Lista 5 - Apreçamento de ativos
Data de entrega: 10/09/2023 (23:59)

Exercício 1 (Mercados completos e incompletos)

Considere a seguinte economia. Existem $i \in I$ agentes, dois períodos $t = 0$ e $t = 1$ com incerteza apenas na realização $s \in S$ do segundo período. Os indivíduos tem dotações $e^i = (e_0^i, \{e_s^i\}_{s \in S})$. Os agentes tem crenças diferentes π_s^i sobre a probabilidade da realização dos estados do segundo período. A utilidade de cada agente é dada por:

$$U(C^i) = u_0^i(c_0^i) + \beta^i \sum_s \pi_s^i u_s^i(c_s^i) \tag{1}$$

Existem $j \in J$ ativos financeiros com oferta líquida zero, um vetor de preços $P = (p^1, p^2, ..., p^J)$ e uma matriz de pagamentos $X = (X^1, X^2, ..., X^J)$ (os ativos são comprados no período zero).

(a) Defina o problema intertemporal do agente. Seja explicito com relação as restrições e as variáveis de escolhas.

(b) Defina um equilíbrio competitivo para essa economia.

(c) Encontre a expressão para os preços dos ativos $P = (p^1, p^2, ..., p^J)$.

(d) Defina $TMS_{0,s}^i = \frac{\beta^i \pi_s^i \frac{\partial u_s^i\left(c_s^{i*}\right)}{\partial c_s^i}}{\frac{\partial u_0^i\left(c_0^{i*}\right)}{\partial c_0^i}}$. Sob mercados completos, mostre que devemos ter a mesma TMS para todos os agentes $i \in I$.

(e) Sob mercados incompletos, as TMS dos agentes devem ser iguais? Construa um exemplo e mostre que para qualquer ativo no $span(X)$ devemos ter concordâncias nos preços, enquanto que ativos fora desse subespaço os agentes podem discordar.

Exercício 2 (Equity Premium Puzzle)

De forma a melhor compreender este exercício, é recomendado dar uma olhada no capítulo 1 do livro de *asset pricing* do John Cochrane. Para este exercício, você pode começar com as condições de primeira ordem da economia de trocas sequenciais:

$$p_t\, u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})\, x_{t+1}]$$

onde p_t é o preço de um ativo com payoff esperado associado x_{t+1}.

(a) Seja R^j_{t+1} o retorno bruto de um ativo j, onde $R^j_{t+1} = 1 + r^j_{t+1}$. Rearranje os termos da equação de apreçamento de modo a deixar um "1" do lado esquerdo, e considerando uma utilidade CRRA com parâmetro γ.

(b) Encontre uma expressão para a taxa de juros do ativo livre de risco. De que modo a taxa de juros livre de risco se relaciona com γ?

(c) Encontre uma expressão para o prêmio de risco.

(d) Modifique a expressão do prêmio de risco de modo a obter a representação $\mathbb{E}[R^j] = R^f + \beta_{i,m}\lambda_m$, em que $\beta_{i,m} = \frac{Cov(R^j, m)}{var(m)}$ e $\lambda_m = -\frac{var(m)}{\mathbb{E}[m]}$.

(e) Como o risco idiossincrático do ativo j afeta seu preço?

Exercício 3 (Apreçamento com preferências flexíveis - P2, 2023)

Considere uma utilidade recursiva simples

$$u(c_0, c_1) = \frac{c_0^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}} + \beta \frac{[CE_1(c_1)]^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}}$$

em que

$$CE(c_1) := \mathbb{E}\left[c_1^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

representa o equivalente certeza do consumo em $t = 1$ para preferências com aversão relativa ao risco γ. Nessa especificação ρ faz o papel de elasticidade intertemporal de substituição e γ de aversão relativa o risco.

Vamos resolver o problema de portfólio e consumo do agente. Sejam $P \in \mathbb{R}^{|J|}$ o vetor de preços dos ativos transacionados e $\theta \in \mathbb{R}^{|J|}$ o portfólio que agente escolhe, seu consumo é

$$c_0 + \sum P^j \theta^j = e_0$$

e, para cada estado s possível para a data $t = 1$,

$$c_s = e_s + \sum x_s^j \theta^j.$$

(a) Derive a equação de Euler do agente.

(b) Identifique o fator estocástico de desconto que é gerada pelas preferências que introduzimos.

(c) Apresente uma equação de apreçamento usando o fator estocástico acima, que seja representada em termos de retorno dos ativos transacionados.

(d) Mostre que a mesma equação vale para o portfólio que o agente escolhe otimamente.

(e) (1,0 ponto) Suponha que o consumo ótimo do agente $c_0, \{c_s\}_{s \in S}$ é tal que a taxa de crescimento do consumo $(\frac{c_s}{c_0})$ e o retorno do seu portfólio total (chame-o de R^s) são conjuntamente log-normais, como nas notas de aula. Derive a taxa de juros livre de risco e o prêmio de risco nesse portfólio como função de parâmetros exógenos (taxas de crescimento, variâncias, covariâncias).

    Dica: uma variável aleatória log-normal X é tal que $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$ e sua média é $\mathbb{E}[X] = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$. Sejam também a taxa de crescimento do consumo log-normal, $\frac{c_{t+1}}{c_t} = g \exp(\epsilon_g - \frac{1}{2}\sigma_g^2)$, com $\epsilon_g \sim N(0, \sigma_g^2)$, e o retorno log-normal de um ativo j $R_{t+1}^j = (1 + r_j) \exp(\epsilon_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2)$, com $\epsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2)$.

(f) Compare o caso geral e a situação em que $\rho = \frac{1}{\gamma}$ e interprete. Como esta generalização pode ajudar a lidar com o *risk-free rate puzzle*?

Exercício 4 (Árvore de Lucas)

Considere uma versão do modelo de apreçamento de ativos de Lucas com um agente representativo que tem uma árvore como dotação.

A árvore produz um fluxo de dividendos d_t, em que $d_0 = 1$. A taxa de crescimento do dividendo, $\frac{d_{t+1}}{d_t}$, toma um entre dois valores possíveis, $(\mu + \sigma)$ ou $(\mu - \sigma)$, em que $\mu > 1$. A taxa de crescimento do dividendo segue uma cadeia de Markov com matriz de transição P. Em particular, supomos que P é uma matriz simétrica em que a probabilidade de trocar de taxas de crescimento é dada por $p \in (0, 1)$.

As preferências dos indivíduos são dadas por $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t)$. A cada período, existem mercados para bens de consumo, árvores e ativos contingentes ao estado que pagam uma unidade de consumo amanhã em um estado particular do mundo.

Tendo em vista essas hipóteses, responda aos itens abaixo:

(a) Defina uma solução para o problema do agente representativo. Pense cuidadosamente a respeito sobre quais são as variáveis de estado do seu problema.

(b) Defina um equilíbrio competitivo recursivo.

(c) Obtenha a função de apreçamento de equilíbrio da árvore. Você deve achar que a razão preço-dividendo das árvores é constante ao longo do tempo.

(d) Obtenha as funções de apreçamento de equilíbrio dos ativos contingentes ao estado. Suponha que $\lim_{n \to \infty} \beta^{n+1} \mathbb{E}_t x_{t+n} = 0$ para eliminar bolhas.

(e) Adicione um ativo livre de risco a essa economia, ou seja, um ativo que paga uma unidade de consumo amanhã independentemente do estado. Calcule o preço desse ativo (Dica: não há necessidade de obter as funções de apreçamento desse ativo).

(f) Agora, suponha que $p = 0,5$. Calcule a taxa de retorno média do ativo livre de risco e da árvore. Qual é o *equity premium* nessa economia?

Exercício 5 (CAPM)

O modelo de *asset pricing* conhecido como CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) é caracterizado, essencialmente, pela equação

$$\mathbb{E}[R^i] = R^f + \beta_i \mathbb{E}[R^m - R^f],$$

em que R^i é o retorno de um ativo i arbitrário na economia, R^f é o retorno do ativo livre de risco e $\beta_i = \frac{Cov(R^i, R^m)}{\sigma_m^2}$ representa o coeficiente da projeção linear desse retorno no portfólio de mercado, R_m.

Vamos derivar o CAPM a partir de uma economia de agente representativo.

O tempo é descrito por $t \in \{0, 1\}$. Nessa economia, existem $|J|$ ativos com *payoffs* conjuntamente normalmente distribuídos (com média μ e matriz de covariância Σ). Esses ativos estão todos em oferta fixa e são transacionados aos preços P.

O agente tem inicialmente, além da dotação fixa e unitária de cada um desses ativos, e_0 unidades do bem de consumo em $t = 0$. Todo o seu consumo em $t = 1$ será derivado do *payoff* do seu portfólio de ativos.

Sua utilidade é separável no tempo e admite representação em termos de utilidade esperada, com um fator de desconto unitário. Sua utilidade instantânea é quadrática, da forma $u(c) = c - \alpha \frac{(c - \overline{c})^2}{2}$. Restringiremos nossa atenção à região em a utilidade marginal é positiva.

(a) Escreva o problema de poupança e determinação de portfólio desse agente representativo. Chame de z^j a posição do agente no ativo j e não esqueça da sua dotação $\overline{z}^j = 1$.

(b) Defina um equilíbrio competitivo para essa economia.

(c) Derive as condições de primeira ordem, que serão necessárias e suficientes para um ótimo.

(d) Caracterize o consumo de equilíbrio em $t = 1$ e descreva o fator estocástico de desconto induzido por esse agente representativo.

(e) Quais preços de ativos são condizentes com um equilíbrio competitivo nessa economia?

(f) Defina como $R^m = \frac{\sum x^j}{\sum P^j}$ o retorno do portfólio de mercado nessa economia. Mostre que o fator estocástico de desconto é linear em R^m, isto é, pode ser escrito como $m_s = \gamma + \delta R_s^m$;

(g) Derive a equação principal do CAPM, descrita acima.

(h) Discuta se pode existir um ativo arriscado com $\mathbb{E}[R_i] < R_f$ em equilíbrio. O agente representativo pode achar ótimo tê-lo em seu portfólio, mesmo com retorno tão baixo?