Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

1. Noções sobre conjuntos no espaço euclidiano

Objetivos

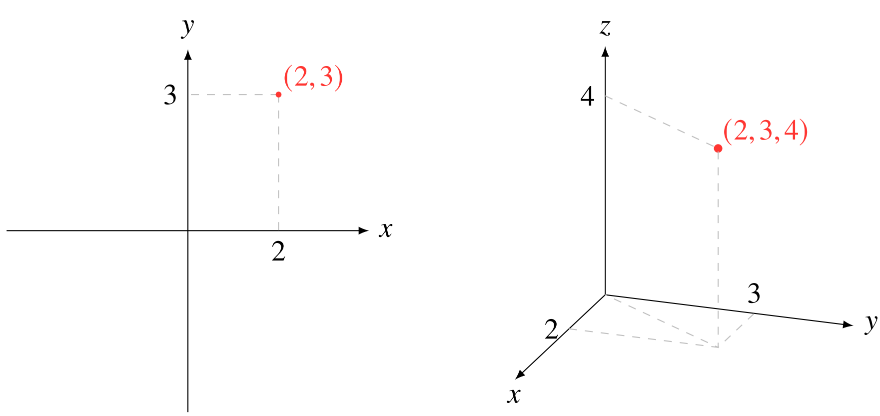
- Compreender os conceitos fundamentais de conjuntos em $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$
- Identificar e descrever geometricamente conjuntos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- Interpretação de notações envolvendo conjuntos em $\mathbb{R}^n$
- Definir e exemplificar conjuntos abertos, fechados, limitados e compactos.
- Interpretar os conceitos de interior, fronteira e complemento de conjuntos.

1.1 Conjuntos no Espaço Euclidiano

Nesta primeira parte, estudamos conjuntos no plano e no espaço, que formam a base para o Cálculo a Várias Variáveis. A compreensão da topologia no espaço euclidiano é essencial para o estudo de funções de várias variáveis.

Começaremos lembrando que o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço euclidiano n-dimensional, também conhecido como espaço real n-dimensional, e é o conjunto das n-tuplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em que cada coordenada x_i é um número real correspondente à coordenada do ponto no espaço. O índice n em $\mathbb{R}^n$ indica o número de dimensões do espaço euclidiano.

Por exemplo, $\mathbb{R}^2$ representa o espaço euclidiano bidimensional, onde os pontos são representados por pares ordenados de números reais (x, y) e podem ser visualizados como pontos em um plano cartesiano (Figura 1.1a). Similarmente, $\mathbb{R}^3$ representa o espaço tridimensional, onde os pontos são representados por triplas ordenadas de números reais (x, y, z) e podem ser visualizados como pontos em um espaço tridimensional (Figura 1.1b).



(a) O ponto $(2,3)$ em $\mathbb{R}^2$ **(b)** O ponto $(2,3,4)$ em $\mathbb{R}^3$

Figura 1.1: Pontos no espaço euclidiano

Definição 1.1 (Conjunto no espaço euclidiano).

Um *conjunto no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ é uma coleção de pontos em $\mathbb{R}^n$, ou seja, uma coleção de n-tuplas de números reais.

Exemplos de conjuntos no plano são as retas e os círculos. As retas são conjuntos de pontos que satisfazem uma equação linear nas variáveis x e y, da forma

$$y = mx + b, \tag{1.1}$$

onde m e b são constantes que representam, respectivamente, a inclinação da reta em relação ao eixo x e o ponto onde a reta intercepta o eixo y (também chamado de *intercepto em* y). Assim, a reta r de equação (1.1) é o conjunto:

$$r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = mx + b\right\} \equiv \left\{(x, mx + b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Os círculos, por sua vez, são conjuntos do plano que consistem em todos os pontos que estão a uma distância fixa de um certo ponto, chamado centro do círculo[1]. Essa distância é chamada de raio do círculo. Matematicamente, um círculo C com centro em (h,k) e raio r pode ser descrito pela equação

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2. \tag{1.2}$$

Essa equação representa todos os pontos (x,y) no plano cartesiano cuja distância até o ponto (h,k) é *igual* ao raio r. Ou seja,

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\right\}.$$

[1] Lembre que a distância entre dois pontos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é dada pela fórmula

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

Claramente, a distância é sempre um valor não negativo e representa o comprimento do segmento de reta que conecta os dois pontos. Tal fórmula é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

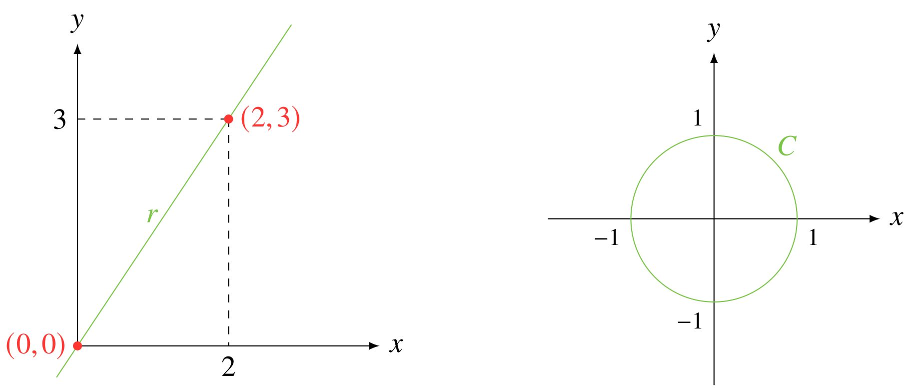
Na Figura 1.2 mostramos dois exemplos desses tipos de conjuntos no plano. O primeiro é a reta r que une os pontos $(0,0)$ e $(2,3)$ (Figura 1.2a), ou seja, o conjunto

$$r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 3/2x\right\} \equiv \left\{(x, 3/2x) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

O segundo é o círculo

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\right\},$$

isto é, o conjunto de pontos no plano que está a uma distância da origem de 1 unidade (Figura 1.2b).



(a) A reta r **(b)** O cículo C

Figura 1.2: Exemplos de conjuntos no plano

No espaço euclidiano tridimensional também conhecemos vários exemplos de conjuntos. Por exemplo, os planos são descritos por uma equação linear da forma

$$ax + by + cz = d, \tag{1.3}$$

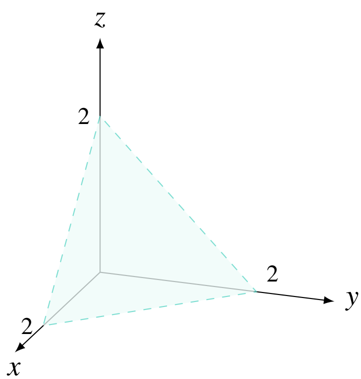
onde a, b, c e d são constantes reais. Na Figura 1.3a está representado o plano cuja equação é $x + y + z = 2$, ou seja, o conjunto de pontos

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 2\right\}.$$

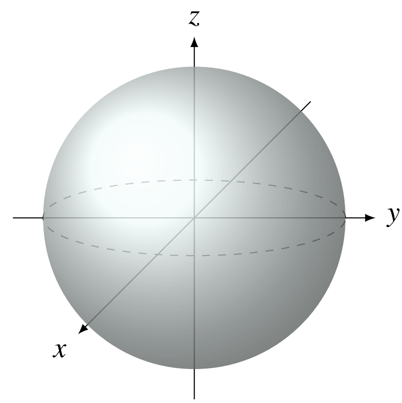
Outro exemplo é a esfera, que, analogamente ao círculo no plano, é o conjunto dos pontos que equidistam de um ponto fixo chamado centro:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\right\}, \tag{1.4}$$

Na Figura 1.3b temos a esfera centrada na origem e de raio 1, ou seja, o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ que está a uma distância fixa de 1 unidade da origem.



(a) Representação no primeiro quadrante do plano cuja equação é $x + y + z = 2$.



(b) A esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Figura 1.3

Até o momento, estudamos conjuntos no plano e no espaço que podem ser descritos por uma única equação relacionando suas coordenadas. Esses conjuntos são de grande importância no estudo de funções de várias variáveis, pois representam os chamados *conjuntos de nível*, que são aqueles conjuntos de pontos onde uma função assume um mesmo valor, fundamentais para a análise gráfica e geométrica dessas funções. Além disso, também surgem naturalmente como expressões de restrições em problemas de otimização, nos quais buscamos maximizar ou minimizar uma função sujeita a condições impostas por outras.

Mas, e se, por exemplo, quisermos considerar todos os pontos que estão “dentro” de um círculo, ou “dentro” de uma esfera? Como poderíamos representar *analiticamente* o conjunto dos pontos que estão dentro do círculo C da Figura 1.2b? Para isto, basta observar que qualquer ponto $p = (x, y)$ nesse conjunto está sobre um círculo centrado na origem cujo raio r é estritamente menor do que 1 (vide Figura 1.4), isto é, $x^2 + y^2 = r^2 < 1$.

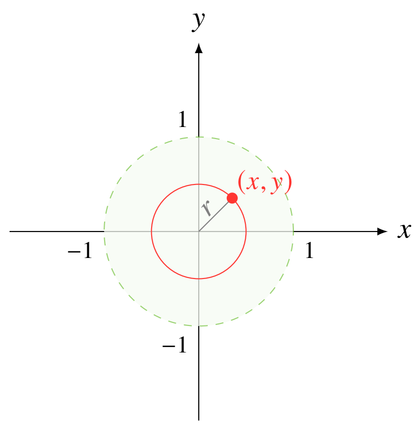


Figura 1.4: A bola $B(O, 1)$ de raio 1 e o ponto (x, y) dentro do círculo.

Logo, esse conjunto é

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Intuitivamente, estaremos "preenchendo" o círculo, obtendo uma área no plano. Em termos matemáticos, esse preenchimento corresponde a uma bola aberta em $\mathbb{R}^2$.

De forma geral, uma *bola aberta* é uma região geométrica no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ que consiste em todos os pontos que estão a uma distância menor que um determinado raio positivo de um ponto central especificado. Mais precisamente, dado um ponto $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in \mathbb{R}^n$, a bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $\mathbf{x}$ é denotada por $B(\mathbf{x}, r)$ e é definida como:

$$B\left(\mathbf{x}_0, r\right) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\},$$

onde $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ representa a distância entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$.

Por exemplo, o conjunto dos pontos que estão dentro da esfera da Figura 1.3b é a bola aberta

$$B(O,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 1\},$$

onde O é a origem do espaço euclidiano tridimensional.

Definição 1.2 (Região).

Chamaremos de *região* em $\mathbb{R}^n$ qualquer conjunto que contenha pontos de uma bola aberta em torno de cada um de seus pontos.

Exemplo 1.1 (Região de vínculo orçamentário: dois produtos).

Suponha que uma empresa tem um orçamento limitado de R$ 1000 para investir em duas atividades: a produção de um produto X e a produção de um produto Y. O custo unitário de produção de X é R$ 50 e de Y é R$ 30. A empresa deseja determinar todas as combinações possíveis de produção de X e Y que se encaixam dentro do seu orçamento.

Denotemos por x o número de unidades do produto X a ser produzido e y o número de unidades do produto Y a ser produzido. O custo total de produção é dado por

$$C = 50x + 30y.$$

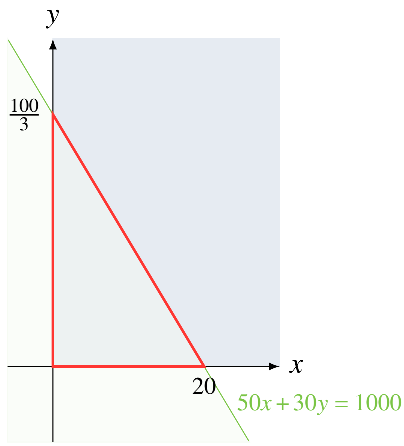
A restrição do orçamento pode ser escrita como $C \leq 1000$, ou seja,

$$50x + 30y \leq 1000.$$

Além disso, sendo x e y quantidades, ambas variáveis são não negativas. Concluindo,

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 50x+30y \leq 1000\right\}.$$

A figura a seguir ressume o raciocínio.



Exemplo 1.2 (Região de vínculo orçamentário: três produtos).

Um consumidor dispõe de um orçamento de R$ 3.000 para comprar três tipos de roupas: X, Y e Z. Os preços unitários desses produtos são R$ 10, R$ 50 e R$ 100, respectivamente. Determine todas as combinações possíveis das quantidades de X, Y e Z que ele pode adquirir, respeitando o limite do orçamento.

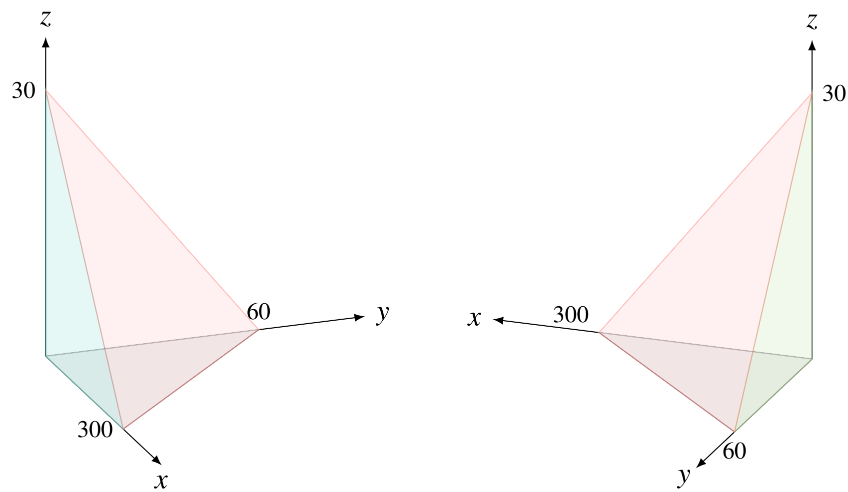
Definindo x como a quantidade de unidades do produto X a ser adquirida, y como a quantidade do produto Y e z como a quantidade do produto Z, a restrição orçamentária pode ser expressa pela seguinte inequação:

$$10x + 50y + 100z \leq 3000. \tag{1.5}$$

Essa inequação representa que o valor total gasto no produto X $(10x)$, no produto Y $(50y)$ e no produto Z $(100z)$ não pode exceder R$ 3000. A região de vínculo orçamentário é, então, o conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem (1.5) e, também, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, pois tais variáveis representam quantidades.

Podemos concluir, então, que as combinações possíveis de produtos que pode adquirir, respeitando seu orçamento é dada pelo conjunto

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ 10x+50y+100z\leq 3000\right\}.$$



1.2 Propriedades topológicas de conjuntos em $\mathbb{R}^n$

E se, no Exemplo 1.1, impusermos a condição de que a empresa deve necessariamente adquirir alguma quantidade de cada um dos três produtos e, além disso, não pode gastar todo o orçamento disponível? Nesse caso, a região de escolhas possíveis corresponderá apenas aos pontos *estritamente* dentro da região orçamentária, sem incluir sua fronteira (Figura 1.5):

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0,\ 50x+30y<1000\right\}.$$

Esse conjunto é um exemplo do que chamamos de conjunto aberto.

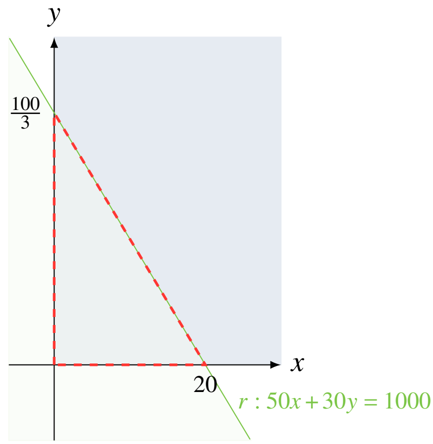


Figura 1.5

Definição 1.3 (Conjunto aberto).

Um conjunto D no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é chamado de *conjunto aberto* se, para cada ponto x em D, existe uma bola aberta centrada em x totalmente contida em D.

Vamos mostrar que, de fato, o conjunto D representado na Figura 1.5 é aberto. Seja $p = (x, y) \in D$ um ponto arbitrário. As distâncias de p às três retas que formam a fronteira do triângulo são[2]:

- $\operatorname{dist}(p, \text{eixo } x) = y = d_1 > 0$;
- $\operatorname{dist}(p, \text{eixo } y) = x = d_2 > 0$;
- $\operatorname{dist}(p, r) = \dfrac{1000 - 50x - 30y}{\sqrt{50^2 + 30^2}} = \dfrac{1000 - 50x - 30y}{\sqrt{3400}} = d_3 > 0.$

Defina

$$r = \frac{1}{2}\min\{d_1,\ d_2,\ d_3\}.$$

[2]Lembre, de Álgebra Linear, que a distância entre um ponto e uma reta é igual à distância entre esse ponto e a sua projeção ortogonal sobre a reta.

Então a bola aberta $B(p,r)$ não intercepta nenhuma das retas de fronteira do conjunto, de modo que $B(p,r) \subset D$ (Figura 1.6). Como $p \in D$ foi escolhido de forma arbitrária, segue que D é um conjunto aberto.

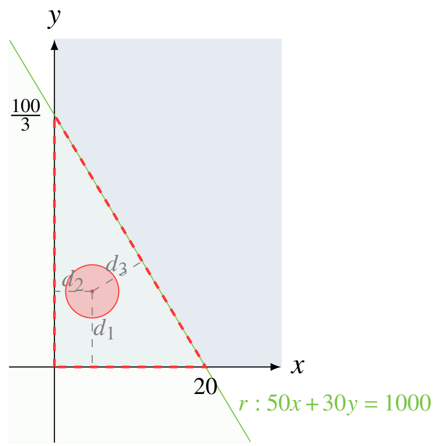
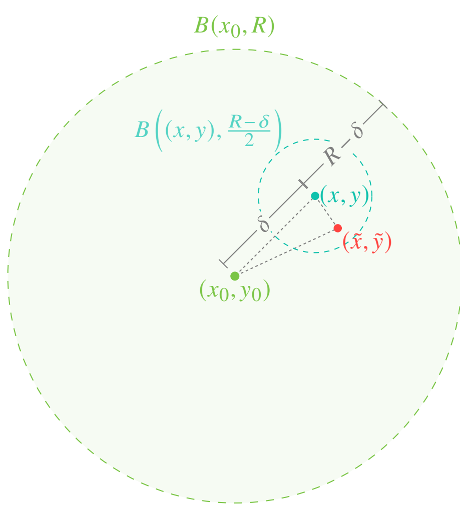


Figura 1.6

Exercício 1.1.

Mostre que as bolas abertas são conjuntos abertos.

Dica:



Observação 1.4.

Até aqui usamos o termo *bola aberta* apenas como nomenclatura. O resultado acima justifica o nome: de fato, cada bola $B(x,r)$ é um *conjunto aberto*.

E o que acontece se "juntarmos" o círculo C à bola aberta $B(O,1)$? Ou seja, se considerarmos o conjunto

$$\overline{B(O,1)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Esse conjunto já não seria um conjunto aberto. Pois qualquer bola centrada em pontos de C contêm pontos que não estão em $\overline{B(O,1)}$, como mostra a Figura 1.7.

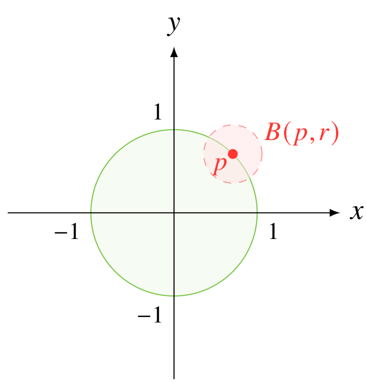


Figura 1.7

Esse conjunto, na verdade, é um conjunto fechado. Mas para definirmos formalmente o que é um *conjunto fechado*, precisamos introduzir primeiro o conceito de complemento de um conjunto.

Definição 1.5 (Complemento de um conjunto).

O *complemento de um conjunto* $D \subset \mathbb{R}^n$, denotado por D^c, é o conjunto de todos os pontos que não pertencem a D.

Por exemplo, o complementar da bola aberta $B(O,1)$ representada na Figura 1.4 é o conjunto de pontos

$$B(O,1)^c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

De fato, seguindo o mesmo raciocínio que antes, qualquer ponto $(x,y) \in B(O,1)^c$ está em uma circunferência de raio $r \geq 1$ como se mostra na Figura 1.8 (lembre que a circunferência de raio 1 não faz parte da bola aberta $B(O,1)$.)

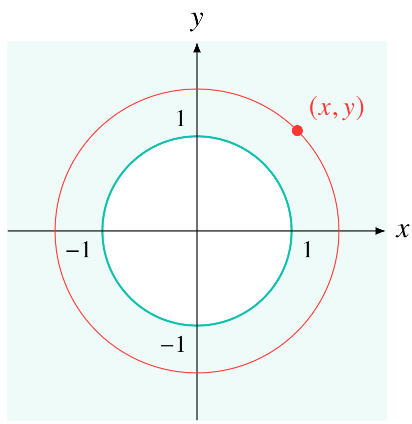


Figura 1.8: Representação de $B(O,1)^c$ e um ponto $(x,y) \in B(O,1)^c$.

Como outro exemplo, considere a região do Exemplo 1.1:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 50x + 30y \leq 1000\}.$$

Seu complementar em $\mathbb{R}^2$ é (vide Figura 1.9)

$$D^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } 50x + 30y > 1000\}.$$

Definição 1.6 (Conjunto fechado).

Dizemos que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto fechado* se D^c é um conjunto aberto.

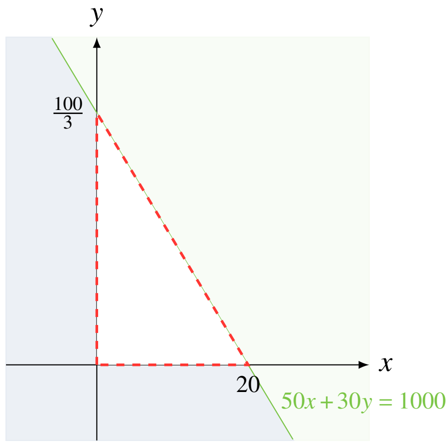


Figura 1.9

Assim, $B(O,1)^c$ é fechado pois $B(O,1)$ é um conjunto aberto. Também é fechado o conjunto $\overline{B(O,1)}$, pois seu complementar é o conjunto

$$\overline{B(O,1)}^c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 > 1\right\}$$

que é aberto. De fato, se $p = (x,y) \in \overline{B(O,1)}^c$, então $\|p\| = \sqrt{x^2+y^2} > 1$, logo, escolhendo $r = (\|p\|-1)/2 > 0$, temos que $B\big((x,y),r\big) \subset \overline{B(O,1)}^c$ (tente fazer o desenho para entender esse raciocínio!).

Deixamos ao leitor a verificação de que o conjunto da Figura 1.9 é aberto e, portanto, a região do vínculo orçamentário do Exemplo 1.1 é fechado.

Um exemplo interessante é o conjunto obtido ao acrescentarmos à bola aberta $B(O,1)$ o ponto $(0,1)$ (Figura 1.10). Note que nenhuma bola centrada em $(0,1)$ está inteiramente contida nesse conjunto e, portanto, esse conjunto não é aberto.

Por outro lado, ele também não é fechado. De fato, o seu complementar contém todo o círculo C exceto o ponto $(1,0)$. Escolhendo, por exemplo, o ponto $(-1,0) \in C$, observamos que qualquer bola centrada nesse ponto contém elementos do conjunto original; logo, tal bola não está contida no complementar, o que mostra que este não é aberto. (Faça um desenho deste segundo raciocínio!)

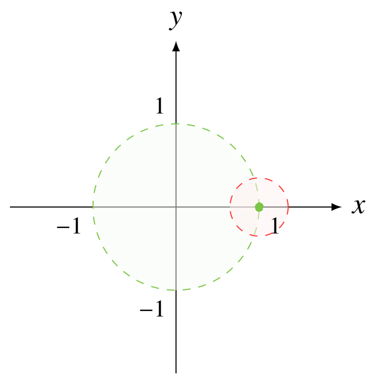


Figura 1.10: Representação de $B(0,1) \cup \{(0,1)\}$

Tal exemplo mostra que os conceitos de *aberto* e *fechado* não são excludentes, isto é, o fato de um conjunto não ser aberto não implica que ele seja fechado, e vice-versa.

Definição 1.7 (Fronteira de um conjunto).

A *fronteira de um conjunto* $D \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto dos pontos tais que *toda* bola aberta que tem o ponto como centro contêm pontos que estão tanto em D quanto em D^c. Denotá-se por ∂D.

No caso do exemplo da bola que vimos ilustrando, observamos que toda bola centrada em qualquer ponto situado sobre o círculo contém pontos que pertencem tanto a $B(O,1)$ quanto a $B(O,1)^c$ (ver Figura 1.11). Assim, $\partial B(O,1) = C$. Mais ainda, $\partial B(O,1)^c = C$ pois o complementar de $B(O,1)^c$ é $B(O,1)$.

Isso ocorre em geral: a fronteira de qualquer conjunto coincide com a fronteira do seu complementar.

No caso do Exemplo 1.1 temos que

$$\partial D = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 20\right\} \bigcup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le \frac{100}{3}\right\}$$
$$\bigcup \left\{\left(x, \frac{1000-50x}{30}\right) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 20\right\} \subset D.$$

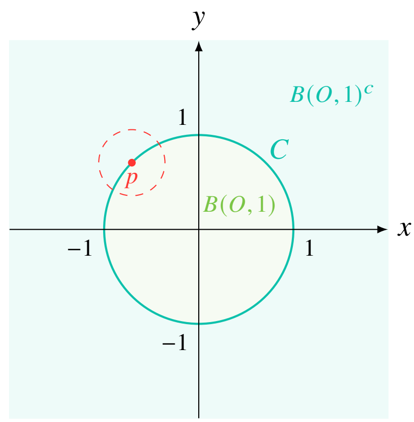
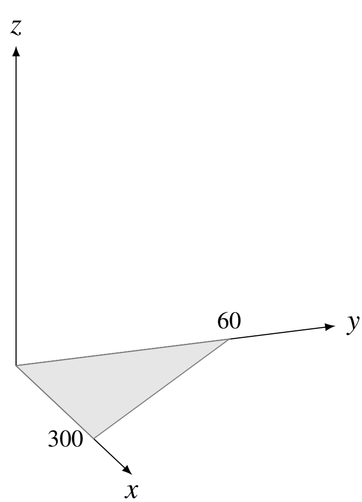


Figura 1.11: O círculo como fronteira de $B(O,1)^3$.

Para o Exemplo 1.2, a análise requer mais cuidado; por isso, vamos apresentá-la de forma detalhada em um exemplo.

Exemplo 1.3 (Fronteira da região do Exemplo 1.2).

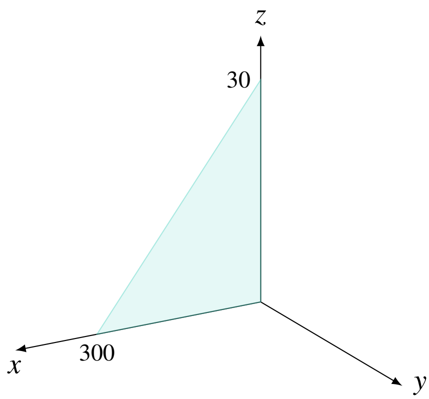
Visualmente percebe-se que a fronteira desse conjunto são as faces da pirâmide. Vamos descrever separadamente os quatro triângulos que conformam a pirâmide. A figura a seguir mostra o triângulo da base.

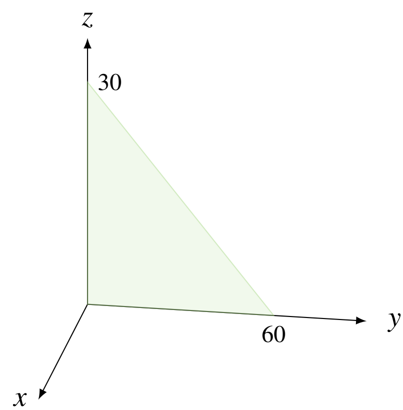


A base é, portanto, o conjunto

$$\left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq y \leq 60 - \frac{x}{5},\ 0 \leq x \leq 300\right\}. \tag{1.6}$$

Agora iremos representar as arestas laterais que estão contidas nos planos xz e yz, que são os planos cujas equações são $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente.





No primeiro caso o triângulo representado é o conjunto

$$\left\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq 30 - \frac{x}{10},\ 0 \leq x \leq 300\right\}$$

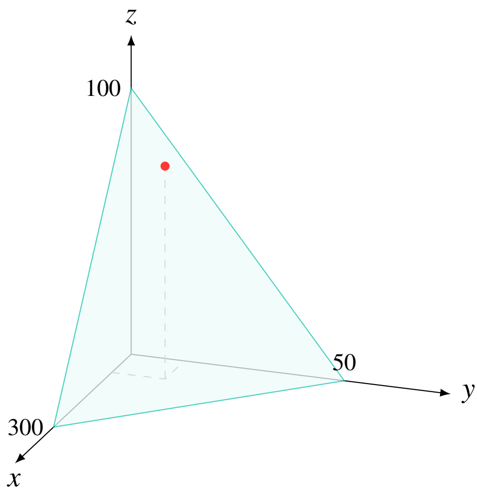
e no segundo

$$\left\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq 30 - \frac{y}{2},\ 0 \leq y \leq 60\right\}.$$

Falta descrever a aresta *contida* no plano cuja equação é

$$10x + 50y + 100z = 3000,$$

representado no primeiro quadrante a seguir.



Observe que se (x, y, z) está sobre essa aresta, então também temos que $x + 5y \leq 300$. Logo, tal conjunto é

$$\left\{\left(x, y, 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}\right) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq y \leq 60 - \frac{x}{5},\ 0 \leq x \leq 300\right\}.$$

A fronteira é a união desses quatro conjuntos.

Exercício 1.2.

(a) Mostre que um conjunto é fechado se ele contêm *todos* os seus pontos de fronteira.

(b) Mostre que um conjunto é aberto se ele não contêm *nenhum* ponto de fronteira.

(c) Dê outros exemplos de conjuntos em $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ que não sejam abertos nem fechados.

Definição 1.8 (Interior de um conjunto).

O *interior* de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, denotado por D°, é o conjunto de todos os pontos em D para os quais é possível encontrar uma bola aberta com centro no ponto e raio positivo completamente contida em D.

Claramente, $B(p,r)^\circ = \overline{B(p,r)}^\circ = B(p,r)$. No caso da região do Exemplo 1.1, temos que D° é o conjunto da Figura 1.5 e que, analiticamente, o escrevemos como

$$D^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < y < \frac{1000-50x}{30} \text{ e } 0 < x < 20\right\}.$$

Para determinar D° no caso do Exemplo 1.2, observamos que (x,y) pertencem sempre ao *interior* da base da pirâmide (vide (1.6)). Além disso, esses pontos interiores estão situados estritamente entre o plano xy e o plano de equação $10x+50y+100z = 3000$, sem "tocar" esses planos. Em outras palavras, a coordenada z (altura desses pontos interiores) satisfaz

$$0 < z < 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}.$$

Portanto,

$$D^\circ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < z < 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2},\ 0 < y < 60 - \frac{x}{5} \text{ e } 0 < x < 300\right\}.$$

Intuitivamente, se um ponto de um conjunto está afastado[4] da sua fronteira, então ele possui vizinhos muito próximos que também estão afastados da fronteira (Figura 1.12). Em outras palavras, existe uma bola aberta centrada nesse ponto, totalmente contida no conjunto. Assim, o *interior* de um conjunto pode ser entendido como o conjunto obtido ao se remover todos os seus pontos de fronteira.

[4] No contexto matemático, estar *afastado* ou *longe* de alguma referência significa estar a uma distância positiva dela, mesmo que tal distância seja pequena.

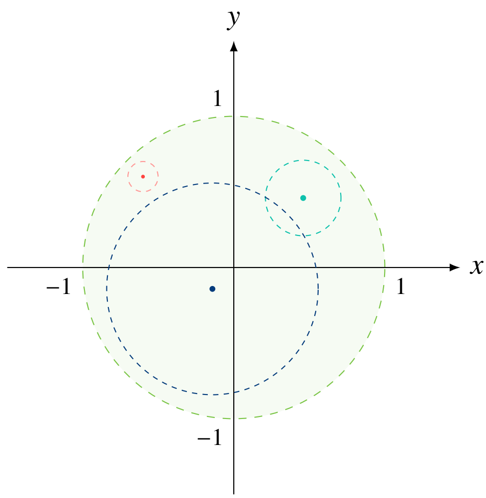
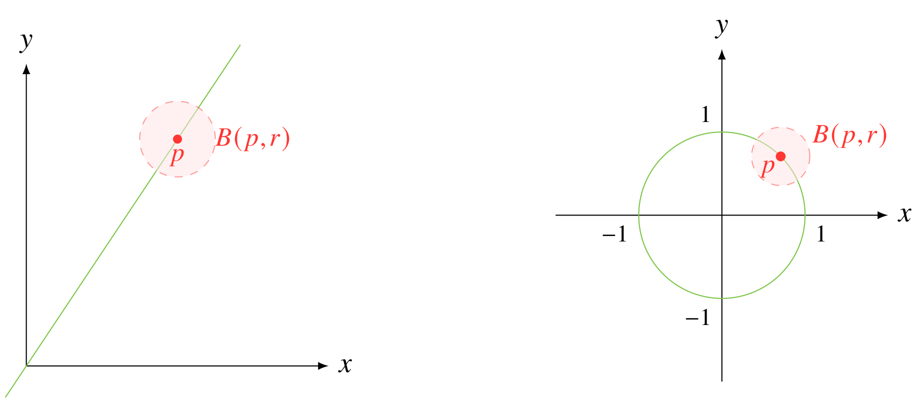


Figura 1.12: $B(O,1)^{\circ} = B(O,1)$.

Por outro lado, existem conjuntos nos quais não "cabe" nenhuma bola, como é o caso das retas e dos círculo – e das curvas em geral (vide Figura 1.13). Ou seja, são conjuntos cujo interior é vazio ($\emptyset$). Deixamos aos leitores a verificação de que os planos e as esferas são conjuntos com interior vazio em $\mathbb{R}^3$, assim como todas as superfícies que conhecem até agora.



(a) A reta r **(b)** O círculo C

Figura 1.13: Conjuntos com interior vazio.

Nos exemplos que vimos até agora, há também uma outra característica que merece atenção. Em alguns conjuntos, como os círculos em $\mathbb{R}^2$ e as esferas em $\mathbb{R}^3$, conseguimos perceber claramente que eles estão contidos em uma região finita do espaço, ou seja, "possuem um tamanho limitado". Por outro lado, conjuntos como as retas em $\mathbb{R}^2$ e os planos em $\mathbb{R}^3$ se estendem indefinidamente, sem que possamos delimitar uma fronteira que os contenha por completo. Surge, assim, um conceito importante para o nosso curso: o de *conjunto limitado*.

Definição 1.9 (Conjunto limitado).

Dizemos que $D \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto limitado* se existe uma bola que o contêm.

Além dos conjuntos mencionados acima, os conjuntos dos Exemplos 1.1 e 1.2 . Para o Exemplo 1.1, note que $D \subset [0,20] \times \left[0, \frac{100}{3}\right]$. Assim, para $(x,y) \in D$, tem-se

$$\|(x,y)\| \leq \sqrt{20^2 + \left(\frac{100}{3}\right)^2} < \sqrt{2 \cdot 100^2} = 100\sqrt{2} \text{ (por exemplo!)},$$

e, portanto, $D \subset B(O, 100\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^2$.

Para o Exemplo 1.2 , temos $D \subset [0,300] \times [0,60] \times [0,30]$. Segue que, para $(x,y) \in D$,

$$\|(x,y,z)\| \leq \sqrt{300^2 + 60^2 + 30^2} < \sqrt{3 \cdot 300^2} = \sqrt{9 \cdot 100^2} = 300 \text{ (por exemplo!)},$$

portanto, $D \subset B(O, 300) \subset \mathbb{R}^3$. As respectivas fronteiras e interiores também ficam contidos nessas mesmas bolas, e, portanto, também são limitados.

O último conceito desta seção é o de *conjunto compacto*. Tais conjuntos desempenham um papel fundamental em problemas de otimização, pois possuem propriedades importantes que facilitam o estudo e a resolução de diversos tipos de problemas.

Definição 1.10 (Conjunto compacto).

Dizemos que $D \subset \mathbb{R}^n$ é um *conjunto compacto* se for fechado e limitado.

Pensando nos exemplos tratados até aqui, já mostramos que as bolas fechadas, os círculos e as esferas, bem como os conjuntos dos Exemplos 1.1 e 1.2 , são fechados e limitados nos seus respectivos espaços e, portanto, são compactos. Também são fechadas e limitadas todas as faces da pirâmide do Exemplo 1.2 (vide Exemplo 1.3).

Por outro lado, as retas e os planos não são limitados e, por isso, não são compactos. O conjunto ilustrado na Figura 1.9 é aberto e, consequentemente, também não é compacto.

Exercícios Suplementares

Exercício 1.3.

Para cada um dos conjuntos abaixo, execute as seguintes tarefas:

- Represente-o graficamente.
- Determine o seu complemento, o seu interior e a sua fronteira.
- Verifique se o conjunto é fechado, limitado e/ou compacto, justificando a resposta.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq x\}$;

(b) $B = \{(x, y);\ y \leq x^2,\ x \leq 1\ y \geq 0, \}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1\} \cup [-1, 1] \times [-1, 1]$;

(d) $D = \{(x, y, z);\ z = x^2 + y^2\}$;

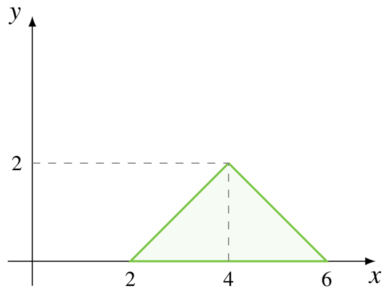
(e) $E = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 < 16,\ z \geq 2\}$.

Exercício 1.4.

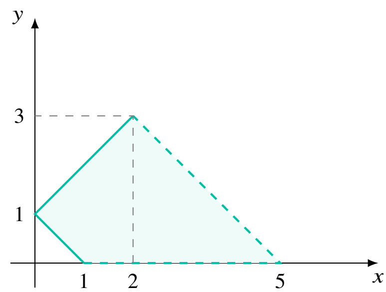
Para cada um dos conjuntos ilustrados abaixo, execute as seguintes tarefas:

- Descreva-o analiticamente na forma
  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$.
- Descreva-o analiticamente na forma
  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(y) \leq x \leq g(y),\ a \leq y \leq b\}$.
- Diga se o conjunto é fechado, limitado e/ou compacto. Justifique

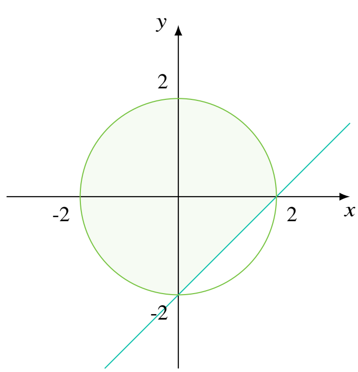
(a)



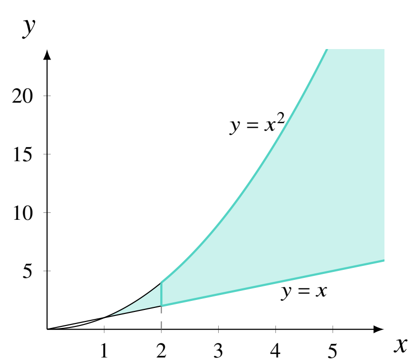
(b)



(c)



(d)



Exercício 1.5 (Fecho de um conjunto).

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e considere a distância euclidiana usual.
Definimos o *fecho* do conjunto D, denotado por $\overline{D}$, como o conjunto interseção de todos os conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ que contêm D, isto é,

$$\overline{D} = \cap\{F \subset \mathbb{R}^n \ ; \ F \text{ é fechado e } D \subset F\}.$$

(a) Mostre que $\overline{D}$ é um conjunto fechado que contém D.

(b) Prove que $\overline{D}$ é o menor conjunto fechado que contém D, no sentido de inclusão.

(c) Mostre que $\overline{D} = D \cup \partial D$.