Um exemplo rápido

Suponha $t = 0,1$ e dois agentes, $i \in \{0,1\}$, com rendas iid que podem ser $y_i \in \{1,2\}$ com probabilidade $\frac{1}{2}$.

Em $t = 0$, ambas rendas são $y_i = \frac{3}{2}$.

Suponha $\beta = 1$ e $u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{para } \sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \\ \log(c), & \sigma = 1, \end{cases}$, por simplicidade.

Chamamos os estados de s_0 para o estado inicial e $s \in S = \{1,2,3,4\}$ para as quatro realizações de renda: $(2,2), (2,1), (1,2), (1,1)$.

Problema do agente

$$\max_{c_0, \{c(s_1)\}} u(c(s_0)) + \sum_{s_1} \pi(s_1) u(c(s_1))$$

s.a.

$$c_0 + \sum q(s_1) c(s_1) \leq \frac{3}{2} + \sum q(s_1) y(s_1).$$

CPO

$$u'(c_i(s_0)) q(s_1) = \pi(s_1) u'(c(s_1))$$

Logo,

$$c_i\left(s^1\right)^{\sigma} q(s_1) = \pi(s_1) c_i(s_0)^{\sigma}.$$

Somando entre agentes

$$C(s_0) q(s_1)^{\frac{1}{\sigma}} = \pi(s_1)^{\frac{1}{\sigma}} C(s_1),$$

e usando market clearing

$$Y(s_0) q(s_1)^{\frac{1}{\sigma}} = \pi(s_1)^{\frac{1}{\sigma}} Y(s_1).$$

Logo, para cada s_1 temos

$$q(s_1) = \pi(s_1) \left[\frac{Y(s_0)}{Y(s_1)}\right]^{1/\sigma}.$$

Logo,

$$c_i(s_0) = \frac{3}{2}$$

e

$$c_i(s_1) = \frac{1}{2} Y(s_1)$$

$$\mu_i = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\sigma}.$$

Note que temos quatro ativos de Arrow-Debreu contingentes aos estados de $t = 1$, que podemos chamar de $j = \{1,2,3,4\}$.

Cada ativo destes tem o preço $q(s_1)$ e o retorno (aleatório).

$$R^j(s_1) = \begin{cases} \frac{1}{q(s_j)} & , \, se \, s_1 = s_j, \\ 0 & , \, caso \, contrário. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbb{E}\left[R^j\right] = \left[\frac{Y(s_1)}{Y(s_0)}\right]^{1/\sigma}.$$

Ativos que pagam em estados com $Y(s_1)$ maior têm retornos esperados maiores. O que gera esta heterogeneidade de retorno?