Método dos Coeficientes Indeterminados
Resolvendo o Modelo RBC

Felipe Iachan

FGV EPGE

Macroeconomia II, MD,
12 de agosto de 2025

Motivação: Por que Métodos de Solução?

Problema: Temos um sistema log-linearizado, mas ainda precisamos resolvê-lo.
Do nosso modelo RBC log-linearizado:

$$E_t[\hat{C}_{t+1}] - \hat{C}_t = \frac{1}{\sigma} E_t[\hat{r}_{t+1}] \tag{1}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t \tag{2}$$

$$s_C \hat{C}_t + s_I \hat{I}_t = \hat{Y}_t \tag{3}$$

$$\hat{K}_{t+1} = (1-\delta)\hat{K}_t + \delta \hat{I}_t \tag{4}$$

$$\hat{z}_{t+1} = \rho \hat{z}_t + \sigma_z \epsilon_{t+1} \tag{5}$$

Queremos: Funções políticas que expressem variáveis endógenas em função dos estados.

Método dos Coeficientes Indeterminados

Ideia central: **"Guess and Verify"**

1. Conjecturar forma funcional das políticas ótimas
2. Substituir nas condições de equilíbrio
3. Igualar coeficientes para determinar parâmetros
4. Verificar que a solução satisfaz todas as condições

Vantagens:

- Simples e intuitivo
- Solução em forma fechada (quando funciona)
- Fácil implementação computacional

Limitação: Precisa "adivinhar"a forma correta!

Estrutura do Modelo RBC Log-Linearizado

Variáveis de estado: $\hat{K}_t$, $\hat{z}_t$
Variáveis de controle: $\hat{C}_t$, $\hat{I}_t$, $\hat{L}_t$
Variáveis auxiliares: $\hat{Y}_t$, $\hat{r}_t$
Intuição: Toda variável endógena deve depender apenas dos estados:

$$\text{Variável endógena}_t = f(\hat{K}_t, \hat{z}_t)$$

Por que linear? O sistema foi log-linearizado, então esperamos funções políticas lineares nos estados.

Conjectura: Funções Políticas Lineares

Hipótese central: Funções políticas são lineares nos estados.

$$\hat{C}_t = \psi_{C,K}\hat{K}_t + \psi_{C,z}\hat{z}_t \tag{6}$$
$$\hat{I}_t = \psi_{I,K}\hat{K}_t + \psi_{I,z}\hat{z}_t \tag{7}$$
$$\hat{L}_t = \psi_{L,K}\hat{K}_t + \psi_{L,z}\hat{z}_t \tag{8}$$
$$\hat{Y}_t = \psi_{Y,K}\hat{K}_t + \psi_{Y,z}\hat{z}_t \tag{9}$$

Objetivo: Determinar os 8 coeficientes $\psi_{i,j}$.

Nota: $\hat{K}_{t+1}$ será determinado pela acumulação de capital.

Passo 1: Usar a Função de Produção

Da função de produção:

$$\hat{Y}_t = \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t$$

Substituindo nossa conjectura para $\hat{L}_t$:

$$\hat{Y}_t = \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)(\psi_{L,K}\hat{K}_t + \psi_{L,z}\hat{z}_t)$$

Reorganizando:

$$\hat{Y}_t = [\alpha + (1-\alpha)\psi_{L,K}]\hat{K}_t + [1 + (1-\alpha)\psi_{L,z}]\hat{z}_t$$

Comparando com nossa conjectura $\hat{Y}_t = \psi_{Y,K}\hat{K}_t + \psi_{Y,z}\hat{z}_t$:
Equações 1-2:

$$\psi_{Y,K} = \alpha + (1-\alpha)\psi_{L,K} \tag{10}$$

$$\psi_{Y,z} = 1 + (1-\alpha)\psi_{L,z} \tag{11}$$

Passo 2: Usar a Restrição de Recursos

Da restrição de recursos:

$$s_C \hat{C}_t + s_I \hat{I}_t = \hat{Y}_t$$

Substituindo nossas conjecturas:

$$s_C(\psi_{C,K}\hat{K}_t + \psi_{C,z}\hat{z}_t) + s_I(\psi_{I,K}\hat{K}_t + \psi_{I,z}\hat{z}_t) \tag{12}$$

$$= \psi_{Y,K}\hat{K}_t + \psi_{Y,z}\hat{z}_t \tag{13}$$

Igualando coeficientes:
Equações 3-4:

$$s_C\psi_{C,K} + s_I\psi_{I,K} = \psi_{Y,K} \tag{14}$$

$$s_C\psi_{C,z} + s_I\psi_{I,z} = \psi_{Y,z} \tag{15}$$

Passo 3: Derivar a Condição Trabalho-Lazer

Condição intratemporal: Da otimização da família,

$$\frac{u_L(C_t, 1-L_t)}{u_C(C_t, 1-L_t)} = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

Para utilidade com trabalho aditivo: $u(C, L) = \log C - \chi \frac{L^{1+\zeta}}{1+\zeta}$

$$\frac{\chi L_t^{\zeta}}{C_t^{-1}} = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}$$

Log-linearizando em torno do estado estacionário:

$$\zeta \hat{L}_t + \hat{C}_t = \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t - \alpha \hat{L}_t$$

Simplificando:

$$(\zeta + \alpha)\hat{L}_t + \hat{C}_t = \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t$$

Passo 4: Condição Trabalho-Lazer com Conjecturas

Da condição trabalho-lazer:

$$(\zeta + \alpha)\hat{L}_t + \hat{C}_t = \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t$$

Substituindo nossas conjecturas:

$$(\zeta + \alpha)(\psi_{L,K}\hat{K}_t + \psi_{L,z}\hat{z}_t) + (\psi_{C,K}\hat{K}_t + \psi_{C,z}\hat{z}_t) \tag{16}$$

$$= \alpha \hat{K}_t + \hat{z}_t \tag{17}$$

Igualando coeficientes:
Equações 5-6:

$$(\zeta + \alpha)\psi_{L,K} + \psi_{C,K} = \alpha \tag{18}$$

$$(\zeta + \alpha)\psi_{L,z} + \psi_{C,z} = 1 \tag{19}$$

Passo 5: Acumulação de Capital

Da acumulação de capital:

$$\hat{K}_{t+1} = (1-\delta)\hat{K}_t + \delta \hat{I}_t$$

Substituindo nossa conjectura para $\hat{I}_t$:

$$\hat{K}_{t+1} = (1-\delta)\hat{K}_t + \delta(\psi_{I,K}\hat{K}_t + \psi_{I,z}\hat{z}_t)$$

Reorganizando:

$$\hat{K}_{t+1} = [(1-\delta) + \delta\psi_{I,K}]\hat{K}_t + \delta\psi_{I,z}\hat{z}_t$$

Esta é a lei de movimento do capital que usaremos na Equação de Euler.

Passo 6: Preparação da Equação de Euler

Da Equação de Euler:

$$E_t[\hat{C}_{t+1}] - \hat{C}_t = \frac{1}{\sigma} E_t[\hat{r}_{t+1}]$$

Para o consumo:

$$\begin{aligned} E_t[\hat{C}_{t+1}] &= E_t[\psi_{C,K}\hat{K}_{t+1} + \psi_{C,z}\hat{z}_{t+1}] && (20) \\ &= \psi_{C,K}E_t[\hat{K}_{t+1}] + \psi_{C,z}E_t[\hat{z}_{t+1}] && (21) \\ &= \psi_{C,K}E_t[\hat{K}_{t+1}] + \psi_{C,z}\rho\hat{z}_t && (22) \end{aligned}$$

Para a taxa de juros: Da condição das firmas,

$$\hat{r}_t = \hat{z}_t + (\alpha - 1)\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t$$

Então:

$$E_t[\hat{r}_{t+1}] = E_t[\hat{z}_{t+1}] + (\alpha - 1)E_t[\hat{K}_{t+1}] + (1-\alpha)E_t[\hat{L}_{t+1}]$$

Passo 7: Resolver a Equação de Euler

Substituindo $E_t[\hat{K}_{t+1}]$, $E_t[\hat{L}_{t+1}]$ e $E_t[\hat{z}_{t+1}] = \rho\hat{z}_t$ e igualando coeficientes:
Equação 7 (coeficiente de $\hat{K}_t$):

$$\psi_{C,K}[(1-\delta) + \delta\psi_{I,K} - 1] \tag{23}$$

$$= \frac{1}{\sigma}[(\alpha - 1) + (1-\alpha)\psi_{L,K}][(1-\delta) + \delta\psi_{I,K}] \tag{24}$$

Equação 8 (coeficiente de $\hat{z}_t$):

$$\psi_{C,K}\delta\psi_{I,z} + \psi_{C,z}(\rho - 1) \tag{25}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\rho + \frac{1}{\sigma}[(\alpha - 1) + (1-\alpha)\psi_{L,K}]\delta\psi_{I,z} + \frac{1}{\sigma}(1-\alpha)\psi_{L,z}\rho \tag{26}$$

Sistema Completo: 8 Equações, 8 Incógnitas

Incógnitas: $\psi_{C,K}, \psi_{C,z}, \psi_{I,K}, \psi_{I,z}, \psi_{L,K}, \psi_{L,z}, \psi_{Y,K}, \psi_{Y,z}$

Equações 1-2 (Função de produção):

$$\psi_{Y,K} = \alpha + (1-\alpha)\psi_{L,K} \tag{27}$$

$$\psi_{Y,z} = 1 + (1-\alpha)\psi_{L,z} \tag{28}$$

Equações 3-4 (Restrição de recursos):

$$s_C\psi_{C,K} + s_I\psi_{I,K} = \psi_{Y,K} \tag{29}$$

$$s_C\psi_{C,z} + s_I\psi_{I,z} = \psi_{Y,z} \tag{30}$$

Equações 5-6 (Condição trabalho-lazer):

$$(\zeta+\alpha)\psi_{L,K} + \psi_{C,K} = \alpha \tag{31}$$

$$(\zeta+\alpha)\psi_{L,z} + \psi_{C,z} = 1 \tag{32}$$

Sistema Completo (Continuação)

Equações 7-8 (Equação de Euler):

Definindo $\Lambda \equiv (1-\delta) + \delta\psi_{I,K}$ e $r_K \equiv (\alpha - 1) + (1-\alpha)\psi_{L,K}$:

$$\psi_{C,K}(\Lambda - 1) = \frac{1}{\sigma} r_K \Lambda \tag{33}$$

$$\psi_{C,K}\delta\psi_{I,z} + \psi_{C,z}(\rho - 1) = \frac{1}{\sigma} r_K \delta\psi_{I,z} + \frac{1}{\sigma}(1-\alpha)\psi_{L,z}\rho \tag{34}$$

Observação:

- ζ é a elasticidade do trabalho (parâmetro de preferência)
- $s_C = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}}$, $s_I = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}}$ são as participações no estado estacionário
- Sistema é não-linear nas incógnitas (equações 7-8)

Estratégia de Solução do Sistema Não-Linear

Característica principal: Sistema é **não-linear** devido às equações 7-8 (Euler)

Estratégia de solução:

1. **Substituição sequencial**: Das equações 1-6 (lineares), expressar 6 coeficientes em função de $\psi_{L,K}$ e $\psi_{L,z}$
2. **Sistema reduzido**: Substituir nas equações 7-8 para obter sistema 2×2 em $(\psi_{L,K}, \psi_{L,z})$
3. **Solução numérica**: Resolver sistema não-linear resultante
4. **Back-substitution**: Calcular os demais coeficientes

Interpretação econômica:

- Equações 1-4: **Relações contábeis** (produção, recursos)
- Equações 5-6: **Otimização estática** (trabalho-lazer)
- Equações 7-8: **Otimização dinâmica** (consumo intertemporal)

Sistema Reduzido: Expressões Intermediárias

Das equações lineares (1-6), podemos expressar:

Das equações 5-6:

$$\psi_{C,K} = \alpha - (\zeta + \alpha)\psi_{L,K} \tag{35}$$

$$\psi_{C,z} = 1 - (\zeta + \alpha)\psi_{L,z} \tag{36}$$

Das equações 1-4:

$$\psi_{Y,K} = \alpha + (1 - \alpha)\psi_{L,K} \tag{37}$$

$$\psi_{I,K} = \frac{\psi_{Y,K} - s_C \psi_{C,K}}{s_I} \tag{38}$$

$$\psi_{I,z} = \frac{[1 + (1 - \alpha)\psi_{L,z}] - s_C \psi_{C,z}}{s_I} \tag{39}$$

Sistema final: Substituir nas equações de Euler (7-8) para obter 2 equações não-lineares em $(\psi_{L,K}, \psi_{L,z})$.

Caso Especial: Utilidade Log e $\delta = 1$

Para utilidade logarítmica no consumo ($\sigma = 1$) e depreciação completa ($\delta = 1$):

Sistema se simplifica drasticamente:

- Com $\zeta = 0$ (trabalho perfeitamente elástico): $\psi_{L,K} = \psi_{L,z} = 0$
- Taxa de poupança constante: $s_I = \alpha\beta$
- Consumo e investimento movem-se proporcionalmente

Solução analítica:

$$\psi_{C,K} = \psi_{I,K} = \alpha \tag{40}$$

$$\psi_{C,z} = \psi_{I,z} = 1 \tag{41}$$

$$\psi_{L,K} = \psi_{L,z} = 0 \tag{42}$$

$$\psi_{Y,K} = \alpha, \quad \psi_{Y,z} = 1 \tag{43}$$

Verificação: $K_{t+1} = \alpha(K_t + z_t)$ e $C_t/Y_t = 1 - \alpha\beta$ constante.

Intuição: Este caso oferece excelente ponto de partida para chute inicial!

Implementação Numérica: Estrutura do Código

Estratégia computacional:
1. Função objetivo: Criar função que recebe $(\psi_{L,K}, \psi_{L,z})$ e retorna resíduos das equações de Euler.
2. Coeficientes intermediários: Das equações 5-6, calcular:

$$\psi_{C,K} = \alpha - (\zeta + \alpha)\psi_{L,K}, \quad \psi_{C,z} = 1 - (\zeta + \alpha)\psi_{L,z}$$

3. Coeficientes restantes: Das equações 1-4, calcular $\psi_{Y,K}, \psi_{Y,z}, \psi_{I,K}, \psi_{I,z}$.
4. Resíduos de Euler: Calcular F(1) e F(2) das equações 7-8.
5. Solução numérica: Usar solver de sistema não-linear (fsolve, Newton-Raphson, etc.).
Chute inicial: Usar caso especial $(\psi_{L,K}, \psi_{L,z}) = (0, 0)$ como ponto de partida.

Valores Típicos de Calibração

Parâmetros padrão RBC:

$$\alpha = 0.33 \quad \text{(participação do capital)} \tag{44}$$

$$\beta = 0.99 \quad \text{(fator de desconto trimestral)} \tag{45}$$

$$\sigma = 2.0 \quad \text{(aversão ao risco)} \tag{46}$$

$$\delta = 0.025 \quad \text{(depreciação trimestral)} \tag{47}$$

$$\rho = 0.95 \quad \text{(persistência da produtividade)} \tag{48}$$

$$\zeta = 2.0 \quad \text{(parâmetro de desutilidade do trabalho)} \tag{49}$$

Participações no estado estacionário:

- $s_C = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}} \approx 0.76$ (consumo/produto)
- $s_I = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} \approx 0.24$ (investimento/produto)
- $\bar{L} \approx 0.33$ (fração do tempo trabalhando)

Intuição Econômica para a Solução Geral

O que esperar dos coeficientes:

Resposta ao capital $\hat{K}_t$:

- $\psi_{C,K} > 0$: Mais capital $\Rightarrow$ mais consumo (efeito riqueza)
- $\psi_{I,K}$: Pode ser > 0 ou < 0 (substituição intertemporal vs. efeito riqueza)
- $\psi_{L,K} < 0$: Mais capital $\Rightarrow$ menos trabalho (lazer é bem normal)
- $\psi_{Y,K} > 0$: Mais capital $\Rightarrow$ mais produto

Resposta à produtividade $\hat{z}_t$:

- $\psi_{C,z} > 0$: Choque positivo $\Rightarrow$ mais consumo
- $\psi_{I,z} > 0$: Choque positivo $\Rightarrow$ mais investimento (tipicamente $> \psi_{C,z}$)
- $\psi_{L,z} > 0$: Choque positivo $\Rightarrow$ mais trabalho (efeito substituição)
- $\psi_{Y,z} > 1$: Choque 1% $\Rightarrow$ produto sobe mais que 1% (trabalho endógeno)

Checklist: Se seus coeficientes violam estes sinais, revise as equações!

Verificação da Solução

Passos essenciais para verificação:

1. Substituir de volta: Colocar os coeficientes encontrados nas equações originais
2. Verificar identidades: Todas as equações devem ser satisfeitas identicamente
3. Checar estabilidade: A matriz de transição deve ter eigenvalues apropriados
4. Simulação: Gerar trajetórias e verificar se fazem sentido econômico

Para o caso log com $\delta = 1$:

- Equação de Euler: ✓ Satisfeita
- Restrição de recursos: ✓ $s_C + s_I = 1$
- Função de produção: ✓ Com trabalho constante
- Acumulação: ✓ $\hat{K}_{t+1} = \alpha(\hat{K}_t + \hat{z}_t)$

Conexão com Outros Métodos

Blanchard-Kahn:

- Coeficientes indeterminados é caso especial para sistemas lineares
- B-K usa decomposição matricial mais geral
- Ambos chegam à mesma solução quando aplicáveis

Uhlig (1999):

- Automatiza o método de coeficientes indeterminados
- "Toolkit"para sistemas lineares estocásticos
- Separa automaticamente variáveis predeterminadas e jump

Perturbação:

- Coeficientes indeterminados = perturbação de 1ª ordem
- Métodos de ordem superior estendem a ideia
- Dynare usa perturbação automatizada

Resumo e Próximos Passos

Conceitos principais:

- Método de coeficientes indeterminados = "guess and verify"
- Conjecturar funções políticas lineares para modelos log-linearizados
- Sistema de equações algébricas para determinar coeficientes
- Verificação essencial da solução

Próximos passos:

- Implementar computacionalmente para calibrações específicas
- Estudar funções de impulso-resposta resultantes
- Comparar com métodos alternativos (Blanchard-Kahn, Uhlig)
- Aplicar a extensões do modelo básico

Leituras recomendadas:

- Uhlig (1999): "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily"
- Ljungqvist & Sargent: Cap. sobre métodos de solução