

Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves



Lista 11. Integração Dupla

Objetivos

- Compreender o conceito geométrico de integral dupla como volume sob uma superfície.
- Identificar regiões de integração dos tipos I e II no plano.
- Reescrever integrais duplas em diferentes ordens de integração.
- Calcular integrais duplas de funções polinomiais e não polinomiais simples.

Exercício 11.1.

Considere a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

onde R é a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x .
- (c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .
- (d) Calcule a integral para $f(x, y) = x + y$.

Exercício 11.2.

Considere a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

onde R é a região limitada pela semicircunferência superior centrada na origem e o eixo x .

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x .
- (c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .
- (d) Calcule a integral para $f(x, y) = x$ (em coordenadas cartesianas!).

Exercício 11.3.

Considere a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

onde R é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x + y = 2$.

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x .
- (c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .
- (d) Calcule a integral para $f(x, y) = xe^y$.

Exercício 11.4.

Considere a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

onde R é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 4 - x^2$.

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x .
- (c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .
- (d) Calcule a integral para $f(x, y) = x \cos(y + x^2)$.

Exercício 11.5.

Considere a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

onde R é a região limitada pela parábola $x = y^2 - 4$ e pela reta $x + y = 2$.

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .
- (c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x , se possível. Justifique.
- (d) Calcule a integral para $f(x, y) = \frac{1}{2 - y}$.

Exercício 11.6.

Considere a integral

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

onde R é a região limitada pelas parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = 8 - x$.

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x , se possível. Justifique.

(d) Calcule a integral para $f(x,y) = \frac{1}{xy^3}$.

Exercício 11.7.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y) dA,$$

onde R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 4 - x$ e $x - 3y = 0$.

- (a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.
- (b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x .
- (c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y .
- (d) Calcule a integral para $f(x,y) = xy$.

Exercício 11.8.

Calcule a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = x + 4$ e $y^2 = 4x - 11$.

Exercício 11.9.

Calcule o volume embaixo do sólido de equação $z = x^2y^2$ e acima do quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$.

Dica: Use a simetria da região e da função.