Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

3. Conjuntos de nível de uma função de várias variáveis

Objetivos

- Compreender o conceito de conjunto de nível para funções reais de várias variáveis.
- Interpretar geometricamente curvas de nível (em $\mathbb{R}^2$) e superfícies de nível (em $\mathbb{R}^3$).
- Reconhecer curvas de nível como projeções da interseção do gráfico com planos horizontais.
- Identificar e interpretar mapas de contorno.
- Relacionar a forma das curvas de nível com o comportamento da função no espaço.

A análise do comportamento geométrico de uma função real de várias variáveis pode ser facilitada pelo estudo de seus *conjuntos de nível*. Esses conjuntos permitem visualizar, em dimensões inferiores, como os valores da função se distribuem no domínio.

Definição 3.1 (Conjunto de nível).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para um número real fixado $c \in \mathbb{R}$, define-se o *conjunto de nível* (ou *nível c*) da função f como o subconjunto:

$$N_c = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\}.$$

Ou seja, N_c é o conjunto de todos os pontos do domínio D nos quais a função f assume o valor constante c.

3.0.1 Funções de Duas Variáveis: Curvas de Nível e Mapas de Contorno

Considere agora uma função de duas variáveis, isto é, uma aplicação

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sabemos que, para cada ponto $(x, y) \in D$, o ponto $(x, y, f(x, y))$ pertence ao gráfico de f, denotado por $\text{Graf}(f)$.

Por outro lado, pela definição de curva de nível, se $f(x, y) = c$, para algum valor constante $c \in \mathbb{R}$, estamos interessados nos pontos do gráfico da função que se encontram exatamente na altura $z = c$. Isto é, nos pontos que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = c, \end{cases}$$

Geometricamente, isso corresponde à interseção entre o gráfico da função e o plano horizontal de equação $z = c$.

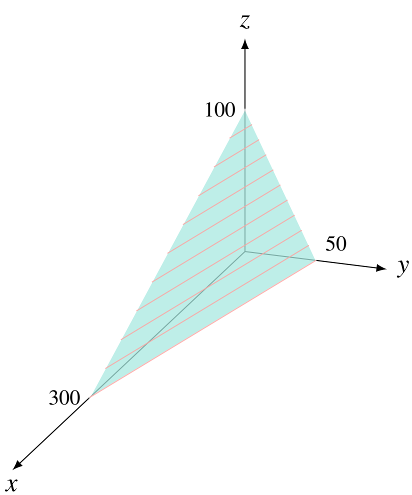
A projeção ortogonal dessa interseção sobre o plano xy produz o conjunto

$$\{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\},$$

que é precisamente a curva de nível associada ao valor c da função f. Esse conjunto consiste nos pontos do domínio onde a função assume o valor constante c, e pode ser interpretado como a imagem da interseção $\mathrm{Graf}(f) \cap \{z = c\}$ sob a projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\pi(x,y,z) = (x,y)$.

Exemplo 3.1.

Consideremos a função $k(x,y) = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}$. Sabemos que $\mathrm{Graf}(k)$ é o plano de equação $z = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}$.
A figura a seguir ilustra, no primeiro octante, a interpretação geométrica das curvas de níveis. Na imagem à esquerda, as retas em vermelho representam as interseções no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ entre o $\mathrm{Graf}(k)$ e planos horizontais de equação $z = c$. Já na imagem à direita, observamos as respectivas projeções ortogonais sobre o plano xy.



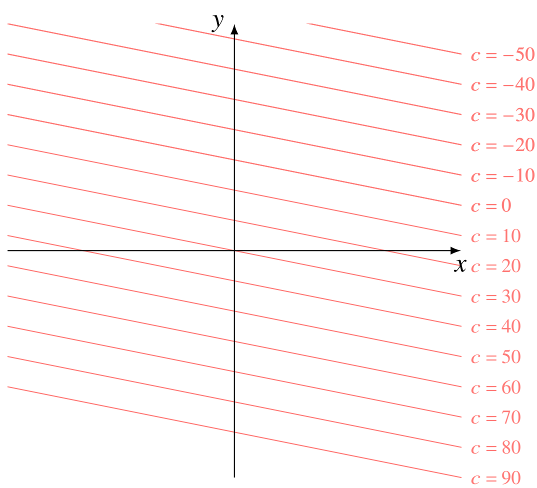
Formalmente, dado um valor $c \in \mathbb{R}$, a equação do conjunto de nível correspondente é:

$$k(x,y) = c \iff 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2} = c \iff \frac{x}{10} + \frac{y}{2} = 30 - c,$$

que é a equação de uma reta no plano xy. Assim, para cada valor real de c, o conjunto de nível é a reta:

$$N_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x}{10} + \frac{y}{2} = 30 - c \right\}.$$

Variando o valor de c, vemos que os conjuntos de nível de k são retas paralelas entre si e deslocadas verticalmente de acordo com o valor de c. A seguir segue uma representação de vários conjuntos de níveis de k.



A última figura do exemplo exibe diversas curvas de nível da função k, cada uma associada a um valor específico de c. Esse tipo de representação é conhecido como *mapa de contorno*.

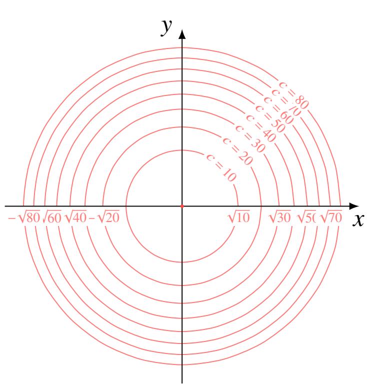
A visualização de um mapa de contorno é extremamente útil para analisar o comportamento global da função, permitindo identificar regiões onde a função apresenta crescimento ou decrescimento, variações abruptas ou suaves nos valores da função etc.

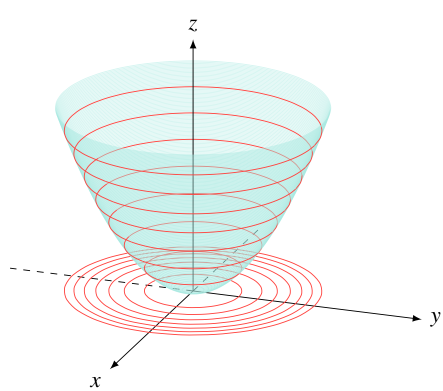
Exemplo 3.2.

Consideremos a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.
Observe que o domínio da função é $\mathbb{R}^2$, enquanto sua imagem é o intervalo $[0,\infty)$, pois a função assume apenas valores não negativos.
Vamos agora analisar o comportamento dos conjuntos de nível $N_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$, de acordo com o valor do parâmetro $c \in \mathbb{R}$:

- $\boldsymbol{c < 0}$: Como $f(x,y)$ é a soma de dois quadrados, temos $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, o conjunto de nível é vazio: $N_c = \emptyset$.
- $\boldsymbol{c = 0}$: O valor zero é atingido somente quando $x = 0$ e $y = 0$. Assim, o conjunto de nível é o ponto de origem: $N_0 = \{(0,0)\}$.
- $\boldsymbol{c > 0}$: Neste caso, a equação $f(x,y) = c$ equivale a $x^2 + y^2 = c$, que representa uma circunferência de raio $\sqrt{c}$, centrada na origem. Portanto, o conjunto de nível é dado por: $N_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}$.

Na figura a seguir à esquerda temos um mapa de contorno de f. À direita ilustramos o gráfico da função f, as interseções desse gráfico com planos horizontais de diferentes níveis $z = c$, e as correspondentes projeções no plano xy.





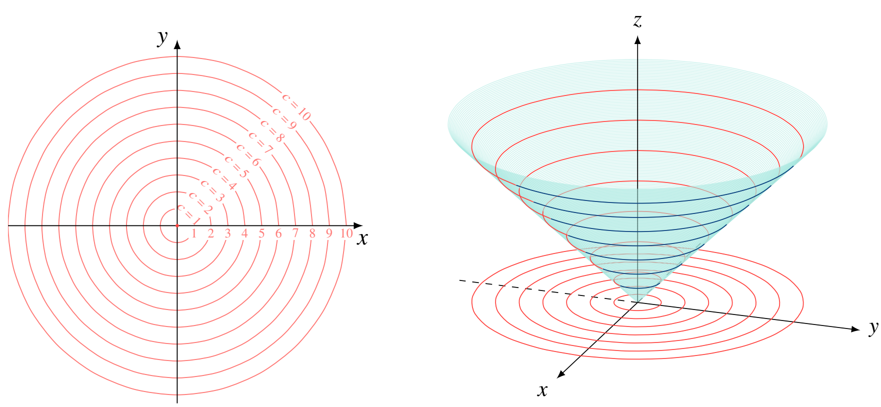
Observe como a interseção dos planos horizontais abaixo do plano xy com o paraboloide é vazia, com o plano de equação $z = 0$ é a origem e com planos horizontais acima do plano xy são círculos. Essas interseções estão em perfeita concordância com o mapa de contorno.

Exemplo 3.3.

Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Primeiro vejamos que o domínio da função é $\mathbb{R}^2$ e a imagem é $[0, \infty)$. Agora, vamos analisar o comportamento de $f(x, y)$:

- $c < 0$: como f é não negativa – a raiz quadrada é sempre positiva, então $N_c = \emptyset$.
- $c = 0$: o único ponto onde $f(x, y) = 0$ é a origem $(0, 0)$. Logo $N_0 = \{(0, 0)\}$.
- $c > 0$: neste caso a condição $f(x, y) = c > 0$ se traduz em $x^2 + y^2 = c^2$. Ou seja, a forma das curvas de nível de f são círculos concêntricos com centros na origem e cujos raios são exatamente os valores da função: $N_c = \{(x, y) \in D; x^2 + y^2 = c^2\}$.

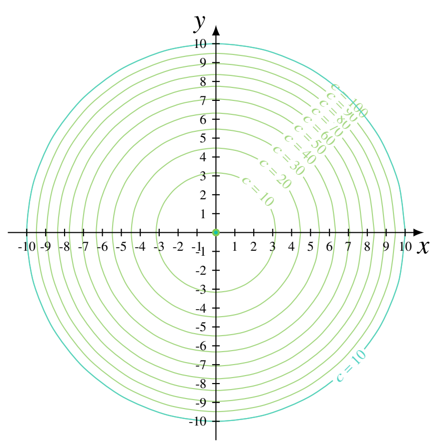
Na figura a seguir ilustramos um mapa de contorno à esquerda, e, à direita, o gráfico da função, a interseção desse gráfico com planos em diferentes *níveis* de altura, e as respectivas projeções.



Observemos que, nos dois exemplos anteriores, as curvas de nível (nos casos em que $N_c \neq \emptyset$) são circunferências centradas na origem. No entanto, os mapas de contorno resultantes são diferentes. Uma maneira de compreender essa diferença é comparar os dois mapas de contorno sob uma mesma janela de visualização, utilizando a mesma escolha de níveis $c \in C$, para algum subconjunto finito $C \subset \mathbb{R}$, como na seguinte figura.

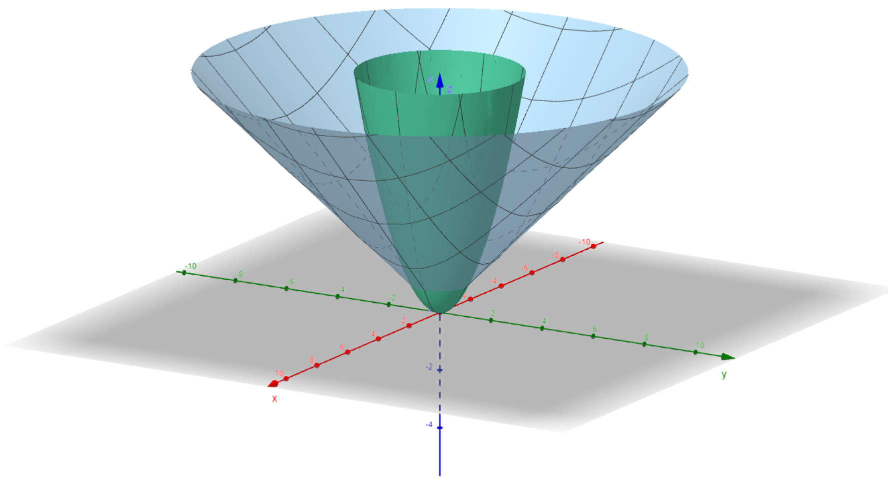
Escolhamos, por exemplo, $c \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ e uma janela de visualização $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Na figura a seguir, observa-se, em verde, o mapa de contorno da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, o qual contém onze curvas de nível – uma para cada valor de c selecionado.

No caso da função $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, o mapa de contorno correspondente, dentro da mesma janela, contém apenas duas curvas de nível, associadas aos valores $c = 0$ e $c = 10$. Isso indica que $g(x, y)$ atinge os demais valores de c apenas em pontos situados fora da região considerada, isto é, mais distantes da origem.



Geometricamente, isso significa que o gráfico da função f está acima do gráfico da função g fora do círculo de raio 1 (sobre o qual $f(x, y) = g(x, y)$). Em outras palavras, a função f cresce mais rapidamente que g à medida que nos afastamos da origem[1].

[1] Observe que ambas as funções crescem monotonamente em qualquer direção à medida que nos afastamos da origem.



Exemplo 3.4.

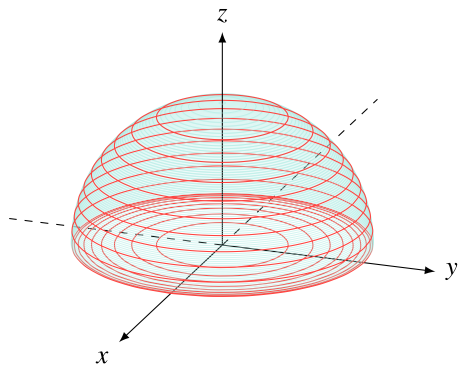
Seja $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. O domínio desta função é $\overline{B(0,1)}$ e a imagem é $[0,1]$. Agora, vamos analisar o comportamento de $f(x,y)$:

- $c < 0$: como f é não negativa – a raiz quadrada é sempre positiva, então $N_c = \emptyset$.
- $0 < c < 1$: neste caso a condição $f(x,y) = c > 0$ se traduz em $x^2 + y^2 = 1 - c^2$. Ou seja, a forma das curvas de nível de f são círculos:

$$N_c = \{(x,y) \in D; x^2 + y^2 = 1 - c^2\}$$

- $c = 1$: Neste caso $N_1 = \{(1,0)\}$.
- $c > 1$: Como a máximo valor possível para f é 1, então $N_c = \emptyset$.

Na figura a seguir ilustramos o gráfico da função, a interseção desse gráfico com planos em diferentes *níveis* de altura, e as projeções no plano xy.



Exercício 3.1.

Realize uma análise comparativa análoga à que foi feita entre as funções dos Exemplos 3.2 e 3.3, agora considerando os pares f e h, e g e h, sendo h a função do Exemplo 3.3. Para isso, construa mapas de contorno dessas funções utilizando os mesmos valores de c.

3.1 Funções de três variáveis: Superfícies de nível

No caso de funções de três variáveis, $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, o conjunto de nível N_c, para um valor constante $c \in \mathbb{R}$, é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) no domínio da função para os quais $f(x, y, z) = c$. Isto é:

$$N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}.$$

Geometricamente, os conjuntos de nível de uma função de três variáveis correspondem à interseção do gráfico da função, que vive em $\mathbb{R}^4$, com hiperplanos do tipo $w = c$. A projeção dessas interseções no espaço $\mathbb{R}^3$ resulta, em geral, em superfícies chamadas *superfícies de nível*.

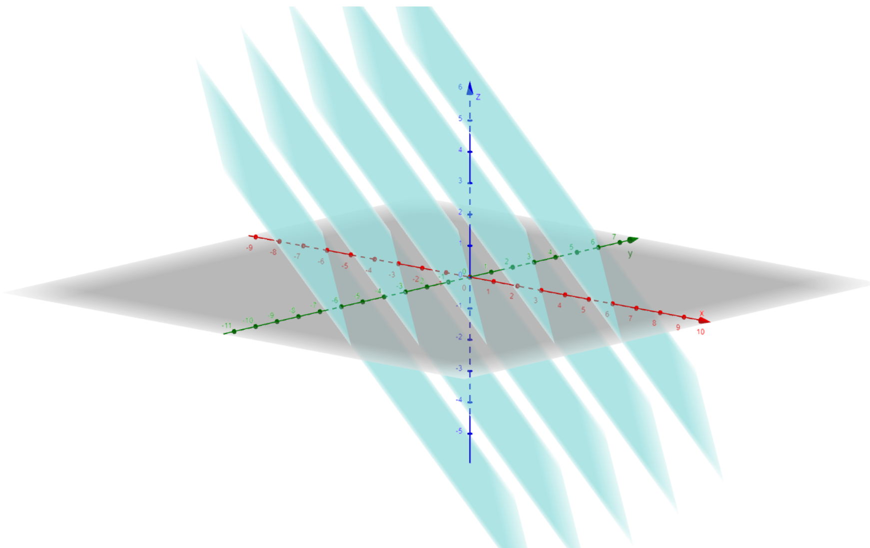
Diferentemente do caso bidimensional, não utilizamos o termo *mapa de contorno* neste contexto, pois ele é reservado exclusivamente à representação bidimensional de curvas de nível associadas a funções de duas variáveis reais.

Exemplo 3.5 (Planos como superfícies de nível).

Considere $f(x,y,z) = x + y + z$. O conjunto de nível para $c \in \mathbb{R}$ é dado por

$$N_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y + z = c\}.$$

Trata-se de um plano no espaço tridimensional, cuja posição depende do valor de c. Para $c = 0$, é o plano que passa pela origem com normal $(1,1,1)$.



Exemplo 3.6 (A esfera como superfície de nível).

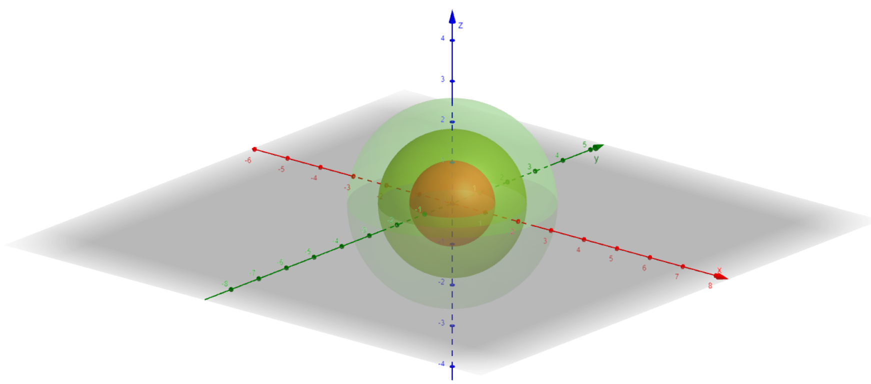
Analisemos as superfícies de nível da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ para diferentes valores de $c \in \mathbb{R}$:

- $\boldsymbol{c < 0}$: A equação $x^2 + y^2 + z^2 = c$ não possui soluções reais, pois a soma de quadrados de números reais é sempre não negativa. Assim, para $c < 0$, $N_c = \emptyset$.
- $\boldsymbol{c = 0}$: A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ admite como única solução o ponto $(0,0,0)$, pois todos os termos devem ser simultaneamente nu-

los. Nesse caso, a superfície de nível degenera em um único ponto: $N_0 = \{(0,0,0)\}$.

- $\boldsymbol{c > 0}$: Para valores positivos de c, a equação $x^2+y^2+z^2 = c$ representa uma esfera de raio $\sqrt{c}$, centrada na origem. Assim,

$$N_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = \sqrt{c}\}.$$



Observe que o raio cresce à medida que c aumenta, o que significa que os valores da função $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ aumentam à medida que nos afastamos da origem. Em outras palavras, a função cresce radialmente no espaço tridimensional.

Claramente, a própria expressão da função já revela esse comportamento, pois trata-se da função distância ao ponto $(0,0,0)$. No entanto, em funções mais complexas, esse tipo de análise pode ser significativamente facilitado pela observação das superfícies de nível, que oferecem uma representação geométrica eficaz do crescimento (ou decrescimento) da função em diferentes regiões do domínio.

Exemplo 3.7.

Considere a função $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$. Para um valor fixado $c \in \mathbb{R}$, o conjunto de nível é dado por $N_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = c\}$. Esses conjuntos correspondem a diferentes superfícies quadráticas, dependendo do valor de c:

- $\boldsymbol{c = 0}$: A equação torna-se $z^2 = x^2 + y^2$, que descreve um cone circular duplo com vértice na origem e simetria em relação ao plano xy. O eixo do cone é o eixo z.
- $\boldsymbol{c < 0}$: Podemos reescrever a equação como $x^2 + y^2 - z^2 = -c > 0$, o que equivale a um hiperbolóide de uma folha, centrado na origem e com eixo de simetria ao longo do eixo z.
- $\boldsymbol{c > 0}$: Neste caso, a equação $z^2 - x^2 - y^2 = c$ representa um hiperbolóide de duas folhas, também centrado na origem e com eixo ao longo de z. Para cada valor negativo de c, a superfície está definida apenas para valores de z suficientemente grandes em módulo (fora de uma região ao redor do plano $z = 0$).

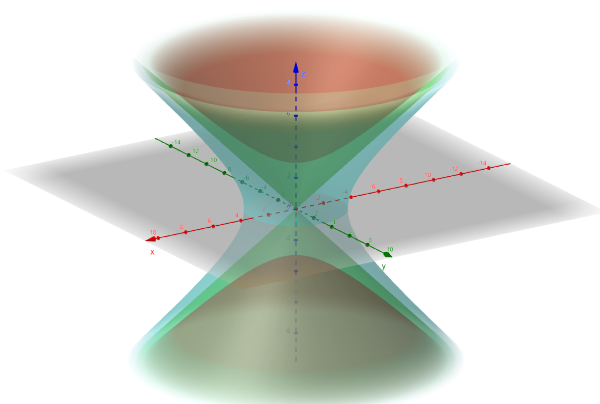


Figura 3.1: Superfícies de nível da função $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$: cone duplo ($c = 0$), hiperbolóide de uma folhas ($c < 0$) e de duas folhas ($c > 0$).

Exercícios Suplementares

Exercício 3.2.

Para cada função, desenhe as curvas de nível (indiferença) para $u(x_1, x_2) = k$, com $k > 0$.

(a) Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, com $\alpha, \beta > 0$

(b) Linear (Substitutos Perfeitos): $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, com $a, b > 0$.

(c) Leontief (Complementares Perfeitos): $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, com $a, b > 0$.

(d) CES (Elasticidade de Substituição Constante):
$u(x_1, x_2) = \left(ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho}\right)^{1/\rho}$, com $a, b > 0$.

Exercício 3.3.

Faça um esboço de um mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

(a) $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

(b) $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Exercício 3.4.

Descreva as superfícies de nível das funções abaixo.

(a) $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

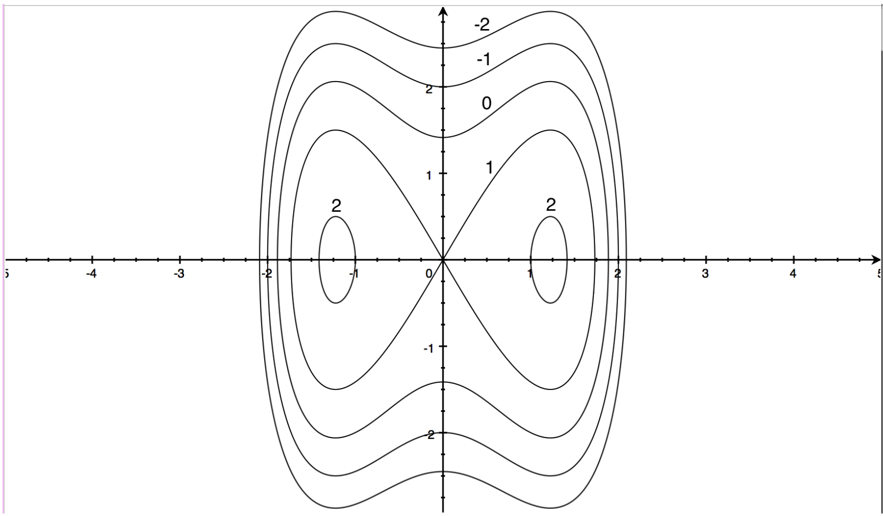
(b) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

(c) $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

(d) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

Exercício 3.5 (Interpretação de mapa de contorno).

A figura a seguir representa o mapa de contorno de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com curvas de nível rotuladas por seus respectivos valores.



Com base nesse mapa de contorno, responda às seguintes questões:

1. Identifique os pontos (ou regiões) onde a função parece atingir o menor valor e o maior valor nessa janela. Justifique sua resposta com base nas curvas de nível.
2. A função cresce mais rapidamente na direção do eixo x ou do eixo y? Explique com base no espaçamento das curvas de nível.
3. Determine, aproximadamente, o valor da função nos seguintes pontos:

   (a) $(0,0)$

   (b) $(1,0)$

   (c) $(0,2)$

4. Diga se a função parece ser crescente, decrescente ou constante ao longo da reta $y = x$. Justifique com base nas curvas de nível.