Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 7. Derivação Implícita

Objetivos

- Compreender o conceito de funções definidas implicitamente.
- Aplicar a regra da cadeia para derivar equações onde y não está isolada.
- Encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ usando derivação implícita em equações cartesianas.
- Determinar a inclinação da reta tangente a curvas implícitas.
- Resolver problemas aplicados envolvendo derivação implícita (ex: circunferência, elipse, etc.).

Exercício 7.1.

Considere a Lemnicata de Bernoulli dada pela equação:

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Use o Teorema da Função Implícita para calcula a taxa de variação de x em relação a y no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Solução.

Definindo a função:

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)$$

Pelo Teorema da Função Implícita:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 2x = 4x(x^2+y^2) - 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2)^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) = 2(x^2+y^2)\cdot 2y + 2y = 4y(x^2+y^2) + 2y$$

No ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

Portanto:

$$\frac{dx}{dy}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\frac{7\sqrt{2}}{8}}{-\frac{1}{4}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

□

Exercício 7.2.

Considere a esfera dada pela equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Use o Teorema da Função Implícita para calcular a taxa de variação de x em função de y e de z no ponto $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solução.

Defina: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Calculando as derivadas parciais:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \qquad F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

No ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\quad F_x = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad F_y = 2 \cdot 0 = 0, \quad F_z = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

□

Exercício 7.3.

Encontre $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita, assumindo que $y = f(x)$ está definida implicitamente por cada equação abaixo.

(a) $x^2 + y^2 = 25$

(b) $x^3 + y^3 = 6xy$

(c) $\sin(xy) + x^2 = y$

(d) $e^y + x^2 y = x$

(e) $\ln(xy) = x + y$

Solução.

(a) $x^2 + y^2 = 25$

Derivando ambos os lados:

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$2y\frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

(b) $x^3 + y^3 = 6xy$

Derivando ambos os lados:

$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6y + 6x\frac{dy}{dx}$

$3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$

$(3y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$

(c) $\sin(xy) + x^2 = y$

Derivando ambos os lados:

$\cos(xy) \cdot (y + x\frac{dy}{dx}) + 2x = \frac{dy}{dx}$

$\cos(xy)y + \cos(xy)x\frac{dy}{dx} + 2x = \frac{dy}{dx}$

$\cos(xy)x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -\cos(xy)y - 2x$

$(\cos(xy)x - 1)\frac{dy}{dx} = -\cos(xy)y - 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(xy)y-2x}{\cos(xy)x-1} = \frac{2x+y\cos(xy)}{1+x\cos(xy)}$

(d) $e^y + x^2y = x$

Derivando ambos os lados:

$e^y\frac{dy}{dx} + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 1$

$(e^y + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$

$(e^y + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy}{e^y+x^2}$

(e) $\ln(xy) = x + y$

Derivando ambos os lados:

$\frac{1}{xy}(y + x\frac{dy}{dx}) = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\frac{y+x\frac{dy}{dx}}{xy} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\frac{y}{xy} + \frac{x\frac{dy}{dx}}{xy} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{1}{x} - 1 = \left(1 - \frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{y}} = \frac{y(1-x)}{x(y-1)}$$

□

Exercício 7.4.

Encontre as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, assumindo que z está definida implicitamente em função de x e y por cada equação abaixo.

(a) $x^2+y^2+z^2=1$

(b) $x^2z+y^2=z^3$

(c) $\sin(xz)+\cos(yz)=0$

(d) $e^{xz}+y^2z=x+y$

(e) $\ln(z)+x^2+y^2=xyz$

Solução.

(a) $x^2+y^2+z^2=1$

Derivando em relação a x : $\quad 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \implies \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$

Derivando em relação a y : $\quad 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \implies \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

(b) $x^2z+y^2=z^3$

Derivando em relação a x : $\quad 2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x} = 3z^2\frac{\partial z}{\partial x}$

$\implies 2xz = \frac{\partial z}{\partial x}(3z^2-x^2) \implies \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xz}{3z^2-x^2}$

Derivando em relação a y : $\quad x^2\frac{\partial z}{\partial y}+2y = 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} \implies 2y = \frac{\partial z}{\partial y}(3z^2-x^2)$

$\implies \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3z^2-x^2}$

(c) $\sin(xz)+\cos(yz)=0$

Derivando em relação a x : $\quad \cos(xz)\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \sin(yz)\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$

$\implies \cos(xz)z+\cos(xz)x\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(yz)y\frac{\partial z}{\partial x}$

$\implies \cos(xz)z = \frac{\partial z}{\partial x}(\sin(yz)y-\cos(xz)x)$

$\implies \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(xz)z}{\sin(yz)y-\cos(xz)x}$

Derivando em relação a y : $\quad \cos(xz)\left(x\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \sin(yz)\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$

$\Longrightarrow \cos(xz)x\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(yz)z + \sin(yz)y\frac{\partial z}{\partial y}$
$\Longrightarrow 0 = \sin(yz)z + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\sin(yz)y - \cos(xz)x\right)$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\sin(yz)z}{\sin(yz)y-\cos(xz)x}$

(d) $e^{xz} + y^2z = x + y$

Derivando em relação a x : $\quad e^{xz}\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y^2\frac{\partial z}{\partial x} = 1$
$\Longrightarrow e^{xz}z + \frac{\partial z}{\partial x}\left(e^{xz}x + y^2\right) = 1$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-e^{xz}z}{e^{xz}x+y^2}$

Derivando em relação a y : $\quad e^{xz}\left(x\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2yz + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$
$\Longrightarrow 2yz + \frac{\partial z}{\partial y}\left(e^{xz}x + y^2\right) = 1$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-2yz}{e^{xz}x+y^2}$

(e) $\ln(z) + x^2 + y^2 = xyz$

Derivando em relação a x : $\quad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + 2x = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$
$\Longrightarrow \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial x} = yz - 2x$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{1}{z} - xy\right) = yz - 2x$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz-2x}{\frac{1}{z}-xy} = \frac{z(yz-2x)}{1-xyz}$

Derivando em relação a y : $\quad \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} + 2y = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$
$\Longrightarrow \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz - 2y$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{1}{z} - xy\right) = xz - 2y$
$\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz-2y}{\frac{1}{z}-xy} = \frac{z(xz-2y)}{1-xyz}$

□

Exercício 7.5.

Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente na equação $2x^2 + y^3 + y - 6 = 3xy$ no ponto $(1,2)$.

Solução.

Derivando ambos os lados em relação a x:

$$4x + 3y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 3y + 3x\frac{dy}{dx}$$

$$\left(3y^2+1-3x\right)\frac{dy}{dx}=3y-4x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-4x}{3y^2+1-3x}$$

No ponto $(1,2)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot 2-4\cdot 1}{3\cdot 2^2+1-3\cdot 1}=\frac{6-4}{12+1-3}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

□

Exercício 7.6.

Encontre a equação da reta tangente à curva de equação $x^2+y^2+\ln(xy)=10$ no ponto (1,3).

Solução.

Derivando ambos os lados em relação a x:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy}(y+x\frac{dy}{dx})=0$$

$$\left(2y+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-2x-\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-\frac{1}{x}}{2y+\frac{1}{y}}$$

No ponto $(1,3)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2(1)-\frac{1}{1}}{2(3)+\frac{1}{3}}=\frac{-2-1}{6+\frac{1}{3}}=\frac{-3}{\frac{19}{3}}=-\frac{9}{19}$$

A equação da reta tangente é: $y-3=m(x-1)\implies y=-\frac{9}{19}(x-1)+3$

□

Exercício 7.7.

A taxa marginal de substituição (TMS) entre dois bens mede a taxa pela qual o consumidor está disposto a trocar um bem por outro, de modo a manter a sua utilidade inalterada. Calcule a TMS do bem 1 pelo bem 2 das seguintes funções utilidade:

(a) Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

(b) Linear (Substitutos Perfeitos): $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad a, b > 0$

(c) Leontief (Complementares Perfeitos): $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}, \quad a, b > 0$

(d) CES (Elasticidade de Substituição Constante): $u(x_1, x_2) = \left(ax_1^\rho + bx_2^\rho\right)^{1/\rho}$, com $a, b > 0$.

Solução.

(a) Função Cobb-Douglas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$$

As utilidades marginais são:

$$MU_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta$$

$$MU_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}$$

Portanto, a TMS do bem 1 pelo bem 2 é:

$$TMS = -\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = -\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

(b) Função Linear (Substitutos Perfeitos):

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad a, b > 0$$

$$MU_{x_1} = a, \quad MU_{x_2} = b$$

$$TMS = -\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = -\frac{a}{b}$$

(c) Função Leontief (Complementares Perfeitos):

$$u(x_1,x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}, \quad a,b > 0$$

Neste caso, a TMS não é definida de forma contínua. O consumidor troca os bens na proporção fixa:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b}$$

Ou seja, a TMS é infinita ou zero, exceto nessa razão fixa.

(d) Função CES (Elasticidade de Substituição Constante):

$$u(x_1,x_2) = \left(ax_1^\rho + bx_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad a,b > 0, \rho \neq 0$$

$$MU_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \left(ax_1^\rho + bx_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} a\rho x_1^{\rho-1}$$

$$MU_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \left(ax_1^\rho + bx_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} b\rho x_2^{\rho-1}$$

$$TMS = -\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = -\frac{ax_1^{\rho-1}}{bx_2^{\rho-1}} = -\frac{a}{b}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}$$

□