CAPÍTULO 19

Otimização com Restrições II

Neste capítulo continuamos a nossa apresentação das técnicas matemáticas centrais da teoria econômica: a solução de problemas de otimização condicionada. O formalismo lagrangiano desta solução foi introduzido no último capítulo, onde enfocamos seus aspectos mais importantes: as condições de primeira ordem que formam a base de um grande número de princípios econômicos. Neste capítulo, partimos para três outros aspectos da abordagem lagrangiana:

(1) a sensibilidade do valor ótimo da função objetivo a mudanças nos parâmetros do problema,

(2) as condições de segunda ordem que distinguem máximos de mínimos, e

(3) a hipótese sutil, mas necessária, da qualificação de restrição na abordagem lagrangiana.

Na última seção deste capítulo apresentaremos provas detalhadas das condições de primeira ordem básicas que estudamos no capítulo anterior.

19.1 O SIGNIFICADO DO MULTIPLICADOR

Ao resolver problemas de otimização condicionada, parece que estamos obtendo informação irrelevante com os valores dos multiplicadores ($\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$). Contudo, os multiplicadores desempenham um papel importante na análise econômica; em alguns problemas, um papel pelo menos tão importante quanto o do próprio máximo. Veremos nesta seção que os multiplicadores medem a sensibilidade do valor ótimo da função objetivo a variações no lado direito das restrições e, como uma conseqüência, os multiplicadores fornecem uma medida natural de valor dos recursos escassos em problemas de maximização econômica.

Uma Restrição de Igualdade

Voltamos ao problema mais simples, o de duas variáveis e uma restrição de igualdade:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x, y) \\ \text{sujeita a} & h(x, y) = a \end{array} \qquad (1)$$

Vamos considerar a como um parâmetro que varia de problema a problema. Para qualquer valor fixo de a, escreva $(x^*(a), y^*(a))$ para a solução do problema (1) e escreva $\mu^*(a)$ para o multiplicador que corresponde a esta solução. Seja $f(x^*(a), y^*(a))$ o *valor ótimo* correspondente da função objetivo. Vamos provar que, sob condições razoáveis, que valem para quase todos os problemas de maximização, $\mu^*(a)$ mede a taxa de variação do valor ótimo de f em relação ao parâmetro a ou, menos precisamente, $m^*(a)$ mede o efeito (infinitesimal) sobre $f(x^*(a), y^*(a))$ do aumento de uma unidade de a.

Teorema 19.1 Sejam f e h funções C^1 de duas variáveis. Para qualquer valor fixo do parâmetro a, seja $(x^*(a), y^*(a))$ a solução do problema (1) com multiplicador correspondente $\mu^*(a)$. Suponha que x^*, y^* e μ^* são funções C^1 de a e que a QRND vale em $(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a))$. Então,

$$\mu^*(a) = \frac{d}{da} f\left(x^*(a), y^*(a)\right) \tag{2}$$

Prova O lagrangiano para o problema (1) é

$$L(x, y, \mu; a) \equiv f(x, y) - \mu\left(h(x, y) - a\right) \tag{3}$$

com a aparecendo como um parâmetro. Pelo Teorema 18.1, a solução $(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a))$ de (1) satisfaz

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a); a\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a)\right) - \mu^*(a)\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a)\right) \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial y}\left(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a); a\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}\left(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a)\right) - \mu^*(a)\frac{\partial h}{\partial y}\left(x^*(a), y^*(a), \mu^*(a)\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

para cada a. Além disso, como para cada a temos $h(x^*(a), y^*(a)) = a$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(x^*, y^*\right)\frac{dx^*}{da}(a) + \frac{\partial h}{\partial y}\left(x^*, y^*\right)\frac{dy^*}{da}(a) = 1 \tag{5}$$

vale para cada a. Portanto, usando a Regra da Cadeia e as equações (4) e (5),

$$\frac{d}{da}f(x^*(a),y^*(a)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(a),y^*(a))\frac{dx^*}{da}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*(a),y^*(a))\frac{dy^*}{da}(a)$$

$$= \mu^*\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(a),y^*(a))\frac{dx^*}{da}(a) + \mu^*\frac{\partial h}{\partial y}(x^*(a),y^*(a))\frac{dy^*}{da}(a)$$

$$= \mu^*\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(a),y^*(a))\frac{dx^*}{da}(a) + \frac{\partial h}{\partial y}(x^*(a),y^*(a))\frac{dy^*}{da}(a)\right]$$

$$= \mu^* \cdot 1. \blacksquare$$

Exemplo 19.1 No Exemplo 18.5, obtivemos um máximo $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, com multiplicador $\mu = 0{,}5$, da função $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ no conjunto-restrição $2x_1^2 + x_2^2 = 3 \; = 3$. O valor máximo de f é $f^* = f(1, 1) = 1$. Refaça o problema, desta vez usando a restrição $2x_1^2 + x_2^2 = 3{,}3$. O mesmo cálculo do Exemplo 18.5 fornece a solução $x_1 = x_2 = \sqrt{1{,}1}$, com valor máximo $f^* = (1{,}1)^{3/2} \approx 1{,}1537$, um aumento de 0,1537 sobre o valor f^* original.

Por outro lado, o Teorema 19.1 prevê que uma variação de 0,3 unidades do lado direito da restrição, altera o valor máximo da função objetivo por aproximadamente

$$0{,}3 \cdot \mu = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15 \text{ unidades,}$$

uma aproximação correta até duas casas decimais.

Várias Restrições de Igualdade

É imediato enunciar e provar a generalização natural do Teorema 19.1 a várias variáveis e várias restrições de igualdade.

Teorema 19.2 Sejam $f, h_1, \ldots, h_m$ funções C^1 de $\mathbf{R}^n$. Seja $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ uma m-upla de parâmetros exógenos e considere o problema $(P_\mathbf{a})$ de maximizar $f(x_1, \ldots, x_m)$ sujeita às restrições

$$h_1(x_1,\ldots,x_n) = a_1, \ldots, h_m(x_1,\ldots,x_n) = a_m$$

Seja $x_1^*(\mathbf{a}), \ldots, x_n^*(\mathbf{a})$ a solução do problema $(P_\mathbf{a})$, com correspondentes multiplicadores de Lagrange $\mu_1^*(a), \ldots, \mu_m^*(a)$. Suponha também que x_i^* e μ_j^* são funções diferenciáveis de $(a_1, \ldots, a_m)$ e que vale a QRND. Então, para cada $j = 1, \ldots, m$, temos

$$\mu_j^*(a_1,\ldots,a_m) = \frac{\partial}{\partial a_j} f(x_1^*(a_1,\ldots a_m),\ldots,x_n^*(a_1,\ldots,a_m)) \tag{6}$$

Restrições de Desigualdade

Como indica o próximo teorema, os Teoremas 19.1 e 19.2 são igualmente válidos para restrições de desigualdade. Para facilitar a exposição, vamos supor que todas as restrições sob consideração são restrições de desigualdade. O enunciado do resultado correspondente para restrições mistas é imediato.

Teorema 19.3 Seja $\mathbf{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_k^*)$ uma k-upla. Considere o problema $(Q_{\mathbf{a}}^*)$ de maximizar $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeita às k restrições de desigualdade

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \le a_1^*, \ldots, g_k(x_1, \ldots x_n) \le a_k^* \tag{7}$$

Seja $x_1^*(\mathbf{a}^*), \ldots, x_n^*(\mathbf{a}^*)$ a solução do problema $(Q_{\mathbf{a}}^*)$ e sejam $\lambda_1^*(\mathbf{a}^*), \ldots, \lambda_k^*(\mathbf{a}^*)$ os correspondentes multiplicadores de Lagrange. Suponha que à medida que $\mathbf{a}$ varia perto de $\mathbf{a}^*$, $x_1^*, \ldots, x_n^*$, e $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ são funções diferenciáveis de $(a_1, \ldots, a_k)$ e que vale a QRND em $\mathbf{a}^*$. Então, para cada $j = 1, \ldots, k$, temos

$$\lambda_j^*(a_1^*, \ldots, a_k^*) = \frac{\partial}{\partial a_j} f\left(x_1^*(a_1^*, \ldots, a_k^*), \ldots, x_n^*(a_1^*, \ldots a_k^*)\right) \tag{8}$$

Prova (Esboço) Para facilitar a notação, escreveremos $\mathbf{a}^*$ simplesmente como $\mathbf{a}$. Como sempre, separamos as restrições de desigualdade em dois grupos: as restrições ativas e as inativas. As restrições ativas podem ser tratadas como restrições de igualdade e portanto aplicamos a elas o Teorema 19.2. Seja g_j a função de restrição de uma das restrições *inativas*: $g_i(\mathbf{x}^*(\mathbf{a})) < a_j$. Seja C o conjunto-restrição descrito pelas desigualdades (7). Seja a_j' qualquer número tal que

$$g_i(\mathbf{x}^*(\mathbf{a})) < a_j' < a_j$$

e seja C' o conjunto-restrição descrito pelas desigualdades (7) com $g_i(\mathbf{x}) \le a_j'$ no lugar de $g_i(\mathbf{x}) < a_j$.

Como $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$ maximiza f em C, como $C' \subset C$ e como $\mathbf{x}^*(\mathbf{a}) \in C'$, segue que $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$ maximiza f em C'. Em outras palavras, se

$$\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j', a_{j+1}, \ldots, a_k)$$

então $\mathbf{x}^*(\mathbf{a}') = \mathbf{x}^*(\mathbf{a})$ e portanto $f(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}')) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}))$, de modo que o valor máximo de f não é afetado quando a_j varia um pouco. Isso implica que

$$\frac{\partial}{\partial a_j} f\left(x_1^*(a_1, \ldots, a_m), \ldots, x_n^*(a_1, \ldots, a_m)\right) = 0$$

Como $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ também é nulo pelo Teorema 18.4, a equação (8) ainda vale para restrições de desigualdade inativas. ■

Exemplo 19.2 No Exemplo 18.9, calculamos que o max de xyz no conjunto

$$x+y+z \le 1 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad z \ge 0$$

ocorre em $x = y = z = 1/3$, onde $xyz = 1/27$. Os quatro multiplicadores são 1/9, 0, 0 e 0, respectivamente.

(*a*) Se modificamos a primeira restrição para $x + y + z \le 0{,}9$, calculamos que a solução ocorre em $x = y = z = 0{,}3$, onde $xyz = 0{,}027$. O Teorema 19.3 prevê que o novo valor ótimo seria

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \approx 0{,}0259$$

uma estimativa a menos de 0,0011, ou quatro por cento.

(*b*) Se, em vez disso, modificarmos a segunda restrição de $x \ge 0$ para $x \ge 0{,}1$, não alteramos a solução nem o valor ótimo, porque a nova região é um subconjunto da antiga e ainda contém o ponto ótimo da região antiga. Esse resultado é compatível com o Teorema 19.3, pois o multiplicador para a restrição (inativa) $x \ge 0$ era zero.

Interpretando o Multiplicador

Finalmente, vamos considerar o papel central que a equação (8) desempenha na teoria econômica. Pense na função objetivo $f(\mathbf{x})$ no problema $(Q_\mathbf{a})$ do Teorema 19.3 como a função lucro de uma firma e pense nos a_j do lado direito das restrições como representando as quantidades disponíveis como insumos no processo produtivo da mesma. Por exemplo, num problema de análise de atividade, consideramos que o processo produtivo da firma consiste de n atividades produtivas diferentes e que x_i representa o nível de intensidade da atividade i. Seja $g_j(x_1,..., x_n)$ a quantidade de insumo j que essa firma requer para tocar a atividade 1 a nível x_1, a atividade 2 a nível x_2, e assim por diante. Seja a_j a quantidade de insumo j disponível para a firma, o que leva às restrições de desigualdade $g_j(x_1,..., x_n) \le a_j$. Seja $f(x_1,..., x_n)$ o lucro realizado pela firma com seus produtos quando as atividades são tocadas nos níveis $x_1,..., x_n$, respectivamente. Nessa situação,

$$\frac{\partial}{\partial a_j} f\big(x_1^*(\mathbf{a}), \ldots, x_n^*(\mathbf{a})\big)$$

representa a variação no lucro ótimo resultante da disponibilidade de uma unidade a mais de insumo j. Por (8), o j-ésimo multiplicador $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ representa essa variação infinitesimal. Ele demonstra o quanto uma unidade a mais de insumo j é valiosa para os lucros da firma. Alternativamente, ele diz a quantidade máxima que a firma estaria disposta a pagar para adquirir uma unidade a mais do insumo j. Por esse motivo, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ é, muitas vezes, denominado **valor interno** ou **valor imputado**, ou, mais freqüentemente, **preço-sombra** do insumo j. Ele pode ser um índice mais importante para a firma do que o preço de mercado externo do insumo j.

EXERCÍCIOS

19.1 *a*) Encontre as distâncias máxima e mínima da origem à elipse $x^2 + xy + y^2 = 3{,}3$.

b) Use o Teorema 19.1 e sua resposta ao Exercício 18.2 para estimar as respostas da parte *a*.

19.2 Encontre o máximo de $x + y + z^2$ sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = 0{,}8$ e $y = 0$:

a) usando o Teorema 19.1 e o Exercício 18.6,

b) fazendo a conta toda desde o começo.

19.3 Uma determinada fábrica produz $Q(x, y) = 50x^{1/2}y^{1/2}$ unidades de produto se gastar x milhares de unidades monetárias em trabalho e y milhares de unidades monetárias em equipamento.

a) Como deveriam ser alocadas 80.000 unidades monetárias entre trabalho e equipamento para render o maior nível de produção possível?

b) Use o Teorema 19.1 para estimar a variação no nível de produção máximo se essa alocação decrescer por um milhar de unidades monetárias.

c) Calcule a variação exata em *b*).

19.4 Use o Teorema 19.3 e o Exercício 18.11 para estimar o valor máximo de $f(x, y) = 2y^2 - x$ no conjunto-restrição $x^2 + y^2 \leq 0{,}9$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

19.5 Use o Teorema 19.3 e o Exercício 8.12 para estimar o valor máximo de $f(x, y, z) = xyz + z$ no conjunto-restrição $x^2 + y^2 + z \leq 6{,}2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

19.6 Use o Teorema da Função Implícita para escrever detalhadamente uma desigualdade específica que garanta que as soluções $(x(a), y(a))$ do Problema (1) dependem suavemente de a, como na hipótese no Teorema 19.1.

19.7 Prove o Teorema 19.2.

19.8 Escreva por extenso o enunciado do teorema que corresponde aos Teoremas 19.2 e 19.3, mas agora para restrições tanto de igualdade quanto de desigualdade.

19.9 Escreva por extenso o enunciado do teorema que corresponde aos Teoremas 19.2 e 19.3, mas agora para um problema de minimização condicionada.

19.2 TEOREMAS DE ENVOLTÓRIA

Os Teoremas 19.1, 19.2 e 19.3 são casos especiais de uma classe de teoremas que descrevem como o valor ótimo da função objetivo num problema de otimização parametrizado se altera quando um dos parâmetros se modifica. Tais teoremas são denominados **teoremas de envoltória**. Começamos com o Teorema da Envoltória para problemas sem restrições.

Problemas sem Restrições

Teorema 19.4 Seja $f(\mathbf{x}; a)$ uma função C^1 de $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ e do escalar a. Para cada escolha do parâmetro a, considere o problema sem restrições

$$\text{maximizar} \quad f(\mathbf{x}; a) \quad \text{em relação a } \mathbf{x}. \tag{9}$$

Seja $\mathbf{x}^*(a)$ uma solução do problema. Suponha que $\mathbf{x}^*(a)$ é uma função C^1 de a. Então

$$\frac{d}{da} f\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) = \frac{\partial}{\partial a} f\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) \tag{10}$$

Prova Calculamos pela Regra da Cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} f\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) \cdot \frac{dx_i^*}{da}(a) + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) \cdot 1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial a}\left(\mathbf{x}^*(a); a\right), \end{aligned}$$

pois $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, pelas condições de primeira ordem usuais do Capítulo 17. ■

Observe as semelhanças entre as provas dos Teoremas 19.1 e 19.4. À primeira vista, a conclusão (10) do Teorema 19.4 parece desinteressante, porque ambos os lados de (10) parecem-se muito. Mas a derivada *parcial* do lado direito de (10) é bastante mais fácil de tratar do que a derivada *total* no lado esquerdo, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 19.3 Considere o problema de maximizar

$$f(x; a) = -a^3 x^4 + 15x^3 - e^a x^2 + 17$$

em torno de $a = 1$. Como f é um polinômio de grau quatro em x, com um coeficiente líder negativo quando $a = 1$, temos $f(x) \to -\infty$ quando $x \to \pm\infty$. Portanto, f realmente tem um máximo global finito $x^*(a)$ para cada valor de a perto de 1. Por (10),

$$\frac{d}{da} f\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) = \frac{\partial}{\partial a} f\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) = -3a^2 x^{*4} - e^a x^{*2}$$

que é negativo em cada a e cada $x \neq 0$. Assim, mesmo sem resolver para o $x^*(a)$ ótimo, podemos dizer que $f(x^*(a); a)$ é uma função decrescente de a quando a cresce para além de 0. O pico do gráfico da função $x \mapsto f(x; a)$ decresce quando a cresce.

Exemplo 19.4 Qual será o efeito do aumento de uma unidade de a sobre o valor máximo de $f(x; a) = -x^2 + 2ax + 4a^2$, quando maximizamos f em relação a x para cada a? Inicialmente, calculemos a resposta diretamente. A equação para o máximo de f é

$$f'(x) = -2x + 2a = 0$$

então $x^*(a) = a$. Colocando esse valor em $f(x; a)$ leva a

$$f\left(x^*(a);a\right) = f(a,a) = -a^2 + 2a \cdot a + 4a^2 = 5a^2 \tag{11}$$

que aumenta a uma taxa de $10a$ quando a cresce.

Se, em vez disso, tivéssemos aplicado o Teorema da Envoltória, poderíamos ter pulado o passo (1) e encontrado diretamente

$$\frac{df^*}{da} = \frac{\partial f}{\partial a}\left(x^*(a);a\right) \equiv 2x + 8a = 10a$$

pois $x^*(a) = a$.

Exemplo 19.5 Uma firma da Califórnia tem um nível y de produção de microprocessadores de computador e uma função custo $c(y)$, com $c'(y) > 0$ e $c''(y) > 0$. Uma fração $1 - \alpha$ dos microprocessadores produzidos está irremediavelmente defeituosa e não pode ser vendida. Os microprocessadores que funcionam podem ser vendidos a um preço p e o mercado de microprocessadores é altamente competitivo. Como será afetado o lucro da firma ocorrendo um aumento na qualidade de produção?

A função lucro da firma é

$$\pi(p,\alpha) = \max_y \left[p\alpha y - c(y)\right]$$

onde "$\max_y$" significa o valor máximo em relação a y. As condições sobre a função custo garantem que existe um nível de produção não-nulo máximo de lucro $y^*(\alpha)$ que depende suavemente de α. A derivada do lucro ótimo π em relação a α é:

$$\frac{d\pi}{d\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(p\alpha y - c(y)\right) = py > 0$$

Como era de se esperar, um aumento da fração de microprocessadores sem defeito aumenta o lucro da firma. Mais uma vez, conseguimos determinar isso sem realmente resolver em termos de nível de produção ótimo.

É claro que o Teorema 19.4 generaliza facilmente para o caso em que há mais de um parâmetro. Tratamos de um parâmetro de cada vez e verificamos que

$$\frac{d}{da_i} f\left(x_1^*(\mathbf{a}),\ldots,x_n^*(\mathbf{a});a_1,\ldots,a_k\right) = \frac{\partial}{\partial a_i} f\left(x_1^*(\mathbf{a}),\ldots,x_n^*(\mathbf{a});a_1,\ldots a_k\right)$$

Problemas com Restrições

O Teorema da Envoltória mais geral trata de problemas *condicionados* nos quais há parâmetros tanto na função objetivo quanto nas restrições. Por exemplo, considere o problema de maximizar $f(\mathbf{x}; a)$ sujeita a $h_1(\mathbf{x}; a) = 0, \ldots, h_k(\mathbf{x}; a) = 0$. Se f não depender de a e se cada $h_i(\mathbf{x}; a)$ puder ser escrita como $h_i(\mathbf{x}) - a$, então estaremos de volta à situação do Teorema 19.2. Portanto, o caso em questão é mais geral do que os dois outros casos que estudamos. Contudo, a resposta é quase tão imediata como naqueles casos. Como indica o próximo teorema, a taxa de variação de $f(\mathbf{x}^*(a); a)$ em relação a a é igual à derivada *parcial* em relação a a, não de f mas sim da função lagrangiana correspondente.

Teorema 19.5 Sejam $f, h_1, \ldots, h_k: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ funções C^1. Seja $\mathbf{x}^*(a) = \left(x_1^*(a), \ldots, x_n^*(a)\right)$ a solução do problema de maximizar $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}; a)$ no conjunto-restrição

$$h_1(\mathbf{x}; a) = 0, \ldots, h_k(\mathbf{x}; a) = 0$$

para qualquer escolha do parâmetro a. Suponha que $\mathbf{x}^*(a)$ e os multiplicadores de Lagrange $\mu_1(a), \ldots, \mu_k(a)$ são funções C^1 de a e que vale a QRND. Então,

$$\frac{d}{da} f\left(\mathbf{x}^*(a); a\right) = \frac{\partial L}{\partial a}\left(\mathbf{x}^*(a), \mu(a); a\right) \tag{12}$$

onde L é o lagrangiano natural deste problema.

Observe que, como na expressão (10), o lado esquerdo de (12) é uma derivada total, enquanto que o lado direito é uma derivada parcial. A prova do Teorema 19.5 é semelhante às provas dos Teoremas 19.1 e 19.4 e será deixada como exercício.

Exemplo 19.6 Modifique a restrição no Exemplo 18.7 de $x^2 + y^2 \leq 1$ para $x^2 + 1{,}1y^2 \leq 1$, mantendo a função objetivo $f(x, y) = xy$. Se escrevermos ambas as restrições como $x^2 + ay^2 \leq 1$, o lagrangiano para o problema parametrizado é

$$L(x, y, \lambda; a) = xy - \lambda\left(x^2 + ay^2 - 1\right)$$

A solução obtida para o problema original ($a = 1$) é $x = y = 1/\sqrt{2}$, $\lambda = 1/2$. O teorema da envoltória diz que quando a passa de 1 para 1,1, o valor ótimo de f passa para, aproximadamente,

$$\frac{\partial L}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}; 1\right) \cdot (0{,}1)$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial a} = -\lambda y^2 = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

o valor ótimo decresce aproximadamente 0,1/4 = 0,025, passando para 0,475. Podemos calcular diretamente que a solução do novo problema é $x = 1/\sqrt{2}$, $y = 1/\sqrt{2,2}$, com valor máximo da função objetivo f igual a aproximadamente 0,4767.

Todos os teoremas das últimas duas seções têm duas hipóteses básicas: a dependência suave dos máximos e multiplicadores em relação aos parâmetros e a qualificação de restrição não-degenerada (QRND). Na Seção 19.4, examinaremos essas duas hipóteses com mais cuidado e as reformularemos em termos de propriedades das funções objetivo e restrição do problema.

EXERCÍCIOS

19.10 Escreva uma prova detalhada do Teorema 19.5.

19.11 Recupere o enunciado do Teorema do Multiplicador de Lagrange (Teorema 19.1) a partir do enunciado do Teorema 19.5.

19.12 Use o Exercício 18.2 e o Teorema da Envoltória para estimar as distâncias máxima e mínima da origem à elipse $x^2 + xy + 0{,}9y^2 = 3$.

19.13 Use o Exemplo 18.13 e o Teorema da Envoltória para estimar o valor máximo de $x^2 + x + 4{,}1y^2$ no conjunto-restrição $2x + 2y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

19.3 CONDIÇÕES DE SEGUNDA ORDEM

Na análise de um modelo econômico, muitas vezes as condições *de primeira ordem* para um problema de maximização fornecem um princípio econômico. As condições *de segunda ordem* correspondentes fornecem alguns ajustes finos desses princípios. Por exemplo, como observamos na Seção 3.6, no caso de uma firma num mercado em concorrência perfeita, a condição de primeira ordem para maximizar o lucro implica que a receita marginal seja igual ao custo marginal no nível de produção que maximiza o lucro. A condição de segunda ordem para maximizar o lucro requer que, no nível de produção que maximiza o lucro, a firma deva ter *custo marginal crescente*, como ilustra a Figura 19.1. De um ponto de vista computacional, a condição de segunda ordem muitas vezes pode ajudar a escolher um máximo em meio a um conjunto de candidatos que satisfazem as condições de primeira ordem. Por exemplo, as condições de segunda ordem eliminariam $q = q_1$ como um nível de produção que maximiza o lucro na Figura 19.1.

Além disso, as condições de segunda ordem de um problema de maximização desempenham um papel na análise de estática comparativa da solução desse problema. Como acabamos de mencionar, as condições de primeira ordem descrevem as relações que devem ocorrer entre as variáveis exógenas e as variáveis endógenas na solução ótima. Na estática comparativa ou análise de sensibilidade, perguntamos como as variações nas variáveis exógenas afetam os valores ótimos das variáveis endógenas. Para responder esta pergunta, dependemos do Teorema da Função Implícita e calculamos as diferenciais totais das condições de primeira ordem. Assim, somos levados naturalmente a trabalhar com um sistema de equações lineares cu-

A primeira qualificação de restrição no enunciado do Teorema 19.12 é a QRND que estivemos usando em todo o Capítulo 18. A segunda qualificação de restrição é a condição que Kuhn e Tucker utilizaram em seu trabalho pioneiro sobre problemas com restrições de desigualdade. A condição foi elaborada para eliminar as cúspides do conjunto-restrição, como a do Exemplo 19.9. (veja Exercício 19.23.) A terceira qualificação de restrição requer que o conjunto-restrição tenha um interior não-vazio e que as funções de restrição sejam convexas.

As últimas três qualificações de restrição no Teorema 19.12 são particularmente úteis nas aplicações econômicas, porque são hipóteses sobre o comportamento geral das funções restrição, suposições estas que são comuns na teoria econômica. A condição *e* no Teorema 19.12 é especialmente importante, porque restrições lineares são comuns em modelos econômicos. Por exemplo, podemos automaticamente tomar $\lambda_0^* = 1$ no problema de maximização da utilidade do Exemplo 18.1 porque ali todas as funções restrição são lineares. A mesma afirmação pode ser feita sobre os problemas nos Exemplos 18.9 e 18.13. Existem livros inteiros dedicados a problemas de programação linear, que são problemas de otimização condicionada nos quais a função objetivo e todas as funções restrição são lineares. Pelo Teorema 19.12 podemos tomar $\lambda_0^* = 1$ em todos esses problemas. Podemos tomar $\lambda_0^* = 1$ no Exemplo 18.7 porque sua função restrição é convexa. A prova do Teorema 19.12 é uma aplicação do Lema de Farkas, que omitiremos.

Para problemas de minimização com restrições de desigualdade do tipo $g_i(x) \geq b_i$, o Teorema 19.12 ainda vale desde que invertamos as duas desigualdades $\leq$ da condição *b* e troquemos entre si as palavras "côncavo" e "convexo" nas condições *c* e *d*.

EXERCÍCIOS

19.20 Seguindo as indicações no Exemplo 19.10, desenvolva a aplicação análoga do Teorema 19.11 para o Exemplo 18.13.

19.21 Qual das últimas três qualificações de restrição no Teorema 19.12 vale para a função restrição nos Exercícios 18.10, 18.11, 18.12, 18.17 e 18.18?

19.22 Considere o problema de maximizar x sujeita a $y - x^4 \leq 0$, $x^3 - y \leq 0$ e $x \leq 1/2$. Tente resolver esse problema com e sem utilizar um multiplicador λ_0 para a função objetivo.

19.23 Confirme que a qualificação de restrição *b* do Teorema 19.12 não está satisfeita no Exemplo 19.9.

19.6 PROVAS DAS CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção final apresentamos provas completas dos principais teoremas do Capítulo 18. Para alguns desses teoremas já apresentamos argumentos geométricos para versões de dimensões baixas. Contudo, os resultados do Capítulo 18 são suficientemente importantes a ponto de justificar provas detalhadas e completas.

Além disso, as provas que apresentamos aqui são bons exemplos das provas matemáticas que encontramos em teoria econômica avançada. Elas usam muito da teoria matemática desenvolvida nos capítulos anteriores deste livro. Em particular, elas dependem fundamentalmente:

(1) do Teorema da Função Implícita (Seção 15.3),

(2) da Regra da Cadeia para funções de várias variáveis (Seção 14.5), e

(3) do seguinte fato: as linhas de uma matriz $m \times n$ (com $m \leq n$) são vetores n-dimensionais linearmente independentes se, e somente se, a matriz tem posto m.

Vamos elaborar esta última afirmação. Na Seção 7.4 definimos o *posto* de uma matriz A de tamanho $m \times n$ como o número de linhas não-nulas em sua forma escalonada por linhas A_R. Em particular, se A tem posto m, todas as m linhas de A_R são não-nulas. Como cada linha de A_R começa com mais zeros do que a linha acima, é fácil verificar que as linhas de A_R são linearmente independentes (ver Lema 27.2). Contudo, podemos ir e voltar entre as linhas de A e as linhas de A_R simplesmente pela adição de uma linha com um múltiplo de uma outra linha. Então, todas as linhas de A_R são linearmente independentes se, e somente se, todas as linhas de A forem linearmente independentes. Assim, vemos que a Afirmação 3 acima é verdadeira. Veja a Seção 27.3 para uma discussão completa.

Prova dos Teoremas 18.1 e 18.2: Restrições de Igualdade

Estamos considerando que:

(1) $\mathbf{x}^*$ maximiza f no conjunto-restrição

$$h_1(\mathbf{x}^*) = c_1, \ldots, \mathbf{h}_m(\mathbf{x}^*) = c_m \tag{33}$$

(2) a matriz jacobiana $D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$ de tamanho $m \times n$ das funções restrição $\mathbf{h}$ tem posto máximo m em $\mathbf{x}^*$:

$$m = \text{posto } D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \text{posto} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} \tag{34}$$

Inicialmente afirmamos que a matriz jacobiana de tamanho $(m + 1) \times n$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} \tag{35}$$

não tem posto máximo. Seja $c_0 = f(\mathbf{x}^*)$. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= c_0 \\ h_1(x_1, \ldots, x_n) &= c_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ h_m(x_1, \ldots, x_n) &= c_m \end{aligned} \tag{36}$$

Sabemos que $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ é uma solução do sistema (36). Pense nos lados direitos $c_0, c_1,\ldots, c_m$ como variáveis exógenas. Então, a matriz (35) é simplesmente a jacobiana do sistema (36) em relação às variáveis endógenas $x_1,\ldots, x_n$.

Vamos supor que a matriz (35) *tenha* posto máximo $m + 1$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, podemos variar os c_i um pouquinho para c_i' e ainda encontrar uma solução $x',\ldots,x_n'$ para o sistema revisado (36) com os c_i' do lado direito. Em particular, poderíamos encontrar uma solução $x_1^{**},\ldots,x_n^{**}$ do sistema perturbado

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n) &= c_0+\varepsilon \\ h_1(x_1,\ldots,x_n) &= c_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ h_m(x_1,\ldots,x_n) &= c_m \end{aligned} \tag{37}$$

onde ε é um número *positivo* pequeno. Olhando para as últimas m equações em (37), vemos que $(x_1^{**},\ldots,x_n^{**})$ ainda satisfaz as restrições (37). Contudo, comparando a primeira equação de (36) com a primeira equação de (37), vemos que

$$f(\mathbf{x}^{**}) > f(\mathbf{x}^*)$$

pois $c_0 + \varepsilon > c_0$. Isto contraria nossa hipótese de que $\mathbf{x}^*$ maximiza f no conjunto-restrição (33). Concluímos que a matriz (35) não tem posto $m + 1$. Isto significa que suas $m + 1$ linhas são linearmente dependentes, ou seja, que existem escalares $\alpha_0, \alpha_1,\ldots, \alpha_m$ não todos nulos, tais que

$$\alpha_0\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m\begin{pmatrix} \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Em seguida mostraremos que a QRND (34) implica que $\alpha_0 \neq 0$. Realmente, se $\alpha_0 = 0$ em (38), então $\nabla h_1(\mathbf{x}^*),\ldots, \nabla h_m(\mathbf{x}^*)$ são linearmente dependentes por (38). Isto significa que a matriz (34), que tem os $\nabla h_i(\mathbf{x}^*)$ como suas m linhas, *não* tem posto máximo, o que contraria a hipótese *b*. Concluímos que $\alpha_0 \neq 0$.

Finalmente, divida (38) pelo número não-nulo α_0 e escreva $\mu_i = -\alpha_i/\alpha_0$, para cada $i = 0,\ldots, m$. Então, (38) fornece

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \mu_1\nabla h_1(\mathbf{x}^*) - \cdots - \mu_m\nabla h_m(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

sendo precisamente a conclusão do Teorema 18.2.

Note que se não considerarmos a QRND (34), então obteremos a conclusão do Teorema 19.11 de Fritz John para restrições de igualdade.

Prova dos Teoremas 18.3 e 18.4: Restrições de Desigualdade

Passamos às provas dos teoremas correspondentes para restrições de *desigualdades*. Agora, estamos considerando que:

(1) $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ maximiza f no conjunto-restrição

$$g_1(\mathbf{x}) \leq b_1, \ldots, g_k(\mathbf{x}) \leq b_k \tag{39}$$

(2) somente $g_1, \ldots, g_e$ são ativas em $\mathbf{x}^*$:

$$g_1(\mathbf{x}^*) = b_1, \ldots, g_e(\mathbf{x}^*) = b_e \tag{40}$$

$$g_{e+1}(\mathbf{x}^*) < b_{e+1}, \ldots, g_k(\mathbf{x}^*) < b_k \tag{41}$$

(3) a matriz jacobiana $D\mathbf{g}_E(\mathbf{x}^*)$ de tamanho $e \times n$ tem posto máximo e, ou seja,

$$e = \text{posto } D\mathbf{g}_E(\mathbf{x}^*) = \text{posto} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_e}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_e}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Como as g_i são funções contínuas, existe uma bola aberta $B = B_r(\mathbf{x}^*)$ de raio $r > 0$ em torno de $\mathbf{x}^*$ tal que $g_j(\mathbf{x}) < b_j$ para quaisquer $\mathbf{x} \in B$ e $j = e + 1, \ldots, k$. Até o final desta prova estaremos trabalhando no conjunto aberto B.

Observe que $\mathbf{x}^*$ maximiza f em B no conjunto-restrição

$$g_1(\mathbf{x}) = b_1, \ldots, g_e(\mathbf{x}) = b_e \tag{43}$$

pois se houvesse um outro ponto $\mathbf{x}^{**}$ em B que satisfizesse (43) e desse um valor maior de f, então esse ponto forneceria um valor de f maior no conjunto-restrição original (39) e contradiria a definição de $\mathbf{x}^*$. Além disso, por (42), $\mathbf{x}^*$ satisfaz a QRND para o problema de maximizar f no conjunto-restrição (43). Portanto, pelo Teorema 18.2, existem $\mu_1^*, \ldots, \mu_e^*$ tais que

$$\begin{gathered} \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*, \mu^*) = 0, \ldots, \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*, \mu^*) = 0 \\ g_1(\mathbf{x}^*) - b_1 = 0, \ldots g_e(\mathbf{x}^*) - b_e = 0 \end{gathered} \tag{44}$$

onde $$\hat{L}(\mathbf{x}, \mu) \equiv f(\mathbf{x}) - \mu_1[g_1(\mathbf{x}) - b_1] - \cdots - \mu_e[g_e(\mathbf{x}) - b_e]$$

Agora considere o lagrangiano usual

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \equiv f(\mathbf{x}) - \lambda_1 \cdot [g - 1(\mathbf{x}) - b_1] - \cdots - \lambda_k \cdot [g_k(\mathbf{x}) - b_k] \tag{45}$$

Tome $\lambda_i^* = \mu_i^*$ para $i = 1,..., e$ e $\lambda_j^* = 0$ para $j = e + 1,..., k$. Usando esta escolha dos λ_j^* e observando a equação (44), vemos que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ é uma solução das seguintes $n + k$ equações a $n + k$ incógnitas:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*,\lambda^*) = 0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*,\lambda^*) = 0 \tag{46}$$

$$\lambda_1^* \cdot \left[g_1(\mathbf{x}^*) - b_1\right] = 0,\ldots,\lambda_e^* \cdot \left[g_e(\mathbf{x}^*) - b_e\right] = 0$$

$$\lambda_{e+1}^* \cdot \left[g_{e+1}(\mathbf{x}^*) - b_{e+1}\right] = 0,\ldots,\lambda_k^* \cdot \left[g(\mathbf{x}^*) - b_k\right] = 0$$

Exceto pela condição que todos os λ_i são ≥ 0, completamos a prova das condições de primeira ordem do Teorema 18.4. Passamos agora a provar que os λ_i devem ser ≥ 0.

Considere o sistema de e equações a $n + e$ variáveis:

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\ldots,x_n) &= b_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ g_e(x_1,\ldots x_n) &= b_e \end{aligned} \tag{47}$$

Pela condição de posto (42) e pelo Teorema da Função Implícita (Teorema 15.7), existem e coordenadas $x_{j_1},\ldots,x_{j_e}$ tais que podemos considerar o sistema (47) como definindo $x_{j_1},\ldots,x_{j_e}$ implicitamente em termos do resto dos x_i e todos os b_j. Neste último conjunto de variáveis exógenas, mantenha $b_2,..., b_e$ constantes, mantenha os x_j exógenos constantes e permita que b_1 cresça linearmente: $t \mapsto b_1 - t$ para $t \geq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, variando a variável exógena b_1, ainda podemos resolver o sistema (47) em $x_{j_1},\ldots,x_{j_e}$. Isto significa, em particular, que existe uma curva $\mathbf{x}(t)$ que é C^1, definida para $t \in [0, e)$, tal que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$ e, para cada $t \in [0, e)$,

$$g_1(\mathbf{x}(t)) = b_1 - t \quad \text{e} \quad g_j(\mathbf{x}(t)) = b_j \quad \text{para} \quad j = 2,..., e. \tag{48}$$

Escreva $\mathbf{v} = \mathbf{x}'(0)$. Aplicando a Regra da Cadeia a (48), concluímos que

$$Dg_1(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} = -1 \qquad Dg_j(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} = 0 \quad \text{para} \quad j = 2,..., e. \tag{49}$$

Como $\mathbf{x}(t)$ está no conjunto-restrição para cada t e $\mathbf{x}^*$ maximiza f no conjunto-restrição, f deve ser não-crescente ao longo de $\mathbf{x}(t)$. Portanto,

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t))\Big|_{t=0} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \leq 0$$

Seja $D_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}^*)$ a derivada do lagrangiano (45) em relação a $\mathbf{x}$. Pelas nossas condições de primeira ordem (46) e (49), temos

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= D_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \\ &= Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} - \sum_i \lambda_i Dg_i(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \\ &= Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} - \lambda_1 Dg_1(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \\ &= Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} + \lambda_1.\end{aligned}$$

Como $Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{v} \leq 0$, concluímos que $\lambda_1 \geq 0$. Um argumento semelhante mostra que $\lambda_j \geq 0$ para $j = 2, \ldots, e$. Isto conclui a prova do Teorema 18.4.

O argumento que acabamos de apresentar funciona igualmente bem quando o problema contém tanto restrições de desigualdade quanto restrições de igualdade, desde que a QRND seja válida em $\mathbf{x}^*$ para o conjunto das restrições de igualdade e das restrições de desigualdade *ativas*.

EXERCÍCIOS

19.24 Escreva a prova de $\lambda_2 \geq 0$ na prova do Teorema 18.4.

19.25 Escreva uma prova minuciosa do Teorema 18.5 para restrições mistas.