O CAPM

Capital Asset Pricing Model

Felipe Iachan

EPGE

Teoria Macroeconômica II, MD,
23 de agosto de 2024

Fatores estocásticos de desconto e βs

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[m\left(R - R^f\right)\right] \\
&= \underbrace{Cov\left(m, R - R^f\right)}_{=Cov(m,R)} + \mathbb{E}\left[m\right]\mathbb{E}\left[R - R^f\right]
\end{aligned}
$$

Isolando,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[R - R^f\right] &= -Cov\left(m, R\right)\frac{1}{\mathbb{E}\left[m\right]} \\
&= \underbrace{\frac{Cov\left(m, R\right)}{Var\left(m\right)}}_{\beta_{R\to m}} \underbrace{\left(-\frac{Var\left(m\right)}{E\left(m\right)}\right)}_{\text{preço/prêmio de risco}}.
\end{aligned}
$$

A se notar:

- sinal, interpretação.
- β é linear em R, lado esquerdo também.

Derivando o CAPM

Derivações do CAPM mostram (com algum trabalho) que

$$m_s = a - bR_s^m.$$

- Fator estocástico é linear no retorno do portifólio de mercado.
- Sinal trocado: mercado vai mal, consumo vale mais (mais escasso).

Já tínhamos que para cada retorno R^j,

$$\mathbb{E}\left[R^j - R^f\right] = -Cov\left(m, R^j\right)\frac{1}{\mathbb{E}\left[m\right]} = \underbrace{\frac{Cov\left(m, R^j\right)}{Var\left(m\right)}}_{\beta_{R\to m}}\underbrace{\left(-\frac{Var\left(m\right)}{E\left(m\right)}\right)}_{\text{preço/prêmio de risco}}.$$

O CAPM

Em particular, como o mercado é um portifólio transacionado,

$$\mathbb{E}\left[R^m - R^f\right] = -Cov\left(m, R^m\right)\frac{1}{\mathbb{E}\left[m\right]}$$
$$= bCov\left(R^m, R^m\right)\frac{1}{\mathbb{E}\left[m\right]}$$

- Excesso de retorno $\mathbb{E}\left[R^m - R^f\right]$ e b caracterizam prêmio de risco na economia.

Para os ativos

$$\mathbb{E}\left[R^j - R^f\right] = bCov\left(R^m_s, R^j\right)\frac{1}{\mathbb{E}\left[m\right]}.$$

O CAPM

Dividindo e rearrumando

$$\mathbb{E}\left[R^j - R^f\right] = \underbrace{\frac{Cov\left(R^j, R^m\right)}{Var\left(R^m\right)}}_{\beta_{R\to R^m}} \mathbb{E}\left[R^m - R^f\right]$$

- De novo, linear em R^j (tanto lado esquerdo, quanto β).
- Implementável econometricamente.
- Testável.

Além do CAPM

- Infelizmente, desempenho empírico do CAPM é ruim.
- Extensões vão melhor.
- Modelos lineares de fatores que têm por trás

$$m_s = a + \sum b_{n,s} f_{n,s}.$$

  - $n \in \{1, ..., N\}$ fatores.
  - Fatores observáveis: podem ser variáveis macro ou retornos de portifólios.

- Estes modelos são equivalentes a

$$\mathbb{E}\left[R^j - R^f\right] = \alpha + \sum_{n=1}^{N} \beta_n^j \mathbb{E}\left[f\right]$$

  - implementação econométrica natural.

- Fama-French 3: mercado, SMB (size), HML (book-market).

Derivando o CAPM

- No CAPM
$$E\left[R^j\right] = R^f + \beta_{R^m,R^j}\left[E\left(R^m\right) - R^f\right].$$
- O modelo faz sentido quando o fator estocástico de desconto m e o retorno do portifólio R^m de mercado têm uma relação linear.

Há diversas maneiras de se gerar isto, inclusive:

1. Utilidade quadrática
2. Utilidade CARA + retornos conjuntamente normais

Pela simplicidade, ilustraremos com a primeira.
Cochrane tem várias outras derivações (seç. 9.1).

Utilidade quadrática

Tome um investidor com utilidade

$$U\left(c_t, c_{t+1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overline{c} - c_t\right)^2 - \frac{1}{2}\beta E\left[\left(\overline{c} - c_{t+1}\right)^2\right].$$

- Restringimos a atenção para a região em que $c_t, c_{t+1} < \overline{c}$.

Fator estocástico de desconto

Logo, o fator estocástico é obtido da TMS

$$m_{t+1} = \beta \frac{\overline{c} - c_{t+1}}{\overline{c} - c_t}.$$

Restrições orçamentárias

- Riqueza inicial W_t,
- alocada entre consumo e compra de um portfólio com pesos $w^j = \frac{p^j z^j}{\sum_j p^j z^j}$.
- Retorno do investimento é $R^W_{t+1} = \sum_j w^j R^j_{t+1}$
- Consumo em $t+1$ passa a ser

$$c_{t+1} = (W_t - c_t)\, R^W_{t+1}$$

Mais sobre o SDF

$$m_{t+1} = \beta \frac{\overline{c} - (W_t - c_t)\, R^W_{t+1}}{\overline{c} - c_t} = \underbrace{\beta \frac{\overline{c}}{\overline{c} - c_t}}_{a_t} + \underbrace{\left[-\beta \frac{(W_t - c_t)}{\overline{c} - c_t} \right]}_{b_t} R^W_{t+1}$$

Fórmula de apreçamento com m_{t+1}

$$E\left[R^j_{t+1}\right] = R^f - \frac{Cov\left(m_s, R^j_{t+1}\right)}{E\left(m_s\right)} = R^f - \frac{b_t Cov\left(R^W_{t+1}, R^j_{t+1}\right)}{Var\left(R^W_{t+1}\right)} \frac{Var\left(R^W_{t+1}\right)}{E\left(m_{t+1}\right)}$$

- Em azul, o preço do risco:

$$-b_t \frac{Var\left(R^W_{t+1}\right)}{E\left(m_{t+1}\right)}$$

Avaliando no portifólio de mercado

$$E\left[R_{t+1}^{W}\right] = R^{f} - b_t \frac{Var\left(R_{t+1}^{W}\right)}{E\left(m_{t+1}\right)} \implies -b_t \frac{Var\left(R_{t+1}^{W}\right)}{E\left(m_{t+1}\right)} = E\left[R_{t+1}^{W}\right] - R^{f}.$$

Equação final

$$E\left[R^j_{t+1}\right] - R^f = \underbrace{\frac{Cov\left(R^W_{t+1}, R^j_{t+1}\right)}{Var\left(R^W_{t+1}\right)}}_{\beta_{R^j_{t+1} \to R^W_{t+1},}} \left\{E\left[R^W_{t+1}\right] - R^f\right\}$$

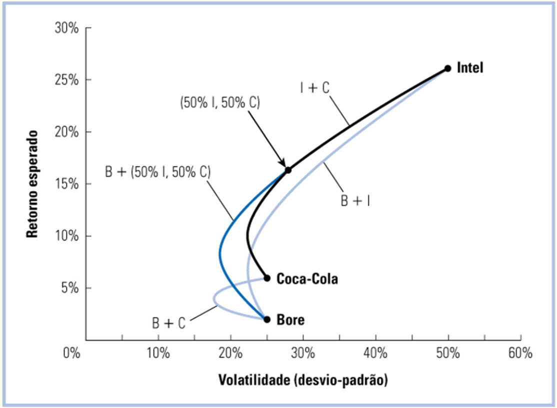
Lições:

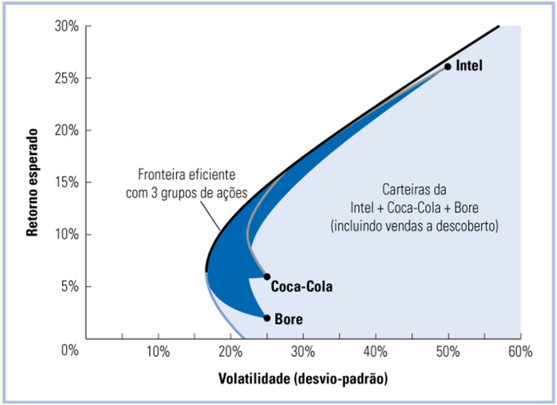
- Prêmio do fator é excesso de retorno de mercado.
- Cada ativo recebe prêmio de risco de acordo com:

$$\beta^j \propto \rho_{j,W}\sigma_j$$

Figuras: Análise média-variância

- CAPM pode ser justificado a partir da maximização do retorno médio sujeita a restrição de variância.

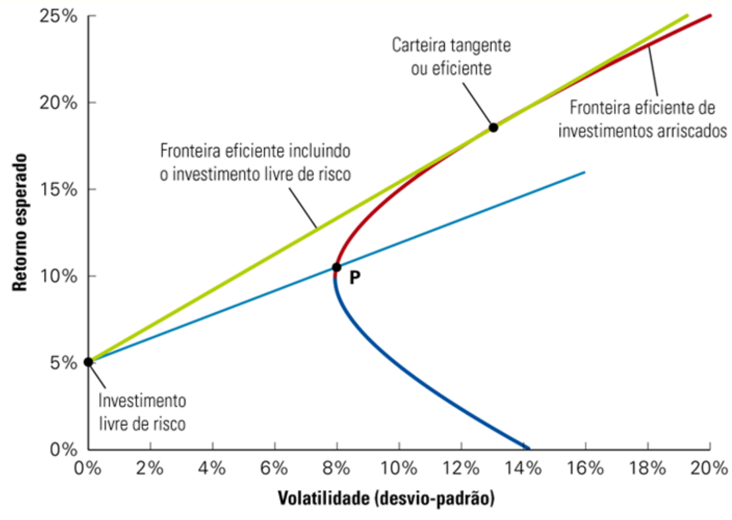




Fonte: Berk-DeMarzo

Ilustração

Sharpe máximo, tangência, argumento de equilíbrio



Fonte: Berk-DeMarzo