Segunda Prova
Gabarito

1 Brioche eating em tempo contínuo

Maria Antonieta tem preferências em formato log para seu consumo de brioche. Sua preferência intertemporal é descrita por uma taxa de desconto constante, ρ. Sejam k_0 o estoque inicial de brioche disponível e k_t a quantidade disponível no tempo t. Suponha que o brioche não cresce, nem deprecia e, de início, não há incerteza.

(a) Formule o problema recursivo de Maria Antonieta em termos de uma HJB. Comece definindo explicitamente a função valor $V(k)$. Em seguida, encontre sua trajetória ótima de fluxo de consumo c e estoque de brioche k. [Dica: conjecturar uma função política linear $c = \alpha k$ pode ajudar.]

Aqui, nada muda com relação a Q4 da Lista 4.

O problema é:

$$\rho V(k_t) = \underset{\{c_t\}}{\text{Max}} \ \log(c_t) + V'(k_t)\dot{k}_t$$

$$\text{s.t. } \dot{k}_t = -c_t$$

E a C.P.O.:

$$\frac{1}{c_t} = V'(k_t)$$

Agora, para encontrar a solução fechada do problema, faça o *guess* da função política como:

$$c = \alpha k$$

Precisamos encontrar o coeficiente α em termos dos demais parâmetros da economia (que, nesse caso, é somente ρ). Logo, substituindo isso na C.P.O.:

$$\alpha k_t = \frac{1}{V'(k_t)} \Rightarrow V'(k_t) = \frac{1}{\alpha k_t}$$

Integre isso em k_t para encontrar que:

$$V(k_t) = \frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C$$

Sendo C uma constante de integração. Substitua isso na HJB para encontrar que:

$$\rho \left[\frac{1}{\alpha} \log(k_t) + C \right] = \log(\alpha k_t) - \frac{\alpha k_t}{\alpha k_t}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\alpha} \log(k_t) + \rho C = \log(\alpha) - 1 + \log(k_t)$$

Disso, encontramos que:

$$\frac{\rho}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \rho$$

$$\rho C = \log(\alpha) - 1 \Rightarrow C = \frac{\log(\rho) - 1}{\rho}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados.

Substitua $\alpha = \rho$ no *guess* de c_t, e então use a lei de movimento de k_t para encontrar uma solução fechada:

$$\dot{k}_t = -\rho k_t$$

Resolvendo a EDO:

$$k_t = k_0 e^{-\rho t}$$

Temos a solução fechada de k_t. A constante de integração foi ignorada, pois a mera existência dela implicaria um valor positivo de k_t quanto $t \to \infty$, o que seria sub-ótimo! Então, subsitua isso em c_t para obter:

$$c_t = \rho k_t = \underbrace{\rho k_0}_{=c_0} e^{-\rho t}$$

Ou seja: o estoque de brioche decai exponencialmente, junto com o consumo.

(b) Suponha agora que Maria Antonieta saiba que será guilhotinada, mas não saiba quando. A notícia de seu guilhotinamento imediato pode chegar a cada instante com a intensidade λ.[1] Neste momento, sua função valor salta para $G(k) = 0, \forall k$. Formule a HJB e encontre a função política de Maria Antonieta, interpretando o que um aumento em λ faz. Compare este resultado com o caso de certeza da parte anterior.

---

[1] Ou seja, a distribuição do tempo de sobrevivência é exponencial com parâmetro λ e a probabilidade do guilhotinamente ser anunciado em um intervalo pequeno de tempo Δ é $\lambda\Delta$.

A introdução da probabilidade de ser guilhotinada modifica a HJB de tal forma:

$$\rho V(k_t) = \underset{\{c_t\}}{\text{Max}} \ \log(c_t) + V'(k_t)\dot{k}_t + \lambda \left[\cancelto{0}{G(k_t)} - V(k_t)\right]$$

$$\text{s.t. } \dot{k}_t = -c_t$$

A C.P.O. se mantém:

$$\frac{1}{c_t} = V'(k_t)$$

Logo, usando o mesmo *guess* de $c_t = \alpha k_t$, temos que a função valor tem o formato:

$$V(k_t) = \frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C$$

Substituindo isso na HJB, temos:

$$\rho\left[\frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C\right] = \log(\alpha k_t) - \frac{\alpha k_t}{\alpha k_t} + \lambda\left[0 - \left(\frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C\right)\right]$$

$$\Rightarrow (\rho + \lambda)\left[\frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C\right] = \log(k_t) + \log(\alpha) - 1$$

Logo, os coeficientes ficam:

$$\frac{\rho + \lambda}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \rho + \lambda$$

$$(\rho + \lambda)C = \log(\alpha) - 1 = \log(\rho + \lambda) - 1 \Rightarrow C = \frac{\log(\rho + \lambda) - 1}{\rho + \lambda}$$

Substituindo $\alpha = \rho + \lambda$ no *guess*, e usando isso na lei de movimento de k_t, temos:

$$\dot{k}_t = -(\rho + \lambda)k_t \Rightarrow k_t = k_0 e^{-(\rho+\lambda)t}$$

Logo, o consumo fica:

$$c_t = \underbrace{(\rho + \lambda)k_0}_{=c_0} e^{-(\rho+\lambda)t}$$

A introdução da probabilidade de ser guilhotinada torna o decaimento de k_t e de consumo c_t mais rápido! Inclusive, o fato de c_0 agora ser maior que o anterior devido a λ faz com que o consumo se inicie num nível mais elevado do que anteriormente. Basicamente, a soma da taxa λ no expoente atua como se fosse um maior nível de desconto ou impaciência, visto que a morte está cada vez mais próxima de Maria Antonieta.

(c) Caso não haja a incerteza acima, mas Maria Antonieta saiba que será guilhotinada em T com certeza, seu problema ainda pode ser descrito de maneira recursiva, mas se torna não-estacionário. Escreva a HJB para este caso e obtenha a CPO.

Com a introdução de morte determinística, as coisas ficam mais interessantes. Como o problema é não estacionário, t passa a ser uma variável de estado também, de tal forma que a HJB fica:

$$\rho V(k_t, t) = \begin{cases} \underset{\{c_t\}}{\text{Max}} \ \log(c_t) + V_k(k_t, t)\dot{k}_t + V_t(k_t, t), \text{ se } t \in [0, T) \\ \qquad\qquad \text{s.t. } \dot{k}_t = -c_t \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Com a C.P.O. em c_t se mantendo:

$$\frac{1}{c_t} = V_k(k_t, t)$$

Desde que $t \in [0, T)$.

(d) A partir do item anterior, podemos obter a Equação de Euler $\frac{\dot{c}}{c} = -\rho$. Também podemos mostrar que qualquer estoque terminal de brioches k_T positivo seria sub-ótimo. Partindo destas premissas (sem prová-las), encontre uma constante c_0 tal que $c_t = c_0 e^{-\rho t}$ e indique sua relação com k_0. Explique a intuição econômica por trás desta solução.

Como o prórprio enunciado diz, **não é necessário provar as afirmações sobre a taxa de crescimento de c e do valor de $k_T = 0$.**

Partindo diretamente das informações dadas, sabemos então que a lei de movimento de consumo é:

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\rho$$

Se você resolver essa EDO integrando em t (assim como foi feito nos itens anteriores para k), temos:

$$c_t = c_0 e^{-\rho t}$$

O enunciado também diz que a *boundary condition* $k_T = 0$ deve ser obtida na solução ótima. Como feito no gabarito da lista, podemos encontrar k_t através da lei de movimento $\dot{k}_t = -c_t$:

$$k_t = -\int c_t dt = \frac{c_0}{\rho}e^{-\rho t} + C$$

Usando a condição, temos:

$$k_T = \frac{c_0}{\rho}e^{-\rho T} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{c_0}{\rho}e^{-\rho T}$$

Logo,

$$k_t = \frac{c_0}{\rho}(e^{-\rho t} - e^{-\rho T})$$

Para achar k_0, basta:

$$k_0 = \frac{c_0}{\rho}(1 - e^{-\rho T})$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{\rho k_0}{1 - e^{-\rho T}}$$

Ou seja,

$$c_t = \frac{\rho k_0}{1 - e^{-\rho T}}e^{-\rho t}$$

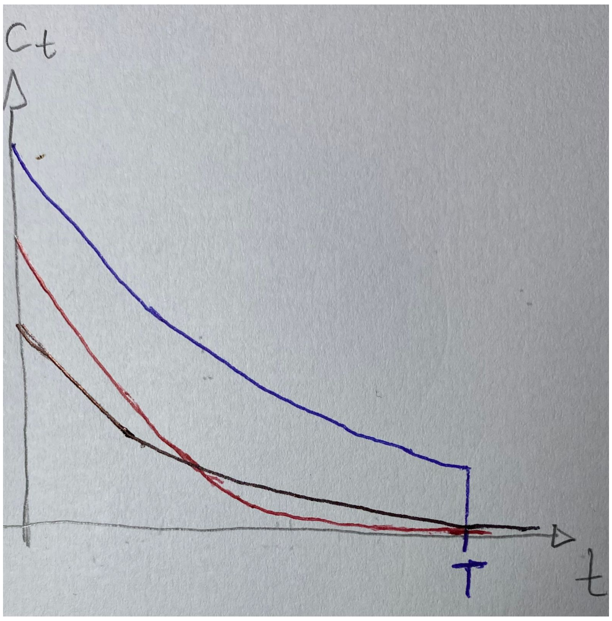
Observe que, quanto menor o valor de T (ou seja, quanto mais rápido a morte de Maria Antonieta chegar), maior a quantia inicial de brioche que ela decidirá consumir. Afinal, de nada adianta termos brioche sobrando quando se está morto.

(e) Discuta como as três soluções se comparam, usando um gráfico em (t, c_t). Além de fornecer o gráfico, explique a intuição econômica por trás das diferenças nas trajetórias de consumo.

As linhas pretas, vermelhas e azul representam os itens (a), (b) e (d), respectivamente. O assumption feito é a de que:

$$c_{0,a} < c_{0,b} < c_{0,d}$$

Mas, por construção, sabemos que a relação $c_{0,a} < c_{0,b}$ vale, por $\lambda > 0$. Como dito anteriormente, Maria começa a comer mais rápido (visto em $c_{0,b} > c_{0,a}$), pois sabe que a morte está mais próxima dela, e ela deseja estar com $k_t = 0$ no dia de sua morte, de forma a aproveitar todo o estoque de brioche enquanto estiver viva. No item (a), tal pressa não é vista, pois ela é imortal.



Analogamente, sabemos também que $c_{0,a} < c_{0,d}$ por construção. A intuição é a mesma: a morte torna o consumo inicial maior, o que o faz decair mais rapidamente.

Já a relação entre $c_{0,b}$ e $c_{0,d}$ é ambígua, e depende dos parâmetros. A diferenca entre o item (b) do (d) seria que, em (b), a morte estocástica também afeta a curvatura expoencial, enquanto a morte determinística aftea apenas o consumo em $t = 0$. Por outro lado, sabemos que $c_{t,d} = 0, \forall t \geq T$, tornando a curva "truncada" em comparação aos demais itens. Como Maria sabe a data de sua morte em (d), seu consumo será perfeitamente calculado para que o estoque zere quando morrer. Já em (b), a incerteza faz com que o consumo continue perdurando em $c_{t,b} \geq 0$, ainda que arbitrariamente pequeno, para valores altos de t (mais especificamente, em $t \geq T$).

Observação: Muitos não representaram o "truncamento" no gráfico para o caso de morte determinística, fazendo com que a curva exponencial decaísse suavemente para zero no instante T. Isso não foi motivo de penalização, pois o foco estava mais na interpretação da questão!

Para notar que de fato há um "truncamento" nesse instante, basta notar que:

$$c_T = \frac{\rho k_0}{1 - e^{-\rho T}} e^{-\rho T} > 0$$

---

2 Notícias macro

O consumidor representativo maximiza uma função utilidade CRRA,

$$E_t \sum \beta^j \frac{c_{t+j}^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

O consumo é dado por um fluxo de dotações estocástico. Podemos definir um ativo cujo dividendo é exatamente $\{c_t\}_t$ e cujo preço é p_t.

(a) Tomando o fator estocástico de desconto m_{t+1} como dado, qual equação recursiva deve satisfazer o preço deste ativo, cujo dividendo é exatamente o fluxo de dotação?

Como exaustivamente treinado na Lista 5, sabemos que a equação de apreçamento segue a forma:

$$1 = \mathbb{E}_t \{m_{t+1} R_{t+1}\}$$

Mais especificamente, como o dividendo é o prórpio consumo, temos que $R_{t+1} = \frac{c_{t+1}}{p_t}$. Logo,

$$1 = \mathbb{E}_t \left\{ m_{t+1} \frac{c_{t+1}}{p_t} \right\}$$

Observação: Muitos alunos não se atentaram a condição do dividendo excluir o preço neste modelo, o que culminou na seguinte expressão:

$$1 = \mathbb{E}_t \left\{ m_{t+1} \frac{c_{t+1} + p_{t+1}}{p_t} \right\}$$

Fui "mão leve" neste item, e considerei integralmente essa solução também. No entanto, note que resolver o exercício com essa expressão se torna muito mais difícil!

(b) Qual o fator estocástico de desconto de equilíbrio deste ambiente?

É sabido que:

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

E que $u'(c) = c^{-\gamma}$, pelo enunciado. Logo,

$$m_{t+1} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma}$$

(c) Mostre que, com utilidade logarítmica, a relação preço/consumo para este ativo é constante, independentemente da distribuição de crescimento do consumo. Explique a intuição econômica por trás deste resultado.

Com $\gamma = 1$, temos:

$$1 = \mathbb{E}_t \left\{ \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-1} \frac{c_{t+1}}{p_t} \right\}$$

Logo, simplificamos como:

$$1 = \mathbb{E}_t \left\{ \beta \frac{c_t}{p_t} \right\} = \beta \frac{c_t}{p_t}$$

Pois tais valores não incorporam incerteza para $T = t$. Isolando a razão,

$$\frac{c_t}{p_t} = \frac{1}{\beta}$$

Dado que $d_t = c_t$ aqui, temos neste mundo que o resultado acima também representa a razão dividendo-preço da economia. Esta seria uma condição semelhante a de "não-formação de bolhas", uma vez que uma razão constante implica que a taxa de crescimento dos dividendos é exatamente a mesma dos preços, gerando estabilidade.

(d) Suponha que haja uma notícia no tempo t de que o consumo futuro será maior.[2] Para $\gamma < 1$, $\gamma = 1$, e $\gamma > 1$, avalie o efeito desta notícia sobre o preço. Forneça uma breve explicação matemática e interprete, focando em que explicação este modelo simples oferece para o efeito de boas notícias "macro" têm em preços de ativos.

Vou começar analisando o caso de $\gamma = 1$, pois ele é mais fácil. Basta então pegar o resultado do item anterior:

$$\frac{c_t}{p_t} = \frac{1}{\beta}$$

Nada depende do valor de c_{t+1}! Ou seja, a notícia surte efeito nenhum neste caso. Lembre-se que a razão constante remete a um crescimento estável de dividenco com preços. Como $d_t = c_t$, temos que esta razão também remete a uma taxa de crescimento invariante da economia como um todo, mantendo ela permanentemente estável.

[2] Por exemplo, o consumo em uma data futura T o consumo cresce em 2% em todos os estados.

Agora, voltemos ao caso geral, onde temos:

$$1 = \mathbb{E}_t \left\{ \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \frac{c_{t+1}}{p_t} \right\}$$

Manipulando,

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \left\{ c_{t+1}^{1-\gamma} \frac{c_t^{\gamma}}{p_t} \right\}$$

$$\Rightarrow p_t = \beta \mathbb{E}_t \left\{ c_{t+1}^{1-\gamma} c_t^{\gamma} \right\}$$

Assuma então que $\gamma < 1$. Um choque positivo em c_{t+1} influencia positivamente o termo $c_{t+1}^{1-\gamma}$. Assumindo que c_t se mantém constante, temos então que o preço sofrerá um aumento também. Isso nos gera a reação mais "padrão": uma expectativa futura positiva sobre a economia gera um aumento dos preços de hoje!

Por outro lado, se $\gamma > 1$, temos que $c_{t+1}^{1-\gamma}$ impacta negativamente os preços hoje. Logo, uma boa notícia da economia acaba gerando queda nos preços de hoje. Porque?

Vamos pensar nos três resultados obtidos aqui: para $\gamma < 1$, p_t sobe; se $\gamma = 1$, p_t não se mexe; por fim, se $\gamma > 1$, p_t cai.

Em outras palavras, o efeito positivo de p_t em relação a c_{t+1} é decrescente com relação a aversão ao risco γ. Quanto mais avesso ao risco o agente for, maior o desejo de suavizar consumo dele (i.e., ele gosta menos de volatilidade na economia). Sendo assim, a perturbação na economia com relação a notícia tem diferentes níveis de reação com relação a preferência: se ele é pouco avesso, teremos reação positiva dos preços. Se ele for moderadamente avesso, nada ocorre. Se ele for muito avesso, a reação será negativa.

---

3 Prêmio de risco e custos de ciclos de negócios

Nesta questão, relacionamos o prêmio de risco ao custo de ciclos de negócios, em um ambiente simplificado. Suponha um consumidor representativo, em uma economia de dotação com duas datas, $t = \{0, 1\}$.

As preferências deste consumidor são da forma:

$$u(c_0) + \beta \mathbb{E}\left[u\left(c_1\right)\right],$$

com $u\left(c\right) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

O crescimento do consumo entre $t = 0$ e $t = 1$ é dado por

$$\frac{c_1}{c_0} = \overline{g} e^{\epsilon_g - \frac{1}{2}\sigma_g^2},\ \epsilon_g \sim N\left(0, \sigma_g^2\right)$$

(Lembre-se que, para uma variável $x \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\mathbb{E}\left[e^x\right] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$). Logo, $\mathbb{E}_t\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}\right] = \overline{g}$.

Supomos também, para simplificar, retornos log-normais para cada um ativo j analisado

$$R^j_{t+1} = \left(1 + \overline{r}_j\right) e^{\epsilon_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2},\ \epsilon_j \sim N\left(0, \sigma_j^2\right)$$

logo

$$\mathbb{E}_t\left[R^j\right] = \left(1 + \overline{r}_j\right).$$

Responda:

(a) Escreva a equação de Euler para o agente representativo e um ativo arbitrário j, sob a hipótese de que o crescimento do consumo e o retorno deste ativo são conjuntamente log-normalmente distribuídos. Obtenha o retorno esperado deste ativo em função dos demais parâmetros da economia. **Dica**: Use a seguinte aproximação por log ao dar sua resposta: $\overline{r}_j \approx \log(1 + \overline{r}_j)$.

Como treinado exaustivamente na Lista 5, a eq. de Euler segue:

$$1 = \mathbb{E}\left\{\beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} R^j\right\}$$

Substituindo para a CRRA, temos:

$$1 = \mathbb{E}\left\{\beta \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^{-\gamma} R^j\right\}$$

Usando as informações dadas no enunciado, temos que:

$$1 = \mathbb{E}\left\{\beta\left(\overline{g}e^{\epsilon_g - \frac{1}{2}\sigma_g^2}\right)^{-\gamma}(1+\overline{r}_j)\, e^{\epsilon_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2}\right\}$$

Resta manipular essa bela equação agora:

$$1 = \beta\overline{g}^{-\gamma}(1+\overline{r}_j)e^{\frac{\gamma}{2}\sigma_g^2 - \frac{1}{2}\sigma_j^2}\mathbb{E}\left\{e^{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j}\right\}$$

Haja visto que $-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j$ é Normal, com média:

$$\mathbb{E}\left\{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j\right\} = 0$$

E variância:

$$\mathbb{V}\left\{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j\right\} = \mathbb{V}\left\{-\gamma\epsilon_g\right\} + \mathbb{V}\left\{\epsilon_j\right\} + 2\text{Cov}\left(-\gamma\epsilon_g, \epsilon_j\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}\left\{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j\right\} = \gamma^2\sigma_g^2 + \sigma_j^2 - 2\gamma\sigma_{g,j}$$

Podemos abrir a esperança como:

$$\mathbb{E}\left\{e^{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j}\right\} = e^{\mathbb{E}\{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j\} + \frac{1}{2}\mathbb{V}\{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j\}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left\{e^{-\gamma\epsilon_g + \epsilon_j}\right\} = e^{\frac{1}{2}(\gamma^2\sigma_g^2 + \sigma_j^2) - \gamma\sigma_{g,j}}$$

Logo, voltando a expressão original:

$$1 = \beta\overline{g}^{-\gamma}(1+\overline{r}_j)e^{\frac{\gamma}{2}\sigma_g^2 - \frac{1}{2}\sigma_j^2 + \frac{1}{2}(\gamma^2\sigma_g^2 + \sigma_j^2) - \gamma\sigma_{g,j}}$$

$$\Rightarrow 1 = \beta\overline{g}^{-\gamma}(1+\overline{r}_j)e^{\frac{1}{2}(\gamma+\gamma^2)\sigma_g^2 - \gamma\sigma_{g,j}}$$

Isolando $(1+\overline{r}_j)$, temos:

$$(1+\overline{r}_j) = \beta^{-1}\overline{g}^{\gamma}e^{\gamma\sigma_{g,j} - \frac{1}{2}(\gamma+\gamma^2)\sigma_g^2}$$

E, usando a aproximação por logs,

$$\overline{r}_j \approx \log(1+\overline{r}_j) = -\log\beta + \gamma\log\overline{g} + \gamma\sigma_{g,j} - \frac{1}{2}(\gamma+\gamma^2)\sigma_g^2$$

Obtemos exatamente a mesma expressão do slide!

(b) Especialize esta equação para o ativo livre de risco e interprete os termos envolvidos.

Um ativo livre de risco é tal que $\sigma_j^2 = 0$ e, portanto, $\sigma_{g,j} = 0$. Logo,

$$\overline{r}_f = -\log\beta + \gamma\log\overline{g} - \frac{1}{2}(\gamma + \gamma^2)\sigma_g^2$$

Veja que a interpretação que deve ser dada é a convencional.

- Quanto maior β, mais paciente o agente. Logo, menor precisa ser a taxa de juros para que o agente esteja poupando otimamente.
- Quanto maior a taxa de crescimento do consumo $\bar{g}$, maior a taxa de juros associada. Esse efeito é magnificado para baixa elasticidade intertemporal.
- O terceiro termo reflete a poupança precaucional. Quanto maior o choque de dispersão do consumo, menor a taxa de juros que eu preciso para querer poupar. Novamente, o efeito é magnificado por baixa elasticidade intertemporal e alta aversão ao risco.

(c) Obtenha o prêmio de risco no ativo j e interprete o seu resultado.

O prêmio de risco é dado por:

$$\Lambda = \overline{r}_j - \overline{r}_f$$

Sendo assim, temos:

$$\Lambda = \gamma\sigma_{g,j}$$

Assim como visto em aula, o prêmio de risco é proporcional ao parâmetro de aversão relativa ao risco e à covariância entre o retorno do ativo j e o crescimento do consumo. Afinal, quão mais positivamente correlacionado for o retorno do ativo com o consumo, maior a taxa de juros que exijo para segurar o ativo. Isso porque os ativos que compensam períodos de consumo ruim são os mais valiosos.

(d) Suponha agora um mundo com as mesmas preferências CRRA e com apenas dois períodos, mas que não possua a existência de nenhum ativo. Aqui, o agente pode escolher trocar, a um custo λ, o crescimento arriscado do consumo, por um crescimento seguro, de tal forma que $\frac{c_1}{c_0} = e^{-\lambda}\overline{g}$. Mostre que existe um $\lambda > 0$ que faz com o que o agente esteja exatamente indiferente entre o consumo arriscado do enunciado e este consumo seguro, mas de menor valor esperado (porque $e^{-\lambda} < 1$). Caracterize este λ e o relacione ao prêmio de um ativo que entregasse o consumo como payoff. Interprete.

Para encontrar o custo λ que deixa o agente indiferente entre as opções, basta igualarmos a utilidade para os dois casos.

Para o caso de crescimento arriscado, temos:

$$\frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta\mathbb{E}\left\{\frac{\overline{g}^{1-\gamma}e^{(1-\gamma)(\epsilon_g - \frac{1}{2}\sigma_g^2)}c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta\overline{g}^{1-\gamma}e^{\frac{1}{2}[(1-\gamma)^2\sigma_g^2 - (1-\gamma)\sigma_g^2]}\frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left\{1 + \beta\overline{g}^{1-\gamma}e^{-\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\sigma_g^2}\right\}$$

Já para o caso do crescimento seguro, teríamos:

$$\frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta\mathbb{E}\left\{\frac{\overline{g}^{1-\gamma}e^{-\lambda(1-\gamma)}c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left\{1 + \beta\overline{g}^{1-\gamma}e^{-\lambda(1-\gamma)}\right\}$$

Comparando as duas expressões, é evidente que precisamos atingir a seguinte igualdade:

$$-\lambda(1-\gamma) = -\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\sigma_g^2$$

O que nos permite encontrar λ:

$$\lambda = \frac{1}{2}\gamma\sigma_g^2$$

O formato deste custo é muito similar ao prêmio de risco derivado no item anterior. Neste caso, o custo se relaciona com a volatilidade do consumo, enquanto o prêmio de risco se relaciona a volatilidade do ativo j com relação ao próprio consumo. Note que o mundo descrito aqui é semelhante ao da questão anterior de notícias, onde o consumo faz papel de dividendo em função da ausência de um ativo. Ademais, a decisão de abrir mão do risco para consumir menos é basicamente o equivalente a investir somente no ativo livre de risco, ignorando a oportunidade de investir num ativo arriscado j. Sendo assim, aqui medimos λ como o "prêmio" de risco de se expôr aos choques econômicos, que podem trazer alto consumo em tempos de bonança, mas baixo consumo em tempos ruins.

4 Teoria q em tempo contínuo

Considere um contínuo de firmas idênticas em uma indústria. O capital de uma firma em particular é denotado por k, e o capital agregado da indústria é K. O tempo é contínuo e o horizonte é infinito.

As firmas têm funções de produção da forma "Ak", com constantes de escala,

$$F(k) = A\,k,$$

em que k é o capital e A é a produtividade.

A demanda total pelos produtos idênticos das firmas é dada por:

$$D(K) = D\,p(K)^{-\epsilon},$$

em que $p(K)$ é o preço de equilíbrio, $\epsilon > 1$ é a elasticidade-preço da demanda e D é uma constante.

Cada firma enfrenta um custo de ajustamento do capital da forma:

$$C(i, k) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{k} - \delta\right)^2 k,$$

em que i é o investimento e δ é a taxa de depreciação.

A dinâmica do capital individual é descrita por

$$\dot{k} = i - \delta k.$$

Questões:

(a) Mostre que, no equilíbrio deste mercado, a receita de vendas $\pi(K, k)$ é linear em k e é também função de A e K. Explicite esta dependência, determinando o preço de equilíbrio $p(K)$.

Aqui, invocamos a microeconomia. A receita é dada pelo produto entre o preço e a quantia produzida:

$$\pi(K, k) = p(K)F(k) = p(K)Ak$$

O que explicita a linearidade em k.

Agora, para encontrar o preço de equilíbrio, temos que igualar a oferta de bens agregada com a demanda agregada.

Para encontrar a oferta agregada, basta somar $F(k)$ entre as firmas para obter:

$$F(K) = AK$$

O que decorre da linearidade da função de produção em k.

Igualando então oferta com a demanda, temos:

$$AK = Dp(K)^{-\epsilon}$$

$$\Rightarrow p(K)^{\epsilon} = \frac{D}{AK}$$

$$\Rightarrow p(K) = \left(\frac{D}{AK}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}$$

O preço de equilínrio $p(K)$ em termos do capital agregado, K.

Voltando a receita, obtemos então que:

$$\pi(K,k) = \left(\frac{D}{AK}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} Ak$$

$$\Rightarrow \pi(K,k) = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} k$$

(b) Escreva a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para a firma com capital k quando o capital agregado é K. Suponha e verifique que $V(K,k) = v(K)k$, em que $v(K)$ é, ao mesmo tempo, o q médio e marginal.

Conforme feito nas notas de aula do prof. Felipe, temos a HJB padrão:

$$rV(K,k) = \underset{\{i\}}{\text{Max}} \left\{ \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} k - i - \frac{1}{2}\left(\frac{i}{k} - \delta\right)^2 k \right\} + V_K(K,k)\dot{K} + V_k(K,k)\dot{k}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{k} = i - \delta k \\ \dot{K} = J(K) \end{cases}$$

Tirando a C.P.O.:

$$[i]: \quad -1 - \left(\frac{i}{k} - \delta\right) + V_k(K,k) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{i}{k} - \delta = V_k(K,k)$$

Definindo $\hat{i} = \frac{i}{k}$, é notável que:

$$V_k(K,k) = 1 + c'\left(\hat{i}\right) = q$$

Temos o q marginal.

Aplicando Benveniste-Scheinkman,

$$rV_k(K,k) = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \left(\frac{i}{k} - \delta\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{k} - \delta\right) - \frac{i}{k}\right) + V_{kk}(K,k)\dot{k} - V_k(K,k)\delta + V_{Kk}(K,k)\dot{K}$$

Guarde o resultado obtido acima, e pause por aqui. Vamos agora invocar Hayashi, conforme nas notas de aula, decompondo $V(K,k) = v(K)k$:

$$r\left[v(K)k\right] = \underset{\{\hat{i}\}}{\text{Max}} \left\{\left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \hat{i} - \frac{1}{2}(\hat{i} - \delta)^2\right\} k + v'(K)k\dot{K} + v(K)\dot{k}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{k} = (\hat{i} - \delta)k \\ \dot{K} = J(K) \end{cases}$$

Se substituirmos $\dot{k}$ na HJB de cima, podemos cancelar k de todos os lados e encontrar:

$$rv(K) = \underset{\{\hat{i}\}}{\text{Max}} \left\{\left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \hat{i} - \frac{1}{2}(\hat{i} - \delta)^2\right\} + v'(K)\dot{K} + v(K)(\hat{i} - \delta)$$

Novamente, tire a C.P.O. em $\hat{i}$ para obter:

$$[\hat{i}]: \quad -1 - (\hat{i} - \delta) + v(K) = 0$$

$$\Rightarrow v(K) = 1 + (\hat{i} - \delta) = 1 + c'(\hat{i}) = q$$

Disso, concluímos que $V_k(K,k) = v(K)$, o que implica no seguinte:

$$Q = \frac{V(K,k)}{k} = v(K) = V_k(K,k) = q$$

Do lado esquerdo, temos o Q médio. Do direito, o q marginal. Eles são iguais!

Se $V_k(K,k) = v(K)$, então $V_{kk}(K,k) = \frac{dv(K)}{dk} = 0$ e $V_{Kk}(K,k) = \frac{dv(K)}{dK} = v'(K)$. Substituindo isso no nosso Benveniste-Scheinkman original, obtemos:

$$rv(K) = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \left(\frac{i}{k} - \delta\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{k} - \delta\right) - \frac{i}{k}\right) - v(K)\delta + v'(K)\dot{K}$$

$$\Rightarrow (r+\delta)v(K) = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \left(\frac{i}{k} - \delta\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{k} - \delta\right) - \frac{i}{k}\right) + v'(K)\dot{K}$$

(c) Qual condição caracteriza a taxa de investimento ótima? Esta taxa ótima depende de k?

Retome a C.P.O. do item anterior:

$$1 + \hat{\imath} - \delta = q \Rightarrow \hat{\imath} = q + \delta - 1$$

Conseguimos escrever a taxa de investimento, $\hat{\imath}$, como função do q marginal.

(d) Caracterize o locus $\dot{K} = 0$, discuta sua dependência de q e K e use-o para caracterizar o valor de q em steady-state, q^{SS}. Interprete o seu resultado.

Invocando a simetria, sabemos que toda firma irá seguir a mesma taxa ótima de $\hat{\imath}(q)$, o que permite escrever a lei de movimento $\dot{k}$ em termos do agregado $\dot{K}$:

$$\dot{K} = (\hat{\imath} - \delta)K$$

Usando o investimento ótimo derivado anteriormente, temos:

$$\dot{K} = (q + \delta - 1 - \delta)K$$

O que implica, no lócus $\dot{K} = 0$:

$$q = 1 = q^{SS}$$

Ou seja: temos uma relação horizontal no plano (K, q) para $\dot{K} = 0$. O fato de $q^{SS} = 1$ é esperado com a teoria q, onde a razão entre o valor de mercado do capital com o seu custo de reposição deve ser de 1:1, indicando que há estabilidade na decisão de investir: caso $q < 1$, teríamos que o custo de repor superaria o valor de mercado, dando incentivo a reduzir o nível de investimento; por outro lado, se $q > 1$, teríamos maior valoração com relação ao custo de reposição, dando incentivo para aumentar investimentos.

(e) Retorne à HJB para obter um equação da forma

$$\dot{q} = (r + \delta)\, q + \varphi\,(q) - \pi\,(K)\,,$$

para uma determinada função φ e caracterize o locus $\dot{q} = 0$. Suponha a partir daqui, sem demonstrar, que ele é negativamente inclinado no plano (K, q) (i.e., estamos nos restringindo a região onde a inclinação é negativa, conforme na nota de aula).

Retome a eq. de Euler escrita anteriormente:

$$(r+\delta)v(K) = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \left(\frac{i}{k} - \delta\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{i}{k} - \delta\right) - \frac{i}{k}\right) + v'(K)\dot{K}$$

Note que também podemos usar o fato de que:

$$q = v(K) \Rightarrow \dot{q} = v'(K)\dot{K}$$

Bem como substituir:

$$\hat{i}(q) = q + \delta - 1$$

Para simplificar ainda mais a eq. de Euler:

$$(r+\delta)q = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - (q-1)\left(\frac{1}{2}(q-1) - q + \delta - 1\right) + \dot{q}$$

Obtendo então a relação pedida no enunciado. Para obter o lócus, basta igualar $\dot{q} = 0$ na relação acima. Isso basta para resolver a questão: note que o enunciado não pediu para você provar nada sobre a inclinação do lócus, apenas supor! Logo, estamos nos restringindo a região negativa para desenhar o gráfico em itens subsequentes - basta usar o formato padrão que vocês aprenderam em sala.

(f) Identifique o valor de K^{SS} e interprete o seu resultado. Também represente o sistema dinâmico em um diagrama de fase, identificando a localização da trajetória de sela. De novo: Se limite a região negativa na hora de esboçar seu resultado!

Para obter K^{SS}, basta substituir os valores de $\hat{i}(q^{SS})$, $q^{SS} = 1$ e $\dot{q} = 0$ na eq. de

Euler. Sendo assim, temos:

$$(r+\delta)q^{SS} = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} - \left(q^{SS} + \delta - 1 - \delta\right)\left(\frac{1}{2}\left(q^{SS} + \delta - 1 - \delta\right) - q^{SS} + \delta - 1\right) + \dot{q}$$

$$\Rightarrow (r+\delta) = \left(\frac{D}{K}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow K^{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{D^{\frac{1}{\epsilon}} A^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}{r+\delta}$$

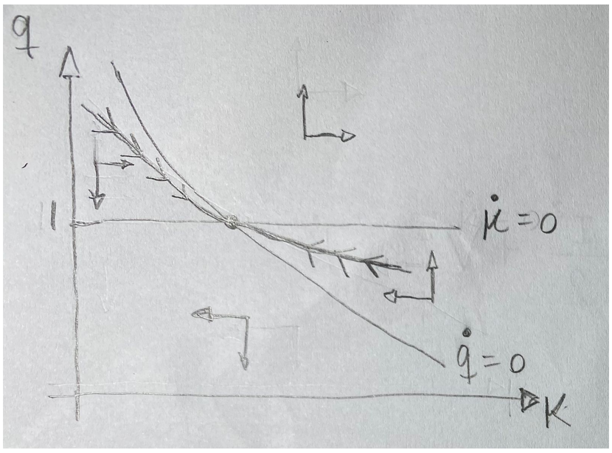
$$\Rightarrow K^{SS} = \frac{DA^{\epsilon-1}}{(r+\delta)^{\epsilon}}$$

Intuitivamente, quanto maior a TFP ou a demanda pelos bens (dado pela constante D neste caso), maior será o capital agregado da economia, que é necessário para sustentar a produção de mais bens. Por outro lado, quando maior a depreciação ou a taxa de retorno r, menor será o capital agregado de SS, visto que ambas as variáveis contribuem para tornar o ato de obter e poupar capital mais custoso.

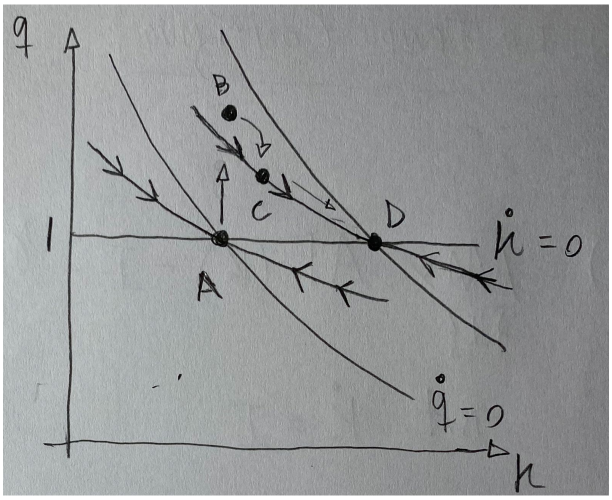
(g) Usando o diagrama de fase, discuta a trajetória de equilíbrio de q e K para o seguinte cenário: a economia está inicialmente em um equilíbrio estacionário com $A = A_0$. Em $t = 0$, todos os agentes descobrem que a partir de $t = T$, a produtividade aumentará para $A_1 > A_0$.

(i) Caracterize o novo estado estacionário e a trajetória de equilíbrio, detalhando o que ocorre entre $t = 0$ e $t = T$.

Assumindo o formato usual do diagrama de fases que vocês viram em aula, temos:



Logo, um choque pré-anunciado em $t = 0$ com ocorrência prevista para $t = T$ já gera uma reação antecipada em $t = 0$, visto no gráfico abaixo:

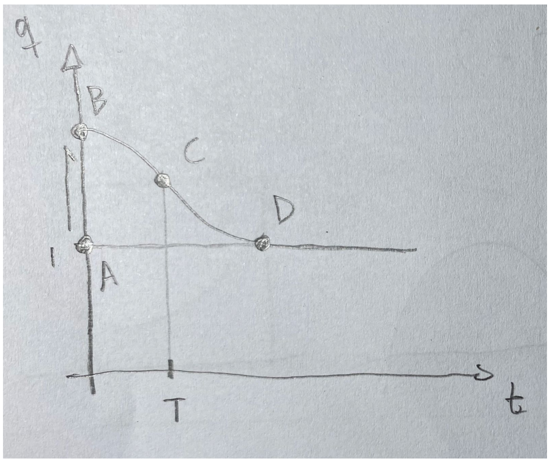


Pois apenas o lócus $\dot{q} = 0$ apresenta dependência do parâmetro de TFP, dado por A.

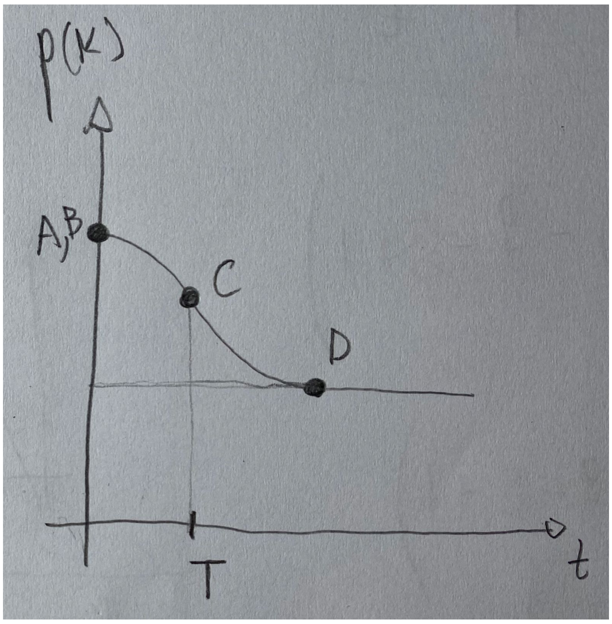
Nesta ocasião, para obedecer a trajetória do braço estável previsto para ocorrer em $t = T$, a razão q deve subir para um valor acima de 1 temporariamente, o que faz com que K cresça até que se atinja o novo SS em $t = T$. Ao mesmo tempo em que isso acontece, q vai convergindo novamente para 1, de forma que ambas as variáveis se estabilizem no novo SS.

(ii) Como a antecipação afeta p_T e q_T? Compare os efeitos em p_T e q_T para os casos de $T = 0$ (choque não antecipado) e $T > 0$.

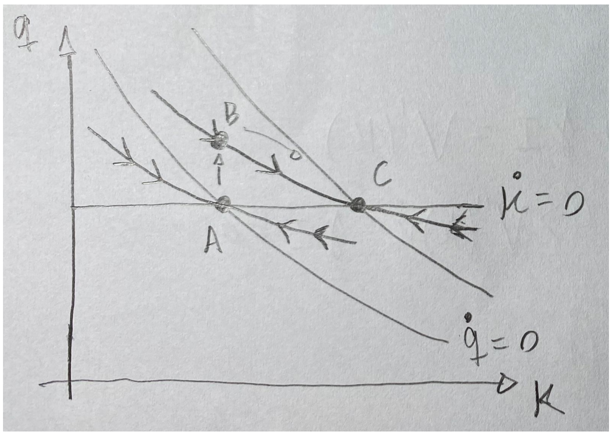
Olhando para o movimento no gráfico de cima, sabemos que a trajetória de q com relação ao tempo será a seguinte:



Onde cada letra representa o ponto análogo ao gráfico anterior. Agora, para determinarmos a trajetória de $p(K)$, basta lembrar que ele tem uma relação inversa a de K. Logo, se K cresce ao longo do tempo, $p(K)$ irá cair:



Agora, como a reação mudaria caso o choque fosse não antecipado? Simples: Teríamos um salto de q direto para o novo braço estável:



Observe que a trajetória de q não é muito diferente: Um aumento instantâneo em $t = 0$, seguido de uma tendência decrescente até que retorne a $q = 1$, no novo SS. O movimento de K, por consequência, é o mesmo do caso anterior também: crescimento constante até atingir o novo SS. Logo, pela relação inversa entre $p(K)$ e K, veremos que a movimentação de $p(K)$ também não muda.

A mudança de fato ocorre na **magnitude** do salto, bem como no *timing*. Se analisarmos o que ocorre exatamente em $t = T$, temos que o caso não-antecipado (i.e., com $T = 0$) não implica um salto em p_T, pois o capital é fixo neste instante. Isso difere do caso antecipado ($T > 0$), onde K_T está a um nível superior ao do SS anterior, implicando uma queda no preço p_T. Já para o q-marginal, temos que q_T será maior no caso não-antecipado, devido ao salto direto para o novo braço-estável.
