Professor: Felipe S. Iachan
Monitor: Alex Muranaka

Lista 2 - Programação dinâmica com incerteza
Data de entrega: 02/08/2024 (23:59)

Exercício 1 (Cadeias de Markov)

Considere o exemplo de Hamilton (1989), que calculou uma matriz de transições entre estados para a economia americana. As entradas da matriz são $P(1,1) = 0.9$, $P(1,2) = 0.1$, $P(2,1) = 0.25$, $P(2,2) = 0.75$, em que o estado 1 é de crescimento e o estado 2 é de recessão. O crescimento esperado no estado 1 é de 1,2% a.t., enquanto no estado 2 é de 0,4% a.t..

(a) Qual a probabilidade incondicional de a economia estar em uma recessão?

(b) Qual o crescimento médio da economia?

(c) Qual a duração esperada de uma recessão? Qual a duração esperada de um *boom*?

(d) Suponha que a economia esteja numa recessão hoje. Qual a probabilidade de que a economia ainda se encontre em recessão nos próximos dois anos? (lembre-se que as estimativas usam dados trimestrais)

(e) Imagine agora que temos dados relativos ao mercado de trabalho. A probabilidade de se tornar desempregado é de 5%, enquanto a probabilidade de ser contratado é de 50%. Construa uma matriz de transição de Markov e encontre a distribuição estacionária de estados de emprego.

Exercício 2 (Robson Cruz e o Coqueiro - P1, 2023)

Robson Cruz vive sozinho em uma ilha remota. Toda sua alimentação depende de um único coqueiro. Robson deriva utilidade apenas do consumo, de acordo com o índice de utilidade $u(c)$, e desconta o futuro com fator $\beta < 1$.

O tempo é discreto, o horizonte infinito e existem dois estados da natureza: $s \in \{sorte, azar\}$. A transição entre estados ocorre de acordo com uma matriz de transição P, que é simétrica e tem persistência p.[1] O coqueiro gera uma unidade de fruto no estado $s = sorte$ e meia unidade no estado $s = azar$.

Apesar de ser o único morador da ilha, Robson acredita em mercados financeiros sofisticados e é tomador de preços. Ele acredita que, em cada estado, pode comprar ações da empresa "Coqueiro S.A." ao preço $q(s)$. Existe um contínuo de medida unitária de ações emitidas, negociadas na bolsa da ilha.

Cada ação pagará amanhã um dividendo de uma unidade de coco caso $s' = sorte$ e meia unidade caso $s' = azar$. Ou seja, $d(sorte) = 1$ e $d(azar) = \frac{1}{2}$. Esta ação poderá também ser revendida ao preço $q(s')$.

A restrição orçamentária sequencial de Robson é, portanto, da forma:

$$(q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c,$$

em que a é um número de ações que Robson tem hoje e a' é quanto ele compra para amanhã.

Responda:

(a) Escreva o problema de consumo e poupança de Robson de forma recursiva. Defina as funções-política para consumo e poupança. Sugestão: use $W = (q(s) + d(s))a$ como uma variável de estado.

(b) Derive uma equação de Euler que caracteriza a poupança ótima de Robson.

(c) Em equilíbrio, precisaremos que $a = 1$ e $c(s) = d(s)$. Qual a relação destas condições com o "truque de (K, k)" e com market-clearing?

(d) Avalie a equações de Euler de Robson (estado a estado) neste equilíbrio, fazendo todas as substituições possíveis.

(e) Encontre os preços de equilíbrio das ações da "Coqueiro S.A." quando $u(c) = \log(c)$ e $p = \frac{2}{3}$.

[1] Ou seja, uma matriz estocástica com p na diagonal.

Exercício 3 (Ilhas)

Considere uma economia composta por duas ilhas: $\{A, B\}$. Na ilha A, os agentes recebem um salário w^A e um aluguel R^A por unidade de capital. Na ilha B, o salário é w^B e o aluguel é R^B. Note que esses preços são constantes no tempo. O capital se deprecia igualmente nas duas ilhas à taxa δ.

Os agentes vivem infinitamente, tem oferta de trabalho inelástica, e utilidade dada por:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \qquad \beta \in (0,1)$$

onde $u' > 0$, $u'' < 0$.

Sendo assim, a restrição orçamentária na ilha $j \in \{A, B\}$ é dada por:

$$c_t + k_{t+1} \leq w^j + R^j k_t + (1-\delta)k_t$$

O tempo é discreto e entre um período e outro, com probabilidade $1-\alpha$, o agente é transportado (involuntariamente) para a outra ilha. Com probabilidade α o agente permanece na mesma ilha em que se encontra.

(a) Seja $v^j(k)$ o valor um indivíduo que se encontra na ilha j, com estoque de capital k. Escreva as equações de Bellman para $v^A(k)$ e $v^B(k)$.

Seja $g^j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a escolha ótima de poupança (função política) associada ao problema recursivo do agente que se encontra na ilha j.

(b) Escreva a equação de Euler para um indivíduo que se encontra na ilha A e outra equação para um indivíduo que se encontra na ilha B. Você deve escrever um sistema de equações funcionais: duas equações e duas incógnitas: g^A e g^B. **Obs**: você pode assumir que as funções v^j admitem derivada e que vale o teorema do envelope (Benveniste-Scheinkman).

(c) Suponha que $w^A = w^B$, $\alpha > \frac{1}{2}$ e $R^A > R^B$. Para um dado nível de capital k, o agente deve poupar mais em qual das ilhas? Isto é, $g^A(k)$ deve ser maior, menor ou igual a $g^B(k)$? **Obs**: Você pode argumentar informalmente.

Exercício 4 (Caça aos Alimentos)

Robson Cruz é um náufrago isolado em uma vasta ilha remota. Sua alimentação depende das frutas nativas da ilha, que podem ser encontradas com probabilidade π. Quando Robson encontra uma fruta, seu consumo é dado por $c = v$. Caso contrário, $c = 0$. Assuma também que ele deriva uma função utilidade $u(c)$, com $u(0) = 0$. O período futuro nesta economia é descontado por um fator $\beta < 1$.

(a) Formule o problema recursivo de Robson, e reescreva sua função valor V em função dos demais parâmetros da economia usando uma recursão.

Após algumas semanas isolado, Robson também descobre a existência de animais selvagens na ilha, que podem ser caçados como forma de alimento, obtendo um nível de consumo $c = m > v$. No entanto, é valido ressaltar que, como cada animal possui um comportamento diferente, a probabilidade de sucesso na caça $\lambda(s)$ é condicionado ao seu tipo (s), que pode ser agressivo $(s = a)$, ou manso $(s = n)$, com $\lambda(a)u(m) < \pi u(v) < \lambda(n)u(m)$.

(b) Dado o novo *environment* acima, formule os novos problemas recursivos de Robson. Aqui, assuma que Robson decidirá consumir a opção que lhe dará o **maior** nível de utilidade esperado a cada período (i.e., Robson só pode escolher caçar apenas um dos tipos de alimento a cada período). Chame a função valor do consumo de animais como W_m, a de frutas como W_v, e a função valor geral como W.

(c) Após mais algumas semanas, Robson decide mudar sua dieta na ilha: Agora, ele irá caçar animais se, e somente se, ele tiver consumido frutas no período anterior. Analogamente, ele também consumirá frutas se, e somente se, sua refeição no período anterior tenha sido um animal selvagem. Formule os novos problemas recursivos de Robson. *Dica: Agora, o problema deve ser representado em duas funções valor separadas.*

Exercício 5 (Pênaltis - P1, 2023)

Suponha a seguinte situação: um jogo de futebol será decidido em pênaltis alternados e seu time será o segundo a cobrar.

O estado do jogo no momento da cobrança do seu time pode ser $s \in \{0, 1\}$, descrevendo se o oponente marcou em sua cobrança ($s = 1$) ou se a perdeu ($s = 0$).

O jogo pode terminar com vitória do seu time (payoff 1), derrota (payoff 0) ou seguir para mais uma rodada de pênaltis (payoff $\tilde{W}$ para você). O seu time converte favoravelmente pênaltis com probabilidade p. Já o oponente marca com probabilidade q.

Escreva sua função valor (ignore desconto) e encontre também o valor de $\tilde{W}$ em função dos demais parâmetros usando uma recursão.

Exercício 6 (Crime)

Considere um agente que vive infinitamente e toma decisões sobre quanto poupar, quanto consumir e se comete um crime ou não. O agente maximiza a utilidade esperada do consumo:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

O agente recebe, no início de cada período, uma retorno $R\,a_t$ sobre a poupança, onde R é a taxa de juros bruta. Adicionalmente, também recebe renda y_t, que é aleatória e iid. Após saber quais serão seus rendimentos no período, o agente escolhe se comete um crime ou não. Cometer um crime dá a ele uma renda adicional x, mas com probabilidade π o indivíduo é pego no ato, e acaba na prisão durante o período corrente.

Se o agente não comete um crime, ou se comente e não é pego, ele escolhe o nível de consumo c_t e a poupança para o próximo período, a_{t+1}. Se ele é pego, vai parar na cadeia. Neste caso, ele recebe um nível de consumo de subsistência $\bar{c}$ (exógeno), sua poupança será dada por $R\,a_t$ e toda renda restante lhe é confiscada. O crime não gera outras consequências futuras.

(a) Escreva a restrição orçamentária do agente que não comete um crime, e a do agente que comete um crime mas não é pego.

(b) Monte o problema na forma recursiva.

(c) Assuma agora que se o criminoso é pego, sua renda futura é permanentemente reduzida: ao invés da renda y, receberá $\gamma\,y$, onde $0 < \gamma < 1$. Se ele comete um crime duas vezes, e é pego nas duas, sua renda futura será $\gamma^2\,y$, e assim por diante. Reescreva o problema de programação dinâmica.