Lista 2 - Programação Dinâmica com Incerteza
Data de entrega: 06/08/2025 (23:59)

Exercício 1 (Cadeia de Markov - P1, 2024)

Considere uma cadeia de Markov simétrica de dois estados (x, P, π_0) com o espaço de estados $x = (\mu + \sigma, \mu - \sigma)$ para um $\mu \in \mathbb{R}$ dado e $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Considere que as probabilidades de transição sejam, para $p \in (0, 1)$,

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a distribuição estacionária (única) desta cadeia de Markov.

(b) Qual a média e o desvio padrão desta distribuição estacionária?

(c) Que propriedade do processo $\{X_t\}$ o parâmetro p controla? Como essa propriedade depende se o p é maior ou menor que 0.5?

Exercício 2 (Ilhas)

Considere uma economia composta por duas ilhas: $\{A, B\}$. Na ilha A, os agentes recebem um salário w^A e um aluguel R^A por unidade de capital. Na ilha B, o salário é w^B e o aluguel é R^B. Note que esses preços são constantes no tempo. O capital se deprecia igualmente nas duas ilhas à uma taxa δ a cada período.

Os agentes vivem infinitamente, tem oferta de trabalho inelástica, e utilidade dada por:

$$U\left(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \quad \beta \in (0,1)$$

em que $u'(\cdot) > 0$ e $u''(\cdot) < 0$. Sendo assim, a restrição orçamentária é dada por:

$$c_t + k_{t+1} \leq w^j + R^j k_t + (1-\delta)k_t, \quad j \in \{A, B\}$$

O tempo é discreto e entre um período e outro, com probabilidade $1-\alpha$, o agente é transportado (involuntariamente e com seu capital) para a outra ilha e, com probabilidade α, ele permanece na mesma ilha.

(a) Seja $v^j(k)$ o valor de um indivíduo que se encontra na ilha j, com estoque de capital k. Escreva as equações de Bellman para $v^A(k)$ e $v^B(k)$.

Seja $g^j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a escolha ótima de poupança, a função política, associada ao problema recursivo do agente que se encontra na ilha j.

(b) Escreva a equação de Euler para um agente que se encontra na ilha A e outra para o indivíduo que se encontra na ilha B. Você deve escrever um sistema de equações funcionais: duas equações para duas incógnitas, g^A e g^B. Assuma que as funções v^j admitem derivada e que vale o teorema do envelope (Benveniste-Scheinkman).

(c) Suponha que $w^A = w^B$, $\alpha > 1/2$ e $R^A > R^B$. Para um dado nível de capital k, o agente deve poupar mais em qual das ilhas? Isto é, $g^A(k)$ deve ser maior, menor ou igual a $g^B(k)$? Pode argumentar informalmente.

Exercício 3 (Robson Cruz e o Coqueiro - P1, 2023)

Robson Cruz vive sozinho em uma ilha remota. Toda sua alimentação depende de um único coqueiro. Robson deriva utilidade apenas do consumo, de acordo com o índice de utilidade $u(c)$, e desconta o futuro com fator $\beta < 1$.

O tempo é discreto, o horizonte infinito e existem dois estados da natureza: $s \in \{\text{sorte, azar}\}$. A transição entre estados ocorre de acordo com uma matriz de transição P, que é simétrica e tem persistência p (isto é, tem p na diagonal principal). O coqueiro gera uma unidade de fruto no estado $s = \text{sorte}$, e meia no estado $s = \text{azar}$.

Apesar de ser o único morador da ilha, Robson acredita em mercados financeiros sofisticados e é tomador de preços. Ele acredita que, em cada estado, pode comprar ações da empresa "Coqueiro S.A." ao preço $q(s)$. Existe um contínuo unitário de ações emitidas, negociadas período a período a bolsa da ilha.

Cada ação pagará amanhã um dividendo de uma unidade de coco caso $s' = \text{sorte}$ e meia unidade caso $s' = \text{azar}$ (i.e. $d(\text{sorte}) = 1$ e $d(\text{azar}) = 1/2$). Além disso, ele pode revender essa ação ao preço $q(s')$. Dessa forma, a restrição sequência de Robson é

$$(q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c$$

em que a é um número de ações que Robson tem hoje e a' é quanto ele compra para amanhã.

(a) Escreva o problema de consumo e poupança de Robson de forma recursiva. Defina as funções políticas para consumo e poupança. **Sugestão:** use $W = (q(s) + d(s))a$ como a variável de estado.

(b) Derive uma equação de Euler que caracteriza a poupança ótima de Robson.

(c) Em equilíbrio, precisamos que $a = 1$ e $c(s) = d(s)$. Por quê? Qual a relação destas condições com o "truque de (K, k)" e com market-clearing?

(d) Avalie as equações de Euler de Robson (estado a estado) neste equilíbrio, fazendo todas as substituições possíveis.

(e) Encontre os preços de equilíbrio das ações "Coqueiro S.A." quando $u(c) = \ln c$ e $p = 2/3$.

Exercício 4 (Caça aos Alimentos)

Robson Cruz, novamente, naufraga em outra ilha remota. Dessa vez, sua alimentação depende de frutas nativas da ilha, que podem ser encontradas com probabilidade π. Quando Robson encontra uma fruta, seu consumo é dado por $c = v$; caso contrário $c = 0$. Assuma também que suas preferências de consumo podem ser representadas por uma função de utilidade $u(c)$ tal que $u(0) = 0$. O período futuro nesta economia é descontado por um fator $\beta < 1$.

(a) Formule o problema recursivo de Robson e escreva sua função valor V em função dos demais parâmetros da economia usando uma recursão.

Após algumas semanas isolado, Robson também descobre que existem animais selvagens na ilha, que podem ser caçados como forma de alimento, obtendo um nível de consumo $c = m > v$. No entanto, cada animal pode ser do tipo $s = \{a, n\}$, agressivo ou manso, respectivamente. De forma que a probabilidade de sucesso na caça, $\lambda(s)$, depende do tipo e $\lambda(a)u(m) < \pi u(v) < \lambda(n)u(m)$.

(b) Dado essa nova possibilidade, formule os problemas recursivos de Robson. Aqui, assuma que Robson decidirá consumir a opção que lhe dará o **maior** nível de utilidade esperada a cada período (i.e., Robson só pode escolher tentar caçar ou colher frutas por período). Chame a função valor de consumo dos animais como W_m e, a de frutas como W_v, e a função valor geral como W. **Observação:** s é uma variável de estado, observada, no período. Assuma que a sequência de s é determinística.

(c) Após mais algumas semanas, Robson decide mudar sua dieta na ilha: Agora ele casa animais se, e somente se, ele tiver consumido frutas no período anterior. Analogamente, ele também consumirá frutas se, e somente se, sau refeição no período anterior tiver sido um animal selvagem. Formule os novos problemas recursivos de Robson. **Observação:** Mesmo que ele não tenha sucesso em obter seu alimento do período, ele repetirá até conseguir. Por exemplo, se no período passado, Robson teve sucesso em caçar animal, ele ficará os próximos períodos colhendo comida até ter sucesso e, depois, voltará à caçar animais. O Problema agora deve ser representado em duas funções separadas.

Exercício 5 (Capital Humano)

Considere a seguinte economia de agentes representativos com formação endógena de habilidade. Existe um contínuo de medida 1 de agentes idênticos na economia. Os agentes começas um um nível inicial de habilidade H_0. Suas preferências são dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Em que $u(\cdot)$ é estritamente crescente e estritamente côncava. Se um indivíduo de habilidade h aloca uma fração do tempo s trabalhando, ele oferta $n = sh$ unidades de trabalho. O tempo que ele não trabalha, $1 - s$, é alocado na melhoria de habilidades. O nível de habilidade no próximo período é:

$$h' = g(1 - s, h)$$

Em que $g(x, h)$ é estritamente crescente e estritamente côncava em (x, h). A restrição de recursos é dada por:

$$C \leq F(L), \quad C = \int_{[0,1]} c_i \, di, \quad L = \int_{[0,1]} h_i s_i \, di$$

em que C é o consumo agregado e L denota unidades de eficiência agregada do fator de trabalho. A função F é linear em L, em específico $F(L) = L$.

(a) Especifique a equação de Bellman de um agente representativo.

(b) Defina o equilíbrio competitivo recursivo para esta economia.