LISTA 2 - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA COM INCERTEZA
GABARITO

Exercício 1 (Cadeia de Markov - P1, 2024)

Considere uma cadeia de Markov simétrica de dois estados (x, P, π_0) com o espaço de estados $x = (\mu + \sigma, \mu - \sigma)$ para um $\mu \in \mathbb{R}$ dado e $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Considere que as probabilidades de transição sejam, para $p \in (0, 1)$,

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a distribuição estacionária (única) desta cadeia de Markov.

Resposta:

A distribuição estacionária é dada por:

$$P'\bar{\pi} = \bar{\pi} \quad \Rightarrow \quad (P' - \mathbb{I})\bar{\pi} = 0$$

em que $\mathbb{I}$ é a matriz identidade apropriada. Então, segue que

$$\begin{bmatrix} p-1 & 1-p \\ 1-p & p-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (p-1)\bar{\pi}_1 + (1-p)\bar{\pi}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2$$

Usando que $\bar{\pi} + \bar{\pi}_2 = 1$, temos que $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = 1/2$.

(b) Qual a média e o desvio padrão desta distribuição estacionária?

Resposta:

$\bar{\pi}_1$ é a probabilidade de estar no estado com $\mu + \sigma$, e $\bar{\pi}_2$, no estado com $\mu - \sigma$. Então a média é dada por:

$$\mathbb{E}\{X_t\} = \bar{\pi}_1(\mu + \sigma) + \bar{\pi}_2(\mu - \sigma) = \frac{1}{2}(\mu + \sigma + \mu - \sigma) = \mu$$

O segundo momento do processo $\{X_t\}$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\{X_t^2\} &= \bar{\pi}_1(\mu+\sigma)^2 + \bar{\pi}_2(\mu-\sigma)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\mu^2 + 2\mu\sigma + \sigma^2 + \mu^2 - 2\mu\sigma + \sigma^2) \\
&= \mu^2 + \sigma^2
\end{aligned}
$$

Então a variância e o desvio-padrão seguem

$$
\mathbb{V}\{X_t\} = \mathbb{E}\{X_t^2\} - \mathbb{E}\{X_t\}^2 = \sigma^2 \quad \therefore \quad \mathrm{dp}\{X_t\} = \sigma
$$

(c) Que propriedade do processo $\{X_t\}$ o parâmetro p controla? Como essa propriedade depende se o p é maior ou menor que 0.5?

Resposta:

O parâmetro p controla a persistência do processo $\{X_t\}$, a tendência do processo permanecer no mesmo estado ao longo do tempo. Em termos de matriz de transição, p representa a probabilidade de permanecer no estado atual entre dois períodos consecutivos, enquanto $1-p$, a probabilidade de transicionar para o outro estado.

- se $p > 0.5$, a cadeia é positivamente autocorrelacionada: o processo tende a permanecer no mesmo estado
- se $p < 0.5$, a cadeia é negativamente autocorrelacionada: o processo tende a alternar entre os estados
- se $p = 0.5$, a cadeia apresenta ausência de memória: a probabilidade de mudar ou permanecer no estado é a mesma (i.e., o estado atual é não informativo)

Podemos ver isso algebricamente calculando a autocorrelação:

$$
\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\mathbb{E}[X_t X_{t-1}] - \mathbb{E}[X_t]^2}{\mathrm{Var}(X_t)}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t X_{t-1}] &= \sum_{i,j} x_i x_j \, \mathbb{P}(x_j \mid x_i) \, \bar{\pi}_i \\
&= \frac{1}{2}\left[(\mu+\sigma)^2 p + (\mu+\sigma)(\mu-\sigma)(1-p)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(\mu-\sigma)(\mu+\sigma)(1-p) + (\mu-\sigma)^2 p\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\mu^2+2\mu\sigma+\sigma^2)p + (\mu^2-\sigma^2)(1-p)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(\mu^2-\sigma^2)(1-p) + (\mu^2-2\mu\sigma+\sigma^2)p\right] \\
&= \mu^2 + (2p-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\mathrm{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\mu^2 + (2p-1)\sigma^2 - \mu^2}{\sigma^2} = 2p - 1
$$

Exercício 2 (Ilhas)

Considere uma economia composta por duas ilhas: $\{A, B\}$. Na ilha A, os agentes recebem um salário w^A e um aluguel R^A por unidade de capital. Na ilha B, o salário é w^B e o aluguel é R^B. Note que esses preços são constantes no tempo. O capital se deprecia igualmente nas duas ilhas à uma taxa δ a cada período.

Os agentes vivem infinitamente, tem oferta de trabalho inelástica, e utilidade dada por:

$$
U\left(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \quad \beta \in (0,1)
$$

em que $u'(\cdot) > 0$ e $u''(\cdot) < 0$. Sendo assim, a restrição orçamentária é dada por:

$$
c_t + k_{t+1} \leq w^j + R^j k_t + (1-\delta)k_t, \quad j \in \{A, B\}
$$

O tempo é discreto e entre um período e outro, com probabilidade $1-\alpha$, o agente é transportado (involuntariamente e com seu capital) para a outra ilha e, com probabilidade α, ele permanece na mesma ilha.

(a) Seja $v^j(k)$ o valor de um indivíduo que se encontra na ilha j, com estoque de capital k. Escreva as equações de Bellman para $v^A(k)$ e $v^B(k)$.

Resposta:

$$v^A(k) = \begin{cases} \max\limits_{k',\,c} & u(c) + \beta\left[\alpha v^A(k') + (1-\alpha)v^B(k')\right] \\ \text{sujeito a} & c + k' \leq w^A + R^A k + (1-\delta)k \end{cases}$$

$$v^B(k) = \begin{cases} \max\limits_{k',\,c} & u(c) + \beta\left[\alpha v^B(k') + (1-\alpha)v^A(k')\right] \\ \text{sujeito a} & c + k' \leq w^B + R^B k + (1-\delta)k \end{cases}$$

Seja $g^j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a escolha ótima de poupança, a função política, associada ao problema recursivo do agente que se encontra na ilha j.

(b) Escreva a equação de Euler para um agente que se encontra na ilha A e outra para o indivíduo que se encontra na ilha B. Você deve escrever um sistema de equações funcionais: duas equações para duas incógnitas, g^A e g^B. Assuma que as funções v^j admitem derivada e que vale o teorema do envelope (Benveniste-Scheinkman).

Resposta:

Farei para a ilha A. O caso para a ilha B é análogo. Substituindo a restrição diretamente no problema de maximização e tirando a condição de primeira ordem obtemos:

$$[k'] : \quad u'(c)(-1) + \beta[\alpha v^{A\prime}(k') + (1-\alpha)v^{B\prime}(k')] = 0$$

Além disso, pelo teorema do envelope, temos que:

$$\begin{aligned} v^{A\prime}(k) &= u'(w^A + R^A k(1-\delta)k - g^A(k))(R^A + (1-\delta)) \\ &= u'(c)(R^A + (1-\delta)) \end{aligned}$$

De forma que podemos escrever:

$$u'(c^A) = \frac{v^{A\prime}(k)}{R^A + (1-\delta)} = \beta[\alpha v^{A\prime}(g^A(k)) + (1-\alpha)v^{B\prime}(g^A(k))]$$
$$u'(c^B) = \frac{v^{B\prime}(k)}{R^B + (1-\delta)} = \beta[\alpha v^{B\prime}(g^B(k)) + (1-\alpha)v^{A\prime}(g^B(k))]$$

Observe que temos um sistema de duas equações para duas incógnitas (g^A e g^B).

(c) Suponha que $w^A = w^B$, $\alpha > 1/2$ e $R^A > R^B$. Para um dado nível de capital k, o agente deve poupar mais em qual das ilhas? Isto é, $g^A(k)$ deve ser maior, menor ou igual a $g^B(k)$? Pode argumentar informalmente.

Resposta:

O fato de $R^A > R^B$ indica que o retorno de capital na ilha A é maior do que no ilha B. Além disso, se $\alpha > 1/2$, a probabilidade de o agente permanecer na mesma ilha é superior à de se mover para a outra. De forma que, mantendo o salário igual entre as ilhas, esperaríamos uma maior poupança na ilha A.

No entanto, não se deve ignorar o efeito renda-substituição. Um aumento do retorno sobre a poupança causa um efeito substituição, que torna o consumo futuro relativamente mais barato do que o consumo presente, incentivando a poupança. Por outro lado, um aumento de R, mantendo constante o consumo e o salário, causa um aumento da renda permanente do agente, podendo levar o agente a consumir mais hoje pois ele se sente "mais rico".

Exercício 3 (Robson Cruz e o Coqueiro - P1, 2023)

Robson Cruz vive sozinho em uma ilha remota. Toda sua alimentação depende de um único coqueiro. Robson deriva utilidade apenas do consumo, de acordo com o índice de utilidade $u(c)$, e desconta o futuro com fator $\beta < 1$.

O tempo é discreto, o horizonte infinito e existem dois estados da natureza: $s \in \{\text{sorte}, \text{azar}\}$. A transição entre estados ocorre de acordo com uma matriz de transição P, que é simétrica e tem persistência p (isto é, tem p na diagonal principal). O coqueiro gera uma unidade de fruto no estado $s = \text{sorte}$, e meia no estado $s = \text{azar}$.

Apesar de ser o único morador da ilha, Robson acredita em mercados financeiros sofisticados e é tomador de preços. Ele acredita que, em cada estado, pode comprar ações da empresa "Coqueiro

S.A." ao preço $q(s)$. Existe um contínuo unitário de ações emitidas, negociadas período a período a bolsa da ilha.

Cada ação pagará amanhã um dividendo de uma unidade de coco caso $s' =$ sorte e meia unidade caso $s' =$ azar (i.e. $d(\text{sorte}) = 1$ e $d(\text{azar}) = 1/2$). Além disso, ele pode revender essa ação ao preço $q(s')$. Dessa forma, a restrição sequência de Robson é

$$(q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c$$

em que a é um número de ações que Robson tem hoje e a' é quanto ele compra para amanhã.

(a) Escreva o problema de consumo e poupança de Robson de forma recursiva. Defina as funções políticas para consumo e poupança. **Sugestão:** use $W = (q(s) + d(s))a$ como a variável de estado.

Resposta:

Defina $W = (q(s) + d(s))\, a$

$$\begin{cases} V(W, s) = \max\limits_{c,a'} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V(W', s')\right] = \max\limits_{c,a'} u(c) + \beta \sum\limits_{s' \in S} \Pr(s' \mid s) V(W', s') \\ \text{Sujeito a:} \\ \quad W = (q(s) + d(s))\, a \geq q(s)a' + c \end{cases}$$

As funções políticas são as funções (ou correspondências) das variáveis de controle que resolvem a função valor, i.e.

$$\begin{cases} c = g_c(W, s) = \arg\max\limits_{c,a'} V(W, s) \\ a' = g_a(W, s) = \arg\max\limits_{c,a'} V(W, s) \end{cases}$$

(b) Derive uma equação de Euler que caracteriza a poupança ótima de Robson.

Resposta:

As condições de primeira ordem do problema são

$$\begin{aligned} [c]: &\quad u'(c) - \lambda = 0 \\ [a']: &\quad \beta \sum_{s' \in S} \Pr(s'|s) \frac{d\ V(W', s')}{d\ a'} - \lambda q(s) = 0 \end{aligned}$$

Além disso, o teorema do envelope nos dá que

$$\frac{\partial V(W,s)}{\partial W} = u'(c) \cdot [q(s) + d(s)]$$

Juntando os dois resultados, obtemos que

$$\beta \sum_{s' \in S} \Pr(s'|s) u'(g_c(W', s'))[q(s') + d(s')] = q(s) u'(g_c(W, s))$$

(c) Em equilíbrio, precisamos que $a = 1$ e $c(s) = d(s)$. Por quê? Qual a relação destas condições com o "truque de (K, k)" e com market-clearing?

Resposta:

Essas condições são consequências da miopia de Robson. Como Robson é o único agente econômico na ilha, ele próprio tem que consumir toda a poupança (dividendos) gerada pelo coqueiro, garantindo o market clearing. O truque (K, k) indica que a escolha ótima de consumo não depende do nível apenas da proporção da economia como um todo. Nesse caso, Robson age como se fosse pequeno, mas como é o único, suas ações tem que ser condizentes como se tivesse todo o estoque de ativos.

(d) Avalie as equações de Euler de Robson (estado a estado) neste equilíbrio, fazendo todas as substituições possíveis.

Resposta:

Primeiro considere o caso de $s = \text{sorte}$, abrindo a equação de Euler, temos

$$\begin{aligned} u'(c(\text{sorte}))q(\text{sorte}) = \beta u'(c(\text{sorte}))[q(\text{sorte}) + d(\text{sorte})] \Pr(\text{sorte}|\text{sorte}) + \\ + \beta u'(c(\text{azar}))[q(\text{azar}) + d(\text{azar})] \Pr(\text{azar}|\text{sorte}) \end{aligned}$$

Analogamente, temos, para quando $s = \text{azar}$:

$$u'(c(\text{azar}))q(\text{azar}) = \beta u'(c(\text{azar}))[q(\text{azar}) + d(\text{azar})]\Pr(\text{azar}|\text{azar}) + \\ + \beta u'(c(\text{sorte}))[q(\text{sorte}) + d(\text{sorte})]\Pr(\text{sorte}|\text{azar})$$

Substituindo os valores, obtemos o sistema:

$$u'(1)q(\text{sorte}) = \beta\left[u'(1)[q(\text{sorte})+1]p + u'\left(\frac{1}{2}\right)\left(q(\text{azar})+\frac{1}{2}\right)(1-p)\right]$$
$$u'\left(\frac{1}{2}\right)q(\text{azar}) = \beta\left[u'\left(\frac{1}{2}\right)\left[q(\text{azar})+\frac{1}{2}\right]p + u'(1)\left(q(\text{sorte})+1\right)(1-p)\right]$$

(e) Encontre os preços de equilíbrio das ações "Coqueiro S.A." quando $u(c) = \ln c$ e $p = 2/3$.

Resposta:

Substituindo as especificações no sistema, temos que:

$$1q(\text{sorte}) = \beta\left[1[q(\text{sorte})+1]2/3 + 2\left(q(\text{azar})+\frac{1}{2}\right)1/3\right]$$
$$2q(\text{azar}) = \beta\left[2\left[q(\text{azar})+\frac{1}{2}\right]2/3 + 1\left(q(\text{sorte})+1\right)1/3\right]$$

Definindo $x := q(\text{sorte})$ e $y := q(\text{azar})$, o sistema de equações é:

$$x = \beta\left[\frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right] = \beta\left[\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + 1\right]$$
$$2y = \beta\left[\frac{4}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}(x+1)\right] = \beta\left[\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y + 1\right]$$

A forma matricial do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \beta\left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

dividindo ambos os lados por β e isolando o vetor de x e y, temos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta^{-1} - \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2\beta^{-1} - \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{\equiv A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O inverso de A é dado por:

$$A^{-1} = \frac{1}{(\beta^{-1} - \frac{2}{3})(2\beta^{-1} - \frac{4}{3}) - (-\frac{2}{3})(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 2\beta^{-1} - \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \beta^{-1} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3\beta^2}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} \begin{bmatrix} 2\beta^{-1} - \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \beta^{-1} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Então, temos que:

$$x = \frac{3\beta^2}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} \left[2\beta^{-1} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right] = \frac{6\beta - 2\beta^2}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} = \frac{2\beta(3 - \beta)}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} = \frac{\beta}{1 - \beta}$$

e

$$y = \frac{3\beta^2}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} \left[\frac{1}{3} + \beta^{-1} - \frac{2}{3} +\right] = \frac{3\beta - \beta^2}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} = \frac{\beta(3 - \beta)}{2(\beta - 1)(\beta - 3)} = \frac{\beta}{2(1 - \beta)}$$

Resumindo, temos que os preços vão ser:

$$q(\text{sorte}) = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad q(\text{azar}) = \frac{\beta}{2(1 - \beta)}$$

Exercício 4 (Caça aos Alimentos)

Robson Cruz, novamente, naufraga em outra ilha remota. Dessa vez, sua alimentação depende de frutas nativas da ilha, que podem ser encontradas com probabilidade π. Quando Robson encontra uma fruta, seu consumo é dado por $c = v$; caso contrário $c = 0$. Assuma também que suas preferências de consumo podem ser representadas por uma função de utilidade $u(c)$ tal que $u(0) = 0$. O período futuro nesta economia é descontado por um fator $\beta < 1$.

(a) Formule o problema recursivo de Robson e escreva sua função valor V em função dos demais parâmetros da economia usando uma recursão.

Resposta:

A equação de Bellman é:

$$V = [\pi u(v) + (1-\pi)u(0)] + \beta V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{1-\beta}u(v)$$

Após algumas semanas isolado, Robson também descobre que existem animais selvagens na ilha, que podem ser caçados como forma de alimento, obtendo um nível de consumo $c = m > v$. No entanto, cada animal pode ser do tipo $s = \{a, n\}$, agressivo ou manso, respectivamente. De forma que a probabilidade de sucesso na caça, $\lambda(s)$, depende do tipo e $\lambda(a)u(m) < \pi u(v) < \lambda(n)u(m)$.

(b) Dado essa nova possibilidade, formule os problemas recursivos de Robson. Aqui, assuma que Robson decidirá consumir a opção que lhe dará o **maior** nível de utilidade esperada a cada período (i.e., Robson só pode escolher tentar caçar ou colher frutas por período). Chame a função valor de consumo dos animais como W_m e, a de frutas como W_v, e a função valor geral como W. **Observação:** s é uma variável de estado, observada, no período. Assuma que a sequência de s é determinística.

Resposta:

O valor de procurar frutas é bem similar, mas permite que o Robson mude a estratégia no próximo período. Então, segue que:

$$W_v(s) = \pi u(v) + \beta W(s')$$

O valor de procurar animais é dado por

$$W_m(s) = \lambda(s)u(m) + \beta W(s')$$

$W(s)$ é o valor da escolha que Robson faz no estado s. Como ele escolhe o máximo, segue que:

$$W(s) := \max\{W_v(s), W_m(s)\} = \max\{\pi u(v), \lambda(s)u(m)\} + \beta W(s')$$

Ainda, pelo enunciado, sabemos que Robson colhe frutas quando $s = a$ e caça animais quando $s = n$, de forma que:

$$W(s) = \mathbb{1}_{\{s=a\}}(\pi u(v)) + \mathbb{1}_{\{s=n\}}(\lambda(s)u(m)) + \beta W(s')$$

(c) Após mais algumas semanas, Robson decide mudar sua dieta na ilha: Agora ele casa animais se, e somente se, ele tiver consumido frutas no período anterior. Analogamente, ele também consumirá frutas se, e somente se, sau refeição no período anterior tiver sido um animal selvagem. Formule os novos problemas recursivos de Robson. **Observação:** Mesmo que ele não tenha sucesso em obter seu alimento do período, ele repetirá até conseguir. Por exemplo, se no período passado, Robson teve sucesso em caçar animal, ele ficará os próximos períodos colhendo comida até ter sucesso e, depois, voltará à caçar animais. O Problema agora deve ser representado em duas funções separadas.

Resposta:

O valor de Robson só muda se obtiver sucesso, então quando falhar, ele mantêm-se no mesmo.

$$\begin{aligned} W_v(s) &= \pi[u(v) + \beta W_m(s')] + (1-\pi)\beta W_v(s') \\ W_m(s) &= \lambda(s)[u(m) + \beta W_v(s')] + (1-\lambda(s))\beta W_m(s') \end{aligned}$$

Exercício 5 (Capital Humano)

Considere a seguinte economia de agentes representativos com formação endógena de habilidade. Existe um contínuo de medida 1 de agentes idênticos na economia. Os agentes começas um um nível inicial de habilidade H_0. Suas preferências são dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Em que $u(\cdot)$ é estritamente crescente e estritamente côncava. Se um indivíduo de habilidade h aloca uma fração do tempo s trabalhando, ele oferta $n = sh$ unidades de trabalho. O tempo que ele não trabalha, $1-s$, é alocado na melhoria de habilidades. O nível de habilidade no próximo período é:

$$h' = g(1-s, h)$$

Em que $g(x,h)$ é estritamente crescente e estritamente côncava em (x,h). A restrição de recursos é dada por:

$$C \leq F(L), \quad C = \int_{[0,1]} c_i \; di, \quad L = \int_{[0,1]} h_i s_i \; di$$

em que C é o consumo agregado e L denota unidades de eficiência agregada do fator de trabalho. A função F é linear em L, em específico $F(L) = L$.

(a) Especifique a equação de Bellman de um agente representativo.

Resposta:

No enunciado faltou deixar claro que o salário por unidade de trabalho é definido com base na quantidade total de horas trabalhada oferecidas em agregado, isto é, $w(H)$.

A função valor é dada por

$$V(h, H) = \begin{cases} \max\limits_{c, h', s} \; u(c) + \beta V(h', H') \\ \text{sujeito a} \\ \quad c = w(H) \cdot s \cdot h \\ \quad h' = g((1-s), h) \\ \quad H' = G(H), \quad s \in [0,1] \end{cases}$$

Em que $G(\cdot)$ é a lei de movimento da habilidade agregada.

(b) Defina o equilíbrio competitivo recursivo para esta economia.

Resposta:

Estamos trabalhando no espaço de funções, portanto considere:

- A função valor $V : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$
- As funções políticas $g_c : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $g_s : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $g_h : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$
- A função preço $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
- A lei de movimento da habilidade agregada $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

Então, um equilíbrio competitivo recursivo para esta economia é caracterizado por (V, g_c, g_s, g_h, w, G) tal que:

1) Dados as funções preço e movimento agregado, $w(\cdot), G(\cdot)$, a função valor, V, é solução da equação de Bellman e as funções (g_c, g_s, g_h) são as respectivas funções politicas.

2) As firmas maximizam lucros (em específico, nesse caso)

$$w(H) = F'(L) = 1, \quad \forall H$$

3) Há consistência entre escolhas agregadas:

$$g_h(H, H) = G(H), \quad \forall H$$

4) O mercado de bens é limpo:

$$g_c(H, H) = g_s(H, H) \cdot H, \quad \forall H$$
