**Primeira Prova**
**18/08/23**

# 1 Questões Breves (2,0 pontos)

(a) (*0,5*) Suponha a seguinte matriz estocástica em que a entrada $p_{i,j}$ na linha $i$ e coluna $j$ indica a probabilidade de transição para o estado $j$, dado o estado $i$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Quais distribuições são invariantes sob P?

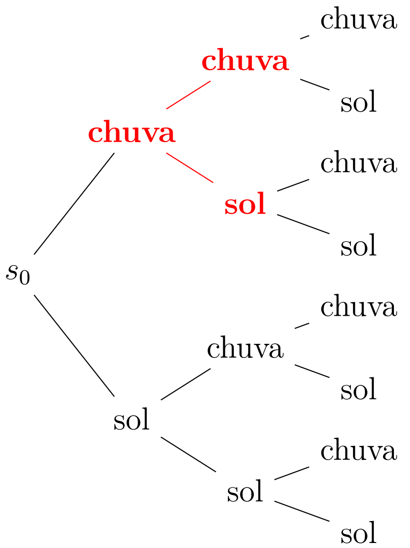
(b) (*0,5*) Suponha a seguinte situação: um jogo de futebol será decidido em pênaltis alternados e seu time será o segundo a cobrar.

O estado do jogo no momento da cobrança do seu time pode ser $s \in \{0, 1\}$, descrevendo se o oponente marcou em sua cobrança ($s = 1$) ou se a perdeu ($s = 0$).

O jogo pode terminar com vitória do seu time (payoff 1), derrota (payoff 0) ou seguir para mais uma rodada de pênaltis (payoff $\tilde{W}$ para você). O seu time converte favoravelmente pênaltis com probabilidade $p$. Já o oponente marca com probabilidade $q$.

Escreva sua função valor (ignore desconto) e encontre também o valor de $\tilde{W}$ em função dos demais parâmetros usando uma recursão.

(c) (*0,5*) Suponha uma economia em que a incerteza é descrita pela árvore abaixo:




Os preços em um mercado completo com todas as negociações feitas em $t = 0$ são os seguintes, para as três histórias marcadas:

- $q(s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}) = \frac{1}{3}$
- $q(s^2 = \{s_0, \text{chuva,chuva}\}) = \frac{1}{6}$
- $q(s^2 = \{s_0, \text{chuva,sol}\}) = \frac{1}{9}$

Se olharmos para uma economia de mercados sequencialmente completos que gera a mesma trajetória de consumo para todos agentes, quais deveriam ser os preços de ativos contingentes nos mercados que estariam abertos em $s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}$?

(d) (*0,5*) Pense em um problema de um planejador em uma economia dinâmica, com incerteza e sem produção. Os agentes têm índices de utilidade dados por $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ (têm aversão relativa ao risco constante) e concordam sobre as probabilidades de todos eventos. Como o consumo de cada agente depende da sua dotação corrente e do consumo agregado presente e passado?

## 2 Oferta de trabalho e RBC sem capital (2,0 pontos)

Suponha uma economia sem capital com um agente representativo com preferências descritas por

$$\sum_t \beta^t \left( C_t - \frac{N_t^{(1+\phi)}}{1+\phi} \right),$$

em que $N_t$ são horas trabalhadas e a produção é dada por

$$Y_t = Z_t N_t$$

e $Z_t$ é a uma sequência pré-determinada de TFP.

(a) (*0,5*) Derive o efeito de equilíbrio de um choque de TFP sobre emprego, produto e a taxa de juros.

(b) (*0,5*) O que acontece se houver crescimento de longo prazo de $Z_t$?

(c) (*0,5*) Como preferências da forma

$$\log(C_t) - \frac{N_t^{(1+\phi)}}{1+\phi}$$

afetariam o resultado acima? Interprete.

(d) (*0,5*) Em que medida o modelo com estas novas preferências teria sucesso e insucesso em replicar os fatos estilizados de RBC?

## 3 Equilíbrio com crenças heterogêneas (3,0 pontos)

Uma economia de trocas puras é povoada por dois consumidores. O consumidor $i$ tem preferências sobre sequências de consumo contingentes no tempo $\{c_t^i\}$ ordenadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, u(c_t^i(s^t)) \, \pi_t^i(s^t),$$

em que $u(c) = \log(c)$ e $\pi_t^i(s^t)$ é a probabilidade que o consumidor $i$ atribui à história $s^t$.

O espaço de estado é invariante no tempo. Em particular, $s_t \in S = \{\Delta, 0.5, 1-\Delta\}$ para todo $t \geq 0$ e $\Delta \in [0,1]$. Somente duas histórias são possíveis para $t = 0, 1, 2, ...$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| história 1: | $0.5,$ | $1-\Delta,$ | $1-\Delta,$ | $1-\Delta,$ | $\ldots$ |
| história 2: | $0.5,$ | $\Delta,$ | $\Delta,$ | $\Delta,$ | $\ldots$ |

O consumidor 1 atribui probabilidade $p$ à história 1 e probabilidade $(1-p)$ à história 2, enquanto o consumidor 2 atribui probabilidade $(1-p)$ à história 1 e probabilidade $p$ à história 2.

As dotações dos consumidores são dadas por:

$$y_t^1 = s_t$$
$$y_t^2 = 1 - s_t.$$

(a) (*0,25*) Descreva a incerteza do problema em um diagrama de árvore.

(b) (*0,5*) Defina um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu, em que mercados completos de consumo contingente a cada história estão abertos na data $t = 0$.

(c) (*0,75*) Compute este equilíbrio para $\Delta = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2}$. Descreva a alocação de consumo, os preços do consumo contingente e a desigualdade de consumo realizada para cada história.

(d) (*1,0*) Agora compute este equilíbrio para um caso geral, com $p \geq \frac{1}{2}$ e $\Delta \in [0,1]$.

(e) (*0,5*) Como os preços e a desigualdade de consumo dependem de $\Delta$? E de $p$? Explique.

# 4 Robson Cruz e o coqueiro (3,5 pontos)

Robson Cruz vive sozinho em uma ilha remota. Toda sua alimentação depende de um único coqueiro. Robson deriva utilidade apenas do consumo, de acordo com o índice de utilidade $u(c)$, e desconta o futuro com fator $\beta < 1$.

O tempo é discreto, o horizonte infinito e existem dois estados da natureza: $s \in \{sorte, azar\}$. A transição entre estados ocorre de acordo com uma matriz de transição $P$, que é simétrica e tem persistência $p$.[1] O coqueiro gera uma unidade de fruto no estado $s = sorte$ e meia unidade no estado $s = azar$.

Apesar de ser o único morador da ilha, Robson acredita em mercados financeiros sofisticados e é tomador de preços. Ele acredita que, em cada estado, pode comprar ações da empresa "Coqueiro S.A." ao preço $q(s)$. Existe um contínuo de medida unitária de ações emitidas, negociadas na bolsa da ilha.

Cada ação pagará amanhã um dividendo de uma unidade de coco caso $s' = sorte$ e meia unidade caso $s' = azar$. Ou seja, $d(sorte) = 1$ e $d(azar) = \frac{1}{2}$. Esta ação poderá também ser revendida ao preço $q(s')$.

A restrição orçamentária sequencial de Robson é, portanto, da forma:

$$(q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c,$$

em que $a$ é um número de ações que Robson tem hoje e $a'$ é quanto ele compra para amanhã.

Responda:

(a) *(0,5)* Escreva o problema de consumo e poupança de Robson de forma recursiva. Defina as funções-política para consumo e poupança. Sugestão: use $W = (q(s) + d(s))a$ como uma variável de estado.

(b) (1,0) Derive uma equação de Euler que caracteriza a poupança ótima de Robson.

(c) *(0,5)* Em equilíbrio, precisaremos que $a = 1$ e $c(s) = d(s)$. Qual a relação destas condições com o "truque de $(K, k)$" e com market-clearing?

(d) (1,0) Avalie a equações de Euler de Robson (estado a estado) neste equilíbrio, fazendo todas as substituições possíveis.

(e) **[Bônus]** *(0,5)* Encontre os preços de equilíbrio das ações da "Coqueiro S.A." quando $u(c) = \log(c)$ e $p = \frac{2}{3}$.

[1] Ou seja, uma matriz estocástica com $p$ na diagonal.