Log-Linearização em Macroeconomia

Felipe Iachan

FGV EPGE

Macroeconomia II, MD,
11 de agosto de 2025

Por que Log-Linearização?

- Modelos macroeconômicos modernos são sistemas não-lineares complexos
- Soluções analíticas raramente existem
- Aproximações lineares permitem:
  - Análise de dinâmica local
  - Funções de impulso-resposta
  - Decomposição de variância
  - Métodos computacionais eficientes
- Log-linearização é especialmente útil para variáveis que crescem

Expansão de Taylor: Conceito Fundamental

Para uma função $f(x)$ diferenciável em torno de x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \tag{1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2}$$

Aproximação de primeira ordem:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Aproximação de segunda ordem:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Exemplo: Aproximação de $\ln(x)$

Considere $f(x) = \ln(x)$ em torno de $x_0 = 1$:

- $f(1) = \ln(1) = 0$
- $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$

Primeira ordem:

$$\ln(x) \approx 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1$$

Segunda ordem:

$$\ln(x) \approx (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

Transformação Logarítmica

Ideia central: Trabalhar com logaritmos das variáveis em vez dos níveis.

Motivações:

- Variáveis macroeconômicas frequentemente crescem exponencialmente
- $\ln(x)$ transforma multiplicação em adição
- Coeficientes têm interpretação como elasticidades
- Aproximação linear em logs é mais precisa para variáveis que variam muito

Definição: Para uma variável X_t com valor de estado estacionário $\bar{X}$:

$$\hat{X}_t = \ln\left(\frac{X_t}{\bar{X}}\right) = \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$$

Log-Linearização como Aproximação de Taylor

Log-linearização é simplesmente uma expansão de Taylor em variáveis transformadas.

Considere uma função $G(X_t, Y_t) = 0$ que define equilíbrio.

Passo 1: Defina variáveis em log

$$G(e^{x_t}, e^{y_t}) = 0, \quad \text{onde } x_t = \ln(X_t),\ y_t = \ln(Y_t)$$

Passo 2: Aproxime em torno do estado estacionário $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$G(e^{x_t}, e^{y_t}) \approx G(e^{\bar{x}}, e^{\bar{y}}) + \left.\frac{\partial G(e^x, e^y)}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y}} (x_t - \bar{x}) + \left.\frac{\partial G(e^x, e^y)}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y}} (y_t - \bar{y})$$

onde, por regra da cadeia,

$$\frac{\partial G(e^x, e^y)}{\partial x} = e^x G_X(e^x, e^y), \quad \frac{\partial G(e^x, e^y)}{\partial y} = e^y G_Y(e^x, e^y).$$

Passo 3: Use $\hat{X}_t = x_t - \bar{x}$ e $\hat{Y}_t = y_t - \bar{y}$.

Elasticidades em $F(e^x, e^y, e^z)$

Definições: $\bar{X} = e^{\bar{x}},\; \bar{Y} = e^{\bar{y}},\; \bar{Z} = e^{\bar{z}},\; \bar{F} = F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$.

$$F(e^{x_t}, e^{y_t}, e^{z_t}) \approx \bar{F} + \bar{X} F_X(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})(x_t - \bar{x}) + \bar{Y} F_Y(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})(y_t - \bar{y}) + \bar{Z} F_Z(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})(z_t - \bar{z})$$

(se $\bar{F} \neq 0$)

$$\frac{F(e^{x_t}, e^{y_t}, e^{z_t}) - \bar{F}}{\bar{F}} \approx \underbrace{\frac{\bar{X} F_X(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})}{\bar{F}}}_{\varepsilon_{F,X}}(x_t - \bar{x}) + \underbrace{\frac{\bar{Y} F_Y(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})}{\bar{F}}}_{\varepsilon_{F,Y}}(y_t - \bar{y}) + \underbrace{\frac{\bar{Z} F_Z(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})}{\bar{F}}}_{\varepsilon_{F,Z}}(z_t - \bar{z})$$

$$\hat{F}_t \approx \varepsilon_{F,X}\, \hat{X}_t + \varepsilon_{F,Y}\, \hat{Y}_t + \varepsilon_{F,Z}\, \hat{Z}_t$$

Notação de Desvios Logarítmicos

Notação padrão:

$$\hat{X}_t = \ln(X_t) - \ln(\bar{X}) = \ln\left(\frac{X_t}{\bar{X}}\right)$$

Interpretação:

- $\hat{X}_t$ representa desvio percentual de X_t em relação ao estado estacionário
- Para pequenos desvios: $\hat{X}_t \approx \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}$
- $\hat{X}_t = 0.01$ significa que X_t está 1% acima do estado estacionário

Propriedades úteis:

- $\hat{X}_t = 0$ no estado estacionário
- $\frac{d\hat{X}_t}{dt} = \frac{\dot{X}_t}{X_t}$ (taxa de crescimento)

Fórmulas Úteis: Produtos e Quocientes

Produto de variáveis: Se $Z_t = X_t Y_t$, então:

$$\hat{Z}_t = \hat{X}_t + \hat{Y}_t$$

Quociente de variáveis: Se $Z_t = \frac{X_t}{Y_t}$, então:

$$\hat{Z}_t = \hat{X}_t - \hat{Y}_t$$

Potência: Se $Z_t = X_t^{\alpha}$, então:

$$\hat{Z}_t = \alpha \hat{X}_t$$

Fórmulas Úteis: Funções Isoelásticas

Função isoelástica com três variáveis: Se $F = AX^{\alpha} Y^{\beta} Z^{\gamma}$, então:

$$\hat{F}_t = \alpha \hat{X}_t + \beta \hat{Y}_t + \gamma \hat{Z}_t$$

Exemplos importantes:

Função de produção Cobb-Douglas: $Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$

$$\hat{Y}_t = \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t$$

Função de utilidade CRRA: $U(C) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}$

$$\frac{d \ln U}{d \ln C} = 1 - \sigma$$

Fórmulas Úteis: Somas e o Papel das Participações

Problema: Como log-linearizar $Z_t = X_t + Y_t$?

Somas não têm propriedade logarítmica simples. Solução:

Passo 1: Escreva em termos de participações no estado estacionário

$$Z_t = X_t + Y_t = \bar{Z}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{Z}}\frac{X_t}{\bar{X}} + \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\frac{Y_t}{\bar{Y}}\right)$$

Passo 2: Defina participações $s_X = \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}$ e $s_Y = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$

$$\frac{Z_t}{\bar{Z}} = s_X \frac{X_t}{\bar{X}} + s_Y \frac{Y_t}{\bar{Y}}$$

Passo 3: Log-linearize (aproximação de primeira ordem)

$$\hat{Z}_t \approx s_X \hat{X}_t + s_Y \hat{Y}_t$$

Note que $s_X + s_Y = 1$.

Exemplo: Restrição Orçamentária

Considere: $C_t + I_t = Y_t$
No estado estacionário: $\bar{C} + \bar{I} = \bar{Y}$
Participações:

- $s_C = \frac{\bar{C}}{\bar{Y}}$ (participação do consumo no produto)
- $s_I = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}}$ (participação do investimento no produto)
- $s_C + s_I = 1$

Log-linearização:

$$s_C \hat{C}_t + s_I \hat{I}_t = \hat{Y}_t$$

Interpretação: Variação percentual do produto é média ponderada das variações percentuais de consumo e investimento, com pesos dados pelas participações.

Exemplo: Acumulação de Capital

Equação original: $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$

Reescrevendo:

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_t = K_t\left[(1-\delta) + \frac{I_t}{K_t}\right]$$

No estado estacionário: $\bar{I} = \delta\bar{K}$ (investimento repõe depreciação)

Log-linearização:

$$\hat{K}_{t+1} = (1-\delta)\hat{K}_t + \delta\hat{I}_t$$

ou, dividindo por δ:

$$\frac{1}{\delta}\hat{K}_{t+1} = \frac{1-\delta}{\delta}\hat{K}_t + \hat{I}_t$$

Truque Útil: Variáveis em Nível vs. Taxa

Problema: Como tratar variáveis que podem ser zero ou negativas?
Exemplo: Taxa de juros r_t
Solução 1: Log-desvio em torno de $\bar{r}$

$$\hat{r}_t = \ln(r_t) - \ln(\bar{r})$$

(Funciona se $r_t > 0$ sempre)
Solução 2: Desvio linear

$$\tilde{r}_t = r_t - \bar{r}$$

Solução 3: Para taxas pequenas, use $\ln(1 + r_t) \approx r_t$

$$\ln(1 + r_t) - \ln(1 + \bar{r}) \approx r_t - \bar{r}$$

Truque Útil: Expectativas

Propriedade importante: A log-linearização comuta com o operador expectativa.
Se $\hat{X}_{t+1} = a\hat{Y}_t + \epsilon_{t+1}$ onde $E_t[\epsilon_{t+1}] = 0$, então:

$$E_t[\hat{X}_{t+1}] = a\hat{Y}_t$$

Aplicação na Equação de Euler: Equação original:

$$u'(C_t) = \beta E_t[u'(C_{t+1})(1 + r_{t+1})]$$

Log-linearizada (com utilidade CRRA):

$$-\sigma\hat{C}_t = -\sigma E_t[\hat{C}_{t+1}] + E_t[\hat{r}_{t+1}]$$

$$E_t[\hat{C}_{t+1}] - \hat{C}_t = \frac{1}{\sigma}E_t[\hat{r}_{t+1}]$$

Modelo RBC com Choque de Produtividade

Equações originais:

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_{t+1})] \tag{3}$$
$$r_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - \delta \tag{4}$$
$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{5}$$
$$C_t + I_t = Y_t \tag{6}$$
$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{7}$$
$$\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \varepsilon_t \tag{8}$$

Choque de produtividade:

- A_t: tecnologia agregada
- $\rho \in (0, 1)$: persistência
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$: inovação

Sistema Log-Linearizado

Sistema log-linearizado:

$$E_t[\hat{C}_{t+1}] - \hat{C}_t = \frac{1}{\sigma} E_t[\hat{r}_{t+1}] \tag{9}$$

$$\hat{r}_t = \hat{A}_t + (\alpha - 1)\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t \tag{10}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{A}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t \tag{11}$$

$$s_C \hat{C}_t + s_I \hat{I}_t = \hat{Y}_t \tag{12}$$

$$\hat{K}_{t+1} = (1-\delta)\hat{K}_t + \delta \hat{I}_t \tag{13}$$

$$\hat{A}_t = \rho \hat{A}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{14}$$

Observação: $\hat{A}_t = \log A_t - \log \bar{A}$ onde $\bar{A}$ é o estado estacionário.

Vantagens da Log-Linearização

Computacionais:

- Sistema linear é fácil de resolver
- Métodos matriciais padrão (eigenvalues, etc.)
- Princípio de equivalente certeza

Econômicas:

- Coeficientes como elasticidades
- Fácil interpretação de impulso-resposta
- Decomposição de variância natural

Técnicas:

- Base para métodos de ordem superior
- Integração com filtros (HP, Kalman)
- Estimação bayesiana facilitada

Limitações e Cuidados

Limitações da aproximação:

- Válida apenas localmente (pequenos desvios)
- Ignora efeitos de segunda ordem
- Pode ser imprecisa para choques grandes

Cuidados práticos:

- Verificar se estado estacionário existe e é único
- Checar condições de estabilidade (Blanchard-Kahn)
- Validar aproximação com simulações

Quando usar ordem superior:

- Choques grandes ou persistentes
- Efeitos de risco importantes
- Políticas não-lineares

Conexão com Métodos de Solução

Blanchard-Kahn:

- Separa variáveis predeterminadas e não-predeterminadas
- Condição de sela para estabilidade
- Solução única se número de raízes estáveis = número de variáveis predeterminadas

Klein (2000):

- Generalização para modelos forward-looking
- Decomposição QZ para sistemas generalizados
- Tratamento automático de expectativas

Uhlig (1999):

- Método toolkit baseado em undetermined coefficients
- Diretamente aplicável ao sistema log-linearizado
- Funções políticas em forma de funções lineares

Resumo

Conceitos principais:

- Log-linearização = Taylor em variáveis transformadas
- Desvios percentuais do estado estacionário
- Fórmulas para produtos, quocientes, somas
- Papel das participações