ECR com Mercados Completos

Notas Complementares

Felipe Iachan

FGV EPGE

Macroeconomia II, MD

Motivação: Por que Mercados Completos?

- Mercados incompletos: agentes só podem investir em capital (arriscado)
- Mercados completos: agentes podem (tentar) diversificar risco
- Insights econômicos:
  1. Separação entre poupança e composição de portfólio
  2. Precificação de ativos via *fator estocástico de desconto* (stochastic discount factor, SDF)
  3. Equivalência entre diferentes formulações
  4. Condições de não-arbitragem
- Preparação para modelos de asset pricing e outros casos

Convenções de Timing

- Crucial: distinguir "antes"vs "depois"dos retornos
- a: riqueza medida **depois** que retornos são recebidos
- k: capital medido **antes** da produção
- Exemplo: se família possui k unidades de capital em X:

$$a = [1 + r^K(X) - \delta]k$$

- Esta convenção será essencial para as condições de consistência!

Problema da Família com Mercados Completos

A família representativa resolve:

$$V(a, X) = \max_{c, a'(X')} u(c) + \beta \sum_{X'} \Pi(X'|X) V(a'(X'), X')$$

sujeito a:

$$c + \sum_{X'} q(X'|X) a'(X') \leq w(X) + a$$

- $a'(X')$: riqueza contingente no estado X'
- $q(X'|X)$: preço de ativo contingente
- Escolha **estado por estado**: flexibilidade total

Função Política de Riqueza

- Solução ótima: $a'(X') = g_a(X'|a, X)$
- Para família representativa com $k = K$:

$$a = [1 + r^K(X) - \delta]K$$

- Logo escolhe:

$$a'(X') = g_a(X'|[1 + r^K(X) - \delta]K, X)$$

Primeira Condição de Consistência

- Família representativa deve possuir todo o capital
- Em X', capital vale (depois dos retornos):

$$a'(X') = [1 + r^K(X') - \delta]K'$$

- Condição de consistência:

$$g_a(X' | [1 + r^K(X) - \delta]K, X) = [1 + r^K(X') - \delta]G(K, s)$$

- para todo $X' = (G(K, s), s')$ e $X = (K, s)$

Formulação Alternativa: Capital + Títulos

Podemos reformular permitindo **ambos** capital e títulos:

$$V(a, X) = \max_{c, b'(X'), k'} u(c) + \beta \sum_{X'} \Pi(X'|X) V(a'(X'), X')$$

sujeito a:

$$c + \sum_{X'} q(X'|X) b'(X') + k' \leq w(X) + a \tag{1}$$

$$a'(X') = b'(X') + [1 + r^K(X') - \delta] k' \tag{2}$$

- $b'(X')$: títulos contingentes (oferta líquida zero)
- k': investimento direto em capital

Condições de Primeira Ordem

CPO em relação a k':

$$u'(c) = \beta \sum_{X'} \Pi(X'|X) u'(c'(X'))[1 + r^K(X') - \delta]$$

CPO em relação a $b'(X')$:

$$u'(c) q(X'|X) = \beta \Pi(X'|X) u'(c'(X'))$$

Logo:

$$q(X'|X) = \beta \Pi(X'|X) \frac{u'(c'(X'))}{u'(c)}$$

Condição de Não-Arbitragem

- Capital é ativo redundante: seu retorno pode ser replicado
- Portfólio replicante: $b'(X') \propto [1 + r^K(X') - \delta]$
- Condição de não-arbitragem:

$$1 = \sum_{X'} q(X'|X)[1 + r^K(X') - \delta]$$

- Preço do capital = custo do portfólio replicante

Equivalência das Formulações

- Formulação 1: Apenas ativos contingentes
- Formulação 2: Capital + títulos + não-arbitragem
- Resultado: Ambas são equivalentes, neste caso.
- Insight:
  - Mercados completos permitem separar decisões de poupança e portfólio
  - Preços de ativos emergem endogenamente via *fator estocástico de desconto* (stochastic discount factor, SDF)
  - Condições de não-arbitragem são automaticamente satisfeitas

Preços de Estado vs. Fator Estocástico de Desconto

- Preços de estado (já derivamos):

$$q(X'|X) = \beta \Pi(X'|X) \frac{u'(c'(X'))}{u'(c)}$$

- Fator estocástico de desconto (SDF):

$$M(X'|X) = \beta \frac{u'(c'(X'))}{u'(c)}$$

- Relação fundamental:

$$q(X'|X) = \Pi(X'|X) \cdot M(X'|X)$$

- SDF = "preço por unidade de probabilidade"

Interpretação do SDF

- Interpretação do SDF:
  - $M(X'|X)$ = taxa marginal de substituição intertemporal
  - Estados com baixo consumo → alta utilidade marginal → alto SDF
  - Estados com alto consumo → baixa utilidade marginal → baixo SDF
  - Independe da probabilidade do estado (ao contrário dos preços de estado)
- Preços de estado = SDF × probabilidade
- Conexão: base para toda teoria de asset pricing!

Comparação: Mercados Incompletos vs. Completos

Aspecto	**Incompletos**	**Completos**
Ativos disponíveis	Apenas capital	Capital + títulos contingentes
Diversificação	Limitada	Perfeita
Equação de Euler	$u'(c) = \beta E[u'(c')(1 + r^K - \delta)]$	Múltiplas FOCs
Preços de ativos	Implícitos	Explícitos via SDF
Eficiência	Pode ser ineficiente	Eficiente

Conexão com Literatura de Asset Pricing

- Consumo: determina fator estocástico de desconto (stochastic discount factor, SDF)
- Retornos: satisfazem $E[M(X')R(X')] = 1$
- Puzzle de equity premium:
  - SDF precisa ser muito volátil para explicar spreads observados
  - Necessita preferências alternativas ou fricções
- Extensões:
  - Heterogeneidade de agentes
  - Fricções financeiras
  - Informação assimétrica

Resumo e Próximos Passos

- ECR com mercados completos:
  1. Permite separação poupança/portfólio
  2. Gera preços de ativos endogenamente
  3. Conecta com teoria de asset pricing
  4. Mantém eficiência (quando aplicável)
- Ferramenta essencial para:
  - Modelos DSGE com setor financeiro
  - Asset pricing dinâmico
  - Análise de bem-estar
- Próximo: aplicações em ciclos reais de negócios e asset pricing