1 Exemplo motivador

Uma árvore de Lucas em um economia simples

Suponha uma economia com um único agente, cujo consumo vem de uma única árvore presente. O tempo é discreto e o horizonte finito, com $t \in \{0,1\}$. Em $t=1$, um entre dois estados é realizado. Ou seja, $s \in \{s_h, s_l\}$.

No estado s_h, a produção da árvore é maior. Em particular, temos que a dotação do agente (gerada pela árvore) é de $e_h = 2$ e $e_l = 1$. Em $t = 0$, $e_0 = \frac{3}{2}$.

Existem dois ativos financeiros que podem ser transacionados. O agente pode comprar ações da árvore, que pagam $x_h^a = 2$ e $x_l^a = 1$. Ou seja, uma ação é o direito sobre todo o fruto gerado por uma árvore idêntica à (única) que existe nesta economia. Há também um ativo livre de risco, cujos payoffs são $x_h^f = x_l^f = 1$. Os ativos são negociados aos preços p^a e p^f.

Logo, usando a notação dos slides, temos

$$P = \begin{pmatrix} p^a \\ p^f \end{pmatrix}$$

e

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O problema do agente pode ser escrito como

$$\max u(c_0) + \beta \left[\pi_h u(c_h) + \pi_l u(c_l)\right]$$

s.a.

$$c_0 = e_0 - p^a\theta^a - p^f\theta^f$$
$$c_h = e_h + 2\theta^a + \theta^f$$
$$c_l = e_l + \theta^a + \theta^f.$$

As equações de Euler são então

$$p^a = \frac{\pi_h \beta u'(c_h)}{u'(c_0)} 2 + \frac{\pi_l \beta u'(c_l)}{u'(c_0)}$$

e

$$p^f = \frac{\pi_h \beta u'(c_h)}{u'(c_0)} + \frac{\pi_l \beta u'(c_l)}{u'(c_0)}.$$

Daqui, já podemos ver que os preços de estado são

$$q_h = \frac{\pi_h \beta u'(c_h)}{u'(c_0)} \qquad e \qquad q_l = \frac{\pi_l \beta u'(c_l)}{u'(c_0)},$$

porque para cada um dos dois ativos temos a regra de apreçamento linear

$$p^j = \sum q_s x_s^j,$$

com o par de preços de acima sendo a única solução. Porém, até aqui, as equações de Euler e os preços de estado ainda dependem do consumo que não está determinado (o consumo depende implicitamente do portifólio ótimo – então, até aqui temos apenas algumas condições necessárias para o equilíbrio).

Note, no entanto, que as equações de Euler se originam de um problema de determinação de consumo e portifólios ótimos, dados os preços de equilíbrio. Seu uso em modelos de apreçamento de ativos se baseia em alguma condição que nos permita determinar o consumo primeiro, para aí termos uma teoria sobre a formação de preços.

Market-clearing Nos exemplos a la árvore de Lucas, a determinação do consumo se baseia em alguma condição de ausência de transações ("no trade"). Fazemos o seguinte. No problema do agente acima θ^f e θ^a são as demandas líquidas do agente por transações.

Mas, em uma economia de agente representativo ou mesmo uma economia de agentes idênticos, market clearing exige

$$\theta^a = \theta^f = 0.$$

Daqui segue que $c_i = e_i$, para $i = \{0, h, l\}$. Ou seja, o consumo de equilíbrio é a própria dotação.

Preços de ativos e preços de estado Com isso, obtemos

$$p^a = \frac{\pi_h \beta u^{'}(e_h)}{u^{'}(e_0)} 2 + \frac{\pi_l \beta u^{'}(e_l)}{u^{'}(e_0)},$$

$$p^f = \frac{\pi_h \beta u^{'}(e_h)}{u^{'}(e_0)} + \frac{\pi_l \beta u^{'}(e_l)}{u^{'}(e_0)}.$$

e os preços de estado

$$q_h = \frac{\pi_h \beta u^{'}(e_h)}{u^{'}(e_0)} \qquad e \qquad q_l = \frac{\pi_l \beta u^{'}(e_l)}{u^{'}(e_0)}.$$

Finalmente, temos a determinação completa (em função apenas de variáveis exógenas) dos preços de ativo e preços de estado de equilíbrio. Podemos, inclusive, fazer as substituições do exemplo, com $e_0 = \frac{3}{2}$, $e_h = 2$ e $e_l = 1$.

Lições gerais Aqui temos um exemplo de apreçamento baseado em consumo usando um agente representativo e um consumo ótimo que coincide com a dotação (pois não há trocas).

No entanto, qualquer consumo que seja identificado como ótimo nos permite o uso de equação de Euler como uma equação que determina preços em função do comportamento do consumo. Trabalharemos com esta ideia ao longo desta parte do curso.