Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 9. Aproximação linear e Diferencial Total

Objetivos

- Saber determinar a aproximação linear de uma função em um ponto.
- Entender que a aproximação linear fornece uma estimativa local dos valores da função.
- Compreender a relação entre o plano tangente e a aproximação linear.
- Aplicar a aproximação linear para estimar valores numéricos de expressões difíceis.
- Avaliar a precisão da aproximação com base na proximidade ao ponto de referência.
- Entender o conceito de diferencial total como uma estimativa da variação da função.
- Avaliar quando a diferencial fornece uma boa estimativa e reconhecer suas limitações.

Aproximação Linear

Exercício 9.1.

Reescreva a expressão da aproximação linear em forma vectorial.

Solução.

Temos

$$L(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{x}_0) \;+\; \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\rangle\,,$$

ou, ainda,

$$L(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{x}_0) \;+\; \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

onde

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

□

Exercício 9.2.

Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Determine a aproximação linear de f ao redor do ponto $(2,5)$.

(b) Compare com a aproximação linear da mesma função ao redor de $(1,2)$, encontrada no Exemplo 7.1.

(c) Usando a aproximação linear obtida no item (a), estime o valor de $f(1{,}05, 0{,}95)$. Compare com o valor exato da função nesse ponto.

(d) Você acha que a aproximação obtida no item (a) fornece uma boa estimativa para o valor de $f(2{,}4)$? Compare com o valor exato da função nesse ponto e discuta a qualidade da aproximação.

Solução.

A fórmula da aproximação linear é a seguinte:

$$L_{(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Neste caso temos: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$.

(a) Em $(2,5)$: $f(2,5) = 4+25 = 29$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5) = 10$. Logo,

$$L_{(2,5)}(x,y) = 29 + 4(x-2) + 10(y-5).$$

(b) Em $(1,2)$: $f(1,2) = 1+4 = 5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$. Assim,

$$L_{(1,2)}(x,y) = 5 + 2(x-1) + 4(y-2).$$

Comparando as duas aproximações:

- Ao redor de $(2,5)$: $L_{(2,5)}(x,y) = 4x + 10y - 29$
- Ao redor de $(1,2)$: $L_{(1,2)}(x,y) = 2x + 4y - 5$

São funções diferentes, a aproximação linear depende do ponto.

(c) Usando $L_{(2,5)}$ para $(1.05, 0.95)$:

$$L_{(2,5)}(1.05, 0.95) = 29 + 4(1.05-2) + 10(0.95-5) = -15.3.$$

Valor exato:

$$f(1.05, 0.95) = 1.05^2 + 0.95^2 = 1.1025 + 0.9025 = 2.005.$$

O erro é grande porque o ponto está longe de $(2,5)$; a aproximação linear é local.

(d) Para $(2,4)$, usando $L_{(2,5)}$:

$$L_{(2,5)}(2,4) = 29 + 4(0) + 10(-1) = 19.$$

Valor exato:

$$f(2,4) = 4 + 16 = 20.$$

O erro absoluto é 1 e o relativo é $1/20 = 5\%$. A aproximação é razoável porque $(2,4)$ está a distância 1 do ponto-base apenas na direção y, onde o termo linear captura bem a variação local.

□

Exercício 9.3.

Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Determine a aproximação linear de f no ponto $(3,4)$.

(b) Use essa aproximação para estimar $f(3{,}01, 4{,}02)$.

(c) Compare com o valor exato e discuta a qualidade da aproximação.

Solução.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(a) No ponto $(3,4)$: $f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = \frac{3}{5}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{4}{5}$. Logo, A aproximação linear em (x_0,y_0) é

$$\begin{aligned} L_{(3,4)}(x,y) &= f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)(y-4), \\ &= 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4). \end{aligned}$$

(b) Estimativa em $(3{,}01, 4{,}02)$:

$$L_{(3,4)}(3{,}01, 4{,}02) = 5 + \frac{3}{5}(0{,}01) + \frac{4}{5}(0{,}02) = 5{,}022.$$

(c) Valor exato:

$$f(3{,}01, 4{,}02) = \sqrt{3{,}01^2 + 4{,}02^2} = \sqrt{9{,}0601 + 16{,}1604} = \sqrt{25{,}2205} \approx 5{,}022.$$

A aproximação linear é excelente (3,01,4,02) é um ponto muito próximo ao centro (3,4).

□

Exercício 9.4.

Seja $f(x,y) = e^{xy} + \ln(x+y)$.

(a) Calcule a aproximação linear de f em torno do ponto $(1,1)$.

(b) Estime $f(1{,}01, 0{,}98)$ usando a aproximação linear.

Solução.

As derivadas parciais são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,e^{xy} + \frac{1}{x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,e^{xy} + \frac{1}{x+y}.$$

(a) Em (1,1):

$$f(1,1) = e^{1\cdot 1} + \ln(1+1) = e + \ln 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1\cdot e^1 + \frac{1}{2} = e + \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1\cdot e^1 + \frac{1}{2} = e + \tfrac{1}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L_{(1,1)}(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) \\ &= e + \ln 2 + \left(e + \tfrac{1}{2}\right)(x-1) + \left(e + \tfrac{1}{2}\right)(y-1) \\ &= \left(e + \tfrac{1}{2}\right)(x+y) + \ln 2 - e - 1 \end{aligned}$$

(b) Para (1,01,0,98),

$$\begin{aligned} L_{(1,1)}(1{,}01, 0{,}98) &= \left(e + \tfrac{1}{2}\right)(1{,}01 + 0{,}98) + \ln 2 - e - 1 \\ &= \left(e + \tfrac{1}{2}\right)(1{,}99) + \ln 2 - e - 1 \\ &\approx 3{,}3813 \end{aligned}$$

□

Exercício 9.5.

A função $f(x,y) = x^2y + \cos(y)$ representa um modelo simplificado de custo de produção.

(a) Determine a aproximação linear de f no ponto $(1,\pi)$.

(b) Estime o valor de $f(1{,}05, \pi + 0{,}01)$.

Solução.

As derivadas parciais são $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - \sin y$.

(a) Em $(1,\pi)$:

$$f(1,\pi) = 1^2 \cdot \pi + \cos\pi = \pi - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi) = 2\cdot 1 \cdot \pi = 2\pi, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = 1^2 - \sin\pi = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L_{(1,\pi)}(x,y) &= f(1,\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)(y-\pi) \\ &= \pi - 1 + 2\pi(x-1) + 1\,(y-\pi). \end{aligned}$$

(b) Para aproximar $(1{,}05\,, \pi + 0{,}01)$:

$$L_{(1,\pi)}(1{,}05, \pi + 0{,}01) = \pi - 1 + 2\pi(0{,}05) + 0{,}01 = \pi - 1 + 0{,}1\pi + 0{,}01. \approx 2.46575$$

□

Exercício 9.6.

Considere a função $f(x,y,z) = xyz$.

(a) Calcule a aproximação linear de f no ponto $(1,2,3)$.

(b) Use a aproximação linear para estimar $f(1{,}01, 1{,}98, 3{,}02)$.

Solução.

No caso de três variáveis a expressão da aproximação linear é a seguinte:

$$L_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

Para esta função temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \frac{\partial f}{\partial z} = xy.$$

(a) Em $(1,2,3)$:

$$f(1,2,3) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = 2\cdot 3 = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = 1\cdot 3 = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = 1\cdot 2 = 2.$$

Logo, $L(x,y,z) = 6+6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)$.

(b) Agora aproximamos $(1{,}01, 1{,}98, 3{,}02)$:

$$L_{(1,2,3)}(1{,}01\,,1{,}98\,,3{,}02) = 6+6(0{,}01)+3(-0{,}02)+2(0{,}02) = 6{,}04.$$

□

Exercício 9.7.

Considere $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

(a) Obtenha a aproximação linear de f no ponto $(1,1)$.

(b) Estime $f(1{,}1, 1{,}1)$ e compare com o valor exato.

(c) Estime $f(2,3)$ com a mesma aproximação e compare com o valor exato.

(d) Discuta por que a aproximação linear é eficaz em um dos casos e ineficaz no outro.

Solução.

As derivadas são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

(a) Em $(1,1)$:

$$f(1,1) = \ln(1^2+1^2) = \ln 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L_{(1,1)}(x,y) &= f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1). \\ &= \ln 2 + (x-1) + (y-1). \end{aligned}$$

(b) Para estimar $f(1{,}1\,,1{,}1)$ usamos a aproximação linear obtida no item anterior:

$$\begin{aligned} L_{(1,1)}(1{,}1\,,1{,}1) &= \ln 2 + (1{,}1-1) + (1{,}1-1) \\ &= \ln 2 + 0{,}1 + 0{,}1 = \ln 2 + 0.2 \approx 0.693147 + 0.2 = 0.893147. \end{aligned}$$

Valor exato:

$$f(1{,}1\,,1{,}1) = \ln(1{,}1^2 + 1{,}1^2) = \ln(2{,}42) \approx 0{,}883043.$$

É uma boa aproximação por estar próximo do ponto de expansão.

(c) Usando a mesma linearização para $(2,3)$:

$$L_{(1,1)}(2,3) = \ln 2 + (2-1) + (3-1) = \ln 2 + 1 + 2 = \ln 2 + 3 \approx 3{,}693147.$$

Valor exato:

$$f(2,3) = \ln(2^2+3^2) = \ln(13) \approx 2{,}564949.$$

O erro cresce, é uma estimativa ruim.

(d) Pelo teorema de Taylor sabemos que o termo do erro satisfaz

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{R(x)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Esse limite significa que, à medida que $\mathbf{x}$ se aproxima de $\mathbf{x}_0$, o termo $R(\mathbf{x})$ se torna desprezível em comparação com $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$. Em outras palavras, os valores da função ficam próximos da aproximação linear em pontos suficientemente próximos de $\mathbf{x}_0$.

□

Diferencial Total

Exercício 9.8.

Considere a função $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$.

(a) Calcule a diferencial total df quando (x,y) varia do ponto $(1,2)$ para $(1{,}01, 1{,}95)$.

(b) Compare o resultado obtido com a diferencial calculada no exemplo 9.4 da Nota de Diferencial Total, em que a variação era de $(1,2)$ para $(1{,}05, 2{,}1)$, e justifique qual é a melhor aproximação de Δf.

Solução.

(a) Calculamos as derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 6y.$$

No ponto $(1,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2\cdot 1 - 2 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1 + 12 = 11.$$

Portanto, a diferencial total é:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot dy \\ &= 0 \cdot (1{,}01 - 1) + 11 \cdot (1{,}95 - 2) = 11 \cdot (-0{,}05) = -0{,}55. \end{aligned}$$

(b) Neste exercício, obtivemos $df = -0{,}55$, que é, *em módulo*, menor do que a variação estimada no Exemplo 9.4 da Nota de Diferencial Total, onde $df = 1{,}1$. Isso se deve à distância entre o ponto final e o ponto de partida $(1,2)$. De fato, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}((1{,}01, 1{,}95), (1,2)) &= \sqrt{(1{,}01 - 1)^2 + (1{,}95 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(0{,}01)^2 + (-0{,}05)^2} \\ &= \sqrt{0{,}0001 + 0{,}0025} \\ &= \sqrt{0{,}0026} \\ &\approx 0{,}051. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}((1{,}05, 2{,}1), (1,2)) &= \sqrt{(0{,}05)^2 + (0{,}1)^2} \\ &= \sqrt{0{,}0025 + 0{,}01} \\ &= \sqrt{0{,}0125} \\ &\approx 0{,}1118. \end{aligned}$$

Ou seja, o ponto $(1{,}01, 1{,}95)$ está mais próximo de $(1,2)$ do que o ponto $(1{,}05, 2{,}1)$. O Teorema de Taylor garante que quanto mais próximo o ponto considerado estiver do ponto de partida, menor será, em módulo, a variação nos valores da função e, portanto, mais precisa (e menor em módulo) será a estimativa dessa variação dada pela diferencial total. □

Exercício 9.9.

Considere a função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(a) Calcule a diferencial total df no ponto $(2,1)$.

(b) Use a diferencial para estimar a **variação da função** Δf entre os pontos $(2,1)$ e $(2{,}03, 1{,}02)$.

(c) Calcule o valor exato de $\Delta f = f(2{,}03{,}1{,}02) - f(2{,}1)$ e compare com a estimativa obtida no item anterior.

(d) Use a diferencial para estimar o valor de $f(2{,}03{,}1{,}02)$.

Solução.

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

(a) No ponto $(2{,}1)$ tem-se:

$$f(2{,}1) = \ln(2^2+1^2) = \ln 5,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1) = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1) = \frac{2}{5}.$$

Dai,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1)\cdot dy = \frac{4}{5}dx + \frac{2}{5}dy.$$

(b) Um valor aproximado para $\Delta f = f(2.03{,}1.02) - f(2{,}1)$ é

$$\begin{aligned} df &= \frac{4}{5}\cdot(2{,}03-2) + \frac{2}{5}\cdot(1{,}02-1) \\ &= \frac{4}{5}\cdot 0{,}03 + \frac{2}{5}\cdot 0{,}02 = 0{,}024 + 0{,}008 = 0{,}032. \end{aligned}$$

(c) Calculemos o valor exato:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(2{,}03,\ 1{,}02) - f(2,\ 1) \\ &= \ln\left((2{,}03)^2 + (1{,}02)^2\right) - \ln(5) \\ &= \ln(4{,}1209 + 1{,}0404) - \ln(5) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln(5{,}1613) - \ln(5)\\
&= \ln\left(\frac{5{,}1613}{5}\right)\\
&= \ln(1{,}03226)\\
&\approx 0{,}0317
\end{aligned}
$$

É uma boa estimativa. De fato,

$$df - \Delta f = 0{,}032 - 0{,}0317 = 0{,}0003$$

(d) Lembremos que

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df.$$

Logo,

$$f(2{,}03, 1{,}02) \approx f(2,1) + df = \ln 5 + 0{,}032.$$

□

Exercício 9.10.

Considere a função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(a) Calcule a diferencial total df no ponto $(1,2)$.

(b) Use a diferencial para estimar a **variação da função** Δf entre os pontos $(1,2)$ e $(1{,}02, 1{,}98)$.

(c) Calcule o valor exato de $\Delta f = f(1{,}02, 1{,}98) - f(1,2)$ e compare com a estimativa obtida no item anterior.

(d) Use a diferencial para estimar o valor de $f(1{,}02, 1{,}98)$.

Solução.

Este exercício segue a mesma estrutura do anterior. A escolha de utilizar a mesma função tem como objetivo reforçar que, assim como ocorre com a aproximação linear, a diferencial total df depende do ponto em que é calculada. □