Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 12.

Objetivos

-

Exercício 12.1.

Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

(a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

(b) $f(x,y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$

(d) $f(x,y) = x\sin y - y\cos x$

(e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

(f) $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = \sin x \cos y$

Solução.

(a) As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2 - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4 - 8y$$

Fazendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies -2 - 2x = 0 \implies 2x = -2 \implies x = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies 4 - 8y = 0 \implies 8y = 4 \implies y = \frac{1}{2}$$

O único ponto crítico é $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

As derivadas de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$$

A matriz Hessiana $Hess\ f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ é constante e diagonal. Seus autovalores são os elementos da diagonal: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -8$. Como ambos os autovalores são negativos ($\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$), a função tem um máximo local no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

O valor do máximo local é:

$$f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 9 - 2(-1) + 4\left(\frac{1}{2}\right) - (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 11$$

(b) As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2 - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2 - 2y$$

As derivadas de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Fazendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies y - 2 - 2x = 0 \implies y = 2x + 2$$

Substituindo $y = 2x + 2$ em $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$x - 2 - 2(2x + 2) = 0$$

$$x - 2 - 4x - 4 = 0$$

$$-3x - 6 = 0 \implies -3x = 6 \implies x = -2$$

Usando $x = -2$ em $y = 2x + 2$:

$$y = 2(-2) + 2 = -4 + 2 = -2$$

O único ponto crítico é $(-2, -2)$.

Calculamos os autovalores da Hessiana $Hess\ f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda+2)^2 = 1 \implies \lambda + 2 = \pm 1$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Como ambos os autovalores são negativos ($\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$), a função tem um máximo local no ponto $(-2,-2)$.

O valor do máximo local é:

$$f(-2,-2) = (-2)(-2) - 2(-2) - 2(-2) - (-2)^2 - (-2)^2 = 4$$

Análise por Menores Principais (Discriminante):

Calculamos o discriminante $D(x,y)$:

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $D(-2,-2) = 3 > 0$ e $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2) = -2 < 0$, a função tem um máximo local no ponto $(-2,-2)$.

(c) Expandindo a função:

$$f(x,y) = x - x^2 y - y + xy^2$$

As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - 1 + 2xy$$

Fazendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$:

$$\begin{aligned} 1 - 2xy + y^2 &= 0 \quad \text{(i)} \\ -x^2 - 1 + 2xy &= 0 \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

Somando (i) e (ii):

$$(1-2xy+y^2)+(-x^2-1+2xy)=0 \implies y^2-x^2=0 \implies y=\pm x$$

- Caso $y=x$: Substituindo em (i), $1-2x^2+x^2=0 \implies 1-x^2=0 \implies x=\pm 1$. Pontos críticos: $(1,1)$ e $(-1,-1)$.
- Caso $y=-x$: Substituindo em (i), $1+2x^2+x^2=0 \implies 1+3x^2=0$, que não tem solução real.

Os pontos críticos são $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

As derivadas de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2x+2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$$

A matriz Hessiana é:

$$Hess\ f(x,y)=\begin{pmatrix} -2y & 2y-2x \\ 2y-2x & 2x \end{pmatrix}$$

Análise do ponto $(1,1)$:

$$Hess\ f(1,1)=\begin{pmatrix} -2(1) & 2(1)-2(1) \\ 2(1)-2(1) & 2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz é diagonal, $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=2$. Como os autovalores têm sinais opostos, $(1,1)$ é um ponto de sela.

Análise do ponto $(-1,-1)$:

$$Hess\ f(-1,-1)=\begin{pmatrix} -2(-1) & 2(-1)-2(-1) \\ 2(-1)-2(-1) & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A matriz é diagonal, $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=-2$. Como os autovalores têm sinais opostos, $(-1,-1)$ é um ponto de sela.

(d) $f(x,y) = x\sin y - y\cos x$ As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y + y\sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y - \cos x$$

Para encontrar os pontos críticos, devemos resolver o sistema:

$$\sin y + y\sin x = 0$$
$$x\cos y - \cos x = 0$$

Este sistema não possui soluções algébricas simples.

(e) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

O denominador x^2+y^2+1 é sempre ≥ 1, portanto nunca é zero. Para $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, precisamos que $2x = 0 \implies x = 0$. Para $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, precisamos que $2y = 0 \implies y = 0$. O único ponto crítico é $(0,0)$.

As derivadas de segunda ordem são (usando a regra do quociente):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2y^2-2x^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2+1) - 2y(2y)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{0-2x(2y)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Avaliando no ponto crítico $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{0-0+2}{(0+0+1)^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{0-0+2}{(0+0+1)^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{0}{(0+0+1)^2} = 0$$

A matriz Hessiana em $(0,0)$ é:

$$Hess\ f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz Hessiana $Hess\ f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é diagonal. Seus autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$. Como ambos os autovalores são positivos ($\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$), a função tem um mínimo local no ponto $(0,0)$.

O valor do máximo local é:

$$f(0,0) = \ln(1) = 0$$

(f) $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$ As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + x \cdot e^{-x^2-y^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot e^{-x^2-y^2}(-2y) = -2xye^{-x^2-y^2}$$

Como $e^{-x^2-y^2}$ é sempre positivo, os pontos críticos são dados por:

$$\begin{aligned} 1-2x^2 &= 0 \quad \text{(i)} \\ -2xy &= 0 \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

De (i), $x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. De (ii), $x = 0$ ou $y = 0$. Como x não pode ser 0 (pela equação (i)), devemos ter $y = 0$. Os pontos críticos são $P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

As derivadas de segunda ordem são (usando a regra do produto):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-4x)e^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2x) = (4x^3-6x)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2x)e^{-x^2-y^2} + (-2xy)e^{-x^2-y^2}(-2y) = (-2x+4xy^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-2y)e^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2y) = (4x^2y-4y)e^{-x^2-y^2}$$

Análise do ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$:

Note que $x^2 = 1/2$ e $y = 0$. O fator $e^{-x^2-y^2} = e^{-1/2}$.

$$f_{xx} = \left(4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)e^{-1/2} = -2\sqrt{2}e^{-1/2}$$

$$f_{yy} = (-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0)e^{-1/2} = -\sqrt{2}e^{-1/2}$$

$$f_{xy} = (0-0)e^{-1/2} = 0$$

$$Hess\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}e^{-1/2} \end{pmatrix}$$

A matriz hessiana é diagonal, logo $\lambda_1 = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$. Como os autovalores são negativos, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ é um máximo local.

O valor do máximo local é:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

Análise do ponto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$: Note que $x^2 = 1/2$ e $y = 0$. O fator $e^{-x^2-y^2} = e^{-1/2}$.

$$f_{xx} = \left(4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)e^{-1/2} = 2\sqrt{2}e^{-1/2}$$

$$f_{yy} = (-2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0)e^{-1/2} = \sqrt{2}e^{-1/2}$$

$$f_{xy} = (0-0)e^{-1/2} = 0$$

$$Hess\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}e^{-1/2} \end{pmatrix}$$

A matriz hessiana é diagonal, logo, $\lambda_1 = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}e^{-1/2} > 0$. Como os autovalores são positivos, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ é um mínimo local.

O valor do mínimo local é:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

(g) $f(x, y) = \sin x \cos y$ As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y$$

Para $f_x = 0$, temos $\cos x = 0$ ou $\cos y = 0$. Para $f_y = 0$, temos $\sin x = 0$ ou $\sin y = 0$.

Caso 1: $\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Para $f_y = 0$, temos $-\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)\sin y = 0$. Como $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \pm 1 \neq 0$, devemos ter $\sin y = 0 \implies y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pontos Críticos (Tipo 1): $P_1 = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, k\pi\right)$.

Caso 2: $\cos y = 0 \implies y = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Para $f_y = 0$, temos $-\sin x \sin(\frac{\pi}{2} + m\pi) = 0$. Como $\sin(\frac{\pi}{2} + m\pi) = \pm 1 \neq 0$, devemos ter $\sin x = 0 \implies x = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$. Pontos Críticos (Tipo 2): $P_2 = \left(j\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right)$.

As derivadas de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y$$

A matriz Hessiana é $H = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}$.

Análise dos pontos $P_1 = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi, k\pi\right)$**:** Temos $\cos x = 0$ e $\sin y = 0$. $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$. $\cos y = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

$$f_{xx} = -(-1)^n(-1)^k = -(-1)^{n+k}$$

$$f_{yy} = -(-1)^n(-1)^k = -(-1)^{n+k}$$

$$f_{xy} = -(0)(0) = 0$$

$$Hess\ f(P_1) = \begin{pmatrix} -(-1)^{n+k} & 0 \\ 0 & -(-1)^{n+k} \end{pmatrix}$$

A matriz é diagonal, logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = -(-1)^{n+k}$.

- Se $n + k$ é par, $\lambda_1, \lambda_2 = -1$. Temos um máximo local.
- Se $n + k$ é ímpar, $\lambda_1, \lambda_2 = 1$. Temos um mínimo local.

Para os máximos locais temos $f = 1$ e para os mínimos locais $f = -1$.

Análise dos pontos $P_2 = \left(j\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right)$**:** Temos $\sin x = 0$ e $\cos y = 0$. $\cos x = \cos(j\pi) = (-1)^j$. $\sin y = \sin(\frac{\pi}{2} + m\pi) = (-1)^m$.

$$f_{xx} = -(0)(0) = 0$$

$$f_{yy} = -(0)(0) = 0$$

$$f_{xy} = -(-1)^j(-1)^m = -(-1)^{j+m}$$

$$Hess\ f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^{j+m} \\ -(-1)^{j+m} & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz é diagonal, logo, $\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (f_{xy})^2 = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$. Como os autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ têm sinais opostos, todos os pontos P_2 são pontos de sela.