Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 8. Derivada Direcional

Objetivos

- Compreender o conceito de derivada direcional como generalização da derivada parcial.
- Interpretar geometricamente a derivada direcional como taxa de variação de uma função em uma direção específica.
- Calcular derivadas direcionais utilizando o gradiente.
- Relacionar a derivada direcional ao vetor gradiente e sua direção de crescimento máximo.
- Resolver exercícios aplicados envolvendo derivadas direcionais em funções de duas e três variáveis.

Exercício 8.1.

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, onde $\vec{v} = (a,b)$ é um vetor unitário dado, e verifique que, em geral,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \;\neq\; f_x(0,0)\,a + f_y(0,0)\,b.$$

Solução.

Pela definição de derivada direcional, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+at, 0+bt) - f(0,0)}{t}.$$

Se $(a,b) \neq (0,0)$, o ponto $(at,bt) \neq (0,0)$ para $t \neq 0$, e então

$$f(at,bt) = \frac{(bt)^3}{(at)^2+(bt)^2} = \frac{b^3t^3}{(a^2+b^2)t^2} = \frac{b^3}{a^2+b^2}\,t.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{b^3}{a^2+b^2}\,t}{t} = \frac{b^3}{a^2+b^2}.$$

Como $\vec{v} = (a,b)$ é unitário, temos $a^2+b^2 = 1$, logo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = b^3.$$

Entretanto, se calculamos as derivadas parciais no ponto $(0,0)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^3}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,a + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,b = 0 \cdot a + 1 \cdot b = b.$$

o que em geral é diferente de $b^3 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, exceto nos casos $b = 0$ ou $b = \pm 1$.

Esse exemplo mostra que a mera existência das derivadas parciais em um ponto não garante que a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \vec{v} \rangle.$$

seja válida. □

Exercício 8.2.

Calcule a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2y + y^3$ no ponto $(1,2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (3,4)$.

Solução.

Note que $f(x,y) = x^2y + y^3$ é diferenciável em relação a x e a y, logo a derivada direcional de uma função f na direção de um vetor unitário $\vec{u}$ é dada por $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy,\, x^2 + 3y^2)$$

$$\nabla f(1,2) = (2 \cdot 1 \cdot 2,\, 1^2 + 3 \cdot 2^2) = (4,13)$$

$$\vec{v} = (3,4), \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$D_{\vec{u}}f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \vec{u} = (4,13) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{4 \cdot 3 + 13 \cdot 4}{5} = \frac{64}{5}.$$

□

Exercício 8.3.

Seja $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

(a) Determine, no ponto $(1,-1)$, a direção de maior crescimento de f.

(b) Qual é a taxa de variação máxima nesse ponto?

Solução.

(a) Seja $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, a direção de maior crescimento é dada por $\nabla f(1,-1)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x\, e^{x^2+y^2}, 2y\, e^{x^2+y^2}\right)$$

$$\nabla f(1,-1) = \left(2 \cdot 1\, e^{1^2+(-1)^2}, 2 \cdot (-1)\, e^{1^2+(-1)^2}\right) = \left(2e^2, -2e^2\right)$$

(b) A taxa de variação máxima nesse ponto é dada por

$$\|\nabla f(1,-1)\| = \sqrt{(2e^2)^2 + (-2e^2)^2} = 2\sqrt{2}\, e^2.$$

□

Exercício 8.4.

Encontre a equação da reta tangente à curva dada implicitamente por $x^2 + xy + y^2 = 3$ no ponto $(1,1)$.

Solução.

Seja $x^2 + xy + y^2 = 3$, diferenciando implicitamente:

$$2x + (x\,y' + y) + 2y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\text{No ponto } (1,1): \quad y'(1,1) = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\text{Equação da reta tangente:} \quad y - 1 = -1\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 2.$$

□

Exercício 8.5.

Encontre a equação do plano tangente ao cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.

Solução.

Escreva implicitamente a superfície: $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. O vetor gradiente é o vetor perpendicular à essa superfície:

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -2z).$$

No ponto $P = (1,1,\sqrt{2})$: $\quad \nabla F(P) = (2, 2, -2\sqrt{2})$.
Equação do plano tangente pode ser escrita como $\nabla F(P) \cdot \big((x,y,z) - P\big) = 0$.

$$2(x-1) + 2(y-1) - 2\sqrt{2}\,(z - \sqrt{2}) = 0.$$

Dividindo por 2 e simplificando:

$$(x-1) + (y-1) - \sqrt{2}\,z + \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 0 \implies x + y - \sqrt{2}\,z = 0.$$

□

Exercício 8.6.

Uma empresa produz um bem com base em uma função de produção Cobb-Douglas, dada por:

$$f(L,K) = 20L^{0.5}K^{0.5}$$

onde L representa a quantidade de trabalho (em horas) e K representa a quantidade de capital (em horas de máquina). Atualmente, a empresa opera com $L = 9$ e $K = 16$.

(a) Calcule a derivada direcional da função de produção no ponto $(9,16)$ na direção do vetor $\vec{v} = (3,4)$. Interprete o resultado.

(b) Determine a direção em que a produção cresce mais rapidamente nesse ponto. Qual é a taxa de crescimento máxima?

Solução.

(a) A derivada direcional de uma função f na direção de um vetor unitário $\vec{u}$ é dada por $D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$.

O gradiente é o vetor das derivadas parciais:

$$\nabla f(L,K) = \left(\frac{\partial f}{\partial L}, \frac{\partial f}{\partial K}\right) = \left(10\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}, 10\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K}}\right)$$

Substituindo $L = 9$ e $K = 16$:

$$\nabla f(9,16) = \left(10\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}, 10\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}\right) = \left(\frac{40}{3}, \frac{15}{2}\right)$$

O vetor $\vec{v} = (3,4)$ precisa ser normalizado para um vetor unitário $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

A derivada direcional é o produto escalar do gradiente pelo vetor unitário:

$$D_{\vec{u}} f(9,16) = \nabla f(9,16) \cdot \vec{u} = \left(\frac{40}{3}, \frac{15}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{120}{15} + \frac{60}{10} = 14$$

Interpretação: O valor 14 significa que, se a empresa aumentar o trabalho e o capital na proporção do vetor (3,4), a produção aumentará a uma taxa de 14 unidades por unidade de distância percorrida nessa direção.

(b) A direção de maior crescimento é a direção do vetor gradiente no ponto (9,16), que é $\nabla f(9,16) = \left(\frac{40}{3}, \frac{15}{2}\right)$.

A taxa máxima de crescimento é a magnitude do vetor gradiente:

$$||\nabla f(9,16)|| = \left\|\left(\frac{40}{3}, \frac{15}{2}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{8425}}{6} \approx \frac{91.79}{6} \approx 15.298$$

A taxa de crescimento máxima da produção no ponto (9,16) é aproximadamente 15.3 unidades por unidade de distância percorrida na direção ideal.

□