Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

8. Derivada direcional

Objetivos

- Compreender o conceito de derivada direcional como generalização da derivada parcial.
- Interpretar geometricamente a derivada direcional como taxa de variação de uma função em uma direção específica.
- Calcular derivadas direcionais utilizando o gradiente.
- Relacionar a derivada direcional ao vetor gradiente e sua direção de crescimento máximo.
- Resolver exercícios aplicados envolvendo derivadas direcionais em funções de duas e três variáveis.

Sabemos que a derivada parcial de uma função $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em relação a x_i no ponto $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ é o limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+t,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{t}. \tag{8.1}$$

Lembremos novamente que (Observação 6.2 da Nota 6):

$$(x_1,\ldots,x_i+t,\ldots,x_n) = \mathbf{x} + t\cdot\vec{e}_i,$$

onde $\vec{e}_i$ é o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^n$. Ou seja, a derivada parcial mede a variação de f ao longo de um pequeno segmento que parte de $\mathbf{x}$ e tem vetor diretor $\vec{e}_i$.

A figura a seguir ilustra esse raciocínio no caso de uma função arbitrária de duas variáveis. Em torno de um ponto (x_0,y_0), consideramos pequenas variações das variáveis x e y paralelas aos eixos coordenados, que correspondem exatamente a segmentos cujos vetores diretores são os vetores canônicos $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$.

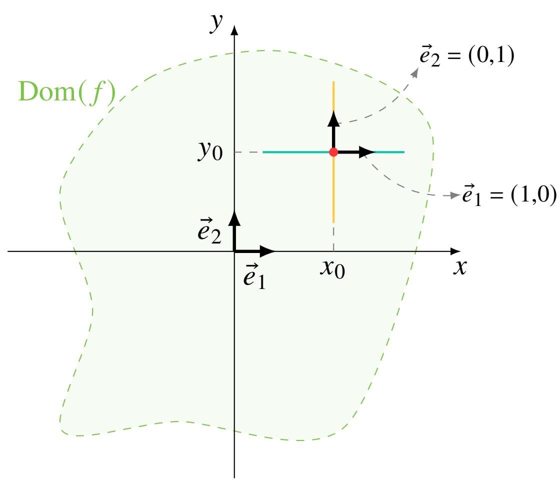


Figura 8.1: O segmento em azul é paralelo ao eixo x, e é parametrizado por $(x_0,y_0)+t(1,0)$, $\;t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, enquanto o segmento em amarelo, paralelo ao eixo y, é dado por $(x_0,y_0)+s(0,1)$, $\;s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Escolhendo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, ambos os segmentos ficam contidos em Dom(f).

Dado que em $\mathbb{R}^n$ existem infinitas direções possíveis, surge naturalmente a seguinte pergunta: podemos investigar também como f se comporta ao longo de uma direção arbitrária $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, e não apenas nas direções dos vetores canônicos?

De fato, temos a seguinte definição.

Definição 8.1 (Derivada direcional).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in D$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ um vetor. A *derivada direcional* de f em $\mathbf{x}$ na direção de um vetor unitário $\vec{v}$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\vec{v}) - f(\mathbf{x})}{t},$$

sempre que esse limite existir.

Ou seja, estamos interessados em compreender como a função f varia quando todas as variáveis sofrem uma pequena variação simultaneamente, em vez de apenas uma coordenada de cada vez.

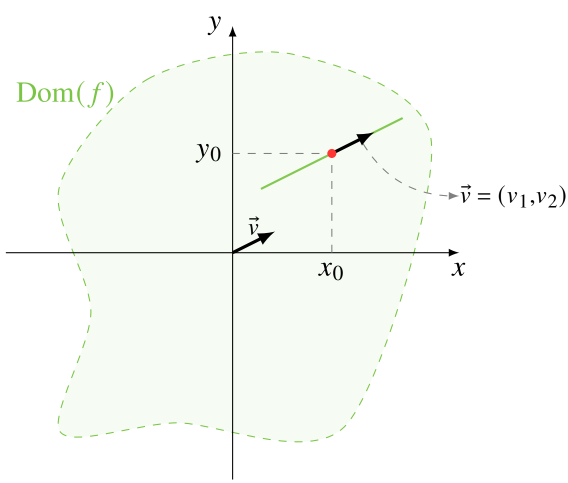


Figura 8.2: O segmento em verde é dado por $(x_0, y_0) + t\vec{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, sendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que o mesmo esteja contido em $\mathrm{Dom}(f)$.

Exemplo 8.1.

No caso particular $\vec{v} = \vec{e}_i$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Exemplo 8.2 (Função quadrática).

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$ e considere o ponto $(1,2)$. Queremos calcular a derivada direcional na direção do vetor $\vec{v} = (1,1)$.

Como $\vec{v}$ não é unitário, normalizamos:

$$\vec{u} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Então, a derivada direcional de f em $(1,2)$ na direção de $\vec{u}$ é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,2) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1,2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 5}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} + 4 + \frac{4t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - 5}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{6t}{\sqrt{2}} + t^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(\frac{6}{\sqrt{2}} + t\right) \\
&= \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 8.3 (Derivada direcional da semiesfera via limite).

Seja $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, e considere o ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e o vetor $\vec{v} = (1,2)$. Queremos calcular a derivada direcional de f nesse ponto, na direção de $\vec{v}$.

Normalizando o vetor:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

Aplicamos a definição:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2} + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t} \\
&\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t} \\
&\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} - t}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1/\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.
\end{aligned}$$

8.1 Interpretação da derivada direcional

Para dar uma interpretação geométrica, pensemos em funções de duas variáveis. Na aula de derivadas parciais vimos como a derivada parcial em relação a x, por exemplo, pode ser entendida como o coeficiente angular da reta tangente à curva obtida pela interseção entre o gráfico da função e o plano vertical paralelo ao eixo xz. De forma análoga, a derivada parcial em relação a y corresponde à inclinação da reta tangente na interseção com o plano paralelo ao eixo yz.

Uma interpretação semelhante vale para a *derivada direcional*. Seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vetor unitário no plano xy. Consideremos o plano que passa pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e é gerado pelos vetores $(v_1, v_2, 0)$ e $(0,0,1)$. A interseção desse plano com $\text{Graf}(f)$ é uma curva contida nesse plano. A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ nada mais é do que a inclinação da reta tangente a essa curva no ponto correspondente.

Usaremos o Exemplo 8.3 para ilustrar esse fato:

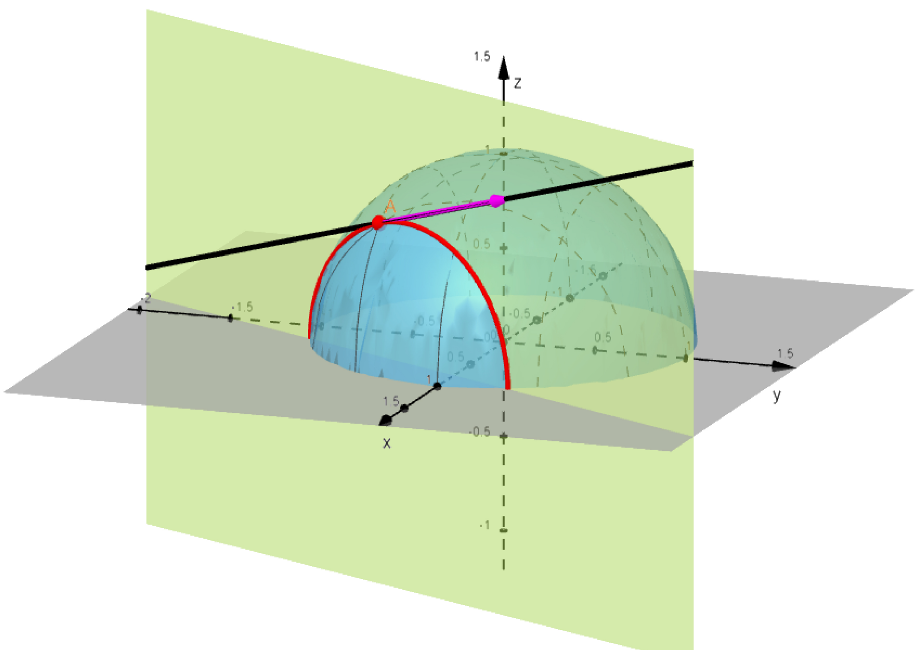


Figura 8.3: O plano verde representa o corte vertical do gráfico na direção escolhida, cuja interseção é a curva vermelha. A reta preta é a tangente a essa curva no ponto dado que está em vermelho, com vetor diretor $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ representado em cor rosa, sendo a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ o coeficiente angular dessa reta no plano de corte.

Como pode ser observado no exemplo, a última coordenada do vetor diretor da reta tangente é a derivada direcional. E isso ocorre de forma geral para qualquer função, pois ao nos movermos na direção do vetor unitário $\vec{v} = (v_1, v_2)$ no plano xy, os pontos sobre o gráfico da função sofrem dois tipos de variação: um deslocamento horizontal, dada pelas duas primeiras coordenadas do vetor, e uma variação vertical em z, que corresponde à *taxa de crescimento de f naquela direção*.

Essa taxa de crescimento é precisamente a derivada direcional, que nos diz quanto f aumenta (ou diminui) por unidade de deslocamento na direção de $\vec{v}$. Assim, o vetor diretor da reta tangente é

$$\left(v_1,\, v_2,\, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)\right),$$

e a terceira coordenada surge naturalmente como a medida da variação em z, isto é, como a taxa de crescimento da função na direção $\vec{v}$ escolhida.

Essa interpretação geométrica se estende naturalmente para funções definidas em dimensões mais altas. Se consideramos $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, e uma direção unitária $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, ao nos movermos a partir de $\mathbf{x}_0$ na direção $\vec{v}$, o deslocamento no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser decomposto em duas partes:

- uma variação **horizontal**, no subespaço $\mathbb{R}^n$, dada pelo vetor $\vec{v}$;
- uma variação **vertical**, ao longo do eixo x_{n+1}, determinada pela derivada direcional de f na direção $\vec{v}$, avaliada em $\mathbf{x}_0$.

Portanto, o vetor diretor da reta tangente à curva traçada no gráfico de f por esse movimento é dado por:

$$\left(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n,\, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}_0)\right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

8.2 Caraterização da derivada direcional

Ficou claro no exemplo que a definição da derivada direcional pelo limite pode ser de difícil aplicação, dependendo da função considerada, em muitos casos, ainda mais trabalhosa do que calcular diretamente uma derivada parcial. Por isso, é importante buscar uma caracterização mais conveniente, que nos permita determinar a variação de f na direção $\vec{v}$ de forma simples e sistemática.

Teorema 8.2 (Caracterização da derivada direcional).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{x} \in D$ um ponto interior a D. Suponha que, para todo $1 \leq i \leq n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe em uma vizinhança de $\mathbf{x}$ e é contínua em $\mathbf{x}$. Então, para qualquer vetor unitário $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\vec{v}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

existe e vale

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}). \tag{8.2}$$

Exemplo 8.4.

Voltemos ao Exemplo 1.2, no qual calculamos a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto $(1,2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,1)$. O objetivo agora é, usando o Teorema anterior, ilustrar que o resultado coincide com o cálculo feito pela definição.

Já temos a normalização do vetor $\vec{v} = (1,1)$:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

As derivadas parciais de f são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

No ponto $(1,2)$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4.$$

Multiplicando cada derivada parcial pela respectiva componente de $\vec{u}$ e somando, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2},$$

mesmo valor obtido pela definição.

Observe que, como hipótese, estamos supondo que as derivadas parciais de f são contínuas em uma vizinhança do ponto $\mathbf{x}$. O seguinte exercício mostra que a mera existência das derivadas parciais no ponto $\mathbf{x}$ não garante, em geral, que a identidade (8.2) se verifique.

Exercício 8.1.

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, onde $\vec{u} = (a,b)$ é um vetor unitário dado, e verifique que, em geral,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \;\neq\; f_x(0,0)\,a + f_y(0,0)\,b.$$

Vetor gradiente

Observem que a equação (8.2) pode ser reinterpretada como um produto escalar entre o vetor direcional $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ e o vetor das derivadas parciais de f no ponto $\mathbf{x}$. Ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \left\langle \vec{v}, \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) \right\rangle.$$

Esse vetor de derivadas parciais possui um papel fundamental em cálculo multivariável. Vamos agora formalizá-lo.

Definição 8.3 (Vetor gradiente).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe em $\mathbf{x} \in D$, para $i = 1, \ldots, n$. O *vetor gradiente* de f em $\mathbf{x}$, denotado por $\nabla f(\mathbf{x})$, é definido por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Assim, a equação (8.2) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle, \tag{8.3}$$

nos casos em que as derivadas parciais de f são contínuas em uma vizinhança de $\mathbf{x}$.

8.2.1 Direção de maior crescimento de uma função

Lembrando agora da fórmula do produto escalar aprendida em Álgebra Linear, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre o vetor $\vec{v}$ e $\nabla f(\mathbf{x})$.

Essa expressão atinge seu valor máximo quando $\cos\theta = 1$, o que ocorre exatamente quando o vetor $\vec{v}$ tem a mesma direção e sentido do vetor $\nabla f(\mathbf{x})$.

Concluímos, por tanto, que a direção do gradiente é aquela em que a função f apresenta sua **maior taxa de crescimento** a partir do ponto $\mathbf{x}$.

No caso em que $\vec{v} = -\nabla f(\mathbf{x})$, temos que o vetor direcional possui a mesma direção, mas sentido oposto ao gradiente. Assim, o ângulo entre $\vec{v}$ e $\nabla f(\mathbf{x})$ é $\theta = \pi$, e portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \cos(\pi) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|.$$

Ou seja, a função f apresenta sua **maior taxa de decrescimento** na direção oposta ao vetor gradiente[1].

8.2.2 Interpretação geométrica do gradiente

A modo de motivação, pensemos agora em uma função arbitrária $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Fixado um valor $c \in \mathbb{R}$, consideremos a **curva de nível**

$$C = \{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}.$$

Suponha que $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma parametrização[2] suave de um arco dessa curva, isto é,

$$f(\gamma(t)) = c, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Definindo a função composta

$$h(t) = f(\gamma(t)),$$

[1] Esse fato fundamenta métodos como o gradiente descendente, usados para minimizar funções seguindo a direção oposta ao gradiente.

[2] Para revisar o tema de curvas parametrizadas, além dos apontamentos feitos em aula, recomendamos a leitura do livro *Cálculo*, Volume 2, de James Stewart, páginas 778 a 790.

vemos que $h(t) \equiv c$ é constante. Logo,

$$h'(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Por outro lado, aplicando a regra da cadeia,

$$h'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, y'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle .$$

Portanto,

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Concluímos que, sempre que $\nabla f(\gamma(t)) \neq 0$, o gradiente ∇f em um ponto é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(t)$ da curva de nível nesse ponto.

Exemplo 8.5.

A modo de motivação pensemos na função $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vamos verificar que o raciocínio anterior no círculo.

As curvas de nível dessa função são os círculos de raio $\sqrt{c}$, sempre que $c \geq 0$, ou seja, o conjunto dos pontos (x, y) tais que:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = c.$$

Esses círculos possuem uma parametrização natural em coordenadas polares. Para um valor fixo de $c > 0$, temos:

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{c}\cos t,\ \sqrt{c}\,\mathrm{sen}\, t\right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

que descreve a curva de nível correspondente a $f(x, y) = c$. Calculamos:

$$\nabla f(x, y) = (2x,\ 2y) \implies \nabla f(\gamma(t)) = \left(2\sqrt{c}\cos t,\ 2\sqrt{c}\,\mathrm{sen}\, t\right).$$

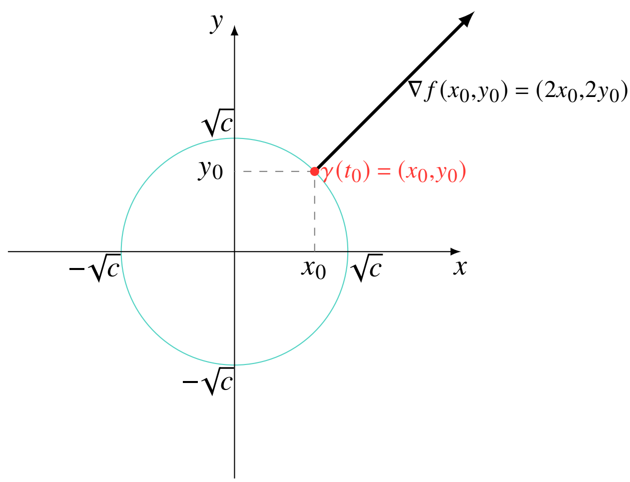
e

$$\gamma'(t) = \left(-\sqrt{c}\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{c}\cos t\right).$$

Logo:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle &= \left\langle \left(2\sqrt{c}\cos t,\ 2\sqrt{c}\,\mathrm{sen}\,t\right), \left(-\sqrt{c}\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{c}\cos t\right)\right\rangle \\ &= (2\sqrt{c}\cos t)(-\sqrt{c}\,\mathrm{sen}\,t) + (2\sqrt{c}\,\mathrm{sen}\,t)(\sqrt{c}\cos t). \\ &= -2c\cos t\,\mathrm{sen}\,t + 2c\,\mathrm{sen}\,t\cos t = 0.\end{aligned}$$

Como sabemos que $\nabla f(\gamma(t)) \neq 0$ (exceto na origem), concluímos que o gradiente é ortogonal às curvas de nível em qualquer ponto.



Observamos, ainda, que na ilustração o vetor gradiente está apontando para fora do círculo. Isso ocorre, neste exemplo, em qualquer ponto (x_0, y_0), pois, como já vimos, o gradiente indica a direção de maior crescimento da função f; em outras palavras, aponta para regiões onde f assume valores maiores que $f(x_0, y_0)$.

Tal raciocínio se extende para funções de n variáveis:

Proposition 8.4 (Ortogonalidade do gradiente às superfícies de nível).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas em um ponto $\mathbf{x}_0 \in N_c = \{\mathbf{x} \in D;\ f(\mathbf{x}) = c\}$. Então, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ é ortogonal ao conjunto de nível[3] N_c no ponto $\mathbf{x}_0$, desde que $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$.

Prova.

Ideia da demonstração:

Fato: Para qualquer vetor tangente a N_c em $\mathbf{x}_0$, existe uma curva $\gamma(t)$ suave contida em N_c, tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\gamma'(t_0) = v$.

Assim, $f(\gamma(t)) = c$ para todo t. Definindo $h(t) = f(\gamma(t))$, temos $h(t)$ constante, e portanto $h'(t) = 0$. Pela regra da cadeia:

$$h'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle .$$

Logo,

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Como $\nabla f(x_0) \neq 0$, então ele é ortogonal a $\gamma'(t_0)$, que é tangente a N_c em $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$. □

Exemplo 8.6.

Considere a função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Suas superfícies de nível são as esferas centradas na origem sempre que $c \geq 0$:

$$f(x,y,z) = c \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

Para uma esfera centrada na origem, sabemos que o vetor posição $\vec{p} = (x,y,z)$ de um ponto sobre a esfera é ortogonal à superfície da esfera na-

[3] Lembre que dizer que um vetor é ortogonal a uma superfície em um determinado ponto significa que ele é ortogonal a todos os vetores tangentes à superfície naquele ponto, isto é, ao subespaço vetorial conhecido como *espaço tangente*.

quele ponto. Como o gradiente da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ é dado por

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z) = 2\vec{p},$$

vemos que o gradiente é um vetor paralelo ao vetor posição. Portanto, ele também é ortogonal à esfera, isto é, perpendicular ao plano tangente no ponto considerado.

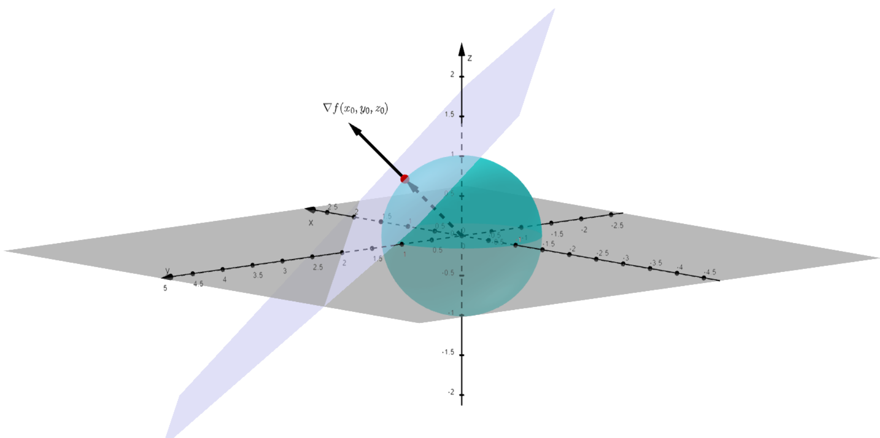


Figura 8.4

Exercícios Suplementares

Exercício 8.2.

Calcule a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2y + y^3$ no ponto $(1,2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (3,4)$.

Exercício 8.3.

Seja $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

(a) Determine, no ponto $(1,-1)$, a direção de maior crescimento de f.

(b) Qual é a taxa de variação máxima nesse ponto?

Exercício 8.4.

Encontre a equação da reta tangente à curva dada implicitamente por $x^2 + xy + y^2 = 3$ no ponto $(1,1)$.

Exercício 8.5.

Encontre a equação do plano tangente ao cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $(1,1,\sqrt{2})$.