Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 6. Derivadas parciais

Objetivos

- Compreender o conceito de derivada parcial de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em relação a uma variável, mantendo as demais constantes.
- Interpretar geometricamente a derivada parcial como a taxa de variação da função ao longo de uma direção coordenada.
- Ser capaz de calcular derivadas parciais utilizando regras de diferenciação: soma, produto, quociente, cadeia, e derivadas de funções elementares.
- Aplicar as derivadas parciais ao estudo local do comportamento de funções de múltiplas variáveis.

Exercício 6.1.

Seja $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Calcular as derivadas parciais de f pela definição.

Solução.

Em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-((x+h)^2+y^2)}-e^{-(x^2+y^2)}}{h}$$

$$= e^{-(x^2+y^2)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{-(2xh+h^2)}-1}{h} = e^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2x) = -2xe^{-(x^2+y^2)}.$$

Em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}.$$

□

Exercício 6.2.

Calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ para a função do Exemplo 6.7:

$$h(x,y) = \cos(x^2+y)+\sin(xy).$$

Solução.

Primeiro, escrevemos:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos(x^2+y)+\sin(xy)\right]$$

Derivando cada termo separadamente:
Para o termo $\cos(x^2+y)$, usamos a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial y}\cos(x^2+y) = -\sin(x^2+y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y)$$

Como x^2 é constante em relação a y, temos $\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) = 1$, então:

$$= -\sin(x^2+y)$$

Para o termo $\sin(xy)$, também aplicamos a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin(xy) = \cos(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy)$$

Como $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$, resulta:

$$= x\cos(xy)$$

Assim, juntando tudo:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\sin(x^2+y) + x\cos(xy)}$$

□

Exercício 6.3.

Calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ para a função do Exemplo 6.8:

$$h(x,y) = \ln\left((x+y)^2 + (xy)^2\right).$$

Solução.

Usamos a regra da cadeia para o logaritmo:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2+(xy)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)^2+(xy)^2\right]$$

Derivando $(x+y)^2$ em relação a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2 = 2(x+y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 2(x+y)\cdot 1 = 2(x+y)$$

Derivando $(xy)^2$ em relação a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy)^2 = 2xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) = 2xy\cdot x = 2x^2y$$

Somando as derivadas:

$$2(x+y) + 2x^2y$$

Assim,

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{2(x+y)+2x^2y}{(x+y)^2+(xy)^2}}$$

□

Exercício 6.4.

Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

(a) $f(x,y) = y^5 - 3xy$

(b) $z = (2x+3y)^{10}$

(c) $w = \ln(x+2y+3z)$

(d) $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Solução.

(a) $f_x(x,y) = 0 - 3y = -3y, \quad f_y(x,y) = 5y^4 - 3x.$

(b) $\frac{\partial z}{\partial x} = 10(2x+3y)^9 \cdot 2 = 20(2x+3y)^9, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 10(2x+3y)^9 \cdot 3 = 30(2x+3y)^9.$

(c) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x+2y+3z}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2}{x+2y+3z}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3}{x+2y+3z}.$

(d) Para cada $i = 1, \ldots, n, \quad u_{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-1/2}(2x_i) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}.$

□

Exercício 6.5.

Para cada uma das funções a seguir, responda aos itens:

(a) Calcule suas derivadas parciais.

(b) Determine o domínio da função e das suas derivadas parciais. Compare.

(c) Determine a imagem da função e das suas derivadas parciais. Compare.

Funções:

(1) $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2-y^2}}{2x}$

(2) $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

(3) $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$

(4) $k(x,y,z) = \dfrac{\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2}$

Solução.

1. **Para** $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2-y^2}}{2x}$

   (a) **Derivadas parciais:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{x^2-y^2}}{2x}\right)$$

Usando a regra do quociente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xe^{x^2-y^2}\cdot 2x - e^{x^2-y^2}\cdot 2}{(2x)^2}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\cdot 2xe^{x^2-y^2} - 2e^{x^2-y^2}}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2e^{x^2-y^2} - 2e^{x^2-y^2}}{4x^2} = \frac{e^{x^2-y^2}(4x^2-2)}{4x^2}$$

$$= e^{x^2-y^2}\frac{2x^2-1}{2x^2}$$

Agora, a parcial em y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2-y^2}\right) = \frac{1}{2x}\cdot e^{x^2-y^2}\cdot(-2y)$$

$$= -\frac{y}{x}e^{x^2-y^2}$$

   (b) **Domínio:**

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

As derivadas parciais têm o mesmo domínio, pois também há divisão por x:

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = D_f$$

Assim, os domínios coincidem.

(c) **Imagem:** Como $e^{x^2-y^2} > 0$ para todo x, y, o valor de f pode ser qualquer valor real não-nulo, visto que x pode ser negativo ou positivo pequeno/grande, e y livre:

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$$

As derivadas parciais também podem assumir qualquer valor real, pois não há barreira para seus valores conforme varia x, y.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}$$

Imagens também coincidem.

2. **Para** $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

(a) **Derivadas parciais:**

Para x:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xyx^2 + 2xyy^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xyy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Para y:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2x^2 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

(b) **Domínio:**

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

As derivadas parciais são definidas para o mesmo domínio, pois o denominador é $(x^2+y^2)^2$:

$$D_{\frac{\partial g}{\partial x}} = D_{\frac{\partial g}{\partial y}} = D_g$$

Domínios coincidem.

(c) **Imagem:** O valor de $g(x,y)$ pode ser arbitrariamente grande em módulo, tomando, por exemplo, y grande e fixando x, ou $x \neq 0$ e $y \to 0$. A imagem é, portanto:

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R}$$

As derivadas parciais possuem as seguintes imagens:

$$\text{Im}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \mathbb{R}, \qquad \text{Im}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = [-1,1]$$

3. **Para** $h(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$

(a) **Derivadas parciais:**

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}, \qquad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$$

(b) **Domínio:** Como o radicando é sempre maior ou igual a 1, temos domínio em todo $\mathbb{R}^3$:

$$D_h = \mathbb{R}^3$$

As derivadas parciais também estão definidas em todo $\mathbb{R}^3$.

$$D_{\frac{\partial h}{\partial x}} = D_{\frac{\partial h}{\partial y}} = D_{\frac{\partial h}{\partial z}} = D_h$$

(c) **Imagem:** O menor valor de h é quando $x = y = z = 0$:

$$h(0,0,0) = 1$$

Para valores arbitrariamente grandes de x, y, z, h tende ao infinito.

$$\mathrm{Im}(h) = [1, +\infty[$$

As derivadas parciais estão limitadas: Para (x, y, z) grandes e positivos (negativos), o numerador se aproxima de 1 (-1), portanto

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = (-1,1)$$

4. **Para** $k(x,y,z) = \frac{\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2}$

(a) **Derivadas parciais:** Seja $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x} &= \frac{\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}(x^2+y^2+z^2) - \ln(x^2+y^2+z^2+1)\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{2x(x^2+y^2+z^2) - 2x\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)(x^2+y^2+z^2)} \\
&= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}\left(1 - \frac{\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2}\right)
\end{aligned}$$

As demais derivadas parciais seguem o mesmo padrão trocando x por y ou z.

(b) **Domínio:**

$$D_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \neq 0\}$$

Ou seja, todos exceto a origem. As derivadas parciais têm o mesmo denominador nulo na origem, então:

$$D_{\frac{\partial k}{\partial x}} = D_{\frac{\partial k}{\partial y}} = D_{\frac{\partial k}{\partial z}} = D_k$$

(c) **Imagem:** Para $x^2+y^2+z^2$ tendendo a zero:

$$k(x,y,z) \longrightarrow 1$$

Para $x^2+y^2+z^2$ grande,

$$k \longrightarrow 0$$

Logo,

$$D_k = (0,1)$$

As derivadas parciais podem assumir:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial k}{\partial y}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial k}{\partial z}\right) = (-1,1)$$

□

Exercício 6.6.

Cobb e Douglas usaram a equação $P(L,K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$ para o modelo de economia norte-americana de 1899 a 1922, onde L é a quantidade de trabalho e K, a quantidade de capital.

(a) Calcule $P_L = \frac{\partial P}{\partial L}$ e $P_K = \frac{\partial P}{\partial K}$.

(b) Encontre a produtividade marginal de trabalho e a produtividade marginal de capital no ano de 1920, quando $L = 194$ e $K = 407$ (em comparação com os valores atribuídos $L = 100$ e $K = 100$ em 1899). Interprete os resultados considerando que que P, L e K são expressos em porcentagem em relação a 1899.

(c) No ano de 1920, o que trouxe mais benefícios para a produção: um aumento no capital de investimento ou um aumento nos gastos com mão de obra?

Solução.

(a)

$$P(L,K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

Assim,

$$P_L(L,K) = 1{,}01\left(0{,}75L^{-0{,}25}\right)K^{0{,}25} = 0{,}7575L^{-0{,}25}K^{0{,}25}$$

e

$$P_K(L,K) = 1{,}01L^{0{,}75}\left(0{,}25K^{-0{,}75}\right) = 0{,}2525L^{0{,}75}K^{-0{,}75}$$

(b) A produtividade marginal do trabalho em 1920 é

$$P_L(194,407) = 0{,}7575 \times (194)^{-0{,}25} \times (407)^{0{,}25} \approx 0{,}912$$

Lembrando que P, L e K são expressos em porcentagem em relação a 1899, isso significa que, em 1920, se a quantidade de trabalho aumentar, a produção aumenta a uma taxa de aproximadamente 0,912 pontos percentuais por ponto percentual de aumento no trabalho.

A produtividade marginal do capital em 1920 é

$$P_K(194,407) = 0{,}2525 \times (194)^{0{,}75} \times (407)^{-0{,}75} \approx 0{,}145$$

Portanto, um aumento no capital leva a produção a aumentar a uma taxa de cerca de 0,145 pontos percentuais por ponto percentual de aumento no capital.

(c) O valor de $P_L(194,407)$ é maior que o valor de $P_K(194,407)$, sugerindo que, em 1920, aumentar a mão de obra teria aumentado a produção mais do que aumentar o capital.

□