Consumo e equilíbrio com dinâmica e incerteza

Felipe Iachan

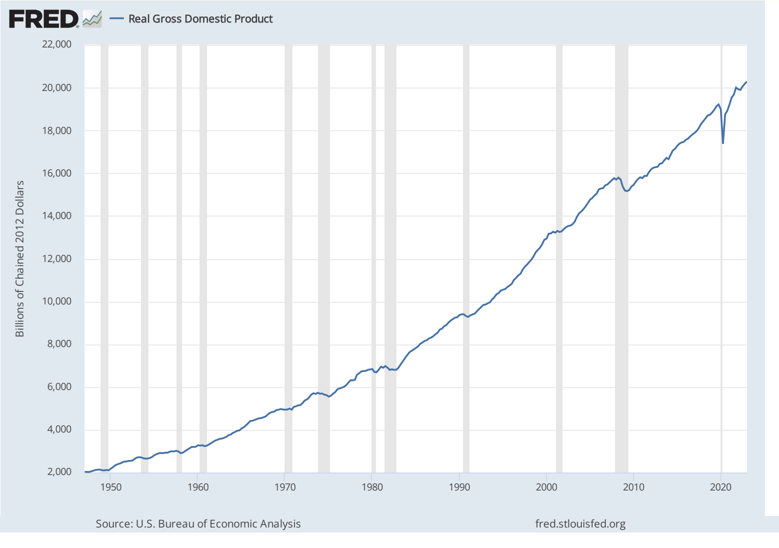
FGV EPGE

Macroeconomia II, MD,
13 de julho de 2025

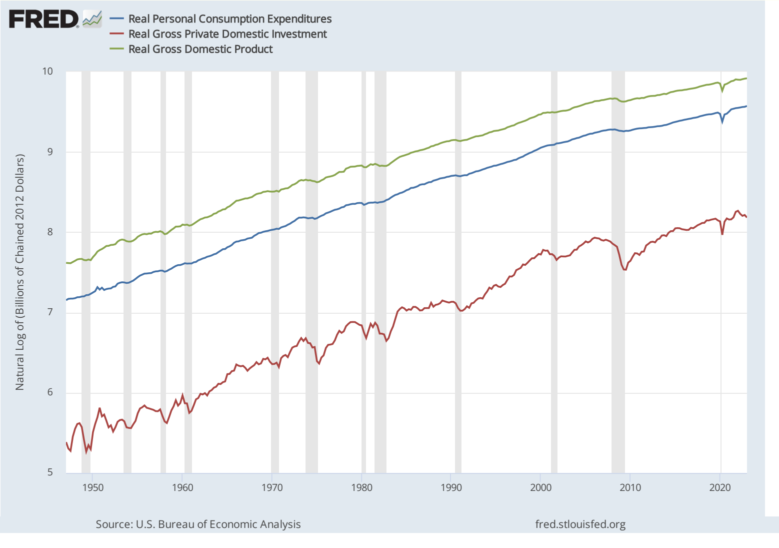
Motivação

- Queremos entender mecanismos por trás das flutuações macroeconômicas.
- Como definir flutuações?
- Qual seu custo? Como e por que mitigá-las?

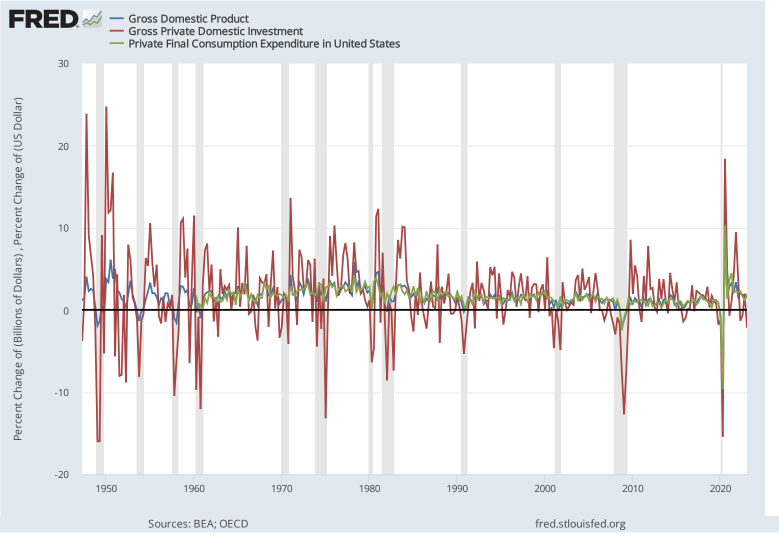
Motivação: Flutuações econômicas



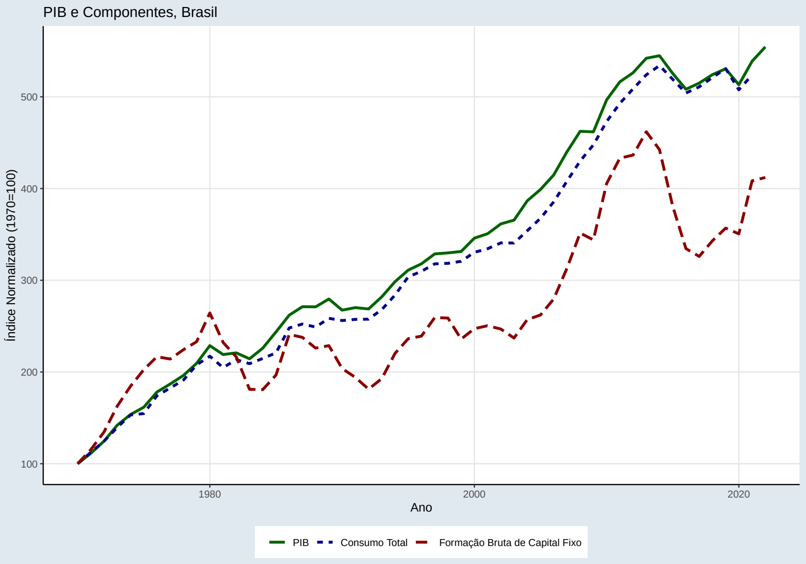
Em logs: notem nível e volatilidades



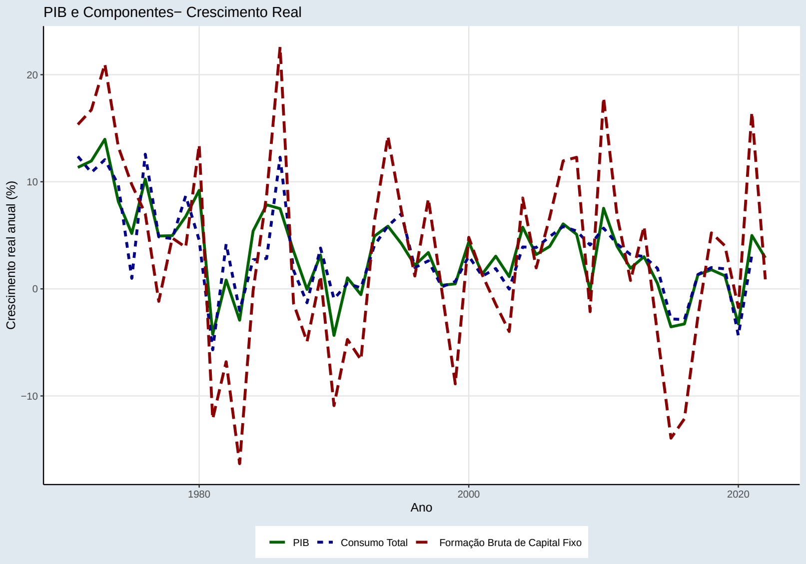
Taxas de crescimento



Brasil - Nível Real



Brasil - Taxa de Crescimento



Mas antes...

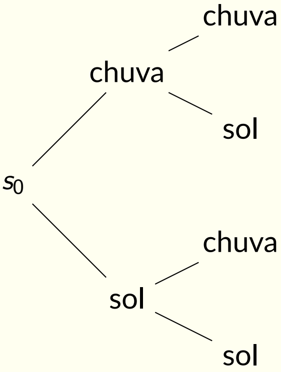
- Olharemos para níveis, taxas de crescimento, covariâncias.
- Mas vamos antes definir a linguagem para lidar com incerteza e dinâmica em macro.
- Primeiro, em uma economia de dotações.
- Depois, traremos programação dinâmica e produção.

Benchmark: mercados completos e agente representativo

Suponha uma economia com:

- **Incerteza:** s^t descreve história relevante:
  - realização da incerteza até t, descreve dotação de todos!
  - $\Pr(s^t)$ e $\Pr(s^t|s^{t-1})$ definem probabilidade e prob. condicional.
- **Diversos consumidores** (heterogêneos), indexados por i.
  - Cada um recebe dotação estocástica (y_i) e decide consumo (c_i).
- **Mercados completos:**
  - na data 0, ativos contingentes a cada s^t podem ser negociados. "Arrow-Debreu".
  - preços: $q\left(s^t\right)$.

Incerteza- Exemplo



- $t = \{0, 1, 2\}$
- Nó inicial s_0.
- Nós em $t = 1$ e $t = 2$, ex.:
  - $s^1 = \{chuva\}$
  - $s^2 = \{chuva, sol\}$
- Antecessores únicos.
- Pouca estrutura para probabilidades (até agora):
  - apenas consistência das condicionais e soma 1.

Benchmark: mercados completos e agregação

$$\max_{\{c_i\}} \sum_{t,s^t} \Pr\left(s^t\right) \beta^t u_i\left(c_i\left(s^t\right)\right)$$

s.a.

$$\sum_{t,s^t} q\left(s^t\right) c_i\left(s^t\right) \leq \sum_{t,s^t} q\left(s^t\right) y_i\left(s^t\right)$$

Usual:

- Sistema de preços: Mapa de histórias s^t para $q\left(s^t\right) > 0$.
- Factibilidade: $C\left(s^t\right) := \sum_i c_i\left(s^t\right) = \sum_i y_i\left(s^t\right) =: Y\left(s^t\right), \forall (t, s^t)$.

Equilíbrio Competitivo

Um equilíbrio competitivo com mercados contingentes na data $t = 0$ (ou Equilíbrio de Arrow-Debreu) consiste de: uma alocação $\{c_i(s^t)\}_{t,s^t,i}$ e preços para os ativos contingentes $\{q(s^t)\}_{t,s^t}$, tais que:

- As escolhas de consumo $c_i(s^t)$ satisfazem otimalidade individual para cada agente i, dados os preços q.
- Market clearing do consumo contingente é garantido para cada história s^t, isto é,

$$\sum_i c_i\left(s^t\right) = \sum_i y_i\left(s^t\right), \forall (t, s^t).$$

Benchmark: mercados completos e agregação

$$\max_{\{c_i\}} \sum_{t,s^t} \Pr\left(s^t\right) \beta^t u_i\left(c_i\left(s^t\right)\right)$$

s.a.

$$\sum_{t,s^t} q\left(s^t\right) c_i\left(s^t\right) \leq \sum_{t,s^t} q\left(s^t\right) y_i\left(s^t\right)$$

Otimalidade, CPO para $c(s^t)$:

$$\beta^t \Pr\left(s^t\right) u_i^{\prime}\left(c_i\left(s^t\right)\right) = \mu_i q\left(s^t\right)$$

Benchmark: mercados completos e agregação

- Da razão das CPOs para s^t e s^0 para um agente i:

$$\beta^t \Pr\left(s^t\right) \frac{u_i^{'}\left(c_i\left(s^t\right)\right)}{u_i^{'}\left(c_i\left(s^0\right)\right)} = q\left(s^t\right), \forall i.$$

- Cada agente equaliza sua TMS ao preço relativo do consumo em s^t.
- Logo, equalizam entre si também.
- Nada especial sobre s^0:
  - equalização à razão de preços vale para qualquer par de (t, s^t) e $(t^{'}, s^{t^{'}})$.

Benchmark: mercados completos e agregação

Voltando às CPOs:

$$\beta^t \Pr\left(s^t\right) u_i'\left(c_i\left(s^t\right)\right) = \mu_i q\left(s^t\right)$$

Tome um consumidor qualquer i_0 para referência

$$\frac{u_i'\left(c_i\left(s^t\right)\right)}{u_{i_0}'\left(c_{i_0}\left(s^t\right)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}.$$

Caso Particular

Caso CRRA com aversão a risco comum: $u^{'}\left(c\right) = c^{-\sigma}$:

$$c_i\left(s^t\right) = \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}\left(c_{i_0}\left(s^t\right)\right)^{-\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} c_{i_0}\left(s^t\right)$$

$$\Longrightarrow C\left(s^t\right) = c_{i0}\left(s^t\right)\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \Longrightarrow c_{i0}\left(s^t\right) = \frac{C\left(s^t\right)}{\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}}$$

- Consumo de i_0 e, portanto cada i, é fração constante de $C\left(s^t\right)$.

De volta ao caso geral

Temos já,

$$\frac{u_i^{'}\left(c_i\left(s^t\right)\right)}{u_{i_0}^{'}\left(c_{i_0}\left(s^t\right)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_{i_0}}.$$

Logo,

$$c_i\left(s^t\right) = \left(u_i^{'}\right)^{-1}\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}} u_{i_0}^{'}\left(c_{i_0}\left(s^t\right)\right)\right)$$

e, somando entre agentes,

De volta ao caso geral

$$\underbrace{Y\left(s^t\right)}_{=\sum_i c_i(s^t)} = \sum_i \left(u_i^{'}\right)^{-1}\left(\frac{\mu_i}{\mu_{i_0}} u_{i_0}^{'}\left(c_{i_0}\left(s^t\right)\right)\right).$$

- $c_{i_0}\left(s^t\right)$ é só função (complicada) de $Y\left(s^t\right)$.
- Mas i_0 é arbitrário. Logo, o mesmo vale para qualquer agente.
- Ou seja, vale

$$c_i(s^t) = \phi_i\left(Y(s^t)\right),$$

para ϕ_i definida implicitamente como acima.

Lições do caso geral

Compartilhamento eficiente de risco

- realização corrente de $y_i\left(s^t\right)$, dado $Y\left(s^t\right)$, não importa.
- história individual realizada também não importa.
- realizações passadas de $Y\left(s^t\right)$ não importam mais.
- apenas importam preços e valor da restrição orçamentária intertemporal.

Eficiência

Vale o Primeiro Teorema do Bem-estar desde que garantido que:

- Para cada agente, $\sum_{t,s^t} q(s^t) e_i(s^t) < \infty$.

Demonstração é a mesma do caso estático, mas temos que evitar $\infty \gtrless \infty$.

Testes de risk-sharing

Townsend: Testes da forma

$$c_{i,t} = \alpha_i C_t + \beta y_{i,t}$$

ou em logs.

- Hipóteses alternativas:
  - Risk-sharing perfeito, $\beta = 0$.
  - Autarquia, hand-to-mouth, $\alpha_i = 0$ e $\beta = 1$.
- Dados: β pequeno, mas positivo.
  - Risk-sharing imperfeito, heterogêneo entre grupos.

Problema do Planejador

Estudamos alocações ótimas de Pareto.

$$\max_{\{c_i, c_j\}} \sum_{t, s^t} \Pr\left(s^t\right) \beta^t u_i\left(c_i\left(s^t\right)\right)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\left(s^t\right) \leq \sum_{i=1}^{N} y_i\left(s^t\right), \forall s^t$$

$$\sum_{t, s^t} \Pr\left(s^t\right) \beta^t u_j\left(c_j\left(s^t\right)\right) \geq \underline{u}_j, \forall j \neq i.$$

Problema do Planejador

Formulação equivalente, com pesos de Pareto λ_i,

$$\max_{\{c_i\}} \sum_{t,s^t} \Pr\left(s^t\right) \beta^t \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i\left(c_i\left(s^t\right)\right)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\left(s^t\right) \leq \sum_{i=1}^{N} y_i\left(s^t\right), \forall (t, s^t).$$

Problema do Planejador - CPO

- CPO para $c_i(s^t)$:

$$\beta^t \Pr(s^t)\lambda_i u^{'}(c_i(s^t)) = \eta(s^t).$$

- Tomando a razão entre dois agentes:

$$\frac{\lambda_i u^{'}(c_i(s^t))}{\lambda_j u^{'}(c_j(s^t))} = 1, \forall s^t.$$

- Razões de utilidades marginais equalizadas entre datas e estados da natureza.

Problema do Planejador - CPO

- CPO para $c_i(s^t)$:
$$\beta^t \Pr(s^t)\lambda_i u^{'}(c_i(s^t)) = \eta(s^t).$$

- Tomando a razão entre a data inicial e uma história s^t:
$$\frac{\beta^t \Pr(s^t)u^{'}(c_i(s^t))}{u^{'}(c_i(s^0))} = \frac{\eta(s^t)}{\eta(s^0)}, \forall(t, s^t) \text{ e } \forall i.$$

- Todos os agentes têm suas TMSs equalizadas.

- Iguais à razão de preços sombra, η, percebidos pelo planejador.

- De novo, vale para qualquer par (t, s^t) e $(t^{'}, s^{t^{'}})$.

Equivalência

	CPOs	Problema do Planejador
Equilíbrio competitivo	$\beta^t \Pr(s^t)\, u_i'\left(c_i^{desc}(s^t)\right) = \mu_i q(s^t)$	$\beta^t \Pr(s^t)\, \lambda_i u'\left(c_i^{plan}(s^t)\right) = \eta(s^t)$
Restrições Orçamentárias	I restrições.	Não há. λ é primitivo.
Entre agentes	$\frac{u_i'\left(c_i^{desc}(s^t)\right)}{u_j'\left(c_j^{desc}(s^t)\right)} = \frac{\mu_i}{\mu_j}$	$\frac{\lambda_i u'\left(c_i^{plan}(s^t)\right)}{\lambda_j u'\left(c_j^{plan}(s^t)\right)} = 1$
Entre histórias	$\frac{\beta^t \Pr(s^t) u_i'\left(c_i^{desc}(s^t)\right)}{u_i'\left(c_i^{desc}(s^0)\right)} = q(s^t)$	$\frac{\beta^t \Pr(s^t) u_i'\left(c_i^{plan}(s^t)\right)}{u_i'\left(c_i^{plan}(s^0)\right)} = \frac{\eta(s^t)}{\eta(s^0)}$
Market-clearing/ Factib.	$\sum_i c_i(s^t) = \sum_i y_i(s^t)$	$\sum_i c_i(s^t) = \sum_i y_i(s^t)$

Equivalência

- FWT (PTBE): Tome
$$\lambda_i = \frac{1}{\mu^i} = \frac{1}{u'\left(c_i^{desc}\left(s^0\right)\right)}$$
e a CPO do problema descentralizado.
Verifique que as CPOs do problema do planejador são satisfeitas com esta alocação e $\eta\left(s^t\right) = q\left(s^t\right)$.

- SWT (STBE): Para descentralizar uma solução, normalize $\sum \lambda_i = 1$.
Tome $q(s^t) = \frac{\eta(s^t)}{\eta(s^0)}$ garanta que a riqueza do agente é tal que $\mu_i = u'(c_i^{plan}(s^0)) = \frac{1}{\lambda_i}$.

- Bônus: relação entre $\eta(s^t)$ e $q(s^t)$.

O agente representativo

- Suponha que tenhamos um equilíbrio competitivo com preços $\{q(s^t)\}_{s^t}$.
- Este equilíbrio induz valor marginal da riqueza μ_i para cada agente.
- Tome peso de Pareto $\lambda^i = \frac{1}{\mu_i}$ e defina

$$u^R(x) \equiv \max_{c_i} \sum_{i=1}^{N} \lambda^i u(c_i)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \leq x.$$

O agente representativo

- **Proposição:** Existe um equilíbrio competitivo em uma economia com apenas um agente, preferências dadas por $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Pr(s^t) u^R(c_t)$ e dotação $Y(s^t) = \sum_i y_i(s^t)$, para cada s^t, tal que $c(s^t) = Y(s^t)$ e os preços são $q(s^t)$.

- Prova: verificar CPOs (inclusive da maximização de u^R).

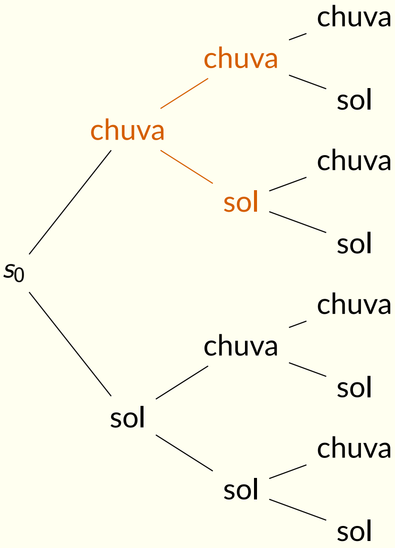
O agente representativo

- Nesta formulação, as preferências do agente representativo dependem de pesos de Pareto.
- E estes pesos que dependem da distribuição das dotações (através de μ_i).
    - O que acontece se tivermos agentes com aversão a risco diferente?
- No caso CRRA com coeficientes iguais, u^R não depende da distribuição dos pesos. Distribuição de riqueza não importa.

Mercados Sequencialmente Completos

- A estrutura de mercados anterior pode parecer abstrata demais.
- Suponha, alternativamente, que em cada história s^t, há uma estrutura de ativos que paga contingentemente aos seus sucessores $s^{t+1}|s^t$.
- Por simplicidade, um ativo para cada sucessor: paga uma unidade de consumo de s^{t+1} caso esta transição ocorra e zero caso contrário.
  - "Ativo de Arrow".
- Seja $q\left(s^{t+1}|s^t\right)$ o preço de um ativo contingente destes, em termos de consumo em s^t.
  - Note o numerário.

Mercados Sequencialmente Completos: exemplo



- Exemplo com $t = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Foco em $s^1 = \{s_0, chuva\}$
- Mercado financeiro com dois ativos aberto; ativos contingentes aos seus sucessores: $s^2 \in \{(s_0, chuva, chuva), (s_0, chuva, sol)\}$.
- Em cada nó não terminal, temos dois ativos financeiros sendo transacionados. Preços $q(s^{t+1}|s^t)$.

Mercados Sequencialmente Completos

- De volta ao caso geral.
- A restrição orçamentária sequencial do agente i é

$$c_i\left(s^t\right)+\sum_{s_{t+1}} q\left(s^{t+1}|s^t\right) a_i\left(s^{t+1}|s^t\right) \leq y_i\left(s^t\right)+a_i\left(s^t\right),$$

em que

- $a_i(s^t)$ é a riqueza financeira do agente em s^t,
- $a_i\left(s^{t+1}|s^t\right)$ é a riqueza contingente, no sucessor s^{t+1}.

Mercados Sequencialmente Completos

Quanto custa aumentar a capacidade de consumo em Δ unidades em s^t, em termos de consumo em s^0?

Mercados Sequencialmente Completos

Quanto custa aumentar a capacidade de consumo em Δ unidades em s^t, em termos de consumo em s^0?

- Precisa-se levar esta riqueza ao longo da árvore, seguindo uma recursão:

$$q(s^t|s^0) = q(s^t|s^{t-1}(s^t)) \cdot \underbrace{q(s^{t-1}(s^t)|s^{t-2}(s^t)) \cdot \ldots \cdot q(s^1(s^t)|s^0)}_{q(s^{t-1}(s^t)|s^0)}$$

- Podemos definir o preço do consumo de um sucessor mais distante em função do preço de um antecessor de maneira análoga, $q(s^{t+j}|s^t)$, i.e., com o produto dos preços intermediários.

Mercados Sequenciais – O Problema do agente

O problema do agente é

$$\max_{\{a_i, c_i\}} \sum_{t, s^t} \Pr\left(s^t\right) \beta^t u_i\left(c_i\left(s^t\right)\right)$$

s.a., para cada (t, s^t),

$$c_i\left(s^t\right) + \sum_{s^{t+1}|s^t} q\left(s^{t+1}|s^t\right) a_i\left(s^{t+1}|s^t\right) \leq y_i\left(s^t\right) + a_i\left(s^t\right),$$

em que $s^{t+1}|s^t$ na soma denota os sucessores de s^t, e é imposta mais alguma condição para evitar jogos de Ponzi.

Mercados Sequenciais – O Problema do agente

- Em horizonte finito, seja T a data terminal, precisamos de $a_i(s^T) \geq -y_i(s^T)$ para garantir consumo não negativo.
- Em horizonte infinito, precisamos de restrições de crédito.

Mercados Sequenciais – O Problema do agente

- Por exemplo, a restrição natural de crédito é

$$a_i(s^t|s^{t-1}) \geq -A_i(s^t)$$

$$A_i(s^t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s^{t+j}|s^t} q(s^{t+j}|s^t) y_i(s^{t+j}|s^t),$$

em que a soma é sobre s^t ($i.e., j = 0$) e todos os seus sucessores s^{t+j}.

- $A_i(s^t)$ é o máximo que agente pode empenhar (em s^{t-1}): já fica com consumo zerado para sempre a partir de s^t.

Mercados Sequenciais

Um equilíbrio competitivo com mercados sequenciais consiste de uma alocação (c, a) e um sistema de preços q, tais que:

- Todos os agentes escolhem consumo e compras de ativos de forma a resolver seu problema intertemporal de maneira ótima, tomando preços como dados.

- Existe market clearing nos mercados de ativos e consumo, isto é,

$$\sum_i a_i(s^{t+1}|s^t) = 0, \forall \left(t, (s^{t+1}|s^t)\right)$$

e

$$\sum_i c_i(s^{t+1}|s^t) = \sum_i y_i(s^{t+1}|s^t), \forall \left(t, (s^{t+1}|s^t)\right).$$

Mercados Sequenciais

Proposição: Se (c, q^0) é um equilíbrio competitivo com mercados completos de ativos contingentes transacionados na data $t = 0$ (AD), então tome

$$q(s^t|s^{t-1}) = \frac{q^0(s^t)}{q^0(s^{t-1})},$$

para cada s^t que é sucessor de s^{t-1} e (c, a, q) com

$$a(s^{t+1}|s^t) = \sum_{j, s^{t+j}} q(s^{t+j}|s^t)[c_i(s^{t+j}) - y_i(s^{t+j})]$$

será um equilíbrio competitivo com mercados sequenciais quando os agentes estão sujeitos a restrições naturais de crédito e $a(s^0) = 0$.

Mercados Sequenciais

- Prova: Uma verificação razoavelmente longa em LS, mas o passo principal é a construção dos preços: restrições orçamentárias são equiv e CPOs as mesmas.
- Há volta, mas precisamos nos atentar às restrições de crédito.
  Se mais apertadas que as naturais, equilíbrio com estas restrições pode ter alocação diferente de Arrow-Debreu.

Discussão

- Notação. Estados S e histórias $s^t = (s^{t-1}, s_t)$.
  Antecessores, sucessores, realizações vs variável aleatória.
- Simplificações quando estados são sempre os mesmos e probabilidades só dependem de estado atual (Markov).
- Formulação sequencial e recursividade em $a(s^t)$.
- Mercados completos e "spanning".
- Apreçamento.

Apêndice

Incerteza, mais formalmente

- O tempo é denotado por $t = 0, 1, 2, \ldots$.
- A incerteza é capturada por um espaço de estados finito $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, S\}$.
- Em cada período t, há uma realização de um evento estocástico $s_t \in \mathbb{S}$.
- A história dos eventos até o tempo t é denotada por $s^t = (s_0, s_1, \ldots, s_t)$.
- Cada nó s^t tem um predecessor imediato único, denotado por s^{t-1}.
- $s^T | s^t$ denota a história em T seguindo s_t.

Incerteza, mais formalmente

- A probabilidade incondicional de observar uma sequência particular de eventos s^t é dada por uma medida de probabilidade $\Pr(s^t)$.
- A probabilidade condicional de observar s^t dada a realização de s^τ é $\Pr(s^t|s^\tau)$.
- Assume-se que s^0 é dado, então $\Pr(s^0) = 1$.
- Um processo adaptado x é uma sequência de funções tal que cada x_t mapeia a história s_t em algum espaço Euclidiano.