Lista 1 - Incerteza em uma Economia de Dotação
Data de entrega: 30/07/2025 (23:59)

Exercício 1 (Agregação)

Nessa questão iremos estudar a agregação de agentes heterogêneos e possibilidade de um agente representativo.

Considere o problema do consumidor em mercados completos visto em sala de aula. A economia é povoada por um conjunto I de famílias, indexadas por $i \in I$. Cada família resolve

$$U_i(c(q, y_i)) = \max_{c_i} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t))$$

$$\text{s.a.} \ \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t).$$

Além disto, o índice de utilidade da família tem um formato CRRA (Constant Relative Risk Aversion) dado por $u_i(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ e a restrição de factibilidade impõe que $C_t(s^t) := \sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t) =: Y_t(s^t)$, para cada t e cada s^t.

(a) Defina o consumo agregado como: $C_t(s^t) = \sum_i c_t^i(s^t)$. Encontre a relação que liga o consumo individual ao consumo agregado, i.e., qual a fração do consumo agregado de cada família. Como ela varia com sua dotação e como se relaciona aos preços de estado e nível de consumo agregado?

(b) Considere agora o problema do planejador, que maximiza uma soma ponderada das utilidades

$$W\left(\{Y_t(s^t)\}_{t,s^t}\right) = \max_{c_1,\dots,c_I} \sum_i \lambda_i U_i(c_i)$$

$$\text{s.a., para cada } t, s^t, \sum_i c_t^i(s^t) \leq Y_t(s^t).$$

Quais os pesos λ_i que cada família deve ter para que o problema centralizado gere alocações consistentes com o problema descentralizado? Interprete.

Dica: Normalize de uma maneira conveniente.

(c) Defina a solução do problema anterior $W\left(\{Y(s^t)\}_{t,s^t}\right)$ como a utilidade da família representativa dessa economia. Qual o formato funcional da utilidade dessa família representativa?

(d) Mostre que o formato funcional da utilidade da família representativa não muda (a não ser por uma constante multiplicativa) com $\{\lambda_i\}$ e identifique preços sombra que sustentariam a alocação agregada.

Exercício 2 (Equilíbrio AD)

Considere uma economia de trocas com dois consumidores que vivem para sempre e possuem preferências idênticas, dadas por:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t)$$

Ambos os consumidores têm dotações aleatórias dependentes na variável de estado exógena s_t. Os s_t's são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e com mesma distribuição (i.i.d.). Mais especificamente, para cada t, $s_t = H$ com probabilidade π e $s_t = L$ com probabilidade $1 - \pi$, onde π não é dependente no tempo ou na realização dos estados anteriores. Caso $s_t = H$, a dotação do primeiro consumidor será igual a 2 e a do segundo consumidor será 1; caso $s_t = L$, a dotação do primeiro consumidor será 1 e a do segundo, 0. Os mercados são completos.

(a) Defina um equilíbrio competitivo com trocas na data zero (Arrow-Debreu) nessa economia. Assuma que os consumidores tomam decisões antes de observar o estado no período 0.

(b) Determine a alocação de equilíbrio competitivo em termos de primitivas.

(c) Determine os preços dos ativos de Arrow em termos de primitivas.

(d) Use a sua resposta do item (c) para determinar a taxa de retorno médio de um título livre de risco (de um período) nessa economia. Um título livre de risco é aquele que paga uma unidade de consumo no próximo período independentemente da realização do estado e o retorno de um ativo é definido como seu payoff divido pelo seu preço.

Exercício 3 (Algoritmo de Negishi)

O Algoritmo de Negishi pode ser utilizado para computar o equilíbrio de Arrow-Debreu em mercados completos. Por meio de um processo iterativo, atualizamos os valores dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição orçamentária do problema dos agentes de modo a encontrar sequências de consumo e preços de equilíbrio. O código-base para a resolução deste exercício se encontra na wiki da disciplina.

Neste caso específico, a economia é povoada por três agentes. Em $t = 0$ o estado s_0 ocorre com certeza. Há duas possíveis realizações de estado no tempo $t = 1$, $S = \{1, 2\}$, cada um com a mesma probabilidade de ocorrência. No cenário base, os agentes recebem uma unidade de dotação em cada estado.

(a) Compute os multiplicadores de Lagrange para o cenário base. Interprete os resultados. Qual é a sequência de consumo para cada agente e quais são os preços de equilíbrio? (Atenção com a definição dos possíveis pares de preço e consumo)

(b) Suponha agora que o segundo consumidor receba duas unidades de dotação caso $s_1 = 1$, e três unidades de dotação caso $s_1 = 2$. Compute os pesos de Pareto associados aos agentes e interprete os resultados. Qual é a sequência de consumo para cada agente e quais são os preços de equilíbrio? (Atenção com a definição dos possíveis pares de preço e quantidades)

(c) Repita o procedimento dos itens anteriores, mantendo a hipótese sobre dotações do ítem (b), mas também modificando a probabilidade de realização do estado 1 para 0.3 e a probabilidade de realização do estado 2 para 0.7. Interprete o que acontece com preços e pesos de Pareto.

Exercício 4 (Compartilhamento de risco – P1, 2024)

Suponha um grupo finito I de indivíduos. A renda de cada indivíduo é determinada a cada período como uma função do estado atual da natureza $s_t \in S$ (em que S é finito e enumerável): $y_t^i(s_t)$. Denote a renda agregada por $Y_t(s_t) \equiv \sum_{i \in I} y_t^i(s_t)$. Suponha que a utilidade para o indivíduo i é dada por

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u^i(c_t)\right]$$

que, sob nossas hipóteses, é

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u(c_t(s^t))\mathbb{P}(s^t)$$

(a) Suponha que não há tecnologia de poupança agregada e que o estado da natureza é observável. Escreva o problema de Pareto para pesos de Pareto dados $\{\lambda^i\}_{i \in I}$. Mostre que, no ótimo, o consumo para o indivíduo i, $c_t^i(s^t)$, pode ser escrito como dependendo apenas da renda agregada daquele período, i.e., uma vez que controlamos por $Y_t(s^t)$, o consumo não depende adicionalmente de s^t.

(b) Agora, suponha alternativamente que a função utilidade seja da forma CRRA

$$u^i(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

em que a aversão ao risco σ é a mesma para todos os indivíduos. Mostre que o consumo toma a forma

$$c_t^i = \alpha^i C_t$$

com as constantes a^i satisfazendo $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$. Como as constants a^i dependem dos pesos de Pareto λ^i?

(c) Agora, suponha que a função utilidade seja da forma CARA

$$u^i(c) = -\frac{e^{-\gamma^i c}}{\gamma^i}$$

e mostre que o consumo toma a forma

$$c_t^i = a^i C_t + b^i$$

em que a^i e b^i são constantes e $\sum a^i = 1$ e $\sum b^i = 0$. Como a distribuição de γ^i e dos pesos de Pareto λ^i afeta a^i e b^i?

(d) Agora, generalizemos o resultado do item (a), trabalhando ainda com preferência gerais. Suponha que exista uma tecnologia de armazenamento: se no período $t-1$ uma quantidade $S_t(s^{t-1}) \geq 0$ for reservada para armazenamento, então no período t uma quantidade $(1 + r_t(s_t))S_t(s^{t-1})$ estará disponível (para consumo ou armazenamento)além de qualquer renda corrente $Y_t(s^t)$. Mostre que um resultado semelhante ao de (a) vale, mas agora devemos condicionar ao consumo total $C(s^t) \equiv \sum_{i \in I} c_t^i(s^t)$.

Exercício 5 (Equilíbrio com crenças heterogêneas – P1, 2023)

Uma economia de trocas puras é povoada por dois consumidores. O consumidor i tem preferências sobre sequências de consumo contingentes no tempo $\{c_t^i\}$ ordenadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, u(c_t^i(s^t)) \, \pi_t^i(s^t),$$

em que $u(c) = \log(c)$ e $\pi_t^i(s^t)$ é a probabilidade que o consumidor i atribui à história s^t.

O espaço de estado é invariante no tempo. Em particular, $s_t \in S = \{\Delta, 0.5, 1-\Delta\}$ para todo $t \geq 0$ e $\Delta \in [0,1]$. Somente duas histórias são possíveis para $t = 0, 1, 2, ...$:

$$\begin{array}{llllll} \text{história 1:} & 0.5, & 1-\Delta, & 1-\Delta, & 1-\Delta, & \ldots \\ \text{história 2:} & 0.5, & \Delta, & \Delta, & \Delta, & \ldots \end{array}$$

O consumidor 1 atribui probabilidade p à história 1 e probabilidade $(1-p)$ à história 2, enquanto o consumidor 2 atribui probabilidade $(1-p)$ à história 1 e probabilidade p à história 2.

As dotações dos consumidores são dadas por:

$$y_t^1 = s_t$$
$$y_t^2 = 1 - s_t.$$

(a) Descreva a incerteza do problema em um diagrama de árvore.

(b) Defina um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu, em que mercados completos de consumo contingente a cada história estão abertos na data $t = 0$.

(c) Compute este equilíbrio para $\Delta = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2}$. Descreva a alocação de consumo, os preços do consumo contingente e a desigualdade de consumo realizada para cada história.

(d) Agora compute este equilíbrio para um caso geral, com $p \geq \frac{1}{2}$ e $\Delta \in [0,1]$.

(e) Como os preços e a desigualdade de consumo dependem de Δ? E de p? Explique.