Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 14.

Objetivos

-

Exercício 14.1.

Encontre a distância máxima e mínima da origem até a elipse $x^2+xy+y^2=3$. [Dica: Use x^2+y^2 como sua função objetivo.]

Solução.

O problema é

$$\begin{aligned} \max \quad & x^2+y^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x^2+xy+y^2=3. \end{aligned}$$

O Lagrangeano é $L=x^2+y^2-\lambda(x^2+xy+y^2-3)$. As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= 2x-2\lambda x-\lambda y=0 \\ L_y &= 2y-\lambda x-2\lambda y=0 \\ L_\lambda &= -(x^2+xy+y^2-3)=0. \end{aligned}$$

Existem quatro soluções:

$$(x,y,\lambda)=\begin{cases} (-\sqrt{3},\sqrt{3},2) \\ (\sqrt{3},-\sqrt{3},2) \\ (1,1,2/3) \\ (-1,-1,2/3) \end{cases}$$

A NDCQ (Condição de Qualificação de Não Degenerescência) é válida em todas as quatro soluções (o gradiente da restrição é diferente de zero nos pontos da restrição considerada). Claramente, as duas primeiras soluções são máximos e as duas últimas são mínimos. □

Exercício 14.2.

Encontre o ponto na parábola $y=x^2$ que está mais próximo do ponto $(2,1)$. (Estime a solução da equação cúbica que resulta.)

Solução.

O problema é

$$\begin{array}{rl} \max & (2-x)^2+(1-y)^2 \\ \text{sujeito a} & x^2-y=0. \end{array}$$

O Lagrangeano é

$$L=(2-x)^2+(1-y)^2-\lambda(y-x^2).$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= -2(2-x)+2\lambda x = 0 \\ L_y &= -2(1-y)-\lambda = 0 \\ L_\lambda &= y-x^2 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo para λ e substituindo, temos $2x^3-x-2=0$. Assim $x \approx 1.165$, e então $y=x^2 \approx 1.357$. Finalmente, $\nabla(y-x^2)=(-2x,1) \neq (0{,}0)$, então a NDCQ é válida.

□

Exercício 14.3.

Encontre a expressão geral (em termos de todos os parâmetros) para a cesta de bens (x_1,x_2) que maximiza a função utilidade Cobb-Douglas $U(x_1,x_2)=kx_1^a x_2^{1-a}$ na restrição orçamentária $p_1x_1+p_2x_2=I$.

Solução.

A localização e o tipo dos pontos críticos são independentes de $k>0$, então assuma sem perda de generalidade que $k=1$.

$$\begin{array}{rl} \max & x_1^a x_2^{1-a} \\ \text{sujeito a} & (p_1x_1+p_2x_2-I)=0. \end{array}$$

O Lagrangeano é

$$L=x_1^a x_2^{1-a}-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-I).$$

As condições de primeira ordem são

$$
\begin{aligned}
L_{x_1} &= a x_1^{a-1} x_2^{1-a} - \lambda p_1 = 0 \\
L_{x_2} &= (1-a) x_1^{a} x_2^{-a} - \lambda p_2 = 0 \\
L_{\lambda} &= p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.
\end{aligned}
$$

A solução é

$$
x_1 = \frac{aI}{p_1} \qquad x_2 = \frac{(1-a)I}{p_2}.
$$

Como a restrição é linear, a NDCQ é válida. □

Exercício 14.4.

Encontre o ponto mais próximo da origem em $\mathbf{R}^3$ que está em ambos os planos $3x+y+z=5$ e $x+y+z=1$.

Solução.

O problema é

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x^2+y^2+z^2 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x+y+z=5 \\
& x+y+z=1.
\end{aligned}
$$

O Lagrangeano é

$$
L = x^2+y^2+z^2 - \lambda_1(3x+y+z-5) - \lambda_2(x+y+z-1).
$$

As condições de primeira ordem são

$$
\begin{aligned}
L_x &= 2x - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
L_y &= 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
L_z &= 2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
L_{\lambda_1} &= 3x+y+z-5 = 0 \\
L_{\lambda_2} &= x+y+z-1 = 0.
\end{aligned}
$$

Este sistema linear de cinco equações em cinco incógnitas tem uma solução única: $(2,-1/2,-1/2)$. A Jacobiana das restrições é

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que tem posto 2 (máximo), e assim a NDCQ é válida. □

Exercício 14.5.

Encontre o máx e mín de $f(x,y,z) = x + y + z^2$ sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = 0$.

Solução.

Substitua $y = 0$ em todas as equações.

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & x + z^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

O Lagrangeano é

$$L = x + z^2 - \lambda(x^2 + z^2 - 1)$$

e as condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - 2\lambda x = 0 \\ L_z &= 2z - 2\lambda z = (1-\lambda)2z = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Existem quatro soluções:

$$(x,y,z,\lambda) = \begin{cases} (1/2, 0, \sqrt{3}/2, 1) \\ (1/2, 0, -\sqrt{3}/2, 1) \\ (1, 0, 0, 1/2) \\ (-1, 0, 0, -1/2) \end{cases} .$$

Uma verificação mostra que as duas primeiras soluções correspondem a máximos locais com um valor de $5/4$, a terceira a um ponto crítico com valor 1, e a última a um mínimo local com valor -1.
É fácil verificar que a NDCQ é válida em todas as soluções utilizando a restrição remanescente $x^2+z^2=1$. □

Exercício 14.6.

Maximize $f(x,y,z)=yz+xz$ sujeito a $y^2+z^2=1$ e $xz=3$.

Solução.

Substitua a restrição $xz=3$ na função objetivo:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3+yz \\ \text{sujeito a} \quad & y^2+z^2=1. \end{aligned}$$

O Lagrangeano é

$$L=3+yz-\lambda(y^2+z^2-1).$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_y &= z-2\lambda y=0 \\ L_z &= y-2\lambda z=0 \\ L_\lambda &= y^2+z^2-1=0. \end{aligned}$$

As soluções são os quatro pares (y,z) tais que $y=\pm 1/\sqrt{2}$ e $z=\pm 1/\sqrt{2}$. Para um máximo, y e z devem ter o mesmo sinal, então as soluções são $(3\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ e $(-3\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. O valor do maximando (valor máximo) em cada caso é $7/2$.
Novamente, é fácil verificar que a NDCQ é válida em todas as soluções utilizando a restrição remanescente $y^2+z^2=1$. □