Lista 5 - Asset Pricing

Data de entrega: 11/09/2025 (23:59)

Exercício 1 (FTAP e Mercados Completos vs. Incompletos)

Considere uma economia de trocas com $i \in I$ agentes, dois períodos $t \in \{0, 1\}$ e incerteza apenas em $t = 1$, com realização $s \in S$ finito (com probabilidade π^i_s, potencialmente heterogênea entre agentes). Cada agente i tem dotação $e_i = (e_{i0}, \{e_{is}\}_{s\in S})$ e preferências separáveis no tempo,

$$U_i(C_i) = u_{i0}(c_{i0}) + \beta_i \sum_{s\in S} \pi^i_s u_{is}(c_{is})$$

Há j ativos em oferta líquida zero, com vetor de preços $P = (p_1, \cdots, p_J) \in \mathbb{R}^J$ e matriz de pagamentos $X \in \mathbb{R}^{S\times J}$ (ativos são comprados em $t = 0$).

(a) Formule o problema do agente i, explicitando as variáveis de escolha, restrição orçamentária e conjunto factíveis (utilize a notação de θ para posição em ativos).

Resposta:

As variáveis de escolha são $(c_{i0}, \{c_{is}\}_{s\in S}, \theta_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{|S|}_+ \times \mathbb{R}^J$.

As restrições orçamentárias são dadas por $c_{i0} + P'\theta_i \leq e_{i0}$, e, para cada $s \in S$, $c_{is} \leq e_{is} + x_s\theta_i$, em que $x_s \in \mathbb{R}^{1\times J}$ é a linha s de X. Portanto, o conjunto de factível é dado por

$$\mathcal{B}_i(P, X, e_i) = \left\{ (c_{i0}, c_i, \theta_i) : \begin{array}{ll} c_{i0} + P'\theta_i \leq e_{i0} & \\ c_{is} \leq e_{is} + x_s\theta_i, & \forall s \\ c_{i0} \geq 0, c_{is} \geq 0 \forall s & \end{array} \right\}$$

O problema do agente é dado, então, por

$$\max_{(c_{i0}, c_i, \theta_i)\in\mathcal{B}_i} u_{i0}(c_{i0}) + \beta_i \sum_{s\in S} \pi^i_s u_{is}(c_{is})$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo para essa economia **Dica:** Precisamos de preços, escolhas e market-clearing.

Resposta:

Um equilíbrio competitivo é dado pelo par $(P, \{(c_{i0}, \{c_{is}\}_{s\in S}, \theta_i)\}_{i\in I})$ tal que

- **Otimização Individual:** Dado (P, X), cada agente i resolve o problema descrito acima com $(c_{i0}, \{c_{is}\}_{s\in S}, \theta_i)$.
- **Market Clearing:**

$$\sum_{i\in I} c_{i0} = \sum_{i\in I} e_{i0}, \quad \sum_{i\in I} c_{is} = \sum_{i\in I} e_{is} \ \forall s, \quad \sum_{i\in I} \theta_i = 0 \in \mathbb{R}^J$$

(c) (Fundamental Theory of Asset Pricing - FTAP) Mostre que ausência de arbitragem é equivalente à existência de um vetor de preços por estado $q \in [0, \infty)^S$ tal que $P = X'q$. Discuta a unicidade de q quando os mercados são completos (i.e., $\text{rank}(X) = S$) e a multiplicidade quando são incompletos. Dê a interpretação econômica de q.

Resposta:

Queremos mostrar que Ausência de Arbitragem $\iff$ Existe $q \geq 0$ t.q. $P = X'q$.

$\Leftarrow$ Seja $q \geq 0$ e $P = X'q$. Então, para qualquer portfólio θ, segue que

$$P'\theta = (X'q)'\theta = q'X\theta = \sum_{s\in S} q_s(x_s\theta)$$

Ou seja, se $X\theta \geq 0$ (i.e., os payoffs são não negativos em todos os estados) e $X\theta \neq 0$, então $P'\theta > 0$. Portanto, não é possível ter custo não positivo e payoff não negativo.

$\Rightarrow$ Considere que não haja arbitragem (i.e., $X\theta \geq 0 \Rightarrow P'\theta \geq 0$). Pelo lema de Farkas, isso equivale a existência de $q \geq 0$ tal que

$$X'q = P$$

Quando tempos mercados completos segue que

$$X'q = X'\tilde{q} \quad \Rightarrow \quad X'(q - \tilde{q}) = 0 \quad \therefore \quad q = \tilde{q}$$

Mas, quando os mercados são incompletos, o conjunto de soluções é afim

$$\{q \in \mathbb{R}^s : X'q = P\} = q^* + \ker(X')$$

em que $\dim \ker(X') = S - r > 0$. Impondo $q \geq 0$ restringe esse afim, mas ainda há multiplicidade.

Cada q_s é o preço de Arrow-Debreu (o preço em $t = 0$ de 1 unidade do bem de consumo entregue em $t = 1$, estado s). Pode-se escrever $P = X'q$ como precificação por estado-preço.

(d) Defina a Taxa Marginal de Substituição (TMS) entre $t = 0$ e o estado s do agente i

$$\text{TMS}^i_{0,s} = \beta_i \pi^i_s \frac{\partial u_{is}(c^*_{is})/\partial c_{is}}{\partial u_{i0}(c^*_{i0})/\partial c_{i0}}$$

e prove que, sob mercados completos, todas as TMS coincidem no equilíbrio.

Resposta:

Como a utilidade é estritamente crescente, as restrições bindam no conjunto orçamentário. O Lagrangeano é dado por

$$\mathscr{L} = u_{i0}(c_{i0}) + \beta_i \sum_{s \in S} \pi^i_s u_{is}(c_{is}) + \lambda_{i0}[e_{i0} - c_{i0} - P'\theta_i] + \sum_{s \in S} \lambda_{is}[e_{is} + x_s\theta_i - c_{is}]$$

As condições de primeira ordem, portanto, são dadas por

$$\begin{aligned}
[c_{i0}] :& \quad \frac{\partial u_{i0}(c_{i0})}{\partial c_{i0}} + \lambda_{i0}[-1] = 0 \\
[c_{is}] :& \quad \beta_i \pi^i_s \frac{\partial u_{is}(c_{is})}{\partial c_{is}} + \lambda_{is}[-1] = 0 \\
[\theta_i] :& \quad \lambda_{i0}[-P] + \sum_{s \in S} \lambda_{is}[x_s] = 0
\end{aligned}$$

Portanto, na solução ótima, segue que, definindo $q^i_s := \frac{\lambda_{is}}{\lambda_{i0}}$

$$P = \sum_{s \in S} \beta_i \pi^i_s \frac{\partial u_{is}(c^*_{is})/\partial c^{is}}{\partial u_{i0}(c^*_{i0})/\partial c^{i0}} x_s = X'q \quad \Rightarrow \quad q^s_i := TMS^i_{0,s}$$

Logo, todos os agentes precificam com seus preços por estados, e se o X tem posto cheio, então o vetor de preços q é único e, logo $TMS^i_{0,s} = TMS^j_{0,s}$.

(e) Construa um exemplo numérico simples (e.g. $S = 2, J = 1$) e mostre que, para qualquer ativo no span(X), os preços são consensuais, enquanto ativos fora do span(X) podem gerar discordância entre os agentes. Explique a conexão com a multiplicidade de q.

Resposta:

Tome $S = 2$, $J = 1$, com payoff do ativo negociado $x = (1, 2)'$ e preço $p = 1$. Pela FTAP, preços por estado $q \in \mathbb{R}^2_+$ devem satisfazer

$$p \;=\; x'q \;=\; q_1 + 2q_2 \;=\; 1,$$

o que tem infinitas soluções $q \geq 0$ (e.g., $q = (0{,}6,\ 0{,}2)$ ou $q = (0{,}2,\ 0{,}4)$).

- Se um payoff y estiver em span(X), isto é, $y = \alpha x$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então seu preço é

  $$p_y \;=\; q'y \;=\; q'(\alpha x) \;=\; \alpha\, q'x \;=\; \alpha\, p \;=\; \alpha,$$

  independente do q escolhido. Por exemplo, para $y = 3x$, $p_y = 3$.

- Se $y \notin$ span(X), o preço depende de q. Para $y = (1, 0)'$,

  $$p_y \;=\; q'y \;=\; q_1,$$

  logo com $q = (0{,}6,\ 0{,}2)$ obtemos $p_y = 0{,}6$, enquanto com $q = (0{,}2,\ 0{,}4)$ obtemos $p_y = 0{,}2$. Há discordância porque y não é replicável com o ativo disponível.

Quando rank(X) $= 1 < S = 2$, o conjunto $\{q :\ X'q = P\}$ é afim: $q = q^\star + z$, com $z \in \ker(X') = \{z :\ x'z = 0\}$. Para qualquer payoff y,

$$(q^\star + z)'y \;=\; (q^\star)'y \;+\; z'y.$$

Se $y \in$ span(X), então $z'y = 0$ e o preço é consensual; se $y \notin$ span(X), pode ocorrer $z'y \neq 0$, gerando discordância.

(f) Mostre como os preços por estado q podem ser reescritos via um fator estocástico de desconto m escolhendo uma crença de referência $\overline{\pi}$, e obtenha a forma

$$p_j = \mathbb{E}[mx^j], \qquad \text{ou equivalentemente,} \qquad 1 = \mathbb{E}[mR^j]$$

Comente brevemente por que essa identidade não depende da completude de mercado.

Resposta:

Escolha uma crença de referência $\overline{\pi} = (\overline{\pi}_s)_{s\in S}$ com $\overline{\pi}_s > 0$ e $\sum_s \overline{\pi}_s = 1$. Defina o fator estocástico de desconto $m = (m_s)_{s\in S}$ por

$$m_s := \frac{q_s}{\overline{\pi}_s} \ (\geq 0).$$

Então, para qualquer ativo j com payoff $x^j = (x^j_s)_{s\in S}$ e preço p_j,

$$p_j = \sum_s q_s x^j_s = \sum_s \overline{\pi}_s \, m_s \, x^j_s = \mathbb{E}_{\overline{\pi}}\big[\, m \, x^j \,\big].$$

Dividindo ambos os lados por $p_j > 0$ e usando $R^j := x^j/p_j$,

$$1 = \mathbb{E}_{\overline{\pi}}\big[\, m \, R^j \,\big].$$

Exercício 2 (Equação fundamental de apreçamento)

Considere um agente representativo com utilidade CRRA

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad \gamma > 0, \gamma \neq 1$$

e fator de desconto $\beta \in (0,1)$. Para um ativo j com payoff x^j_{t+1} e retorno bruto R^j_{t+1}, denote o fator estocástico de desconto por

$$m_{t+1} \equiv \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

(a) Derive a equação de Euler e mostre as formas de apreçamento

$$p_j = \mathbb{E}_t[m_{t+1} x^j_{t+1}], \qquad 1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1} R^j_{t+1}]$$

identifique m_{t+1} em termos de $(\beta, \gamma, c_t, c_{t+1})$.

Resposta:

O problema do agente é dado por

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \quad \text{s.a.} \quad c_t + \sum_j p_t^j a_{t+1}^j \leq \sum_j a_t^j x_t^j \ \forall t$$

O lagrangeano é dado por

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \left[\sum_j a_t^j x_t^j - c_t - \sum_j p_t^j a_{t+1}^j\right]\right]$$

Com as condições de primeira ordem

$$\begin{aligned}
[c_t]: &\quad \beta^t c_t^{-\gamma} + \lambda_t[-1] = 0 \\
[a_{t+1}^j]: &\quad \lambda_t[-p_t^j] + \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1} x_{t+1}^j] = 0
\end{aligned}$$

Juntando as restrições, chegamos em

$$p_t^j c_t^{-\gamma} = \mathbb{E}_t[\beta c_{t+1}^{-\gamma} x_{t+1}^j] \quad \Rightarrow \quad p_t^j = \mathbb{E}_t\left[\underbrace{\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}}_{\equiv\, m_{t+1}} x_{t+1}^j\right] \quad \Rightarrow \quad 1 = \mathbb{E}_t\left[m_{t+1} \underbrace{\frac{x_{t+1}^j}{p_t^j}}_{\equiv\, R_{t+1}^j}\right]$$

(b) Mostre que o retorno livre de risco satisfaz $R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}]$, e interprete “prêmios são determinados por como R_{t+1}^j se co-move com m_{t+1}”. Em seguida, especialize a Euler para o ativo livre de risco.

Resposta:

Usando a equação de apreçamento passado, o retorno livre de risco satisfaz

$$1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1} R_{t+1}^f] = R_{t+1}^f \mathbb{E}_t[m_{t+1}] \quad \Rightarrow \quad (R_{t+1}^f)^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}]$$

Em suma, o prêmio de risco $\mathbb{E}_t[R_{t+1}^j] - R_{t+1}^f$ depende do comovimento de R_{t+1}^j com o fator de desconto m_{t+1}. Se $\mathrm{Cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}^j) > 0$, isto é, o ativo paga mais em estados “ruins” (quando

m_{t+1} é alto), o ativo vale mais hoje e o retorno exigido é menor; se a covariância é negativa, o prêmio é maior.

(c) Derive a representação por covariância

$$\mathbb{E}_t[R^j_{t+1}] - R_f = -\frac{\mathrm{Cov}_t(m_{t+1}, R^j_{t+1})}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]}$$

e discuta por que o risco idiossincrático não é precificado.

Resposta:

Partindo de $1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1}R^j_{t+1}]$, usando a identidade da esperança do produto, temos que

$$1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1}R^j_{t+1}] = \mathbb{E}_t[m_{t+1}]\mathbb{E}_t[R^j_{t+1}] + \mathrm{Cov}_t(m_{t+1}, R^j_{t+1})$$

E, usando $\mathbb{E}_t[m_{t+1}] = (R^f_{t+1})^{-1}$, obtemos

$$\mathbb{E}_t[R^j_{t+1}] - R^f_{t+1} = -\frac{\mathrm{Cov}_t(m_{t+1}, R^j_{t+1})}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]}$$

Decomponha o retorno em parte sistemática e idiossincrática:

$$R^j_{t+1} = R^{j,\mathrm{sys}}_{t+1} + \varepsilon^j_{t+1}, \qquad \mathbb{E}_t[\varepsilon^j_{t+1}] = 0, \quad \mathrm{Cov}_t\big(\varepsilon^j_{t+1},\, m_{t+1}\big) = 0.$$

Então,

$$\mathbb{E}_t[R^j_{t+1}] - R^f_{t+1} = -\frac{\mathrm{Cov}_t\big(m_{t+1}, R^{j,\mathrm{sys}}_{t+1}\big)}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]},$$

pois o termo idiossincrático "cai fora" pela ortogonalidade com m_{t+1}. Em economias com agente representativo (e/ou mercados completos), m_{t+1} reflete risco agregado (p. ex., consumo agregado). Choques idiossincráticos são diversificáveis e não afetam a utilidade marginal agregada; logo, não recebem prêmio. (Caso haja mercados incompletos ou restrições que impeçam a diversificação, tal componente pode ser parcialmente precificado.)

(d) Obtenha a decomposição $\beta - \lambda$ projetando R^j em m, i.e.

$$\mathbb{E}[R^j] - R_f = \beta_{j,m}\lambda_m, \quad \beta_{j,m} = \frac{\mathrm{Cov}(R^j, m)}{\mathrm{Var}(m)}, \quad \lambda_m = -\frac{\mathrm{Var}(m)}{\mathbb{E}[m]}$$

Resposta:

Vamos projetar R^j_{t+1} em m_{t+1}. Começamos escrevendo

$$R^j_{t+1} = \alpha_j + \beta_{j,m} m_{t+1} + u_{t+1} \quad \Rightarrow \quad \beta_{j,m} = \frac{\mathrm{Cov}(R^j_{t+1}, m_{t+1})}{\mathrm{Var}(m_{t+1})}, \ \mathbb{E}_t[m_{t+1}u_{t+1}] = 0$$

Logo, $\mathrm{Cov}(R^j_{t+1}, m_{t+1}) = \beta_{j,m}\mathrm{Var}(m_{t+1})$ e podemos escrever

$$\mathbb{E}[R^j] - R_f = \beta_{j,m}\lambda_m, \quad \lambda = \frac{-\mathrm{Var}(m_{t+1})}{\mathbb{E}[m_{t+1}]}$$

(e) Suponha que $\Delta \ln c_{t+1} \equiv \ln c_{t+1} - \ln c_t$ e R^j_{t+1} são conjuntamente normais com

$$\Delta \ln c_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma_c^2), \quad \ln R^j_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2), \quad \mathrm{Cov}(\Delta \ln c_{t+1}, \ln R^j_{t+1}) = \sigma_{cj}$$

Encontre R_f em função de $(\beta, \gamma, \mu_c, \sigma_c^2)$. Encontre o prêmio $\mathbb{E}[R^j] - R_f$ em função de (γ, σ_{cj}). Interprete econômica os sinais obtidos. **Dica:** Use as identidades padrão de médias lognormais.

Resposta:

Com $m_{t+1} = \beta\,(c_{t+1}/c_t)^{-\gamma}$, temos

$$\ln m_{t+1} = \ln\beta - \gamma\,\Delta \ln c_{t+1}.$$

Se $\Delta \ln c_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma_c^2)$, então

$$\ln m_{t+1} \sim \mathcal{N}\big(\ln\beta - \gamma\mu_c,\ \gamma^2\sigma_c^2\big), \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[m_{t+1}] = \beta\ \exp\big\{-\gamma\mu_c + \tfrac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2\big\}\,.$$

Como $(R_f)^{-1} = \mathbb{E}[m_{t+1}]$, segue que

$$R_f = \beta^{-1}\exp\big\{\gamma\mu_c - \tfrac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2\big\}\,.$$

Para o prêmio, use que $\ln R^j_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ e $\mathrm{Cov}(\Delta \ln c_{t+1}, \ln R^j_{t+1}) = \sigma_{cj}$. Logo,

$$\mathrm{Cov}(\ln m_{t+1}, \ln R^j_{t+1}) = \mathrm{Cov}(\ln\beta - \gamma\Delta \ln c_{t+1}, \ln R^j_{t+1}) = -\gamma\,\sigma_{cj}.$$

Para lognormais conjuntas, vale $\mathbb{E}[m_{t+1}R^j_{t+1}] = \mathbb{E}[m_{t+1}]\,\mathbb{E}[R^j_{t+1}]\exp\{\mathrm{Cov}(\ln m_{t+1}, \ln R^j_{t+1})\}$. Pela Euler $1 = \mathbb{E}[m_{t+1}R^j_{t+1}]$ e $(R_f)^{-1} = \mathbb{E}[m_{t+1}]$,

$$1 = R_f^{-1}\,\mathbb{E}[R^j]\,e^{-\gamma\sigma_{cj}} \;\Rightarrow\; \mathbb{E}[R^j] = R_f\,e^{\gamma\sigma_{cj}}.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[R^j] - R_f = R_f\big(e^{\gamma\sigma_{cj}} - 1\big) \approx R_f\,\gamma\,\sigma_{cj} \quad \text{(para } |\gamma\sigma_{cj}| \text{ pequeno).}$$

R_f aumenta com o crescimento esperado do consumo (μ_c) e cai com a incerteza (σ_c^2) pelo termo de poupança precaucional ($-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2$). O prêmio depende apenas do comovimento com o consumo agregado: se $\sigma_{cj} > 0$ (ativo paga mais em "tempos bons"), piora o seguro do investidor e exige prêmio positivo; se $\sigma_{cj} < 0$ (ativo faz hedge, pagando em "tempos ruins"), o prêmio é negativo; se $\sigma_{cj} = 0$, não há prêmio além do livre de risco.

(f) Reescreva (c) em forma "tipo CAPM", tomando como fator um retorno R^* perfeitamente correlacionado com m. Mostre que

$$\mathbb{E}[R^j] - R^f = \beta_j^*\mathbb{E}[R^* - R_f], \quad \beta_j^* = \frac{\mathrm{Cov}(R^j, R^*)}{\mathrm{Var}(R^*)}$$

Resposta:

Se R^* é perfeitamente correlacionado com m, então existe constantes positivas a, b tais que $m = a - bR^*$. Então

$$\mathbb{E}[R^j] - R^f = -\frac{\mathrm{Cov}(m, R^j)}{\mathbb{E}(m)} = \frac{b}{\mathbb{E}(m)} \cdot \mathrm{Cov}(R^j, R^*)$$

Usando a condição de Euler

$$1 = \mathbb{E}[mR^*] = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[R^*] + \underbrace{\mathrm{Cov}(m, R^*)}_{-b\mathrm{Var}(R^*)} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[R^*] - R^f = \frac{b}{\mathbb{E}[m]}\mathrm{Var}(R^*)$$

Logo, segue que

$$\mathbb{E}[R^j] - R^f = \frac{b}{\mathbb{E}(m)} \cdot \mathrm{Cov}(R^j, R^*) = [\mathbb{E}[R^*] - R^f] \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{Cov}(R^j, R^*)}{\mathrm{Var}(R^*)}}_{\beta_j^*}$$

Exercício 3 (Equity premium puzzle)

Considere o agente representativo com utilidade CRRA e a notação do Exercício 2. Recorde que temos

$$R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}], \qquad \mathbb{E}_t[R_{t+1}^j] - R_f = -\frac{\mathrm{Cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}^j)}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]}$$

e, sob lognormalidade de $\Delta \ln c_{t+1}$ e $\ln R_{t+1}^j$, temos expressões fechadas para R_f e o prêmio $\mathbb{E}[R^j] - R_f$.

(a) Usando as formulas do Exercício 2 (e), mostre que, para o "consumption claim" o prêmio tem ordem

$$\mathbb{E}[R^j] - R_f \sim \gamma \sigma_{cj}$$

Discuta o sinal e a intuição econômica.

Resposta:

Pelo Exercício 2(e), sob lognormalidade conjunta,

$$\mathbb{E}[R^j] = R_f\, e^{\gamma\, \sigma_{cj}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[R^j] - R_f = R_f\big(e^{\gamma \sigma_{cj}} - 1\big) \approx R_f\, \gamma\, \sigma_{cj}.$$

Para o *consumption claim*, o log-retorno acompanha o crescimento do consumo agregado:

$$\ln R_{t+1}^c = k + \Delta \ln c_{t+1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{c\,c} = \mathrm{Cov}(\Delta \ln c_{t+1}, \ln R_{t+1}^c) = \mathrm{Var}(\Delta \ln c_{t+1}) = \sigma_c^2.$$

Substituindo, obtemos

$$\mathbb{E}[R^c] - R_f = R_f\big(e^{\gamma \sigma_c^2} - 1\big) \approx R_f\, \gamma\, \sigma_c^2 \;\; \sim \;\; \gamma\, \sigma_c^2.$$

Como $\gamma > 0$ e $\sigma_c^2 > 0$, o prêmio é **positivo**. O consumption claim paga mais em "tempos bons" (quando o consumo é alto e a utilidade marginal é baixa), não oferecendo hedge em "tempos ruins"; por isso, o investidor exige um prêmio de risco positivo.

(b) Considere números compatíveis com os dados anuais de pós-guerra para os EUA: crescimento médio do consumo $g \in [1.8\%, 2.0\%]$, volatilidade $\sigma_c \in [1\%, 2\%]$, e comovimento σ_{cj} consistente com um ativo de mercado plausível. Use β anual próximo de 0.99 e $\gamma \in [2, 5]$ para estimar R_f e $\mathbb{E}[R^m] - R_f$. Compare seus números com um prêmio observado em torno de 6% ao ano. Mostre que para termos 6% de prêmio exigiria γ irrealisticamente alto. Discuta em termos econômicos.

Resposta:

Sob CRRA e lognormalidade,

$$R_f = \beta^{-1} \exp\{\gamma\mu_c - \tfrac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2\}, \qquad \mathbb{E}[R^m] - R_f = R_f(e^{\gamma\sigma_{cm}} - 1) \approx R_f\,\gamma\,\sigma_{cm},$$

em que $\mu_c \equiv \mathbb{E}[\Delta \ln c]$, $\sigma_c^2 \equiv \mathrm{Var}(\Delta \ln c)$ e $\sigma_{cm} \equiv \mathrm{Cov}(\Delta \ln c, \ln R^m)$.

Calibração: use $\beta = 0{,}99$ (logo $-\ln\beta \simeq 0{,}01005$), $g = \mu_c \in [0{,}018, 0{,}02]$, $\sigma_c \in [0{,}01, 0{,}02]$, $\gamma \in \{2, 5\}$. Para o comovimento com o mercado, tome um valor plausível

$$\sigma_{cm} = \rho_{cm}\,\sigma_c\,\sigma_m, \quad \rho_{cm} \in [0{,}1, 0{,}3],\ \sigma_m \approx 0{,}18,$$

e, como referência, adote o caso central $\rho_{cm} = 0{,}2$ (dando $\sigma_{cm} = 0{,}036\,\sigma_c$).

Taxa livre de risco:

$$\ln R_f = -\ln\beta + \gamma\mu_c - \tfrac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2.$$

Quatro cantos do conjunto $(\mu_c, \sigma_c) \in \{0{,}018, 0{,}02\} \times \{0{,}01, 0{,}02\}$:

$$\text{(L,L) } (\mu_c{=}0{,}018,\ \sigma_c{=}0{,}01): \begin{cases} \gamma{=}2: & \ln R_f \simeq 0{,}04585 \Rightarrow R_f \simeq 1{,}047 \ (4{,}7\%) \\ \gamma{=}5: & \ln R_f \simeq 0{,}09885 \Rightarrow R_f \simeq 1{,}104 \ (10{,}4\%) \end{cases}$$

$$\text{(H,H) } (\mu_c{=}0{,}02,\ \sigma_c{=}0{,}02): \begin{cases} \gamma{=}2: & \ln R_f \simeq 0{,}04925 \Rightarrow R_f \simeq 1{,}051 \ (5{,}1\%) \\ \gamma{=}5: & \ln R_f \simeq 0{,}10505 \Rightarrow R_f \simeq 1{,}111 \ (11{,}1\%) \end{cases}$$

Ou seja, o modelo gera R_f real anual muito mais alto face a evidência histórica (próxima de $\sim 1\%$) (esse é o "risk-free rate puzzle").

Prêmio do mercado: Com $\sigma_{cm} = 0{,}036\,\sigma_c$, a aproximação de pequena covariância dá

$$\mathbb{E}[R^m] - R_f \approx R_f\,\gamma\,\sigma_{cm} = R_f\,\gamma\,(0{,}036\,\sigma_c).$$

Valores representativos:

$$\sigma_c{=}0{,}01: \begin{cases} \gamma{=}2,\ R_f \simeq 1{,}047: & \mathbb{E}[R^m] - R_f \approx 0{,}00075 \ (\approx 0{,}08\%) \\ \gamma{=}5,\ R_f \simeq 1{,}104: & \mathbb{E}[R^m] - R_f \approx 0{,}0020 \ (\approx 0{,}20\%) \end{cases}$$

$$\sigma_c{=}0{,}02: \begin{cases} \gamma{=}2,\ R_f \simeq 1{,}051: & \mathbb{E}[R^m] - R_f \approx 0{,}00151 \ (\approx 0{,}15\%) \\ \gamma{=}5,\ R_f \simeq 1{,}111: & \mathbb{E}[R^m] - R_f \approx 0{,}00400 \ (\approx 0{,}40\%) \end{cases}$$

Logo, para um prêmio observado em torno de 6% a.a., a CRRA padrão exigiria um γ **irrealisticamente alto**. Usando a aproximação

$$\gamma^\star \;\approx\; \frac{\ln\!\big(1+\frac{0{,}06}{R_f}\big)}{\sigma_{cm}} \;\approx\; \frac{0{,}06}{R_f\,\sigma_{cm}},$$

temos, por exemplo,

$$\begin{aligned}
(\sigma_c{=}0{,}02,\ \rho_{cm}{=}0{,}2,\ R_f{\approx}1{,}11) &: \sigma_{cm} = 0{,}00072 \;\Rightarrow\; \gamma^\star \approx \frac{0{,}06}{1{,}11 \times 0{,}00072} \approx 75;\\
(\sigma_c{=}0{,}01,\ \rho_{cm}{=}0{,}2,\ R_f{\approx}1{,}05) &: \sigma_{cm} = 0{,}00036 \;\Rightarrow\; \gamma^\star \approx \frac{0{,}06}{1{,}05 \times 0{,}00036} \approx 159.
\end{aligned}$$

O consumo agregado é suave e tem correlação modesta com retornos de mercado; por isso, sob utilidade potência, o fator de desconto m é pouco volátil e o comovimento σ_{cm} é pequeno, gerando prêmios muito baixos a menos que a aversão ao risco γ seja enorme (contrária a evidência micro e escolhas plausíveis). Ao mesmo tempo, com $\beta \simeq 0{,}99$ e crescimento médio elevado, o modelo implica R_f real excessivamente alto. Resolver esse conjunto de anomalias tipicamente requer mecanismos que aumentem a covariância relevante ou a volatilidade do **pricing kernel** sem inflar R_f.

(c) Usando a expressão do Exercício 2 (b) para R_f sob lognormalidade, explique por que valores de γ elevados que ajudam no EPP **derrubam em excesso** R_f. Dê a intuição (substituição intertemporal vs. aversão ao risco e o papel de $\mathbb{E}[m]$).

Resposta:

Sob CRRA e lognormalidade do crescimento do consumo,

$$R_f = \beta^{-1}\exp\!\big\{\gamma\,\mu_c - \tfrac{1}{2}\,\gamma^2\,\sigma_c^2\big\} \quad\Longleftrightarrow\quad \ln R_f = -\ln\beta + \gamma\,\mu_c - \tfrac{1}{2}\,\gamma^2\,\sigma_c^2,$$

e, equivalentemente,

$$\mathbb{E}[m] = \beta\,\exp\!\big\{-\gamma\,\mu_c + \tfrac{1}{2}\,\gamma^2\,\sigma_c^2\big\} \quad \text{com} \quad R_f^{-1} = \mathbb{E}[m].$$

Logo, o parâmetro γ afeta $\ln R_f$ por dois canais:

$$\underbrace{+\,\gamma\,\mu_c}_{\text{substituição intertemporal (linear em }\gamma)} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{-\,\tfrac{1}{2}\,\gamma^2\,\sigma_c^2}_{\text{aversão ao risco / poupança precaucional (quadrático em }\gamma)} .$$

O primeiro termo (via $\mu_c > 0$) tende a elevar R_f quando γ cresce, pois com crescimento esperado maior o agente aceita adiar consumo. Já o segundo termo aumenta rapidamente em módulo com γ (convexidade do pricing kernel), elevando $\mathbb{E}[m]$ e, portanto, reduzindo R_f.

O ponto de inflexão vem de

$$\frac{\partial \ln R_f}{\partial \gamma} = \mu_c - \gamma\, \sigma_c^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\star = \frac{\mu_c}{\sigma_c^2}.$$

Para $\gamma > \gamma^\star$, o termo de risco (quadrático) domina o de crescimento (linear) e R_f passa a **cair** com γ. Em termos de $\mathbb{E}[m]$, como

$$\ln \mathbb{E}[m] = \ln \beta - \gamma\, \mu_c + \tfrac{1}{2}\, \gamma^2\, \sigma_c^2,$$

a convexidade faz $\mathbb{E}[m]$ explodir quando γ é alto, encarecendo muito o payoff livre de risco e derrubando sua taxa de retorno.

Portanto, para elevar o prêmio acionário $\mathbb{E}[R^m] - R_f \approx R_f\, \gamma\, \sigma_{cm}$ em ambiente em que σ_{cm} é pequeno, seria preciso aumentar γ substancialmente. Contudo, esse mesmo aumento torna o pricing kernel muito volátil, faz $\mathbb{E}[m]$ crescer (termo $\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_c^2$) e, portanto, derruba R_f face aos dados.

Finalmente, valores altos de γ ajudam no prêmio (via $\gamma\, \sigma_{cm}$), mas, por aumentarem fortemente a variância do fator de desconto, ampliam $\mathbb{E}[m]$ e derrubam R_f além do observado. O quebra-cabeça conjunto (prêmio alto com R_f moderado) sugere mecanismos adicionais que aumentem o comovimento relevante com m sem colapsar R_f (p. ex., preferências não-esperadas, hábito, riscos de longo prazo, desastres raros, heterogeneidade/mercados incompletos).

(d) Considere as preferências do tipo Epstein-Zin (EZ), representadas pela utilidade

$$U_t = \left[(1-\beta) C_t^{1-\frac{1}{\psi}} + \beta \mu_t^{1-\frac{1}{\psi}}\right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\psi}}} \qquad \mu_t \equiv \left(\mathbb{E}_t[U_{t+1}^{1-\gamma}]\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Derive a condição de apreçamento e fator estocástico de desconto sob EZ. Mostre que, denotando por R_{t+1}^w o retorno sob a riqueza agregada (portfólio que internaliza a continuação de utilidade) vale a forma canônica

$$m_{t+1} = \beta^\theta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} (R_{t+1}^w)^{\theta-1}, \qquad \theta \equiv \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$$

Use que $R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}]$ e a expressão acima para discutir como ψ afeta principalmente o nível de R_f enquanto γ governa o preço do risco.

Resposta:

Considere a recursão EZ

$$U_t = \left[(1-\beta)\, C_t^{1-\frac{1}{\psi}} + \beta\, \mu_t^{1-\frac{1}{\psi}}\right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\psi}}}, \qquad \mu_t = \left(\mathbb{E}_t[U_{t+1}^{1-\gamma}]\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Defina $\eta \equiv 1-\frac{1}{\psi}$ e $A_t \equiv (1-\beta)C_t^{\eta} + \beta\, \mu_t^{\eta}$, de modo que $U_t = A_t^{1/\eta}$ e $A_t = U_t^{\eta}$. Seja W_t a riqueza agregada e R_{t+1}^w o retorno do portfólio de riqueza que implementa a continuação ótima:

$$W_{t+1} = (W_t - C_t)\, R_{t+1}^w.$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial U_t}{\partial C_t} = \frac{\partial U_t}{\partial A_t}\frac{\partial A_t}{\partial C_t} = \frac{1}{\eta} A_t^{\frac{1}{\eta}-1}\,(1-\beta)\eta\, C_t^{\eta-1} = (1-\beta)\, U_t^{\frac{1}{\psi}}\, C_t^{-\frac{1}{\psi}},$$

$$\frac{\partial U_t}{\partial \mu_t} = \frac{1}{\eta} A_t^{\frac{1}{\eta}-1}\, \beta\eta\, \mu_t^{\eta-1} = \beta\, U_t^{\frac{1}{\psi}}\, \mu_t^{-\frac{1}{\psi}}.$$

Da definição $\mu_t^{1-\gamma} = \mathbb{E}_t[U_{t+1}^{1-\gamma}]$, a derivada direcional (por estado ω) é

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial U_{t+1}(\omega)} = \mu_t^{\gamma}\, U_{t+1}(\omega)^{-\gamma}\, \pi_t(\omega),$$

em que $\pi_t(\omega)$ é a probabilidade condicional.

Denote o valor marginal da riqueza por $J_t \equiv \frac{\partial U_t}{\partial W_t}$. Pelo envelope dinâmico e pela restrição orçamentária,

$$J_t = \mathbb{E}_t\left[\frac{\partial U_t}{\partial \mu_t}\, \frac{\partial \mu_t}{\partial U_{t+1}}\, \frac{\partial U_{t+1}}{\partial W_{t+1}}\, \frac{\partial W_{t+1}}{\partial W_t}\right] = \mathbb{E}_t\left[\underbrace{\Lambda_{t+1}}_{\text{IMRS em utilidade}}\, J_{t+1}\, R_{t+1}^w\right],$$

com

$$\Lambda_{t+1} = \frac{\partial U_t}{\partial \mu_t}\, \frac{\partial \mu_t}{\partial U_{t+1}} = \beta\, U_t^{\frac{1}{\psi}}\, \mu_t^{-\frac{1}{\psi}} \;\cdot\; \mu_t^{\gamma}\, U_{t+1}^{-\gamma} = \beta\, U_t^{\frac{1}{\psi}} \mu_t^{\gamma-\frac{1}{\psi}}\, U_{t+1}^{-\gamma}.$$

Dividindo a identidade para J_t por J_t,

$$1 = \mathbb{E}_t\left[\Lambda_{t+1}\, \frac{J_{t+1}}{J_t}\, R_{t+1}^w\right]. \tag{$\star$}$$

Por outro lado, a FOC de portfólio para um ativo qualquer j com retorno R^j_{t+1} fornece

$$0 = \mathbb{E}_t\left[\Lambda_{t+1}\,\frac{J_{t+1}}{J_t}\,\big(R^j_{t+1} - R^w_{t+1}\big)\right] \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}_t\Bigg[\underbrace{\Lambda_{t+1}\,\frac{J_{t+1}}{J_t}}_{\text{núcleo de apreçamento}}\,R^j_{t+1}\Bigg] = \mathbb{E}_t\left[\Lambda_{t+1}\,\frac{J_{t+1}}{J_t}\,R^w_{t+1}\right].$$

Assim, qualquer SDF proporcional a $\Lambda_{t+1}\frac{J_{t+1}}{J_t}$ precifica todos os ativos.

A homoteticidade da recursão EZ implica (algebra direta usando ($\star$) e o envelope) que o quociente J_{t+1}/J_t pode ser escrito como

$$\frac{J_{t+1}}{J_t} = \beta^{\,\theta-1}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\left(\frac{U_{t+1}}{\mu_t}\right)^{\theta-1}\big(R^w_{t+1}\big)^{\theta-1}, \qquad \theta \equiv \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}.$$

Substituindo essa expressão em $\Lambda_{t+1}\frac{J_{t+1}}{J_t}$ e rearranjando potências de U_{t+1} e μ_t, o núcleo de apreçamento torna-se proporcional a

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\big(R^w_{t+1}\big)^{\theta-1}.$$

Logo, existe uma constante de normalização κ_t (determinística em t) tal que

$$m_{t+1} = \kappa_t\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\big(R^w_{t+1}\big)^{\theta-1}.$$

Agora podemos normalizar usando a riqueza. Impondo a Euler para o portfólio de riqueza, $1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1}R^w_{t+1}]$, obtemos

$$1 = \kappa_t\,\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}\big(R^w_{t+1}\big)^{\theta}\right].$$

Usando a identidade ($\star$) (isto é, a Euler em termos de J_t) para eliminar a expectativa do lado direito, segue que a normalização é $\kappa_t = \beta^\theta$. Concluímos, portanto, a forma canônica:

$$m_{t+1} = \beta^{\theta}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}(R^w_{t+1})^{\,\theta-1}, \qquad \theta = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}.$$

Para qualquer ativo j,

$$1 = \mathbb{E}_t\big[m_{t+1}R^j_{t+1}\big] = \beta^{\theta}\,\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}}(R^w_{t+1})^{\,\theta-1}\,R^j_{t+1}\right].$$

Livre de risco e papel de ψ versus γ: Do SDF,

$$R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}] = \beta^\theta\, \mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} \left(R^w_{t+1}\right)^{\theta-1}\right].$$

- $\Rightarrow$ **ψ (IES) e o nível de R_f:** o termo $\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-1/\psi}$ carrega diretamente a **substituição intertemporal**. Com crescimento esperado positivo, maior ψ (IES alta) reduz $1/\psi$ e, portanto, **diminui** a carga de crescimento no SDF, elevando $\mathbb{E}[m]^{-1} = R_f$. Assim, ψ governa principalmente o nível do livre de risco.

- $\Rightarrow$ **γ (aversão ao risco) e o preço do risco:** o termo $(R^w_{t+1})^{\theta-1}$ concentra o papel de γ via $\theta = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$. Para γ maior (mantido ψ), $\theta - 1$ torna-se mais negativo, aumentando a sensibilidade de m_{t+1} às oscilações de R^w_{t+1} e, portanto,ampliando covariâncias $\mathrm{Cov}(m_{t+1}, R^j_{t+1})$ e os prêmios de risco, com efeito de primeira ordem menor sobre o nível de R_f do que em CRRA.

Portanto, em EZ, a separação entre IES (ψ) e aversão ao risco (γ) permite elevar prêmios (via γ e o termo de riqueza) sem colapsar R_f (ajustado por ψ), mitigando simultaneamente o *equity premium puzzle* e o *risk-free rate puzzle.*

Exercício 4 (CAPM)

Considere uma economia de duas datas $t \in \{0, 1\}$ com J ativos em oferta fixa. Os payoffs $(x_1, \cdots, x_J)$ em $t = 1$ são conjuntamente normais (média μ e covariância Σ). Há um ativo livre de risco com retorno bruto R_f. Um agente representativo escolhe portfólio e consumo, suponha utilidade quadrática em faixa onde a utilidade marginal é positiva. O consumo $t = 1$ provém do payoff do portfólio.

(a) Escreva o problema de portfólio do agente representativo, usando z_j para a posição no ativo j (lembre $z_j = 1$ como dotação). Defina um equilíbrio competitivo (use a oferta fixa $\overline{z}_j$ com market clearing $\sum_i z_{ij} = \overline{z}_j$).

Resposta:

Em $t = 0$, os ativos arriscados têm preços $p \in \mathbb{R}^J$; o ativo livre de risco tem preço $q_f = R_f^{-1}$. Em $t = 1$, o vetor de payoffs dos ativos arriscados é $x \in \mathbb{R}^J$, com $\mathbb{E}[x] = \mu$ e $\mathrm{Var}(x) = \Sigma$. Consumo ocorre apenas em $t = 1$. A oferta agregada dos ativos arriscados é $\bar{z}$ (por exemplo, $\bar{z}_j = 1$ para todo j). O ativo livre de risco tem oferta líquida zero. A riqueza inicial é $w_0 = p'\bar{z}$.

O agente escolhe $z \in \mathbb{R}^J$ (quantidades dos ativos arriscados) e $y \in \mathbb{R}$ (quantidade do ativo livre de risco). O consumo em $t = 1$ é

$$c_1 \;=\; yR_f + z'x.$$

Problema do agente representativo (MV):

$$\max_{y,\,z} \quad \mathbb{E}[c_1] \;-\; \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{Var}(c_1) \quad \text{s.a.} \quad p'z + q_f\, y \;=\; w_0, \quad q_f = R_f^{-1}.$$

Como $\mathrm{Var}(c_1) = \mathrm{Var}(z'x) = z'\Sigma z$ e $\mathbb{E}[c_1] = yR_f + \mu' z$, o problema pode ser escrito como

$$\max_{y,\,z} \quad yR_f + \mu' z \;-\; \frac{\gamma}{2}\, z'\Sigma z \quad \text{s.a.} \quad p'z + q_f\, y \;=\; w_0.$$

Equilíbrio competitivo: Um equilíbrio é um conjunto $(p^*, R_f^*; z^*, y^*)$ tal que:

1) (*Otimização individual*) Dado (p^*, R_f^*), (z^*, y^*) resolve o problema acima.

2) (*Market clearing*) $z^* = \bar{z}$ e $y^* = 0$ (ativo livre de risco em oferta líquida zero).

Observação: Sob utilidade quadrática em região de utilidade marginal positiva, a utilidade esperada é afim em $(\mathbb{E}[c_1], \mathrm{Var}(c_1))$, isto é,

$$\mathbb{E}[u(c_1)] \;\equiv\; \mathbb{E}[c_1] \;-\; \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{Var}(c_1),$$

para algum $\gamma > 0$. Se, além disso, os payoffs são conjuntamente normais, a distribuição de c_1 é totalmente determinada por média e variância, legitimando a formulação em média–variância acima.

(b) Derive as condições de primeira ordem e caracterize o consumo de equilíbrio em $t = 1$. Descreva o fator estocástico de desconto gerado por esse agente.

Resposta:

Substituindo a restrição orçamentária $p'z + q_f y \;=\; w_0$ (com $q_f \;=\; R_f^{-1}$) no objetivo média–variância,

$$\max_{z} \quad R_f w_0 + (\mu - R_f p)' z - \frac{\gamma}{2}\, z'\Sigma z,$$

as condições de primeira ordem (e a concavidade por $\Sigma \succ 0$) dão

$$[z]: \quad \mu - R_f p - \gamma\,\Sigma z \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad z^* \;=\; \frac{1}{\gamma}\,\Sigma^{-1}(\mu - R_f p)\,.$$

No equilíbrio competitivo,

$$z^* = \bar{z} \quad \Longrightarrow \quad p^* \;=\; \frac{1}{R_f}\Big(\mu - \gamma\,\Sigma\,\bar{z}\Big).$$

A escolha em y ajusta-se pela restrição: $y^* = (w_0 - p'z^*)/q_f$. Como $w_0 = p'\bar{z}$ e $z^* = \bar{z}$, segue $y^* = 0$ (ativo livre de risco em oferta líquida zero). Logo, o consumo (agregado) de equilíbrio em $t = 1$ é

$$c_1^* \;=\; y^* R_f + (z^*)'x \;=\; \bar{z}'\,x, \quad \text{com} \quad \mathbb{E}[c_1^*] = \bar{z}'\mu, \;\; \mathrm{Var}(c_1^*) = \bar{z}'\Sigma\bar{z}.$$

Com utilidade quadrática $u(c) = \alpha c - \frac{\gamma}{2}c^2$ na faixa de utilidade marginal positiva, o SDF é proporcional à utilidade marginal futura:

$$m \;\equiv\; \kappa\, u'(c_1^*) \;=\; \kappa\big(\alpha - \gamma\, c_1^*\big).$$

A normalização é fixada pelo ativo livre de risco: $1 = \mathbb{E}[mR_f]$. Como $c_1^* = \bar{z}'x$,

$$1 = \mathbb{E}\big[\kappa\big(\alpha - \gamma\,\bar{z}'x\big)R_f\big] \implies \kappa = \frac{1}{R_f\big(\alpha - \gamma\,\mathbb{E}[c_1^*]\big)} = \frac{1}{R_f\big(\alpha - \gamma\,\bar{z}'\mu\big)}.$$

Portanto,

$$m \;=\; \frac{\alpha - \gamma\,\bar{z}'x}{R_f\big(\alpha - \gamma\,\bar{z}'\mu\big)}.$$

(c) Defina o retorno do portfólio de mercado como

$$R_m = \frac{\sum_j x_j}{\sum_j p_j}$$

Mostre que, sob normalidade dos payoffs e utilidade quadrática, o SDF é linear em $R_m : m = a + bR_m$ para constantes a, b.

Resposta:

Por definição,

$$R_m \;=\; \frac{\sum_j x_j}{\sum_j p_j}.$$

No equilíbrio competitivo com oferta líquida zero do ativo livre de risco e $\bar{z}_j = 1$ (pela normalização no enunciado) para todo j, o consumo agregado em $t = 1$ é

$$c_1^* \;=\; \bar{z}'x \;=\; \sum_j x_j \quad \text{e} \quad w_0 \;=\; p'\bar{z} \;=\; \sum_j p_j,$$

de modo que $c_1^* = w_0\, R_m$.

Do item (b),

$$m \;=\; \frac{\alpha - \gamma\, c_1^*}{R_f\big(\alpha - \gamma\, \mathbf{1}'\mu\big)} \;=\; \underbrace{\left[\frac{\alpha}{R_f\big(\alpha - \gamma\, \mathbf{1}'\mu]\big)}\right]}_{a} \;+\; \underbrace{\left[\frac{-\,\gamma\, w_0}{R_f\big(\alpha - \gamma\, \mathbf{1}'\mu\big)}\right]}_{b}\; R_m.$$

Logo, $m \;=\; a + b\, R_m$ é linear em R_m. Note que $b \,<\, 0$ pois $\gamma \,>\, 0$ e, na faixa relevante, $\alpha - \gamma\, \mathbf{1}'\mu > 0$.

(d) Argumente condições sob as quais um ativo arriscado pode ter retorno esperado inferior ao livre de risco em equilíbrio (papel de hedge contra variações em R_m e utilidade quadrática).

Resposta:

Para qualquer ativo j,

$$1 \;=\; \mathbb{E}[mR_j] \;=\; \mathbb{E}[m]\,\mathbb{E}[R_j] \;+\; \mathrm{Cov}(m, R_j).$$

Como $1 = \mathbb{E}[mR_f]$, tem-se $\mathbb{E}[m] = 1/R_f$, logo

$$\mathbb{E}[R_j] \;=\; R_f \;-\; R_f\;\mathrm{Cov}(m, R_j).$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[R_j] \;<\; R_f \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Cov}(m, R_j) \;>\; 0.$$

Portanto, se o ativo paga mais quando m é alto (isto é, em estados "ruins" onde o consumo agregado e R_m são baixos, elevando o SDF), ele fornece hedge importante. Os agentes pagam um prêmio por essa proteção, elevando o preço e reduzindo o retorno esperado *ex ante* abaixo de R_f.

Mais ainda, no item (c), $m = a + bR_m$ com $b < 0$. Assim,

$$\mathrm{Cov}(m, R_j) \;=\; b\;\mathrm{Cov}(R_m, R_j).$$

Como $b < 0$,

$$\mathrm{Cov}(m, R_j) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Cov}(R_m, R_j) < 0.$$

Logo, um ativo com beta de mercado negativo

$$\beta_{j,m} \;=\; \frac{\mathrm{Cov}(R_j, R_m)}{\mathrm{Var}(R_m)} \;<\; 0$$

tem retorno esperado **inferior** ao livre de risco: ele se valoriza exatamente quando o retorno do mercado cai (função de hedge).

No caso do CAPM, sob normalidade e utilidade quadrática (ou agentes média–variância),

$$\mathbb{E}[R_j] - R_f \;=\; \beta_{j,m}\big(\mathbb{E}[R_m] - R_f\big).$$

Se $\beta_{j,m} < 0$, então $\mathbb{E}[R_j] < R_f$. A condição econômica é: o ativo oferece seguro (pagamentos elevados) em estados de baixo R_m.

Exercício 5 (Árvore de Lucas)

Considere um agente representativo com utilidade separável no tempo e log

$$\mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t\right], \qquad \beta \in (0,1)$$

que detém uma árvore (dotação) que paga dividendos d_t. A taxa de crescimento do dividendo é binária e segue uma cadeia de Markov

$$\frac{d_{t+1}}{d_t} \in \{\mu+\sigma, \mu-\sigma\}, \quad \mu > 1, \sigma > 0$$

com matriz de transição simétrica P em que a probabilidade de troca de estados é $p \in (0,1)$. Existem mercados para bens, para árvore e para ativos de Arrow que pagam uma unidade de consumo em um estado específico de $t+1$. Suponha $\lim_{n\to\infty} \beta^{n+1}\mathbb{E}_t[x_{t+n}] = 0$.

(a) Formule o problema do agente representativo. Identifique as variáveis de estado mínimas. Defina o consumo viável e a relação entre consumo e dividendos em equilíbrio.

Resposta:

O dividendo satisfaz $d_{t+1} = g(z_{t+1})\, d_t$ com $z_t \in \{H, L\}$, $g(H) = \mu+\sigma$, $g(L) = \mu-\sigma$, e z_t segue uma cadeia de Markov. Um conjunto mínimo de estados é $(d_t,\ z_t)$.

Dado o histórico $s^t = (z_0, \ldots, z_t)$, o agente escolhe consumo $c_t(s^t)$, posição na árvore $x_{t+1}(s^t)$ e uma carteira de ativos de Arrow $b_{t+1}(s^t, z_{t+1})$ que paga 1 unidade de consumo no estado z_{t+1} em $t+1$. Denote:

- $q_t(s^t)$: preço *ex-dividendo* da árvore em t;
- $Q_t(z_{t+1} \mid s^t)$: preço do ativo de Arrow que paga em $(t+1, z_{t+1})$.

O problema é

$$\max_{\{c_t, x_{t+1}, b_{t+1}\}} \ \mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t(s^t)\right]$$

sujeito, $\forall\, t, s^t$, a

$$c_t(s^t) \ + \ q_t(s^t)\, x_{t+1}(s^t) \ + \ \sum_{z_{t+1}} Q_t(z_{t+1} \mid s^t)\, b_{t+1}(s^t, z_{t+1}) \leq \ x_t(s^t)\big[q_t(s^t) + d_t(s^t)\big] \ + \ b_t(s^t),$$

$$c_t(s^t) \geq 0, \qquad x_0 = 1, \qquad b_0 = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_0\big[M_{0,T}\, q_T(s^T)\, x_{T+1}(s^T)\big] = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_0\big[M_{0,T}\, b_{T+1}(s^T)\big] = 0,$$

onde o fator estocástico de desconto (SDF) é

$$m_{t+1}(s^{t+1}) = \beta\, \frac{u'(c_{t+1}(s^{t+1}))}{u'(c_t(s^t))} = \beta\, \frac{c_t(s^t)}{c_{t+1}(s^{t+1})}, \qquad M_{0,T} = \prod_{\tau=0}^{T-1} m_{\tau+1}.$$

Uma sequência $\{c_t(s^t)\}$ é viável se existem $\{x_{t+1}(s^t)\}$ e $\{b_{t+1}(s^t, z_{t+1})\}$ que satisfazem a restrição orçamentária sequencial e as condições de transversalidade acima. Com um agente representativo e mercados completos,

$$c_t(s^t) = d_t(s^t), \qquad x_t(s^t) = 1, \qquad b_t(s^t) = 0 \quad \forall\, t, s^t.$$

Com utilidade log,

$$m_{t+1} = \beta\, \frac{d_t}{d_{t+1}} = \frac{\beta}{g(z_{t+1})}.$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo recursivo (preço da árvore $P(d,z)$, preços de Arrow $Q(z,z')$, regras de decisão e market-clearing).

Resposta:

Considere o estado agregado $s = (d,z)$, com $d > 0$, $z \in \{H, L\}$ e lei de movimento $d' = g(z')\, d$, onde $g(H) = \mu + \sigma$ e $g(L) = \mu - \sigma$, e uma matriz de transição $\Pi(z,z')$. Um equilíbrio competitivo recursivo é dado por:

- uma função valor do agente representativo $V(s,a)$;
- regras de decisão $(c, a') : (s,a) \mapsto \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$;
- um preço da árvore $P(d,z)$ e preços de Arrow $Q(z,z')$.

tais que:

1) Optimalidade do consumidor. Dados (P, Q), o agente resolve

$$V(s,a) = \max_{c\geq 0,\, a'} \left\{ \ln c + \beta\, \mathbb{E}\big[V(s',a') \mid z\big] \right\}$$

sujeito a

$$c + P(d,z)\, a' \;\leq\; a\big(P(d,z) + d\big), \qquad s' = (d', z'),\;\; d' = g(z')\, d,$$

com condição de transversalidade usual. As escolhas satisfazem a equação de Euler com fator estocástico de desconto

$$m(s,z') = \beta\, \frac{u'(c(s',a'))}{u'(c(s,a))} = \beta\, \frac{c(s,a)}{c(s',a')}.$$

2) Consistência de preços.

$$P(d,z) \;=\; \sum_{z'\in\{H,L\}} \Pi(z,z')\, \mathbb{E}\big[m(s,z')\big(d' + P(d',z')\big) \,\big|\, s\big]$$

$$Q(z,z') \;=\; \mathbb{E}\big[m(s,z')\, \mathbf{1}_{\{z_{t+1}=z'\}} \,\big|\, z_t = z\big] \;=\; \Pi(z,z')\, \mathbb{E}[m(s,z') \mid z]$$

onde $d' = g(z')\, d$.

3) Market clearing.

$$a \equiv 1, \qquad a'(s,1) = 1 \;\; \forall s, \qquad c(s,1) = d \;\; \forall s,$$

(e, para os ativos de Arrow, oferta líquida zero).

Em equilíbrio competitivo com um agente representativo e $u(c) = \ln c$,

$$m(s,z') = \beta\, \frac{d}{d'} = \frac{\beta}{g(z')},$$

logo $Q(z,z') = \dfrac{\beta\, \Pi(z,z')}{g(z')}$ e

$$P(d,z) \;=\; \sum_{z'} \frac{\beta\, \Pi(z,z')}{g(z')} \Big(d' + P(d',z')\Big), \qquad d' = g(z')\, d.$$

(c) Mostre que, com utilidade log e sob hipótese de não bolha, o preço da árvore é proporcional ao dividendo (i.e., $P(d,z) = \varphi(z)d$). Escreva as equações de objetos de avaliação que determinam $\varphi(z)$.

Resposta:

Sob utilidade log e ausência de bolhas (condição de transversalidade), o preço da árvore satisfaz

$$P(d,z)=\sum_{z'}\Pi(z,z')\,\mathbb{E}\big[m_{t+1}\big(d'+P(d',z')\big)\mid s\big]\,,\quad m_{t+1}=\beta\frac{d}{d'}=\frac{\beta}{g(z')},\ \ d'=g(z')\,d.$$

Faça o *guess* $P(d,z)=\varphi(z)\,d$. Então

$$\begin{aligned}P(d,z)&=\sum_{z'}\Pi(z,z')\,\frac{\beta}{g(z')}\Big(g(z')d+\varphi(z')g(z')d\Big)=\beta d\sum_{z'}\Pi(z,z')\big(1+\varphi(z')\big)\\&=\beta d\Big[1+\sum_{z'}\Pi(z,z')\varphi(z')\Big].\end{aligned}$$

Logo, identificando os coeficientes em d,

$$\varphi(z)=\beta\Big[1+\sum_{z'}\Pi(z,z')\,\varphi(z')\Big]\,.$$

Em notação matricial, com $\Phi=\big(\varphi(H),\varphi(L)\big)'$ e $\mathbf{1}=(1,1)'$,

$$\Phi=\beta\,\mathbf{1}+\beta\,\Pi\,\Phi\implies(\mathbb{I}_2-\beta\Pi)\Phi=\beta\,\mathbf{1}\implies\Phi=\beta(\mathbb{I}_2-\beta\Pi)^{-1}\mathbf{1}$$

Para $\Pi=\left(\begin{smallmatrix}\pi_{HH}&\pi_{HL}\\\pi_{LH}&\pi_{LL}\end{smallmatrix}\right)$, seja

$$\mathbb{I}_2-\beta\Pi=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\beta\pi_{HH}&-\beta\pi_{HL}\\-\beta\pi_{LH}&1-\beta\pi_{LL}\end{pmatrix},\quad\Delta=ad-bc>0.$$

Então

$$\varphi(H)=\beta\,\frac{1-\beta\pi_{LL}+\beta\pi_{HL}}{\Delta},\qquad\varphi(L)=\beta\,\frac{1-\beta\pi_{HH}+\beta\pi_{LH}}{\Delta}$$

(d) Derive os preços de Arrow $Q(z,z')$ e interprete-os em termos de SDF de equilíbrio.

Resposta:

Pela definição,

$$Q(z,z')=\mathbb{E}\big[m_{t+1}\,\mathbf{1}_{\{z_{t+1}=z'\}}\mid z_t=z\big]=\Pi(z,z')\,\mathbb{E}[m_{t+1}\mid z_{t+1}=z'].$$

Com utilidade log no equilíbrio representativo, $m_{t+1} = \beta / g(z')$. Logo,

$$Q(z, z') = \frac{\beta\, \Pi(z, z')}{g(z')}$$

Em forma matricial, com $G = \operatorname{diag}\big(g(H), g(L)\big)$,

$$Q = \beta\, \Pi\, G^{-1}$$

(e) Introduza um título que paga uma unidade de consumo em $t+1$ calcule seu preço e deduza o retorno livre de risco $R_f(z)$.

Resposta:

O preço em t de um título que paga 1 em qualquer estado z' de $t{+}1$, condicionado a z, é

$$b(z) = \sum_{z'} Q(z, z') = \beta \sum_{z'} \frac{\Pi(z, z')}{g(z')} = \beta\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{g(z_{t+1})} \,\middle|\, z_t = z \right].$$

O retorno livre de risco é

$$R_f(z) = \frac{1}{b(z)} = \left(\beta \sum_{z'} \frac{\Pi(z, z')}{g(z')} \right)^{-1}$$

(f) No caso $p = \frac{1}{2}$, calcule a taxa de retorno média do título livre de risco e da árvore e obtenha o equity premium. Comente como (β, μ, σ, p) afetam R_f, o retorno esperado da árvore e o prêmio.

Resposta:

Com $\Pi(z, \cdot) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ para todo z, tem-se $\varphi(H) = \varphi(L) \equiv \varphi = \dfrac{\beta}{1-\beta}$. O retorno da árvore é

$$R^{\text{árvore}}_{t+1} = \frac{d_{t+1} + P_{t+1}}{P_t} = \frac{g(z_{t+1})\,[1+\varphi]}{\varphi} \;\Rightarrow\; \mathbb{E}\big[R^{\text{árvore}}_{t+1}\big] = \frac{1+\varphi}{\varphi}\, \mathbb{E}[g(z_{t+1})] = \frac{\mu}{\beta}.$$

O preço do ativo livre de risco é

$$b = \beta \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu + \sigma} + \frac{1}{\mu - \sigma} \right) = \beta\, \frac{\mu}{\mu^2 - \sigma^2} \;\Rightarrow\; R_f = \frac{\mu^2 - \sigma^2}{\beta\, \mu}$$

Logo, o *equity premium* é

$$\mathbb{E}[R_{t+1}^{\text{árvore}}] - R_f = \frac{\mu}{\beta} - \frac{\mu^2 - \sigma^2}{\beta\,\mu} = \frac{\sigma^2}{\beta\,\mu}$$

No caso $p = \frac{1}{2}$:

(i) $\uparrow \beta \Rightarrow \uparrow \varphi$ (preço da árvore maior), $\downarrow R_f$, $\uparrow$ prêmio (via $1/\beta$);

(ii) $\uparrow \mu \Rightarrow \uparrow \mathbb{E}[R^{\text{árvore}}] = \mu/\beta$ e $\uparrow R_f = (\mu^2 - \sigma^2)/(\beta\mu)$ (efeito líquido no prêmio: $\downarrow$, pois $\sigma^2/(\beta\mu)$ cai com μ);

(iii) $\uparrow \sigma \Rightarrow \downarrow R_f$ por convexidade de $1/g$ (Jensen) e $\uparrow$ prêmio $\big(\sigma^2/(\beta\mu)\big)$;

(iv) p não afeta os valores médios quando $p = \frac{1}{2}$ (linhas idênticas de Π); fora desse caso, maiores persistências tornam $R_f(z)$ mais dependente do estado atual por meio de $b(z) = \beta\sum_{z'} \Pi(z,z')/g(z')$.
