Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

2. Funções de várias variáveis

Objetivos

- Compreender o conceito de função real de várias variáveis reais.
- Identificar e determinar o domínio natural da função, bem como o domínio de interesse.
- Determinar e interpretar a imagem de uma função de várias variáveis.
- Compreender o conceito de gráfico e representá-lo geometricamente.
- Entender e identificar os conjuntos de nível de uma função.

Na economia, assim como em todas outras áreas do conhecimento, muitos fenômenos não podem ser descritos de forma adequada por funções que dependem de apenas uma variável independente. Por exemplo, a *lei da demanda* estabelece a relação entre a quantidade demandada de um bem D e o seu preço P, afirmando que, à medida que o preço aumenta, a quantidade demandada tende a diminuir, e vice-versa.

Entretanto, a demanda não depende apenas do preço: outros fatores também influenciam a quantidade que os consumidores desejam adquirir, mesmo que o preço permaneça constante. Entre eles, destacam-se a renda dos consumidores (R), o preço de bens substitutos (P_s) e o preço de bens complementares (P_c).

Assim, para cada combinação possível desses fatores (P, R, P_s, P_c), obtemos uma quantidade demandada do produto, modelada por

$$D = D(P, R, P_s, P_c).$$

Diante da complexidade e diversidade dos fatores que influenciam os fenômenos em geral, torna-se necessário estudar funções que dependem de várias variáveis independentes. Essas funções permitem analisar e modelar situações mais realistas, nas quais múltiplos fatores interagem para determinar um resultado específico.

Definição 2.1 (Função real de várias variáveis reais).

Uma *função real de várias variáveis reais* é uma aplicação

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada n-upla ordenada de números reais $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ um único número real $f(\mathbf{x})$.

O conjunto D é chamado *domínio* de f e será denotado por $\mathrm{Dom}(f)$. A *imagem* de f é o conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\mathbf{x})\ ;\ \mathbf{x} \in D\} \subset \mathbb{R}.$$

Em outras palavras, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$, então $f(\mathbf{x})$ é um número real que pertence à imagem $\mathrm{Im}(f)$.

Exemplo 2.1 (Função produto).

Considere a função que, a cada par de números reais, associa o valor do seu produto, isto é,

$$f(x, y) = x\,y.$$

- **Domínio:** não há restrições sobre x e y, logo, a função está definida sobre todo o espaço $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$.
- **Imagem:** para cada $r \in \mathbb{R}$, basta escolher $x = r$ e $y = 1$, para obtermos $f(x, y) = r$. Portanto, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2 (Função quadrática).

Considere a função

$$g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Temos:

- **Domínio:** não há restrições sobre x e y, logo, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}^2$.
- **Imagem:** como $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos $g(x, y) \geq 0$. Além disso, dado $r \geq 0$, temos $g(\sqrt{r}, 0) = r$ e, portanto, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$.

Observe que essa função também representa o *quadrado da distância* do ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ à origem $(0, 0)$ ou, equivalentemente, a *norma ao quadrado* do vetor (x, y), ou seja, $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$.

Exemplo 2.3 (Função distância à origem ou função norma).

Considere a função

$$h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é exatamente a distância do ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ à origem $(0,0)$, ou a norma do vetor (x,y). Temos:

- **Domínio:** não há restrições sobre x nem y, logo $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}^2$.
- **Imagem:** claramente $h(x,y) \geq 0$ para todo (x,y). Além disso, $h(r,0) = r$ para todo $r \geq 0$. Assim, $\mathrm{Im}(d) = [0,\infty)$.

Exemplo 2.4.

Considere a função

$$k(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

- **Domínio:** para que a raiz quadrada esteja definida, é necessário que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, o que é equivalente a $x^2 + y^2 \leq 1$. Portanto,

$$\mathrm{Dom}(k) = \overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- **Imagem:** como $x^2 + y^2 \geq 0$ no domínio, temos $1 - x^2 - y^2 \leq 1$ e, portanto, $0 \leq k(x,y) \leq 1$. Ambos os extremos são atingidos: $k(0,0) = 1$ e, para pontos da fronteira $x^2 + y^2 = 1$, $k(x,y) = 0$. Assim, $\mathrm{Im}(k) = [0,1]$.

Por outro lado, nem sempre é necessário estudar uma função em todo o seu domínio de definição. Muitas vezes, o estudo se restringe a um subconjunto $D \subset \mathrm{Dom}(f)$. Nesse caso, denotamos a função por $f|_D$, lido como f *restrita ao subconjunto* D. Chamamos D de *domínio de interesse* de f.

Por exemplo, consideremos a função

$$U(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Temos que

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Suponha agora que essa função modele as preferências de um consumidor em relação a diferentes quantidades de dois bens, X e Y, que ele pode consumir. Nesse contexto, o consumidor possui um orçamento total de R\$ 1000. Se o preço unitário do produto X é R\$ 50 e o de Y é R\$ 30, a restrição orçamentária é dada por

$$50x + 30y \leq 1000.$$

Assim, o estudo da função U restringe-se ao subconjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 50x + 30y \leq 1000\right\}.$$

Ou seja, neste caso o *domínio de interesse* não coincide com o domínio de f, mas sim com o conjunto do Exemplo 1.1 da Nota anterior.

A função U anterior é um exemplo de *função de utilidade*, conhecida como *função de Cobb-Douglas*, proposta em 1928 pelos economistas Charles W. Cobb e Paul H. Douglas no artigo *A Theory of Production*. De forma geral, uma função de utilidade atribui um valor numérico a cada cesta de consumo, isto é, a cada combinação de n bens ou serviços disponíveis ao consumidor, representando o grau de satisfação obtido. A seguir, apresentamos alguns exemplos de funções de utilidade.

Exemplo 2.5 (Função de utilidade para *n* bens).

Dado n bens de consumo, representamos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suas respectivas quantidades. A função de utilidade é denotada por U e atribui a cada combinação específica de quantidades dos bens, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, um número real $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que reflete a utilidade total do consumidor com essa cesta de consumo.

Utilidade Cobb-Douglas:

A função de utilidade Cobb-Douglas generalizada é dada por:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são os coeficientes que medem as elasticidades de produção ou preferências de cada bem ou fator de produção (tais coeficientes devem ser estritamente positivos e a soma deles deve ser menor que 1 para garantir a substituibilidade entre os bens).

Utilidade Quadrática:

De forma mais geral, a função de utilidade quadrática é dada por

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são coeficientes positivos que medem a importância relativa ou o peso de cada bem ou fator de produção na função de utilidade ou de produção. Nesse caso, a utilidade total ou a quantidade produzida é uma soma ponderada dos quadrados das quantidades dos n bens ou fatores de produção. Cada coeficiente a_i representa a importância relativa de cada bem ou fator de produção. Valores maiores para a_i indicam que o consumidor valoriza mais a quantidade do bem ou fator x_i, enquanto valores menores implicam em uma valoração menor.

Exercício 2.1.

Suponha que a demanda por refrigeradores em uma determinada região depende dos seguintes fatores:

- P: o preço do refrigerador,
- R: a renda dos consumidores,
- P_s: o preço de bens substitutos,

- P_c: o preço de bens complementares.

(a) Crie uma função *hipotética* que modele a quantidade demandada considerando os seguintes comportamentos:

- Quando o preço do refrigerador diminui, a quantidade demandada aumenta, ou seja, há uma relação inversamente proporcional entre o preço e a quantidade demandada.
- Um aumento na renda dos consumidores tende a aumentar a quantidade demandada de refrigeradores, ou seja, a quantidade demandada está positivamente relacionada à renda dos consumidores.
- Se os bens substitutos, como freezers ou outros eletrodomésticos de refrigeração, tornarem-se mais caros, a demanda por refrigeradores pode aumentar, indicando que a mesma está positivamente relacionada ao preço dos bens substitutos.
- Se os bens complementares, como utensílios para uso em conjunto com o refrigerador, ficarem mais caros, isso pode diminuir a demanda por refrigeradores, o que sugere que está inversamente relacionada ao preço de bens complementares.

(b) Determine o domínio da sua função.

(c) Determine o conjunto sobre o qual sua função reflete a realidade do problema.

2.1 Gráfico de uma função de várias variáveis

Definição 2.2 (Gráfico de uma função de várias variáveis).

O *gráfico* de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\text{Graf}(f) = \{\,(x_1,x_2,\ldots,x_n, f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\ ;\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in D\,\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os pontos cuja projeção nas n primeiras coordenadas pertence ao domínio D e cuja última coordenada é igual ao valor de f nessas n coordenadas. Essa última coordenada pode ser interpretada geometricamente como a *altura* do gráfico em relação ao hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Exemplos 2.6 (Planos como gráficos de funções lineares).

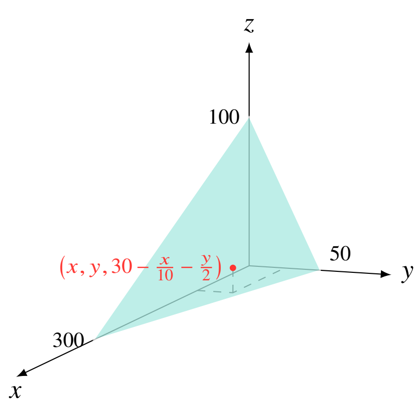
O gráfico da função

$$f(x,y) = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}$$

é o conjunto

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ z = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}\right\},$$

isto é, o plano de equação $10x + 50y + 100z = 3000$. No Exemplo 1.1 da Nota 1 analisamos a interseção desse plano com o primeiro octante, interpretando-a como parte da fronteira de um conjunto. Aqui, consideramos o mesmo plano sob a perspectiva de ser o gráfico de uma função linear de duas variáveis.



De forma geral, todo plano não vertical em relação ao eixo z pode ser visto como o gráfico de uma função de duas variáveis, pois é possível escrever z explicitamente como função de x e y.

Exemplo 2.7 (Paraboloide como o gráfico da função quadrática).

O gráfico da função

$$g(x,y) = x^2 + y^2$$

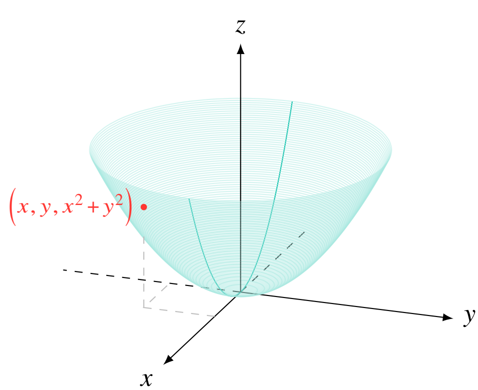
é o conjunto

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = x^2 + y^2\right\},$$

que descreve um *paraboloide circular reto* com vértice na origem e eixo paralelo ao eixo z. Para ver isso, analisemos interseções:

- Interseção com o plano xz ($y = 0$): temos $z = x^2$, uma parábola que se abre para cima.
- Interseção com o plano yz ($x = 0$): da mesma forma obtém-se $z = y^2$, uma parábola que também abre para cima.
- Interseção com o planos horizontais ($z = c$, $c \geq 0$): a equação se reduz a $x^2 + y^2 = c$, que é uma circunferência de raio $\sqrt{c}$ no plano xy.

Essas seções revelam que a superfície se obtém girando uma parábola em torno do eixo z, o que justifica o nome paraboloide.



Exemplo 2.8 (Cone como o gráfico da função distância à origem).

Considere a função

$$h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

O gráfico dessa função no espaço tridimensional é o conjunto de pontos

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Essa superfície pode ser analisada por meio de suas interseções com planos coordenados:

- Interseção com o plano xz ($y=0$): neste plano, a função se reduz a $z=\sqrt{x^2}=|x|$, onde $|x|$ representa a *função valor absoluto*. Assim, o gráfico resultante consiste na união das semirretas

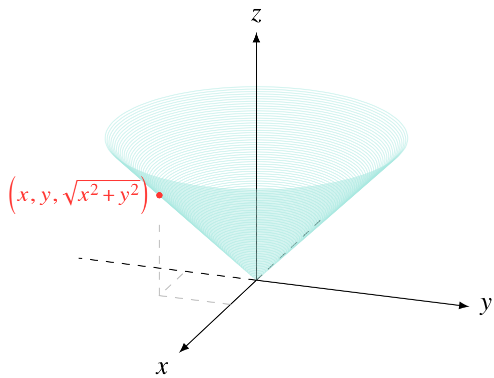
  $$\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=x,\, x\geq 0\right\}\cup\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=-x,\, x<0\right\},$$

  , que forma uma curva contínua e simétrica em relação ao eixo z.
- Interseção com o plano yz ($x=0$): analogamente, obtemos

  $$\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=y,\, y\geq 0\right\}\cup\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=-y,\, y<0\right\},$$

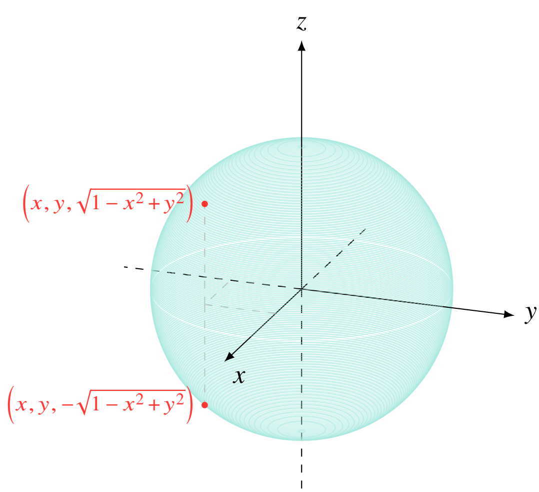
- Interseção com o planos horizontais ($z=c$, $c\geq 0$): temos a equação $x^2+y^2=c^2$, que descreve uma circunferência de raio c centrada na origem no plano xy.

Essas seções indicam que a superfície é obtida por uma rotação da curva $z=|x|$ (ou $z=|y|$) em torno do eixo z, resultando em uma superfície cônica com eixo de simetria ao longo de z. Tal superfície é o *cone circular reto*.



Exemplo 2.9 (Semiesfera como gráfico).

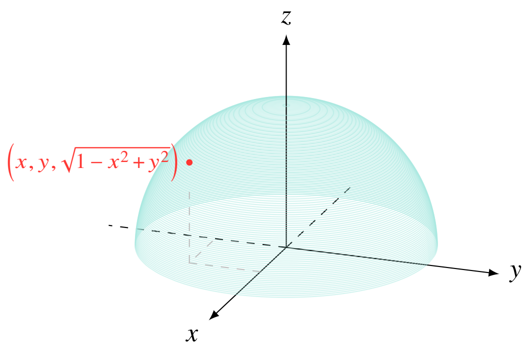
As esferas **não** são gráficos de funções reais de duas variáveis, pois violam o critério fundamental de unicidade do valor associado a cada ponto do domínio. Em termos geométricos, isso ocorre porque qualquer reta vertical (paralela ao eixo z) intersecta a superfície da esfera em, no máximo, dois pontos distintos. De fato, considerando o exemplo modelo da esfera de raio 1, para cada $(x, y) \in B(O, 1) \subset \mathbb{R}^2$, os pontos $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ e $(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$ pertencem à esfera.



Por outro lado, se considerarmos apenas a semiesfera superior, então cada ponto $(x, y) \in B(O, 1)$ está associado a uma única altura: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ou seja, tal superfície é o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

definida sobre $\overline{B(O, 1)}$.



Exercícios Suplementares

Exercício 2.2.

Encontre e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

(b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

Exercício 2.3.

Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

(b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x,y) = (x-y)^2$

(f) $f(x,y) = \sin(|x|+|y|)$

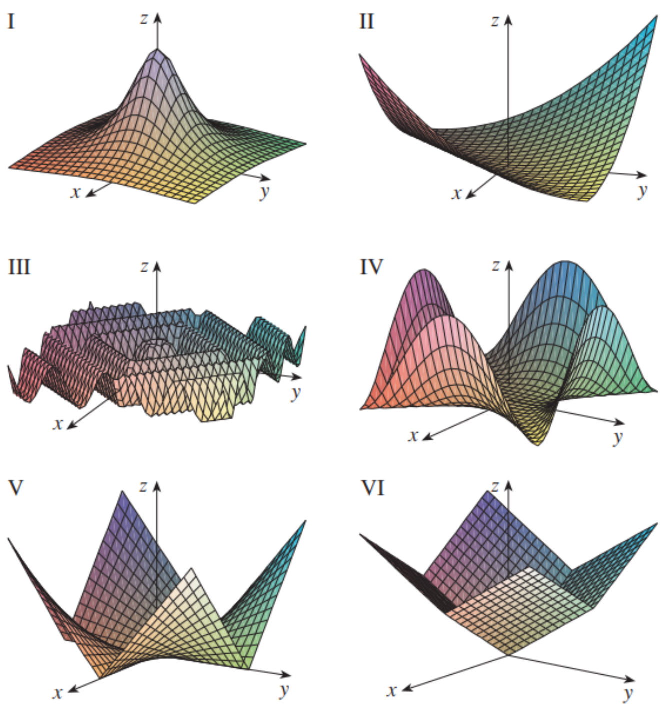


Figura 2.1

Exercício 2.4.

Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

(a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$

(b) $g(x,y) = 2f(x,y)$

(c) $g(x,y) = -f(x,y)$

(d) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$

(e) $g(x,y) = f(x-2,y)$

(f) $g(x,y) = f(x,y+2)$

(g) $g(x,y) = f(x+3,y-4)$