14):

$$U_f |\psi_{13}\rangle = |\psi_{14}\rangle = \frac{5}{64} (|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - \frac{61}{5} |1111\rangle)$$

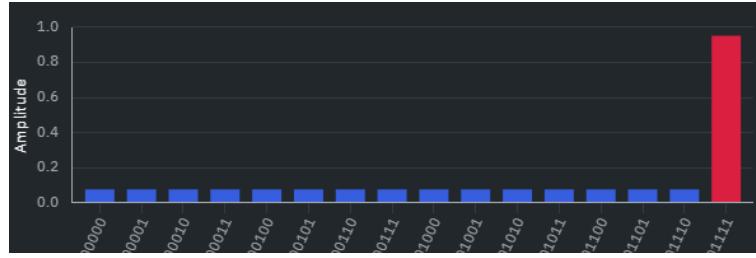


Figura 14 – Aplicação do oráculo U_f na terceira iteração.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

15. Aplicar portas *Hadamard* (Figura 15):

$$H^{\otimes 4} |\psi_{14}\rangle = |\psi_{15}\rangle = \frac{33}{128} \left(\frac{7}{33} |0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - |1111\rangle \right)$$

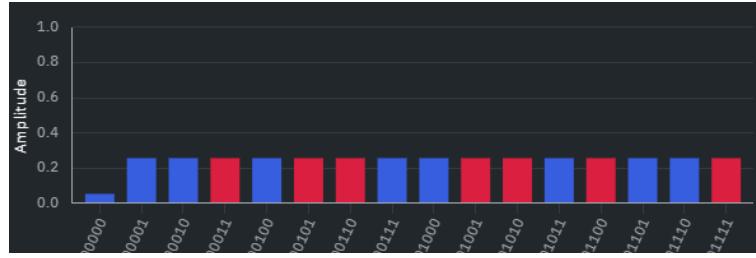


Figura 15 – Aplicação das portas *Hadamard* na operação de difusão da terceira iteração.

Fonte: IBM-*Quantum Learning / Composer*.

16. Aplicar portas *X* (Figura 16):

$$\begin{aligned}
 X^{\otimes 3} |\psi_{15}\rangle = |\psi_{16}\rangle &= \frac{33}{128} \left(\frac{7}{33} |1111\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle - |1100\rangle + |1011\rangle - |1010\rangle - |1001\rangle \right. \\
 &\quad + |1000\rangle + |0111\rangle - |0110\rangle - |0101\rangle - |0100\rangle - |0011\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle - |0000\rangle \Big) \\
 &= \frac{33}{128} \left(-|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle + |0111\rangle \right. \\
 &\quad \left. + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle + \frac{7}{33} |1111\rangle \right)
 \end{aligned}$$

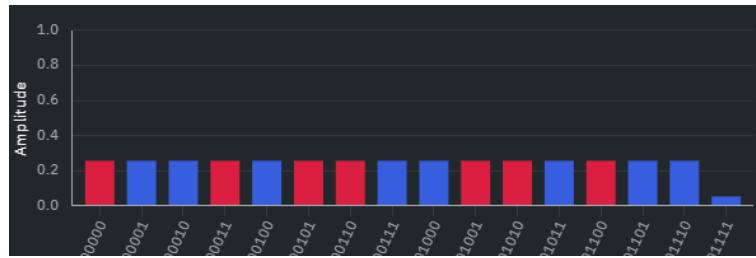


Figura 16 – Aplicação das portas *X* no operador de difusão da terceira iteração.

Fonte: IBM-*Quantum Learning / Composer*.

17. Aplicar porta *MCZ* (Figura 17):

$$\begin{aligned}
 MCZ |\psi_{16}\rangle = |\psi_{17}\rangle &= \frac{33}{128} \left(-|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle + |0100\rangle - |0101\rangle \right. \\
 &\quad - |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle - |1001\rangle - |1010\rangle \\
 &\quad \left. + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - \frac{7}{33} |1111\rangle \right)
 \end{aligned}$$

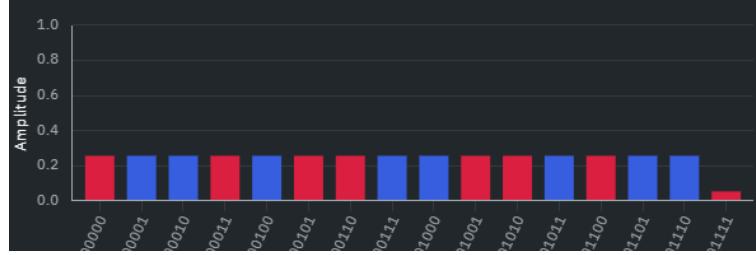


Figura 17 – Aplicação da porta MCZ na terceira iteração do operador de difusão.

Fonte: IBM-*Quantum Learning / Composer*.

18. Aplicar portas X (Figura 18):

$$\begin{aligned}
 X^4 |\psi_{17}\rangle = |\psi_{18}\rangle &= \frac{33}{128} \left(-|1111\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle - |1100\rangle + |1011\rangle \right. \\
 &\quad - |1010\rangle - |1001\rangle + |1000\rangle + |0111\rangle - |0110\rangle - |0101\rangle \\
 &\quad \left. + |0100\rangle - |0011\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle - \frac{7}{33} |0000\rangle \right) \\
 &= \frac{33}{128} \left(-\frac{7}{33} |0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle - |0011\rangle \right. \\
 &\quad + |0100\rangle - |0101\rangle - |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle - |1001\rangle \\
 &\quad \left. - |1010\rangle + |1011\rangle - |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - |1111\rangle \right)
 \end{aligned}$$

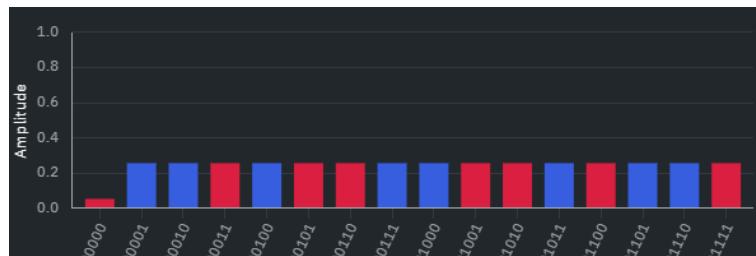


Figura 18 – Última aplicação das portas X na terceira iteração do operador de difusão.

Fonte: IBM-*Quantum Learning / Composer*.

19. Para finalizar a terceira e última iteração, aplicamos novamente as portas *Hadamard* (Figura 19):

$$\begin{aligned}
 H^{\otimes 4} |\psi_{19}\rangle = |\psi_{20}\rangle &= \frac{13}{256} \left(|0000\rangle + |0001\rangle + |0010\rangle + |0011\rangle + |0100\rangle + |0101\rangle \right. \\
 &\quad + |0110\rangle + |0111\rangle + |1000\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1011\rangle \\
 &\quad \left. + |1100\rangle + |1101\rangle + |1110\rangle - \frac{251}{13} |1111\rangle \right)
 \end{aligned}$$

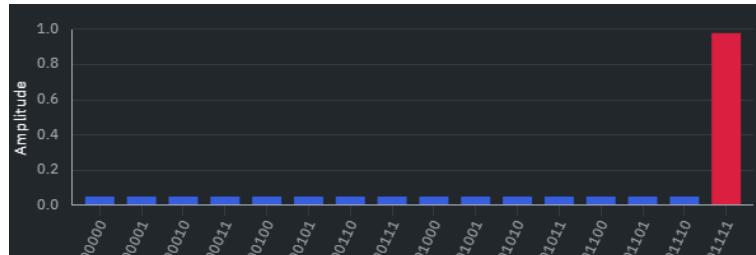
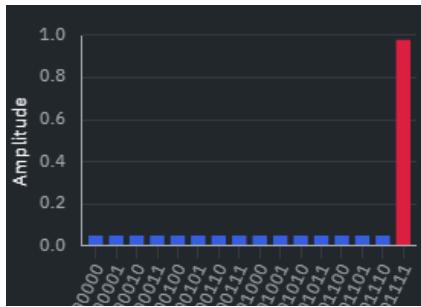


Figura 19 – Probabilidades finais de $|\psi\rangle$ após as três iterações do Algoritmo de Grover.

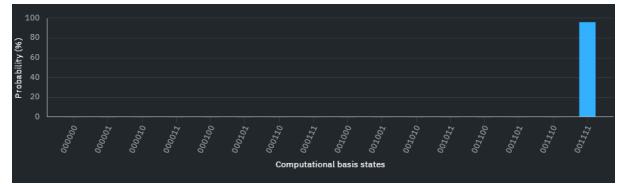
Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

Ao final do processo, o estado marcado $|1111\rangle$ aparece com amplitude máxima, o que confirma a eficiência do Algoritmo de Grover em aumentar a probabilidade do estado desejado em um espaço de busca não estruturado.

Figura 20 – Amplitude e probabilidades após medição final do circuito.



(a) Amplitude do estado $|1111\rangle$ igual a 0,98.



(b) Probabilidades finais de cada estado do espaço de busca, com 96,13% para o estado $|1111\rangle$.

Fonte: IBM-Quantum Learning / Composer.

APÊNDICE B – Construção de Observáveis no Qiskit

Em mecânica quântica, um *observável* é representado por um operador Hermitiano \hat{O} , cujo valor esperado fornece a média dos resultados possíveis de uma medição sobre um estado quântico.

No contexto de computadores quânticos discretos (circuitos e *qubits*), é mais conveniente trabalhar na base computacional formada pelos vetores $\{|x\rangle\}$, com $x \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Nessa base, observáveis são frequentemente construídos a partir de combinações lineares de produtos de operadores de Pauli (I, X, Y, Z), formando a chamada base de Pauli. Assim, qualquer operador Hermitiano pode ser expresso como

$$\hat{O} = \sum_i c_i P_i, \quad P_i \in \{I, X, Y, Z\}^{\otimes n}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Para medir a probabilidade de o circuito colapsar em um estado computacional específico $|x\rangle$, utiliza-se o operador projetor correspondente:

$$\hat{P}_x = |x\rangle \langle x|.$$

Em sua forma matricial, o projetor \hat{P}_x é uma matriz $2^n \times 2^n$ com zeros em todas as entradas exceto um elemento igual a 1 na posição diagonal correspondente ao índice binário de x . Por exemplo, para quatro *qubits* o estado $|1111\rangle$ tem índice decimal 15, e \hat{P}_{1111} tem valor unitário apenas nessa entrada diagonal.

$$P_{1111} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{16 \times 16}$$

Essa representação matricial torna direta a implementação numérica em *Qiskit* (por exemplo com `SparsePauliOp` ou `Operator`) e também facilita a leitura da relação entre valor esperado e probabilidade de medição quando se trabalha na base computacional.

Para um estado puro $|\psi\rangle$ o valor esperado de um observável \hat{O} é dado por

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle.$$

No caso mais geral de um estado misto descrito pela matriz densidade ρ , usa-se a forma

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{O}).$$

Em particular, para o projetor $P_x = |x\rangle \langle x|$ obtemos a probabilidade do resultado x na medição:

$$\langle P_x \rangle = \text{Tr}(\rho P_x) = \langle x | \rho | x \rangle = \text{Prob}(x),$$

que é a expressão discreta (base computacional) da regra de Born. Esta forma é a que se aplica diretamente ao tratamento de circuitos quânticos em computadores discretos e à interpretação dos valores retornados pela classe `Estimate` empregada neste trabalho.

No *Qiskit*, observáveis construídos como combinações de Pauli podem ser representados e estimados via `SparsePauliOp` e `Operator`; para projetores individuais também é possível construir a matriz explícita (`sparse`) e avaliá-la sobre o estado final obtido pelo circuito. Ao implementar essas construções, atenção deve ser dada à ordenação de *qubits* (*endianness*) e à correspondência lógica → física usada na transpilação para *hardware* real, pois um mapeamento diferente muda a posição do bit alvo na representação matricial e, consequentemente, o índice do projetor.

APÊNDICE C – Demonstração da Porta MCZ a partir de MCX e $Hadamard$

O objetivo deste apêndice é demonstrar que a porta Z-multi-controlada (MCZ) pode ser construída a partir de uma porta X-multi-controlada (MCX) e duas portas *Hadamard* (H). A sequência é dada por:

$$MCZ = H \text{ MCX } H \quad (1)$$

onde H é a porta Hadamard aplicada no qubit alvo da MCX .

Demonstração

A porta MCZ que intenta-se criar possui alvo no último *qubit* apenas, sendo assim, a aplicação das H 's deve acontecer somente no último canal. Em termos de portas lógicas e matrizes, isso implica que a Equação 1, na verdade, é

$$MCZ_{16x16} = (I \otimes I \otimes I \otimes H) MCX_{16x16} (I \otimes I \otimes I \otimes H) \quad (2)$$

A matriz resultante da operação $(I \otimes I \otimes I \otimes H)$ é

$$(I^{\otimes 3} \otimes H)_{16x16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{16x16} \quad (3)$$

Já a matriz de MCX é

$$MCX_{16 \times 16} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{16 \times 16} \quad (4)$$

Voltando à Equação 2, precisamos fazer o produto As matrizes correspondentes a X , Z e H são, respectivamente

Para um sistema com múltiplos qubits, considere uma MCX com $n - 1$ qubits de controle e 1 qubit alvo:

$$MCX |c_1 c_2 \dots c_{n-1} t\rangle = |c_1 c_2 \dots c_{n-1}\rangle \otimes X^{c_1 \dots c_{n-1}} |t\rangle \quad (5)$$

Aplicando Hadamard antes e depois da MCX no qubit alvo:

$$\begin{aligned} H \cdot MCX \cdot H |c_1 c_2 \dots c_{n-1} t\rangle &= H \cdot MCX(|c_1 c_2 \dots c_{n-1}\rangle \otimes H |t\rangle) \\ &= H(|c_1 c_2 \dots c_{n-1}\rangle \otimes X^{c_1 \dots c_{n-1}} H |t\rangle) \\ &= |c_1 c_2 \dots c_{n-1}\rangle \otimes (H X^{c_1 \dots c_{n-1}} H) |t\rangle \\ &= |c_1 c_2 \dots c_{n-1}\rangle \otimes Z^{c_1 \dots c_{n-1}} |t\rangle \\ &= MCZ |c_1 c_2 \dots c_{n-1} t\rangle \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $H \cdot MCX \cdot H$ no qubit alvo é equivalente à porta MCZ.

Representação em Qiskit

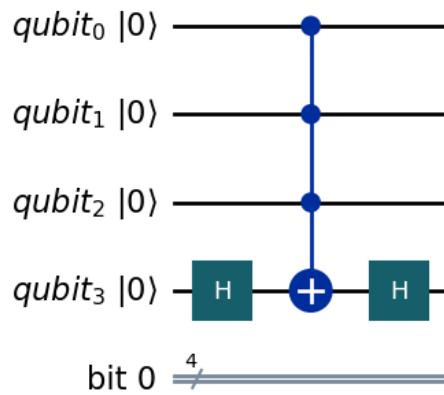
No Qiskit, podemos implementar a MCZ usando a MCX e portas Hadamard como segue:

Figura 21 – Implementação de porta MCZ a partir de MCX e H 's

```
from qiskit import QuantumCircuit

qc = QuantumCircuit(4) # 3 controles + 1 alvo
qc.h(3)               # Hadamard no qubit alvo
qc.mcx([0,1,2], 3)    # MCX com controles 0, 1 e 2 e alvo
qc.h(3)               # Hadamard no qubit alvo
qc.draw('mpl')
```

Figura 22 – Porta MCZ construída a partir de MCX e H 's



Fonte: do autor.

APÊNDICE D – Reconstrução de probabilidades multi-qubit a partir de valores esperados

Ao utilizar o Estimator do Qiskit, obtém-se diretamente os valores esperados $\langle P \rangle$ de operadores de Pauli sobre o estado quântico final do circuito, sem acessar diretamente as contagens (*counts*). Entretanto, é possível reconstruir a distribuição de probabilidades dos estados computacionais a partir desses valores esperados.

Para um sistema de n qubits, a matriz densidade ρ pode ser expandida na base de Pauli:

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{P \in \mathcal{P}^n} \langle P \rangle P$$

onde:

- $\mathcal{P} = \{I, X, Y, Z\}$ é o conjunto dos operadores de Pauli de um único qubit.
- \mathcal{P}^n representa todos os produtos tensoriais possíveis desses operadores para n qubits.
- $\langle P \rangle = \text{Tr}(\rho P)$ é o valor esperado do operador P .

A probabilidade p_x de observar o estado computacional $|x\rangle$ (com x variando de 0 a $2^n - 1$) é obtida por:

$$p_x = \langle x | \rho | x \rangle$$

Substituindo a expansão de ρ , obtém-se:

$$p_x = \frac{1}{2^n} \sum_{P \in \mathcal{P}^n} \langle P \rangle \langle x | P | x \rangle$$

Observa-se que:

- Apenas os operadores de Pauli contendo I e Z contribuem para p_x , pois X e Y possuem elementos fora da diagonal.
- Para cada qubit k :

$$\langle b_k | Z | b_k \rangle = (-1)^{b_k}, \quad \langle b_k | I | b_k \rangle = 1$$

onde $b_k \in \{0, 1\}$ é o bit k do estado $|x\rangle$.

Portanto, para $n = 4$, a fórmula final torna-se:

$$p_x = \frac{1}{16} \sum_{P \in \{I, Z\}^4} \langle P \rangle \prod_{k=0}^3 \left[\begin{cases} 1, & P_k = I \\ (-1)^{b_k}, & P_k = Z \end{cases} \right]$$

Esse método permite reconstruir a distribuição completa de probabilidades apenas a partir dos valores esperados $\langle P \rangle$ dos produtos tensoriais de operadores I e Z , obtidos via Estimator.