Lista 6 - Teoria Q e questões diversas

Opcional

Exercício 1 (Teoria Q com custos quadráticos)

Considere uma firma em horizonte infinito em tempo discreto. Lucros operacionais são dados por

$$\pi_t = A_t F(K_t), \qquad F'(K) > 0, \quad F''(K) < 0$$

O capital segue $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$, com custo de ajustamento dado por

$$G(I_t, K_t) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 K_t.$$

A produtividade segue um processo AR(1), $\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \varepsilon_t$, com $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. O desconto é dado por $R^{-1} = \beta$.

(a) Escreva o problema sequência e o problema recursivo da firma. Defina q_t como o preço sombra de K_{t+1}. (**Dica:** Não esqueça da condição de transversalidade; preço sombra de K_{t+1} é o co-estado do problema recursivo (i.e., $\partial V/\partial K'$)).

Resposta:

O problema sequencial é dado por

$$\begin{aligned}
\max_{\{I_t, K_{t+1}\}_{t\geq 0}} \quad & \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [A_t F(K_t) - I_t - G(I_t, K_t)]\right] \\
\text{s.t.} \quad & K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \quad \forall t \\
& \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_0[\beta^T q_T K_{T+1}] = 0 \qquad \text{(transversalidade)}
\end{aligned}$$

O Lagrangeano do problema é dado por

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[A_t F(K_t) - I_t - G(I_t, K_t) + \lambda_t((1-\delta)K_t + I_t - K_{t+1})\right]\right\}$$

O preço sombra de K_{t+1} é dado, em valor presente, por $\lambda_t \equiv q_t$.

Para o problema na forma recursiva (substituindo as restrições e deixando o K' como único controle) temos

$$V(K,A) = \max_{K'} \left\{ AF(K) - K' + (1-\delta)K - \frac{\phi}{2}\frac{(K'-(1-\delta)K)^2}{K} + \beta\mathbb{E}\big[V(K',A')\big|A\big] \right\}$$

E o preço sombra de K' é dado por $\beta\mathbb{E}[V_K(K',A')|A]$.

(b) Mostre que a condição de primeira ordem implica a relação (estática) de $q_t = 1 + \phi(I_t/K_t)$ e derive a equação de Euler em q.

Resposta:

Na parte que se segue, vou fazer em relação ao modelo sequencial. Derivando com o problema recursivo é análogo. A condição de primeira ordem no Lagrangeano

$$\begin{aligned}
[I_t]: &\quad -1 - \frac{\partial G}{\partial I} + q_t = 0 \quad\Rightarrow\quad q_t = 1 + \phi\frac{I_t}{K_t} \\
[K_{t+1}]: &\quad q_t = \beta\mathbb{E}_t\left[A_{t+1}F'(K_{t+1}) - \frac{\partial G}{\partial K}(I_{t+1},K_{t+1}) + (1-\delta)q_{t+1}\right] \\
&\quad q_t = \beta\mathbb{E}_t\left[A_{t+1}F'(K_{t+1}) + (1-\delta)q_{t+1} + \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^2\right] \\
&\quad q_t = \beta\mathbb{E}_t\left[A_{t+1}F'(K_{t+1}) + (1-\delta)q_{t+1} + \frac{1}{2\phi}(q_{t+1}-1)^2\right] \quad \text{(Euler)}
\end{aligned}$$

(c) Linearize o sistema em torno do estado estacionário (i.e., $A = \bar{A}$, $q = 1$, $i = \delta$) e obtenha $\hat{i}_t = \kappa_0 + \kappa_1\hat{q}_t$, explicitando κ_1 em função de (ϕ, β).

Resposta:

Chame $i_t \equiv I_t/K_t$. então, temos que $q = 1 + \phi i$ (condição estática, vale para todo t). Linearizando em torno de $(\overline{q}, \overline{i}) = (1, \delta)$, primeiro definimos $f(i,q) = q - 1 - \phi i = 0$ e derivamos totalmente obtendo

$$f_i \,\mathrm{d}i + f_q \,\mathrm{d}q = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}i = \frac{1}{\phi}\mathrm{d}q$$

Para desvios percentuais, usamos $\hat{x} = \frac{(x-\overline{x})}{\overline{x}}$ e segue que

$$(i - \overline{i}) = \mathrm{d}i = \hat{i}\overline{i} \quad\Rightarrow\quad \hat{i} = \frac{1}{\delta\phi}\hat{q} \qquad \text{pois } \mathrm{d}q = \hat{q}$$

De forma que, seguindo a notação do enunciado, obtemos

$$\kappa_0 = 0, \qquad \kappa_1 = \frac{1}{\delta\phi}$$

Caso o desvio seja em nível e não em percentual (já que o enunciado não deixou explícito), obteríamos

$$\underbrace{i_t - \bar{i}}_{\equiv\, \hat{i}} = \frac{1}{\phi}\underbrace{q_t - \bar{q}}_{\equiv\, \hat{q}}$$

de qualquer foram, a única diferença seria no κ_1 e não depende de β.

(d) (Resultado de Hayashi) Enuncie as condições sob as quais o q marginal $=$ q médio e discuta sua utilidade empírica quando só q médio é observável.

Resposta:

Segundo os resultados de Hayashi, as condições suficientes são

- Concorrência Perfeita em mercados de bens e fatores
- Retornos constantes de escala em produção
- Custos de ajuste homogêneos de grau 1 em (I, K)
- Mercados financeiros completos/sem distorções
- Preço do bem de investimento normalizado

Então, o q marginal (coestado) é igual q médio (valor de mercado da firma/custo de reposição do capital).

(e) Argumente os sinais esperados sob neutralidade ao risco e com/sem não linearidades relevantes:

$$\frac{\partial(I/K)}{\partial A}, \quad \frac{\partial(I/K)}{\partial \sigma^2}$$

Resposta:

Pela condição estática, temos $i_t \equiv I_t/K_t = \dfrac{q_t - 1}{\phi}$, de modo que o sinal de $\partial(I/K)/\partial(\cdot)$ coincide com o sinal de $\partial q_t/\partial(\cdot)$. Usando ainda a Euler em q,

$$q_t = \beta\mathbb{E}_t\left[A_{t+1}F'(K_{t+1}) + (1-\delta)q_{t+1} + \frac{1}{2\phi}\big(q_{t+1} - 1\big)^2\right].$$

Um aumento em A_t (ou em $\mathbb{E}_t[A_{t+1}]$, dado o AR(1)) eleva $A_{t+1}F'(K_{t+1})$ no termo esperado da Euler, logo eleva q_t. Pela estática, isso eleva i_t. Portanto,

$$\frac{\partial(I/K)}{\partial A} > 0.$$

Quanto a variação de σ^2:

- **Sem não linearidades relevantes (certeza-equivalência):** Em uma aproximação de primeira ordem em torno do estado estacionário $(\bar{A}, \bar{q}, \bar{i}) = (\bar{A}, 1, \delta)$, o termo $\frac{1}{2\phi}(q_{t+1} - 1)^2$ é de segunda ordem e desaparece. Com neutralidade ao risco, decisões dependem apenas de médias condicionais, de modo que a variância σ^2 não afeta q_t (nem i_t) a primeira ordem:

$$\frac{\partial(I/K)}{\partial\sigma^2} \approx 0.$$

- **Com não linearidades/irreversibilidades:** Se há irreversibilidade ou custos não convexos, surge valor de opção de esperar. Maior σ^2 aumenta esse valor, reduzindo o investimento atual:

$$\frac{\partial(I/K)}{\partial\sigma^2} < 0.$$

- **Convexidades suaves do ajuste (sem irreversibilidade):** O termo $\frac{1}{2\phi}\mathbb{E}_t[(q_{t+1} - 1)^2]$, maior σ^2 eleva $\mathrm{Var}_t(q_{t+1})$ e, portanto, esse termo (positivo) na Euler, o que tende a elevar q_t e i_t. Contudo, este é um efeito de *segunda ordem* (ausente na log-linearização) e, em geral, pequeno:

$$\frac{\partial(I/K)}{\partial\sigma^2} \gtrsim 0 \quad \text{(seg. ordem, sem irreversibilidades)}.$$

Exercício 2 (Teoria Q com irreversibilidade)

Considere o mesmo ambiente do Exercício 1, exceto que ao vender capital a firma recebe apenas uma fração $s \in (0, 1)$ do preço, com $s \equiv 1 - \lambda$. Seja $I_t^+ \geq 0$ o investimento bruto e $I_t^- \geq 0$ o desinvestimento bruto. Defina o investimento líquido $I_t \equiv I_t^+ - I_t^-$ e a taxa $i_t \equiv I_t/K_t$.O custo de ajustamento é $G(I_t, K_t) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 K_t$.

(a) O problema sequencial da firma é dado por

$$\max_{\{I_t^+, I_t^-\}_{t\geq 0}} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t\geq 0} \beta^t \left\{ \pi_t - I_t^+ - G(I_t, K_t) + s\, I_t^- \right\} \right] \quad \text{s.a.} \quad K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t,\ I_t^+, I_t^- \geq 0\ \forall t$$

além da condição de transversalidade. Dê a formulação recursiva $V(K_t, A_t)$.

Resposta:

O problema na forma recursivo é dado por

$$\begin{aligned} V(K, A) = \max_{I^+, I^-} \quad & \left\{ AF(K) - I^+ - G(I^+ - I^-, K) + sI^- + \beta\mathbb{E}\left[V(K', A') \middle| A \right] \right\} \\ \text{s.t.} \quad & K' = I^+ - I^- + (1-\delta)K \\ & I^+ \geq 0, \quad I^- \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Derive as condições de primeira ordem do problema e mostre que surgem dois preços sombras e caracterize as "regras de gatilho" para investir/desinvestir.

Resposta:

Novamente, concentraremo-nos no problema sequencial. O Lagrangeano é dado por

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = \mathbb{E}_0 \Bigg\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Bigg[& A_t F(K_t) - I_t^+ - G(I_t, K_t) + sI_t^- + \lambda_t((1-\delta)K_t + I_t^+ - I_t^- - K_{t+1}) \\ & + \mu_t^+ I_t^+ \qquad + \mu_t^- I_t^- \Bigg] \Bigg\} \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem são dadas por

$$[I_t^+]: \quad -1 - \frac{\partial G}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial I^+} + \underbrace{\lambda_t}_{\equiv\, q_t}[+1] + \mu_t^+ = 0 \quad \Rightarrow \quad q_t = 1 + \phi i - \mu_t^+$$

$$[I_t^-]: \quad -\frac{\partial G}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial I^-} + s + \underbrace{\lambda_t}_{\equiv\, q_t}[-1] + \mu_t^- = 0 \quad \Rightarrow \quad q_t = s + \phi i + \mu_t^-$$

$$[K_{t+1}]: \quad \lambda_t[-1] + \beta\mathbb{E}_t \left[A_{t+1}F'(K_{t+1}) - \frac{\partial G}{\partial K}(K_{t+1}, I_{t+1}) + \lambda_{t+1}(1-\delta) \right]$$

$$q_t = \beta\mathbb{E}_t \left[A_{t+1}F'(K_{t+1}) + (1-\delta)q_{t+1} + \frac{\phi}{2} i_{t+1}^2 \right] \quad \text{(Euler)}$$

Note que $\mu_t^+ \geq 0$ e $\mu_t^- \geq 0$ tais que $I_t^+ \mu_t^+ = 0$ e $I_t^- \mu_t^- = 0$ e nunca é ótimo ter $I_t^+ > 0$ e $I_t^- > 0$ (pois sempre é possível ajustar deixando um zero e mexendo apenas no outro e o custo de ajustamento será menor). De forma que obtemos

$$q_t = \begin{cases} 1 + \phi i_t, & I_t^+ > 0 \text{ (preço de compra)} \\ x \in [s, 1], & I_t^+ = I_t^- = 0 \text{ (inação)} \\ s + \phi i_t, & I_t^- > 0 \text{ (preço de venda)} \end{cases}$$

E os gatilhos são dados por

$$i_t(q_t) = \begin{cases} \frac{q_t - 1}{\phi}, & q_t > 1 \\ 0, & q_t \in [s, 1] \\ \frac{q_t - s}{\phi}, & q_t < s \end{cases}$$

(c) Demonstre que existe uma banda de inação em q e caracterize os limiares e discuta o papel dos parâmetros (λ, ϕ, β).

Resposta:

A banda de inação surge justamente pela irreversibilidade. Agir hoje faz a firma abrir mão de reagir amanhã, de forma que só o faz se o ganho imediato for suficientemente alto. Sem incerteza e com flexibilidade no ajustamento seria imediato que se $q > 1$ compra e se $q < s$ vende (i.e., se o valor marginal interno do capital for maior do que seu preço de mercado você o compra e se for menor que o preço de venda, o vende). Agora caracterizando propriamente, temos que na zona de inação $I_t = I_t^+ = I_t^- = 0$ e a condição de primeira ordem implica

$$q_t = 1 - \mu_t^+ = s + \mu_t^-$$

de forma que só existem μ_t^+ e μ_t^- não negativos se e somente se $q_t \in [s, 1]$, o que implica $[\underline{q}, \overline{q}] = [s, 1]$.

- $\lambda = 1 - s$: A largura da banda, com o preço de compra normalizado para 1, é justamente $1 - s = \lambda$. Portanto, quanto maior o lambda, maior é o intervalo de inação.
- ϕ (curvatura do custo de ajuste): não altera a banda sob neutralidade ao risco, mas altera fora da banda a inclinação. Portanto, quanto maior for ϕ mais lenta é a resposta de i para o mesmo limiar (mais custo é ajustar).
- β: Os limiares de (não) ajuste *não* dependem de β. A banda de inação é $[s, 1]$, pois decorre das KKT estáticas com irreversibilidade ($s < 1$) e das restrições $I_t^+, I_t^- \geq 0$. O parâmetro

de desconto afeta apenas a *dinâmica* do preço-sombra q_t via a equação de Euler:

$$q_t \;=\; \beta\,\mathbb{E}_t\Big[A_{t+1}F_K(K_{t+1}) \;+\; (1-\delta)\,q_{t+1} \;+\; \tfrac{\phi}{2}\,i_{t+1}^2\Big].$$

Assim, um β maior eleva o peso do valor de continuidade, o produto marginal futuro do capital, o valor de revenda $(1-\delta)q_{t+1}$ e o termo de alívio de custo de ajuste (o que tende a elevar q_t em expectativa). Logo, β não desloca os limiares $[s, 1]$, mas aumenta a probabilidade de q_t sair da banda pelo topo (cruzar 1) e, portanto, de ocorrer investimento líquido positivo; simetricamente, reduz a probabilidade de $q_t < s$ e de desinvestimento. A frequência efetiva com que os limiares são cruzados depende, contudo, dos choques (A_t) e da lei de movimento de K_t.

(d) Explique por que maior incerteza (maior σ) amplia a inação.

Resposta:

Sob incerteza em A, adiar o ajuste preserva a opção de investir/desinvestir depois de observar novos choques. Esse valor de opção cresce com a dispersão da distribuição de A_{t+1}. No nosso ambiente com irreversibilidade ($s < 1$), agir hoje pode exigir desfazer amanhã pagando a perda $\lambda = 1 - s$; logo, esperar evita pagar λ em estados ruins e permite capturar ganhos apenas em estados bons.

Formalmente, para K' dado, $W(a) \equiv V(K', a)$ é convexo em a (o valor é um supremo de funcionais lineares em a quando há opção de ajustar). Assim, sob um espalhamento que preserva a média (MPS),

$$\mathbb{E}_t\big[\,V(K', A_{t+1})\,\big] \;\uparrow\; \text{ quando } \;\sigma^2\uparrow \qquad \text{(Jensen).}$$

De forma que maior σ^2 amplia o ganho de esperar porque eleva o valor de reagir condicionalmente a estados futuros favoráveis, evitando a perda de reversão λ nos desfavoráveis. Note que os limiares em q não se movem com a incerteza; a banda de inação em q-espaço permanece $[\underline{q}, \overline{q}] = [s, 1]$.

O que muda com σ^2 é a frequência com que q_t sai dessa banda (via dinâmica do Euler) e, portanto, os gatilhos em termos dos estados subjacentes . Em particular, os pontos de gatilho em A se afastam:

$$\frac{\partial A_*^{\text{inv}}}{\partial \sigma^2} > 0, \qquad \frac{\partial A_*^{\text{des}}}{\partial \sigma^2} < 0,$$

isto é, requer-se um A mais alto para investir e um A mais baixo para desinvestir. A inação torna-se mais provável.

Para mais informações e iteratividade, por favor confira o link e o programa em python na wiki!

Exercício 3 (Teoria Q com dois tipos de capital e colateral)

Considere que existem dois tipos de capital: K_T (tangível) e K_I (intangível). A produção é

$$Y_t = A_t\, F(K_{T,t}, K_{I,t}), \quad F \text{ neoclássica (Inada), estritamente crescente e côncava.}$$

As leis de movimento do capital são

$$K_{T,t+1} = (1-\delta_T)K_{T,t} + I_{T,t}, \qquad K_{I,t+1} = (1-\delta_I)K_{I,t} + I_{I,t}.$$

Os custos de ajustamento são separáveis:

$$G_T(I_{T,t}, K_{T,t}) = \frac{\phi_T}{2}\left(\tfrac{I_{T,t}}{K_{T,t}}\right)^2 K_{T,t}, \qquad G_I(I_{I,t}, K_{I,t}) = \frac{\phi_I}{2}\left(\tfrac{I_{I,t}}{K_{I,t}}\right)^2 K_{I,t}.$$

O preço do bem de investimento é normalizado a 1. A firma escolhe $\{I_{T,t}, I_{I,t}, D_{t+1}, X_t\}_{t\geq 0}$ para maximizar

$$\max\ \mathbb{E}_0 \left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, X_t\right\}$$

sujeita ao orçamento

$$X_t \;=\; A_t F(K_{T,t}, K_{I,t}) \;-\; \big[I_{T,t} + G_T(I_{T,t}, K_{T,t})\big] \;-\; \big[I_{I,t} + G_I(I_{I,t}, K_{I,t})\big] \;-\; R\, D_t \;+\; D_{t+1},$$

à restrição de colateral intertemporal $D_{t+1} \;\leq\; \kappa\, K_{T,t+1}$, e às condições de transversalidade usuais. Aqui $R > 0$ é o fator bruto livre de risco.

(a) Escreva o Lagrangiano com multiplicadores λ_t (orçamento) e μ_{t+1} (colateral). Derive q_T e q_I (preços sombras marginais).Mostre que, quando a restrição de collateral "liga" ($\mu_{t+1} > 0$), surge um *wedge* entre q_T e q_I. Interprete economicamente esse wedge.

Resposta:

O Lagrangiano é dado por

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \mathbb{E}_0 \Bigg\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Bigg[X_t + \lambda_t \Big[A_t F(K_{T,t}, K_{I,t}) - [I_{T,t} + G_T(K_{T,t}, I_{T,t})] - [I_{I,t} + G_I(K_{I,t}, I_{I,t})] - RD_t + D_{t+1} - X_t \Big] \\ + \mu_{t+1}[\kappa K_{T,t+1} - D_{t+1}] \\ + q_{T,t}[(1-\delta_T)K_{T,t} + I_{T,t} - K_{T,t+1}] \quad + q_{I,t}[(1-\delta_I)K_{I,t} + I_{I,t} - K_{I,t+1}] \Bigg] \Bigg\}\end{aligned}$$

As condições de primeira ordem são dadas por

$$\begin{aligned}
[X_t]: &\quad 1 - \lambda_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_t \equiv 1 \\
[I_{T,t}]: &\quad \lambda_t \left[-1 - \frac{\partial G_T}{\partial I_T} \right] + q_{T,t}[+1] = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{T,t} = 1 + \phi_T i_T \\
[I_{I,t}]: &\quad \lambda_t \left[-1 - \frac{\partial G_I}{\partial I_I} \right] + q_{I,t}[+1] = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{I,t} = 1 + \phi_I i_I \\
[D_{t+1}]: &\quad \lambda_t[+1] + \mu_{t+1}[-1] + \lambda_{t+1}[-R\beta] = \quad \Rightarrow \quad \mu_{t+1} = 1 - \beta R \\
[K_{T,t+1}]: &\quad q_{T,t}[-1] + \beta \mathbb{E}_t \left[A_{t+1} F_{K_T}(K_{T,t+1}, K_{I,t+1}) - \frac{\partial G_T}{\partial K_T}(I_{T,t+1}, K_{T,t+1}) + q_{T,t+1}(1-\delta_T) + \mu_{t+1}\kappa \right] = 0 \\
&\quad q_{T,t} = \beta \mathbb{E}_t \left[A_{t+1} F_{K_T}(K_{T,t+1}, K_{I,t+1}) + q_{T,t+1}(1-\delta_T) + \frac{\phi_T}{2} i_{T,t+1}^2 + \mu_{t+1}\kappa \right] \quad \text{(Euler Tangível)} \\
[K_{I,t+1}]: &\quad q_{I,t}[-1] + \beta \mathbb{E}_t \left[A_{t+1} F_{K_I}(K_{T,t+1}, K_{I,t+1}) - \frac{\partial G_I}{\partial K_I}(I_{I,t+1}, K_{I,t+1}) + q_{I,t+1}(1-\delta_I) \right] = 0 \\
&\quad q_{I,t} = \beta \mathbb{E}_t \left[A_{t+1} F_{K_I}(K_{T,t+1}, K_{I,t+1}) + q_{I,t+1}(1-\delta_I) + \frac{\phi_I}{2} i_{I,t+1}^2 \right] \quad \text{(Euler Intangível)}
\end{aligned}$$

Comparando as Eulers para K_T e K_I,

$$q_{T,t} = \beta\, \mathbb{E}_t \left[A_{t+1} F_{K_T}(K_{T,t+1}, K_{I,t+1}) + (1-\delta_T)\, q_{T,t+1} + \frac{\phi_T}{2}\, i_{T,t+1}^2 + \kappa\, \mu_{t+1} \right],$$

$$q_{I,t} = \beta\, \mathbb{E}_t \left[A_{t+1} F_{K_I}(K_{T,t+1}, K_{I,t+1}) + (1-\delta_I)\, q_{I,t+1} + \frac{\phi_I}{2}\, i_{I,t+1}^2 \right],$$

observa-se que o capital tangível possui o termo adicional $\kappa\, \mu_{t+1}$, ausente no intangível. Mantendo constantes os demais componentes (isto é, abstraindo de diferenças em F_K, δ e ϕ para fins expositivos), o prêmio colateral gera um

$$\underbrace{q_{T,t} - q_{I,t}}_{\text{wedge em } q} = \beta\, \mathbb{E}_t\big[\kappa\, \mu_{t+1}\big], \qquad \text{sempre que } \mu_{t+1} > 0.$$

Como $q_{T,t} = 1 + \phi_T i_{T,t}$ e $q_{I,t} = 1 + \phi_I i_{I,t}$, esse prêmio em q se traduz em maior incentivo a investir em tangíveis quando a restrição de colateral está ativa. Em particular, sob hipóteses de simetria ($\phi_T = \phi_I \equiv \phi$, $\delta_T = \delta_I$, e mesmos retornos marginais),

$$i_{T,t} - i_{I,t} \;=\; \frac{\beta\,\mathbb{E}_t[\kappa\,\mu_{t+1}]}{\phi}.$$

Portanto, uma unidade adicional de capital tangível $K_{T,t+1}$ relaxa a restrição de crédito futura em κ unidades, cujo valor marginal é μ_{t+1}. Assim, quando a restrição liga ($\mu_{t+1} > 0$), o tangível carrega um "prêmio de colateral", refletido no termo $\beta\,\mathbb{E}_t[\kappa\,\mu_{t+1}]$, que eleva seu preço-sombra q_T relativamente a q_I e, consequentemente, sua taxa ótima de investimento.

(b) Estabeleça condições sob as quais I_T reage mais do que I_I a um choque positivo de produtividade A_t. Mostre que um afrouxamento financeiro ($\kappa \uparrow$) aumenta I_T relativamente a I_I quando a restrição fica ativa, e discuta o papel de $(\phi_T, \phi_I, \delta_T, \delta_I)$ nessa assimetria.

Resposta:

Linearizando as Eulers em torno do estado estacionário (omitindo termos de ordem superior), obtemos

$$\Delta q_{T,t} \;\approx\; \beta\,\mathbb{E}_t\Big[\Delta\big(A_{t+1}F_{K_T,t+1}\big)\Big] \;+\; \beta(1-\delta_T)\,\mathbb{E}_t[\Delta q_{T,t+1}] \;+\; \beta\,\kappa\,\mathbb{E}_t[\Delta\mu_{t+1}] \;+\; \beta\,\phi_T\,\bar{\imath}_T\,\mathbb{E}_t[\Delta i_{T,t+1}],$$

$$\Delta q_{I,t} \;\approx\; \beta\,\mathbb{E}_t\Big[\Delta\big(A_{t+1}F_{K_I,t+1}\big)\Big] \;+\; \beta(1-\delta_I)\,\mathbb{E}_t[\Delta q_{I,t+1}] \;+\; \beta\,\phi_I\,\bar{\imath}_I\,\mathbb{E}_t[\Delta i_{I,t+1}],$$

em que $\bar{\imath}_j$ é a taxa de investimento em estado estacionário do tipo $j \in \{T, I\}$. Pelo custo de ajuste quadrático, o mapeamento entre preço-sombra e investimento é

$$q_{T,t} = 1 + \phi_T i_{T,t}, \qquad q_{I,t} = 1 + \phi_I i_{I,t} \;\Longrightarrow\; \Delta i_{T,t} = \frac{\Delta q_{T,t}}{\phi_T}, \quad \Delta i_{I,t} = \frac{\Delta q_{I,t}}{\phi_I}.$$

Subtraindo as duas Eulers e usando as relações acima,

$$\begin{aligned}\Delta q_{T,t} - \Delta q_{I,t} \approx{}& \beta\,\mathbb{E}_t\Big[\Delta\big(A_{t+1}(F_{K_T,t+1} - F_{K_I,t+1})\big)\Big] + \beta\Big[(1-\delta_T)\mathbb{E}_t[\Delta q_{T,t+1}] - (1-\delta_I)\mathbb{E}_t[\Delta q_{I,t+1}]\Big]\\ &+\; \beta\,\kappa\,\mathbb{E}_t[\Delta\mu_{t+1}] + \;\beta\Big(\phi_T\bar{\imath}_T\mathbb{E}_t[\Delta i_{T,t+1}] - \phi_I\bar{\imath}_I\mathbb{E}_t[\Delta i_{I,t+1}]\Big).\end{aligned}$$

Para um choque positivo de produtividade, se A é neutro e multiplicativo, o termo tecnológico escala os produtos marginais proporcionalmente:

$$\Delta\big(A_{t+1}F_{K_j,t+1}\big) = \Delta A_{t+1} \cdot F^{(\mathrm{ss})}_{K_j,t+1} + \text{termos dinâmicos}.$$

Assim, no impacto, a assimetria tecnológica favorece o tipo com maior F_{K_j} no estado inicial. Além disso, a propagação via depreciação favorece o ativo com menor depreciação (maior $1-\delta_j$). Usando $\Delta i_j = \Delta q_j/\phi_j$, uma condição suficiente para $\Delta i_{T,t} > \Delta i_{I,t}$

após um choque positivo em A_t é

$$F_{K_T}^{(\mathrm{ss})} \geq F_{K_I}^{(\mathrm{ss})}\ , \qquad (1-\delta_T) \geq (1-\delta_I)\ , \qquad \phi_T \leq \phi_I$$

isto é, maior produto marginal inicial, maior persistência (menor depreciação) e menor custo de ajuste no tangível.[1]

Quando a restrição de colateral liga ($\mu_{t+1} > 0$),

$$\frac{\partial q_{T,t}}{\partial \kappa} = \beta\, \mathbb{E}_t[\mu_{t+1}] > 0, \qquad \frac{\partial q_{I,t}}{\partial \kappa} = 0,$$

logo

$$\frac{\partial i_{T,t}}{\partial \kappa} = \frac{1}{\phi_T}\,\frac{\partial q_{T,t}}{\partial \kappa} = \frac{\beta}{\phi_T}\,\mathbb{E}_t[\mu_{t+1}] > 0, \qquad \frac{\partial i_{I,t}}{\partial \kappa} = 0$$

e, portanto, um aumento em κ eleva I_T relativamente a I_I enquanto a restrição permanecer ativa. O efeito é tanto maior quanto menor for ϕ_T (menor custo de ajuste) e quanto menor for δ_T (maior persistência via $(1-\delta_T)$). Se a restrição não liga ($\mu_{t+1} = 0$), κ é inócuo sobre a margem de investimento.

Resumidamente, temos

- **Custo de ajuste:** dado Δq, a sensibilidade de I_j é $1/\phi_j$; assim, $\phi_T < \phi_I$ amplifica a reação de I_T.
- **Depreciação:** menor δ_T aumenta o peso de $q_{T,t+1}$ na Euler, reforçando a resposta de q_T e, via $q_T \to i_T$, a de I_T.
- **Colateral:** com $\mu > 0$, o termo $\beta\,\kappa\,\mu$ cria um prêmio em q_T inexistente em q_I, gerando $\partial(I_T - I_I)/\partial\kappa > 0$.

Observação: Na formulação do item (a) com $\lambda_t \equiv 1$, a CPO em D_t implica $\mu_t = 1 - \beta R$ (constante). Nesse caso, $\Delta\mu_{t+1} = 0$ e a variação do wedge financeiro provém de κ (não de A). Se se permitir um multiplicador estocástico (e.g., preço estocástico de payouts), μ_{t+1} torna-se endógeno ao estado e o termo $\mathbb{E}_t[\Delta\mu_{t+1}]$ pode contribuir para a assimetria.

---

[1] O termo de ajuste $\propto \bar{\imath}_j$ reforça essa conclusão, pois Δi_j entra recursivamente com peso proporcional a $\phi_j \bar{\imath}_j$ na dinâmica de q_j.

(c) Discuta como o Q médio $Q_t \equiv \frac{\text{valor de mercado da firma}}{\text{custo de reposição do capital reprodutível}}$ pode se distanciar do q marginal quando há capital intangível (não reprodutível como "máquina") e rendas.

Resposta:

Pelo resultado de Hayashi, $Q_t^{\text{médio}} = q_t^{\text{marginal}}$ requer (i) retornos constantes de escala, (ii) competição perfeita e sem ativos não reprodutíveis, com custos de ajuste "bem comportados". Aqui há duas quebras centrais:

1. Capital intangível não reprodutível

O numerador de Q (valor de mercado) capitaliza o fluxo de rendas proveniente de intangíveis (P&D, organização, marca, capital humano específico), ao passo que o denominador (custo de reposição) tipicamente soma apenas o custo dos ativos reprodutíveis (máquinas, estruturas). Assim,

$$Q_t = \frac{\underbrace{q_{T,t}K_{T,t}}_{\text{valor dos tangíveis}} + \underbrace{\text{valor dos intangíveis}}_{\text{não entra no denominador}} + \underbrace{\text{opções de crescimento}}_{\text{não reprodutíveis}}}{p_K K_{T,t}},$$

de modo que Q_t tende a ficar **acima** do $q_{T,t}$ mesmo que o investimento ótimo em tangíveis seja guiado por $q_{T,t} \approx 1 + \phi_T(I_{T,t}/K_{T,t})$. O "excesso de Q" capta o valor de intangíveis não replicáveis (e de opções) que não entram no custo de reposição.

2. Rendas (markups) e fricções financeiras.

- Poder de mercado/markups: lucros puros elevam V_t sem, necessariamente, elevar o q marginal dos reprodutíveis (especialmente se a firma não estiver na margem de capacidade).
- Serviço de colateral: quando a restrição liga, o tangível embute um prêmio $\beta\kappa\mu_{t+1}$ em seu q marginal. O valor de mercado internaliza também a "opção de relaxar a restrição" no futuro, inflando Q_t de modo não replicável via K_I.
- Opções de crescimento: (excesso de valor para investir mais à frente) elevam Q_t sem exigir que o q marginal contemporâneo suba na mesma medida.

Ou seja, com restrição ativa, $\kappa \uparrow$ aumenta I_T relativamente a I_I em $\beta\,\mu_{t+1}/\phi_T$. Além de que I_T tende a reagir mais a A_t quando: $\mu > 0$, ϕ_T é baixo, δ_T é baixo e/ou a tecnologia dá maior ganho marginal a K_T. Finalmente, Q médio pode ficar bem acima do q marginal por causa de intangíveis não reprodutíveis, rendas/markups e (aqui, também) do serviço de colateral, rompendo a igualdade de Hayashi.

Exercício 4 (HJB e diagrama de fases)

Uma firma escolhe investimento $I(t)$ para maximizar o valor presente dos pagamentos aos acionistas com taxa de desconto contínua $\rho > 0$. A tecnologia é

$$Y(t) \;=\; A(t)\,K(t)^{\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1),$$

e o capital evolui segundo

$$\dot{K}(t) \;=\; I(t) - \delta\,K(t), \qquad \delta > 0.$$

O custo de ajuste é do tipo

$$\Psi(I(t),K(t)) \;=\; \frac{\gamma}{2}\left(\frac{I(t)}{K(t)}\right)^{2} K(t), \qquad \gamma > 0,$$

com preço do bem de investimento normalizado a 1. Seja $V(K;A)$ o valor da firma e defina o preço-sombra do capital como

$$q(t) \;\equiv\; \frac{\partial V}{\partial K}(K(t);A(t)).$$

Salvo indicação em contrário, tome $A(t) \equiv A > 0$ constante. Imponha a condição de transversalidade

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\,q(t)\,K(t) = 0.$$

(a) Escreva a HJB da firma e derive a condição de primeira ordem em I e encontre a política ótima. (**Dica:** o fluxo de renda é dado pela produção menos o custo de investimento e ajustamento).

Resposta:

A HJB é dada por

$$\rho V(K) = \max_{I}\left\{ AK^{\alpha} - I - \Psi(I,K) + V_K(K)[I - \delta K] \right\}$$

Com condição de primeira ordem dada por

$$[I]: \quad -1 - \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial I}}_{\gamma\left(\frac{I}{K}\right)} + \underbrace{V_K(K)}_{\equiv\, q(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 1 + \gamma\left(\frac{I}{K}\right) \quad \therefore \quad I = \left(\frac{q-1}{\gamma}\right)K$$

(b) Usando $q = V'(K)$ e a regra de envelope, derive a dinâmica de q e escreva o sistema:

$$\dot{K} \;=\; \Big(\frac{q-1}{\gamma} - \delta\Big)K, \qquad \dot{q} \;=\; (\rho+\delta)\,q \;-\; \alpha A K^{\alpha-1} \;-\; \frac{(q-1)^2}{2\gamma}.$$

Resposta:

Substituindo a política ótima na dinâmica do capital obtemos

$$\dot{K}(t) = \left(\frac{q(t)-1}{\gamma}\right) K(t) - \delta K(t) = \left(\frac{q(t)-1}{\gamma} - \delta\right) K(t)$$

Agora, use a regra do envelope na HJB para obter

$$\rho \underbrace{V_K(K)}_{q} = \alpha A K^{\alpha-1} - \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial K}}_{-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{I}{K}\right)^2} + V_{KK}(K)(I - \delta K) + V_K(K)(-\delta)$$

e observe que

$$V_K(K) = q \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_K(K) = V_{KK}(K)\dot{K}$$

Agrupando tudo e organizando, obtemos

$$\begin{aligned} \rho q &= \alpha A K^{\alpha-1} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{I}{K}\right)^2 + \dot{q} - \delta q \\ \dot{q} &= (\rho+\delta) q - \alpha A K^{\alpha-1} - \frac{(q-1)^2}{2\gamma} \end{aligned}$$

(c) Caracterize os nulclines (i.e., $\dot{K} = 0, \dot{q} = 0$). Caracterize o estado estacionário (K^*, q^*).

Resposta:

No estado estacionário temos que $\dot{K} = 0$, o que implica $q^* = 1 + \delta\gamma$. Além disso, $\dot{q} = 0$, o que nos leva a

$$\alpha A (K^*)^{\alpha-1} + \frac{\delta^2\gamma^2}{2\gamma} = (\rho+\delta)(1+\delta\gamma) \quad \Rightarrow \quad K^* = \left[\frac{\alpha A}{(\rho+\delta)(1+\delta\gamma) - \frac{\gamma\delta^2}{2}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(d) Linearize o sistema em torno de (K^*, q^*) e escreva o jacobiano. Calcule os autovalores do Jacobiano. Esboce o diagrama de fases, indicando a trajetória estável. (**Dica:** um autovalor positivo e outro negativo representam um *saddle path*.)

Resposta:

O sistema é dado por

$$\begin{cases} \dot{K} & = f(K,q) = \left(\frac{q-1}{\gamma} - \delta\right) K \\ \dot{q} & = g(K,q) = (\rho+\delta)q - \alpha A K^{\alpha-1} - \frac{(q-1)^2}{2\gamma} \end{cases}$$

Definindo os desvios como $\hat{K} \equiv K - K^*$ e $\hat{q} \equiv q - q^*$, temos a expansão em torno do estado estacionário como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{K}} \\ \dot{\hat{q}} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathscr{J}(K^*, q^*)}_{\text{Jacobiano do sistema}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{q} \end{bmatrix}$$

E temos as derivadas parciais:

$$f_K = \left(\frac{q-1}{\gamma} - \delta\right), \quad f_q = \frac{K}{\gamma}, \quad g_K = -\alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}, \quad g_q = (\rho+\delta) - \frac{q-1}{\gamma}$$

O Jacobiano, então, avaliado no estado estacionário é dado por

$$\mathscr{J}(K^*, q^*) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K^*}{\gamma} \\ \alpha(1-\alpha)A(K^*)^{\alpha-2} & \rho \end{bmatrix}$$

Os autovalores sõa dados por $\det(\mathscr{J}^* - \lambda I) = 0$ que nos leva a equação característica

$$\lambda^2 - \underbrace{(0+\rho)}_{\text{Tr}(\mathscr{J}^*)}\lambda + \underbrace{\left(-\frac{K^*}{\gamma}\alpha(1-\alpha)A(K^*)^{\alpha-2}\right)}_{\det(\mathscr{J}^*)} = 0$$

O que nos dá

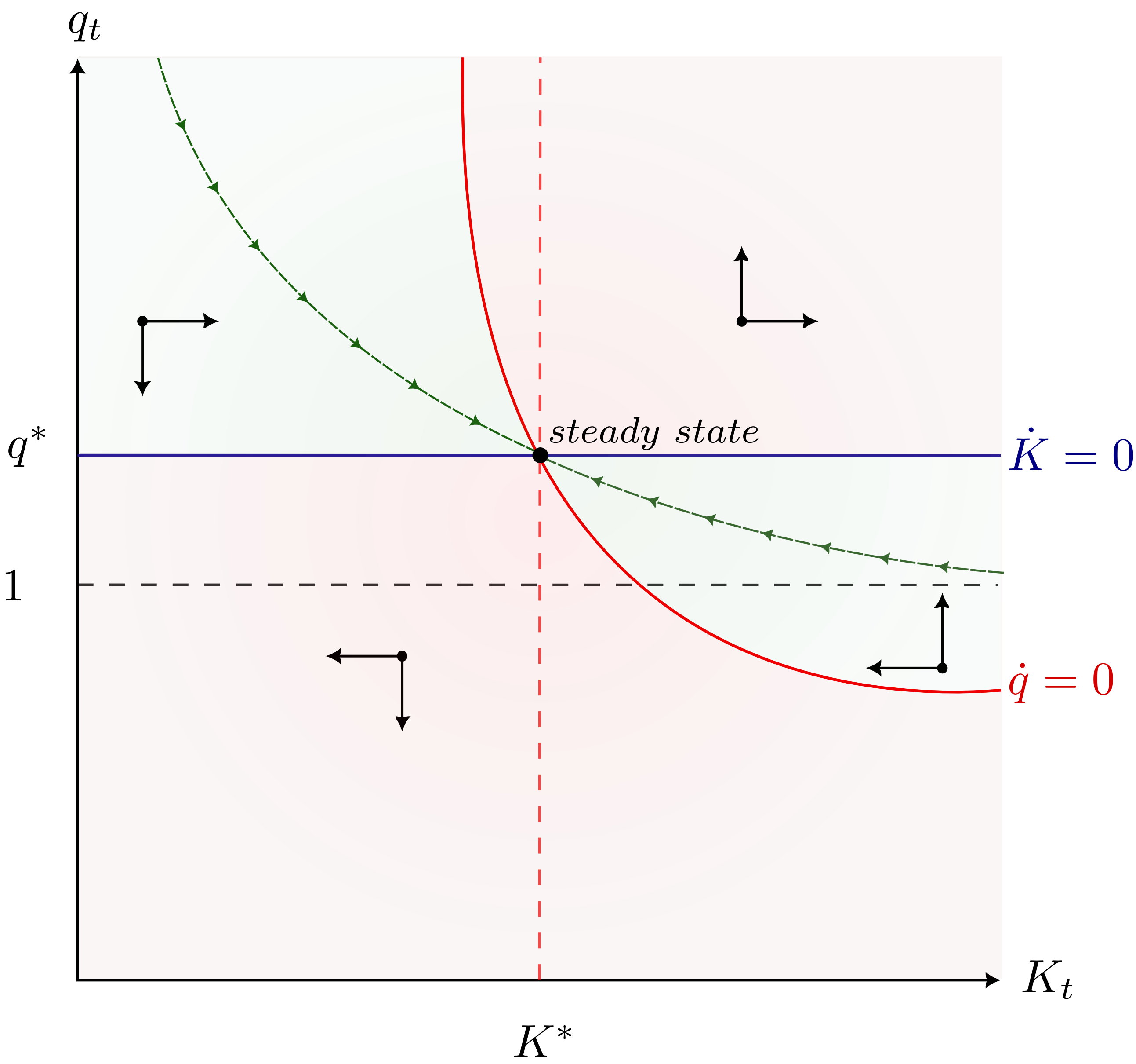
$$\lambda_{\pm} = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\frac{K^*}{\gamma}\alpha(1-\alpha)A(K^*)^{\alpha-2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_- < 0 < \lambda_+$$

Logo, como temos dois autovalores com sinais diferentes, temos um caminho de sela. Mais ainda, podemos caracterizar a inclinação do caminho de sela vendo o vetor direcional do autovalor estável (i.e. λ_-). Resolvendo $(\mathscr{J}^* - \lambda I)v$ nós obtemos

$$-\lambda_- v_k + \frac{K^*}{\gamma} v_q = 0 \quad \therefore \quad \frac{v_q}{v_k} = \frac{\gamma}{K^*}\lambda_- < 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}K}\right|_{\text{saddle}} = \frac{\gamma}{K^*}\lambda_-$$

Como curiosidade, a velocidade de convergência no caso contínuo é dado pelo módulo do autovalor estável. Logo, ao longo do *saddle path*

$$||(\hat{K}, \hat{q})(t)|| \propto e^{\lambda_- t}$$



Para mais detalhes, sugiro conferir essas notas de aula e esse capítulo.