**Lista 3 - Ciclos Reais de Negócios (RBC)**
**Data de entrega: 07/08/2024 (23:59)**

# Exercício 1 (RBC)

Este exercício apresenta uma discussão sobre alguns aspectos teóricos subjacentes à construção dos modelos de Real Business Cycle (RBC). Antes de mais nada, devemos apresentar as hipóteses dessa questão:

- **Tempo:** o tempo é discreto, $t = 0, 1, 2, ...$, e o horizonte é infinito
- **Preferências:** a economia é composta por um grande número de indivíduos iguais que vivem infinitamente e maximizam seu fluxo esperado de utilidade, dado por $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$ em que $\beta \in (0, 1)$. Supõe-se que $u(c, l)$ é côncava e crescente no consumo $c$ e no lazer $l$ e duas vezes continuamente diferenciável.
- **Dotações:** a única dotação de cada indivíduo é uma unidade de tempo, que pode ser divida entre trabalho $n$ e lazer $l$.
- **Tecnologia:** $F(K, N)$ é duas vezes continuamente diferenciável, côncava e homogênea de grau 1. Além disso, $F(K, N)$ satisfaz as condições de Inada com respeito ao capital. Supomos que o produto da economia pode ser usado para consumo ou investimento, $y_t = c_t + i_t$, e que o capital se deprecia a uma taxa $\delta \in (0, 1)$, sem crescimento.
- **Incerteza:** o produto $y_t$ é dado por $y_t = A_t F(K_t, N_t)$, em que $A_t$ é um choque aleatório de produtividade, cuja lei de movimento é dada por $\ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t$, onde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ e $\rho \in (0, 1)$.

Tendo em vista as hipóteses acima, responda aos itens abaixo.

(a) Monte o problema do planejador central na versão sequencial e na versão recursiva. Obtenha as condições de primeira ordem do problema recursivo e monte o sistema de equações que permite caracterizar as funções políticas de capital, consumo e de oferta de trabalho

(b) Suponha que os consumidores sejam donos do estoque de capital e que façam três decisões inter-relacionadas: quanto trabalho oferecer $n$, quanto capital acumular $k'$ e quanto consumir $c$. Monte o problema do consumidor representativo na versão recursiva e o problema da firma. Defina um equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.

(c) Obtenha as condições de primeira ordem dos problemas do item 2. O que pode ser afirmado a respeito da conexão entre os problemas dos itens anteriores? Você pode apenas argumentar o que seria feito para demonstrar a equivalência entre os problemas.

(d) Suponha, agora, que exista um governo nessa economia e que ele cobra impostos sobre a renda do trabalho por meio de uma taxa $\tau$, que pode ser uma função do estado agregado. O governo pega essa receita e gasta com bens públicos que não geram utilidade diretamente para o agente representativo. Diante dessa alteração, repita o que foi feito no item (b).

(e) A alocação eficiente referente ao problema do item (d) coincidirá com as alocações do equilíbrio competitivo recursivo? Justifique. Algo mudaria se o governo transferisse a receita desses impostos por meio de uma transferência *lump-sum* ao invés de gastar em bens públicos?

# Exercício 2 (Oferta de trabalho e RBC sem capital - P1, 2023)

Suponha uma economia sem capital com um agente representativo com preferências descritas por

$$\sum_t \beta^t \left( C_t - \frac{N_t^{(1+\phi)}}{1+\phi} \right),$$

em que $N_t$ são horas trabalhadas e a produção é dada por

$$Y_t = Z_t N_t$$

e $Z_t$ é a uma sequência pré-determinada de TFP.

(a) Derive o efeito de equilíbrio de um choque de TFP sobre emprego, produto e a taxa de juros.

(b) O que acontece se houver crescimento de longo prazo de $Z_t$?

(c) Como preferências da forma

$$\log(C_t) - \frac{N_t^{(1+\phi)}}{1+\phi}$$

afetariam o resultado acima? Interprete.

(d) Em que medida o modelo com estas novas preferências teria sucesso e insucesso em replicar os fatos estilizados de RBC?

# Exercício 3 (Simulação de um RBC)

Em aula, vimos uma solução analítica para o seguinte modelo de RBC:

$$\max_{C_t,N_t,I_t} \mathbb{E} \sum \beta^t [\log C_t + \chi \log(1 - N_t)]$$

$$\text{s.a.} \quad C_t + I_t = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

$$K_{t+1} = I_t,$$

$$\ln z_t = \rho \ln z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1).$$

Ou seja, fizemos hipóteses específicas sobre a função utilidade e a depreciação completa do capital. Neste modelo, chegamos à representação do log do produto como um processo AR(2):

$$\log Y_{t+1} = (1-\rho)\,\Gamma + (\rho + \alpha) \log Y_t - \alpha\rho \log Y_{t-1} + \sigma\varepsilon_{t+1}$$

em que $\Gamma \equiv \alpha \log s + (1-\alpha) \log \bar{N}$ e $\log z_{t+1} = \rho \log z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}$. O código base para realização deste exercício se encontra na wiki.

(a) Compute as autocorrelações de primeira e segunda ordem do log do produto.

(b) Agora, volte ao modelo e veja como as variáveis se relacionam. Compute as autocorrelações de primeira ordem do consumo, investimento, horas trabalhadas, e TFP (resíduo de Solow). Use as variáveis em log.

(c) Compute o desvio padrão das variáveis do item anterior, assim como do produto. Discuta quanto da variação do (log do) produto é associada à variação de horas, estoque de capital e TFP (todas em logs). Dica: olhe para a função de produção, em logs.

(d) Como você interpretaria os resultados dos itens anteriores à luz dos fatos estilizados da literatura de *Real Business Cycles*?

# Exercício 4 (Uma economia estocástica)

Suponha a existência de um agente representativo, cuja função de utilidade é dada por:

$$u(c,l) = \frac{\left(c - \frac{l^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\rho}}{1-\rho}$$

em que $c$ denota o consumo, $l$ denota trabalho, $\rho > 0$ e $\theta > 0$ são parâmetros. O agente pode produzir bens de acordo com a função de produção $y = z\, l^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. Note que o agente enfrenta um choque de produtividade $z$ com CDF $\mathcal{Z}(z)$. Denote a média de $z$ por $\bar{z} = \int z d\mathcal{Z}(z)$. O produto é perecível e não pode ser poupado de um período para o outro.

(a) Escreva e resolva o problema de escolha do agente representativo, supondo que ele toma suas decisões após a realização do choque

(b) Como o choque $z$ influencia a oferta de trabalho?

(c) Escreva a função de utilidade do agente como função do choque $z$ (uma utilidade indireta). Escreva sua utilidade esperada.

(d) Suponha que $\rho = 0$. O agente prefere viver no mundo descrito acima ou num mundo em que a TFP é sempre constante e igual a $\bar{z}$? Qual a intuição para o seu resultado? (Dica: utilize a desigualdade de Jensen)

(e) Agora, suponha que $\rho$ é muito grande. Refaça o item anterior.

# Exercício 5 (RBC log-linearizado)

Considere o problema do planejador central de maximizar uma utilidade

$$\mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log(c_t) + \log(l_t)] \right\}$$

sujeita a uma restrição de recursos

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta) k_t \qquad k_0 \text{ dado}$$

e uma restrição de dotação de tempo

$$n_t + l_t = 1$$

Suponha que o logaritmo do choque tecnológico siga um processo AR(1):

$$\log(z_{t+1}) = \rho \log(z_t) + \varepsilon_t \qquad 0 < \rho < 1$$

onde $\{\varepsilon_{t+1}\}$ é um ruído branco Gaussiano, e realização inicial $z_0$ é dada.

(a) Derive as condições de primeira ordem que caracterizam as escolhas ótimas de consumo, emprego e formação de capital

(b) Suponha que os parâmetros do modelo são esses descritos na tabela abaixo.

| Símbolo | Nome | Valor |
|---|---|---|
| $\beta$ | fator de desconto | 0,99 |
| $\alpha$ | fatia do capital na produção | 0,33 |
| $\delta$ | depreciação do capital | 0,04 |
| $\rho$ | autocorrelação do choque de tecnologia | 0,95 |

Encontre o estado estacionário determinístico.

(c) Log-linearize o modelo em torno de seu *steady state* determinístico. Mostre que o modelo log-linearizado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &= AX_t + BX_{t-1} + CY_t + DZ_t \\ 0 &= \mathbb{E}_t\{FX_{t+1} + GX_t + HX_{t-1} + JY_{t+1} + KY_t + LZ_{t+1} + MZ_t\} \\ Z_{t+1} &= NZ_t + \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Encontre soluções que caracterizem cada um dos coeficientes $A, B, \ldots, N$. Nas equações acima, $X_t$ é um vetor de variáveis de estado endógenas, $Y_t$ contém as variáveis de controle, e $Z_t$ contém as variáveis de estado exógenas. Como parte da sua resposta, explicite quais variáveis estão contidas em $X_t, Y_t$ e $Z_t$.

# Exercício 6 (RBC com Governo)

Considere o seguinte problema do planejador central do modelo RBC, agora incorporando gastos do governo. Considere que os gastos do governo não fornecem utilidade e a taxação é feita de maneira *lump-sum* satisfazendo sua restrição orçamentária:

$$\max_{C_t, N_t, I_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \ln(C_t) + \frac{N_t^{1+(1/\eta)}}{1+(1/\eta)} \right]$$

s.a.

$$C_t + I_t + G_t = z_t\, K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = Y_t$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)\, K_t + I_t$$

$$\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

$$\ln(G_t) = (1-\rho_g)\ln(\bar{G}) + \rho_g \ln(G_{t-1}) + \sigma_g \epsilon_{gt}, \quad \epsilon_{gt} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

(a) Encontre as condições de primeira ordem para as famílias e para as firmas.

(b) Log-linearize o sistema de equações em diferenças não lineares que descrevem as alocações de equilíbrio dessa economia.

(c) Construa o diagrama de fases.

(d) Com o diagrama de fases e as equações log-linearizadas, analise os efeitos nas variáveis do modelo de um aumento transitório nos gastos do governo.

(e) Faça o mesmo para um aumento permanente dos gastos.