Lista 4 - Programação Dinâmica em Tempo Contínuo
Data de entrega: 04/09/2025 (23:59)

Exercício 1 (Diagrama de Fases, RCK e Notícias)

Considere uma economia em tempo contínuo com um planejador social representativo. As preferências são dadas por

$$U(c(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt \qquad \rho > 0, \theta > 0 \text{ e } \theta \neq 1$$

A produção é dada por $y(t) = A(t)k(t)^\alpha$, com $\alpha \in (0,1)$. O estoque de capital evolui segundo

$$\dot{k}(t) = A(t)k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t) \qquad k(0) = k_0 > 0, \delta \in (0,1)$$

O processo de TFP $A(t)$ é determinístico e piecewise-constante, conforme especificado nos itens abaixo. O planejador escolhe $c(t)$ (equivalente a $k(t)$ via restrição de recursos) para maximizar U sujeito a dinâmica de $k(t)$ e $k(t) \geq 0, \forall t$.

(a) Seja $V(k)$ o valor do problema recursivo. Escreva a equação HJB do planejador e derive: as condições de primeira ordem, a equação de Euler para o consumo e os loci $\dot{k}(t) = 0$ e $\dot{c}(t) = 0$ no plano (k, c).

(b) Assuma que os parâmetros dessa economia são

$$(\alpha, \delta, \rho, \theta) = (0.33, 0.98, 0.04, 2) \qquad A(t) \equiv 1$$

Encontre o estado estacionário (k^*, c^*) e esboce o diagrama de fases com o caminho de sela que converge para (k^*, c^*). (Pode esboçar ou fazer com código).

(c) No instante $t = T$, anuncia-se que em $t = T + 5$ a produtividade muda permanentemente de $A(t) \equiv 1$ para $A(t) \equiv 1.5$. Mostre graficamente: (1) a trajetória no diagrama de fases (k, c) com indicação dos loci antes e após $t = T + 5$; (2) séries temporais ($t \mapsto c(t)$ e $t \mapsto k(t)$).

(d) Repita o item (c) para o caso em que a variação de produtividade para $A(t) \equiv 1.5$ ocorre imediatamente em $t = T$. Compare qualitativamente com o item anterior: o salto inicial de $c(t)$ e as trajetórias resultantes.

(e) Para o caso base do item (c), discuta como variações em θ e ρ afetam: (1) o tamanho do salto inicial de c, (2) o formato do caminho de ajuste (mais "suave" ou mais "abrupto") e (3) o tempo da convergência.

Exercício 2 (Cake-eating com saltos de Poisson)

Maria Antonieta tem preferências em formato log para o consumo de brioche

$$U(c(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log(c(t))\, dt, \qquad \rho > 0$$

Seja $k(t)$ o estoque de brioche. Inicialmente, o brioche não cresce nem é produzido e nem se deprecia. Ela escolhe $c(t)$ sujeito à viabilidade de $k(t)$.

(a) A dinâmica é dada por $\dot{k}(t) = -c(t)$, com $k(0) = k_0 > 0$. Formule o problema recursivo e escreva a HJB da Maria Antonieta, definindo explicitamente a função valor $V(k)$. Encontre a trajetória ótima de $c(t)$ e $k(t)$. **Dica:** Conjecture a forma funcional $V(k) = A + B \log k$ e use um argumento de guess and verify.

(b) Agora o brioche apodrece a taxa constante $\delta \in (0, 1)$. A dinâmica, então, é dada por $\dot{k}(t) = -c(t) - \delta k(t)$. Reformule a HJB e obtenha as políticas ótimas.

(c) Considere agora que com intensidade $\lambda > 0$, ocorre saltos que reduzem instantaneamente o estoque para $(1 - \eta)k(t^-)$ com $\eta \in (0, 1)$. Entre os saltos, a dinâmica é a mesma do item (b). Escreva a HJB com saltos (**Dica:** use um tempo do tipo $\lambda[V((1 - \eta)k) - V(k)]$). Mostre que a política ótima segue a forma proporcional $c(t) = \alpha k(t)$ e caracterize α em função de $(\rho, \delta, \lambda, \eta)$.

(d) Compare qualitativamente as funções políticas e as trajetórias dos casos (a), (b) e (c). Explique a intuição econômica de como δ, os saltos λ e a severidade η afetam a dinâmica de $k(t)$.

Exercício 3 (RBC contínuo e TFP markoviano)

Considere um agente representativo em tempo contínuo que escolhe um plano de consumo $c(t)$ para maximizar

$$U(c(t)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt, \qquad \rho > 0, \theta > 0, \theta \neq 1$$

A tecnologia é $y(t) = A_{s(t)}k(t)^{\alpha}$, com $\alpha \in (0,1)$. O estado exógeno $s(t) \in 1,2,3$ segue uma cadeia de Markov em tempo contínuo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} - \lambda_{13} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{21} - \lambda_{23} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & -\lambda_{31} - \lambda_{32} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{ij} > 0 \ (i \neq j),$$

e níveis de produtividade $0 < A_1 < A_2 < A_3$. O capital evolui conforme

$$\dot{k}(t) = A_{s(t)}k(t)^{\alpha} - c(t) - \delta k(t), \qquad \delta \in (0,1), k(0) = k_0 > 0$$

com restrição de viabilidade $k(t) \geq 0$.

(a) Seja $V_i(k)$ o valor quando o estado é $s = i$. Escreva o sistema de equações HJB. Derive as CPOs e mostre que, para cada i, vale $u'(c) = V_i'(k)$ e ache a equação de Euler. (**Dica:** Deve ter um tempo de salto para cada V_i com $\lambda_{ij}[V_j(k) - V_i(k)]$).

(b) Defina (k_i^*, c_i^*) como estado estacionário quando a produtividade permanece em i. Determine (k_i^*, c_i^*) para $i \in \{1,2,3\}$ e mostre que

$$k_1^* < k_2^* < k_3^*, \qquad c_1^* < c_2^* < c_3^*$$

Esboce, no plano (k, c), os loci $\dot{k} = 0$ e $\dot{c} = 0$ de cada regime e indique, qualitativamente, os caminhos de sela associados.

(c) Considere dois casos: (i) transições mais raras (i.e. λ_{ij} $(i \neq j)$ pequenos) e (ii) transições mais frequentes. Discuta como a possibilidade de alternância entre A_1, A_2, A_3 afeta a escolha inicial $c(0)$ e a trajetória $(k(t), c(t))$ relativamente ao caso "determinístico" com $A \equiv \overline{A}$, em que $\overline{A}$ é a média ponderada pela distribuição estacionária da cadeia. Explique porque as políticas ótimas **não** coincidem, em geral, com as de um modelo determinístico.

(d) Suponha que $\lambda_{13} = \lambda 31 = 0$. Mostre, de forma qualitativa, o sinal de

$$\frac{\partial c(0)}{\partial \lambda_{21}} \quad \frac{\partial c(0)}{\partial \lambda_{23}}$$

quando o estado inicial é $s(0) = 2$. Interprete economicamente. Relacione com a curvatura de θ.

(e) Demonstre que $V_3(k) > V_2(k) > V_1(k)$ para todo $k > 0$. Comente como θ amplifica ou atenua as diferenças de valore entre os regimes e como a presença de Λ entra na comparação.

Exercício 4 (Emprego em tempo contínuo)

Considere um trabalhador em tempo contínuo, com desconto $\rho > 0$. Quando desempregado, ele recebe um fluxo de benefício $b > 0$ e recebe ofertas salariais w que chegam segundo um processo de Poisson com taxa $\alpha > 0$. Os salários são ofertados i.i.d. com distribuição F com suporte $[\underline{w}, \overline{w}] \subset [0, \infty)$. Ao aceitar uma oferta w, o trabalhador passa a receber permanentemente o fluxo w.

(a) Seja U o valor no desemprego e $W(w)$ o valor de estar empregado com salário w. Escreva explicitamente as HJBs. Interprete economicamente cada termo e explicite a expectativa no primeiro termo usando F.

(b) Mostre que existe um salário-reserva w_R tal que o trabalhador aceita a oferta se e somente se $w \geq w_R$.

(c) Usando a equação de w_R, estabeleça os sinais de:

$$\frac{\partial w_R}{\partial b}, \quad \frac{\partial w_R}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial w_R}{\partial \rho}$$

Dê a intuição econômica de cada resultado.

(d) Para um w_R dado, qual é a taxa efetiva de chegada de ofertas aceitáveis? Derive a duração esperada do desempregado:

$$\mathbb{E}[T_U] = \frac{1}{\alpha[1 - F(w_R)]}$$

Exercício 5 (Portfólio de Merton)

Um agente escolhe consumo $c(t)$ para maximizar sua utilidade

$$U(c(t)) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\log(c(t))\ dt\right]$$

O agente tem um nível inicial de riqueza $n(0) > 0$ e não recebe nenhum endowment ou salário. A riqueza pode ser investida em dois ativos. Um ativo livre de risco com retorno instantâneo $r^b\ dt$ e um ativo arriscado com retorno $r^s\ dt + \sigma\ dZ_t$, em que Z_t é um movimento browniano. Aqui, r^b, r^s e σ são parâmetros.

A riqueza do agente, então, evolui conforme:

$$dn_t = -c_t\ dt + n_t((1-\theta_t)r^b\ dt + \theta_t(r^s\ dt + \sigma\ dZ_t))$$

em que $\theta(t)$ representa a fração da riqueza que está investida no ativo arriscado. O valor do problema recursivo, então, é dado por:

$$\rho V(n) = \max_{c,\theta}\left\{\log c + V'(n)\left[-c + n((1-\theta)r^b + \theta r^s)\right] + \frac{1}{2}(n\theta\sigma)^2 V''(n)\right\}$$

(a) Tome a condição de primeira em ralação a todas as variáveis de escolha.

(b) Conjecture que o consumo ótimo é proporcional a riqueza (i.e., $c(n) = an$). Use as condições de primeira ordem para fazer um chute para $V(n)$. (**Dica:** Não esqueça da constante integrativa b quando for de $V'(n)$ para $V(n)$.)

(c) Use o chute de $V(n)$ para simplificar as condições de primeira ordem para θ e encontre uma expressão para $\theta(n)$.

(d) Substitua as políticas ótimas e o chute de $V(n)$ na HJB. O resultado deve valer para todo $n > 0$. Mostre que isso vale se escolhermos a e b de forma apropriada. O que precisamos impor?