Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

6. Derivadas parciais

Objetivos

- Compreender o conceito de derivada parcial de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em relação a uma variável, mantendo as demais constantes.
- Interpretar geometricamente a derivada parcial como a taxa de variação da função ao longo de uma direção coordenada.
- Ser capaz de calcular derivadas parciais utilizando regras de diferenciação: soma, produto, quociente, cadeia, e derivadas de funções elementares.
- Aplicar as derivadas parciais ao estudo local do comportamento de funções de múltiplas variáveis.

Vamos começar por lembrar a famosa lei da demanda. Basicamente essa lei nos diz que a quantidade demandada (D) de um bem diminui varia inversamente à medida que seu preço p aumenta. Na linguagem matemática: a derivada da função de demanda em relação ao preço é negativa, ou seja, $D'(p) < 0$.

No entanto, em geral, a demanda por um produto não depende apenas do preço. Como vimos antes, a demanda por um bem ou serviço pode ser influenciada por diversos outros fatores, como a renda dos consumidores (R), os preços de bens substitutos (P_s) ou complementares (P_c) (entre outros). Considerando todos esses fatores, a função de demanda se torna mais complexa, refletindo a interdependência entre várias variáveis: $D(p, R, P_s, P_c)$.

Surge, então, uma pergunta crucial: como medir a sensibilidade da demanda a variações no preço? Em outras palavras, como podemos entender a taxa de variação da demanda quando o preço de um bem ou serviço muda?

Para isso, precisamos de uma noção que capture a variação da função em relação a uma variável específica, mantendo as outras constantes. É nesse contexto que introduzimos o seguinte conceito fundamental.

Definição 6.1 (Derivada parcial).

A *derivada parcial* de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em relação à variável x_i (com $1 \leq i \leq n$) no ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ e é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}, \tag{6.1}$$

sempre que tal limite exista e seja finito.

De forma intuitiva, a derivada parcial é uma generalização da derivada usual para funções de várias variáveis. Enquanto a derivada de uma função de uma variável mede a taxa de variação instantânea ao longo da única direção possível, a derivada parcial mede a variação da função em relação a uma variável específica, mantendo as demais constantes.

Note que o limite do *quociente incremental*, dado na equação (6.1), está em uma forma indeterminada. Para resolvê-la, aplicam-se manipulações algébricas, tais como fatorações, simplificações ou substituições, conforme a estrutura da função considerada (sempre lembrando que o limite pode não existir, como já vimos em Cálculo I).

Exemplo 6.1.

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos determinar as derivadas parciais de f no ponto $(x_0,y_0) = (1,2)$.

Por ora, dispomos apenas da definição para o cálculo das derivadas parciais.

- Em relação a x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,2)-f(1,2)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2+2^2-(1^2+2^2)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2h+t^2}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}(2+t) = 2.\end{aligned}$$

- Em relação a y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1,2+t)-f(1,2)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1^2+(2+t)^2-(1^2+2^2)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{4h+t^2}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}(4+t) = 4.\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 = 2 \cdot x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4 = 2 \cdot y_0.$$

É claro que essa função nos lembra a função quadrática estudada em Cálculo I, $f(x) = x^2$, cuja derivada é $f'(x) = 2x$. No caso da generalização $f(x,y) = x^2 + y^2$, as derivadas parciais também resultam no dobro da variável correspondente:

- Em relação a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^2 + y^2 - (x^2+y^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2xh + t^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} (2x+t) = 2x.
\end{aligned}$$

- Em relação a y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{x^2 + (y+t)^2 - (x^2+y^2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{2yh + t^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} (2y+t) = 2y.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.2.

Consideremos a função $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Calculemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Em geral, calcula-se primeiro as expressões das derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

e, em seguida, avaliam-se essas expressões nos pontos desejados. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2}-\sqrt{1-x^2-y^2}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2}-\sqrt{1-x^2-y^2}}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-(2x+t)}{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

Passando ao limite quando t tende a zero obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Analogamente, obtem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Agora avaliamos essas duas funções no ponto desejado:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercício 6.1.

Seja $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$. Calcular as derivadas parciais de f pela definição.

Para dar uma interpretação geométrica desse conceito, consideremos o Exemplo 6.2. Sabemos que o gráfico de f é a semiesfera superior, e podemos analisar as curvas obtidas pela interseção entre esse gráfico e os planos verticais $y=-\frac{1}{2}$ e $x=\frac{1}{2}$, respectivamente. Essas curvas são dadas por:

$$\{(x,-\tfrac{1}{2},\sqrt{\tfrac{3}{4}-x^2})\mid -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\le x\le \tfrac{\sqrt{3}}{2}\} \quad \text{e} \quad \{(\tfrac{1}{2},y,\sqrt{\tfrac{3}{4}-y^2})\mid -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\le y\le \tfrac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

Tais curvas são, na verdade, os gráficos de duas funções de uma variável real:

$$f_1(x)=\sqrt{\tfrac{3}{4}-x^2} \quad \text{e} \quad f_2(y)=\sqrt{\tfrac{3}{4}-y^2}.$$

Essas funções correspondem aos cortes da superfície realizados por planos verticais. Mais precisamente, $f_1(x)$ é obtida ao fixarmos $y=-\frac{1}{2}$, o que equivale a cortar o gráfico de f com o plano vertical $y=-\frac{1}{2}$, paralelo ao plano xz. Analogamente, $f_2(y)$ resulta do corte com o plano vertical $x=\frac{1}{2}$, mantendo x fixo e variando y, ou seja, um plano paralelo ao plano yz. Assim, podemos aplicar as ideias de Cálculo I: as derivadas de f_1 e f_2 em seus respectivos pontos representam as inclinações das tangentes a essas curvas. Em particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)=f_1'\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)=f_2'\left(-\tfrac{1}{2}\right).$$

Essa é precisamente a interpretação geométrica das derivadas parciais: elas medem a inclinação da reta tangente ao gráfico de f ao longo de cortes em planos verticais paralelos aos planos coordenados xz e yz.

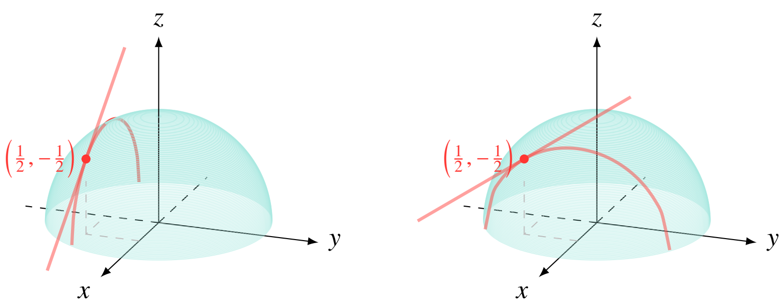

Figura 6.1

Observação 6.2.

Olhando desde um ponto de vista vetorial, temos:

$$(x_1,\dots,x_i+t,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)+t\cdot(0,\dots,\underbrace{1}_{\substack{i\text{-ésima}\\ \text{posição}}},\dots,0)=\mathbf{x}+te_i.$$

Ou seja, ao calcular a derivada parcial em relação à i-ésima variável, estamos avaliando a função f ao longo de um pequeno segmento retilíneo em torno do ponto $\mathbf{x}$, cujo vetor diretor é exatamente o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ mede a taxa de variação de f quando nos deslocamos a partir de $\mathbf{x}$ exclusivamente na direção de e_i, isto é, ao longo do segmento

$$t\mapsto \mathbf{x}+te_i,$$

com t suficientemente pequeno de modo que $t \mapsto \mathbf{x} + te_i \in D$.

Observamos que, ao calcular uma derivada parcial em relação a uma variável, as demais funcionam como constantes. Assim, o processo é análogo ao cálculo de derivadas de funções de uma variável. Por isso, podemos aplicar diretamente as mesmas regras de diferenciação já conhecidas, o que simplifica bastante os cálculos.

Mais precisamente, temos o seguinte resultado. Caso o leitor deseje, as regras apresentadas a seguir podem ser demonstradas diretamente a partir da definição de derivada parcial como limite. Como exercício, sugerimos adaptar as provas das propriedades dos limites para obter essas fórmulas.

Proposition 6.3 (Regras de Diferenciação).

Sejam f e g funções que admitem a derivada parcial em relação a x_i em $D \subset \mathbb{R}^n$. Temos:

- **Soma:** $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$.
- **Produto:** $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$.
- **Multiplicação por constante**: $\dfrac{\partial(c \cdot f)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = c \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \ \forall\, c \in \mathbb{R}$.
- **Quociente:** $\dfrac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \dfrac{g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{[g(\mathbf{x})]^2}$ desde que $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

Exemplo 6.3 (Derivada parcial da soma de funções).

Sejam $f(x,y) = x^2$ e $g(x,y) = \ln(y)$. Vamos calcular suas derivadas parciais.

Usando a linearidade, e lembrando que ao derivar em relação a x a variável y permanece constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + \ln(y)) = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial \ln(y)}{\partial x} = 2x + 0 = 2x.$$

Como x^2 é constante em relação a y, temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\ln(y)) = \frac{1}{y}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}(f+g) = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}.$$

Exemplo 6.4 (Derivada parcial do produto de funções).

Seja $f(x,y) = x \cdot \mathrm{e}^y$. Vamos calcular as derivadas parciais.

Aplicando a regra do produto e lembrando que y fica constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathrm{e}^y) = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \mathrm{e}^y + x \cdot \frac{\partial \mathrm{e}^y}{\partial x} = 1 \cdot \mathrm{e}^y + x \cdot 0 = \mathrm{e}^y.$$

Mantendo x constante e derivando em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \mathrm{e}^y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) \cdot e^y = x\mathrm{e}^y.$$

Exemplo 6.5 (Quociente de funções).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Vamos calcular as derivadas parciais:

Aplicando a regra do quociente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot(x^2+y^2)-x\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x)\cdot(x^2+y^2)-x\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{0\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Até aqui, trabalhamos com exemplos de funções relativamente simples, no sentido de que suas derivadas parciais podiam ser obtidas diretamente a partir das regras algébricas de diferenciação (soma, produto, quociente e múltiplo constante).

Entretanto, em muitas situações práticas, as funções aparecem como composições, como no Exercício 6.1. Observe que já estudamos limites de composições do tipo $g(f(x,y))$. O próximo passo é compreender como calcular derivadas parciais nesse mesmo contexto: isto é, quando uma função é composta com outra. Para lidar com esse tipo de caso, precisamos estender as regras já conhecidas.

Teorema 6.4 (Regra da Cadeia (caso particular)).

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Suponha que $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite a derivada parcial em relação a x_i no ponto $\mathbf{x} \in D$, e que $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $f(\mathbf{x})$. Definindo

$$h(\mathbf{x}) = g\big(f(\mathbf{x})\big),$$

temos

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = g'\big(f(\mathbf{x})\big)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Prova.

Fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ e denote por e_i o i-ésimo vetor canônico. Defina a função de uma variável (lembre da Observação 6.2)

$$a(t) = f(\mathbf{x} + t\,e_i),$$

com t suficientemente pequeno de modo que $\mathbf{x} + t\,e_i \in D$. Pela definição de derivada parcial, temos

$$a'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{a(t) - a(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\,e_i) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Logo, a é derivável em $t = 0$. Agora considere

$$\varphi(t) = h(\mathbf{x} + t\,e_i) = g\big(f(\mathbf{x} + t\,e_i)\big) = g(a(t)).$$

Como g é diferenciável em $a(0) = f(\mathbf{x})$ e a é diferenciável em 0, pela regra da cadeia de uma variável temos

$$\varphi'(0) = g'\big(a(0)\big)\,a'(0) = g'\big(f(\mathbf{x})\big)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Por outro lado, pela definição de derivada parcial,

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(\mathbf{x} + te_i) - h(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Concluímos que

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = g'\big(f(\mathbf{x})\big)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

como desejado. □

Exemplo 6.6 (Derivadas parciais da função Gaussiana).

Considere

$$h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Definimos a função interna

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

e a função externa

$$g(t) = e^{-t},$$

de modo que

$$h(x,y) = g(f(x,y)).$$

Temos

$$g'(t) = -e^{-t}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(-e^{-(x^2+y^2)}\big) \cdot (2x) = -2x\,e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(-e^{-(x^2+y^2)}\big) \cdot (2y) = -2y\,e^{-(x^2+y^2)}.$$

Na verdade, o teorema anterior é um caso particular de uma versão mais geral da regra da cadeia, na qual a função externa também depende de várias variáveis.

Teorema 6.5 (Regra da Cadeia (versão geral)).

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Suponha que $f_1, \ldots, f_m : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admitem derivadas parciais em relação a x_i no ponto $\mathbf{x} \in D$, e seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$. Se

$$h(\mathbf{x}) = g\big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big),$$

temos, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_j}\big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Exemplo 6.7.

Queremos calcular a derivada da função

$$h(x,y) = \cos(x^2 + y) + \sin(xy).$$

Podemos escrever h como uma composição:

$$h(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

onde:

$$f_1(x,y) = x^2 + y, \quad f_2(x,y) = xy, \quad g(u,v) = \cos(u) + \sin(v).$$

Calculamos:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\sin(u), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \cos(v),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y.$$

Aplicamos a regra da cadeia para calcular $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y). \\ &= -\sin(x^2+y) \cdot 2x + \cos(xy) \cdot y.\end{aligned}$$

Exercício 6.2.

Calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ para a função do exemplo anterior.

Exemplo 6.8.

Queremos calcular a derivada da função

$$h(x,y) = \ln\left((x+y)^2 + (xy)^2\right).$$

Podemos escrever h como uma composição:

$$h(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

onde:

$$f_1(x,y) = x + y, \quad f_2(x,y) = xy, \quad g(u,v) = \ln(u^2 + v^2).$$

Calculamos:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{2u}{u^2+v^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{2v}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y.$$

Aplicamos a regra da cadeia para calcular $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y).\\ &= \frac{2(x+y)}{(x+y)^2+(xy)^2} \cdot 1 + \frac{2(xy)}{(x+y)^2+(xy)^2} \cdot y.\end{aligned}$$