

Equilíbrio Competitivo Recursivo

Felipe Iachan

FGV EPGE

Macroeconomia II, MD,
29 de julho de 2025

Equilíbrio Competitivo Recursivo

- Queremos **caracterizar o equilíbrio competitivo** em economias dinâmicas usando **métodos recursivos**.
- Vamos começar com o caso sem incerteza.
- Algumas variáveis de estado estão fora do controle do agente ("pequeno" na economia, tomador de preços): variáveis agregadas, por exemplo.

Exemplo: Modelo neoclássico

Imagine contínuo de famílias idênticas em uma economia neoclássica com capital:

- Cada família escolhe sua poupança (k').
- Precisam saber preços $\{w_t, r_t\}$ presentes e futuros.
- Estes preços dependem de variáveis agregadas:
 - Estoque de capital, K , e oferta de trabalho, L .

Exemplo: Modelo neoclássico

- Vale o 1o Teorema do Bem Estar e podemos formular o problema do planejador de forma recursiva.
- K como variável de estado.
- Caminho promissor: se preços só dependerem de K , o que mais precisamos?

Equilíbrio Competitivo Recursivo (ECR)

- 1 Vamos buscar **variáveis de estado agregadas**.
- 2 **Suficientes** para descrever a evolução dos preços.
- 3 **Fora do controle direto dos agentes** (comportamento competitivo/infinitesimal)...
- 4 ... mas **consistentes** com este comportamento.

Exemplo: Modelo neoclássico de crescimento

No modelo de crescimento determinístico:

- K será variável agregada suficiente.
- Agentes entendem a evolução de K :
 - Lei de movimento $K' = G(K)$.
 - Pense como se fosse a função política de um agente representativo.
- Preços (funções): retorno sobre poupança $R(K)$, taxa de aluguel do capital $r^K(K)$ e salário $w(K)$.

Problema das famílias

- Famílias tomam K , sua lei de movimento e as funções preço como dadas.
- Resolvem:

$$V(k, K) = \max_{c, k'} u(c) + \beta V(k', G(K))$$

s.a.

$$\begin{aligned} R(K)k + w(K) &= c + k', \\ c &\geq 0, \\ k' &\geq 0. \end{aligned}$$

Problema das firmas

- A firma representativa resolve:

$$\max_{k,l} f(K, L) - w(K)l - r^K(K)k$$

- Com retornos constantes de escala, temos

$$f_K(K^D, L^D) = r^K(K)$$

e

$$f_L(K^D, L^D) = w(K),$$

definindo demanda por capital e trabalho (implicitamente).

Mercado de ativos

- Não arbitragem entre títulos e capital:

$$\begin{aligned}R(K) &= (1 + r^K - \delta) \\ &= (1 + f_K - \delta)\end{aligned}$$

- Market-clearing: poupança total = estoque de capital. (vamos formalizar)

ECR no modelo neoclássico, sem incerteza

Um equilíbrio competitivo no modelo neoclássico de crescimento consiste de

- **Funções preço:** $R(K)$, $w(K)$, $r^K(K)$,
- uma **lei de movimento** para o estado agregado: $K' = G(K)$,
- um par de **função valor**, $V(k, K)$, e **função política** para poupança, $g(k, K)$ e
- demanda de fatores pelas firmas, $K^D(K)$ e $L^D(K)$,

tais que ...

ECR no modelo neoclássico, sem incerteza

...tais que

- 1 (otimalidade individual): $V(k, K)$ e $g(k, K)$ resolvem o problema da família, dados preços $R(K)$, $w(K)$, $r^K(K)$ e lei de movimento $G(K)$,
- 2 (otimalidade de firma e não arbitragem): preços satisfazem as CPOs da firma e não arbitragem,
- 3 (market clearing em fatores): $1 = L^S(K) = L^D(K)$ e $K^D(K) = K$,
- 4 (consistência da lei de movimento): $g(K, K) = G(K)$.

ECR no modelo neoclássico, sem incerteza

Discussão

- Podemos combinar otimalidade para firmas e market-clearing de fatores:
 - diferentes maneiras (equiv) de definir equilíbrio.
- Papel de (k, K) e $g(K, K) = G(K)$.

ECR no modelo neoclássico, sem incerteza

Discussão

- Definição é um pouco específica a cada economia:
 - quais mercados estão abertos, quais são as funções políticas, como estado agregado e individual se relacionam.
 - LS (cap 7) tem notação mais geral e outros exemplos.
- Primeiro teorema do bem-estar:
 - aqui, poderíamos ter usado o problema do planejador e apenas descentralizado (achado preços)
- ECR é esp. útil quando não temos garantia de eficiência:
 - mercados incompletos, externalidades, etc.

Exemplo com externalidade (Notas Scheuer/Kurlat)

- Suponha função de produção com complementaridade externa:
 - learning-by-doing ou outras externalidades positivas de produção,

$$f(k_i, L, K) = k_i^\alpha L^{(1-\alpha)} K^\gamma$$

- K_i é o capital usado pela firma i .
- K é o capital agregado, que aumenta a produtividade da firma (externalidade).
- Podemos supor $i = \{1\}$ ou contínuo de firmas idênticas.

Exemplo com externalidade

Fonte: notas Scheuer/Kurlat

- Planejador resolveria

$$V(K) = \max_{K'} u(f(K, L, K) + (1 - \delta)K - K') + \beta V(K'),$$

já impondo $k = K$ e $k'_i = K'$ e “internalizando” a externalidade.

- Planejador chegaria a

$$u'(c) = \beta(1 - \delta + (\alpha + \gamma)K^{(\alpha+\gamma-1)}L^{1-\alpha}u'(c'))$$

Exemplo com externalidade (Notas Scheuer/Kurlat)

- Solução descentralizada teria:

$$r^K(K) = \alpha K^{(\alpha+\gamma-1)} L^{1-\alpha},$$

com apenas o retorno privado,
deixando de capturar o retorno externo

$$r_{\text{ext}}^K(K) := \gamma K^{(\alpha+\gamma-1)} L^{1-\alpha}.$$

- Equação de Euler da solução privada é

$$u'(c) = \beta(1 - \delta + \alpha K^{(\alpha+\gamma-1)} L^{1-\alpha}) u'(c').$$

Transição: De Determinístico para Estocástico

- Até aqui: modelo **determinístico** com ECR bem definido.
- Agora: como incorporar **incerteza**?
- Principais mudanças:
 - 1 Estado agregado expandido: $X = (K, s)$ onde s é choque exógeno
 - 2 Evolução probabilística: $\Pi(X'|X)$ ao invés de $X' = G(X)$
 - 3 Preços dependem de ambos: $w(K, s), r^K(K, s)$
 - 4 Expectativas nas decisões dos agentes

ECR: O caso estocástico

- O conceito de ECR estende naturalmente para ambientes estocásticos.
- Nestes, a evolução do estado agregado é probabilística: $\Pi(X'|X)$.
- No caso do modelo neoclássico com produtividade estocástica:

$$Y(s, K, L) = \theta(s)F(K, L),$$

em que $\theta(s)$ é TFP estocástica e

$$X = (K, s).$$

RCE no modelo neoclássico com risco

- Suponha mercados incompletos:
 - agentes só podem possuir capital diretamente e alugá-lo para as firmas.
- Pergunta: qual a incompletude aqui?

RCE no modelo neoclássico com risco

- Suponha mercados incompletos:
 - agentes só podem possuir capital diretamente e alugá-lo para as firmas.
- Pergunta: qual a incompletude aqui?
 - Retorno do capital é arriscado (depende da TFP) e não há seguro.
 - Para a versão com mercados completos, veja notas complementares.

RCE no modelo neoclássico com risco

- O problema das famílias é:

$$V(k, K, s) = \max_{c, k'} u(c) + \beta \sum_{s'} \Pr(s'|s) [V(k', G(K, s), s')]$$

s.a.

$$\begin{aligned} R(K, s)k + w(K, s) &= c + k', \\ c &\geq 0, \\ k' &\geq 0, \end{aligned}$$

em que

$$R(K, s) = 1 + r^K(K, s) - \delta.$$

RCE no modelo neoclássico com risco

- Definição de equilíbrio competitivo: neste caso, podemos usar definição anterior quase sem modificações.
- Primeira modificação**, preços dependem de (K, s) , função política e valor depende de (k, K, s) .
- Em particular, no problema da firma,

$$\max_{K,L} \theta(s) f(K, L) - w(X)L - r^K(X)K,$$

logo preços de fatores dependem de $X = (K, s)$.

- Um detalhe: tratamos $R(K, s) = 1 + r^K(K, s) - \delta$ como definição de retorno e não condição de não arbitragem.

ECR no modelo neoclássico com risco

- Segunda modificação vem da lei de transição de X .

- Consistência exige:

$$K' = G(X) = g(K(X), X).$$

- Transição conjunta de $X = (K, s)$ tem duas partes:

- 1 Choque exógeno: $s' \sim \Pr(s'|s)$ (dado pela natureza)
- 2 Capital: K' determinado por decisões dos agentes

- Combinando:

$$\Pi(X'|X) = \Pr(s(X')|s(X))1_{K(X')=g(K(X),X)}$$

- Intuição: probabilidade é zero se K' não for consistente com $g(\cdot)$.

Comentários

- Versão com mercados completos tem notação mais pesada, mas conclusões parecidas;
 - capital é equivalente a portfólio de ativos contingentes;
 - consistência fica mais complicada.
- Exercício: como muda a alocação e o que aprendemos na versão de mercados completos?

Resumo: ECR - Conceitos Fundamentais

- ECR = método para caracterizar equilíbrios em economias dinâmicas
- Elementos essenciais:
 - 1 Variáveis de estado agregadas suficientes
 - 2 Funções preço dependem do estado agregado
 - 3 Lei de movimento consistente
 - 4 Otimalidade individual + market clearing
- Aplicações:
 - Eficientes: modelo neoclássico básico
 - Ineficientes ou ef. não garantida: externalidades, mercados incompletos

Resumo: Determinístico vs. Estocástico

Aspecto	Determinístico	Estocástico
Estado agregado	K	$X = (K, s)$
Lei de movimento	$K' = G(K)$	$K' = G(K, s)$
Preços	$w(K), r^K(K)$	$w(K, s), r^K(K, s)$
Transição	Determinística	$\Pi(X' X)$
Decisões	Certeza	Expectativas

Próximo: mercados completos vs. incompletos e precificação de ativos.