Lista 5 - Apreçamento de ativos
Gabarito

Exercício 1 (Mercados completos e incompletos)

Considere a seguinte economia. Existem $i \in I$ agentes, dois períodos $t = 0$ e $t = 1$ com incerteza apenas na realização $s \in S$ do segundo período. Os indivíduos tem dotações $e^i = (e_0^i, \{e_s^i\}_{s \in S})$. Os agentes tem crenças diferentes π_s^i sobre a probabilidade da realização dos estados do segundo período. A utilidade de cada agente é dada por:

$$U(C^i) = u_0^i(c_0^i) + \beta^i \sum_s \pi_s^i u_s^i(c_s^i) \tag{1}$$

Existem $j \in J$ ativos financeiros com oferta líquida zero, um vetor de preços $P = (p^1, p^2, ..., p^J)$ e uma matriz de pagamentos $X = (X^1, X^2, ..., X^J)$ (os ativos são comprados no período zero).

(a) Defina o problema intertemporal do agente. Seja explicito com relação as restrições e as variáveis de escolhas.

O problema intertemporal do agente i é escolher $c^i = (c_0^i, \{c_s^i\}_s)$ e um portfólio de ativos $\theta^i \in \mathbb{R}^J$ que maximize sua utilidade esperada. Apresentamos o problema abaixo.

$$\max_{(c_0^i, \{c_s^i\}_s)\, \theta^i} u_0^i(c_0^i) + \beta^i \sum_s \pi_s^i u_s^i(c_s^i)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} c_0^i + \sum_{j \in J} p^j \theta^{i,j} \leq e_0^i \\ c_s^i \leqslant e_s^i + \sum_{j \in J} \theta^{i,j} x_s^j \quad \text{para todo } s \in S \end{cases}$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo para essa economia.

Um equilíbrio competitivo para esse economia consiste em

(i) Um vetor de consumo $c^{i\star} = (c^{i_0\star}, \{c^{i\star}\}_s) \in \mathbb{R}^{S+1}$, para cada agente $i \in I$;

(ii) Um vetor de alocações de portfólio $\theta^{i\star} \in \mathbb{R}^J$, para cada agente $i \in I$;

(iii) Um vetor de preços $P \in \mathbb{R}^J$

tais que:

(1) As alocações $(c^{i\star}, \theta^{i\star})$ resolvem o problema do agente i (apresentado no item anterior), dado o vetor de preços P;

(2) O vetor de preços P é tal que:

- $\sum_i \theta^{i,j\star} \leqslant 0$, para todo j (a demanda por cada ativo j não excede sua oferta líquida);
- $\sum_i c^{i0\star} \leqslant \sum_i e_0^i$ e $\sum_i c_s^{i\star} \leqslant \sum_i e_s^i$, para todo $s \in S$, condições que que representam a factibilidade das alocações.

(c) Encontre a expressão para os preços dos ativos $P = (p^1, p^2, ..., p^J)$.

Ao reconhecer que as restrições devem valer em igualdade, podemos substituir as restrições na função objetivo, o nosso problema fica mais simples, conforme abaixo

$$\max_{\theta^i} u_0^i\Big(e_0^i - \sum_{j \in J} p^j \theta^{i,j}\Big) + \beta^i \sum_s \pi_s^i u_s^i\Big(e_s^i + \sum_{j \in J} \theta^{i,j} x_s^j\Big)$$

Em seguida, tirando as condições de primeira ordem do problema, encontramos que

$$p^j \cdot u_0^{i\prime}(c_0^{i\star}) = \sum_s \beta^i \pi_s^i u_s^{i\prime}(c_s^{i\star}) x_s^j, \text{ para todo ativo } j$$

Dessa forma, temos que as expressões para os preços dos ativo será dada por

$$p^j = \sum_s \frac{\beta^i \pi_s^i u_s^{i\prime}(c_s^{i\star})}{u_0^{i\prime}(c_0^{i\star})} \cdot x_s^j$$

(d) Defina $TMS_{0,s}^i = \frac{\beta^i \pi_s^i \frac{\partial u_s^i\left(c_s^{i*}\right)}{\partial c_s^i}}{\frac{\partial u_0^i\left(c_0^{i*}\right)}{\partial c_0^i}}$. Sob mercados completos, mostre que devemos ter a mesma TMS para todos os agentes $i \in I$.

Reescrevendo a última expressão do item anterior, temos o seguinte resultado

$$p^j = \sum_s TMS_{0,s}^i \cdot x_s^j$$

Para a conclusão ficar ainda mais clara, podemos nos restringir a analisar os ativos de Arrow. Mesmo que eles não estejam presentes na estrutura de ativos, o fato de os mercados serem completos nos permite fabricá-los a partir dos ativos existentes. Nesse caso, teremos

$$p_{e^j} = TMS_{0,j}^i, \text{ para todo ativo de Arrow}$$

Como o lado esquerdo da expressão não pode variar entre os agentes, devemos ter que, em equilíbrio, as TMS também deverão ser as mesmas para os diferentes agentes. Para concluir que o preços dos ativos originais também não dependerá dos agentes, devemos lembrar apenas que, como não-há arbitragem, o preço deles será apenas uma combinação linear dos ativos de Arrow.

Lembre-se que, em mercados completos, um ativo é fabricado de tal forma em que todos os indivíduos se asseguram de todos os riscos possíveis na economia, o que permite um consumo de mesmo nível para todos os indivíduos. Sendo assim, não observamos heterogeneidade na TMS dos agentes.

(e) Sob mercados incompletos, as TMS dos agentes devem ser iguais? Construa um exemplo e mostre que para qualquer ativo no $span(X)$ devemos ter concordâncias nos preços, enquanto que ativos fora desse subespaço os agentes podem discordar.

Usando o resultado do item anterior, o que vale em qualquer cenário é que a soma ponderada das TMS pelo retorno dos ativos deve ser independente dos agentes. No caso de mercados completos, isso implicava que as TMS deveriam ser iguais para todos. Com mercados incompletos, esse não necessariamente é o caso. Vejamos isso mais concretamente através de um exemplo.

Suponha $I = S = 2$, com $e^1 = (1, 1/2, 1)$ e $e^2 = (1, 1, 1/2)$. Além disso, há um único ativo na economia, livre de risco. Seu vetor de retornos é dado por $x^{rf} = (1, 1)$ e ele possui oferta líquida nula. Ambos os agentes acreditam que os estados são equiprováveis. Finalmente, seja $u(c) = \ln(c)$.

Pela simetria do problema, $z^1 = z^2 = 0$. Assim, $c_0^1 = c_0^2 = 1$, $c_1^1 = c_2^2 = 1/2$ e $c_2^1 = c_1^2 = 1$. Pela CPO do problema, devemos ter que o preço do ativo livre de risco é dado por

$$p_{rf}^i = \frac{\beta}{2}\left(\frac{c_0^i}{c_1^i} + \frac{c_0^i}{c_2^i}\right) = \frac{3\beta}{2}$$

que independe no i. Agora, quanto valeria o ativo de Arrow que paga $(1, 0)$ nesse mundo?

$$p_a^1 = \frac{\beta}{2}\left(\frac{c_0^1}{c_1^1}\right) = \beta \neq \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}\left(\frac{c_0^2}{c_2^1}\right) = p_a^2$$

Mostramos que o preço atribuído pelos agentes variam. Isso porque esse ativo não está no span dos ativos originais. Para o ativo presente na estrutura de ativos, os agentes concordam.

Exercício 2 (Equity Premium Puzzle)

De forma a melhor compreender este exercício, é recomendado dar uma olhada no capítulo 1 do livro de *asset pricing* do John Cochrane. Para este exercício, você pode começar com as condições de primeira ordem da economia de trocas sequenciais:

$$p_t\, u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})\, x_{t+1}]$$

onde p_t é o preço de um ativo com payoff esperado associado x_{t+1}.

(a) Seja R^j_{t+1} o retorno bruto de um ativo j, onde $R^j_{t+1} = 1 + r^j_{t+1}$. Rearranje os termos da equação de apreçamento de modo a deixar um "1" do lado esquerdo, e considerando uma utilidade CRRA com parâmetro γ.

(Resposta):

$$p_t\, u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})\, x_{t+1}]$$

$$\Rightarrow 1 = \beta \mathbb{E}_t\left[\frac{u'(c_{t+1})\, x_{t+1}}{p_t\, u'(c_t)}\right]$$

Sejam $R^i_{t+1} \equiv \frac{p_t+1}{p_t}$ e $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$. Então:

$$1 = \beta\, \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{\gamma} R^i_{t+1}\right]$$

(b) Encontre uma expressão para a taxa de juros do ativo livre de risco. De que modo a taxa de juros livre de risco se relaciona com γ?

(Resposta): O ativo livre de risco é tal que $p_t = 1$ e $x_{t+1} = R^f$ (a taxa livre de risco). Assim, do item anterior,

$$1 = \beta\, \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{\gamma} R^i_{t+1}\right]$$

$$\Rightarrow R^f = \frac{1}{\beta\, \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{\gamma}\right]}$$

Seja $m_{t+1} = \beta\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{\gamma}$. Então,

$$R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$$

(c) Encontre uma expressão para o prêmio de risco.

(Resposta): O risco prêmio é o resultado da subtração $\mathbb{E}[R^i] - R^f$. Do primeiro item, temos que $1 = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^\gamma R^i_{t+1} \right] = \mathbb{E}[mR^i]$. Assim,

$$\begin{aligned}
& Cov(m, R^i) = \mathbb{E}[mR^i] - \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[R^i] \\
& \Rightarrow \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[R^i] = 1 - Cov(m, R^i) \\
& \Rightarrow \mathbb{E}[R^i] = \frac{1 - Cov(m, R^i)}{\mathbb{E}[m]} = R^f - R^f\,Cov(m, R^i) \\
& \Rightarrow \mathbb{E}[R^i] - R^f = -R^f\,Cov(mR^i)
\end{aligned}$$

(d) Modifique a expressão do prêmio de risco de modo a obter a representação $\mathbb{E}[R^j] = R^f + \beta_{i,m}\lambda_m$, em que $\beta_{i,m} = \frac{Cov(R^j, m)}{var(m)}$ e $\lambda_m = -\frac{var(m)}{\mathbb{E}[m]}$.

(Resposta): Sejam $\beta_{i,m} = \frac{Cov(m,R^i)}{Var(m)}$ e $\lambda_m = -\frac{Var(m)}{\mathbb{E}[m]}$. Levando em consideração que, por definição, $R^f = \frac{1}{\mathbb{E}[m]}$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R^i] &= R^f - R^f Cov(m, R^i) \\
&= R^f - \frac{Cov(m, R^i)}{\mathbb{E}[m]} \\
&= R^f - \frac{Var(m)}{\mathbb{E}[m]} \frac{Cov(m, R^i)}{Var(m)} \\
&= R^f + \beta_{i,m}\lambda_m
\end{aligned}$$

(e) Como o risco idiossincrático do ativo j afeta seu preço?

(Resposta): Um risco **idiossincrático** representa o componente do risco que **não apresenta correlação com o SDF**. Em outras palavras, ele é a variância de x_t, apenas. Note que a equação anterior é dada por:

$$\mathbb{E}[R^i] = R^f + R^f Cov(m, R^i)$$

É evidente que o retorno de i depende somente do risco sistemático, dado pela covariância entre m e R^i (em outras palavras, o risco do "mercado" como um todo).

Para deixar mais explícito, assuma o seguinte:

$$Cov(m, R^j) = 0$$

A relação acima significa que o ativo j não possui risco sistemático. Se você impor tal condição na equação do item anterior, verá então que:

$$\mathbb{E}[R^i] = R^f$$

Ou seja, o retorno será fixo! Disso, poderíamos já inferir que não há impacto nos preços. Indo além, se manipularmos a covariância, temos que:

$$\Rightarrow Cov_t \left(\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma}, \frac{x_{t+1}}{p_t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow Cov_t \left(\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma}, x_{t+1} \right) = 0$$

Sendo assim, apliquemos isso a equação de Euler do problema:

$$p_t = \beta \mathbb{E} \left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma} x_{t+1} \right]$$

$$\Rightarrow p_t = \beta \mathbb{E} \left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma} \right] \mathbb{E}[x_{t+1}]$$

$$\Rightarrow p_t = \underbrace{\mathbb{E} \left[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\gamma} \right]}_{=m} \mathbb{E}[x_{t+1}]$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{\mathbb{E}[x_{t+1}]}{R^f}$$

O fato deste *assumption* ter nos dado uma relação de p_t que independe da volatilidade (variância) de x_t é suficiente para determinar que ela não afeta o preço do ativo!

Exercício 3 (Apreçamento com preferências flexíveis - P2, 2023)

Considere uma utilidade recursiva simples

$$u(c_0, c_1) = \frac{c_0^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}} + \beta \frac{[CE_1(c_1)]^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}}$$

em que

$$CE(c_1) := \mathbb{E}\left[c_1^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

representa o equivalente certeza do consumo em $t = 1$ para preferências com aversão relativa ao risco γ. Nessa especificação ρ faz o papel de elasticidade intertemporal de substituição e γ de aversão relativa o risco.

Vamos resolver o problema de portfólio e consumo do agente. Sejam $P \in \mathbb{R}^{|J|}$ o vetor de preços dos ativos transacionados e $\theta \in \mathbb{R}^{|J|}$ o portfólio que agente escolhe, seu consumo é

$$c_0 + \sum P^j \theta^j = e_0$$

e, para cada estado s possível para a data $t = 1$,

$$c_s = e_s + \sum x_s^j \theta^j.$$

(a) Derive a equação de Euler do agente.

Dada a separabilidade temporal da função utilidade, iremos representar o problema do agente

$$\max_{c_0, \{c_s\}_s, \theta} \frac{c_0^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}} + \beta \frac{[CE_1(c_1)]^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}}$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} c_0 + \sum_j P^j \theta^j = e_0 \\ c_1^s = e_1^s + \sum_j x_s^j \theta^j \quad \text{para todo } s \in S \end{cases}$$

Substituindo as restrições na função objetivo, podemos transformar o problema em

$$\max_{\theta} \frac{(e_0 - \sum_j P^j \theta^j)^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}} + \beta \frac{[CE_1(e_s + \sum_j x_s^j \theta^j)]^{1-\frac{1}{\rho}}}{1-\frac{1}{\rho}}$$

As condições de primeira ordem (Equações de Euler) são dadas pelas expressões abaixo

$$[\theta_j]: \quad c_0^{-1/\rho} \cdot P^j - \frac{1}{1-\gamma} \beta \cdot \left\{ \mathbb{E}[c_1^{1-\gamma}]^{\frac{\rho\gamma - 1}{\rho(1-\gamma)}} \right\} (1-\gamma) \cdot \mathbb{E}(c_1^s)^{-\gamma} \cdot x_s = 0$$

$$\Rightarrow c_0^{-1/\rho} \cdot P^j = \mathbb{E}\left[\beta \cdot CE_1(c_1)^{\gamma - 1/\rho} \cdot (c_1^s)^{-\gamma} \cdot x_s^j \right] \quad \forall j$$

Seja $R_s^j \equiv x_s^j / P^j$ a taxa de retorno bruta do ativo j no estado s. Dado o formato específico da função utilidade nesse exercício, podemos reescrever as equações de Euler como

$$1 = \mathbb{E}\left[\beta \cdot \frac{CE_1(c_1)^{\gamma-1/\rho} \cdot (c_1^s)^{-\gamma}}{c_0^{-1/\rho}} \cdot R_s^j\right],$$

uma equação que apreça o ativo j.

(b) Identifique o fator estocástico de desconto que é gerada pelas preferências que introduzimos.

Aproveitando a última expressão do item anterior, temos

$$1 = \mathbb{E}\left[\underbrace{\beta \cdot \frac{CE_1(c_1)^{\gamma-1/\rho} \cdot (c_1^s)^{-\gamma}}{c_0^{-1/\rho}}}_{\equiv m_s} \cdot R_s^j\right],$$

com m_s representando o fator estocástico de desconto.

(c) Apresente uma equação de apreçamento usando o fator estocástico acima, que seja representada em termos de retorno dos ativos transacionados.

Como consequência direta do item anterior, temos a equação de apreçamento

$$1 = \mathbb{E}(m_s \cdot R_s^j).$$

Este é o formato geral da equação de apreçamento de ativos.

(d) Mostre que a mesma equação vale para o portfólio que o agente escolhe otimamente.

Esse resultado segue da esperança ser um operador linear. Suponha que a solução do problema do agente entregue o portfólio ótimo $\theta^\star = (\theta^{\star 1}, ..., \theta^{\star J})$. Então, o preço desse portfólio será dado por $q^p = \theta^{\star 1} \cdot P^1 + ... + \theta^{\star J} \cdot P^J$. Analogamente, o pay-off no estado s será $x_s^p = \theta^{\star 1} \cdot x_s^1 + ... + \theta^{\star J} \cdot x_s^J$. Tomando a CPO referente a cada ativo j, multiplicando cada uma pelo $\theta^{j\star}$ respectivo e somando-as, teremos

$$q^p = \theta^{\star 1} \cdot \mathbb{E}(m_s \cdot x_s^1) + ... + \theta^{\star J} \cdot \mathbb{E}(m_s \cdot x_s^J) = \mathbb{E}(m_s \cdot x_s^p)$$

Dessa forma, mostramos que a regra de apreçamento vale também para o portfólio ótimo do agente.

(e) Suponha que o consumo ótimo do agente $c_0, \{c_s\}_{s \in S}$ é tal que a taxa de crescimento do consumo $(\frac{c_s}{c_0})$ e o retorno do seu portfólio total (chame-o de R^s) são conjuntamente log-normais, como nas notas de aula. Derive a taxa de juros livre de risco e o prêmio de risco nesse portfólio como função de parâmetros exógenos (taxas de crescimento, variâncias, covariâncias).

Dica: uma variável aleatória log-normal X é tal que $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$ e sua média é $\mathbb{E}[X] = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$. Sejam também a taxa de crescimento do consumo log-normal, $\frac{c_{t+1}}{c_t} = g \exp(\epsilon_g - \frac{1}{2}\sigma_g^2)$, com $\epsilon_g \sim N(0, \sigma_g^2)$, e o retorno log-normal de um ativo j $R_{t+1}^j = (1 + r_j) \exp(\epsilon_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2)$, com $\epsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2)$.

Supondo primeiro que a taxa de crescimento de consumo tenha distribuição log-normal, temos:

$$\frac{c_s}{c_0} = \overline{g} e^{\epsilon_g - \frac{\sigma_g^2}{2}}, \quad \epsilon_g \sim N(0, \sigma_g^2) \implies \mathbb{E}\Big(\frac{c_s}{c_0}\Big) = \overline{g}$$

De forma similar, supondo a seguinte distribuição para a taxa de juros

$$R_{t+1}^j = (1 + \overline{r}_j) e^{\epsilon_j - \frac{\sigma_j^2}{2}}, \quad \epsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2) \implies \mathbb{E}(R_{t+1}^j) = (1 + \overline{r}_j)$$

Agora devemos trabalhar a equação de Euler do problema

$$1 = \mathbb{E}\Bigg[\beta \cdot \frac{CE_1(c_1)^{\gamma - 1/\rho} \cdot (c_1^s)^{-\gamma}}{c_0^{-1/\rho}} \cdot R_s^j\Bigg] = \mathbb{E}\Bigg[\beta \cdot \Big(\frac{CE_1(c_1)}{c_0}\Big)^{\gamma - 1/\rho} \cdot \Big(\frac{c_1^s}{c_0}\Big)^{-\gamma} \cdot R_s^j\Bigg]$$

Olhando o termo do equivalente certeza temos

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{CE_1(c_1)}{c_0}\Big)^{\gamma - 1/\rho} &= \Bigg[\mathbb{E}\Big((c_1^s/c_0)^{1-\gamma}\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}}\Bigg]^{\gamma - 1/\rho} \\
&= \left\{\mathbb{E}\left[\left(\overline{g} \exp\left(\epsilon_g - \frac{\sigma_g^2}{2}\right)\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}\right\}^{\gamma - 1/\rho} \\
&= \overline{g}^{\gamma - 1/\rho} \exp\left(-\frac{\sigma_g^2}{2}(\gamma - 1/\rho)\right) \left\{\mathbb{E}[\exp((1-\gamma)\,\epsilon_g)]^{\frac{1}{1-\gamma}}\right\}^{\gamma - 1/\rho} \\
&= \overline{g}^{\gamma - 1/\rho} \exp\left(-\frac{\sigma_g^2}{2}(\gamma - 1/\rho)\right) \exp\left(\frac{\sigma_g^2(1-\gamma)^2}{2(1-\gamma)}(\gamma - 1/\rho)\right) \\
&= \overline{g}^{\gamma - 1/\rho} \cdot \left(e^{\frac{-\gamma\sigma_g^2}{2}}\right)^{\gamma - 1/\rho}
\end{aligned}$$

onde usamos que $\mathbb{E}[\exp((1-\gamma)\epsilon_g)] = \exp\left(\frac{(1-\gamma)^2\sigma_g^2)}{2}\right)$, pela definição da distribuição.

Usamos os termos anteriores para seguir adiante:

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[\beta\cdot\Big(\frac{CE_1(c_1)}{c_0}\Big)^{\gamma-1/\rho}\cdot\Big(\frac{c_1^s}{c_0}\Big)^{-\gamma}\cdot R_s^j\right]\\
&= \beta\cdot\bar{g}^{\gamma-1/\rho}\cdot\left(e^{\frac{-\gamma\sigma_g^2}{2}}\right)^{\gamma-1/\rho}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\frac{c_1^s}{c_0}\right)^{-\gamma}\cdot R_s^j\right]\\
&= \beta\bar{g}^{\gamma-1/\rho}\cdot\left(e^{\frac{-\gamma\sigma_g^2}{2}}\right)^{\gamma-1/\rho}\cdot\mathbb{E}\left[\left(\bar{g}\exp\left(\epsilon_g-\frac{\sigma_g^2}{2}\right)\right)^{-\gamma}\cdot\left((1+\bar{r}_j)\exp\left(\epsilon_j-\frac{\sigma_j^2}{2}\right)\right)\right]\\
&= \beta\cdot\bar{g}^{-1/\rho}\cdot(1+\bar{r}_j)\cdot\exp\left(-\frac{\gamma\sigma_g^2}{2}\left(\gamma-\frac{1}{\rho}-1\right)-\frac{\sigma_j^2}{2}\right)\cdot\mathbb{E}[\exp(-\gamma\epsilon_g+\epsilon_j)]\\
&= \beta\cdot\bar{g}^{-1/\rho}\cdot(1+\bar{r}_j)\cdot\exp\left(-\frac{\gamma\sigma_g^2}{2}\left(\gamma-\frac{1}{\rho}-1\right)-\frac{\sigma_j^2}{2}\right)\cdot\exp\left[\frac{1}{2}(\gamma^2\sigma_g^2+\sigma_j^2-2\gamma\sigma_{j,g})\right]\\
&= \beta\cdot\bar{g}^{-1/\rho}\cdot(1+\bar{r}_j)\cdot\exp\left(-\gamma\sigma_{g,j}+\frac{\sigma_g^2}{2}(\gamma+\gamma/\rho)\right)
\end{aligned}$$

Em que $\sigma_{j,g}$ denota a covariância entre o retorno do ativo j e o crescimento do consumo. Ora, podemos isolar o retorno do ativo j:

$$1+\bar{r}_j=\beta^{-1}\cdot\bar{g}^{1/\rho}\cdot\exp\left(\gamma\sigma_{g,j}-\frac{\sigma_g^2}{2}(\gamma+\gamma/\rho)\right)$$

Assim, podemos fazer a aproximação em log para obter:

$$\bar{r}_j\approx\log(1+\bar{r}_j)=-\log\beta+\frac{1}{\rho}\log\bar{g}-\frac{\sigma_g^2}{2}\left(\gamma+\frac{\gamma}{\rho}\right)+\gamma\sigma_{g,j}$$

Veja que a interpretação que deve ser dada é a convencional.

- Quanto maior β, mais paciente o agente. Logo, menor precisa ser a taxa de juros para que o agente esteja poupando otimamente.
- Quanto maior a taxa de crescimento do consumo $\bar{g}$, maior a taxa de juros associada. Esse efeito é magnificado para baixa elasticidade intertemporal.
- O terceiro termo reflete a poupança precaucional. Quanto maior o choque de dispersão do consumo, menor a taxa de juros que eu preciso para querer poupar. Novamente, o efeito é magnificado por baixa elasticidade intertemporal e alta aversão ao risco.
- Finalmente, quão mais positivamente correlacionado for o retorno do ativo com o consumo, maior a taxa de juros que exijo para segurar o ativo. Isso porque os ativos que compensam períodos de consumo ruim são os mais valiosos.

A taxa de juros do ativo livre de risco é

$$\bar{r}_j\approx-\log\beta+\frac{1}{\rho}\log\bar{g}-\frac{\sigma_g^2}{2}\left(\gamma+\frac{\gamma}{\rho}\right)$$

Enquanto o prêmio de risco é

$$\bar{r}_j-\bar{r}^f=\gamma\sigma_{g,j}$$

assim como visto em aula, o prêmio de risco é proporcional ao parâmetro de aversão relativa ao risco e à covariância entre o retorno do ativo j e o crescimento do consumo.

(f) Compare o caso geral e a situação em que $\rho = \frac{1}{\gamma}$ e interprete. Como esta generalização pode ajudar a lidar com o *risk-free rate puzzle*?

Fazendo a substituição na expressão da taxa de juros do ativos j:

$$\bar{r}_j = \log\beta + \gamma\log\bar{g} - \frac{\sigma_g^2}{2}\left(\gamma^2 + \gamma\right) + \gamma\,\sigma_{g,j}$$

Note que a imposição de uma relação inversa entre a aversão ao risco e a elasticidade de substituição intertemporal é tal que o impacto da taxa de crescimento do consumo, assim como o termo de poupança precaucional, sobre a taxa de juros é magnificada por uma maior aversão ao risco. Já o prêmio de risco é o mesmo do caso geral.

A relação com o *risk free rate puzzle* é que ajudaria a explicar o puzzle num aspecto teórico, na maneira em que uma maior aversão ao risco implicaria em uma menor EIS — a preferência por ativos livre de risco é fomentada pela aversão ao risco, enquanto a realocação de recursos entre ativos distintos é limitada pela EIS. Assim a demanda sustentada por ativos livre de risco leva a retornos menores e mais persistentes. O problema com essa formulação é que ela requere valores para os parâmetros de interesse que não são observados empiricamente.

Exercício 4 (Árvore de Lucas)

Considere uma versão do modelo de apreçamento de ativos de Lucas com um agente representativo que tem uma árvore como dotação.

A árvore produz um fluxo de dividendos d_t, em que $d_0 = 1$. A taxa de crescimento do dividendo, $\frac{d_{t+1}}{d_t}$, toma um entre dois valores possíveis, $(\mu + \sigma)$ ou $(\mu - \sigma)$, em que $\mu > 1$. A taxa de crescimento do dividendo segue uma cadeia de Markov com matriz de transição P. Em particular, supomos que P é uma matriz simétrica em que a probabilidade de trocar de taxas de crescimento é dada por $p \in (0, 1)$.

As preferências dos indivíduos são dadas por $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t)$. A cada período, existem mercados para bens de consumo, árvores e ativos contingentes ao estado que pagam uma unidade de consumo amanhã em um estado particular do mundo.

Tendo em vista essas hipóteses, responda aos itens abaixo:

(a) Defina uma solução para o problema do agente representativo. Pense cuidadosamente a respeito sobre quais são as variáveis de estado do seu problema.

Para simplificar a notação do problema, considere a seguinte notação para a taxa de crescimento do dividendo: $\gamma(z) = \frac{d_{t+1}}{d_t}$. Isto é:

$$\begin{cases} \gamma(z_l) = \mu - \sigma \\ \gamma(z_h) = \mu + \sigma \end{cases}$$

Também vamos denotar $a(z)$ como a quantia detida do ativo que paga 1 unidade de consumo no período seguinte, e s como a quantia detida da árvore.

Visto que temos a e s como escolha, definimos dois preços diferentes para cada um: h como o preço da árvore, e q como o do ativo.

As variáveis de estado são $(s, a(z_l), a(z_h), d, z)$. Já as variáveis de controle são $c, s', a'(z_l), a'(z_h)$.

Logo, o problema do consumidor é:

$$V(s, a(z_l), a(z_h), d, z) = \underset{c, s', a'(z_l), a'(z_h)}{\text{Max}} u(c) + \beta \mathbb{E}_{z'|z} \{V(s', a'(z_l), a'(z_h), d', z')\}$$

$$\text{s.t. } c + h(z, d)s' + \sum_{z'} a'(z')q(z'|z) = s[h(z, d) + d] + a(z)$$

$$d' = \gamma(z')d$$

Tirando as C.P.O.'s:

$$[s'] : \quad h(z, d)u'(c) = \beta \sum_{z'} Pr(z'|z) V_s(s', a'(z_l), a'(z_h), d', z')$$

$$[a'(z')] : \quad q(z'|z)u'(c) = \beta Pr(z'|z) V_{a'(z')}(s', a'(z_l), a'(z_h), d', z'), \forall z' \in \{z_l, z_h\}$$

Aqui, chamo a atenção para a ausência do somatório na C.P.O. de $[a'(z')]$: Isto porque z' já está incorporado em a, pois ele é contingente ao estado (i.e., a está em função de z').

E, aplicando Benveniste-Scheinkman (em ambas as variáveis!):

$$V_s(s, a(z_l), a(z_h), d, z) = u'(c)[h(z, d) + d]$$

$$V_{a(z)}(s, a(z_l), a(z_h), d, z) = u'(c)$$

E, por fim, substituindo as C.P.O.'s em B-S:

$$h(z,d)u'(c) = \beta \sum_{z'} Pr(z'|z)u'(c')[h(z', \gamma(z')d) + d\gamma(z')]$$

$$q(z'|z)u'(c) = \beta Pr(z'|z)u'(c'), \forall z'$$

Encontramos duas Equações de Euler para o problema! Note esse é um problema muito parecido com o dos coqueiros da P1 de vocês, onde escolhíamos dois ativos.

(b) Defina um equilíbrio competitivo recursivo.

Um ECR é uma coleção de funções-valores $V(.)$, funções-políticas de consumo $g_c(.)$, do ativo $g_a(.)$ e da árvore $g_s(.)$ para cada estado $z \in \{z_l, z_h\}$ e preços h e q t.q.:

(i) Dados h e q, as funções g_c, g_a e g_s resolvem o problema do consumidor

(ii) Market-Clearing: $g_c(1, 0, 0, d, z) = d, \forall(d, z)$

(iii) Consistência: $g_s(1, 0, 0, d, z) = 1, \forall(d, z)$ e $g_a(1, 0, 0, d, z) = 0, \forall(d, z)$

As condições (ii) e (iii) vem do fato do agente ter uma árvore de dotação, como dito no enunciado. Novamente, lembre-se do item (c) do problema do coqueiro para entender a lógica daqui!

(c) Obtenha a função de apreçamento de equilíbrio da árvore. Você deve achar que a razão preço-dividendo das árvores é constante ao longo do tempo. Suponha que $\lim_{n\to\infty} \beta^{n+1}\mathbb{E}_t x_{t+n} = 0$ para eliminar bolhas.

Vamos então usar a informação de que $u(c) = \log(c)$:

$$u'(c) = \frac{1}{c}$$

Aplicando as condições de equilíbrio do item (b) na primeria Eq. de Euler, obtemos:

$$\frac{h(z,d)}{d} = \beta \sum_{z'} Pr(z'|z) \left\{ \frac{1}{\gamma(z')d} [h(z', \gamma(z')d) + \gamma(z')d] \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{h(z,d)}{d} = \beta \sum_{z'} Pr(z'|z) \left[\frac{h(z', \gamma(z')d)}{\gamma(z')d} + 1 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{h(z,d)}{d} = \mathbb{E}_{z'|z} \left\{ \beta \left[\frac{h(z', \gamma(z')d)}{\gamma(z')d} + 1 \right] \right\}$$

Vamos reescrever isso em termos do período:

$$\frac{h(z_t, d_t)}{d_t} = \mathbb{E}_t \left\{ \beta \left[\frac{h(z_{t+1}, \gamma(z_{t+1})d_t)}{\gamma(z_{t+1})d_t} + 1 \right] \right\}$$

Observe que o termo $\frac{h(z_{t+1},\gamma(z_{t+1})d_t)}{\gamma(z_{t+1})d_t}$ pode ser escrito como:

$$\frac{h(z_{t+1},\gamma(z_{t+1})d_t)}{\gamma(z_{t+1})d_t} = \mathbb{E}_{t+1}\left\{\beta\left[\frac{h(z_{t+2},\gamma(z_{t+2})d_{t+1})}{\gamma(z_{t+2})d_{t+1}}+1\right]\right\}$$

Com o termo em $t+2$ dentro da esperança podendo ser escrito de forma análoga. Sendo assim, conseguimos reescrever a expressão original como uma recursão:

$$\frac{h(z_t,d_t)}{d_t} = \mathbb{E}_t\left\{\beta^{j+1}\mathbb{E}_{t+j}\left\{\frac{h(z_{t+j},\gamma(z_{t+j})d_t)}{\gamma(z_{t+j})d_t}\right\}+\sum_{i=0}^{j}\beta^{i+1}\right\}$$

Tomando $j\to\infty$:

$$\frac{h(z_t,d_t)}{d_t} = \mathbb{E}_t\left\{\underbrace{\lim_{j\to\infty}\beta^{j+1}\mathbb{E}_{t+j}\left\{\frac{h(z_{t+j},\gamma(z_{t+j})d_t)}{\gamma(z_{t+j})d_t}\right\}}_{=0,\text{ pois: }\lim_{n\to\infty}\beta^{n+1}\mathbb{E}_t x_{t+n}=0}+\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^{i+1}}_{=\frac{\beta}{1-\beta}}\right\}$$

Obtemos:

$$\frac{h(z_t,d_t)}{d_t} = \frac{\beta}{1-\beta}$$

Ou seja: A razão preço-dividendo da árvore de fato é constante!

(d) Obtenha as funções de apreçamento de equilíbrio dos ativos contingentes ao estado.

Agora, precisamos olhar para a segunda Eq. de Euler, com as substituições de equilíbrio:

$$\frac{q(z'|z)}{d} = \beta Pr(z'|z)\frac{1}{\gamma(z')d}$$

$$\Rightarrow q(z'|z) = \frac{\beta Pr(z'|z)}{\gamma(z')}$$

Note, como no exercício dos coqueiros, que:

$$\begin{cases} Pr(z'|z) = 1-p, \text{ se } z'=z \\ Pr(z'|z) = p, \text{ se } z'\neq z \end{cases}$$

Assim, conseguimos fazer as substituições necessarias para cada $z\in\{z_l,z_h\}$:

$$q(z_h|z_h) = \frac{\beta(1-p)}{\mu+\sigma}; q(z_h|z_l) = \frac{\beta p}{\mu+\sigma}; q(z_l|z_l) = \frac{\beta(1-p)}{\mu-\sigma}; q(z_l|z_h) = \frac{\beta p}{\mu-\sigma}$$

(e) Adicione um ativo livre de risco a essa economia, ou seja, um ativo que paga uma unidade de consumo amanhã independentemente do estado. Calcule o preço desse ativo (Dica: não há necessidade de obter as funções de apreçamento desse ativo).

Basta usar não-arbitragem para precificar este ativo (assim como na Q2 da Lista 1!):

$$Q(z) = q(z_l|z) + q(z_h|z)$$

$$\Rightarrow Q(z_l) = \frac{\beta(1-p)}{\mu-\sigma} + \frac{\beta p}{\mu+\sigma} = \beta\frac{\mu+(1-2p)\sigma}{\mu^2-\sigma^2}$$

$$\Rightarrow Q(z_h) = \frac{\beta p}{\mu-\sigma} + \frac{\beta(1-p)}{\mu+\sigma} = \beta\frac{\mu-(1-2p)\sigma}{\mu^2-\sigma^2}$$

Onde $Q(z)$ é o preço deste ativo livre de risco.

(f) Agora, suponha que $p = 0,5$. Calcule a taxa de retorno média do ativo livre de risco e da árvore. Qual é o *equity premium* nessa economia?

Se $p = \frac{1}{2}$, então temos que $q(z|z_{-1,i}) = q(z|z_{-1,j}), j \neq i$. Logo,

$$Q(z_h) = \frac{\beta}{2(\mu-\sigma)} + \frac{\beta}{2(\mu+\sigma)} = Q(z_l)$$

$$\Rightarrow Q(z) = \beta\frac{\mu}{\mu^2-\sigma^2}$$

Ou seja, o preço agora independe de z. O retorno do ativo livre de risco então será:

$$R_a = \frac{1}{Q} = \frac{\mu^2-\sigma^2}{\beta\mu} \Rightarrow r_a = R_a - 1$$

Já o retorno da árvore fica:

$$R_s = \frac{\mathbb{E}_{z'|z}\left\{h(z',\gamma(z')d) + \gamma(z')d\right\}}{h(z,d)}$$

Lembre-se que:

$$\frac{h(z,d)}{d} = \frac{\beta}{1-\beta} \Rightarrow \frac{h(z',\gamma(z')d)}{\gamma(z')d} = \frac{\beta}{1-\beta}$$

Logo,

$$R_s = \frac{\mathbb{E}_{z'|z}\left\{\frac{\beta\gamma(z')d}{1-\beta} + \gamma(z')d\right\}}{\frac{\beta d}{1-\beta}}$$

$$\Rightarrow R_s = \mathbb{E}_{z'|z}\left\{\gamma(z') + \frac{(1-\beta)\gamma(z')}{\beta}\right\}$$

$$\Rightarrow R_s = \mathbb{E}_{z'|z}\left\{\frac{\gamma(z')}{\beta}\right\}$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{1}{\beta}[Pr(z_h|z)\gamma(z_h) + Pr(z_l|z)\gamma(z_l)]$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}(\mu+\sigma) + \frac{1}{2}(\mu-\sigma)\right]$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{\mu}{\beta}$$

Com $r_s = R_s - 1$.

Por fim, o *equity premium* fica:

$$\lambda = R_s - R_a = \frac{\mu}{\beta} - \frac{\mu^2 - \sigma^2}{\beta\mu}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sigma^2}{\beta\mu}$$

Ou seja, o prêmio dependerá positivamente da volatilidade da árvore: Quanto mais arriscado, maior o ganho esperado! Por outro lado, quanto maior a sua paciência β, ou quanto maior a média μ, menor será o prêmio.

Exercício 5 (CAPM)

O modelo de *asset pricing* conhecido como CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) é caracterizado, essencialmente, pela equação

$$\mathbb{E}[R^i] = R^f + \beta_i \mathbb{E}[R^m - R^f],$$

em que R^i é o retorno de um ativo i arbitrário na economia, R^f é o retorno do ativo livre de risco e $\beta_i = \frac{Cov(R^i, R^m)}{\sigma_m^2}$ representa o coeficiente da projeção linear desse retorno no portfólio de mercado, R_m.

Vamos derivar o CAPM a partir de uma economia de agente representativo.

O tempo é descrito por $t \in \{0, 1\}$. Nessa economia, existem $|J|$ ativos com *payoffs* conjuntamente normalmente distribuídos (com média μ e matriz de covariância Σ). Esses ativos estão todos em oferta fixa e são transacionados aos preços P.

O agente tem inicialmente, além da dotação fixa e unitária de cada um desses ativos, e_0 unidades do bem de consumo em $t = 0$. Todo o seu consumo em $t = 1$ será derivado do *payoff* do seu portfólio de ativos.

Sua utilidade é separável no tempo e admite representação em termos de utilidade esperada, com um fator de desconto unitário. Sua utilidade instantânea é quadrática, da forma $u(c) = c - \alpha\frac{(c-\overline{c})^2}{2}$. Restringiremos nossa atenção à região em a utilidade marginal é positiva.

(a) Escreva o problema de poupança e determinação de portfólio desse agente representativo. Chame de z^j a posição do agente no ativo j e não esqueça da sua dotação $\overline{z}^j = 1$.

O problema do agente pode ser representado por meio de:

$$\max_{c_0, c_1, z} u(c_0) + \mathbb{E}[u(c_1)],$$

sujeito à seguintes restrições:

$$c_0 = e_0 - \sum_j P^j \left(z^j - \overline{z}^j\right)$$

$$c_1 = \sum_j x_s^j \cdot z^j, \text{ para cada } s.$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo para essa economia.

Um equilíbrio é formado por um vetor de preços $P \in \mathbb{R}^{|J|}$ e por alocações representadas por (i) $(c_0, z) \in \mathbb{R}^{1+|J|}$ e (ii) uma função de consumo c_1 (essencialmente uma variável aleatória), tais que:

(a) A alocação proposta resolve o problema do agente, dados o vetor de preços P;

(b) Vale *market-clearing* no mercado de ativos. Isso é, $z^j = 1$ para todo j.

(c) Vale *market-clearing* para o consumo. Portanto,

$$c_0 = e_0 \quad \text{e} \quad c_1 = \sum_j x_s^j, \text{ para todo } s.$$

(c) Derive as condições de primeira ordem, que serão necessárias e suficientes para um ótimo.

As condições de primeira ordem desse problema podem ser representadas pela equação de apreçamento usual. Isso é,

$$P^j = E\left[\frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} \cdot x^j\right].$$

Se utilizarmos a utilidade quadrática que o exercício sugere, a equação acima pode ser reescrita como:

$$P^j = E\left[\frac{1 + \alpha\bar{c} - \alpha c_1}{1 + \alpha\bar{c} - \alpha c_0} \cdot x^j\right].$$

(d) Caracterize o consumo de equilíbrio em $t = 1$ e descreva o fator estocástico de desconto induzido por esse agente representativo.

Primeiramente, apontamos o fator estocástico de desconto induzido por esse agente, que decorre diretamente do item anterior. Temos que:

$$m_s = \frac{1 + \alpha\bar{c} - \alpha c_1}{1 + \alpha\bar{c} - \alpha c_0}.$$

Sobre o consumo em $t = 1$, o resultado decorre diretamente da nossa definição de equilíbrio, que pressupõe:

$$c_1 = \sum_j x_s^j.$$

Como os *pay-offs* dos ativos são conjuntamente normais, temos que o consumo em $t = 1$ será normal. Dessa forma, concluímos que:

$$c_1 \sim N\left(\sum_j \mu^j, \sum_{j,j'} \sigma_j \sigma_{j'}\right).$$

(e) Quais preços de ativos são condizentes com um equilíbrio competitivo nessa economia?

Para encontrar os preços de equilíbrio, basta avaliar a equação de apreçamento no consumo de equilíbrio que já foi determinado. Com isso, temos:

$$P^j = E\left[\frac{1 + \alpha\bar{c} - \alpha \sum_{\tilde{j}} x^{\tilde{j}}}{1 + \alpha\bar{c} - \alpha e_0} \cdot x^j\right]$$

(f) Defina como $R^m = \frac{\sum x^j}{\sum P^j}$ o retorno do portfólio de mercado nessa economia. Mostre que o fator estocástico de desconto é linear em R^m, isto é, pode ser escrito como $m_s = \gamma + \delta R^m_s$;

Usando a definição proposta no enunciado, temos que:

$$R^m \sum_j P^j = \sum_j x^j.$$

Usando esse resultado, podemos reescrever o fator estocástico de desconto da seguinte forma:

$$m_s = \frac{1 + \alpha\bar{c} - \alpha R^m \sum_j P^j}{1 + \alpha\bar{c} - \alpha e_0}.$$

Ou seja, temos que o o fator estocástico de desconto pode ser escrito como $m_s = \gamma + \delta R^m_s$, com:

$$\gamma = \frac{1 + \alpha\bar{c}}{1 + \alpha\bar{c} - \alpha e_0} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{-\alpha \sum_j P^j}{1 + \alpha\bar{c} - \alpha e_0}.$$

(g) Derive a equação principal do CAPM, descrita acima.

Com base no item anterior, podemos escrever a equação de apreçamento como:

$$1 = E\Big[(\gamma + \delta R^m)R^j\Big] = \delta \cdot cov(R^m, R^j) + E(m_s) \cdot E(R^j).$$

Um resultado que foi utilizado ao longo do curso, é $E(m_s) = 1/R^f$, se há um ativo livre de risco nessa economia. Portanto, temos:

$$R^f = \delta \cdot R^f \cdot cov(R^m, R^j) + E(R^j).$$

A equação acima vale para qualquer ativo. Em particular, vale para o ativo R^m. Avaliando essa equação para tal ativo, obtemos o seguinte fato:

$$R^f = \delta \cdot R^f \cdot Var(R^m) + E(R^m) \implies E(R^m) - R^f = -\delta \cdot R^f \cdot Var(R^m).$$

Usando essa conclusão na equação do ativo j, concluímos que:

$$E(R^j) - R^f = -\delta \cdot R^f \cdot cov(R^m, R^j) = \frac{cov(R^m, R^j)}{Var(R^m)} \cdot \Big(E(R^m) - R^f\Big)$$

Assim, obtemos o modelo CAPM a partir dessa economia de agente representativo.

$$\mathbb{E}[R^i] = R^f + \beta_i \cdot \mathbb{E}[R^m - R^f]$$

(h) Discuta se pode existir um ativo arriscado com $\mathbb{E}[R_i] < R_f$ em equilíbrio. O agente representativo pode achar ótimo tê-lo em seu portfólio, mesmo com retorno tão baixo?

É possível que haja um ativo arriscado com $\mathbb{E}[R_i] < R_f$ em equilíbrio. Se um ativo tiver retornos que são negativamente correlacionados com o retorno do portfólio de mercado, esse ativo paga o agente nos momentos em que o mercado não vai bem. Como o agente é avesso ao risco, esse tipo de ativo que paga em cenários adversos é um ativo desejável, servindo como uma forma de seguro. Logo, o retorno que o agente exige para segurar esse ativo é baixo, potencialmente menor do que o retorno do ativo livre de risco.
