Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 5. Limite

Objetivos

- Entender a noção de limite de uma função de várias variáveis quando nos aproximamos de um ponto específico no domínio.
- Compreender a definição formal de limite em termos de ε-δ.
- Explorar as propriedades dos limites, incluindo as regras de soma, produto, constante e quociente.
- Compreender o conceito de limite ao longo de caminhos e como eles são relevantes na definição de limites de funções de várias variáveis.

Exercício 5.1.

Use a ideia do Exemplo 5.2 da Nota 5 para calcular $\lim_{\mathbf{x}\to O} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, onde O é a origem.

Solução.

Vamos calcular

$$\lim_{\mathbf{x}\to O} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

onde O é a origem.
Seja $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Note que $f(\mathbf{x})$ é exatamente a distância do ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à origem $O = (0, 0, \ldots, 0)$.
Assim, à medida que $\mathbf{x} \to O$, essa distância tende a 0. Portanto, o valor natural a ser considerado como limite é

$$L = 0.$$

Agora, para mostrar formalmente, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Temos:

$$|f(\mathbf{x}) - L| = \left|\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} - 0\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \|\mathbf{x} - O\|.$$

Escolhendo $\delta = \varepsilon$, se $\|\mathbf{x} - O\| < \delta$, então

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{\mathbf{x}\to O} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = 0.$$

$\square$

Exercício 5.2.

Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

Solução.

Em geral, não podemos dizer nada sobre $f(3,1)$! O fato de

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$$

significa que os valores de $f(x,y)$ se aproximam de 6 quando (x,y) se aproxima, mas não é igual a $(3,1)$. Se f for contínua, sabemos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = f(3,1) = 6.$$

□

Exercício 5.3.

Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \left(5x^3 - x^2y^2\right)$

(b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{5y^4\cos^2 x}{x^4+y^4}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2+y^2}$

(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(h) $f(x,y) = \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

(i) $f(x,y,z) = \dfrac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$

Solução.

(a) $f(x,y) = 5x^3 - x^2y^2$ é um polinômio e, portanto, contínua. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = 5(1)^3 - (1)^2(2)^2 = 5 - 4 = 1.$$

(b) $\dfrac{1+y^2}{x^2+xy}$ é racional e, portanto, contínua no seu domínio, que inclui $(1,0)$. O logaritmo natural é contínuo para $t > 0$, logo a composição

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$$

é contínua onde $\dfrac{1+y^2}{x^2+xy} > 0$. Em particular, f é contínua em $(1,0)$, então

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) = \ln\left(\frac{1+0^2}{1^2+1\cdot 0}\right) = \ln(1) = 0.$$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$.

Primeiro, aproxime $(0,0)$ pelo eixo x:

$$f(x,0) = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } x \longrightarrow 0$$

Agora aproxime $(0,0)$ pelo eixo y:

$$f(0,y) = \frac{-4y^2}{2y^2} = -2$$

Como existem dois limites diferentes ao longo de linhas distintas, o limite não existe.

(d) $f(x,y) = \dfrac{5y^4\cos^2 x}{x^4 + y^4}$.

Pelo eixo x:

$$f(x,0) = \frac{0}{x^4} = 0$$

Pelo eixo y:

$$f(0,y) = \frac{5y^4\cos^2 0}{y^4} = \frac{5y^4 \cdot 1}{y^4} = 5$$

Como há limites diferentes ao longo de linhas distintas, o limite não existe.

(e) $f(x,y) = \dfrac{y^2\sin^2 x}{x^4+y^4}$.

No eixo x $(y=0)$:

$$f(x,0) = 0$$

Aproximando pela reta $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{x^2\sin^2 x}{x^4+x^4} = \frac{x^2\sin^2 x}{2x^4} = \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \text{ logo } f(x,x) \to \frac{1}{2}$$

Como existem limites diferentes, o limite não existe.

(f) Podemos usar o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2} = 0$$

pois

$$0 \le \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2} \le \sin^2 y \cdot \frac{x^2}{x^2+2y^2} \le \sin^2 y$$

e $\sin^2 y \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Portanto, o limite é zero.

(g)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{(x^2+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = 2$$

(h) $f(x,y) = \frac{xy^4}{x^2+y^8}$. No eixo x, $f(x,0) = 0$ para $x \neq 0$, então $f(x,y) \to 0$ conforme $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo x.

Aproximando $(0,0)$ ao longo da curva $x = y^4$ temos $f(y^4, y) = \frac{y^8}{2y^8} = \frac{1}{2}$ para $y \neq 0$, então ao longo desse caminho $f(x,y) \to \frac{1}{2}$ conforme $(x,y) \to (0,0)$.

Portanto, o limite não existe.

(i) $f(x,y,z) = \dfrac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$.

Note que $f(x,0,0) = 0$ para $x \neq 0$, então, ao se aproximar de $(0,0,0)$ pelo eixo x temos $f(x,y,z) \to 0$.

Por outro lado, $f(0,y,y) = \dfrac{y^2}{0+4y^2+9y^2} = \dfrac{y^2}{13y^2} = \dfrac{1}{13}$ para $y \neq 0$. Assim, ao se aproximar de $(0,0,0)$ pela reta $z = y$, $x = 0$, temos $f(x,y,z) \to \dfrac{1}{13}$.

Portanto, como há dois limites diferentes, o limite não existe.

□

Exercício 5.4.

Determine $h(x,y) = g(f(x,y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

(a) $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x,y) = 2x+3y-6$

(b) $g(t) = t + \ln t, \quad f(x,y) = \dfrac{1-xy}{1+x^2y^2}$

Solução.

(a)

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = (2x+3y-6)^2 + \sqrt{2x+3y-6}$$

Como f é um polinômio, é contínua em $\mathbb{R}^2$ e g é contínua no seu domínio $\{t \mid t \geq 0\}$. Portanto, h é contínua no seu domínio.

$$D = \{(x,y) \mid 2x+3y-6 \geq 0\} = \left\{(x,y) \mid y \geq -\frac{2}{3}x+2\right\}$$

Esse conjunto consiste em todos os pontos sobre ou acima da reta $y = -\frac{2}{3}x+2$.

(b)

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = \frac{1-xy}{1+x^2y^2} + \ln\left(\frac{1-xy}{1+x^2y^2}\right)$$

f é uma função racional, então é contínua em seu domínio. Como $1+x^2y^2 > 0$, o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, então f é contínua em todo lugar. g é contínua em seu domínio $\{t \mid t > 0\}$. Portanto, h é contínua em:

$$\left\{(x,y) \mid \frac{1-xy}{1+x^2y^2} > 0\right\} = \{(x,y) \mid xy < 1\}$$

O conjunto consiste em todos os pontos entre (mas não sobre) os dois ramos da hipérbole $y = 1/x$.

□

Exercício 5.5.

Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

(a) $F(x,y) = \cos\left(\sqrt{1+x-y}\right)$

(b) $F(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}$

(c) $G(x,y) = \arctan\left((x+y)^{-2}\right)$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução.

(a) A função $F(x,y) = \cos(\sqrt{1+x-y})$ compõe duas funções: $f(x,y) = \sqrt{1+x-y}$, que é contínua em seu domínio $\{(x,y) \mid 1+x-y \geq 0\}$ ou $\{(x,y) \mid y \leq x+1\}$, e $g(t) = \cos t$, que é contínua em todo lugar. Portanto, F é contínua em seu domínio:

$$\{(x,y) \mid y \leq x+1\}$$

(b) A função $F(x,y)$ é uma função racional e, portanto, é contínua em seu domínio:

$$\{(x,y) \mid 1-x^2-y^2 \neq 0\} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 1\}$$

(c) Observe que $f(x,y) = (x+y)^{-2}$ é racional e contínua em $\mathbb{R}^2$ exceto onde $x+y=0$, e $g(t) = \arctan t$ é contínua em todo lugar. Assim, G é contínua em seu domínio:

$$\{(x,y) \mid x+y \neq 0\} = \{(x,y) \mid y \neq -x\}$$

(d) A primeira parte de f é uma função racional definida em todos os pontos, exceto na origem. Como $x^2 \leq 2x^2 + y^2$, temos $\left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}\right| \leq |y^3|$, e sabemos que $|y^3| \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Mas $f(0,0) = 1$, logo f é descontínua em $(0,0)$. Portanto, f é contínua no conjunto:

$$\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$$

$\square$