Teoria q em tempo contínuo

1 Ambiente e problema em forma de sequência

- Aqui, vamos aproximar o que já fizemos da apresentação de Romer. Mas mantemos depreciação e a mesma função de ajustamento de capital dos slides anteriores.
- Estamos interessados no seguinte problema:

$$\max \int_0^\infty e^{-rt} d_t dt$$

s.a.

$$d_t = \pi\left(K_t\right) k_t - i_t - G\left(i_t, k_t\right)$$
$$\dot{k}_t = i_t - \delta k_t$$
$$\dot{K}_t = J\left(K_t\right)$$

Hipóteses subjacentes:

- Problema sem incerteza para simplificar. Estacionario em (k, K).
- Também para simplificar, fizemos $p_{k,t} = 1$. Preço de bens de capital é constante.
- Retornos constantes ao nível da firma: $\pi\left(K_t\right) k_t$ é linear e $G\left(i_t, k_t\right)$ tem retornos constantes de escala.
  - Aqui, seguimos com $G\left(i_t, k_t\right) = k_t g\left(\frac{i_t}{k_t}\right)$ em que $g\left(\hat{i}\right) = G\left(\hat{i}, 1\right)$.
- $\pi'\left(\cdot\right) < 0$, efeito de congestão no mercado, externo à firma, consequências de competição.
- Vamos supor que existe um contínuo firmas idênticas, logo $k_t = K_t$ e

$$\dot{K}_t = J\left(K_t\right) = \left(\hat{i}_t^* - \delta\right) K_t$$

  no espírito da consistência de leis de movimento agregadas de eq competitivo recursivo.
  - Importante que isso seja imposto só depois das CPOs tiradas (ou seja, firma toma a lei de movimento agregada e π como dados). Não errem isto!
  - Ainda teremos que mostrar que $\hat{i}_t^*$ depende apenas de K_t. A dependência se dará através de q.

2 A HJB

Temos aqui que $V\left(k, K\right)$ tem que satisfazer

$$rV = \max_i \left[\pi\left(K\right) k - i - G\left(i, k\right)\right] + V_k\left[i - \delta k\right] + V_K\left[J\left(K\right)\right]$$

Tirando a CPO em i, temos

$$q := V_k = 1 + G_i(i,k) = 1 + g'\left(\hat{i}\right),$$

como antes. Daqui,

$$\hat{i} = \phi(q),$$

com $\phi(q) := g'^{-1}(q-1)$.

Podemos também diferenciar $V(k,K)$ em k para buscar uma condiçao adicional análoga ao Teorema do Envelope,

$$rV_k = \pi(K) - G_k + V_{kk}\dot{k} + V_k(-\delta) + V_{Kk}[J(K)]. \tag{1}$$

Em princípio, esta condição envolve V_{kk}e V_{Kk}.

Mas como no resultado de Hayashi, podemos verificar que

$$V(k,K) = v(K)k.$$

Para isto, basta notarmos que

$$r[v(K)k] = \max_{\hat{i}}\left[\pi(K) - \hat{i} - g\left(\hat{i}\right)\right]k + v(K)\left[\hat{i} - \delta\right]k + v'(K)[J(K)]k.$$

Podemos cancelar k acima e obter uma equação diferencial para $q = v(K)$, porém ainda envolvendo $\hat{i}$.

Note que uma consequência da fatoração acima é que

$$Q = \frac{V(k,K)}{k} = v(K) = V_k = q,$$

como em nossas notas de tempo discreto.

Voltando à equação 1 e usando nossa fatoração, temos $V_{kk} = 0$ e $V_{Kk} = v'(K)$. Logo,

$$(r+\delta)V_k = \pi(K) - G_k + v'(K)\dot{K}.$$

Temos também,

$$q = v(K) \implies \dot{q} = v'(K)\dot{K},$$

logo obtemos

$$(r+\delta)q = \pi(K) - G_k + \dot{q}. \tag{2}$$

Comentários:

- Esta equação é análoga à representação de q como o valor presente do produto marginal do capital e das reduções de custos de investimentos futuros que derivamos nos slides (slide 13). Para mostrar isto, basta integrar a equação 2.
- É também análoga à equação 9.22 de Romer (pois $G_k = 0$ e $\delta = 0$ no exemplo dele), embora a fatoração $V(k,K) = v(K)k$ não valha naquele contexto.
- Romer interpreta esta equação como o custo para o usuário do capital sendo igualado a $\pi(K)$. Há ligeira imprecisão, então esta interpretação vale apenas como analogia, pois q é um valor sombra do capital instalado (e, inclusive por isto, aparece G_k acima).

- Podemos também chegar à equação 2 a partir de 1 com uma álgebra que verifica que $(q-1)\hat{i} - g\left(\hat{i}\right) = -G_k$ no ótimo.[1]

3 Usando a simetria

Em equilíbrio, todas as firmas têm a mesma taxa de investimento $\hat{i} = \psi(q)$, então

$$\frac{\dot{K}}{K} = (\phi(q) - \delta). \tag{3}$$

Portanto, o locus $\dot{K} = 0$ é vertical no plano (K, q).

Temos também, sob nossas hipóteses de retornos constantes em G

$$G_k(i_t, k_t) = \psi\left(\hat{i}_t\right),$$

em que $\psi(x) := G_k(x, k)|_{k=1} = -g'(x)x + g(x)$ e $\hat{i}_t = \frac{i_t}{k_t} = \phi(q)$. Logo, a equação 2 pode ser escrita como

$$\dot{q} = (r+\delta)q + \psi(\phi(q)) - \pi(K). \tag{4}$$

O sistema com as equações 3 e 4 caracteriza a dinâmica de K e q e pode ser representado em um diagrama de fases.[2] Em relação ao sistema apresentado no Romer, as únicas diferenças são o termo $\psi(\phi(q))$ em 4, a presença de δ em 3 e o fato de todos os termos à direita em 3 serem proporcionais a K (porque nosso modelo entrega resultados sobre a taxa $\hat{i} = i/k$ e não diretamente sobre o nível i).

Se garantirmos que

$$(r+\delta) + G_{k,i}(\phi(q), 1)\,\phi'(q) > 0,$$

conseguimos ter certeza sobre os sinais envolvidos em $\dot{q}$ e a análise passa a ser toda qualitativamente igual à apresentada no capítulo 9 do livro do Romer, apesar do ponto de partida diferente.

Note, no entanto, que $G_{k,i}(\phi(q), 1) = -g''\left(\frac{i}{k}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right) < 0$. Para que, junto com $\pi'(\cdot) < 0$, tenhamos o locus $\dot{q} = 0$ negativamente inclinado em (K, q), precisamos retringir (ao menos em uma vizinhança do estado estacionário) $g''\left(\frac{i}{k}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right) < r + \delta$ com hipóteses sobre primitivos.

[1] Note que $G(i,k) = kg\left(\frac{i}{k}\right)$e, portanto, $G_k = g\left(\frac{i}{k}\right) - g'\left(\frac{i}{k}\right)\left(\frac{i}{k}\right)$. No ótimo, $g'\left(\frac{i}{k}\right) = q - 1$. Então, $G_k = g\left(\hat{i}\right) + (1-q)\left(\hat{i}\right)$.

[2] Esta é uma maneira de resolver para trajetórias de equilíbrio, mas como $q = v(K)$ parece ser possível escrever toda a solução como função de K apenas, abrindo mão da representação gráfica.