Curso de ECONOMIA FGV EPGE

Disciplina: CÁLCULO II **A1**

Professora: YUNELSY N ALVAREZ

Aluno: ______________________________

Data: 25/09/2025

Informações sobre a prova estabelecidas pelo professor

- O aluno só pode realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O nome do aluno deve ser incluído em todas as folhas utilizadas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta com tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta com tinta vermelha ou verde.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só pode ter consigo lápis, borracha e caneta. Se necessário, o fiscal pode solicitar ajuda a outro aluno, e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico. O celular deve ser desligado e guardado.
- Apresente seu raciocínio de forma clara para que seus desenvolvimentos sejam avaliados, mesmo que parcialmente. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Extraído do Regulamento do Curso de Economia

Art. 46 - As penas previstas no artigo 43 serão aplicadas conforme a gravidade ou reincidência das faltas abaixo exemplificadas:

b) improbidade na execução dos atos escolares, destacando-se como **atos gravíssimos**, o **uso da 'cola'**, **cópia** e **plágio** durante a realização de avaliações escolares e/ou atividades escolares;

§ 1º A prática da **'cola'**, **cópia** e **plágio** em avaliações escolares será punida com a reprovação automática na disciplina.

Quadro de Notas

Questão	1	2	3	4	Total
Valor	4,0	3,0	2,5	0,5	10
Nota					
Revisão					

Questão 1.
Em cada item, determine o conjunto em que a função é contínua.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+y)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y+x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^3-1} & \text{se } x \neq 1, \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 1. \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Solução:

(a) A função é claramente contínua nos pontos em que $y \neq -x$ pois, nesse conjunto, a expressão que define $f(x,y)$ é composta por funções elementares (polinômios, raiz quadrada e produtos).

Os pontos que pertencem à reta de equação $y = -x$, com exceção da origem, não estão no domínio da função. Assim, a função não pode ser contínua nesses pontos.

A fim de verificar a continuidade em $(0,0)$, é necessário analisar o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Se esse limite existir e for igual a $f(0,0) = 0$, então a função será contínua na origem. Caso contrário, a função será descontínua nesse ponto. Consideremos o caminho $y = x$. Temos:

$$f(x,x) = \frac{x^2-x^2+x\cdot x}{\sqrt{x^2+x^2}\cdot(x+x)} = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2}\cdot 2x} = \frac{x^2}{2\sqrt{2}|x|x}$$

Agora, analisamos separadamente os casos em que $x > 0$ e $x < 0$. Para $x > 0$, temos $|x| = x$, e

$$\frac{x^2}{2\sqrt{2}x\cdot x} = \frac{x^2}{2\sqrt{2}x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$, então a expressão fica:

$$\frac{x^2}{2\sqrt{2}(-x)x} = \frac{x^2}{-2\sqrt{2}x^2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x,x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Os limites obtidos ao longo do mesmo caminho, mas com aproximações por lados diferentes, são distintos. Isso mostra que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x)$$

não existe. **(0.5)**

Portanto, a função f também não é contínua na origem, já que o limite não existe nesse ponto. **(0.25)**

Como resultado, concluímos que f é contínua no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq -x\}$. **(0.25)**

(b) Claramente, a função é contínua fora da origem. Reescrevendo a função para $(x,y) \neq (0,0)$ temos:

$$f(x,y) = \frac{x^4y+x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2y(x^2+y)}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y(x^2+y).$$

O primeiro fator é limitado:

$$\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le 1$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y(x^2+y) = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \qquad \textbf{(0.5)}$$

Por outro lado, esse limite não coincide com o valor da função na origem ($f(0,0) = 1$), logo, a função não é contínua em $(0,0)$. **(0.25)**

Segue que a função é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. **(0.25)**

(c) É claro que a função é contínua em qualquer ponto (x,y) tal que sua abscissa seja $x \neq 1$. Nesses pontos temos

$$f(x,y) = \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Agora, calculamos o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(1,y)} f(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{1^2+1+1} = \frac{1}{3}.$$

para cada $y \in \mathbb{R}$. **(0.5)**

Como o limite existe e coincide com o valor da função em todos os pontos (x,y) com $x = 1$, conclui-se que f é contínua em todo o conjunto dos pontos onde $x = 1$. **(0.25)**

Segue que a função é contínua em todo seu domínio $\mathbb{R}^2$. **(0.25)**

(d) Fora da origem, ou seja, para $x^2 + y^2 > 0$, o numerador e o denominador são funções contínuas, e o quociente entre funções contínuas (onde o denominador não se anula) também é contínuo.

Como a função não está definida na origem, ela não pode ser contínua nesse ponto. **(0.5)**

Concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. **(0.5)**

Questão 2.
Considere a função $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.

(a) Determine a direção de maior crescimento da função f no ponto $(1,2)$.

(b) Calcule a taxa máxima de variação de f no ponto $(1,2)$.

(c) Esboce a curva de nível de f que passa pelo ponto $(1,2)$.

(d) Indique no esboço anterior a direção em que a função apresenta a maior taxa de crescimento no ponto $(1,2)$. Justifique com base em três aspectos: **direção**, **sentido** e **ângulo**.

Solução:

(a) Sabemos que a direção de maior crescimento de uma função em um ponto é dada pelo vetor gradiente $\nabla f(x,y)$ nesse ponto. Vamos calcular o gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

No ponto $(1,2)$, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{2\cdot 1}{1+1^2+2^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{2\cdot 2}{1+1^2+2^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a direção de maior crescimento de f no ponto $(1,2)$ é dada pelo vetor gradiente:

$$\nabla f(1,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \textbf{(0.5)}$$

(b) Como vimos na sala de aula, a taxa máxima de variação de uma função diferenciável em um ponto é a derivada direcional na direção do gradiente. Ou seja, escolhendo $v = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$, a taxa máxima de variação no ponto $\mathbf{x}$ é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), v\rangle = \left\langle \nabla f(\mathbf{x}), \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}\right\rangle = \|\nabla f(\mathbf{x})\|.$$

Portanto, a taxa máxima de variação de f no ponto $(1,2)$ é

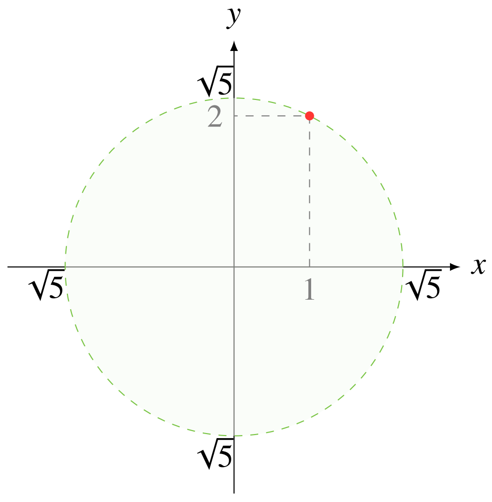
$$\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \qquad \textbf{(0.5)}$$

(c) A curva de nível da função f que passa pelo ponto $(1,2)$ é a curva de equação

$$f(x,y) = f(1,2),$$

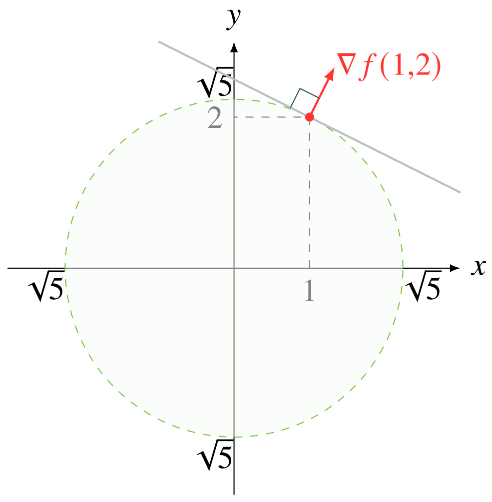
ou seja,

$$\ln(1+x^2+y^2) = \ln(1+1^2+2^2) = \ln 6 \implies 1+x^2+y^2 = 6 \implies x^2+y^2 = 5. \qquad \textbf{(0.25)}$$



(0.25)

(d) O vetor gradiente indica tanto a *direção* quanto o *sentido* de maior crescimento de uma função. Neste caso, o gradiente aponta para fora do círculo, pois, sobre circunferências de raio maior que $\sqrt{5}$, a função f assume valores maiores (o que decorre do fato da função ln ser uma função crescente, fato conhecido de Cálculo I). Além disso, o vetor gradiente é ortogonal à curva de nível no ponto considerado. **(0.25)**



(0.25)

Questão 3.

Considere a função $f(x,y) = e^{xy} + x^2 + 3y^4$.

(a) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2)$.

(b) Dê uma estimativa para $f(1{,}01, 1{,}98)$.

(c) Sabendo que $f(1{,}01, 1{,}98) = 54{,}5296$, podemos afirmar que $Q(1{,}01, 1{,}98) \geq L(1{,}01, 1{,}98)$ ou $Q(1{,}01, 1{,}98) \leq L(1{,}01, 1{,}98)$? Justifique sua resposta.[a]

[a] L é a aproximação linear e Q a aproximação quadrática da função no ponto $(1,2)$.

Solução:

(a) A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) é dada por:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) \qquad \textbf{(0.5)}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 12y^3 \qquad \textbf{(0.25)}$$

No ponto $(1,2)$:

$$f(1,2) = e^2 + 1^2 + 3 \cdot 2^4 = e^2 + 1 + 3 \cdot 16 = e^2 + 49$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2e^2 + 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = e^2 + 96$$

Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2)$ é:

$$z = e^2 + 49 + (2e^2 + 2)(x - 1) + (e^2 + 96)(y - 2) \qquad \textbf{(0.25)}$$

(b) Podemos usar a aproximação linear de f no ponto $(1,2)$ para fazer a estimativa, pois o ponto $(1{,}01, 1{,}98)$ está muito próximo. Sabemos que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2)$ é o gráfico da aproximação linear; assim, a partir do item anterior, obtemos diretamente:

$$L(x,y) = e^2 + 49 + (2e^2 + 2)(x - 1) + (e^2 + 96)(y - 2). \qquad \textbf{(0.5)}$$

Avaliando no ponto em questão

$$\begin{aligned} L(1{,}01, 1{,}98) &= e^2 + 49 + (2e^2 + 2)(1{,}01 - 1) + (e^2 + 96)(1{,}98 - 2) \\ &= e^2 + 49 + (2e^2 + 2)(0{,}01) + (e^2 + 96)(-0{,}02) \end{aligned} \qquad \textbf{(0.25)}$$

Usaremos uma aproximação não tão precisa de e: $e = 2{,}7 \implies e^2 \approx 7{,}29$[1]. Temos:

$$f(1,2) \approx 7{,}29 + 49 = 56{,}29,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \approx 2 \cdot 7{,}29 + 2 = 14{,}58 + 2 = 16{,}58$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \approx 7{,}29 + 96 = 103{,}29$$

Daí,

$$L(1{,}01, 1{,}98) \approx 56{,}29 + 16{,}58 \cdot 0{,}01 + 103{,}29 \cdot (-0{,}02) \approx 54{,}39.$$

[1] Claramente, melhores aproximações de e implicará em melhores aproximações de $f(1{,}01, 1{,}98)$.

Portanto,

$$f(1{,}01, 1{,}98) \approx 54{,}39 \qquad \textbf{(0.25)}$$

(c) O Teorema de Taylor garante que a aproximação quadrática Q é mais precisa do que a linear L para funções diferenciáveis. **(0.25)**

Como $L(1{,}01{,}1{,}98) < f(1{,}01{,}1{,}98)$, então podemos afirmar que:

$$Q(1{,}01, 1{,}98) \geq L(1{,}01, 1{,}98). \qquad \textbf{(0.25)}$$

Questão 4.

Considere a curva definida implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Determine quais pontos da curva estão mais acima e quais estão mais abaixo.

Solução:

Nosso objetivo é determinar os pontos da curva que estão mais acima e mais abaixo, ou seja, os pontos em que a coordenada y atinge valores máximos e mínimos.

Do Teorema da Função Implícita sabemos que a curva é localmente um gráfico ao redor desses pontos, ou seja, $y = y(x)$. Por outro lado, de Cálculo I sabemos que tais pontos ocorrem quando

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = 0.$$

Para achar essa derivada vamos usar a fórmula da derivada implícita:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)},$$

onde

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$$

é a função cuja curva de nível define a equação da curva. Calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + 2y.$$

Substituímos na fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

Queremos determinar os pontos onde essa derivada se anula:

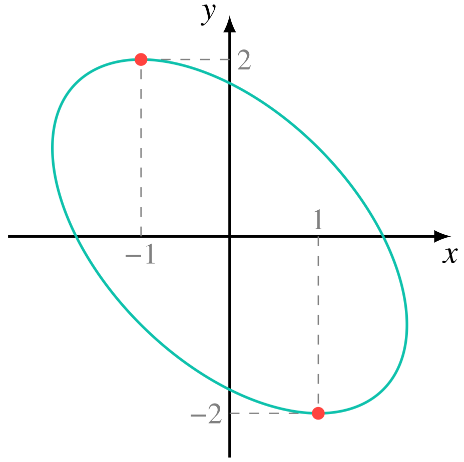
$$\frac{dy}{dx} = 0 \iff -\frac{2x+y}{x+2y} = 0 \iff 2x + y = 0 \iff y = -2x.$$

É claro que estamos procurando pontos que estão sobre a curva original, logo, substituímos essa relação na equação original:

$$x^2 + x(\underbrace{-2x}_{y}) + (\underbrace{-2x}_{y})^2 = 3 \implies x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 \implies 3x^2 = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Assim, os pontos candidatos são $(1,-2)$ $(-1,2)$. Conclui-se que o ponto mais abaixo da curva é p ponto $(1,-2)$ e o mais acima é o ponto $(-1,2)$.

O conjunto cujos pontos satisfazem a equação $x^2 + xy + y^2 = 3$ é a elipse representada a seguir.



Observação

O que nos assegura, sem conhecermos a forma da curva, que os pontos críticos locais $y = -2$ e $y = 2$ são realmente os valores mínimo e máximo da coordenada y ao longo de toda a curva?
Observemos em primeiro lugar que os pontos sobre a curva satisfazem[2]

$$3 = x^2 + xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - |xy| \geq x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \implies x^2 + y^2 \leq 6,$$

o que mostra que todos os pontos da curva estão contidos na bola de raio $\sqrt{6}$ centrada na origem. Isso prova que a curva é limitada.
Já vimos que curvas definidas como o conjunto de zeros de funções polinomiais contínuas são conjuntos fechados. Conclui-se, portanto, que a curva é um conjunto compacto por ser fechado e limitado.
Pelo Teorema de Weierstrass, uma função contínua definida sobre um conjunto compacto atinge seus valores máximo e mínimo. Isso garante que a função altura (coordenada y) atinge pelo menos um valor máximo e pelo menos um valor mínimo sobre a curva. Assim, existe de fato pelo menos um ponto mais alto e pelo menos um ponto mais baixo sobre essa curva. Por isso, podemos afirmar que os candidatos obtidos anteriormente resolvem o problema.

[2] Da desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica segue que $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.