

Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves



Lista 15.

Objetivos

.

Exercício 15.1.

Encontre o maximizador de $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeito às restrições $2x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Solução.

O Lagrangeano é

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(2x + y - 2) + \nu_1 x + \nu_2 y.$$

As condições de primeira ordem são

$$L_x = 2x - 2\lambda + \nu_1 = 0$$

$$L_y = 2y - \lambda + \nu_2 = 0$$

$$\lambda(2x + y - 2) = 0$$

$$\nu_1 x = 0$$

$$\nu_2 y = 0$$

$$\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Resolva enumerando os casos. Existe uma solução com $x = 0$? Se sim, então $\nu_1 = 2\lambda$ e $y = 2$. Se $y = 2$, então $\nu_2 = 0$, logo $\lambda = 4$ e $\nu_1 = 8$, o que é consistente com as CPO (Condições de Primeira Ordem). Esta é uma solução.

Existe uma solução com $y = 0$? Se sim, então $\nu_2 = \lambda$ e $x = 1$. Se $x = 1$, então $\nu_1 = 0$, logo $\lambda = 1$ e $\nu_2 = 1$, o que é consistente com as CPO. Esta é uma solução.

$x = y = \nu_1 = \nu_2 = \lambda = 0$ é uma solução.

Se nem x nem y são 0, então $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Então $x = 4/5$ e $y = 2/5$. Isso é consistente. Dentre esses quatro pontos, o máximo global ocorre em $(0, 2)$ e o valor de f é 4.

□

Exercício 15.2.

Encontre o maximizador de $f(x, y) = 2y^2 - x$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Solução.

O Lagrangeano é

$$L = 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \nu_1 x + \nu_2 y.$$

As condições de primeira ordem são

$$L_x = -1 - 2\lambda x + \nu_1 = 0$$

$$L_y = 4y - 2\lambda y + \nu_2 = 0$$

$$\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$\nu_1 x = 0$$

$$\nu_2 y = 0$$

$$\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

A única solução para as condições de primeira ordem é

$$x = 0 \quad y = 1 \quad \nu_1 = 1 \quad \nu_2 = 0 \quad \lambda = 2$$

portanto, o ótimo é $x = 0$ e $y = 1$, e o valor de f é 2. □

Exercício 15.3.

Considere o problema de maximizar $f(x, y, z) = xyz + z$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 + z \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

- (a) Escreva um conjunto completo de condições de primeira ordem para este problema.
- (b) Determine se a restrição $x^2 + y^2 + z \leq 6$ é ativa (binding) ou não em alguma solução.
- (c) Encontre uma solução das condições de primeira ordem que inclua $x = 0$.
- (d) Encontre três equações nas três incógnitas x, y, z que devem ser satisfeitas se $x \neq 0$ na solução.
- (e) Mostre que $x = 1, y = 1, z = 4$ satisfaz essas equações.

Solução.

(a) O problema é

$$\begin{aligned} \max \quad & xyz + z \\ \text{sujeito a} \quad & x^2 + y^2 + z \leq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= yz - 2\lambda x + v_1 = 0 \\ L_y &= xz - 2\lambda y + v_2 = 0 \\ L_z &= xy + 1 - \lambda + v_3 = 0 \\ \lambda(x^2 + y^2 + z - 6) &= 0 \\ v_1 x &= 0 \\ v_2 y &= 0 \\ v_3 z &= 0 \\ v_1 \geq 0, \quad v_2 \geq 0, \quad v_3 \geq 0, \quad \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

- (b) Não há solução para as condições de primeira ordem com $\lambda = 0$, porque $\lambda = 0$ implica $xy + 1 + v_3 = 0$, e esta equação não tem solução não negativa (pois $x, y, v_3 \geq 0$). Como $\lambda > 0$, a restrição deve ser ativa (binding) em qualquer solução para as condições de primeira ordem.
- (c) Se $x = 0$, então $v_1 = 2\lambda y$. Como $\lambda > 0$, $v_2 y = 2\lambda y^2 = 0$ implica $y = 0$ e $v_2 = 0$. Portanto $z = 6$, $v_1 = 0$, $v_3 = 0$, $\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = 1$, e $\lambda \geq 1$.
- (d) Se $x > 0$, então $v_1 = 0$, logo $yz = 2\lambda x$. Como $\lambda > 0$, y e z são ambos positivos, então v_2 e v_3 são ambos 0. Assim, quatro equações em quatro incógnitas são as condições de primeira ordem para L_x, L_y, L_z e a igualdade da restrição:

$$\begin{aligned} yz - 2\lambda x &= 0 \\ xz - 2\lambda y &= 0 \\ xy + 1 - \lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 + z &= 6. \end{aligned}$$

Resolvendo para λ e substituindo, obtemos o sistema de equações

$$-2x - 2x^2y + yz = 0$$

$$-2y - 2xy^2 + xz = 0$$

$$x^2 + y^2 + z = 6.$$

- (e) Este sistema de equações tem apenas uma solução que satisfaz todas as restrições de não negatividade: $x = 1$, $y = 1$, e $z = 4$. Então $\lambda = 2$.

□