Programação dinâmica em tempo contínuo

Felipe Iachan

EPGE

Macroeconomia II, MD,
27 de agosto de 2025

Tempo contínuo

- Objetivo: Programação dinâmica em tempo contínuo, com o modelo neoclássico de crescimento como nosso exemplo-guia.
- Caminho: problema do planejador, permitindo intervalos de tempos arbitrários.
- Passo-chave: tomar o limite para intervalo pequeno.
- Derivar equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.
- Depois, já com a intuição, generalizamos.

Alerta

- Atenção com o que é fluxo e o que é estoque.
- **Estoque**: Capital.
- **Fluxo**: Consumo, utilidade, trabalho, investimento.
  Medidos por unidade de tempo (consumo/ano ou consumo/mês, por exemplo).

Por que tempo contínuo?

Motivação econômica:

- Em tempo discreto: forçamos decisões em intervalos artificiais (anual? mensal?)
- Na realidade: famílias ajustam consumo diariamente, empresas investem continuamente
- **Trajetórias suaves**: tempo contínuo permite modelar ajustes graduais e suaves
- **Resposta a notícias**: podemos modelar saltos imediatos quando há mudanças inesperadas

Vantagens técnicas:

- Elimina arbitrariedade do período de planejamento e ordem de eventos dentro do período
- Matemática de EDOs e EDPs
- **Suavização ótima**: soluções naturalmente balanceiam mudanças bruscas vs. graduais

Função valor e princípio de Bellman

Função valor, já usando princípio de Bellman,

$$V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right)\Delta + e^{-\rho\Delta} V\left(K_{t+\Delta}\right)$$

s.a.

$$K_{t+\Delta} = I_t\Delta + e^{-\delta\Delta} K_t$$

$$AF\left(K_t, 1\right) = C_t + I_t$$

Função valor e princípio de Bellman

Função valor, já usando princípio de Bellman,

$$V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right)\Delta + e^{-\rho\Delta} V\left(K_{t+\Delta}\right)$$

s.a.

$$K_{t+\Delta} = I_t \Delta + e^{-\delta\Delta} K_t$$

$$AF\left(K_t, 1\right) = C_t + I_t$$

- Desconto e depreciação já ajustados.
- Fluxos aparecem interagindo com Δ.
- Na segunda restrição, ambos são fluxos e poderíamos ter Δ dos dois lados.

Aproximação de primeira ordem

Intuição da aproximação:

- **Trajetórias suaves**: com Δ pequeno, mudanças no capital são graduais
- **Suavização ótima**: evita mudanças bruscas desnecessárias
- **Para períodos curtos**: desconto $\approx$ linear, mudanças no valor $\approx$ lineares

Aproximação de primeira ordem

O que estamos aproximando: $e^{-\rho\Delta}V(K_{t+\Delta})$

- $e^{-\rho\Delta} \approx 1-\rho\Delta$: desconto para período curto
- $V(K_{t+\Delta}) \approx V(K_t) + V'(K_t)(K_{t+\Delta}-K_t)$: resposta linear do valor

Fazendo aproximação de primeira ordem

$$\begin{aligned} e^{-\rho\Delta} V\left(I_t\Delta + e^{-\delta\Delta}K_t\right) &= V\left(K_t\right) - \rho V\left(K_t\right)\Delta \\ &\quad + V^{'}\left(K_t\right)\left(I_t - \delta K_t\right)\Delta + O\left(\Delta^2\right), \end{aligned}$$

em que $O(\Delta^2)$ indica termos de ordem 2, ou superior, em Δ.

Aproximação

Logo,

$$V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right)\Delta + V\left(K_t\right) - \rho V\left(K_t\right)\Delta + V^{'}\left(K_t\right)\left(I_t - \delta K_t\right)\Delta + O\left(\Delta^2\right)$$

Reorganizando,

$$\rho V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right) + V^{'}\left(K_t\right)\left(I_t - \delta K_t\right) + \frac{O\left(\Delta^2\right)}{\Delta}$$

s.a.

$$AF\left(K_t, 1\right) = C_t + I_t.$$

Aproximação

Logo,

$$V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right)\Delta + V\left(K_t\right) - \rho V\left(K_t\right)\Delta + V^{'}\left(K_t\right)\left(I_t - \delta K_t\right)\Delta + O\left(\Delta^2\right)$$

Reorganizando,

$$\rho V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right) + V^{'}\left(K_t\right)\left(I_t - \delta K_t\right) + \frac{O\left(\Delta^2\right)}{\Delta}$$

s.a.

$$AF\left(K_t, 1\right) = C_t + I_t.$$

Interpretação dos termos:

- $V(K_t)$: valor hoje
- $-\rho V(K_t)\Delta$: custo do desconto para período curto
- $V'(K_t)(I_t - \delta K_t)\Delta$: valor da mudança líquida no capital
- $O(\Delta^2)$: termos de ordem superior (quadráticos e maiores)

No limite

- No limite:

$$\Delta \to 0 \implies \frac{O\left(\Delta^2\right)}{\Delta} \to 0.$$

- Obtemos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para o modelo neoclássico determinístico

$$\rho V\left(K_t\right) = \max_{C_t, I_t} u\left(c_t\right) + V'\left(K_t\right) \underbrace{\left(I_t - \delta K_t\right)}_{\frac{dK_t}{dt}}$$

s.a.

$$AF\left(K_t, 1\right) = C_t + I_t.$$

Interpretação da HJB

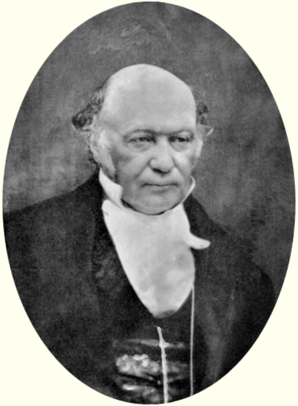
Equação HJB: $\rho V(K_t) = u(c_t) + V'(K_t)(I_t - \delta K_t)$

- **Lado esquerdo**: "taxa de retorno"do bem-estar ótimo
- **Lado direito**: bem-estar imediato + valor da mudança patrimonial
- **Analogia**: retorno total = benefício imediato + ganho de capital

Tempo contínuo permite:

- **Trajetórias suaves**: ajustes graduais ótimos
- **Saltos imediatos**: resposta instantânea a notícias/choques

HJB



Hamilton ‣ wiki

Jacobi ‣ wiki

Bellman ‣ wiki

Comentários

HJB:

$$\rho V\left(K_t\right) = \max_{I_t} u\left(AF\left(K_t, 1\right) - I_t\right) + V'\left(K_t\right)\underbrace{\left(I_t - \delta K_t\right)}_{\frac{dK_t}{dt}}$$

- Note que V' é tomado como dado.
- Valor marginal dos recursos: avaliado instantaneamente no limite em tempo discreto.
- V' é relacionado ao co-estado do Hamiltoniano.
- Interpretação da fórmula e relação com $rP = d + \Delta P$.

A HJB com valor de fluxo dado por u e desconto à taxa ρ é

$$\rho V(\boldsymbol{x}) = \max_{a \in A} \left\{ u(\boldsymbol{x}, a) + \mathrm{g}(\boldsymbol{x}, a) \cdot \nabla V(\boldsymbol{x}) \right\},$$

em que:

- $V(\boldsymbol{x})$ é a função valor no estado $\boldsymbol{x}$.
- A é o conjunto de possíveis ações.
- $u(\boldsymbol{x}, a)$ é a recompensa imediata ao tomar a ação a no estado $\boldsymbol{x}$.
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{g}(\boldsymbol{x}, a)$ representa a dinâmica do sistema.
- $\nabla V(\boldsymbol{x})$ é o gradiente da função valor.

De volta ao modelo neoclássico

Nas CPOs temos
Para C:

$$u_c = \lambda$$

Para I:

$$V^{'}\left(K_t\right) = \lambda$$

Quando temos oferta de trabalho endógena (como em RBC), temos para N:

$$u_L = AF_N\left(K_t, N_t\right)\lambda$$

Rumo à equação de Euler

Diferenciação de V (envelope):

$$\rho V^{'}\left(K_t\right) = \left(AF_K\left(K_t, N_t\right) - \delta\right) V^{'}\left(K_t\right) + V''\left(K_t\right)\dot{K}_t$$

Rumo à equação de Euler

- Temos também
$$u_c\left(c_t, 1 - N_t\right) = V'\left(K_t\right),$$
para o caso mais geral.
- Se u é separável ou N_t não varia, temos
$$u_{cc}\dot{c}_t = V''\left(K_t\right)\dot{K}_t$$

Rumo à equação de Euler

Combinando:

- $\rho V^{'}(K_t) = (AF_K(K_t, N_t) - \delta) V^{'}(K_t) + V''(K_t)\dot{K}_t,$
- $u'(c_t) = V'(K_t)$
- $u_{cc}\dot{c}_t = V''(K_t)\dot{K}_t.$

Temos já a equação de Euler:

$$u_{cc}\dot{c} = -u_c\left[AF_K(K_t, N_t) - \delta - \rho\right]$$

Eq. de Euler

Manipulando:

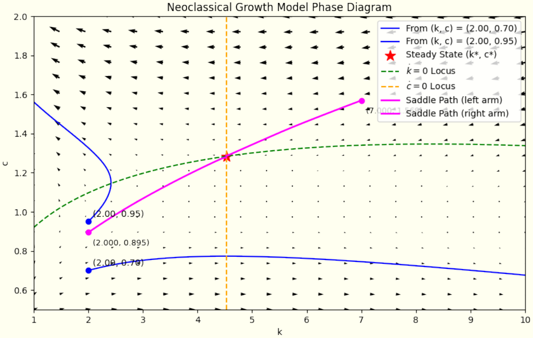
$$\underbrace{\left(\frac{u_{cc}}{u_c}c\right)}_{-EIS_t^{-1}}\frac{\dot{c}}{c} = -\left[AF_K\left(K_t, N_t\right) - \delta - \rho\right].$$

E com elasticidade de substituição intertemporal constante:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \epsilon\left[AF_K\left(K_t, N_t\right) - \delta - \rho\right].$$

Diagrama de fase

- Google Colab



Algoritmo (em Python):

- Criar grid de c e k (meshgrid).
- Usar comando quiver para diagrama de fase.
- Usar ivp (init. value problem) para trajetórias.
- Caracterizar sela.

Programação dinâmica em tempo contínuo com incerteza

- Estados discretos, $s_i \in S$.
- Suponha:
  - Δt pequeno,
  - Probabilidades de transição $\gamma_{ij}\Delta$ para uma transição de i para $j \neq i$.
- Generalização de cadeias de Markov para tempo contínuo.

Programação dinâmica em tempo contínuo com incerteza

Logo,

$$V\left(K_t, s_i\right) = \max u\left(C_t\right)\Delta + e^{-\rho\Delta}\left[\left(1 - \sum_{j\neq i}\gamma_{ij}\Delta\right)V\left(K_{t+\Delta}, s_i\right) + \sum_{j\neq i}\left(\gamma_{ij}\Delta\right)V\left(K_{t+\Delta}, s_j\right)\right]$$

s.a.

$$K_{t+\Delta} = I_t\Delta + e^{-\delta\Delta}K_t$$

$$A\left(s_i\right)F\left(K_t, L_t\right) = C_t + I_t.$$

Aproximação

Fazendo a aproximação

$$e^{-\rho\Delta}\left(1-\sum_{j\neq i}\gamma_{ij}\Delta\right)V\left(K_{t+\Delta},s_i\right)\approx V\left(K_t,s_i\right)+V_K\left(K_t,s_i\right)\left(I_t-\delta K_t\right)\Delta$$
$$-\rho V\left(K_t,s_i\right)\Delta-\left[\sum_{j\neq i}\gamma_{ij}\right]V\left(K_t,s_i\right)\Delta$$

e para cada $j\neq i$ no somatório

$$e^{-\rho\Delta}\left(\gamma_{ij}\Delta\right)V\left(K_{t+\Delta},s_j\right)\approx 0+\left(\gamma_{ij}\Delta\right)V\left(K_t,s_j\right).$$

- Note que não há termo em V_K nas transições: interações de segunda ordem.

HJB com saltos

Reorganizando

$$\rho V\left(K_t, s_i\right) = \max_{C,I} u\left(C_t\right) + V_K\left(K_t, s_i\right)\left(I_t - \delta K_t\right) + \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}\left[V\left(K_t, s_j\right) - V\left(K_t, s_i\right)\right]$$

s.a.

$$A(s)\,F\left(K_t, L_t\right) = C_t + I_t.$$

Caracterização do ótimo

- CPO para C_t e I_t:

$$u'(c) = V_K(K_t, s_i)$$

- Diferenciação:

$$\rho V_K(K_t, s_i) = (A(s) F_K - \delta) V_K(K_t, s_i) + V_{KK}(K_t, s_i)\dot{K} + \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} [V_K(K_t, s_j) - V_K(K_t, s_i)]$$

Caracterização do ótimo

- Usando $u'(c) = V_K(K_t, s_i)$ e sua derivação:

$$\frac{\dot{c}(K,s)}{c(K,s)} = \epsilon \left\{ (A(s) F_K - \delta - \rho) + \sum_{j \neq i} \gamma_{ij} \left[\frac{u'(c(K,s_j))}{u'(c(K,s_i))} - 1 \right] \right\}$$

- Incentivos a poupança em estados diferentes se comunicam.
- Exercício: modelo com perda de estoque de capital, desastre.

Caso Geral

A Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) com valor de fluxo dado por u, desconto à taxa ρ, e saltos em $\boldsymbol{x}$ com intensidade $\gamma_{i,j}$ é

$$\rho V(\boldsymbol{x}, s_i) = \max_{a \in A} \{u(\boldsymbol{x}, a, s_i) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, a, s_i) \cdot \nabla_x V(\boldsymbol{x}, s_i)\} + \sum_{j \neq i} \gamma_{i,j} \left[V(\boldsymbol{x} + \xi_{i,j}, s_j) - V(\boldsymbol{x}, s_i)\right],$$

em que:

- $V(\boldsymbol{x}, s_i)$ é a função valor no estado $(\boldsymbol{x}, s_i)$.
- A é o conjunto de possíveis ações.
- $u(\boldsymbol{x}, a, s_i)$ é a recompensa imediata ao tomar a ação a no estado $(\boldsymbol{x}, s_i)$.
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, a, s_i)$ representa a dinâmica determinística do sistema enquanto no estado s_i.
- $\xi_{i,j}(\boldsymbol{x})$ é o salto em $\boldsymbol{x}$ associado à transição do estado s_i para o estado s_j (pode dep. de $\boldsymbol{x}$).
- $\nabla_x V(\boldsymbol{x}, s_i)$ é o gradiente da função valor em relação a $\boldsymbol{x}$.

Por que problemas não estacionários?

Economia real tem mudanças previsíveis:

- Políticas com expiração (auxílio emergencial, isenções fiscais)
- Choques anunciados (mudanças de juros do BC)
- Transições demográficas (envelhecimento)
- Tecnologias com implementação futura

Ferramenta: Problemas não estacionários com previsão perfeita

Questões econômicas fundamentais

- Como antecipar mudanças futuras afeta comportamento hoje?
- Por que anúncios importam tanto quanto implementação?
- Como timing da mudança influencia magnitude da resposta?

Modelo neoclássico com TFP variando no tempo

Interpretação econômica do termo temporal:

- $\partial_t V(K, t)$ = valor marginal do tempo quando futuro é conhecido
- **Positivo**: "tempo está do nosso lado"(melhores condições chegando)
- **Negativo**: "tempo está contra nós"(piores condições chegando)
- Captura efeito antecipação: valor de esperar vs. agir hoje

Modelo neoclássico com TFP variando no tempo

Interpretação econômica do termo temporal:

- $\partial_t V(K,t)$ = valor marginal do tempo quando futuro é conhecido
- **Positivo**: "tempo está do nosso lado"(melhores condições chegando)
- **Negativo**: "tempo está contra nós"(piores condições chegando)
- Captura efeito antecipação: valor de esperar vs. agir hoje

Por exemplo, se temos $A(t)$ em um problema determinístico, a HJB passa a ser

$$\rho V(K,t) = \max_{C,I} u(C, 1-N) + \partial_K V(K,t) \underbrace{(I_t - \delta K_t)}_{\dot{K}} + \partial_t V(K,t).$$

s.a.

$$A(t) F(K,N) = C + I.$$

Modelo neoclássico com TFP variando no tempo

Interpretação econômica do termo temporal:

- $\partial_t V(K,t)$ = valor marginal do tempo quando futuro é conhecido
- **Positivo**: "tempo está do nosso lado"(melhores condições chegando)
- **Negativo**: "tempo está contra nós"(piores condições chegando)
- Captura efeito antecipação: valor de esperar vs. agir hoje

Por exemplo, se temos $A(t)$ em um problema determinístico, a HJB passa a ser

$$\rho V(K,t) = \max_{C,I} u(C, 1-N) + \partial_K V(K,t) \underbrace{(I_t - \delta K_t)}_{\dot{K}} + \partial_t V(K,t).$$

s.a.

$$A(t) F(K,N) = C + I.$$

Comentários

- Interpretação e relação com ganho de capital.
- Equação diferencial parcial.
- Parte da dificuldade é não-linearidade de V, herdada de u e F.
  - Tipicamente, apenas solução numérica.
  - Difícil caracterizar $\partial_t V$
  - Se o problema é linear-quadrático[1]: solução analítica.
  - Soluções aproximadas podem ser úteis. ▸ Exemplo de aproximação

[1] Objetivo quadrático, restrições lineares, dependência de t via coeficientes

Um pouco mais sobre o NGM não-estacionário

- Ainda assim, supondo utilidade separável e iso-elástica, temos CPO para c:
$$u^{'}\left(c\left(K,t\right)\right)=V_{K}\left(K,t\right).$$
Diferenciando
$$u^{''}\left(c\left(K,t\right)\right)\frac{dc}{dt}=V_{KK}\dot{K}+V_{Kt},$$
em que $\frac{dc}{dt}=c_{K}\dot{K}+c_{t}$ é a diferenciação total de c no tempo.

- E diferenciando a HJB
$$\rho V_{K}\left(K_{t},t\right)=V_{K}\left[A\left(t\right)F_{K}-\delta\right]+V_{KK}\left(K_{t},t\right)\underbrace{\left(I_{t}-\delta K_{t}\right)}_{\frac{dK_{t}}{dt}}+V_{tK}$$

Um pouco mais sobre o NGM não-estacionário

Logo, com $V_{tK} = V_{Kt}$, fazendo as substituições e usando a notação $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$, temos

$$\frac{\dot{c}}{c} = \epsilon \left[A\left(t\right) F_K - \delta - \rho \right].$$

- Função política $c\left(K, t\right)$ é não estacionária (depende de t além de K).
- Mas ainda conseguimos caracterizar uma equação de Euler:
  - também não estacionária, pela presença de $A(t)$.
- Não é possível fazer diagrama de fase simples apenas com $\left(c, k\right)$.

Estratégia pedagógica: Previsão perfeita

Por que começar com previsão perfeita?

- Isola efeitos de timing dos efeitos de incerteza
- Permite intuição pura da dinâmica comparativa
- Base para análise posterior com incerteza

Pergunta-chave: Como timing da mudança afeta resposta ótima hoje?

Sequência de complexidade crescente

1. **Mudança permanente**: $A(t) = \bar{A}$ (linha de base)
2. **Choque transitório**: A alto temporariamente
3. **Notícia sobre futuro**: normal hoje, A alto depois
4. **Notícia sobre desastre**: normal hoje, perda futura

Ainda útil

Exercícios de dinâmica comparativa

Caso 1: Choque transitório

$$A(t) = \begin{cases} \bar{A} > 1 & , \text{ para } t \in [0, T] \\ 1 & , \text{ para } t \geq T \end{cases}$$

Intuição: Produtividade alta hoje, normal no futuro. Como responder?

Ainda útil

Exercícios de dinâmica comparativa

Caso 1: Choque transitório

$$A(t) = \begin{cases} \bar{A} > 1 & \text{, para } t \in [0, T] \\ 1 & \text{, para } t \geq T \end{cases}$$

Intuição: Produtividade alta hoje, normal no futuro. Como responder?

Caso 2: Notícia sobre futuro boom

$$A(t) = \begin{cases} 1 & \text{, para } t \in [0, T] \\ \bar{A} > 1 & \text{, para } t \geq T \end{cases}$$

Intuição: Produtividade normal hoje, alta no futuro. Vale a pena esperar?

Ainda útil

Exercícios de dinâmica comparativa

Caso 1: Choque transitório

$$A(t) = \begin{cases} \bar{A} > 1 & , \text{ para } t \in [0, T] \\ 1 & , \text{ para } t \geq T \end{cases}$$

Intuição: Produtividade alta hoje, normal no futuro. Como responder?

Caso 2: Notícia sobre futuro boom

$$A(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ para } t \in [0, T] \\ \bar{A} > 1 & , \text{ para } t \geq T \end{cases}$$

Intuição: Produtividade normal hoje, alta no futuro. Vale a pena esperar?

Compare: Por que as respostas são diferentes? Papel da poupança/investimento como ponte temporal.

Exercício estruturado: Notícia sobre desastre

Problema: Notícia hoje sobre perda de Δ unidades de capital em T.

Passos para resolver:

1. **Formular salto:** $K(T^-) \to K(T^+) = K(T^-) - \Delta$
2. **Resolver backward:** $t \geq T$, problema normal
3. **Resolver forward:** $t < T$, otimizar sabendo do salto
4. **Analisar transição:** Como $c(t)$ e $i(t)$ evoluem?

Questões de intuição

- Por que poupança pode *aumentar* antes do desastre?
- Como consumo responde ao anúncio vs. à realização?
- Papel do tempo até o desastre: T pequeno vs. T grande?

Outro exemplo: problema de poupança não estacionário

$$\rho V(a,t) = \max_{c,n} u(c, 1-n) + \partial_a V(a,t)\,[\dot{a}] + \partial_t V(a,t)$$

s.a.

$$\dot{a} = r(t)a + w(t)n - c$$

Conexão com política econômica

De previsão perfeita para aplicações reais:

1. **Previsão perfeita** $\rightarrow$ entender dinâmica pura
2. **Adicionar incerteza** $\rightarrow$ efeitos de risco
3. **Calibrar modelo** $\rightarrow$ análise quantitativa

Aplicações em macroeconomia

- Política fiscal: Anúncio vs. implementação
- Política monetária: Forward guidance do BC
- Regulação: Transições com prazo determinado
- Crises: Antecipação de problemas conhecidos

Insight-chave: Timing de anúncios pode ser tão importante quanto conteúdo.

Comentários finais

- Problemas não estacionários + incerteza combinam $\partial_t V$ e saltos
- Tempo contínuo organiza: estados, saltos, notícias, choques antecipados
- Até aqui: estados sujeitos a cadeia de Markov (saltos discretos)
- Estados contínuos (risco normal) precisam matemática específica