Exercícios Extras
Gabarito

Obs.: últimos exercícios adicionados com título em vermelho

1 Mercados Completos

Exercício 1 (Um giro completo por Mercados Completos)

De LS, 8.7 da quarta edição.

Uma economia consiste é habitada por dois consumidores, denotados por $i = A, B$. O tempo é discreto, $t \geq 0$. Há um bem de consumo não estocável nessa economia, que aparece na forma de uma sequência de dotações pertencentes a cada consumidor. As dotações dos consumidores $i = A, B$ são:

$$y_t^A = s_t$$
$$y_t^B = 1$$

onde s_t é uma variável aleatória regida por uma cadeia de Markov de dois estados com valores $s_t = \bar{s}_1 = 0$ ou $s_t = \bar{s}_2 = 1$. A cadeia de Markov tem probabilidades de transição invariantes denotadas por $\pi(s_{t+1} = s'|s_t = s) = \pi(s'|s)$, e distribuição de probabilidade sobre o estado inicial $\pi_0(s)$. A dotação agregada em t é $Y(s^t) = y_t^A + y_t^B$.

Seja c^i o processo estocástico de consumo do consumidor i. Ele ordena as sequências de consumo por meio de:

$$U(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \ln[c_t^i(s^t)]\, \pi_t(s^t)$$

onde $\pi_t(s^t)$ é a probabilidade de ocorrência da história $s^t = (s_0, s_1, ..., s_t)$.

(a) Dê uma fórmula para $\pi_t(s^t)$.

(Resposta:) Lembrando da propriedade de Markov, temos que

$$\pi_t(s^t) = \pi(s_t|s^{t-1}) = \pi(s_t|s_{t-1}) \cdot \pi(s_{t-1}|s_{t-2}) \dots \pi(s_1|s_0) \cdot \pi_0(s_0)$$

.

(b) Seja $\theta \in (0, 1)$ o peso de Pareto associado ao consumidor A. O problema do planejador central é dado por

$$\max_{c^A, c^B} \left\{\theta\, U(c^A) + (1 - \theta)\, U(c^B)\right\}$$
$$\text{s.t.} \quad c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) \leq Y(s^t), \quad \forall t, \forall s^t$$

Solucione o problema de Pareto, tomando θ como parâmetro.

(Resposta:) Seja o lagrangeano do problema do planejador:

$$\mathcal{L} = \theta \, \ln[c_t^A(s^t)] + (1{-}\theta) \, \ln[c_t^B(s^t)] + \eta_t(s^t) \cdot [Y(s^t) - c_t^A(s^t) - c_t^B(s^t)]$$

$$\text{FOC:} \quad [c_t^A(s^t)] : \quad \frac{\theta}{c_t^A(s^t)} - \eta_t(s^t) = 0$$

$$[c_t^B(s^t)] : \quad \frac{1-\theta}{c_t^B(s^t)} - \eta_t(s^t) = 0$$

Combinando as duas condições de primeira ordem, obtemos

$$\frac{c_t^A(s^t)}{c_t^B(s^t)} = \frac{\theta}{1-\theta} \tag{1}$$

Usando a condição de factibilidade na equação (1), obtemos as alocações de equilíbrio como função da dotação agregada:

$$c_t^A(s^t) + \frac{1-\theta}{\theta} \, c_t^A(s^t) = Y_t(s_t)$$

$$\Rightarrow \; c_t^A(s^t) = \theta \, Y(s_t); \quad c_t^B(s^t) = (1-\theta) \, Y_t(s_t) \tag{2}$$

(c) Defina um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu (trocas no tempo 0). Tenha o cuidado de definir todos os objetos que compõem o equilíbrio.

(Resposta): Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu é uma distribuição inicial s_0, uma alocação de consumo $\{c_t^i(s^t)\}_{\forall t,i,s^t}$ — onde $s^t = \{s_t\}_{\forall t}$ é a história completa até o tempo t — e um sistema de preços $\{q_t^0(s^t)\}_{\forall t,s^t}$ tais que

1. Dado s_0, cada consumidor i soluciona

$$\max_{c_t^i(s^t)} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi_t(s^t) \, u[c_t^i(s^t)] \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, y_t^i(s^t)$$

2. A condição de *market clearing* é satisfeita, $\sum_{i=1}^{2} c_t^i(s^t) = \sum_{i=1}^{2} y_t^i(s^t) \equiv Y(s_t)$

(d) Compute o sistema de preços do equilíbrio de Arrow-Debreu.

(Resposta): Montamos o lagrangeano do problema descentralizado e derivamos as condições de primeira ordem:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi_t(s^t) \, u[c_t^i(s^t)] + \mu^i \, \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, [y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

$$\text{FOC:} \quad [c_t^i(s^t)] : \quad \beta^t \, \pi_t(s^t) \, \frac{1}{c_t^i(s^t)} - \mu^i \, q_t^0(s^t) = 0 \tag{3}$$

Normalizamos $q_0^0(s_0) = 1$, tal que no tempo $t = 0$, a relação (3) torna-se $\mu^i = [c_0^i(s_0)]^{-1}$. Reescrevemos a FOC:

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \, \pi_t(s^t) \, \frac{c_0^i(s_0)}{c_t^i(s^t)} \tag{4}$$

ou ainda:

$$c_t^i(s^t) = \beta^t \, \pi_t(s^t) \, \frac{c_0^i(s_0)}{q_t^0(s^t)}$$

$$\Rightarrow \; c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) = \beta^t \, \pi_t(s^t) \, \frac{[c_0^A(s_0) + c_0^B(s_0)]}{q_t^0(s^t)} = Y(s_t)$$

$$\Rightarrow \; q_t^0(s^t) = \beta^t \, \pi_t(s^t) \, \frac{Y(s_0)}{Y_t(s^t)} \tag{5}$$

Da relação anterior, temos que pela homogeneidade de crenças, preços e fator de desconto:

$$\frac{c_0^A(s_0)}{c_t^A(s^t)} = \frac{c_0^B(s_0)}{c_t^B(s^t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_t^A(s^t)}{c_t^B(s^t)} = \frac{c_0^A(s_0)}{c_0^B(s_0)} \equiv \frac{c_0^A(s_0)}{Y(s_0) - c_0^A(s_0)}$$

Sabemos que, pela factibilidade em $t = 0$, $c_0^A(s_0)$ é uma fração $\gamma \in [0, 1]$ da dotação agregada $Y(s_0)$, de modo que:

$$\frac{c_t^A(s^t)}{c_t^B(s^t)} = \frac{\gamma \, \cancel{Y(s_0)}}{(1 - \gamma) \, \cancel{Y(s_0)}} = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \tag{6}$$

Perceba, contudo, que o consumo ótimo não é constante no tempo:

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \; \frac{1}{c_t^A(s^t)} \, \frac{1}{\mu^A} = \frac{1}{c_t^B(s^t)} \, \frac{1}{\mu^B} \quad \Rightarrow \quad c_t^A(s^t) = \frac{\mu^B}{\mu^A} \, c_t^B(s^t)$$

$$\Rightarrow c_t^A(s^t) = \frac{\mu^B}{\mu^A} \, [Y(s_t) - c_t^A(s^t)]$$

$$\Rightarrow c_t^A(s^t) = \frac{\mu^B}{\mu^A + \mu^B} \, Y(s_t) \tag{7}$$

$Y(s_t)$ não é constante, logo não podemos dizer que $c^i(s_t) = c^i(s_{t+1}) \; \forall t$. Apenas a razão entre os consumos dos dois agentes é constante em cada t.

(e) Qual a relação entre as soluções do problema de Pareto e as do equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu? Faça menção dos Teoremas do Bem-Estar.

(Resposta): Veja que a alocação ótima do problema de Pareto, (1), é igual à alocação de equilíbrio descentralizado (6) para $\theta = \gamma$. Pelo Primeiro Teorema do Bem Estar, qualquer alocação competitiva é Pareto ótima; pelo Segundo a alocação eficiente do planejador pode ser alcançada via mercados competitivos com uma distribuição adequada das riquezas.

(f) Explique como você poderia ter computado o sistema de preços do equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu *antes* de descobrir as alocações de equilíbrio.

(Resposta):

$$\overset{(4),(2)}{\Longrightarrow} \quad q_t^0(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t)\,\frac{\theta Y_0(s_0)}{\theta Y_t(s^t)} = \beta^t \pi_t(s^t)\,\frac{Y_0(s_0)}{Y_t(s^t)}$$

que é a mesma expressão que encontramos em (5).

(g) Defina um equilíbrio em mercados sequenciais. Descreva todos os objetos que compõem o equilíbrio. Defina e compute os limites naturais da dívida para cada consumidor em cada estado.

(Resposta): Um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais é uma distribuição inicial de riqueza $a_0(s_0)$, um sistema de preços $Q_t(s_{t+1}|s^t)$, uma coleção de limites da dívida $\bar{A}_t^i(s^t)$, um conjunto de funções valor $\{v^i(a,s)\}_{\forall i}$ e políticas de consumo e portfólio $\{h^i(a,s), g^i(a,s,s')\}_{\forall i}$ tais que

1. Para todo i, dado a_0^i e a função de preço, as funções políticas solucionam o problema dos agentes:

$$v_t^i(a_t, s^t) = \max_{\{c,\{\bar{a}(s_{t+1}\}\}} \{u_i(c) + \beta\,\mathbb{E}_t\, v_{t+1}^i(\bar{a}(s_{t+1}), s^{t+1})\}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & y_t^i(s^t) + a_t^i(s^t) \geq c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} \bar{a}_{t+1}(s_{t+1}, s^t)\, Q_{t+1}(s_{t+1}|s^t) \\
& -\bar{a}_{t+1}(s_{t+1}, s^t) \leq \bar{A}_{t+1}^i(s^{t+1}) \quad \forall s_{t+1} \\
& c \geq 0
\end{aligned}$$

2. Para toda realização de $\{s^t\}$, o consumo e portfólio de ativos induzidos pelas políticas ótimas satisfazem:

$$\sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t)$$
$$\sum_i \bar{a}_{t+1}^i(s_{t+1}|s^t) = 0$$

Na formulação recursiva do problema, temos:

$$v^i(a,s) = \max_{\{c,\{\bar{a}(s')\}_{s'}\}} \left\{ u_i(c) + \beta \sum_{s'} \pi(s'|s)\, v^i(\bar{a}(s'), s') \right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & y^i(s) + a \geq c + \sum_{s'} \bar{a}(s')\, Q(s'|s) \\
& -\bar{a}(s') \leq \bar{A}^i(s') \quad \forall s' \\
& c \geq 0
\end{aligned}$$

Definimos o limite natural da dívida (de cada estado) como:

$$\bar{A}^i(s) = y^i(s) + \sum_{s'} Q(s'|s)\, \underbrace{\bar{A}^i(s'|s)}_{\bar{A}^i(s')}$$

Em que o limite natural da dívida em $t+1$ não é *history-dependent*, apenas da realização de s_{t+1} e dos eventos futuros. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^A(0) &= \cancelto{0}{y^A(0)} + Q(0|0)\,\bar{A}^A(0) + Q(1|0)\,\bar{A}^A(1) \\
\bar{A}^A(1) &= \cancelto{1}{y^A(1)} + Q(0|1)\,\bar{A}^A(0) + Q(1|1)\,\bar{A}^A(1) \\
\bar{A}^B(0) &= \cancelto{1}{y^B(0)} + Q(0|0)\,\bar{A}^B(0) + Q(1|0)\,\bar{A}^B(1) \\
\bar{A}^B(1) &= \cancelto{1}{y^B(1)} + Q(0|1)\,\bar{A}^B(0) + Q(1|1)\,\bar{A}^B(1)
\end{aligned}
$$

de modo que para encontrar os limites da dívida para cada i, s faz-se necessário calcular os *pricing kernels* $Q(s'|s)$.

(h) Compute os preços dos ativos de Arrow. Compute estes preços para o caso em que $\beta = 0,95$ e $\pi(s_j|s_i) = P_{ij}$, onde $P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$.

(Resposta:) Montamos o lagrangeano:

$$\mathcal{L} = u_i(c) + \beta \sum_{s'} \pi(s'|s)\, V^i(\bar{a}(s'), s') + \mu^i \left[y^i(s) + a - \sum_{s'} \bar{a}(s')\, Q(s'|s) - c \right]$$

$$
\begin{aligned}
\text{FOC:} \quad [c]: &\qquad u_i'(c) - \mu^i = 0 \\
[\bar{a}(s')]: &\qquad \beta\pi(s'|s)\, V_1^i(\bar{a}(s'), s') - \mu^i Q(s'|s) = 0
\end{aligned}
$$

de modo que, no ótimo, e para a função de utilidade $u_i(c) = ln(c)$,

$$
\begin{aligned}
Q(s'|s) &= \beta\,\pi(s'|s)\,\frac{c}{c'} \\
\overset{(7)}{\Rightarrow} Q(s'|s) &= \beta\,\pi(s'|s)\,\frac{Y(s)}{Y(s')} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

De modo que

$$
\begin{aligned}
Q(0|0) &= \beta\,P_{11}\,\frac{y^A(s_1)+y^B}{y^A(s_1)+y^B} = 0,76 \qquad & Q(1|0) &= \beta\,P_{12}\,\frac{y^A(s_1)+y^B}{y^A(s_2)+y^B} = 0,095 \\
Q(0|1) &= \beta\,P_{21}\,\frac{y^A(s_2)+y^B}{y^A(s_1)+y^B} = 0,57 \qquad & Q(1|1) &= \beta\,P_{22}\,\frac{y^A(s_2)+y^B}{y^A(s_2)+y^B} = 0,67
\end{aligned}
$$

(i) Suponha agora que, na economia de mercados sequenciais, um novo ativo é introduzido. Um dos consumidores decide sintetizar um ativo livre de risco de reivindicação de uma unidade de consumo para o próximo período. Compute o preço de equilíbrio desse ativo quando $s_t = 0$ e quando $s_t = 1$.

(Resposta:) Seja $Q^{RF}(s) = \sum_{s'} Q(s'|s)$ o preço de um ativo que paga uma unidaded e consumo com certeza no próximo período. Vamos calculá-lo:

$$Q^{RF}(s) = \begin{cases} \beta \left[P_{11} \frac{y^A(s_1)+y^B}{y^A(s_1)+y^2} + P_{12} \frac{y^A(s_1)+y^B}{y^A(s_2)+y^B} \right] = 0,86 & \text{se} \quad s = s_1 = 0 \\ \beta \left[P_{21} \frac{y^A(s_2)+y^B}{y^A(s_1)+y^2} + P_{22} \frac{y^A(s_2)+y^B}{y^A(s_2)+y^B} \right] = 1,24 & \text{se} \quad s = s_2 = 1 \end{cases}$$

Exercício 2 (Crenças 2.0)

De LS, 8.17 da quarta edição.

Uma economia consiste de dois consumidores, denotados por $i = A, B$. Cada consumidor avalia sequências de um único bem de consumo não estocável por meio de:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \ln[c_t^i(s^t)] \, \pi_t^i(s^t)$$

onde $\pi_t^i(s^t)$ é a probabilidade subjetiva sobre a história s^t do consumidor i. Uma alocação factível é tal que $\sum_i c_t^i(s^t) \leq \sum_i y_t^i(s^t)$ para todo $t \geq 0$ e todo s^t. As dotações dos consumidores são funções de uma variável de estado $s_t \in S = \{0, 1, 2\}$. Os estados são descritos por uma cadeia de Markov invariante no tempo, com distribuição inicial $\pi_0 = [0 \quad 1 \quad 0]'$ e densidade de transição definida pela matriz estocástica

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $P_{ij} = \text{Prob}[s_{t+1} = j - 1 | s_t = i - 1]$ para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$. As dotações dos consumidores são:

$$y_t^A = s_t/2$$
$$y_t^B = 1 - (s_t/2)$$

Na primeira parte deste exercício, ambos os consumidores têm conhecimento das verdadeiras probabilidades sobre as histórias s^t (isto é, sabem tanto π_0 quanto P). Na segunda parte, os consumidores têm probabilidades subjetivas distintas.

Parte I: Suponha que ambos os consumidores sabem (π_0, P), de modo que $\pi_t^A(s^t) = \pi_t^B(s^t)$ para todo $t \geq 0$ e todo s^t.

(a) Mostre como deduzir $\pi_t^i(s^t)$ de (π_0, P).

(Resposta:) Veja que pela propriedade de Markov temos

$$\pi_t(s^t) = \pi(s_t|s_{t-1}) \, \pi(s_{t-1}|s_{t-1}) \dots \pi(s_1|s_0)\pi(s_0)$$

de modo que, dado π_0, a distribuição em $t = 1$ é $\pi_1 = P'\pi_0$, em $t = 2$ é $\pi_2 = P'\pi_1 = (P')^2\pi_0$, e assim por diante. Note que a matriz P é idempotente, $P = P^t$, de modo que

$$\pi_t = (P')^t\pi_0 = P'\pi_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais de ativos de Arrow.

(Resposta:) Um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais pode ser definido por uma distribuição de riqueza inicial $\tilde{a}_0(s_0)$, uma coleção de limites de dívida $\bar{A}_t^i(s^t)$, preços $\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t)$ e alocações de consumo e portfólio $\{\tilde{c}_t^i(s^t)\}$, $\{\tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)\}$ $\forall i, s^t{}_{t=0}^{\infty}$ tais que:

(i) Dados os preços $\tilde{Q}$, as alocações $\tilde{c}$ e $\tilde{a}$ resolvem o problema do consumidor para todo $i \in \{A, B\}$:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \log(\tilde{c}_t^i(s^t)) \\
\text{s.a.} \quad & \tilde{c}_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t) \, \tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \leq y_t^i(s^t) + \tilde{a}_t^i(s^t) \quad \forall i, t, s^t \\
& - \tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \leq A_{t+1}^i(s^{t+1})
\end{aligned}$$

(ii) as condições de *market clearing* são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_t^A(s^t) + \tilde{c}_t^B(s^t) = y_t^A(s^t) + y_t^B(s^t) = 1 \quad \forall t, s^t \\
\sum_i \tilde{a}_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) = 0 \quad \forall t, s_{t+1}
\end{aligned}$$

(c) Compute um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais de ativos de Arrow.

(Resposta:) Vamos por partes.

(i) Computando o equilíbrio de Arrow-Debreu: Lembre-se da condição de factibilidade:

$$c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) = Y(s^t) \tag{9}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \, \ln[c_t^i(s^t)] + \mu_i \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, [y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

$$\text{FOC:} \quad [c_t^i(s^t)]: \quad \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \frac{1}{c_t^i(s^t)} - \mu_i \, q_t^0(s^t) = 0 \tag{10}$$

Normalizamos $q_0^0(s_0) = 1$, de modo que em $t = 0$ temos $\mu_i = [c_0^i(s_0)]^{-1}$; assim,

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \, \pi_t(s^t) \, \frac{c_0^i(s_0)}{c_t^i(s^t)} \tag{11}$$

$$\overset{(9)}{\Rightarrow} \quad \beta^t \frac{\pi_t(s^t)}{q_t^0(s^t)} \left[\cancelto{1}{c_0^A(s_0) + c_0^B(s_0)} \right] = 1$$

$$\Rightarrow q_t^0(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t) \tag{12}$$

Veja que (11) e (12) implicam $c_t^A(s^t) = c_0^i(s_0) = \bar{c}^i$, $\forall i, t, s^t$. Utilizando-se disto na restrição orçamentária:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\,\bar{c}^i = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\,y_t^i(s^t)$$

$$\overset{i=A}{\Rightarrow} \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t\pi_t(s^t)\,\bar{c}^A = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t\pi_t(s^t)\,\frac{s_t}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{c}^A \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \underbrace{\cancel{\sum_{s^t} \pi_t(s^t)}}_{1} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\sum_{s^t}\pi_t(s^t)\,s_t}_{(\bigstar)}$$

em que

$$(\bigstar) \equiv \left[(0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2) + \beta\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) + \beta^2\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) + \dots\right]$$
$$= \frac{1}{1-\beta}$$

de modo que

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{c}^A}{1-\beta} = \frac{1}{2(1-\beta)}$$
$$\Rightarrow \quad \bar{c}^A = \frac{1}{2} = \bar{c}^B \tag{13}$$

(ii) Equivalência: usamos da equivalência entre as alocações de Arrow-Debreu e equilíbrio em mercados sequenciais: $c_t^i(s^t) = \tilde{c}_t(s^t)$.

(iii) Preços de equilíbrio:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s_t) &= \frac{q_{t+1}^0(s^{t+1})}{q_t^0(s^t)} \\ &= \frac{\beta^{t+1}\pi_{t+1}(s^{t+1})}{\beta^t\pi_t(s^t)} \\ &= \beta\frac{\pi(s_{t+1}|s_t)\pi(s_t|s_{t-1})\dots\pi_0(s_0)}{\pi(s_t|s_{t-1})\dots\pi_0(s_0)} \\ &= \beta\pi(s_{t+1}|s_t)\end{aligned} \tag{14}$$

(iv) Limites naturais da dívida: Sabemos que $\bar{A}^i(s) = y^i(s) + \sum_{s'} Q(s'|s)\bar{A}^i(s'|s)$, de modo que

$$\bar{A}^i(s) = y^i(s) + \sum_{s'} \beta\pi(s'|s)\bar{A}^i(s')$$

Para $i = A$, temos:

$$\bar{A}^A(0) = 0 + \beta[1\cdot\bar{A}^A(0) + 0\cdot\bar{A}^A(1) + 0\cdot\bar{A}^A(2)] \Rightarrow \bar{A}^A(0) = \beta\bar{A}^A(0) \Rightarrow \bar{A}^A(0) = 0$$

$$\bar{A}^A(2) = 1 + \beta[0\cdot\bar{A}^A(0) + 0\cdot\bar{A}^A(1) + 1\cdot\bar{A}^A(2)] \Rightarrow \bar{A}^A(2) = 1 + \beta\bar{A}^A(2) \Rightarrow \bar{A}^A(2) = \frac{1}{1-\beta}$$

$$\bar{A}^A(1) = \frac{1}{2} + \beta\left[\frac{1}{2}\cdot\bar{A}^A(0) + 0\cdot\bar{A}^A(1) + \frac{1}{2}\cdot\bar{A}^A(2)\right] \Rightarrow \bar{A}^A(1) = \frac{1}{2(1-\beta)}$$

Similarmente, para $i = B$:

$$\bar{A}^B(0) = 1 + \beta[1 \cdot \bar{A}^B(0) + 0 \cdot \bar{A}^B(1) + 0 \cdot \bar{A}^B(2)] \Rightarrow \bar{A}^B(0) = 1 + \beta\bar{A}^B(0) \Rightarrow \bar{A}^B(0) = \frac{1}{1-\beta}$$

$$\bar{A}^B(2) = 0 + \beta[0 \cdot \bar{A}^B(0) + 0 \cdot \bar{A}^B(1) + 1 \cdot \bar{A}^B(2)] \Rightarrow \bar{A}^B(2) = \beta\bar{A}^B(2) \Rightarrow \bar{A}^B(2) = 0$$

$$\bar{A}^B(1) = \frac{1}{2} + \beta\left[\frac{1}{2} \cdot \bar{A}^B(0) + 0 \cdot \bar{A}^B(1) + \frac{1}{2} \cdot \bar{A}^B(2)\right] \Rightarrow \bar{A}^B(1) = \frac{1}{2(1-\beta)}$$

(v) Portfólios de ativos de Arrow: Computamos a riqueza total de cada um dos agentes, $W_t^i(s^t)$:

$$\begin{aligned}
W_t^i(s^t) &= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s^t} \underbrace{q_\tau^t(s^\tau)}_{\equiv \frac{q_\tau^0(s^\tau)}{q_t^0(s^t)}} c_\tau^i(s^\tau) = \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s^t} \frac{\beta^\tau \, \pi^i(s^\tau) \frac{c_0^i(s^0)}{c_\tau^i(s^\tau)}}{\beta^t \, \pi^i(s^t) \frac{c_0^i(s^0)}{c_t^i(s^t)}} c_\tau^i(s^\tau) \\
&= \sum_{\tau=t}^{\infty} \sum_{s^\tau|s^t} \beta^{\tau-t} \, \pi^i(s^\tau|s^t) \, c_t^i(s^t) \overset{(13)}{=} \frac{1}{2} \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} \sum_{s^\tau|s^t} \pi^i(s^\tau|s^t) \\
&= \frac{1}{2(1-\beta)} \qquad (15)
\end{aligned}$$

Para um dado agente i, sua riqueza financeira pode ser computada como $\Upsilon_t^i(s^t) = W_t^i(s^t) - \bar{A}_t^i(s^t)$. Denotamos $\Upsilon_t^i(s^t) = \tilde{a}_t(s^t)$; para o agente $i = A$, temos:

$$\begin{cases}
\tilde{a}^A(0) = \Upsilon_t^A(0) = W_t^A(0) - \bar{A}^A(0) = \frac{1}{2(1-\beta)} - 0 = \frac{1}{2(1-\beta)} \\
\tilde{a}^A(1) = \Upsilon_t^A(1) = W_t^A(1) - \bar{A}^A(1) = \frac{1}{2(1-\beta)} - \frac{1}{2(1-\beta)} = 0 \\
\tilde{a}^A(2) = \Upsilon_t^A(2) = W_t^A(2) - \bar{A}^A(2) = \frac{1}{2(1-\beta)} - \frac{1}{1-\beta} = -\frac{1}{2(1-\beta)}
\end{cases}$$

Para encontrar os *asset holdings* do agente B basta invocar a condição de *market clearing*:

$$\begin{cases}
\tilde{a}^B(0) = -\tilde{a}^A(0) = -\frac{1}{2(1-\beta)} \\
\tilde{a}^B(1) = -\tilde{a}^A(1) = 0 \\
\tilde{a}^B(2) = -\tilde{a}^A(2) = \frac{1}{2(1-\beta)}
\end{cases}$$

(d) Para cada realização possível das histórias s^t, descreva as sequências de c_t^A e c_t^B, assim como os níveis de riqueza dos consumidores.

(Resposta:) Para a história $\bar{s}^t = \{1, 0, 0, \dots\}$:

$$\{\bar{c}_t^A(\bar{s}^t)\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\} \qquad \{\tilde{a}_t^A(\bar{s}^t)\} = \left\{0, \frac{1}{2(1-\beta)}, \frac{1}{2(1-\beta)}, \dots\right\}$$

$$\{\bar{c}_t^B(\bar{s}^t)\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\} \qquad \{\tilde{a}_t^B(\bar{s}^t)\} = \left\{0, -\frac{1}{2(1-\beta)}, -\frac{1}{2(1-\beta)}, \dots\right\}$$

Para a história $\underline{s}^t = \{1, 2, 2, \dots\}$:

$$\{\bar{c}_t^A(\underline{s}^t)\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\} \qquad \{\tilde{a}_t^A(\underline{s}^t)\} = \left\{0, -\frac{1}{2(1-\beta)}, -\frac{1}{2(1-\beta)}, \dots\right\}$$
$$\{\bar{c}_t^B(\underline{s}^t)\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\} \qquad \{\tilde{a}_t^B(\underline{s}^t)\} = \left\{0, \frac{1}{2(1-\beta)}, \frac{1}{2(1-\beta)}, \dots\right\}$$

Parte II: Suponha agora que enquanto o consumidor A sabe (π_0, P), o consumidor B conhece π_0 mas acredita que P seja

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{10} & 0 & \frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) Deduza $\pi_t^B(s^t)$ de $(\pi_0, \hat{P})$ para todo $t \geq 0$ e todo s^t.

(Resposta:) Da propriedade de Markov,

$$\pi_t^i(s^t) = \pi^i(s_t|s_{t-1}) \cdot \pi^i(s_{t-1}|s_{t-2}) \dots \pi^i(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

Em que $\pi^i(s_j|s_{j-1})$ é derivada de cada P. A distribuição em $t = 1$, $t = 2$, e qualquer t são

$$\begin{aligned} \pi_1^i &= P'\pi_0^i \\ \pi_2^i &= P'\pi_1^i = (P')^2\pi_0^i \\ \pi_t^i &= (P')^t\pi_0^i \end{aligned}$$

Agora, a matriz P é idempotente, de modo que

$$\pi_t^A = P'\pi_0^A = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$
$$\pi_t^B = \hat{P}'\pi_0^B = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

(f) Formule e solucione o problema de Pareto para esta economia.

(Resposta:) Montamos o lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_i \lambda_i \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \ln(c_t^i(s^t)) + \eta_t(s^t) \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} [1 - c_t^A(s^t) - c_t^B(s^t)]$$

Seja λ o peso atribuído a A e $(1 - \lambda)$ o peso atribuído a B. Dividindo a CPO referente ao consumo do agente A pela do agente B, obtemos:

$$\frac{c_t^A(s^t)\pi^B(s_t)}{c_t^B(s^t)\pi^A(s_t)} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Em que supomos, também, independência dos eventos probabilísticos. Pela condição de factibilidade, reescrevemos a expressão acima de modo a obter

$$c_t^A(s^t) = \frac{\lambda \pi^A(s_t)}{\lambda \pi^A(s_t) + (1-\lambda)\pi^A(s_t)} \qquad c_t^B(s^t) = \frac{(1-\lambda)\pi^B(s_t)}{\lambda \pi^A(s_t) + (1-\lambda)\pi^A(s_t)}$$

(g) Defina um equilíbrio de Arrow-Debreu (trocas na data 0).

(Resposta:) Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu é uma distribuição inicial s_0, uma alocação de consumo $\{c_t^i(s^t)\}_{\forall t,i,s^t}$ — onde $s^t = \{s_t\}_{\forall t}$ é a história completa até o tempo t — e um sistema de preços $\{q_t^0(s^t)\}_{\forall t,s^t}$ tais que

1. Dado s_0, cada consumidor i soluciona

$$\max_{c_t^i(s^t)} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t\, \pi_t^i(s^t)\, u[c_t^i(s^t)] \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, y_t^i(s^t)$$

2. A condição de *market clearing* é satisfeita, $\sum_{i=1}^{2} c_t^i(s^t) = \sum_{i=1}^{2} y_t^i(s^t) \equiv Y(s_t)$

(h) Compute o equilíbrio de Arrow-Debreu para esta economia.

(Resposta:) Montamos o lagrangeano e derivamos as condições de primeira ordem:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t\, \pi_t^i(s^t)\, u[c_t^i(s^t)] + \mu^i \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, [y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

$$\text{FOC:} \quad [c_t^i(s^t)]: \quad \beta^t\, \pi_t^i(s^t)\, \frac{1}{c_t^i(s^t)} - \mu^i\, q_t^0(s^t) = 0 \tag{16}$$

Normalizamos $q_0^0(s_0) = 1$, tal que no tempo $t = 0$, a relação (16) torna-se $\mu^i = [c_0^i(s_0)]^{-1}$. Reescrevemos a FOC:

$$q_t^0(s^t) = \beta^t\, \pi_t^i(s^t)\, \frac{c_0^i(s_0)}{c_t^i(s^t)} \tag{17}$$

Usamos a condição de factibilidade:

$$\Rightarrow 1 = c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\beta^t}{q_t^0(s^t)} \left[\pi_t^i(s^t)\, c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t)\, c_0^B(s_0)\right]$$

$$\Rightarrow q_t^0(s^t) = \beta^t \pi_t^B(s^t) + \beta^t[\pi^A(s^t) - \pi^B(s^t)]\, c_0^A(s_0) \tag{18}$$

Precisamos determinar $c_0^i(s_0)$. Na restrição orçamentária, temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, c_t^i(s^t) &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, y_t^i(s^t) \\
\overset{(17),i=A}{\Longrightarrow} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, \beta^t \pi_t^A(s^t)\, \frac{c_0^A(s_0)}{q_t^0(s^t)} &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, \frac{s_t}{2} \\
\overset{(18)}{\Rightarrow} \quad c_0^A(s_0) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{s^t} \pi_t^A(s^t) &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \{\beta^t[\pi_t^A(s^t) c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t) c_0^B(s_0)]\}\, \frac{s_t}{2} \\
\Rightarrow \quad \frac{c_0^A(s_0)}{1-\beta} &= \frac{c_0^A(s_0)}{2} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \pi_t^A(s^t) s_t}_{(\bigstar)} + \frac{c_0^B(s^t)}{2} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \sum_{s^t} \pi_t^B(s^t)\, s_t}_{(\bigstar\bigstar)}
\end{aligned}
$$

Vamos calcular as expressões destacadas.

$$
(\bigstar) \equiv \left[(0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2) + \beta\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) + \beta^2\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) + \cdots\right]
$$

$$
= \frac{1}{1-\beta}
$$

$$
(\bigstar\bigstar) \equiv \left[(0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2) + \beta\left(\frac{4}{10}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{6}{10}\cdot 2\right) + \beta^2\left(\frac{4}{10}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{6}{10}\cdot 2\right) + \cdots\right]
$$

$$
= 1 + \frac{1,2\beta}{1-\beta}
$$

Substituindo de volta, e usando a condição de factibilidade, obtemos:

$$
\frac{c_0^A(s^0)}{1-\beta} = \frac{c_0^A(s_0)}{2(1-\beta)} + \frac{c_0^B(s_0)(1+0,2\beta)}{2(1-\beta)}
$$

$$
\Rightarrow c_0^A(s^0) = \frac{1+0,2\beta}{2(1+0,1\beta)} > \frac{1}{2} \qquad c_0^B(s^0) = \frac{1}{2(1+0,1\beta)} < \frac{1}{2} \tag{19}
$$

Note que o pessimismo do consumidor B o leva a puxar mais consumo para a história $s^t = \{1, 2, 2, \dots\}$. Assim, ele diminui o consumo inicial e, por factibilidade, $i = A$ acaba por consumir mais em $t = 0$.

Agora podemos calcular os preços com (19):

$$
q_t^0(s^t) = \beta^t[\pi_t^A(s^t) c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t) c_0^B(s_0)] = \beta^t\left[\pi_t^A(s^t)\frac{1+0,2\beta}{2(1+0,1\beta)} + \pi_t^B(s^t)\frac{1}{2(1+0,1\beta)}\right]
$$

de modo que, por (12),

$$
c_t^i(s^t) = \beta^t \pi_t^i(s^t) \frac{c_0^i(s_0)}{q_t^0(s^t)}
$$

$$
c_t^A(s^t) = \pi_t^A(s^t) \frac{\frac{1+0,2\beta}{2(1+0,1\beta)}}{\pi_t^A(s^t)\frac{1+0,2\beta}{2(1+0,1\beta)} + \pi_t^B(s^t)\frac{1}{2(1+0,1\beta)}}
$$

$$
c_t^B(s^t) = \pi_t^B(s^t) \frac{\frac{1}{2(1+0,1\beta)}}{\pi_t^A(s^t)\frac{1+0,2\beta}{2(1+0,1\beta)} + \pi_t^B(s^t)\frac{1}{2(1+0,1\beta)}}
$$

(i) Defina e compute um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais de ativos de Arrow.

(Resposta:) Um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais pode ser definido por uma distribuição de riqueza inicial $\tilde{a}_0(s_0)$, uma coleção de limites de dívida $\bar{A}^i_t(s^t)$, preços $\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t)$ e alocações de consumo e portfólio $\{\tilde{c}^i_t(s^t)\}$, $\{\tilde{a}^i_{t+1}(s_{t+1}, s^t)\}$ $\forall i, s^t{}_{t=0}^{\infty}$ tais que:

(i) Dados os preços $\tilde{Q}$, as alocações $\tilde{c}$ e $\tilde{a}$ resolvem o problema do consumidor para todo $i \in \{A, B\}$:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi^i_t(s^t) \log(\tilde{c}^i_t(s^t)) \\
&\text{s.a.} \quad \tilde{c}^i_t(s^t) + \sum_{s_{t+1}} \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s^t) \, \tilde{a}^i_{t+1}(s_{t+1}, s^t) \le y^i_t(s^t) + \tilde{a}^i_t(s^t) \quad \forall i, t, s^t \\
&\qquad - \tilde{a}^i_{t+1}(s_{t+1}, s^t) \le A^i_{t+1}(s^{t+1})
\end{aligned}
$$

(ii) as condições de *market clearing* são satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}^A_t(s^t) + \tilde{c}^B_t(s^t) = y^A_t(s^t) + y^B_t(s^t) = 1 \quad \forall t, s^t \\
\sum_i \tilde{a}^i_{t+1}(s_{t+1}, s^t) = 0 \quad \forall t, s_{t+1}
\end{aligned}
$$

Para computar o equilíbrio, vamos seguir os mesmos passos da Parte I.

(ii): pela equivalência de alocações, $\tilde{c}^i_t(s^t) = c^i_t(s^t)$.

(iii): vamos computar os preços de equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s_t) &= \frac{q^0_{t+1}(s^{t+1})}{q^0_t(s^t)} = \frac{\beta^{t+1}\pi^i_{t+1}(s^{t+1})\frac{c^i_0(s_0)}{c^i_{t+1}(s^{t+1})}}{\beta^t \pi^i_t(s^t)\frac{c^i_0(s_0)}{c^i_t(s_0)}} \\
&= \beta \, \frac{\pi^i(s_{t+1}|s_t)\pi^i(s_t|s_{t-1}) \ldots \pi^i_0(s_0) c^i_t(s^t)}{\pi^i(s_t|s_{t-1}) \cdots \pi^i_0(s_0) c^i_{t+1}(s^{t+1})} \\
&= \beta \pi^i(s_{t+1}|s_t) \, \frac{c^i_t(s^t)}{c^i_{t+1}(s^{t+1})}
\end{aligned}
$$

Usando a condição de factibilidade,

$$
\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s_t) \, \cancelto{1}{[c^A_{t+1}(s^{t+1}) + c^B_{t+1}(s^{t+1})]} = \beta[\pi^A(s_{t+1}|s_t) c^A_t(s^t) + \pi^B(s_{t+1}|s_t) c^B_t(s^t)]
$$

Assim:

$$
\begin{cases}
\tilde{Q}_0(0|1) = \beta(\frac{1}{2} \, \frac{1+0{,}2\beta}{2(1+0{,}1\beta)} + \frac{4}{10} \, \frac{1}{2(1+0{,}1\beta)}) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{9+\beta}{10+\beta} \right) \\
\tilde{Q}_0(2|1) = \beta(\frac{1}{2} \, \frac{1+0{,}2\beta}{2(1+0{,}1\beta)} + \frac{6}{10} \, \frac{1}{2(1+0{,}1\beta)}) = \frac{1}{2} \left(\frac{11+\beta}{10+\beta} \right) \\
\tilde{Q}_t(0|0) = \beta(1 \, c^A_t(s^t) + 1 \, c^B_t(s^t)) = \beta \\
\tilde{Q}_t(2|2) = \beta(1 \, c^A_t(s^t) + 1 \, c^B_t(s^t)) = \beta \\
\tilde{Q}_t(1|0) = \tilde{Q}_t(2|0) = \tilde{Q}_t(0|2) = \tilde{Q}_t(1|2) = 0
\end{cases}
$$

(iv): Agora, computamos os limites de dívida de cada agente. Podemos rearranjar as restrições do problema do agente no item anterior de modo a encontrar que $\bar{A}^i(s) = y^i(s) + \sum_{s'} \tilde{Q}(s'|s)\,\bar{A}^i(s')$. Primeiro para o agente A:

$$\begin{cases} \bar{A}^A(0) = 0 + \tilde{Q}(0|0)\,\bar{A}^A(0) + \tilde{Q}(1|0)\,\bar{A}^A(1) + \tilde{Q}(2|0)\,\bar{A}^A(2) = \beta\bar{A}^A(0) \Rightarrow \bar{A}^A(0) = 0 \\ \bar{A}^A(2) = 1 + \tilde{Q}(0|2)\,\bar{A}^A(0) + \tilde{Q}(1|2)\,\bar{A}^A(1) + \tilde{Q}(2|2)\,\bar{A}^A(2) = 1 + \beta\,\bar{A}^A(2) \Rightarrow \bar{A}^A(2) = \frac{1}{1-\beta} \\ \bar{A}^A(1) = \frac{1}{2} + \tilde{Q}(0|1)\,\bar{A}^A(1) + \tilde{Q}(1|1)\,\bar{A}^A(1) + \tilde{Q}(2|1)\,\bar{A}^A(2) = \frac{1}{2}\,\frac{10+2\beta}{(1-\beta)(1-+\beta)} \end{cases}$$

Similarmente, para o agente B:

$$\begin{cases} \bar{A}^B(0) = 1 + \tilde{Q}(0|0)\,\bar{A}^B(0) + \tilde{Q}(1|0)\,\bar{A}^B(1) + \tilde{Q}(2|0)\,\bar{A}^B(2) = 1 + \beta\,\bar{A}^B(0) \Rightarrow \bar{A}^B(1) = \frac{1}{1-\beta} \\ \bar{A}^B(2) = 0 + \tilde{Q}(0|2)\,\bar{A}^B(0) + \tilde{Q}(1|2)\,\bar{A}^B(1) + \tilde{Q}(2|2)\,\bar{A}^B(2) = \beta\bar{A}^B(2) \Rightarrow \bar{A}^B(2) = 0 \\ \bar{A}^B(1) = \frac{1}{2} + \tilde{Q}(0|1)\,\bar{A}^B(0) + \tilde{Q}(1|1)\,\bar{A}^B(1) + \tilde{Q}(2|1)\,\bar{A}^B(2) = \frac{1}{2}\left[\frac{10}{(1-\beta)(10+\beta)}\right] \end{cases}$$

(v): Computamos a riqueza total de cada um dos agentes, $W_t^i(s^t)$:

$$\begin{aligned} W_t^i(s^t) &= \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t} \underbrace{q_\tau^t(s^\tau)}_{\equiv \frac{q_\tau^0(s^\tau)}{q_t^0(s^t)}}\, c_\tau^i(s^\tau) = \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t} \frac{\beta^\tau\,\pi^i(s^\tau)\frac{c_0^i(s^0)}{c_\tau^i(s^\tau)}}{\beta^t\,\pi^i(s^t)\frac{c_0^i(s^0)}{c_t^i(s^t)}}\, c_\tau^i(s^\tau) \\ &= \sum_{\tau=t}^{\infty}\sum_{s^\tau|s^t} \beta^{\tau-t}\,\pi^i(s^\tau|s^t)\,c_t^i(s^t) = c_t^i(s^t)\sum_{\tau=t}^{\infty}\beta^{\tau-t}\sum_{s^\tau|s^t}\pi^i(s^\tau|s^t) \\ &= \frac{c_t^i(s^t)}{1-\beta} \end{aligned} \tag{20}$$

Agora,

$$\begin{aligned} c_t^A(s^t = \{1,0,0,\dots\}) &= \frac{\pi_t^A(s^t)c_0^A(1)}{\pi_t^A(s^t)c_0^A(1) + \pi_t^B(s^t)c_0^B(1)} = \frac{5+\beta}{9+\beta} \\ c_t^A(s^t = \{1,2,2,\dots\}) &= \frac{\pi_t^A(s^t)c_0^A(1)}{\pi_t^A(s^t)c_0^A(1) + \pi_t^B(s^t)c_0^B(1)} = \frac{5+\beta}{11+\beta} \end{aligned}$$

de modo que, por factibilidade, $c_t^B(\bar{s}^t = \{1,0,0\dots\}) = \frac{4}{9+\beta}$ e $c_t^B(\underline{s}^t = \{1,2,2,\dots\}) = \frac{6}{11+\beta}$

Para um dado agente i, sua riqueza financeira pode ser computada como $\Upsilon_t^i(s^t) = W_t^i(s^t) - \bar{A}_t^i(s^t)$. Denotamos $\Upsilon_t^i(s^t) = \tilde{a}_t(s^t)$; para o agente $i = A$, temos:

$$\begin{cases} \tilde{a}^A(0) = \Upsilon_t^A(0) = W_t^A(0) - \bar{A}^A(0) = \frac{c_t^A(0)}{1-\beta} - 0 = \frac{5+\beta}{(9+\beta)(1-\beta)} \\ \tilde{a}^A(1) = \Upsilon_t^A(1) = W_t^A(1) - \bar{A}^A(1) = \frac{c_t^A(1)}{1-\beta} - \bar{A}^A(1) = 0 \\ \tilde{a}^A(2) = \Upsilon_t^A(2) = W_t^A(2) - \bar{A}^A(2) = \frac{c_t^A(2)}{1-\beta} - \bar{A}^A(2) = -\frac{6}{(11+\beta)(1-\beta)} \end{cases}$$

Para encontrar os *asset holdings* do agente B basta invocar a condição de *market clearing*:

$$\begin{cases} \tilde{a}^B(0) = -\tilde{a}^A(0) = -\frac{5+\beta}{(9+\beta)(1-\beta)} \\ \tilde{a}^B(1) = -\tilde{a}^A(1) = 0 \\ \tilde{a}^B(2) = -\tilde{a}^A(2) = \frac{6}{(11+\beta)(1-\beta)} \end{cases}$$

---

2 Programação Dinâmica com Incerteza

Exercício 1 (Crime)

Considere um agente que vive infinitamente e toma decisões sobre quanto poupar, quanto consumir e se comete um crime ou não. O agente maximiza a utilidade esperada do consumo:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

O agente recebe, no início de cada período, uma retorno $R\,a_t$ sobre a poupança, onde R é a taxa de juros bruta. Adicionalmente, também recebe renda y_t, que é aleatória e iid. Após saber quais serão seus rendimentos no período, o agente escolhe se comete um crime ou não. Cometer um crime dá a ele uma renda adicional x, mas com probabilidade π o indivíduo é pego no ato, e acaba na prisão durante o período corrente.

Se o agente não comete um crime, ou se comente e não é pego, ele escolhe o nível de consumo c_t e a poupança para o próximo período, a_{t+1}. Se ele é pego, vai parar na cadeia. Neste caso, ele recebe um nível de consumo de subsistência $\bar{c}$ (exógeno), sua poupança será dada por $R\,a_t$ e toda renda restante lhe é confiscada. O crime não gera outras consequências futuras.

(a) Escreva a restrição orçamentária do agente que não comete um crime, e a do agente que comete um crime mas não é pego.

(Resposta:) A restrição orçamentária do agente não criminoso é $c_t + a_{t+1} \leq R\,a_t + y_t$, $\forall t$. Já a restrição do agente criminoso que escapa à prisão é $c_t + a_{t+1} \leq R\,a_t + y_t + x$, $\forall t$.

(b) Monte o problema na forma recursiva.

(Resposta:) Uma forma de trabalhar com esse tipo de escolha binária, entre cometer um crime ou não, é montar uma função valor auxiliar para cada escolha e definir a função valor do agente como o máximo das funções valor auxiliares. Para a escolha de não cometer um crime, a função valor auxiliar é:

$$\begin{aligned} V^*(a, y) = \max_{c, a'} \; & \{u(c) + \beta \mathbb{E}[V(a', y')]\} \\ \text{s.t.} \quad & c + a' = Ra + y \\ & c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

Em que foi feita a hipótese de que o agente não pode se endividar. Note que a esperança é incondicional, já que y' e y são independentes.

A função valor auxiliar da escolha de cometer um crime é

$$\begin{aligned} V^{**}(a,y) = (1-\pi)\max_{c,a'} \left\{u(c) + \beta\mathbb{E}\left[V(a',y')\right]\right\} + \pi\left\{u(\bar{c}) + \beta\mathbb{E}\left[V(Ra,y')\right]\right\} \\ \text{s.t.} \quad c + a = Ra + y + x \\ c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

note que, se for pego, o agente não faz escolha de consumo nem de poupança, como especificado pelo enunciado da questão.

Por fim, a função valor do agente é dada por

$$V(a,y) = \max\left\{V^{*}(a,y), V^{**}(a,y)\right\}$$

(c) Assuma agora que se o criminoso é pego, sua renda futura é permanentemente reduzida: ao invés da renda y, receberá $\gamma\, y$, onde $0 < \gamma < 1$. Se ele comete um crime duas vezes, e é pego nas duas, sua renda futura será $\gamma^2\, y$, e assim por diante. Reescreva o problema de programação dinâmica.

(Resposta:) Note que agora ser pego cometendo um crime traz consequências futuras, de modo que a informação sobre ter sido pego deve ser passada adiante, isto é, deve ser uma variável de estado. Defina n como o número o vezes que o agente foi pego cometendo um crime. As funções valor auxiliares agora são:

$$\begin{aligned} V^{*}(a,y,n) = \max_{c,a'} \; \left\{u(c) + \beta\mathbb{E}[V(a',y',n)]\right\} \\ \text{s.t.} \quad c + a' = Ra + \gamma^n y \\ c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^{**}(a,y,n) = (1-\pi)\max_{c,a'} \left\{u(c) + \beta\mathbb{E}\left[V(a',y',n)\right]\right\} + \pi\left\{u(\bar{c}) + \beta\mathbb{E}\left[V(Ra,y',n+1)\right]\right\} \\ \text{s.t.} \quad c + a = Ra + \gamma^n y + x \\ c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

Por fim, a função valor do agente é dada por

$$V(a,y,n) = \max\left\{V^{*}(a,y,n), V^{**}(a,y,n)\right\}$$

---

3 Equilíbrio Competitivo Recursivo

Exercício 1 (ECR 101)

Considere que o problema do consumidor possa ser caracterizado pela seguinte equação de Bellman:

$$v(k, K) = \max_{c,k' \geq 0} \{U(c) + \beta\, v(k', K')\} \tag{21}$$

$$\text{s.t.}$$

$$c + k' = w(K) + (1 + r(K) - \delta)k \tag{22}$$

$$K' = H(K) \tag{23}$$

(a) Comente, com base neste problema, o porquê da distinção de k e K como variáveis de estado.

(Resposta:) No primeiro módulo de Macroeconomia, assumíamos que os modelos eram estacionários. Portanto, a nível agregado, tínhamos que em equilíbrio $K_t = K$, para todo t. Ou ainda, tínhamos que $K' = H(K)$ com $H(K) = K$. Agora, o equilíbrio do sistema dinâmico não prevê, necessariamente, a existência de um estado estacionário; a dinâmica de equilíbrio pode ser tal que as variáveis flutuem com o tempo. Queremos uma forma de conectar o comportamento individual e o resultado agregado.

Para o problema descentralizado, assumimos que os agentes não consideram seu impacto sobre os preços. Esses preços são funções do nível agregado de capital na economia. Claro que, em termos agregados, os tomadores de decisão escolhem o nível de capital e sua lei de movimento, mas queremos que eles se comportem como tomadores de preço perfeitamente competitivos. Por isso fazemos a distinção entre K, uma variável de estado endógena que os agentes veem como fora de seu controle, e k, cujos valores são escolhidos na solução dos problemas de otimização dinâmica.

(b) O que a equação (23) representa? Qual a necessidade de sua inclusão na formulação do problema?

(Resposta:) A equação (23) dita a evolução da variável de estado K. Ou seja, ela governa como o capital agregado transita entre os períodos. Como o capital agregado não é objeto direto de escolha da família, se torna necessária uma lei de movimento para que ela possa aferir o valor de continuidade da Equação de Bellman. Mais concretamente, essa lei de movimento permite o agente formar crenças com relação aos preços da economia que irão vigorar no futuro.

(c) Assumindo a existência de firmas atuando competitivamente, defina o equilíbrio competitivo recursivo para esta economia.

(Resposta:) Além do problema do consumidor, representando pelas equações (21) a (23), explicitamos também o problema da firma,

$$\max_{k,L} f(k, L) - w(K)L - r(K)k \tag{24}$$

e também a condição de não-arbitragem, que garante que

$$R(K) = 1 + r(K) - \delta \tag{25}$$

Dessa forma, um equilíbrio competitivo é uma coleção de preços $\{R(K), r(K), w(K)\}$, uma função de movimento do capital agregado $K' = H(K)$, a função política das famílias, caracterizada por $k' = g(k, K)$, a função valor das famílias, $V(k, K)$, e a demanda por fatores por parte das firmas, $k^d(K)$ e $L^d(K)$, tais que:

1. As funções política, $k' = g(k, K)$, e valor, $V(k, K)$, resolvem o problema das famílias tomando como os preços, $\{R(K), r(K), w(K)\}$, e a lei de movimento do capital agregado, $K' = H(K)$, como dados.
2. Por parte das firmas, a demanda por fatores resolve a maximização e há *market-clearing* nos mercados de fatores. Logo, $k^d(K) = K$ e $L^d(K) = 1$, tomando preços $\{R(K), r(K), w(K)\}$ como dados.
3. Vale a condição de não-arbitragem para as taxas de juros, representada pela equação (5).
4. A lei de movimento do capital agregado é consistente com a decisão das famílias. Isso é, $g(K, K) = H(K)$.

(d) Descreva os passos de um algoritmo para computar o equilíbrio tal como definido acima.

(Resposta:) Um algoritmo que (nem sempre) funciona é descrito abaixo.

1. Inicia-se o processo com um palpite inicial para a função $H_j(K)$.
2. Em seguida, a partir do problema das firmas e da condição de não-arbitragem, obtemos $\{R_j(K), r_j(K), w_j(K)\}$.
3. Depois, resolvemos o problema das famílias, usando o palpite para $H_j(K)$ e os preços associados $\{R_j(K), r_j(K), w_j(K)\}$. Assim, obtemos a função política $g_j(k, K)$.
4. Atualiza-se a lei de movimento do capital agregado utilizando seguinte relação: $H_{j+1}(K) = g_j(K, K)$.

Para encontrar a solução do problema, itera-se tal processo até a convergência. Ao fazermos isso, definimos um operador que toma uma função inicial $H : K \to K$ e, a cada passo, devolve uma H diferente. O motivo pelo qual argumentamos que nem sempre tal método funciona, se dá pelo fato de que não há garantia de que ele descreva uma contração.

Exercício 2 (ECR 102: *now with taxes!*)

Considere o modelo de crescimento estocástico, com as seguintes alterações: o agente deriva utilidade tanto do consumo como do lazer e a renda (tanto do trabalho como do capital) é taxada em um fator τ_t, com $0 < \tau_t < 1$. Não há *state-contingent claims*, então a restrição orçamentária do agente torna-se:

$$c_t + k_{t+1} = (1 - \tau_t)(r_t k_t + \omega_t n_t) + (1 - \delta)k_t$$

As receitas são usadas para gastos governamentais G, que não dão utilidade ao agente. Considere (i) um problema do planejador em que ele tem que reservar uma quantidade constante G de produção a cada período para gastos do governo, e (ii) um equilíbrio competitivo em que a taxa de imposto τ_t é tal que em cada data, a receita de equilíbrio é igual ao mesmo valor G.

(a) Descreva o conjunto de equações que descrevem a solução do problema do planejador e do equilíbrio competitivo. Em geral, as alocações são iguais nos dois casos?

(b) Agora suponha o seguinte formato para a utilidade:

$$u(c, n) = \ln(c) + v(1 - n)$$

em que $v(\cdot)$ é uma função estritamente crescente e estritamente côncava. As alocações são iguais no equilíbrio competitivo e no problema do planejador neste caso? Se sim, por quê? Se não, quais instrumentos de política adicionais o governo precisaria na economia descentralizada para atingir a alocação que resolve o problema do planejador?

(c) Defina um equilíbrio competitivo recursivo para a economia com tributação. O vetor de estado é o mesmo que o da economia sem taxação?

4 Ciclos Reais de Negócios (RBC)

Exercício 1 (RBC básico)

Considere o seguinte problema do planejador central do modelo RBC básico com capital:

$$\max_{C_t, N_t, I_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(C_t) + \chi \ln(1 - N_t)]$$

$$\text{s.a.}$$

$$C_t + I_t = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = Y_t$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t$$

$$\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \sigma\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, 1)$$

(a) Encontre as condições de primeira ordem para as famílias e para as firmas.

(Resposta:) Por conveniência, reescrevemos o problema acima em sua forma recursiva

$$V(K_t, z_t) = \max_{C_t, N_t} \left\{ \ln(C_t) + \chi \ln(1 - N_t) + \beta \mathbb{E}_t \Big(V[(1 - \delta)K_t + z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - C_t, z_{t+1}] \Big) \right\} \quad (26)$$

$$s.t. \ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \sigma\epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim_{iid} N(0,1) \tag{27}$$

Tirando as condições de primeira ordem e usando o Teorema do Envelope, obtemos

$$[C_t]: \quad \frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t\Big(V_k(K_{t+1}, z_{t+1})\Big) \tag{28}$$

$$[N_t]: \quad \frac{\chi}{1-N_t} = \beta \mathbb{E}_t\Big(V_k(K_{t+1}, z_{t+1})\Big) \cdot (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \tag{29}$$

$$[\text{Envelope}]: \quad V_k(K_t, z_t) = \mathbb{E}_t\Big(V_k(K_{t+1}, z_{t+1})\Big) \cdot (\alpha z_t K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta) \tag{30}$$

Dessa forma, podemos usar a equação (30) rolada um período adiante nas equações (28) e (29) para reescrever as condições de otimalidade:

$$[C_t]: \quad \frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t\Big(\frac{1}{C_{t+1}}\left(\alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right)\Big) \tag{31}$$

$$[N_t]: \quad \frac{\chi \cdot C_t}{1-N_t} = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \tag{32}$$

Embora essas condições estabeleçam a noção de solução para o problema centralizado, podemos separar a análise entre famílias e firmas ao notar que, da maximização das firmas, teríamos que $w_t = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$ e $R_{k,t} = \alpha z_t K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$. Com isso, poderíamos definir $r_t \equiv R_{k,t} - \delta$ e apresentar as condições de otimalidade para as famílias

$$[C_t]: \quad \frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t\left(\frac{1}{C_{t+1}} \cdot (1 + r_{t+1})\right) \tag{33}$$

$$[N_t]: \quad \frac{\chi \cdot C_t}{1-N_t} = w_t \tag{34}$$

que, aliadas às condições $w_t = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$ e $R_{k,t} = \alpha z_t K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$, nos dariam as mesmas CPOs.

Perceba, no entanto, que a interpretação de (33) e (34) é mais direta do que (31) e (32). A equação (33) reflete a decisão intertemporal entre consumo e poupança, determinando que, no ótimo, a utilidade marginal da família ter uma unidade a mais de consumo hoje equivale à utilidade marginal de receber essa unidade de consumo amanhã, ajustada pela taxa de juros r_{t+1}.

A equação (34) apresenta a condição intratemporal de consumo-lazer, enfatizando que a utilidade marginal de uma unidade de lazer deve igualar a utilidade marginal do consumo que poderia ser comprado se a família decidisse trabalhar hoje para ganhar o salário w_t.

(b) Resolva o modelo para o estado estacionário não estocástico com depreciação completa, em que $z_t = 1$ para todo t e $\delta = 1$.

(Resposta:) Da equação (31), no estado estacionário obtemos

$$\frac{1}{C} = \frac{\beta}{C} \cdot \left[\alpha\Big(\frac{N}{K}\Big)^{1-\alpha} + 1 - \delta\right] \implies \frac{K}{N} = \Big(\frac{\alpha}{1/\beta - (1-\delta)}\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{35}$$

Obtemos (K/N) em função dos parâmetros exógenos do modelo. Segue naturalmente que $w = (1-\alpha)(K/N)^\alpha$ e $R_k = \alpha(K/N)^{\alpha-1}$ também estão definidos para o estado estacionário. Em seguida, dado N encontramos $I = (\delta K/N)\cdot N$ e $Y = (K/N)^\alpha \cdot N$. Em posse de I e Y usamos a restrição $Y = C + I$ para encontrar o consumo de estado estacionário.

Ou seja, encontramos C, N, I e, portanto, temos a solução do modelo. Mas perceba que houve uma passagem contraintuitiva: para encontrar I, tomamos N, um objeto endógeno, como algo conhecido. Isso é algo comum na resolução desse tipo de modelo, onde usamos uma variável endógena para calibrar um determinado parâmetro, que no caso é χ (isso será melhor abordado no próximo item). Para tanto, usamos a equação (32) e temos

$$\chi = (1-\alpha)\Big(\frac{K}{N}\Big)^\alpha \cdot \frac{1-N}{C} \tag{36}$$

(c) Discuta brevemente como você calibraria os parâmetros do modelo.

(Resposta:) Propomos uma calibração trimestral conforme sugerido por Jianjun Miao (2014). Em primeiro lugar, definimos $\alpha = 0.33$, condizente com o fato de que o *share* médio da renda oriundo do trabalho é por volta de 2/3. Impomos $\beta = 0.99$, associado à uma taxa de juros de 4% ao ano. A depreciação anual é de 10%, que se traduz em $\delta = 0.025$. Além disso, alinhado com nossa discussão no item anterior, definimos $N = 0.33$ (a rigor, uma variável endógena) para refletir o fato de que, na média, as pessoas trabalham 8 horas por dia. Uma possível reformulação dessa calibração seria tentar fazê-lo de acordo com a realidade do Brasil. Resolvendo as expressões do item anterior obtemos os valores de estado estacionário para R_k, w, C, I e χ.

(d) Log-linearize o sistema de equações em diferenças não lineares que descrevem as alocações de equilíbrio dessa economia.

(Resposta:) Começamos tirando o logaritmo da expressão dada por (32) para obter

$$\log\chi + \log C_t - \log(1-N_t) = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha\log K_t - \alpha\log N_t \tag{37}$$

Perceba que o único termo não linear é dado por $\log(1-N_t) = \log(1-\exp(\log N_t))$. Assim, conseguimos fazer uma aproximação de primeira ordem em torno de $\log N$ para obter $\log(1-N_t) \approx \log(1-N) - N/(1-N)\cdot(\log N_t - \log N)$. A partir de agora, definimos para qualquer variável X_t o desvio em log para o estado estacionário. Isso é, $\hat{X}_t = \log X_t - \log X$. Além disso, $\zeta \equiv N/(1-N)$. Portanto, subtraindo a equação (37) dessa mesma equação avaliada sobre o estado estacionário e resolvendo para $\hat{N}_t$, obtemos

$$\hat{N}_t = \frac{1}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{z}_t + \frac{\alpha}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{K}_t - \frac{1}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{C}_t \tag{38}$$

Agora, olhamos para a equação (31), que uma vez tirado o logaritmo e fazendo aproximações semelhantes com a que fizemos há pouco, se torna

$$\begin{aligned} C^{-1}(1-\hat{C}_t) \;\approx\; & \beta C^{-1}(1-\mathbb{E}_t\hat{C}_{t+1})(1-\delta) + \\ & + \beta C^{-1}\alpha K^{\alpha-1}N^{1-\alpha}\mathbb{E}_t[1-\hat{C}_{t+1}-(1-\alpha)\hat{K}_{t+1}+(1-\alpha)\hat{N}_{t+1}+\hat{z}_{t+1}] \end{aligned} \tag{39}$$

Por fim, lidando algebricamente com essa expressão e usando a CPO do problema estacionário, que garante que $\beta^{-1} = \alpha(N/K)^{1-\alpha} + (1-\delta)$, temos a seguinte expressão

$$\mathbb{E}_t\left[\hat{C}_{t+1}\right] - \hat{C}_t = \beta\alpha\,\frac{Y}{K}\,\mathbb{E}_t\Big[\hat{z}_{t+1} - (1-\alpha)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1}\Big] \tag{40}$$

Agora, se substituirmos a expressão (38) avaliada em $t+1$ na expressão (40), obtemos

$$\mathbb{E}_t\left[\hat{C}_{t+1}\right] - \hat{C}_t = \beta\alpha\,\frac{Y}{K}\,\mathbb{E}_t\left[\frac{1+\zeta}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{z}_{t+1} - (1-\alpha)\cdot\frac{\zeta}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{K}_{t+1} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{C}_{t+1}\right] \tag{41}$$

A equação (41) é uma das equações que, junto com o processo de choque, constituem o sistema linear de equações em diferenças para a solução do problema. A outra vem da acumulação de capital, $K_{t+1} = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t - C_t$. Fazendo as aproximações de costume, temos

$$K(1+\hat{K}_{t+1}) = Y[1+\hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] + (1-\delta)K(1+\hat{K}_t) - C(1+\hat{C}_t) \tag{42}$$

Subtraindo essa equação daquela em estado estacionário, dada pela expressão $K = Y + (1-\delta)K - C$, e dividindo por K obtemos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}[\hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] + (1-\delta)\hat{K}_t - \frac{C}{K}\hat{C}_t \tag{43}$$

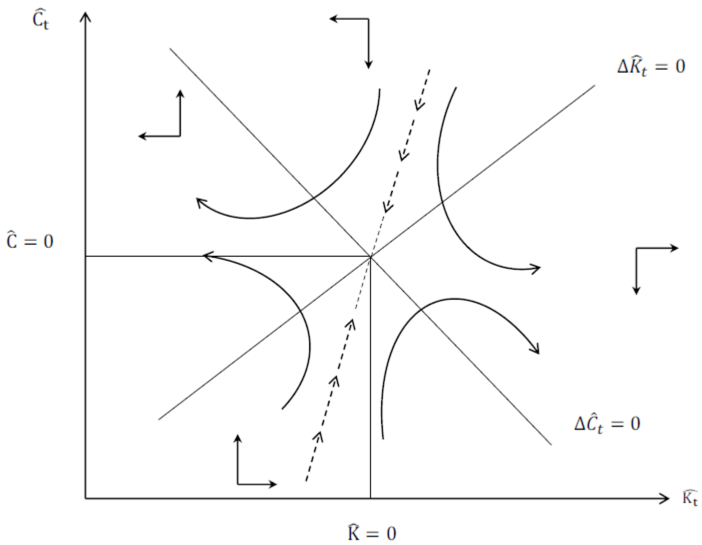
Usando a condição de Euler de estado estacionário e (38), reescrevemos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}\cdot\frac{1+\zeta}{\alpha+\zeta}\cdot\hat{z}_t + \Big(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha+\zeta}\cdot\frac{Y}{K}\Big)\hat{K}_t - \Big(\frac{C}{K} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha+\zeta}\cdot\frac{Y}{K}\Big)\hat{C}_t \tag{44}$$

Conforme mencionado, (41), (44) e o processo de choque descrevem as alocações desequilíbrio dessa economia.

(e) Analise o sistema linearizado a partir de um diagrama de fases.

(Resposta:) Para montar o digrama de fases, analisamos as contrapartes determinísticas das equações (41), (44). O resultado disso se vê na figura abaixo, representa o diagrama de fases do sistema linearizado.



(45)

De acordo com ele, há apenas um ponto no plano $(\hat{K}_t, \hat{C}_t)$ que representa o estado estacionário, dado pelo encontro das retas $\Delta\hat{K}_t = \Delta\hat{C}_t = 0$. Vamos analisar mais calmamente as regiões desse diagrama. Em termos bem vagos, a ideia é que se o capital é alto demais, a sua produtividade marginal é baixa, o que acarreta em uma menor taxa de juros; o consumo tende a cair. Por outro lado, se o consumo é alto o suficiente, o capital tende a cair simplesmente porque as famílias poupam menos. A linha tracejada descreve a trajetória de sela de convergência para o estado estacionário.

Ou seja, dado um vetor de estados inicial, $(\hat{K}_0, \hat{z}_0)$, existe uma solução única para o problema, $\hat{C}_0$, que está situada na sela. Uma vez na sela, conseguimos apontar perfeitamente o caminho rumo ao equilíbrio, dado por $(\hat{K}_t, \hat{C}_t)_{t=0}^{\infty}$. Simultaneamente, encontramos o caminho de equilíbrio para as outras variáveis de interesse, a saber, $(\hat{N}_t, \hat{w}_t, \hat{R}_{k,t}, \hat{I}_t, \hat{Y}_t)_{t=0}^{\infty}$

Exercício 2 (RBC com Governo)

Considere o seguinte problema do planejador central do modelo RBC, agora incorporando gastos do governo. Considere que os gastos do governo não fornecem utilidade e a taxação é feita de maneira *lump-sum* satisfazendo sua restrição orçamentária:

$$\max_{C_t, N_t, I_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(C_t) + \frac{N_t^{1+(1/\eta)}}{1+(1/\eta)} \right]$$

s.a.

$$C_t + I_t + G_t = z_t \, K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = Y_t$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)\, K_t + I_t$$

$$\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \sigma\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

$$\ln(G_t) = (1-\rho_g)\ln(\bar{G}) + \rho_g \ln(G_{t-1}) + \sigma_g \epsilon_{gt}, \quad \epsilon_{gt} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

(a) Encontre as condições de primeira ordem para as famílias e para as firmas.

(Resposta:) Reescrevemos o problema em sua versão recursiva, mantendo as restrições do problema

$$V(K_t, z_t, G_t) = \max_{C_t, I_t, N_t} \left\{ \ln(C_t) - \frac{N_t^{1+1/\eta}}{1+1/\eta} + \beta\mathbb{E}_t V(K_{t+1}, z_{t+1}, G_{t+1}) \right\}$$

Substituindo as duas primeiras restrições no problema, obtemos as condições usuais

$$[C_t]: \quad \frac{1}{C_t} = \beta\mathbb{E}_t V_k(K_{t+1}, z_{t+1}, G_{t+1})$$

$$[N_t]: \quad N_t^{1/\eta} = \beta\mathbb{E}_t V_k(K_{t+1}, z_{t+1}, G_{t+1}) \cdot (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

$$[\text{Envelope}]: \quad V_k(K_t, z_t, G_t) = \beta\mathbb{E}_t V_k(K_{t+1}, z_{t+1}, G_{t+1}) \cdot (\alpha K_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} + 1 - \delta)$$

Perceba que as condições de primeira ordem são absolutamente análogas às do Exercício 1, pois o gasto é exógeno e não afeta a utilidade das famílias. Portanto,

$$[C_t]: \quad \frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} \cdot \left(\alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) \right] \tag{46}$$

$$[N_t]: \quad N_t^{1/\eta} \cdot C_t = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \tag{47}$$

(b) Log-linearize o sistema de equações em diferenças não lineares que descrevem as alocações de equilíbrio dessa economia.

(Resposta:) Naturalmente, ao linearizarmos as CPOs acima, obteremos um resultado bastante parecido com o do Exercício 1, que só é diferente pois o formato funcional da utilidade é ligeiramente distinto. A grande novidade da introdução dos gastos do governo virá quando linearizarmos a restrição de factibilidade. Primeiro:

$$\frac{1}{\eta} \log N_t + \log C_t = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha \log K_t - \alpha \log N_t \tag{48}$$

Subtraindo a versão em estado estacionário da expressão acima, obtemos

$$\hat{N}_t = \frac{\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{z}_t + \frac{\alpha\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{K}_t - \frac{\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{C}_t \tag{49}$$

Podemos aproveitar a seguinte expressão que obtivemos no Exercício 1

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{C}_{t+1} \right] - \hat{C}_t = \beta \alpha \frac{Y}{K} \mathbb{E}_t \left[\hat{z}_{t+1} - (1-\alpha)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1} \right] \tag{50}$$

Agora, substituindo (31) avaliada em $t+1$, podemos obter

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{C}_{t+1} \right] - \hat{C}_t = \beta \alpha \frac{Y}{K} \mathbb{E}_t \left[\frac{1+\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{z}_{t+1} - \frac{(1-\alpha)}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{K}_{t+1} - \frac{(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{C}_{t+1} \right] \tag{51}$$

Agora, vamos linearizar a restrição de factibilidade, onde entrarão diretamente os gastos do governo. Essa restrição é dada por $K_{t+1} = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t - C_t - G_t$. Antes de continuar, sabemos que $z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \approx Y[1 + \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t]$ e portanto obtemos o resultado: $K\hat{K}_{t+1} = Y[\hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] + (1-\delta)K\hat{K}_t - C\hat{C}_t - G\hat{G}_t$. Dividindo por K, obtemos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}[\hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] + (1-\delta)\hat{K}_t - \frac{C}{K}\hat{C}_t - \frac{G}{K}\hat{G}_t \tag{52}$$

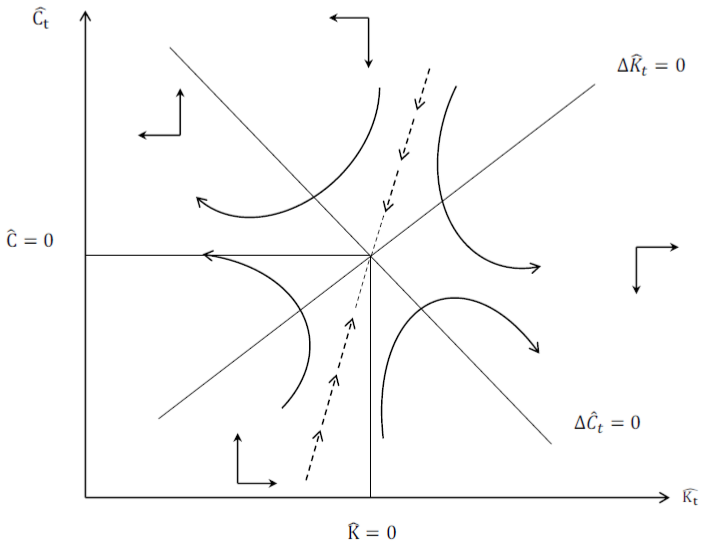
Usando a condição de Euler de estado estacionário e (31), reescrevemos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}\left[\hat{z}_t + (1-\alpha)\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{z}_t + \frac{\alpha\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{K}_t - \frac{\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{C}_t\right)\right] + \frac{1}{\beta}\hat{K}_t - \frac{C}{K}\hat{C}_t - \frac{G}{K}\hat{G}_t \tag{53}$$

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K} \cdot \frac{1+\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{z}_t + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \frac{Y}{K}\right)\hat{K}_t - \left(\frac{C}{K} + \frac{(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \frac{Y}{K}\right)\hat{C}_t - \frac{G}{K}\hat{G}_t$$

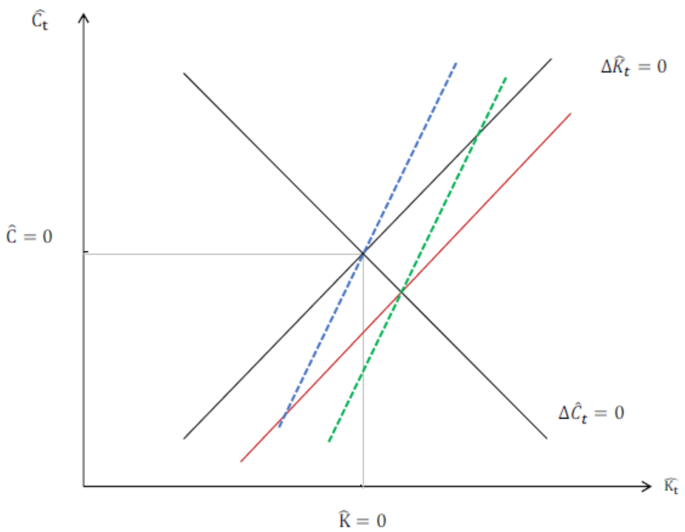
(c) Construa o diagrama de fases.

(Resposta:) Perceba que as duas equações que descrevem o diagrama de fases não se alteraram substancialmente. Além disso, a introdução dos gastos apenas desloca para dentro a curva $\Delta\hat{K}_t = 0$, que é positivamente inclinada. Logo, podemos tomar emprestado o diagrama de fases que usamos no Exercício 1.



(d) Com o diagrama de fases e as equações log-linearizadas, analise os efeitos nas variáveis do modelo de um aumento transitório nos gastos do governo.

(Resposta:) Nesse caso, há o deslocamento da curva $\Delta\hat{K}_t$ para a direita (passa da linha preta para se tornar a linha vermelha). O consumo cai imediatamente, para o ponto no qual o a trajetória de sela em verde intercepta a linha $\hat{K} = 0$. Contudo, no período seguinte esse choque se desfaz, e logo voltamos a ter o par de curvas originais. Nesse contexto, a economia retorna gradativamente ao estado estacionário original, pela trajetória de sela em azul.



(e) Faça o mesmo para um aumento permanente dos gastos.

(Resposta:) Nesse caso, usamos a seguinte representação no diagrama de fases. Perceba que o locus $\Delta \hat{K}_t$ se altera, sendo deslocado para a direita (passa da linha preta para se tornar a linha vermelha). Nesse caso, o consumo cai inicialmente, mas depois se recupera gradativamente até se estabilizar no nosso estado estacionário, que possui nível de consumo mais baixo que o estado estacionário original. Além disso, temos que após o choque o capital cresce até se estabelecer em nível mais alto do que o original.