

Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves



Lista 13.

Objetivos

-

Exercício 13.1.

Determine se as funções abaixo são côncavas ou convexas em seu domínio.

(a) $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 7y + 10$

(b) $f(x, y) = e^x - y^2$

(c) $f(x, y) = x \ln x + y^2$

Solução.

(a) Construindo a Matriz Hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 4y + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y - 4x - 7$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$

e, portanto,

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Análise dos Menores Principais:

- Menor principal de ordem 1: $D_1 = |6| = 6$.
- Menor principal de ordem 2: $D_2 = \det(H) = (6)(10) - (-4)(-4) = 60 - 16 = 44$.

Como $D_1 = 6 > 0$ e $D_2 = 44 > 0$, a Matriz Hessiana é definida positiva. Logo, a função $f(x, y)$ é convexa.

(b) Construindo a Matriz Hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

e, portanto,

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Análise dos Menores Principais:

- Menor principal de ordem 1: $D_1 = |e^x| = e^x$.
- Menor principal de ordem 2: $D_2 = \det(H) = (e^x)(-2) - 0 = -2e^x$.

Como $e^x > 0$ para todo x , temos $D_1 > 0$ e $D_2 < 0$. Os sinais $(+, -)$ não satisfazem as condições de convexidade $(+, +)$ nem de concavidade $(-, +)$. A matriz Hessiana é indefinida. Logo, a função $f(x, y)$ é não é côncava nem convexa.

(c) Construindo a Matriz Hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

e, portanto,

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Análise dos Menores Principais: Para o domínio $x > 0$:

- Menor principal de ordem 1: $D_1 = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x}$.
- Menor principal de ordem 2: $D_2 = \det(H) = \left(\frac{1}{x} \right) (2) - 0 = \frac{2}{x}$.

Como $x > 0$, temos $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$. A Matriz Hessiana é definida positiva em todo o domínio. Logo, a função $f(x, y)$ é convexa.

□

Exercício 13.2.

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$.

- (a) Mostre que f é uma função estritamente convexa.
- (b) Encontre o ponto crítico da função.
- (c) Mostre que o ponto crítico é um mínimo global de f sobre \mathbb{R}^2 .

Solução.

- (a) Construindo a Matriz Hessiana:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Análise dos Menores Principais:

- Menor principal de ordem 1: $D_1 = |2| = 2$.
- Menor principal de ordem 2: $D_2 = \det(H) = (2)(2) - 0 = 4$.

Temos $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$. A Matriz Hessiana é definida positiva em todo o domínio. Logo, a função $f(x, y)$ é convexa.

- (b) $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y - 6 = 0, \end{cases}$$

onde $x = 1$ e $y = 3$. Logo, $(1, 3)$ é o ponto crítico de f

- (c) $(1, 3)$ é um ponto de mínimo global, pois sabemos que se uma função estritamente convexa tem um ponto crítico, tal ponto necessariamente é um mínimo global.

□

Exercício 13.3.

Seja $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 8y - 6z + 10$.

- Mostre que g é uma função estritamente convexa.
- Encontre o ponto crítico da função.
- Mostre que o ponto crítico é um mínimo global de g sobre \mathbb{R}^3 .

Solução.

- Construindo a Matriz Hessiana:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 4, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4y + 8, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 6z - 6$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 6$$

As derivadas mistas são todas zero.

A Matriz Hessiana é:

$$\text{Hess } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Análise dos Menores Principais:

- Menor principal de ordem 1: $D_1 = |2| = 2$.
- Menor principal de ordem 2: $D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$.
- Menor principal de ordem 3: $D_3 = \det(\text{Hess } g) = 48$.

Temos $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ e $D_3 > 0$. A Matriz Hessiana é definida positiva. Logo, a função $g(x, y, z)$ é estritamente convexa.

(b) $\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 4y + 8 = 0, \\ 6z - 6 = 0, \end{cases}$$

onde $x = 2$, $y = -2$ e $z = 1$. Logo, $(2, -2, 1)$ é o ponto crítico de g .

(c) O ponto $(2, -2, 1)$ é um ponto de mínimo global, pois a função é estritamente convexa e um ponto crítico de uma função estritamente convexa é necessariamente um mínimo global.

□