Lista 4 - Programação Dinâmica em Tempo Contínuo
Data de entrega: 03/09/2024 (23:59)

Exercício 1 (McCall em Tempo Contínuo)

Em Macro I, vocês tiveram uma prévia do modelo de McCall, em tempo discreto. Para refrescar a memória, o *environment* de um modelo de McCall possui a seguinte função utilidade:

$$U = \mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_t$$

Onde:

$$x_t = \begin{cases} w, \text{ se empregado} \\ b, \text{ se desempregado} \end{cases}$$

Sendo w retirado de uma distribuição de salários i.i.d., com CDF $F(w)$.

As equações de Bellman são duas: uma para o empregado,

$$W(w) = w + \beta W(w)$$

E outra para o desempregado,

$$U = b + \beta \int_0^{\infty} \text{Max}\{U, W(w)\} dF(w)$$

Neste modelo, sabemos que existe um salário de reserva w^R tal que $W(w^R) = U$. Fazendo as devidas manipulações algébricas, vocês irão encontrar que:

$$w^R = b + \frac{\beta}{1-\beta}\int_{w^R}^{\infty} [1 - F(w)] dw$$

Agora, vocês terão que formular a dinâmica de um Modelo de McCall em tempo contínuo. Suponha que a taxa de desconto contínua é dada por r.

(a) Reescreva a equação de Bellman do empregado em tempo contínuo.

(b) Faça o mesmo para o Bellman do desempregado.

(c) Calcule o salário de reserva para a versão em tempo contínuo deste modelo. Ela é diferente do caso em tempo discreto? Explique.

(d) Suponha agora que existe uma probabilidade α do indivíduo conseguir encontrar um emprego no próximo período. Como isso afeta as equações de Bellman do empregado e do desempregado?

Exercício 2 (Desenhando um Diagrama de Fases)

Imagine um modelo de RBC com gasto do governo e oferta inelástica de trabalho. Este gasto é financiado sem impostos distorcivos e não gera utilidade, nem aumento de produtividade. Sendo assim, apenas compete com o consumo e investimento como uso para os recursos. A sequência de choques sobre o produto, z_t, é predeterminada.

Pede-se:

(a) Escreva a HJB do planejador para o problema em tempo contínuo e derive suas condições de otimalidade.

Agora, utilize as condções de otimalidade derivadas acima para representar as trajetórias ótimas em diagramas de fases para as seguintes situações:

(b) O gasto é constante $g_t = \overline{g} > 0$.

(c) O gasto é $\overline{g}$ até T e reverte para $g = 0$ dali em diante. Isto é perfeitamente conhecido hoje. A economia hoje tem k_0, abaixo do steady state de $g = 0$.

(d) A economia começa do capital de steady state de $g = 0$ e é feito um anúncio de que daqui a um tempo T o gasto passará a ser $\overline{g} > 0$ para sempre.

(e) Suponha que o governo volta atrás deste anúncio, tido inicialmente como crível, de forma surpresa em $T_1 < T$.

Exercício 3 (Simulando um Diagrama de Fases)

Considere o seguinte *environment*: Um planejador central escolhe as sequências de consumo e capital de modo a maximizar o bem-estar do consumidor, dado por:

$$U\left(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

Sujeito a restrição de evolução do estoque de capital (per capita) da economia como um todo:

$$\dot{k} = \bar{A} f(k_t) - c_t - \delta k_t$$

A utilidade do indivíduo é uma CRRA:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$$

E a função de produção é C-D:

$$f(k) = k^{\alpha}$$

Pede-se:

(a) Monte a HJB do problema, e encontre as condições de otimalidade do problema.

(b) Assuma que os parâmetros dessa economia são:

$$\begin{cases} \alpha = 0.33 \\ \delta = 0.08 \\ \rho = 0.04 \\ \theta = 2 \\ \bar{A} = 1 \end{cases}$$

Baixe o código de diagrama de fases disponibilizado na wiki do curso, calcule os valores de S-S de c^* e k^* e gere um gráfico que represente o diagrama de fases deste problema, junto com o seu braço estável. (Observe que o formato deste código está em Python!)

(c) Assuma que um choque de produtividade eleve o valor de $\bar{A}$ para 1.5 **do nada**, em $t = T$. Calcule os novos valores de S-S para c^* e k^*. Utilize o mesmo código (com as devidas modificações necessárias nos seus chutes iniciais) para conseguir plotar o novo diagrama de fases e o braço estável.

(d) Por fim, vamos agora estudar a **reação da economia** a esse choque de $\Delta \bar{A} > 0$. Aqui, vamos simular dois exercícios diferentes:

(i) Suponha que a economia esteja no S-S antigo imediatamente antes do choque acontecer. Calcule o valor de c_T. (i.e., calcule o valor para qual o consumo salta **imediatamente** após o choque de $\bar{A}$.)

(ii) Suponha que a economia esteja fora do S-S antes do choque de $\bar{A}$, mas ainda dentro do braço estável anterior, no ponto $(10, 1.858)$. Calcule o outro valor de c_T.

Exercício 4 (*Cake eating*)

Neste exercício, formularemos um problema de programação dinâmica em tempo contínuo, encontrando também políticas ótimas das variáveis de controle.

Maria Antonieta tem preferências em formato log no consumo de brioche. Sua impaciência intertemporal é modelada com um fator de desconto exponencial. Seja k_0 o estoque inicial de brioche disponível, e k_t a quantidade disponível no tempo t. De início, não há incerteza.

(a) Primeiro, suponha que o brioche não cresce. Formule o problema recursivo de Maria Antonieta e encontre sua trajetória ótima de fluxo de consumo c e estoque de brioche k.

(b) Suponha agora que o brioche deprecia exponencialmente a uma taxa δ. Reformule o problema e encontre a nova trajetória ótima de fluxo de consumo c e estoque de brioche k.

(c) Vamos introduzir depreciação estocástica do brioche. A cada intervalo Δ de tempo, existe uma probabilidade $\gamma\Delta$ de que o brioche deprecie e se torne $(1-\eta)k_t$, com $0 < \eta < 1$. Reformule o problema e encontre as trajetórias ótimas de fluxo de consumo c e estoque de brioche k. Relacione o resultado com o encontrado no item (b). (Dica: o choque de depreciação não precisa ser uma variável de estado, mas deve ser incluída na função valor)

Exercício 5 (Transições de renda)

Um agente com utilidade genérica sobre o consumo $u(c)$ tem acesso a um ativo livre de risco a que com rendimento contínuo r. A cada instante de tempo, sua renda pode assumir um entre dois níveis, a saber, $y(s) \in \{y_L, y_H\}$, com $y_H > y_L$. Sua restrição orçamentária é dada por

$$\dot{a} = ra + y(s) - c$$

A transição entre estados segue uma cadeia de Markov em tempo contínuo. Mais especificamente, ele transita do estado de renda alta para o de renda baixa com intensidade γ_{HL} e na direção contrária com intensidade γ_{LH}.

1. Escreva o problema do agente na forma recursiva e caracterize a(s) equação(ões) de Euler.

2. Mostre que se a utilidade marginal a cada nível de riqueza é mais alta para o agente no estado de renda baixa, isto é, $V_a(a, H) < V_a(a, L)$, então, para cada nível de riqueza, o consumo do agente no estado de renda alta cresce mais rápido do que o consumo no estado de renda baixa.

Exercício 6 (Programação dinâmica em um problema de portfólios - P2, 2023)

Imagine um trabalhador que tem acesso a dois ativos: um índice de ações e um ativo livre de risco. Formularemos seu problema de portfólio abaixo.

A incerteza é descrita por uma cadeia de Markov em tempo contínuo com dois estados da Natureza, $s \in S = \{r, e\}$, em que r é um estado de recessão na economia e e é um estado de expansão. O índice de ações oferece dividendos $d(s)$ continuamente, com $d(e) > d(r)$. Seu preço é tal que $p(e) > p(r)$. Já o ativo livre de risco oferece um retorno instantâneo $r^f(s)$ e tem preço unitário sempre. Embora este retorno possa depender do estado, não há variação de preço deste ativo quando há troca de estado (pense em um fundo DI).

Além disto, o agente está sujeito a um risco de renda. Sua renda não derivada de ativos é $y(e)$ em caso de expansão e $y(r)$ em caso de recessão, com $y(e) > y(r)$.

A economia faz um transição de expansão para recessão com intensidade instantânea $\lambda_{e \to r}$ e de recessão para expansão com intensidade $\lambda_{r \to e}$.

Responda:

(a) Seja w a riqueza do agente. Descreva a evolução da riqueza do agente ($\dot{w}$) em função do estado da economia, assim como de sua escolha instantânea de quantas ações (a) e ativos livres de risco (b) deter e quanto consumir (c).

(b) Note que quando a economia faz uma transição entre estados, a riqueza do agente dá um salto proporcional à variação de preços do ativo arriscado. Descreva esta variação discreta de riqueza para cada uma das duas transições.

(c) Escreva um par de equações de HJB usando (w, s) como variáveis de estado.[1] Para isso, suponha taxa de desconto ρ e uma função arbitrária u para a utilidade instantânea do consumo.

(d) Caracterize as equações de Euler do agente.

(e) Se a economia é povoada por um contínuo de agentes idênticos a este, com utilidade $u(c) = log(c)$ e a riqueza agregada é uma oferta inelástica $\overline{a} = 1$ de ações e $\overline{b} = 0$ de títulos, o que você consegue dizer sobre preços de equilíbrio?

[1] Dica: o par se faz necessário por termos $s \in \{r, e\}$.

Exercício 7 (Um Modelo do Mercado Imobiliário - P2, 2023)

Sejam H o estoque de moradias na cidade do Rio de Janeiro, I a taxa de investimento imobiliário, p_H o preço real da moradia, e R o aluguel.

Suponha que I seja uma função crescente de p_H, de modo que $I = I\left(p_H\right)$, com $I'(\cdot) > 0$, e que $\dot{H} = I - \delta H$.

Suponha também que o aluguel é uma função decrescente de $H : R = R(H)$, $R'(\cdot) < 0$.

Finalmente, suponha que a renda de aluguel mais ganhos de capital devem igualar a taxa exógena requerida de retorno, $r : \left(R + \dot{p}_H\right)/p_H = r$.

(a) Esboce o conjunto de pontos no espaço (H, p_H) tal que $\dot{H} = 0$. Esboce o conjunto de pontos tal que $\dot{p}_H = 0$.

(b) Quais são as dinâmicas de H e p_H em cada região do diagrama resultante? Esboce o caminho de sela.

(c) Suponha que o mercado esteja inicialmente em equilíbrio de longo prazo e que haja um aumento permanente inesperado em r. O que acontece com H e p_H no momento da mudança? Como H, p_H, I, e R se comportam ao longo do tempo após a mudança?

(d) Suponha que o mercado esteja inicialmente em equilíbrio de longo prazo e que se saiba que haverá um aumento permanente em r no tempo T no futuro. O que acontece com H e p_H no momento da notícia? Como H, p_H, I, e R se comportam entre o momento da notícia e o momento do aumento? O que acontece com eles quando o aumento ocorre? Como eles se comportam após o aumento?

Exercício 8 (Alocando em locadoras)

Modificado de Sutton & Barto (2020) página 81.

Imagine que você seja o dono de duas unidades de uma franquia de locadora de automóveis. A cada dia, um número qualquer de clientes chega em cada locadora a fim de alugar carros. Caso você tenha carros disponíveis naquela unidade, eles são alugados a um preço de \$10 cada — caso haja excesso de demanda em determinada unidade, você perde a oportunidade de negócio com esses clientes. Os carros se tornam disponíveis para locação no dia seguinte após seu retorno à unidade de origem. Entre um dia e outro você pode mexer sua frota de carros entre as unidades. Cada carro deslocado desta forma gera um custo de \$2. O desconto intertemporal é de β ao dia.

(a) Suponha que o número de carros pedidos e devolvidos em cada locadora são variáveis aleatórias de Poisson com parâmetros λ, em que $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. Suponha que λ é 3 e 4 para pedidos e 3 e 2 para devoluções nas unidades A e B. A capacidade máxima de cada unidade é de vinte carros, e lhe é permitido mover um máximo de cinco carros entre uma unidade a cada noite. Formule o seu problema de programação dinâmica em tempo discreto.

(b) Suponha a mesma distribuição e parâmetros do item anterior, mas ignore o limite máximo de carros movidos à noite. Além disso, suponha que os carros possam ser movidos a qualquer momento. Formule o seu problema de programação dinâmica em tempo contínuo.

    Dica: Ao deslocar um carro de uma locadora para outra, a função valor muda de $V(x, y)$ para $V(x + 1, y - 1)$ e paga-se um custo. Você vai precisar pensar em formulações da função valor que comparam objetos como $V(x, y)$ e $V(x + 1, y - 1) - c$ com o operador máximo.

(c) Compare as formulações em tempo discreto e contínuo. Qual lhe parece mais simples? Por que não é necessário utilizar o operador esperança $\mathbb{E}(\cdot)$? Por que a função valor envolve apenas "estados vizinhos"e não grandes saltos? Este último motivo leva a algumas vantagens computacionais.