Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

11. Máximos e mínimos

Objetivos

Consideremos a função

$$f(x,y) = x^2 + y^2. \tag{11.1}$$

Claramente essa função nunca atinge valores negativos, isto é, $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, f atinge o valor 0 na origem. Resumindo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0).$$

Ou seja, a imagem dessa função é um intervalo limitado inferiormente por 0 (e 0 pertence de fato ao intervalo).

Esse exemplo ilustra o conceito de mínimo global.

Definição 11.1 (Mínimo global).

Um ponto $\mathbf{x}_0 \in D$ é chamado de *mínimo global* de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ para qualquer ponto $\mathbf{x} \in D$.

Considere agora a função

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}. \tag{11.2}$$

Nesse caso, observamos facilmente que $f(x,y) \leq 1$, pois a imagem da função exponencial está limitada entre 0 e 1 se o argumento da exponencial é negativo, como é o caso. Observe também que a exponencial com argumento negativo atinge o valor 1 quando tal argumento é zero, que acontece no caso dessa função apenas quando $(x,y) = (0,0)$. Em resumo:

$$f(x,y) \leq 1 = f(0,0).$$

Isto é, a imagem dessa função está limitada superiormente por 1.

Tal exemplo ilustra a definição de máximo global.

Definição 11.2 (Máximo global).

Um ponto $\mathbf{x}_0 \in D$ é chamado de *máximo global* de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ para qualquer ponto $\mathbf{x} \in D$.

No caso da função definida em (11.1), sabemos que seu gráfico é o paraboloide de equação $z = x^2 + y^2$. Que a origem seja um mínimo global dessa função significa geometricamente que a menor altura atingida pelos pontos sobre o paraboloide é 0, ou seja, todos os pontos estão acima do plano xy.

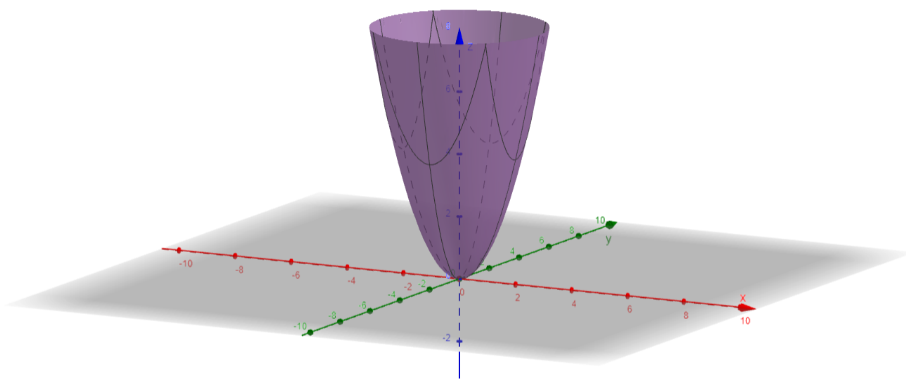


Figura 11.1: Paraboloide de equação $z = x^2 + y^2$.

Por outro lado, o gráfico da função definida em (11.2) é a superfície conhecida como *Gaussiana*, e mostramos que as alturas dos pontos que estão sobre a Gaussiana não excede o valor 1.

Gostaríamos de ressaltar que a palavra *global* nas definições anteriores não significa unicidade, mas que esses são os valores extremos da função globalmente sobre todo o seu domínio. Vejamos um exemplo que ilustra essa observação.

Exemplo 11.1.

Consideremos agora a função $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Da expressão da função deduzimos que f é limitada inferiormente por -1 e superiormente por 1. Além disso, f atinge o valor -1 em infinitos pontos da forma

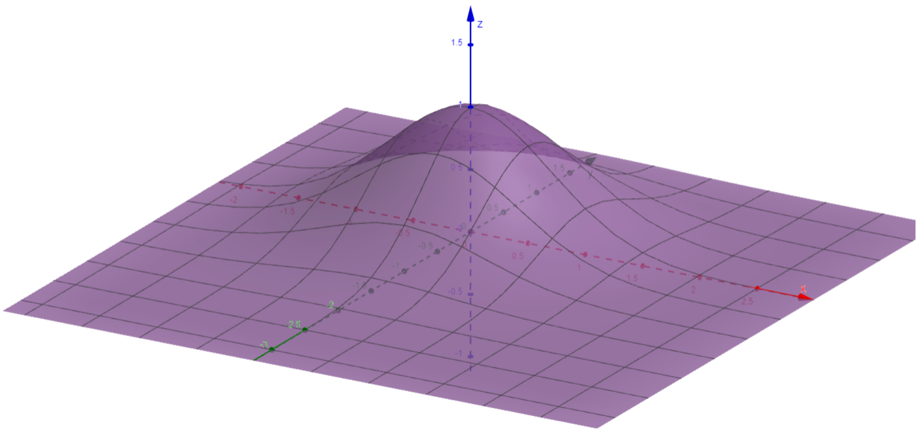
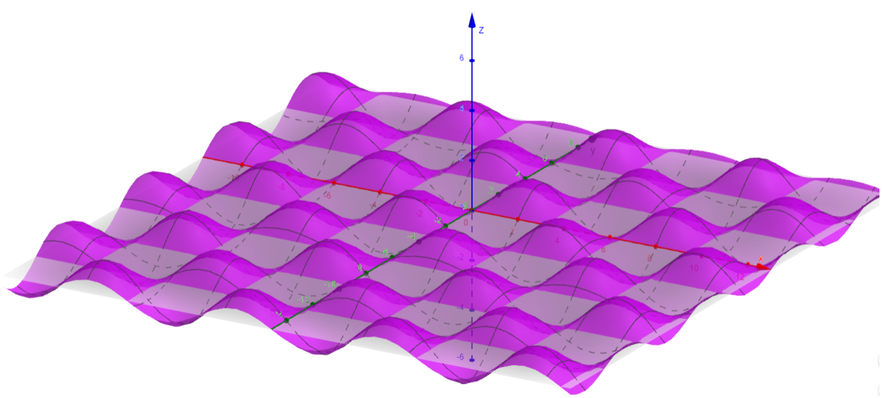


Figura 11.2: A gaussiana de equação é $z = e^{-x^2-y^2}$.

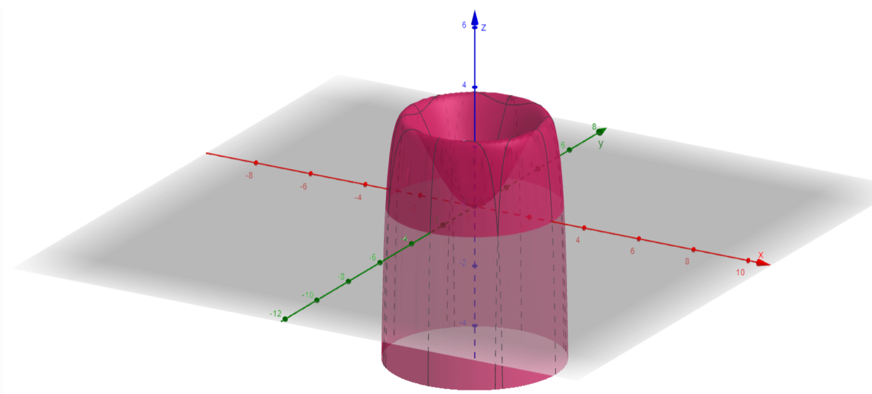
$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ com $k \in \mathbb{R}$, todos, portanto, são mínimos globais. Analogamente, os pontos da forma $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ com $k \in \mathbb{R}$, são máximos globais da função. Veja o gráfico de f a seguir.



Até aqui, analisamos situações em que a função atinge seus valores extremos em todo o domínio, os chamados extremos globais. No entanto, em muitos problemas econômicos e matemáticos, o comportamento da função em regiões específicas – e não no domínio todo – é o que realmente importa. Por exemplo, imagine um agente econômico que analisa apenas um conjunto limitado de estratégias ou condições de mercado. Nesses casos, interessa saber se a função possui um máximo ou mínimo localmente. Vejamos um exemplo.

Exemplo 11.2.

Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(10-x^2-y^2)$. Pelas propriedades do logaritmo sabemos que f é não negativa sobre a bola fechada centrada na origem e de raio 3. Além disso, no *interior* dessa bola, a função atinge o valor 0 apenas em $(0,0)$, sendo um mínimo local da função. Por outro lado, $f(x,y) \to -\infty$ quando $(x,y) \to (\pm\infty, \pm\infty)$ e, portanto, a origem não é um mínimo global da função. Veja na figura a seguir.



Esse tipo de pontos são de grande importância, pois, embora não sejam extremos globais, podem ser suficientes para resolver determinado problema que esteja sendo investigando. Se faz necessária, portanto, as seguintes definições.

Definição 11.3 (Mínimo local).

Um ponto $\mathbf{x}_0 \in D$ é chamado de *mínimo local* de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança aberta V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in V \cap D$.

Analogamente, temos o conceito de máximo local.

Definição 11.4 (Máximo local).

Um ponto $\mathbf{x}_0 \in D$ é chamado de *máximo local* de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança aberta V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in V \cap D$.

Observação 11.5.

Vale destacar que *todo extremo global é, em particular, um extremo local*, já que, se um ponto minimiza (ou maximiza) a função em todo o domínio, então certamente o faz também em qualquer vizinhança desse ponto.
No caso da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, observamos que a origem é um mínimo local e global, pois a função atinge seu menor valor tanto em uma vizinhança da origem quanto em todo o espaço $\mathbb{R}^2$.
Por outro lado, em geral um extremo local *não* é global. Tal é o caso da origem, que é um mínimo local da função do Exemplo 11.2, mas não um mínimo global, pois a função assume valores menores em regiões afastadas da origem.

11.1 Condição Necessária para Extremos Locais

Até agora, estudamos funções cujos valores extremos podem ser determinados diretamente a partir de suas expressões analíticas. No entanto, em problemas do mundo real, onde as funções modelam fenômenos econômicos ou físicos complexos, identificar esses pontos extremos se torna uma tarefa bem mais desafiadora.

Por isso, precisamos recorrer a métodos analíticos que nos ajudem a localizar os pontos onde a função pode atingir máximos ou mínimos. O próximo resultado fornece uma *condição necessária* que deve ser satisfeita por pontos de extremo local.

Teorema 11.6 (Condição Necessária para Extremos Locais).

Se $\mathbf{x}_0 \in D$ é um mínimo ou um máximo local de uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Prova.

Seja $\mathbf{x}_0 \in D$ um ponto onde $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ atinge um máximo ou mínimo local. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos a função real de variável real

$$\phi_i(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\vec{e}_i),$$

onde $\vec{e}_i$ é o vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ na direção i-ésima. Assumimos t suficientemente pequeno de modo que $\mathbf{x}_0 + t\vec{e}_i \in D$, ou seja, ϕ_i é bem definida em uma vizinhança de $t = 0$.

Observe que

$$\phi_i(0) = f(\mathbf{x}_0).$$

Como $\mathbf{x}_0$ é um ponto de extremo local de f, então $t = 0$ é um ponto de extremo local (máximo ou mínimo) da função ϕ_i. Portanto, pela condição necessária para extremos de funções reais de uma variável, temos:

$$\phi_i'(0) = 0.$$

Aplicando a regra da cadeia, temos:

$$\phi_i'(0) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{e}_i)\bigg|_{t=0} = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0 + t\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle\bigg|_{t=0} = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \vec{e}_i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Exemplo 11.3.

No caso da função definida em (11.1) temos que $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ que se anula na origem. No caso da função definida em (11.2) temos $\nabla f(x,y) = \left(-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2}\right)$, que também se anula na origem.

Exemplo 11.4.

Consideremos novamente a função $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(10-x^2-y^2)$. Vejamos que, de fato, o gradiente se anula na origem, que é um mínimo local.

Calculamos as derivadas parciais de f naqueles pontos em que estão definida. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)\ln(10-x^2-y^2)\right] = 2x\ln(10-x^2-y^2) - \frac{2x(x^2+y^2)}{10-x^2-y^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2)\ln(10-x^2-y^2)\right] = 2y\ln(10-x^2-y^2) - \frac{2y(x^2+y^2)}{10-x^2-y^2}$$

Avaliamo-las na origem $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Exercício 11.1.

Mostre que se $\mathbf{x}_0$ é um mínimo ou um máximo local de uma função diferenciável, então o plano tangente ao gráfico de f em $\mathbf{x}_0$ é horizontal.

A importância do Teorema 11.6 reside no fato de que ele nos indica em qual conjunto devemos concentrar nossa busca pelos extremos locais de uma função *diferenciável*. Ou seja, os *candidatos a máximos ou mínimos locais* de uma função diferenciável estão no conjunto dos pontos onde o gradiente da função é nulo:

$$\{\mathbf{x} \in D \mid \nabla f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Por outro lado, existem funções que não são diferenciáveis em seus pontos de máximo ou mínimo locais (ou globais). Por exemplo, a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, não é diferenciável na origem, onde atinge seu mínimo global (vide Figura 11.3).

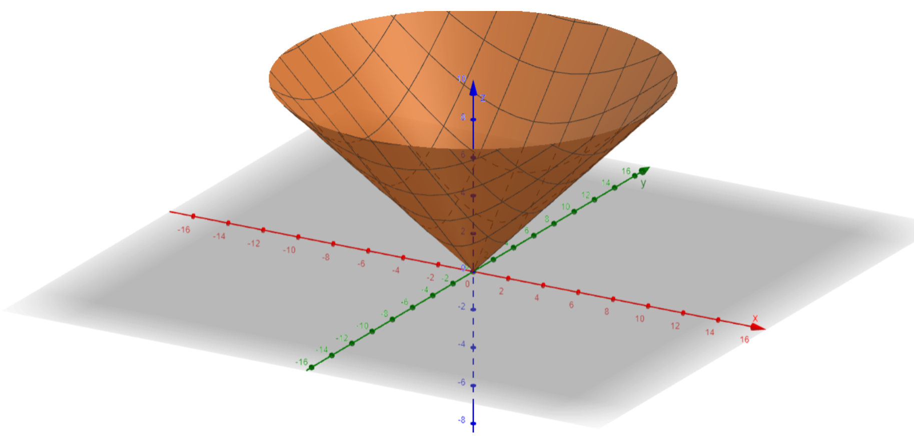


Figura 11.3: O cone atinge seu mínimo global na origem, mesmo não sendo diferenciável nesse ponto

Outro exemplo é a função de utilidade Cobb-Douglas, $u(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$, que atinge seus mínimos globais nos pontos onde $x = 0$ ou $y = 0$, ou seja, ao longo dos eixos coordenados no primeiro quadrante. No entanto, a função *não é diferenciável em nenhum desses pontos*.

Ou seja, nesses exemplos, a condição do gradiente nulo *não pode ser aplicada*, pois a função não é diferenciável nos pontos onde atinge seus extremos. No entanto, nesses casos, os próprios pontos de não diferenciabilidade são, de fato, extremos locais ou globais da função.

Portanto, ao buscar extremos, é fundamental analisar não apenas os pontos onde o gradiente se anula, mas também os pontos onde a função deixa de ser diferenciável. Assim, os *candidatos a máximos e mínimos locais* de uma função são aqueles pontos onde o gradiente se anula ou onde o gradiente não está definido.

Chegamos, então, na seguinte definição.

Definição 11.7 (Ponto crítico).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $\mathbf{x}_0 \in D$ é um *ponto crítico* de f se uma das seguintes condições for satisfeita:

- $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ existe e é igual a 0; ou
- $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ não existe.

Observe que a condição de o gradiente ser nulo, apresentada no Teorema 11.6, é uma *condição necessária*, mas *não é suficiente*. Ou seja, nem todo ponto crítico será um ponto de máximo ou mínimo local da função.

Vejamos um exemplo que ilustra essa situação.

Exemplo 11.5 (Sela de cavalo).

Considere a função

$$f(x,y) = x^2 - y^2. \tag{11.3}$$

Temos que $\nabla f(x,y) = (2x,-2y)$ que se anula na origem, porém, a origem não é nem um máximo nem um mínimo dessa função como vamos mostrar a continuação.

Analizemos a curva plana que é interseção do gráfico de f com o plano $y = 0$, em vermelho na Figura 11.4.

Visualmente observamos que essa curva tem uma altura mínima igual a zero, e de fato, no plano de equação $y = 0$, tal curva é o gráfico da função de uma variável $h(x) = f(x,0) = x^2$, que tem um mínimo em $x = 0$. Daí, sobre os pontos dessa curva temos

$$f(x,0) = h(x) \geq h(0) = f(0,0). \tag{11.4}$$

Por outro lado, na Figura 11.5 se mostra a curva que é o gráfico no plano de equação $x = 0$ da função $g(y) = f(0,y) = -y^2$, que tem um máximo em $y = 0$.

Desta forma,

$$f(0,y) = g(y) \leq g(0) = f(0,0). \tag{11.5}$$

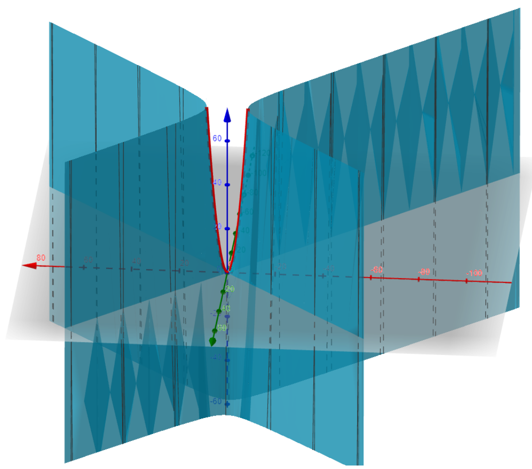


Figura 11.4

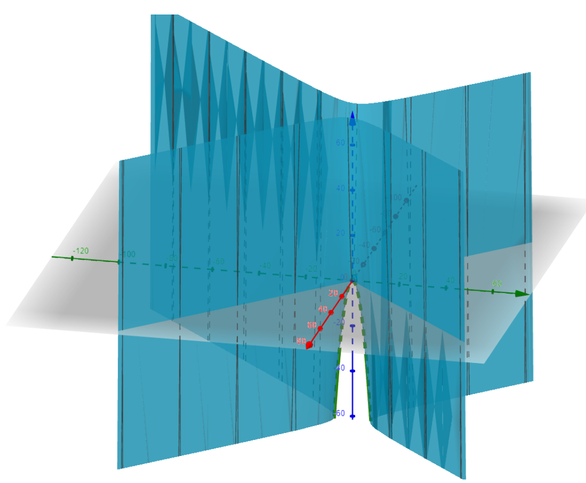


Figura 11.5

As equações (11.4) e (11.5) mostram que (0,0) não é nem um ponto de máximo nem de mínimo local da função, pois evidenciam que f não satisfaz a definição de mínimo local nem a de máximo local.
Em outras palavras, o ponto (0,0) é um ponto crítico, mas não um ponto de extremo.

Definição 11.8.

Um ponto crítico de uma função que não é nem máximo e nem mínimo local é chamado de ponto de sela.

11.2 Classificação dos pontos críticos

O Teorema 11.6 fornece o primeiro passo na busca por extremos locais de uma função diferenciável. No entanto, para determinar se um ponto crítico é um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois, precisamos de ferramentas adicionais.

Esse segundo passo será dado por um teste baseado na análise da matriz Hessiana da função no ponto crítico.

Para isso, lembremos primeiramente que uma forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$, com A simétrica, é:

- *definida positiva* se $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$;
- *semidefinida positiva* se $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (mas $Q(\mathbf{x}) = 0$ para algum $\mathbf{x} \neq 0$);
- *definida negativa* se $Q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$;
- *semidefinida negativa* se $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (mas $Q(\mathbf{x}) = 0$ para algum $\mathbf{x} \neq 0$);
- *indefinida* se $Q(\mathbf{x})$ assume valores positivos e negativos (isto é, existem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ tais que $Q(\mathbf{x}_1) > 0$ e $Q(\mathbf{x}_2) < 0$).

Lembre agora que o Teorema de Taylor garante que se $\mathbf{x}_0$ é um ponto crítico de uma função duas vezes diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então para todo $\mathbf{x}$ suficientemente próximo de $\mathbf{x}_0$ temos que

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \underbrace{\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}_{0} + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

sendo que

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0. \tag{11.6}$$

Assim, se a forma quadrática

$$Q(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{Hess} f(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \tag{11.7}$$

for definida positiva, então existe uma vizinhança V de $\mathbf{x}_0$ suficientemente pequena tal que

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in V,$$

devido a (11.6). Isso mostra que $\mathbf{x}_0$ é um mínimo local.

Se Q for definida negativa, então, pelo mesmo argumento, $\mathbf{x}_0$ é um máximo local.

Exemplo 11.6.

Observe como no caso da função definida em (11.1) temos que

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$Q(x,y) = \left\langle \operatorname{Hess} f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 2x^2 + 2y^2$$

que é estritamente positiva para todo $(x,y) \neq (0,0)$. De qualquer forma, já sabíamos que a origem é um mínimo global.

Exemplo 11.7.

No caso da função definida em (11.2) temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2(1-2x^2)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

Assim,

$$\text{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dai,

$$Q(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -2x^2 - 2y^2,$$

que é estritamente negativa fora da origem.

Observemos que, nos casos em que a forma quadrática é *semidefinida positiva* ou *semidefinida negativa* o argumento anterior não é conclusivo. Vejamos isto no seguinte exemplo.

Exemplo 11.8.

Considere a função $f(x,y) = x^2 - y^4$. Vamos determinar seus pontos críticos e classificá-los.

Calculamos o gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (2x, -4y^3),$$

que se anula apenas na origem. Assim, $(0,0)$ é um ponto crítico.
A matriz Hessiana da função é

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix} \implies \operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forma quadrática associada à Hessiana no ponto crítico é, portanto,

$$Q(x,y) = \left\langle \operatorname{Hess} f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 2x^2.$$

Note que $Q(x,y) \geq 0$ para todo (x,y), mas não é estritamente positiva (pois $Q(0,y) = 0$). Por outro lado, $f(x,0) = x^2 > 0$ e $f(0,y) = -y^4 < 0$ para $y \neq 0$. Portanto, f assume valores maiores e menores do que $f(0,0) = 0$ arbitrariamente perto da origem, o que implica que $(0,0)$ é um ponto de sela.

11.2.1 Critério de Classificação usando os autovalores

É claro que, na prática, nem sempre conseguimos identificar de forma direta — apenas pela definição — se uma forma quadrática é definida positiva, negativa ou indefinida. No entanto, da Álgebra Linear sabemos que o sinal de uma forma quadrática é completamente determinado pelos *autovalores* da matriz simétrica que a representa. Mais precisamente, lembremos que, dada uma forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$, com A simétrica, tem-se que

- se todos os autovalores são positivos, a forma é *definida positiva*;
- se todos os autovalores são não negativos (com pelo menos um zero), a forma é *semidefinida positiva*.
- se todos os autovalores são negativos, a forma é *definida negativa*;
- se todos os autovalores são não positivos (com pelo menos um zero), a forma é *semidefinida negativa*.
- se há autovalores de sinais opostos, a forma é *indefinida*;

Decorre diretamente daí o seguinte critério de classificação de pontos críticos de funções diferenciáveis de várias variáveis.

Teorema 11.9 (Critério de classificação de pontos críticos - I).

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e $\mathbf{x}_0 \in D$ um ponto crítico de f. Segue que:

- se todos os autovalores de $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x}_0)$ são positivos, então $\mathbf{x}_0$ é mínimo local;
- se todos os autovalores de $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x}_0)$ são negativos, então $\mathbf{x}_0$ é máximo local;
- se há autovalores de $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x}_0)$ com sinais opostos, então $\mathbf{x}_0$ é ponto de sela;

Observe que o Exemplo 11.8 nos mostra que, se os autovalores da matriz Hessiana são todos não negativos (com pelo menos um zero) ou todos não positivos (com pelo menos um zero), o teorema anterior não pode ser aplicado.

Em outras palavras, o ponto crítico pode ser um *extremo local*, mas também pode ser um *ponto de sela*. Nessas situações, o teste da segunda derivada é inconclusivo, e será necessário utilizar outras abordagens para classificar o ponto.

Vejamos um exemplo

Exemplo 11.9.

Consideremos a função

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1. \tag{11.8}$$

Vamos achar e classificar os pontos críticos usando o Teorema 11.9.

Temos

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x).$$

Para determinar os pontos críticos devemos resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0, \\ 4y^3 - 4x = 0, \end{cases}$$

cujas soluções são $p_1 = (1,1)$, $p_2 = (-1,-1)$ e $p_3 = (0,0)$.
Temos também

$$\text{Hess}\, f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora avaliar a Hessiana em cada ponto crítico para classificá-los:

- No ponto $p_1 = (1,1)$:

  $$\text{Hess}\, f(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}.$$

  Os autovalores dessa matriz são $\lambda = 8$ e $\lambda = 16$, ambos positivos. Logo, $p_1 = (1,1)$ é um mínimo local.

- No ponto $p_2 = (-1,-1)$:

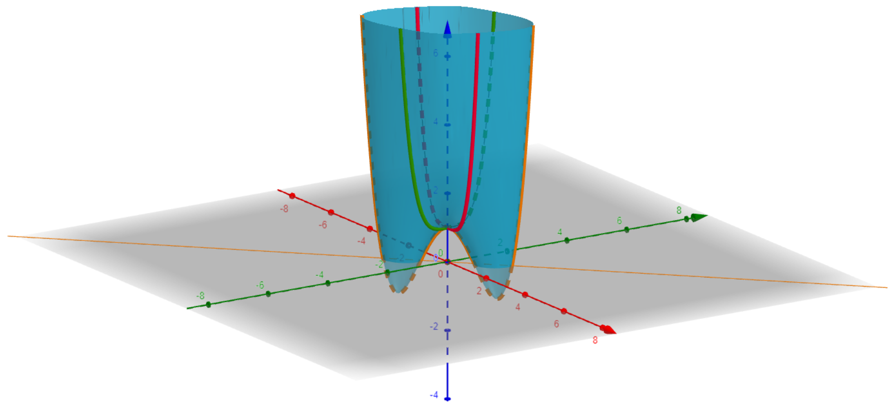
  $$\text{Hess}\, f(-1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix},$$

  que é a mesma matriz do caso anterior. Assim, $p_2 = (-1,-1)$ também é um mínimo local.

- No ponto $p_3 = (0,0)$:

  $$\text{Hess}\, f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Os autovalores são $\lambda = -4$ e $\lambda = 4$, com sinais opostos. Portanto, o ponto $p_3 = (0,0)$ é um ponto de sela.



11.2.2 Critério de classificação usando os menores principais

Uma outra forma de determinar o sinal de uma forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$, com A simétrica, é utilizando o *critério dos determinantes dos menores principais* de A. Esse critério, conhecido da Álgebra Linear, permite caracterizar a positividade ou negatividade da forma quadrática sem a necessidade de calcular os autovalores de A.

Lembre que, dada uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, os *menores principais de ordem k* são os determinantes das submatrizes $k \times k$ localizadas no canto superior esquerdo de A, denotados por $D_k = \det(A_k)$, onde A_k é a submatriz $k \times k$ formada pelas primeiras k linhas e k colunas de A.

Então, temos o seguinte critério:

- Q é *definida positiva* se, e somente se, $D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.
- Q é *semidefinida positiva* se, e somente se, $D_k \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ (possivelmente com alguns zeros).
- Q é *definida negativa* se, e somente se, $(-1)^k D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ (ou seja, $D_k > 0$ para k par e $D_k < 0$ para k ímpar).
- Q é *semidefinida negativa* se, e somente se, $(-1)^k D_k \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

- Q é *indefinida* se a sequência de menores principais não satisfaz nenhuma das condições acima.

Segue dai o segundo critério de classificação.

Teorema 11.10 (Critério de classificação de pontos críticos - II).

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, e seja $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico. Definimos os menores principais D_k como os determinantes das submatrizes $k \times k$ de Hess $f(\vec{x}_0)$ localizadas no canto superior esquerdo. Então,

- se $D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, então $\mathbf{x}_0$ é mínimo local.
- se $(-1)^k D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, então $\mathbf{x}_0$ é máximo local.
- se houver menores principais com sinais positivos ou negativos contrários aos itens anteriores, então $\mathbf{x}_0$ é um ponto de sela.

Observe que o Teorema anterior *não pode ser aplicado* no caso em que $D_k \geq 0$ ou $(-1)^k D_k \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$ (ou seja, algum menor principal pode ser igual a zero). Nessas situações, a forma quadrática associada é *semidefinida* (positiva ou negativa), e o ponto crítico pode ser tanto um extremo local quanto um ponto de sela. Ou seja, o teste torna-se *inconclusivo*.

O Teorema 11.10 é especialmente útil no caso em que $n = 2$. Nesse caso o Hessiano de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, é dado por

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Assim, os menores principais são:

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad D_2 = \det(\operatorname{Hess} f(x_0, y_0)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Corolário 11.11.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$, e seja $(x_0, y_0) \in D$ um ponto crítico de f. Temos:

- Se $\det(\text{Hess}\, f(x_0, y_0)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é um mínimo local.
- Se $\det(\text{Hess}\, f(x_0, y_0)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é um máximo local.
- Se $\det(\text{Hess}\, f(x_0, y_0)) < 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de sela.

Exemplo 11.10.

Considere a função

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y + 2xy.$$

Vamos determinar e classificar seus pontos críticos.

Calculamos o gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 - 3 + 2y,\, 3y^2 - 3 + 2x\right)$$

Igualando a zero observamos que precisamos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 3, \\ 3y^2 + 2x = 3. \end{cases}$$

Segue dai que os pontos críticos da função são:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{3}\left(1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right), \\
p_2 &= \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}\right), \\
p_3 &= \frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{10}, -1-\sqrt{10}\right), \\
p_4 &= \frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{10}, -1+\sqrt{10}\right).
\end{aligned}$$

A matriz Hessiana é:

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$$

Avaliamos em cada ponto crítico e classificamos.

- Em $p_1 = \frac{1}{3}(1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6})$:

  $$\operatorname{Hess} f(p_1) = \begin{bmatrix} 2(1-\sqrt{6}) & 2 \\ 2 & 2(1+\sqrt{6}) \end{bmatrix}.$$

  Como $\det(\operatorname{Hess} f(p_1)) = -24$, então p_1 é um ponto de sela.

- Em $p_2 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6})$:

  $$\operatorname{Hess} f(p_2) = \begin{bmatrix} 2(1+\sqrt{6}) & 2 \\ 2 & 2(1-\sqrt{6}) \end{bmatrix}.$$

  Novamente $\det(\operatorname{Hess} f(p_1)) = -24$, então p_2 também é uma sela.

- Em $p_3 = \frac{1}{3}(-1-\sqrt{10},\ -1-\sqrt{10})$:

  $$\operatorname{Hess} f(p_3) = \begin{bmatrix} 2(-1-\sqrt{10}) & 2 \\ 2 & 2(-1-\sqrt{10}) \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\det(\text{Hess} f(p_3)) = 4(1+\sqrt{10})^2 - 4 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_3) = 2(-1-\sqrt{10}) < 0$. Então $\mathbf{x}_0$ é um máximo local.

- Em $p_4 = \frac{1}{3}(-1+\sqrt{10},\ -1+\sqrt{10})$:

$$\text{Hess} f(p_4) = \begin{bmatrix} 2(-1+\sqrt{10}) & 2 \\ 2 & 2(-1+\sqrt{10}) \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\det(\text{Hess} f(p_3)) = 4(-1+\sqrt{10})^2 - 4 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_3) = 2(-1+\sqrt{10}) > 0$. Então $\mathbf{x}_0$ é um mínimo local.

Exercícios Suplementares

Exercício 11.2.

Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

(a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

(b) $f(x,y) = xy - 2x - 2y - x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$

(d) $f(x,y) = x\sin y - y\cos x$

(e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

(f) $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = \sin x \cos y$