Lista 4 - Programação Dinâmica em Tempo Contínuo
Gabarito

Exercício 1 (Diagrama de Fases, RCK e Notícias)

Considere uma economia em tempo contínuo com um planejador social representativo. As preferências são dadas por

$$U\left(c(t)\right) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\,dt \qquad \rho > 0, \theta > 0 \text{ e } \theta \neq 1$$

A produção é dada por $y(t) = A(t)k(t)^\alpha$, com $\alpha \in (0,1)$. O estoque de capital evolui segundo

$$\dot{k}(t) = A(t)k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t) \qquad k(0) = k_0 > 0, \delta \in (0,1)$$

O processo de TFP $A(t)$ é determinístico e piecewise-constante, conforme especificado nos itens abaixo. O planejador escolhe $c(t)$ (equivalente a $k(t)$ via restrição de recursos) para maximizar U sujeito a dinâmica de $k(t)$ e $k(t) \geq 0, \forall t$.

(a) Seja $V(k)$ o valor do problema recursivo. Escreva a equação HJB do planejador e derive: as condições de primeira ordem, a equação de Euler para o consumo e os loci $\dot{k}(t) = 0$ e $\dot{c}(t) = 0$ no plano (k, c).

Resposta:

A HJB toma a forma

$$\rho V(k) = \max_{c\geq 0}\left\{\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + V'(k)\dot{k}\right\} = \max_{c\geq 0}\left\{\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + V'(k)\left[Ak^\alpha - c - \delta k\right]\right\}$$

A condição de primeira ordem com respeito à c é dado por

$$[c]: \quad c^{-\theta} = V'(k) \quad \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \quad -\theta c^{-\theta-1}\dot{c} = V''(k)\dot{k}$$

Pelo Teorema do Envelope, temos

$$\rho V'(k) = V''(k)\dot{k} + V'(k)[\alpha A k^{\alpha-1} - \delta]$$

Juntando tudo, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho c^{-\theta} &= -\theta c^{-\theta-1}\dot{c} + c^{-\theta}(\alpha A k^{\alpha-1} - \delta) \\ \rho &= -\theta c^{-1}\dot{c} + \alpha A k^{\alpha-1} - \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\Big[\alpha A k^{\alpha-1} - (\delta+\rho)\Big] \end{aligned}$$

Que é a nossa **equação de Euler**. Para obtermos os loci $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$ segue que

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow c = Ak^{\alpha} - \delta k \quad \text{ e } \quad \dot{c} = 0 \Rightarrow \alpha A k^{\alpha-1} = \delta + \rho$$

e isso nos dá que o steady-state será dado pelo par:

$$(k^*, c^*) = \left(\left(\frac{\alpha A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, (A(k^*)^{\alpha} - \delta k^*) \right)$$

(b) Assuma que os parâmetros dessa economia são

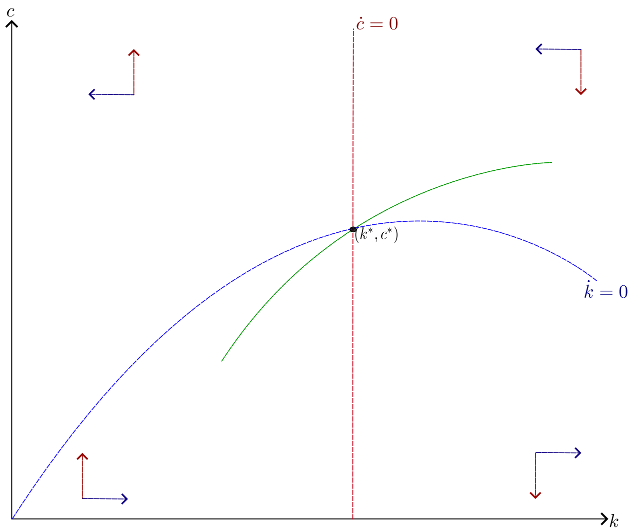
$$(\alpha, \delta, \rho, \theta) = (0.33, 0.08, 0.04, 2) \qquad A(t) \equiv 1$$

Encontre o estado estacionário (k^*, c^*) e esboce o diagrama de fases com o caminho de sela que converge para (k^*, c^*). (Pode esboçar ou fazer com código).

Resposta:

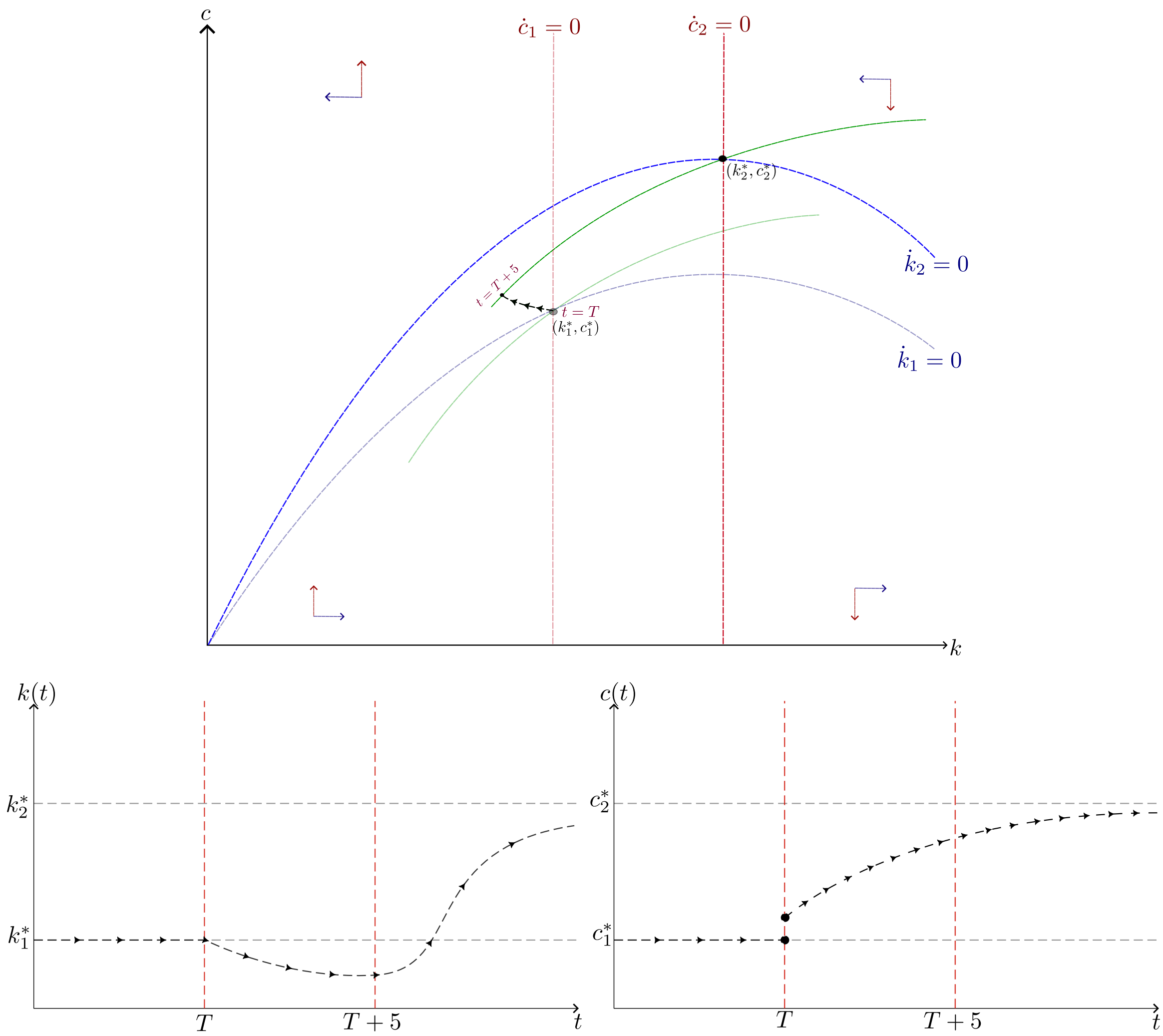
Plug-in os valores dados no enunciado obtemos

$$(k^*, c^*) = (4.5260, 1.2832)$$



(c) No instante $t = T$, anuncia-se que em $t = T + 5$ a produtividade muda permanentemente de $A(t) \equiv 1$ para $A(t) \equiv 1.5$. Mostre graficamente: (1) a trajetória no diagrama de fases (k, c) com indicação dos loci antes e após $t = T + 5$; (2) séries temporais ($t \mapsto c(t)$ e $t \mapsto k(t)$).

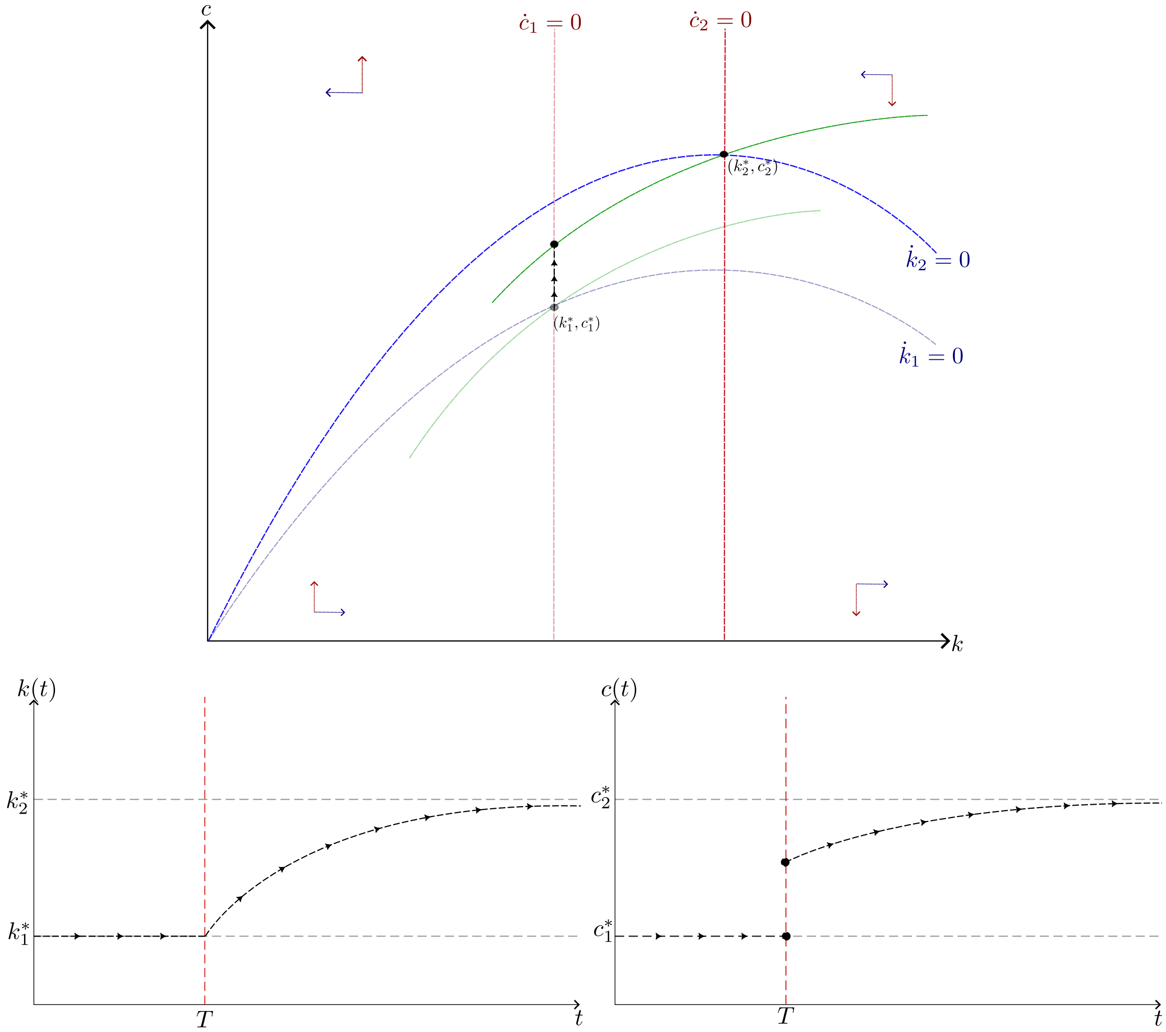
Resposta:



Escolhemos c_T (variável de controle) de modo que a trajetória (k_t, c_t), evoluindo entre T e $T+5$ segundo a dinâmica com a TFP antiga, chegue exatamente ao *braço estável* do novo estado estacionário no instante $t = T+5$. Em termos operacionais, aplicamos um pequeno salto inicial em c_T e, de T a $T+5$, deixamos (k_t, c_t) seguir a lei de movimento sob a TFP anterior; a escolha desse salto garante que (k_{T+5}, c_{T+5}) esteja sobre o braço estável do novo equilíbrio.

(d) Repita o item (c) para o caso em que a variação de produtividade para $A(t) \equiv 1.5$ ocorre imediatamente em $t = T$. Compare qualitativamente com o item anterior: o salto inicial de $c(t)$ e as trajetórias resultantes.

Resposta:



Como o choque de produtividade ocorre em $t = T$, o capital k é predeterminado e todo o ajuste inicial recai sobre o consumo. Assim, c realiza um **salto maior** $(c_T^+ - c_T^-)$ do que no item (c), posicionando (k_T, c_T^+) diretamente no braço estável do novo equilíbrio. A partir desse ponto, a trajetória segue esse braço em direção ao novo estado estacionário.

No item (c), havia uma janela até $T + 5$ sob a TFP antiga: podia-se escolher c_T de modo a chegar ao braço estável apenas no instante da mudança, o que permitia um salto menor e alguma suavização intertemporal do consumo. Aqui, como a mudança é instantânea, não há tempo para suavizar; o ajuste necessário deve ocorrer de imediato via c.

(e) Para o caso base do item (c), discuta como variações em θ e ρ afetam: (1) o tamanho do salto inicial de c, (2) o formato do caminho de ajuste (mais "suave" ou mais "abrupto") e (3) o tempo da convergência.

Resposta:

A regra de Euler é $\dot{c}/c = (1/\theta)\big(f'(k, A) - (\delta + \rho)\big)$.

(1) Salto inicial de c :

- $\theta \uparrow \Rightarrow$ *salto menor.* Com EIS menor, o agente valoriza mais a suavização intertemporal e ajusta menos o consumo no instante do choque.
- $\rho \uparrow \Rightarrow$ *salto maior.* Mais impaciência exige antecipar consumo; para um choque positivo de TFP (que eleva o novo nível de longo prazo), o salto inicial para cima é de maior magnitude.

(2) Formato do caminho de ajuste :

- $\theta \uparrow \Rightarrow$ trajetória *mais suave*: a menor EIS reduz a sensibilidade de $\dot{c}/c$ a desvios de $f(A, k)$ em relação a $\delta + \rho$.
- $\rho \uparrow \Rightarrow$ trajetória *mais abrupta*: a maior impaciência concentra o ajuste no curto prazo, com menos suavização após o salto inicial.

(3) Tempo de convergência :

- $\theta \uparrow \Rightarrow$ *convergência mais lenta.* Como $(1/\theta)$ é menor, o sistema reage mais devagar a $f'(A, k) - (\delta + \rho)$ e percorre o braço estável com meia-vida maior.
- $\rho \uparrow \Rightarrow$ *convergência mais rápida.* A maior impaciência (para dado $f'(A, k)$) amplia a distância em relação à condição $\dot{c} = 0$ fora do estado estacionário, aumentando o módulo do autovalor estável e encurtando a meia-vida.

Exercício 2 (Cake-eating com saltos de Poisson)

Maria Antonieta tem preferências em formato log para o consumo de brioche

$$U(c(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log(c(t))\, dt, \qquad \rho > 0$$

Seja $k(t)$ o estoque de brioche. Inicialmente, o brioche não cresce nem é produzido e nem se deprecia. Ela escolhe $c(t)$ sujeito à viabilidade de $k(t)$.

(a) A dinâmica é dada por $\dot{k}(t) = -c(t)$, com $k(0) = k_0 > 0$. Formule o problema recursivo e escreva a HJB da Maria Antonieta, definindo explicitamente a função valor $V(k)$. Encontre a trajetória ótima de $c(t)$ e $k(t)$. **Dica:** Conjecture a forma funcional $V(k) = A + B \log k$ e use um argumento de guess and verify.

Resposta:

A HJB é dada por

$$\rho V(k) = \max_{c \geq 0} \left\{ \log c + V'(k)\dot{k} \right\} = \max_{c \geq 0} \left\{ \log c - c \cdot V'(k) \right\}$$

Com a condição de primeira ordem

$$[c]: \quad \frac{1}{c} = V'(k)$$

Conjecturemos que $V(k) = A + B \log k$, então $V'(k) = \frac{B}{k}$ e, pela condição de primeira ordem, a política ótima de consumo segue $c = \frac{k}{B}$. Substituindo o guess na HJB e a política ótima, obtemos:

$$\rho(A + B \log k) = \log k - \log B - \frac{k}{B}\left(\frac{B}{k}\right)$$

Logo

$$\begin{aligned} &1)\ \rho B = 1 && \Rightarrow B = \frac{1}{\rho} \\ &2)\ \rho A = -\log B - 1 && \Rightarrow A = \frac{1}{\rho}\Bigg[\log(\rho) - 1\Bigg] \end{aligned}$$

Substituindo tudo no nosso Guess, chegamos

$$V(k) = \frac{1}{\rho}\Bigg[\log(\rho) - 1\Bigg] + \frac{1}{\rho}\log(k)$$

e a política ótima de consumo é dada por $c^*(k) = \rho k$. A dinâmica do estoque de brioche é dada, então, por $\dot{k}(t) = -\rho k(t)$. Podemos resolver essa EDO: (sugerindo $k = Ce^{-\lambda}t$)

- Solução homogênea: $-\lambda C e^{-\lambda t} - \rho C e^{-\lambda t} = 0$. Logo, $\lambda = \rho$.
- Solução particular: $k_0 = Ce^{-\rho 0}$. Logo, $C = k_0$.

Portanto, as soluções são admissíveis, a HJB vale com igualdade.

(b) Agora o brioche apodrece a taxa constante $\delta \in (0,1)$. A dinâmica, então, é dada por $\dot{k}(t) = -c(t) - \delta k(t)$. Reformule a HJB e obtenha as políticas ótimas.

Resposta:

A HJB é dada por

$$\rho V(k) = \max_{c \geq 0} \left\{ \log c + V'(k)\dot{k} \right\} = \max_{c \geq 0} \left\{ \log c + \cdot V'(k)(-c - \delta k) \right\}$$

Com a mesma condição de primeira ordem

$$[c]: \quad \frac{1}{c} = V'(k)$$

Conjecturamos a mesma forma funcional $V(k) = A + B \log k$. Obtemos a mesma política ótima. Substituindo o guess na HJB e a política ótima, obtemos

$$\rho(A + B \log k) = \log k - \log B + \frac{B}{k}\left(-\frac{k}{B} - \delta k\right)$$

Logo

$$\begin{aligned} &1)\ \rho B = 1 && \Rightarrow B = \frac{1}{\rho} \\ &2)\ \rho A = -\log B - 1 - \delta B && \Rightarrow A = \frac{1}{\rho}\left[\log(\rho) - 1 - \frac{\delta}{\rho}\right] \end{aligned}$$

O que nos leva a política ótima $c^*(k) = \rho k$ e a evolução do estoque como $k(t) = k_0 e^{-(\rho+\delta)t}$.

(c) Considere agora que com intensidade $\lambda > 0$, ocorre saltos que reduzem instantaneamente o estoque para $(1-\eta)k(t^-)$ com $\eta \in (0,1)$. Entre os saltos, a dinâmica é a mesma do item (b). Escreva a HJB com saltos (**Dica:** use um tempo do tipo $\lambda[V((1-\eta)k) - V(k)]$). Mostre que a política ótima segue a forma proporcional $c(t) = \alpha k(t)$ e caracterize α em função de $(\rho, \delta, \lambda, \eta)$.

Resposta:

A HJB vai ter a forma

$$\rho V(k) = \max_{c \geq 0} \left\{ \log c + V'(k)(-c - \delta k) + \lambda \left[V((1-\eta)k) - V(k)\right] \right\}$$

Note, no entanto, que a condição de primeira ordem não muda ($\frac{1}{c} = V'(k)$). De forma que vamos conjecturar a mesma forma funcional de novo $V(k) = A + B\log k$. Substituindo a política ótima e o guess

$$\rho(A+B\log k) = \log k - \log B + \frac{B}{k}\left[-\frac{k}{B} - \delta k\right] + \lambda\left[A + B(\log((1-\eta)) + \log k) - A - B\log k\right]$$

Logo

$$\begin{aligned} &1)\ \rho B = 1 && \Rightarrow B = \frac{1}{\rho} \\ &2)\ \rho A = -\log B - 1 - \delta B + \frac{\lambda}{\rho}\log(1-\eta) && \Rightarrow A = \frac{1}{\rho}\left[\log(\rho) - 1 - \frac{\delta}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho}\log(1-\eta)\right] \end{aligned}$$

Novamente, a função política do consumo é a mesma (uma fração constante de brioches). A evolução do estoque de brioches é dada pela lei das expectativas iteradas

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[k(t)\right] = -(\rho+\delta)\mathbb{E}[k(t)] + \lambda\mathbb{E}[(1-\eta-1)k(t)] = -(\rho+\delta+\lambda\eta)\mathbb{E}[k(t)]$$

Resolvendo essa EDO, chegamos em $\mathbb{E}[k(t)] = k_0 e^{-(\rho+\delta+\lambda\eta)t}$.

(d) Compare qualitativamente as funções políticas e as trajetórias dos casos (a), (b) e (c). Explique a intuição econômica de como δ, os saltos λ e a severidade η afetam a dinâmica de $k(t)$.

Resposta:

Em todos os casos (a)-(c), com utilidade log, δ, λ e η **não alteram a forma da regra ótima** (c é sempre proporcional ao estoque); eles afetam apenas a trajetória de k. Quanto a dinâmica de $k(t)$ e de $c(t)$:

(a) Sem depreciação e sem saltos:

$\dot{k} = -\rho k \;\Rightarrow\; k(t) = k_0 e^{-\rho t}$ e $c(t) = \rho k_0 e^{-\rho t}$. Trajetória suave (exponencial).

(b) Com depreciação δ:

$\dot{k} = -(\rho+\delta)k \;\Rightarrow\; k(t) = k_0 e^{-(\rho+\delta)t}$ e $c(t) = \rho k_0 e^{-(\rho+\delta)t}$. A depreciação acelera o esgotamento (meia-vida $= \ln 2/(\rho+\delta)$).

(c) Com saltos de Poisson (λ, η):

Entre saltos, $\dot{k} = -(\rho + \delta)k$; em cada salto τ_i, $k(\tau_i^+) = (1 - \eta)\, k(\tau_i^-)$ e, como $c = \rho k$, $c(\tau_i^+) = (1 - \eta)\, c(\tau_i^-)$. Em valor esperado,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[k(t)] = -(\rho + \delta)\mathbb{E}[k(t)] - \lambda\eta\, \mathbb{E}[k(t)] \;\Rightarrow\; \mathbb{E}[k(t)] = k_0\, e^{-(\rho+\delta+\lambda\eta)t}.$$

Assim, a trajetória esperada é mais rápida e apresenta quebras discretas nos instantes de salto.

A intuição econômica é que, com utilidade log (EIS $= 1$), o agente consome uma fração constante ρ do "estoque de riqueza" disponível, o que preserva a proporcionalidade $c = \rho k$ independentemente do ambiente. A depreciação δ e os saltos (mais frequentes $\lambda \uparrow$ ou mais severos $\eta \uparrow$) apenas reduzem k mais rapidamente (e, portanto, c), tornando o caminho *mais abrupto* e a convergência ao esgotamento *mais rápida*.

Exercício 3 (RBC contínuo e TFP markoviano)

Considere um agente representativo em tempo contínuo que escolhe um plano de consumo $c(t)$ para maximizar

$$U(c(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt, \qquad \rho > 0, \theta > 0, \theta \neq 1$$

A tecnologia é $y(t) = A_{s(t)}k(t)^\alpha$, com $\alpha \in (0, 1)$. O estado exógeno $s(t) \in 1, 2, 3$ segue uma cadeia de Markov em tempo contínuo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} - \lambda_{13} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} - \lambda_{23} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_{31} - \lambda_{32} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{ij} > 0\ (i \neq j),$$

e níveis de produtividade $0 < A_1 < A_2 < A_3$. O capital evolui conforme

$$\dot{k}(t) = A_{s(t)}k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t), \qquad \delta \in (0, 1), k(0) = k_0 > 0$$

com restrição de viabilidade $k(t) \geq 0$.

(a) Seja $V_i(k)$ o valor quando o estado é $s = i$. Escreva o sistema de equações HJB. Derive as CPOs e mostre que, para cada i, vale $u'(c) = V_i'(k)$ e ache a equação de Euler. (**Dica:** Deve ter um tempo de salto para cada V_i com $\lambda_{ij}[V_j(k) - V_i(k)]$).

Resposta:

A HJB no estado i é

$$\rho V_i(k) \;=\; \max_{c\geq 0}\left\{\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + V_i'(k)\left(A_i k^\alpha - c - \delta k\right)\right\} + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\big[V_j(k) - V_i(k)\big].$$

A condição de primeira ordem implica, para cada i,

$$[c]: \quad c^{-\theta} = V_i'(k) \quad \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \quad -\theta\, c^{-\theta-1}\,\dot{c} \;=\; V_i''(k)\,\dot{k}.$$

Pelo teorema do envelope (Benveniste–Scheinkman),

$$\rho V_i'(k) \;=\; V_i''(k)\,\dot{k} + V_i'(k)\left[A_i\alpha\, k^{\alpha-1} - \delta\right] + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\big[V_j'(k) - V_i'(k)\big].$$

Substituindo apenas $V_i'(k) = c^{-\theta}$ e $V_i''(k)\dot{k} = -\theta\, c^{-\theta-1}\dot{c}$,

$$\rho\, c^{-\theta} \;=\; -\theta\, c^{-\theta-1}\dot{c} + c^{-\theta}\big(A_i\alpha k^{\alpha-1} - \delta\big) + \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\big[V_j'(k) - c^{-\theta}\big].$$

Dividindo por $c^{-\theta}$ e rearranjando,

$$-\theta\,\frac{\dot{c}}{c} \;=\; \rho - \big(A_i\alpha k^{\alpha-1} - \delta\big) - \sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\left(\frac{V_j'(k)}{c^{-\theta}} - 1\right). \tag{$*$}$$

A equação $(*)$ contém a correção *em esperança* devida a possíveis saltos (termo do gerador). Contudo, a Euler que rege $\dot{c}/c$ é a dinâmica **entre saltos**, isto é, condicional a não ocorrer salto em $[t, t+\Delta t]$. Nesse evento, os incrementos de Poisson são nulos e o termo $\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}[\cdot]$ não atua na trajetória contínua. Assim, entre saltos,

$$\frac{\dot{c}}{c} \;=\; \frac{1}{\theta}\Big[\alpha A_i k^{\alpha-1} - (\delta+\rho)\Big].$$

Quando ocorre um salto $i \to j$ no instante τ, k é contínuo, mas a FOC passa a valer com V_j':

$$u'\big(c(\tau^+)\big) \;=\; V_j'\big(k(\tau)\big),$$

de modo que c pode sofrer salto. Ou seja, λ_{ij} afeta níveis e condições de salto, não a taxa de crescimento contínua de c entre saltos.

(b) Defina (k_i^*, c_i^*) como estado estacionário quando a produtividade permanece em i. Determine (k_i^*, c_i^*) para $i \in \{1, 2, 3\}$ e mostre que

$$k_1^* < k_2^* < k_3^*, \qquad c_1^* < c_2^* < c_3^*$$

Esboce, no plano (k, c), os loci $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$ de cada regime e indique, qualitativamente, os caminhos de sela associados.

Resposta:

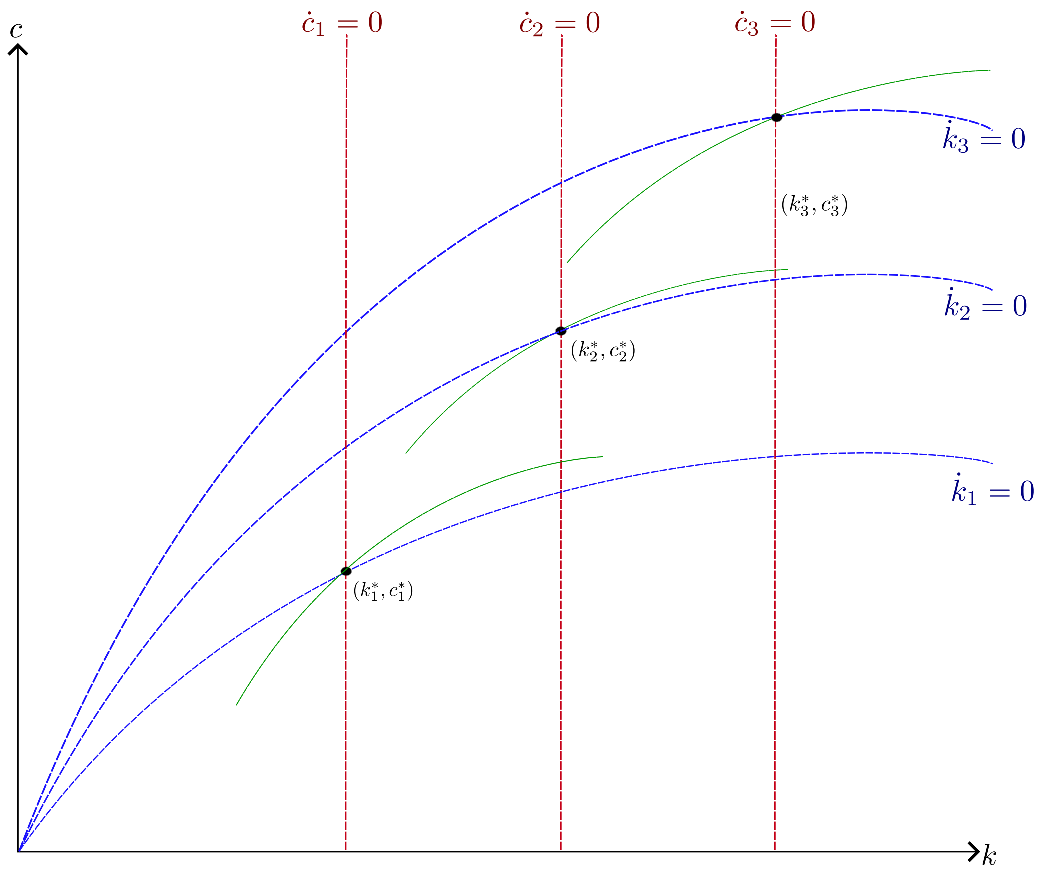
Dado um regime i, temos

$$\dot{c} = 0 \Rightarrow \alpha A_i k^{\alpha-1} = \rho + \delta \qquad \dot{k} = 0 \Rightarrow c = A_i k^{\alpha} - \delta k$$

E, então, os ponto de estado estacionário, é dado por

$$k_i^* = \left(\frac{\alpha A_i}{\rho + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad c_i^* = A_i \left(k_i^*\right)^{\alpha} - \delta k_i^*$$

E ai é direto observar que, como $0 < A_1 < A_2 < A_3$, então $k_1^* < k_2^* < k_3^*$ e $c_1^* < c_2^* < c_3^*$.



(c) Considere dois casos: (i) transições mais raras (i.e. λ_{ij} $(i \neq j)$ pequenos) e (ii) transições mais frequentes. Discuta como a possibilidade de alternância entre A_1, A_2, A_3 afeta a escolha inicial $c(0)$ e a trajetória $(k(t), c(t))$ relativamente ao caso "determinístico" com $A \equiv \overline{A}$, em que $\overline{A}$ é a média ponderada pela distribuição estacionária da cadeia. Explique porque as políticas ótimas **não** coincidem, em geral, com as de um modelo determinístico.

Resposta:

As políticas não coincidem, em geral, com as do modelo determinístico com $A \equiv \overline{A}$ por dois motivos estruturais: (i) u é côncava $(\theta > 0)$, logo $\mathbb{E}[u(c)] < u(\mathbb{E}[c])$ (Jensen), de modo que o risco em A não agrega linearmente no valor; (ii) a HJB contém o termo de salto $\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}[V_j(k) - V_i(k)]$, que altera o nível dos valores e a superfície estável global que seleciona $c(0)$.

Casos:

(i) **Transições raras** (λ_{ij} pequenos). A trajetória passa longos trechos determinísticos em cada A_i. A escolha inicial $c(0)$ fica próxima da que resolveria o problema determinístico no regime inicial, mas é ajustada pela possibilidade de cair/subir de A_2 para A_1/A_3: se $s(0)$ é alto, o risco de queda puxa $c(0) \downarrow$; se $s(0)$ é baixo, a opção de alta puxa $c(0) \uparrow$. A trajetória $(k(t), c(t))$ é piecewise determinada por $\dot{k} = A_s k^\alpha - c - \delta k$ e $\frac{\dot{c}}{c} = (\alpha A_s k^{\alpha-1} - \delta - \rho)/\theta$, com quinas em $\dot{c}$ nos instantes de transição.

(ii) **Transições frequentes** (λ_{ij} grandes). A exposição efetiva a quedas e subidas é alta. Com $\theta > 1$ (prudência maior; EIS $= 1/\theta$ menor), o agente suaviza mais: $c(0)$ tende a ficar **abaixo** do caso determinístico com $A \equiv \overline{A}$ se o estado inicial não é o mais alto, por cautela intertemporal. Dinamicamente, a trajetória é mais amortecida: menor inclinação de $\dot{c}/c$ e ajustes mais conservadores.

Portanto, se $s(0)$ é alto: medo de cair $\Rightarrow c(0) \downarrow$ versus $\overline{A}$. Se $s(0)$ é baixo: esperança de subir $\Rightarrow c(0) \uparrow$ versus $\overline{A}$. Quanto maior θ, menor a disposição a inclinar $\dot{c}/c$ e maior a cautela no nível de $c(0)$.

(d) Suponha que $\lambda_{13} = \lambda_{31} = 0$. Mostre, de forma qualitativa, o sinal de

$$\frac{\partial c(0)}{\partial \lambda_{21}} \quad \frac{\partial c(0)}{\partial \lambda_{23}}$$

quando o estado inicial é $s(0) = 2$. Interprete economicamente. Relacione com a curvatura de θ.

Resposta:

A elevação de λ_{21} aumenta a probabilidade de queda de A_2 para A_1 no curto prazo, elevando a cautela intertemporal e reduzindo $c(0)$. A elevação de λ_{23} aumenta a chance de subir para A_3, elevando a riqueza permanente esperada e aumentando $c(0)$. A magnitude de ambos os efeitos cresce com θ (maior curvatura $\Rightarrow$ maior prudência e maior sensibilidade de $c(0)$ aos riscos de transição).

$$\frac{\partial c(0)}{\lambda_{21}} < 0 \qquad \frac{\partial c(0)}{\lambda_{23}} > 0$$

(e) Demonstre que $V_3(k) > V_2(k) > V_1(k)$ para todo $k > 0$. Comente como θ amplifica ou atenua as diferenças de valore entre os regimes e como a presença de Λ entra na comparação.

Resposta:

$$V_3(k) > V_2(k) > V_1(k) \quad \forall\, k > 0$$

Prova (melhoria de política). Fixe $k > 0$ e $i < j$ com $A_j > A_i$. A política ótima sob A_i é factível no ambiente com A_j (restrição de recursos mais frouxa). Além disso, pode ser estritamente melhorada (por exemplo, aumentando um ε em c no instante inicial). Como $u' > 0$, o valor sob A_j é estritamente maior. Por transitividade, $V_3 > V_2 > V_1$.

Papel de θ. Quando θ aumenta (utilidade mais côncava, EIS menor), os ganhos marginais de produtividade rendem menos em utilidade: as diferenças $V_3 - V_2$ e $V_2 - V_1$ diminuem.

Papel de Λ. A matriz de transição afeta os valores via tempos esperados em cada regime (distribuição estacionária) e via os termos de salto na HJB. Mais massa estacionária em regimes altos (ou maiores taxas de subida relativas às de queda) eleva os níveis de $V_i(k)$ e reduz o custo de risco de cair. Mesmo com transições muito frequentes, as políticas não colapsam ao caso $A \equiv \overline{A}$ devido à concavidade e aos termos de salto no valor.

Exercício 4 (Emprego em tempo contínuo)

Considere um trabalhador em tempo contínuo, com desconto $\rho > 0$. Quando desempregado, ele recebe um fluxo de benefício $b > 0$ e recebe ofertas salariais w que chegam segundo um processo de Poisson com taxa $\alpha > 0$. Os salários são ofertados i.i.d. com distribuição F com suporte $[\underline{w}, \overline{w}] \subset [0, \infty)$. Ao aceitar uma oferta w, o trabalhador passa a receber permanentemente o fluxo w.

(a) Seja U o valor no desemprego e $W(w)$ o valor de estar empregado com salário w. Escreva explicitamente as HJBs. Interprete economicamente cada termo e explicite a expectativa no primeiro termo usando F.

Resposta:

Vamos primeiro derivar a versão em tempo contínuo da versão em tempo discreto. Começaremos pelo valor de estar empregado (ao invés de β como taxa de desconto, adotaremos $e^{-\rho\Delta t}$). O valor de estar empregado a um salário w é, então, dado por

$$\begin{aligned}
W(w) &= w\,\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\,W(w), \\
\big(1 - e^{-\rho\Delta t}\big)W(w) &= w\,\Delta t, \\
\frac{1 - e^{-\rho\Delta t}}{\Delta t}\,W(w) &= w \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \Big(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\rho\Delta t}}{\Delta t}\Big)W(w) = w, \\
&\overset{\text{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \rho\,W(w) = w.
\end{aligned}$$

Para o valor do desempregado, segue que

$$U = b\Delta t + e^{-\rho\Delta t}\Bigg[(\alpha\Delta t)\mathbb{E}[\max\{U, W(\tilde{w})\}] + (1 - \alpha\Delta t)U\Bigg]$$

Juntando os termos com U e dividindo por Δt temos

$$\frac{(1 - e^{-\rho\Delta t}(1 - \alpha\Delta t))}{\Delta t}U = b + e^{-\rho\Delta t}\alpha\mathbb{E}[\max\{U, W(\tilde{w})\}]$$

Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t} \frac{(1 - e^{-\rho\Delta t}(1 - \alpha\Delta t))}{\Delta t} &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{\Delta t \to 0}(\rho e^{-\rho\Delta t}(1 - \alpha\Delta t) - e^{-\rho\Delta t}(-\alpha)) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} e^{-\rho\Delta t}(\rho(1 - \alpha\Delta t) + \alpha) = \rho + \alpha
\end{aligned}$$

Então, temos que $(\rho + \alpha)U = b + \alpha\mathbb{E}[\max\{U, W(\tilde{w})\}]$. Como o enunciado pede que deixe a expectativa explicita usando F, temos:

$$\rho U = b + \alpha \mathbb{E}[\max\{0, W(\tilde{w}) - U\}] \quad \Rightarrow \quad \rho U = b + \alpha \int_{\underline{w}}^{\overline{w}} \max\{0, W(\tilde{w}) - U\}\ dF(\tilde{w})$$

ρU é o custo de oportunidade de ficar desempregado. b é o fluxo certo do benefício, o termo com α é o ganho esperado de encontros com ofertas, ponderado pela taxa de chegada e pela chance de melhoria.

(b) Mostre que existe um salário-reserva w_R tal que o trabalhador aceita a oferta se e somente se $w \geq w_R$.

Resposta:

Para o salário de reserva que deixe o agente indiferente, temos que

$$\begin{aligned} W(w_R) &= U \\ w_R &= b + \alpha \int_{\underline{w}}^{\overline{w}} \max\left\{0, \frac{\tilde{w}}{\rho} - \frac{w_R}{\rho}\right\}\ dF(\tilde{w}) \\ w_R &= b + \frac{\alpha}{\rho} \int_{w_R}^{\overline{w}} (\tilde{w} - w_R)\ dF(\tilde{w}) \end{aligned}$$

O resultado acima caracteriza w_R de forma única, dada a monotonicidade que veremos abaixo.

(c) Usando a equação de w_R, estabeleça os sinais de:

$$\frac{\partial w_R}{\partial b}, \quad \frac{\partial w_R}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial w_R}{\partial \rho}$$

Dê a intuição econômica de cada resultado.

Resposta:

Defina $\Phi(w_R; b, \alpha, \rho) \equiv w_R - b - \frac{\alpha}{\rho} G(w_R)$, em que $G(w_R) \equiv \int_{w_R}^{\overline{w}} (\tilde{w} - w_R)\ dF(\tilde{w})$. A condição que define w_R é dada por $\Phi = 0$. Observe que

$$G'(w_R) = -\mathbb{P}(\tilde{w} \geq w_R) = -(1 - F(w_R))$$

Então, temos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_R} = 1 - \frac{\alpha}{\rho} G'(w_R) = 1 + \frac{\alpha}{\rho}(1 - F(w_R)) > 0$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, $\Phi = 0$ tem solução única e bem-comportada. E segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_R}{\partial b} &= -\frac{\partial \Phi/\partial b}{\partial \Phi/\partial w_R} = \frac{1}{\partial \Phi/\partial w_R} > 0, \\
\frac{\partial w_R}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \Phi/\partial \alpha}{\partial \Phi/\partial w_R} = \frac{(1/\rho)\, G(w_R)}{\partial \Phi/\partial w_R} > 0, \\
\frac{\partial w_R}{\partial \rho} &= -\frac{\partial \Phi/\partial \rho}{\partial \Phi/\partial w_R} = \frac{-(\alpha/\rho^2)\, G(w_R)}{\partial \Phi/\partial w_R} < 0.
\end{aligned}
$$

A intuição é que um benefício maior ($b \uparrow$) eleva sua outside option e deixa ficar sem trabalhar menos custoso, isso faz o agente ficar mais exigente e pedir salários maiores, elevando o salário de reserva ($w_R \uparrow$). Chegadas mais frequentes ($\alpha \uparrow$) fazem com que, se recusar, receba propostas antes, isso deixa o agente mais seletivo ($w_R \uparrow$). Por outro lado, desconto mais severo ($\rho \uparrow$) torna caro ficar muito tempo consumindo menos, então aceita salários menores (mas ainda mais alto que b).

(d) Para um w_R dado, qual é a taxa efetiva de chegada de ofertas aceitáveis? Derive a duração esperada do desempregado:

$$\mathbb{E}[T_U] = \frac{1}{\alpha[1 - F(w_R)]}$$

Resposta:

A probabilidade de uma oferta ser aceita é dada por $\mathbb{P}(w \geq w_R) = 1 - F(w_R)$. Dessa forma a taxa de chegadas aceitáveis é dada pela probabilidade de receber oferta e dela ser aceitável (e ambos eventos são independentes), então temos que $\lambda_{\text{aceite}} = \alpha[1 - F(w_R)]$. Assim, o tempo de espera até o primeiro aceitável é dada pelo exponencial:

$$\mathbb{E}[T_U] = \frac{1}{\alpha[1 - F(w_R)]}$$

Exercício 5 (Portfólio de Merton)

Um agente escolhe consumo $c(t)$ para maximizar sua utilidade

$$U(c(t)) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\log(c(t))\ dt\right]$$

O agente tem um nível inicial de riqueza $n(0) > 0$ e não recebe nenhum endowment ou salário. A riqueza pode ser investida em dois ativos. Um ativo livre de risco com retorno instantâneo $r^b\ dt$ e um ativo arriscado com retorno $r^s\ dt + \sigma\ dZ_t$, em que Z_t é um movimento browniano. Aqui, r^b, r^s e σ são parâmetros.

A riqueza do agente, então, evolui conforme:

$$dn_t = -c_t\ dt + n_t((1-\theta_t)r^b\ dt + \theta_t(r^s\ dt + \sigma\ dZ_t))$$

em que $\theta(t)$ representa a fração da riqueza que está investida no ativo arriscado. O valor do problema recursivo, então, é dado por:

$$\rho V(n) = \max_{c,\theta}\left\{\log c + V'(n)\left[-c + n((1-\theta)r^b + \theta r^s)\right] + \frac{1}{2}(n\theta\sigma)^2 V''(n)\right\}$$

(a) Tome a condição de primeira em ralação a todas as variáveis de escolha.

Resposta:

A condição de primeira ordem é dada por

$$\begin{aligned}
[c]:&\quad \frac{1}{c} = V'(n)\\
[\theta]:&\quad V'(n)(n(r^s - r^b)) + \frac{1}{2}V''(n)2n^2\theta\sigma^2 = 0
\end{aligned}$$

Podemos isolar θ na última equação e obter

$$\theta = -\frac{V'(n)}{V''(n)n\sigma^2}(r^s - r^b)$$

(b) Conjecture que o consumo ótimo é proporcional a riqueza (i.e., $c(n) = an$). Use as condições de primeira ordem para fazer um chute para $V(n)$. (**Dica:** Não esqueça da constante integrativa b quando for de $V'(n)$ para $V(n)$.)

Resposta:

Chutando $c = \alpha n$, temos, na condição de primeira ordem

$$\frac{1}{\alpha n} = V'(n) \quad \Rightarrow \quad \int V'(n) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad V(n) = \frac{1}{\alpha}\ln(n) + b$$

Então, como consequência, temos que $V''(n) = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^2}$.

(c) Use o chute de $V(n)$ para simplificar as condições de primeira ordem para θ e encontre uma expressão para $\theta(n)$.

Resposta:

Substituindo tudo na condição de primeira ordem do θ temos

$$\theta = -\frac{\alpha^{-1}n^{-1}}{-\alpha^{-1}n^{-2}n\sigma^2}(r^s - r^b) = \frac{r^s - r^b}{\sigma^2}$$

(d) Substitua as políticas ótimas e o chute de $V(n)$ na HJB. O resultado deve valer para todo $n > 0$. Mostre que isso vale se escolhermos α e b de forma apropriada. O que precisamos impor?

Resposta:

Substituindo os valores ótimos e nosso guess na HJB e simplificando obtemos

$$\rho\left(\frac{1}{\alpha}\ln(n) + b\right) = \ln(\alpha) + \ln(n) - 1 + \frac{1}{\alpha}\left[r^b + \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2}\right] - \frac{1}{2\alpha}\frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2}$$

Combinando os termos, temos que

$$\begin{aligned} [\alpha]: &\quad \frac{\rho}{\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \alpha \\ [b]: &\quad \rho b = \ln(\rho) - 1 + \frac{1}{\rho}\left[r^b + \frac{1}{2}\frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2}\right] \end{aligned}$$
