Teoria q em Tempo Contínuo

Felipe Iachan

FGV EPGE

Teoria Macroeconômica II, MD,
16 de setembro de 2025

Extensão para Tempo Contínuo

- Aproximamos Hayashi da apresentação de Romer
- Mantemos depreciação e custos de ajustamento
- Retornos constantes de escala na firma
- Efeito de congestão (externo à firma): $\pi'(K) < 0$
- Preço do capital normalizado: $p_{k,t} = 1$

Problema da Firma

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} d_t dt$$

sujeito a:

$$d_t = \pi(K_t)k_t - i_t - G(i_t, k_t)$$

$$\dot{k}_t = i_t - \delta k_t$$

$$\dot{K}_t = J(K_t)$$

Hipóteses Principais

- Problema sem incerteza (simplificação)
- Retornos constantes: $G(i_t, k_t) = k_t g(i_t/k_t)$
- Simetria: $k_t = K_t$ no equilíbrio
- Consistência: $\dot{K}_t = (\hat{i}_t^* - \delta)K_t$
- Lei de movimento agregada tomada como dada
- Estados (k, K) e valor $V(k, K)$

Equação Hamilton-Jacobi-Bellman

$$rV = \max_i [\pi(K)k - i - G(i,k)] + V_k[i - \delta k] + V_K[J(K)]$$

Condição de primeira ordem:

$$q := V_k = 1 + G_i(i,k) = 1 + g'(\hat{i})$$

Função investimento:

$$\hat{i} = \phi(q) \text{ onde } \phi(q) := g'^{-1}(q-1)$$

Linearidade da Função Valor

Conjectura: $V(k, K) = v(K) \cdot k$

Substituindo na HJB:

$$r[v(K)k] = \max_{\hat{i}} [\pi(K) - \hat{i} - g(\hat{i})]k + v(K)[\hat{i} - \delta]k + v'(K)J(K)k$$

Dividindo por k: equação independente de k

Resultado Chave de Hayashi

Implicação da linearidade:

$$Q = \frac{V(k, K)}{k} = v(K) = V_k = q$$

- Q médio = q marginal
- Resultado análogo ao tempo discreto
- Base para implementação empírica

Condição de Envelope

Diferenciando a HJB em relação a k:

$$rV_k = \pi(K) - G_k + V_{kk}\dot{k} + V_k(-\delta) + V_{Kk}J(K)$$

Com linearidade ($V_{kk} = 0$, $V_{Kk} = v'(K)$):

$$(r + \delta)q = \pi(K) - G_k + \dot{q}$$

Interpretação Econômica

$$(r + \delta)q = \pi(K) - G_k + \dot{q}$$

- Retorno requerido: $(r + \delta)q$
- Produtividade marginal: $\pi(K)$
- Economia em custos de ajustamento: $-G_k$
- Ganhos de capital: $\dot{q}$

Álgebra Auxiliar

Com $G(i,k) = kg(i/k)$:

$$G_k = g\left(\frac{i}{k}\right) - g'\left(\frac{i}{k}\right)\frac{i}{k}$$

No ótimo onde $g'(i/k) = q - 1$:

$$G_k = g(\hat{i}) - (q-1)\hat{i}$$

Portanto: $(q-1)\hat{i} - g(\hat{i}) = -G_k$

Sistema Dinâmico

Com simetria e retornos constantes:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \phi(q) - \delta$$

$$\dot{q} = (r + \delta)q + \psi(\phi(q)) - \pi(K)$$

onde $\psi(x) = g(x) - g'(x)x$

Diagrama de Fases

Lugares geométricos:

- $\dot{K} = 0$: linha vertical em $q = q^*$ onde $\phi(q^*) = \delta$
- $\dot{q} = 0$: geralmente negativamente inclinada

Condição de estabilidade:

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = (r + \delta) + \psi'(\phi(q))\phi'(q) > 0$$

Derivação da Condição de Estabilidade

Usando as formas funcionais específicas:

- $\phi'(q) = \frac{1}{g''(\hat{i})}$
- $\psi'(x) = -g''(x)x$

Portanto:

$$\psi'(\phi(q))\phi'(q) = -g''(\hat{i})\hat{i} \cdot \frac{1}{g''(\hat{i})} = -\hat{i}$$

Condição de estabilidade: $r + \delta > \hat{i}$

Comparação com Romer

Principais diferenças:

- Romer não impõe retornos constantes
- Incluímos $G_k \neq 0$ e $\delta > 0$
- Nosso modelo entrega taxas de investimento, Romer entrega nível de investimento
- Fatorização $V(k, K) = v(K)k$ não vale em Romer

Reconciliação: Quando $\psi(\phi(q)) = 0$ e $\delta = 0$, reduz a Romer

Insights Econômicos

Determinantes do investimento:

- Investimento depende apenas de q
- q incorpora toda informação forward-looking
- Produtividade, fluxo de caixa afetam via q

Papel dos custos de ajustamento:

- Sem custos: $q = 1$ sempre, investimento indeterminado
- Custos convexos: dinâmica e velocidade finita

Exemplo Quadrático (Para Sala de Aula)

Seja $g(x) = \frac{\kappa}{2}x^2$. Então:

- $g'(x) = \kappa x \Rightarrow \phi(q) = \frac{q-1}{\kappa}$
- $\psi(x) = g(x) - xg'(x) = \frac{\kappa}{2}x^2 - x(\kappa x) = -\frac{\kappa}{2}x^2$

Sistema dinâmico:

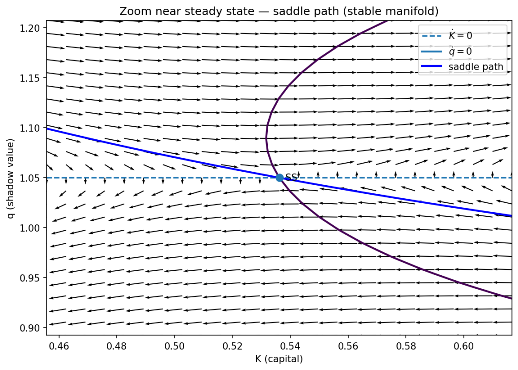
$$\dot{K} = K\left(\frac{q-1}{\kappa} - \delta\right)$$

$$\dot{q} = (r+\delta)q - \pi(K) - \frac{\kappa}{2}\left(\frac{q-1}{\kappa}\right)^2 = (r+\delta)q - \pi(K) - \frac{(q-1)^2}{2\kappa}$$

Lugares Geométricos - Caso Quadrático

Nullclines explícitas:

- $\dot{K} = 0$: linha vertical em $q = 1 + \kappa\delta$
- $\dot{q} = 0$: $\pi(K) = (r + \delta)q - \frac{(q-1)^2}{2\kappa}$



Código no Colab

Dinâmica Comparativa - Caso Quadrático

- Aumento em κ (custos mais crescentes)
- Aumento em δ (depreciação mais rápida)
- Choque negativo em $\pi(K)$ (produtividade mais baixa)
- Mudança em r (taxa de juros mais alta)

Implicações para Política

- Políticas que afetam custo de capital (r) têm efeitos imediatos
- Efeitos de congestão ($\pi'(K) < 0$) criam dinâmica agregada
- Mudanças em q refletem todas as expectativas futuras
- Política fiscal pode afetar via trajetória de $\pi(K)$

Extensões Possíveis

Direções de pesquisa:

- Incerteza (choques estocásticos em $\pi(K_t)$)
- Múltiplos tipos de capital
- Fricções financeiras
- Firmas heterogêneas
- Mercados imperfeitos

Limitações Atuais

- Sem papel para variáveis financeiras além de q e r
- Retornos constantes podem ser restritivos
- Ausência de fricções no mercado de capital
- Modelo determinístico

Apêndice Técnico: Derivadas Principais

Para $G(i,k) = kg(i/k)$:

Derivadas de primeira ordem:

- $G_i = g'(i/k)$
- $G_k = g(i/k) - g'(i/k)(i/k)$

Derivada cruzada:

- $G_{k,i} = -g''(i/k) \cdot \frac{i}{k^2}$

Truque da homogeneidade:

- $G_k(i,k) = G_k(i/k,1) = \psi(i/k)$