Curso de ECONOMIA FGV EPGE

Disciplina: CÁLCULO II **T1**

Professora: YUNELSY N ALVAREZ

Aluno: ______________________________

Data: 26/08/2025

Informações sobre a prova estabelecidas pelo professor

- O aluno só pode realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O nome do aluno deve ser incluído em todas as folhas utilizadas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta com tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta com tinta vermelha ou verde.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só pode ter consigo lápis, borracha e caneta. Se necessário, o fiscal pode solicitar ajuda a outro aluno, e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico. O celular deve ser desligado e guardado.
- Apresente seu raciocínio de forma clara para que seus desenvolvimentos sejam avaliados, mesmo que parcialmente. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Extraído do Regulamento do Curso de Economia

Art. 46 - As penas previstas no artigo 43 serão aplicadas conforme a gravidade ou reincidência das faltas abaixo exemplificadas:

b) improbidade na execução dos atos escolares, destacando-se como **atos gravíssimos**, o **uso da 'cola'**, **cópia** e **plágio** durante a realização de avaliações escolares e/ou atividades escolares;

§ 1º A prática da **'cola'**, **cópia** e **plágio** em avaliações escolares será punida com a reprovação automática na disciplina.

Quadro de Notas

Questão	1	2	3	Total
Valor	4,75	4,75	0,5	10
Nota				
Revisão				

Questão 1.

Considere a função $f(x,y) = \sqrt{xy}\,\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$.

(a) Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.

(b) Determine a fronteira e o interior do domínio de f. Justifique.

(c) Diga se o domínio de f é aberto ou fechado, limitado e/ou compacto. Justifique.

(d) Descreva analiticamente o gráfico de f.

(e) Determine a imagem de f.

Solução:

(a) Analisando a função temos que:

- O termo $\sqrt{xy}$ exige que o radicando seja não negativo, isto é,

$$xy \geq 0.$$

- O termo $\ln(1 - x^2 - y^2)$ exige que o argumento do logaritmo seja estritamente positivo:

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1.$$

Para que a função esteja bem definida, ambas as condições devem ser satisfeitas simultaneamente. Assim, o domínio é:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 < 1\right\}. \qquad \textbf{(0,5)}$$

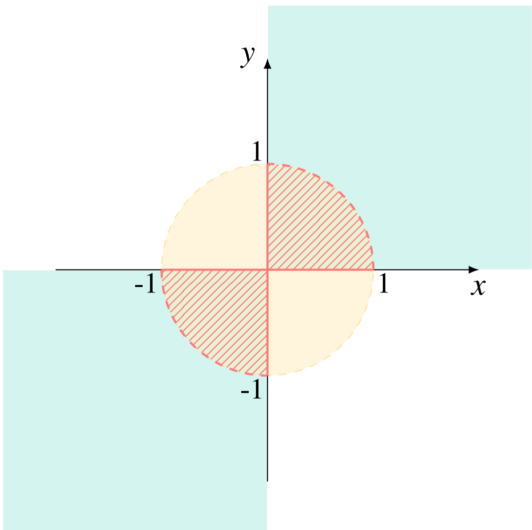
Para representar graficamente esse conjunto, observemos que $xy \geq 0$ significa que x e y devem ter o mesmo sinal, ou um deles pode ser zero:

$$x \geq 0 \ \text{ e } \ y \geq 0 \quad \text{ou} \quad x \leq 0 \ \text{ e } \ y \leq 0.$$

Logo, os pontos válidos estão nos quadrantes I e III, representados em azul.

Além disso, $x^2 + y^2 < 1$ é a bola aberta centrada na origem e de raio 1, representado em amarelo.

O domínio é a região hachurada em vermelho:



(0,5)

(b) Lembremos que a *fronteira* de um conjunto é formada pelos pontos que podem ser arbitrariamente aproximados tanto por pontos do conjunto quanto por pontos do seu complemento.

A primeira parte da fronteira do conjunto consiste nos dois segmentos contidos nos eixos:

- $y = 0$ com $-1 \leq x \leq 1$;
- $x = 0$ com $-1 \leq y \leq 1$.

Dessa forma, vemos que nesses pontos temos sempre $xy = 0$, com $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Além disso, a fronteira inclui os dois quartos de circunferência definidos pela equação $x^2 + y^2 = 1$, situados nos quadrantes I e III, isto é, nas regiões onde $xy \geq 0$.

Portanto, a fronteira do domínio é dada por[1]

$$\partial D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 0,\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1,\, xy \geq 0\right\}. \qquad \textbf{(0,5)}$$

Lembremos agora que o *interior* de um conjunto é composto pelos pontos que pertencem ao conjunto, mas não à sua fronteira. Portanto, para determinar o interior do conjunto D, basta remover todos os pontos de fronteira de D.

Analisando a descrição de D, observamos que os únicos pontos de fronteira contidos em D são os dois segmentos situados sobre os eixos coordenados, ou seja:

- os pontos com $x = 0$, onde $y \in [-1, 1]$;
- os pontos com $y = 0$, onde $x \in [-1, 1]$.

Assim, nenhum ponto do interior de D pode ter $x = 0$ ou $y = 0$. Logo, nos pontos interiores vale:

$$x > 0 \ \text{ e } \ y > 0 \qquad \text{ou} \qquad x < 0 \ \text{ e } \ y < 0,$$

isto é,

$$xy > 0.$$

Concluímos, portanto, que:

$$D^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy > 0 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 < 1\right\}. \qquad \textbf{(0,5)}$$

(c) Temos:

- D não é fechado pois tem pontos da sua fronteira que não pertencem a ele (os pontos que estão sobre o círculo)[2]. **(0,25)**
- D não é aberto porque ele contêm partes de sua fronteira (os seguimentos que estão sobre os eixos coordenados)[3]. **(0,25)**
- Além disso, D é limitado pois cabe em uma bola (escolha, por exemplo, $B(O,2)$). **(0,25)**
- O conjunto D não é compacto pois ele não é fechado. **(0,25)**

(d) O gráfico de f é o seguinte conjunto no espaço $\mathbb{R}^3$:

$$\text{Graf}(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \underbrace{z = \sqrt{xy}\,\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)}_{\textbf{(0,5)}} \ \text{ e } \ \underbrace{(x,y) \in D}_{\textbf{(0,5)}}\right\}, \qquad \textbf{(1,0)}$$

onde D é o domínio de f determinado no item (a).

[1] Observe que há outras formas alternativas (mais explícitas) de descrever ∂D.
[2] Do Exercício 2 da Lista 1 sabemos que *um conjunto é fechado se ele contêm* todos *os seus pontos de fronteira*.
[3] Do Exercício 2 da Lista 1 sabemos que *um conjunto é aberto se ele não contêm* nenhum *ponto de fronteira*.

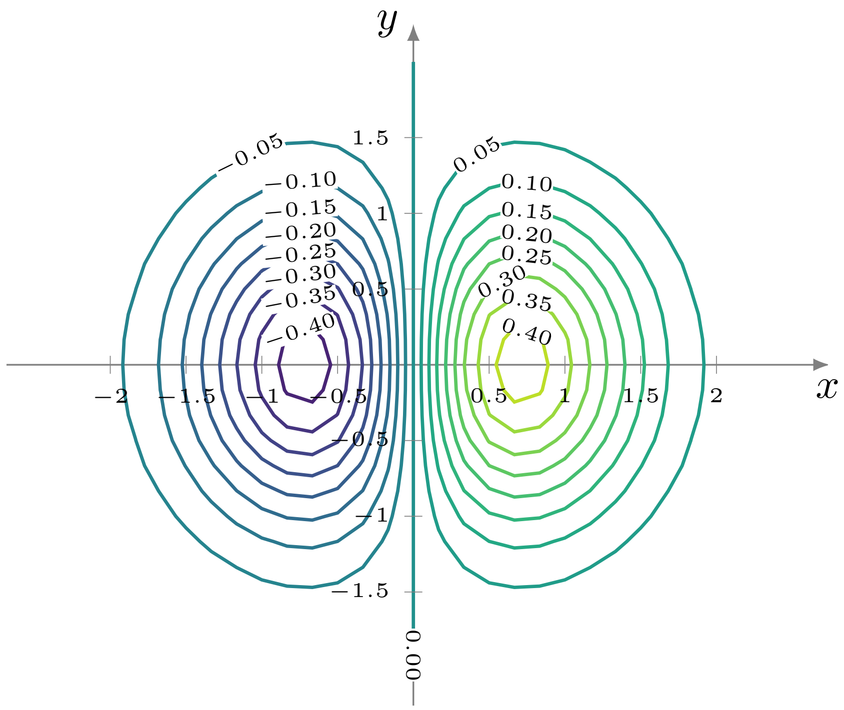
(e) Vamos determinar a imagem da função f. Temos:

- A função $\sqrt{xy} \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, no domínio D, temos $\sqrt{xy} \leq 1$, portanto, ela é sempre positiva e limitada.

- No conjunto D, temos
$$0 < 1 - x^2 - y^2 \leq 1.$$
Pelas propriedades da função logaritmo estudadas em Cálculo I, sabemos que, quando o argumento do logaritmo está no intervalo $(0,1]$, seus valores são negativos. Além disso, quanto mais próximo de zero estiver esse argumento, mais negativos se tornam os valores do logaritmo. Assim, para $(x,y) \in D$, temos:
$$\ln(1 - x^2 - y^2) \in (-\infty, 0].$$

Como estamos lidando com o produto de uma função positiva e limitada, $\sqrt{xy}$, com uma função negativa e ilimitada inferiormente, $\ln(1 - x^2 - y^2)$, concluímos que a função f assume apenas valores negativos. Esses valores podem ser arbitrariamente pequenos (isto é, grandes em módulo). Portanto, a imagem de f é:
$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0). \qquad \textbf{(0,75)}$$

Questão 2.
A figura a seguir mostra o mapa de contorno de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com curvas de nível rotuladas com os valores da função.



Com base nesse mapa de contorno, responda às seguintes questões justificando as suas respostas:

(a) Em que regiões a função parece atingir seu maior valor e seu menor valor?

(b) Em qual direção (horizontal ou vertical) a função muda mais rapidamente próximo de (0,0)?

(c) Ao percorrer a reta de equação $x = 0$, de $y = -1.5$ até $y = 1.5$, a função parece aumentar, diminuir ou permanecer constante?

(d) Ao percorrer a reta de equação $y = 0$, de $x = -0.5$ até $x = 0.5$, a função parece aumentar, diminuir ou permanecer constante?

(e) Estime o valor da função nos seguintes pontos (−1,0), (0,0) e (1,1).

Solução:

(a) Pelo mapa de contorno, a função apresenta:

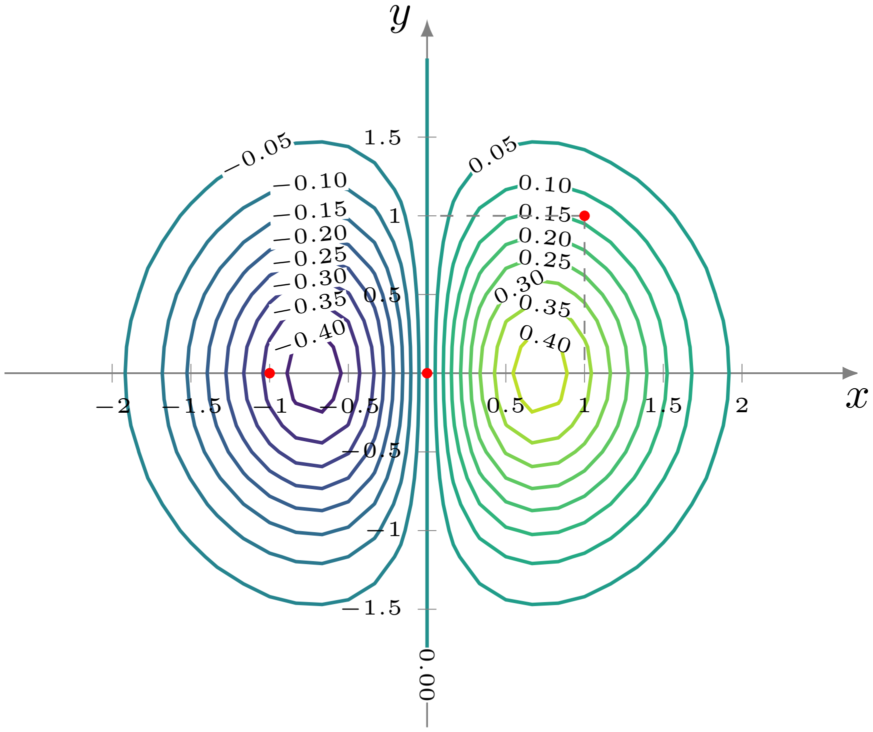
- maior valor no interior da região cuja fronteira é a curva de nível $N_{0.40}$. **(0,5)**
- menor valor no interior da região cuja fronteira é a curva de nível $N_{-0.40}$. **(0,5)**

(b) Nas proximidades do ponto (0,0), as curvas estão mais próximas umas das outras na direção horizontal do que na direção vertical. Isso indica que a função varia mais rapidamente na direção do eixo x. Portanto, a função muda mais rapidamente na direção horizontal próximo de (0,0). **(1,0)**

(c) Observamos que a curva de nível N_0 está sobre o eixo y, que corresponde à reta de equação $x = 0$. Logo, a função permanece constante e igual a zero ao longo dessa reta, no intervalo de $y = -1.5$ até $y = 1.5$. **(1,0)**

(d) Ao percorrer a reta de equação $y = 0$ (isto é, o eixo x), de $x = -0.5$ até $x = 0.5$, observamos que os valores de $f(x, y)$ aumentam progressivamente, variando de aproximadamente −0.40 até 0.40 (sem atingir esses extremos dentro do intervalo considerado). Isso indica que a função cresce ao longo dessa direção. **(1,0)**

(e) Vejamos a representação dos pontos a seguir.



Logo,

$$\underbrace{f(-1{,}0) \approx -0.36}_{\textbf{(0,25)}}, \quad \underbrace{f(0{,}0) = 0}_{\textbf{(0,25)}} \quad \text{e} \quad \underbrace{f(1{,}1) \approx 0.14}_{\textbf{(0,25)}}. \qquad \textbf{(0,75)}$$

Observação

O mapa de contorno apresentado neste exercício corresponde à função $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$. Com isso em mente, vale a pena conferir se os comportamentos observados realmente fazem sentido à luz da expressão analítica da função.

Questão 3.

Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Mostre que, para qualquer número real $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $S_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ g(\mathbf{x}) \leq c\}$ é um conjunto convexo.

Solução:

Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S_c$, ou seja, $g(\mathbf{x}_1) \leq c$ e $g(\mathbf{x}_2) \leq c$. Seja $\lambda \in [0,1]$ e considere o ponto

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2.$$

Como g é convexa, temos:

$$g(\mathbf{x}) = g(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda g(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) g(\mathbf{x}_2) \leq \lambda c + (1-\lambda)c = c.$$

Logo, $g(\mathbf{x}) \leq c$, ou seja, $\mathbf{x} \in S_c$. Isto é, todo segmento entre dois pontos de S_c está contido em S_c, o que mostra que S_c é convexo.