CAPÍTULO 18

Otimização com Restrições I: Condições de Primeira Ordem

Muitas vezes a Economia é definida como o estudo da alocação ótima de recursos escassos. A palavra "ótima" indica que estamos tratando com algum tipo de problema de otimização. A palavra "escasso" implica que os objetos neste problema de otimização não têm a liberdade de tomar qualquer valor, mas estão condicionados. O consumo de uma unidade familiar está restrito pela renda disponível; a produção de uma firma está restrita pelo custo e disponibilidade de seus insumos. Assim, no centro da teoria econômica estão os problemas de otimização condicionada. Aqui o problema matemático central é o de maximizar (ou de minimizar, no caso de custo, gasto ou risco) uma função de várias variáveis quando estas estão vinculadas a algumas equações condicionantes. O protótipo deste problema é

$$\text{maximizar } f(x_1, \ldots, x_n),$$

onde $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) \le b_1, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \le b_k \\ h_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m \end{aligned} \tag{1}$$

A função f é denominada a **função objetivo**, enquanto as funções $g_1, \ldots, g_k$ e $h_1, \ldots, h_m$ são denominadas **funções restrição**. As g_j definem as **restrições de desigualdade** e as h_i definem as **restrições de igualdade**. Nas aplicações, as restrições de desigualdade mais comuns são as **restrições de não-negatividade**: $x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. As restrições de igualdade surgem, muitas vezes, como definições de uma variável em termos de outras. Neste capítulo começamos o tratamento de problemas de maximização com restrições e veremos que todo o cenário matemático dos capítulos anteriores tem relação com este tópico central da teoria econômica.

18.1 EXEMPLOS

Começamos apresentando alguns exemplos econômicos importantes de problemas de otimização condicionada.

Exemplo 18.1 **(Problema de Maximização da Utilidade)** Neste problema muito básico, x_i representa a quantidade de uma mercadoria i e $f(x_1,..., x_n)$, em geral denotada por $U(x_1,..., x_n)$, mede o nível de utilidade ou satisfação individual com o consumo de x_1 unidades do bem 1, x_2 unidades do bem 2, e assim por diante. Denotemos os preços das mercadorias por $p_1,..., p_n$ e seja I a renda individual. O consumidor deseja

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & U(x_1,..., x_n) \\ \text{sujeita a} & p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \le I \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{array}$$

Para sermos coerentes com o formato geral (1), as restrições de não-negatividade $x_i \ge 0$ deveriam ser escritas como $-x_i \le 0$, para termos todas as restrições de desigualdade escritas com o sinal $\le$. No entanto, quando formulamos pela primeira vez um problema matematicamente, iremos escrever as restrições em sua forma mais natural. Mais adiante, quando começarmos a trabalhar com os problemas de restrições, daremos mais atenção às convenções matemáticas corretas.

Exemplo 18.2 **(Maximização da Utilidade com Escolha de Renda/Lazer)** Sejam $U, x_1,..., x_n, p_1,..., p_n$ como no exemplo anterior. Além disso, sejam w a taxa salarial, I' a renda não-salarial do consumidor, ℓ_0 as horas de trabalho e ℓ_1 as horas de lazer. O consumidor tem $I' + w\ell_0$ unidades monetárias para gastar e deseja

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & U(x_1,..., x_n, \ell_1) \\ \text{sujeita a} & p_1x_1 + \cdots + p_nx_n \le I' + w\ell_0 \\ & \ell_0 + \ell_1 = 24 \\ & x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \ell_0 \ge 0, \ell_1 \ge 0 \end{array}$$

Exemplo 18.3 **(Maximização de Lucro de uma Firma num Mercado em Concorrência Perfeita)** Suponha que uma firma que opera num mercado de concorrência perfeita utilize n insumos para manufaturar seu produto. Sejam y o nível de produção e $x_1,..., x_n$ as quantidades dos insumos (vistos como fluxos). Seja $y = f(x_1,..., x_n)$ a função de produção da firma, que descreve o nível de produção máximo que pode ser alcançado com a cesta de insumos $(x_1,..., x_n)$. Sejam p o preço unitário do produto e w_i o custo do insumo i. O objetivo da firma é escolher $(x_1,..., x_n)$ para maximizar seu **lucro**

$$\Pi(x_1,\ldots,x_n) = pf(x_1,\ldots,x_n) - \sum_1^n w_i x_i$$

sujeito a

$$pf(x_1,\ldots,x_n)-\sum_1^n w_i w_i \geq 0$$
$$g_1(\mathbf{x}) \leq b_1,\ldots,g_k(\mathbf{x}) \leq b_k$$
$$x_1 \geq 0,\ldots,x_n \geq 0$$

A primeira restrição de desigualdade reflete a exigência da firma realizar um lucro não-negativo. As restrições dos g_j representam restrições na disponibilidade dos insumos.

18.2 RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Duas Variáveis e uma Restrição de Igualdade

Começamos com o problema de maximização condicionada mais simples, o de maximizar uma função $f(x_1, x_2)$ de duas variáveis sujeita a uma única restrição de igualdade: $h(x_1, x_2) = c$. Em Microeconomia intermediária, o estudante de Economia encontra este problema para maximizar a função utilidade:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x_1, x_2) \\ \text{sujeita a} & p_1x_1 + p_2x_2 = I \end{array}$$

Vamos ignorar por enquanto a exigência de x_1 e x_2 serem não-negativos e a possibilidade de não poder gastar toda a renda I.

Com este modelo de escolha do consumidor em mente, vamos examinar a solução geométrica usual para este problema. Inicialmente, desenhe o conjunto-restrição C no plano x_1x_2, que é a linha grossa na Figura 18.1. Então, esboce uma amostra representativa das curvas de nível da função objetivo f. Geometricamente, queremos encontrar a curva de nível de f de maior valor que toca o conjunto-restrição. A curva de nível de f de maior valor não pode cortar o conjunto-restrição C; se o fizer, curvas de nível vizinhas de valor *superior* também cortarão o conjunto-restrição, como ocorre no ponto **b** na Figura 18.1. Esta curva de nível de f de maior valor deve tocar C (para satisfazer a restrição), mas deve permanecer de um mesmo lado de C (já que não pode passar por C). Uma outra maneira de dizer isso: a curva de nível de f de valor mais alto que toca o conjunto-restrição C deve ser *tangente* a C no máximo condicionado. Esta situação ocorre no ponto $\mathbf{x}^*$ na Figura 18.1.

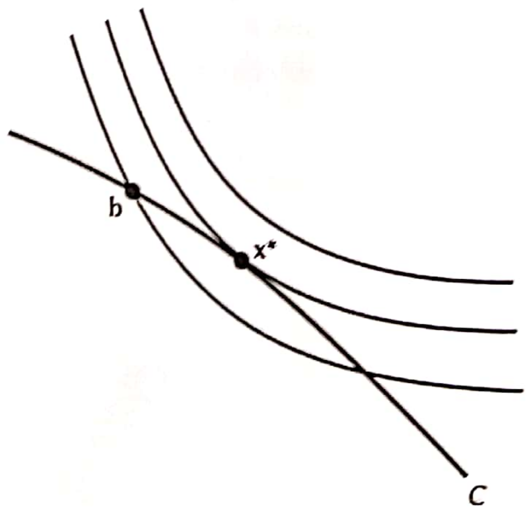

Figura 18.1 *No máximo condicionado* $\mathbf{x}^*$, *a curva de nível de f de valor mais alto é tangente ao conjunto-restrição C.*

A curva de nível de f ser tangente ao conjunto-restrição C no máximo condicionado $\mathbf{x}^*$ significa que, em $\mathbf{x}^*$, a inclinação do conjunto de nível de f é igual à inclinação da curva de restrição C. Lembre que, na Seção 15.2, vimos que a inclinação do conjunto de nível de f em $\mathbf{x}^*$ é

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)$$

e que a inclinação do conjunto-restrição $\{h(x_1, x_2) = c\}$ em $\mathbf{x}^*$ é

$$-\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) \Big/ \frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)$$

Dizer que essas duas inclinações são iguais significa que

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)}{\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)} \tag{2}$$

Como veremos em breve, é conveniente escrever essa equação assim:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)}{\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)} \tag{3}$$

Para evitar denominadores possivelmente nulos, seja μ o valor comum dos dois quocientes em (3):

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)}{\dfrac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*)} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)}{\dfrac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)} = \mathrm{m}.\mu \tag{4}$$

Reformulamos (4) como as duas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) - \mathrm{m}\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) - \mathrm{m}\frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Como devemos resolver para as três incógnitas (x_1, x_2, μ), vamos precisar de três equações, uma a mais do que aparece em (5). No entanto, temos uma terceira equação: a equação de restrição $h(x_1, x_2) = c$. Juntando esta equação de restrição com as duas equações de (5), obtemos um sistema de três equações a três incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= 0 \\ h(x_1, x_2) - c &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Há uma maneira adequada de escrever esse sistema (6). Monte a **função lagrangiana** ou, simplesmente, o **lagrangiano**

$$L(x_1, x_2, \mu) \equiv f(x_1, x_2) - \mu(h(x_1, x_2) - c)$$

Encontre os pontos críticos do lagrangiano L, calculando $\partial L/\partial x_1$, $\partial L/\partial x_2$ e $\partial L/\partial \mu$ e igualando cada um a zero. Como pode ser verificado facilmente, o resultado deste processo é precisamente o sistema (6). Observe que como μ simplesmente multiplica a restrição na definição de L, a equação $\partial L/\partial \mu = 0$ é equivalente à equação de restrição $c - h(x_1, x_2) = 0$. Esta nova variável μ que multiplica a restrição é denominada um **multiplicador de Lagrange**.

Este processo é realmente mágico. Quando queremos maximizar uma função num problema sem restrições, simplesmente resolvemos seus pontos críticos igualando suas derivadas parciais de primeira ordem a zero. Contudo, com a introdução do multiplicador de Lagrange μ no problema com restrições, transformamos um problema condicionado com duas variáveis no problema de encontrar os *pontos críticos* de uma função $L(x_1, x_2, \mu)$ de uma variável a mais. Num certo sentido, reduzimos um problema de otimização *com restrições* em duas variáveis a um problema de três variáveis *sem restrições*. A penalidade para esta redução é a inclusão da variável μ, nova e um tanto artificial. Como veremos no Capítulo 19, esta nova variável μ está carregada de significado econômico; ela nos dará uma nova medida do valor dos recursos escassos no problema sob consideração.

Cabe introduzir aqui uma observação de cautela. Esta redução não teria funcionado se $\partial h/\partial x_1$ e $\partial h/\partial x_2$ fossem zero no máximo $\mathbf{x}^*$ na equação (3). Por esta razão, vamos precisar criar a hipótese de que a parcial $\partial h/\partial x_1$, ou a parcial $\partial h/\partial x_2$, é não-nula no máximo condicionado, ou ambas são nulas. Como esta é uma imposição (fraca) no conjunto-restrição, é denominada **qualificação de restrição**. Se a restrição é linear, como ocorre nos problemas de maximização de funções utilidade dos Exemplos 18.1 e 18.2, esta qualificação de restrição é satisfeita automaticamente.

Podemos, agora, resumir nossa análise geométrica do problema de maximizar (ou minimizar) uma função de duas variáveis sujeita a uma única restrição de igualdade.

Teorema 18.1 Sejam f e h funções C^1 de duas variáveis. Suponha que $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ é uma solução do problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x_1, x_2) \\ \text{sujeita a} & h(x_1, x_2) = c \end{array}$$

Suponha também que (x_1^*, x_2^*) não é um ponto crítico de h. Então, existe um número real μ^* tal que (x_1^*, x_2^*, μ^*) é um ponto crítico da função lagrangiana

$$L(x_1, x_2, \mu) \equiv f(x_1, x_2) - \mu[h(x_1, x_2) - c]$$

Em outras palavras, em (x_1^*, x_2^*, μ^*) temos

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$$

Observação Nossa prova geométrica do Teorema 18.1 foi baseada no seguinte fato: as curvas de nível de f e de h são tangentes em (x_1^*, x_2^*) e portanto têm a mesma inclinação. Vamos apresentar agora uma outra versão dessa prova, baseada no seguinte fato: os vetores gradiente

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

considerados como vetores-deslocamento ou flechas no ponto $\mathbf{x}$, são perpendiculares aos conjuntos de nível de f e h, respectivamente. Como os conjuntos de nível de f e h têm a mesma inclinação em $\mathbf{x}^*$, os vetores gradiente $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ e $\nabla h(\mathbf{x}^*)$ devem estar alinhados em $\mathbf{x}^*$, ou seja, têm a mesma direção; eles apontam no mesmo sentido, como no lado esquerdo da Figura 18.2, ou em sentidos opostos, como no lado direito da Figura 18.2. Em ambos os casos, os gradientes são múltiplos escalares um do outro. Se escrevermos esse *multiplicador* como μ^*, obteremos $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mu^* \nabla h(\mathbf{x}^*)$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mu^* \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Isso imediatamente traduz-se no sistema (5).

Na última seção do Capítulo 19 apresentaremos uma prova analítica do Teorema 18.1.

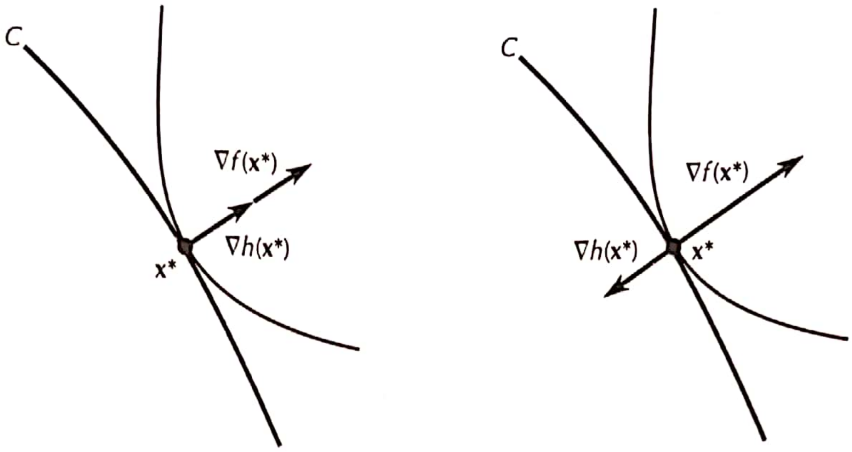

Figura 18.2 *$\nabla f(\mathbf{x}^*)$ e $\nabla h(\mathbf{x}^*)$ estão alinhados no max ou min condicionado $\mathbf{x}^*$.*

Observação Se estivéssemos minimizando f em vez de maximizando f no conjunto-restrição C_h, teríamos utilizado os mesmos argumentos que usamos na prova geométrica do Teorema 18.1. Em outras palavras, a conclusão do Teorema 18.1 vale tanto para maximizar f quanto para minimizar f em C_h. Na Seção 19.3 iremos descrever uma condição de segunda ordem que distingue máximos de mínimos.

Exemplo 18.4 Vamos usar o Teorema 18.1 para resolver um problema simples de maximização da utilidade:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ \text{sujeita a} & h(x_1, x_2) \equiv x_1 + 4x_2 = 16 \end{array} \tag{7}$$

Como o gradiente de h é $(1, 4)$, h não tem pontos críticos e a qualificação de restrição está satisfeita. Formamos o lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \mu) = x_1 x_2 - \mu(x_1 + 4x_2 - 16)$$

e igualamos suas derivadas parciais a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 - 4\mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} &= -(x_1 + 4x_2 - 16) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Observe que, como era de se esperar, a equação $\partial L/\partial\mu = 0$ simplesmente repete a restrição de igualdade. Queremos resolver este sistema (8) de três equações a três variáveis. Neste exemplo simples, o sistema (8) é linear e podemos usar os métodos do Capítulo 7. Como (8) é simples, usamos substituição.

Das primeiras duas equações de (8), decorre que

$$\mu = x_2 = \frac{1}{4}x_1 \tag{9}$$

e portanto
$$x_1 = 4x_2 \tag{10}$$

Substituindo (10) na terceira equação de (8):

$$(4x_2) + 4x_2 = 16 \quad \text{ou} \quad x_2 = 2$$

De (9) e (10), concluímos que a solução do sistema (8) é

$$x_1 = 8 \quad x_2 = 2 \quad \mu = 2$$

O Teorema 18.1 afirma que o único candidato a solução do problema (7) é $x_1 = 8$, $x_2 = 2$.

Exemplo 18.5 Vamos elaborar um exemplo mais complexo:

maximizar $\quad f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$
sujeita a (x_1, x_2) estar no conjunto-restrição

$$C_h = \{(x_1, x_2): 2x_1^2 + x_2^2 = 3\}$$

Para verificar a qualificação de restrição, calculamos os pontos críticos de $h(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$. O único ponto crítico desta função ocorre em $(x_1, x_2) = (0, 0)$, que é um ponto que *não* está no conjunto-restrição C_h. Portanto, a qualificação de restrição deste problema está satisfeita. Agora, forme o lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \mu) = x_1^2 x_2 - \mu(2x_1^2 + x_2^2 - 3)$$

calcule suas derivadas parciais e iguale-as a zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1x_2 - 4\mu x_1 = 2x_1(x_2 - 2\mu) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1^2 - 2\mu x_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= -2x_1^2 - x_2^2 + 3 = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Mais uma vez, a equação $\partial L/\partial \mu = 0$ simplesmente repete a restrição de igualdade. Queremos resolver este sistema *não-linear* (11) de três equações a três variáveis. O método usual é resolver uma das duas primeiras equações em m e substituir esta expressão na outra para eliminar μ como uma variável.

A primeira equação em (11) fornece $x_1 = 0$ ou $x_2 = 2\mu$. Tratamos cada um dos dois casos separadamente. Se $x_1 = 0$, então $x_2 = \pm\sqrt{3}$ pela terceira equação e $\mu = 0$ pela segunda. Portanto,

$$\left(0, \sqrt{3}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(0, -\sqrt{3}, 0\right)$$

são duas soluções do sistema (11).

Se $x_1 \neq 0$ em (11), então $x_2 = 2\mu$ ou $\mu = x_2/2$ pela primeira equação em (11). Substituindo $\mu = x_2/2$ na segunda equação de (11) obtemos $x_1^2 = x_2^2$. Substitua esta expressão na terceira equação para obter $3x_1^2 = 3$ ou $x_1 = \pm 1$. Como $x_1^2 = x_2^2$, $x_1 = \pm 1$ implica $x_2 = \pm 1$ e, pela primeira equação, que $\mu = 0{,}5$ quando $x_2 = +1$ e $\mu = -0{,}5$ quando $x_2 = -1$. Conseqüentemente, obtemos mais quatro soluções do sistema (11) das condições de primeira ordem:

$$(1,\ 1,\ 0{,}5) \quad (-1,\ -1,\ -0{,}5) \quad (1,\ -1,\ -0{,}5) \quad \text{e} \quad (-1,\ 1,\ 0{,}5)$$

Como veremos no Capítulo 30, a compacidade do conjunto-restrição C_h significa que existe um max condicionado para este problema (Teorema 30.1). Como não temos um teste de segunda ordem e sabemos pelo Teorema 18.1 que o max condicionado é um destes seis candidatos, podemos substituir cada um deles em $f(x_1, x_2)$ e verificar qual fornece o valor maior. Como

$$f(1,1) = f(-1,1) = 1$$
$$f(1,-1) = f(-1,-1) = -1$$
$$f\left(0, \sqrt{3}\right) = f\left(0, -\sqrt{3}\right) = 0$$

o max ocorre em (1, 1) e (–1, 1). Observe que (1, –1) e (–1, –1) *minimizam* f em C_h. Veja o Exercício 18.1.

Os cálculos nos Exemplos 18.4 e 18.5 mostram como é aplicado o Teorema 18.1. Primeiro, verifique a qualificação de restrição calculando os pontos críticos da função restrição h, ou seja, as soluções de $\partial h/\partial x_1 = 0$ e $\partial h/\partial x_2 = 0$. Se nenhuma destas está no conjunto-restrição, podemos escrever o lagrangiano, igualar suas derivadas parciais a zero e resolver o sistema de equações resultante. Se o conjunto-restrição contém um ponto crítico da função restrição, incluímos este ponto entre os candidatos para uma solução do problema de maximização condicionada original, junto com os pontos críticos do lagrangiano. No próximo capítulo trataremos mais sobre qualificações de restrição.

Várias Restrições de Igualdade

Em seguida consideramos o problema de maximizar uma função $f(x_1,\ldots, x_n)$ de n variáveis condicionada por mais de uma, digamos, por m restrições *de igualdade*. Sejam $h_1(\mathbf{x}),\ldots, h_m(\mathbf{x})$ as funções que definem o conjunto-restrição. Em outras palavras, queremos

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar ou minimizar} & f(x_1,\ldots, x_n) \\ \text{sujeita a} & C_h = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n) \mid h_1(\mathbf{x}) = a_1,\ldots, h_m(\mathbf{x}) = a_m\} \end{array}$$

Precisamos generalizar para m funções a qualificação de restrição que utilizamos para uma função de duas variáveis:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*)\right) \neq (0,0) \tag{12}$$

Se tivermos somente uma restrição, $h(x_1,..., x_n) = a$, então a generalização natural de (12) é exigir que alguma das derivadas parciais de primeira ordem de h seja não-nula no ponto ótimo $\mathbf{x}^*$:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial h}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*), \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)\right) \neq (0,0,\ldots,0) \tag{13}$$

Se estivermos tratando com m funções de restrição, $m > 1$, a generalização natural de (12) e (13) envolve a derivada jacobiana

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

das funções de restrição. Em geral, um ponto $\mathbf{x}^*$ é denominado um **ponto crítico de h** = $(h_1,..., h_m)$ se o posto da matriz $D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$ é $< m$. Portanto, a generalização natural da qualificação de restrição (13) é que o posto de $D\mathbf{h}(\mathbf{x})$ seja m, o maior possível. Mais formalmente, dizemos que $(h_1,..., h_m)$ satisfaz a **qualificação de restrição não-degenerada** (QRND) em $\mathbf{x}^*$ se o posto da matriz jacobiana $D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*)$ em $\mathbf{x}^*$ é m. A QRND é uma condição de regularidade, como a definição de uma curva regular na Seção 14.5 e implica que o conjunto-restrição tem um plano tangente $(n - m)$-dimensional bem-definido em todos os pontos.

O enunciado do teorema geral para maximizar uma função de n variáveis condicionada por m restrições de igualdade é uma generalização direta do Teorema 18.1. Contudo, não podemos utilizar nossa prova geométrica bidimensional. Apresentaremos uma prova completa na Seção 19.6.

Teorema 18.2 Sejam $f, h_1, \ldots, h_m$ funções C^1 de n variáveis. Considere o problema de maximizar (ou minimizar) $f(\mathbf{x})$ no conjunto-restrição

$$C_{\mathbf{h}} \equiv \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : h_1(\mathbf{x}) = a_1, \ldots, h_m(\mathbf{x}) = a_m\}$$

Suponha que $\mathbf{x}^* \in C_{\mathbf{h}}$ e que $\mathbf{x}^*$ é um max ou min (local) de f em $C_{\mathbf{h}}$. Suponha também que $\mathbf{x}^*$ satisfaz a condição QRND acima. Então existem $\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*$ tais que $\left(x_1^*, \ldots, x_n^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_m^*\right) \equiv \left(\mathbf{x}^*, \mu^*\right)$ é um ponto crítico do lagrangiano

$$L(\mathbf{x}, \mu) \equiv f(\mathbf{x}) - \mu_1[h_1(\mathbf{x}) - a_1] - \mu_2[h_2(\mathbf{x}) - a_2] - \cdots - \mu_m[h_m(\mathbf{x}) - a_m].$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}\left(\mathbf{x}^*, \mu^*\right) = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}\left(\mathbf{x}^*, \mu^*\right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1}\left(\mathbf{x}^*, \mu^*\right) = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \mu_m}\left(\mathbf{x}^*, \mu^*\right) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Exemplo 18.6 Considere o problema de maximizar $f(x, y, z) = xyz$ no conjunto-restrição definido por

$$h_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad h_2(x, y, z) \equiv x + z = 1$$

Inicialmente, olhamos para este problema geometricamente e vemos que o conjunto definido por h_1 é o cilindro C_1 paralelo ao eixo z, esboçado na Figura 18.3. O conjunto definido por h_2 é o plano C_2 paralelo ao eixo y, esboçado na Figura 18.3. O conjunto-restrição $C_{\mathbf{h}}$ é, então, a interseção de C_1 e de C_2.

Agora vamos atacar este problema analiticamente. Primeiro, calcule a matriz jacobiana das funções restrição

$$D\mathbf{h}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

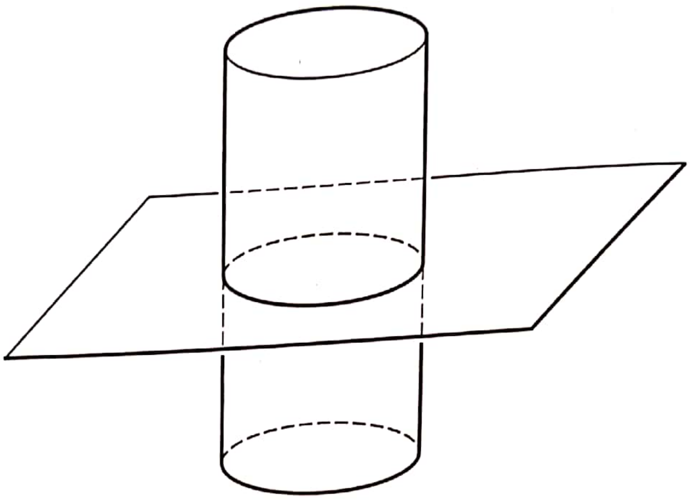

Figura 18.3 *O conjunto-restrição do Exemplo 18.6.*

Seu posto é menor do que 2 se, e somente se, $x = y = 0$. Como qualquer ponto com $x = y = 0$ violaria a primeira restrição, todos os pontos no conjunto-restrição satisfazem QRND. Em seguida, forme o lagrangiano

$$L(x, y, z, \mu_1, \mu_2) = xyz - \mu_1(x^2 + y^2 - 1) - \mu_2(x + z - 1)$$

e coloque suas derivadas parciais de primeira ordem iguais a 0:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2\mu_1 x - \mu_2 &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= xz - 2\mu_1 y &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= xy - \mu_2 &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mu_1} &= 1 - x^2 - y^2 &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \mu_2} &= 1 - x - z &= 0
\end{aligned}$$

Resolva a segunda e terceira equações para μ_1 e μ_2 em termos de x, y e z e substitua estes valores na primeira equação para obter

$$yz - 2\left(\frac{xz}{2y}\right)x - xy = 0$$

ou

$$y^2 z - x^2 z - xy^2 = 0 \qquad (15)$$

Então resolva a quarta equação para y^2 em termos de x^2 e a última equação para z em termos de x e substitua estes em (15), para obter

$$(1 - x^2)(1 - x) - x^2(1 - x) - x(1 - x^2) = 0$$

O resultado é uma equação cúbica com $x = 1$ como uma raiz. Podemos dividir a cúbica por $x - 1$ e resolver a equação quadrática resultante para obter $x = \frac{1}{6}\left(-1 \pm \sqrt{13}\right)$, aproximadamente $-0{,}7676$ e $0{,}4343$. Substituindo esses números nas restrições, obtemos os quatro candidatos a solução

$$\begin{array}{llllll} x \simeq & 0{,}4343 & y \simeq & \pm\, 0{,}9008 & z \simeq & 0{,}5657; \\ x \simeq & -\,0{,}7676 & y \simeq & \pm\, 0{,}6409 & z \simeq & 1{,}7676. \end{array}$$

Calculando a função objetivo nesses quatro pontos, verificamos que o máximo é

$$x \simeq -\,0{,}7676 \qquad y \simeq -\,0{,}6409 \qquad z \simeq 1{,}7676$$

Como ilustra o Exemplo 18.6, utilizamos o Teorema 18.2 exatamente como utilizamos o Teorema 18.1. Os candidatos a máximo condicionado são os pontos críticos das funções restrição *juntamente com* os pontos críticos do lagrangiano.

EXERCÍCIOS

18.1 Para o problema do Exemplo 18.5, esboce C_h e alguns conjuntos de nível de f, como na Figura 18.1, para obter uma interpretação geométrica das soluções. Use esse esboço para determinar se os pontos $\left(0, \pm\sqrt{3}\right)$ são max local, min local ou nenhum dos dois.

18.2 Encontre as distâncias máxima e mínima da origem à elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$. [Sugestão: Como função objetivo use $x^2 + y^2$.]

18.3 Encontre o ponto da parábola $y = x^2$ que está mais próximo do ponto (2, 1). (Aproxime a solução da equação cúbica que resulta.)

18.4 Encontre a expressão geral (em termos de todos os parâmetros) da cesta de mercadorias (x_1, x_2) que maximiza a função utilidade Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = kx_1^a x_2^{1-a}$ no conjunto orçamentário $p_1x_1 + p_2x_2 = I$.

18.5 Encontre o ponto mais próximo da origem em $\mathbf{R}^3$ que está em ambos os planos, $3x + y + z = 5$ e $x + y + z = 1$.

18.6 Encontre o max e o min de $f(x, y, z) = x + y + z^2$ sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = 0$.

18.7 Maximize $f(x, y, z) = yz + xz$ sujeita a $y^2 + z^2 = 1$ e $xz = 3$.

18.8 Mostre que a QRND implica que $m \le n$.

18.9 Maximize $x^2y^2z^2$ sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, onde c é alguma constante positiva fixada. Qual é o valor máximo da função objetivo no conjunto-restrição? Mostre que, para quaisquer x, y, z, vale

$$x^2y^2z^2 \le \left(\frac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)^3 \qquad \text{ou} \qquad \left(x^2y^2z^2\right)^{1/3} \le \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

Esta igualdade afirma que a **média geométrica** de três números positivos é sempre ≤ à **média (aritmética)** desses três números. Além disso, essas médias são iguais somente se os três números são iguais. É claro que a mesma prova funciona para todos os conjuntos de n números positivos:

$$\left(x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}$$

com igualdade se, e somente se, $x_1^2 = x_2^2 = \cdots x_n^2$.

18.3 RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE

Na seção anterior trabalhamos somente com conjuntos-restrição definidos por restrições *de igualdade*:

$$h_1(x_1,\ldots,x_n) = c_1,\ldots,h_m(x_1,\ldots x_n) = c_m$$

Para encontrar o máximo ou mínimo de uma função num conjunto-restrição deste tipo, simplesmente construímos o lagrangiano, igualamos suas $(m + n)$ derivadas parciais de primeira ordem a zero e então resolvemos estas $(m + n)$ equações a $(m + n)$ incógnitas, cuidando um pouco da qualificação de restrição ao longo do caminho. Contudo, a maioria dos problemas econômicos tem suas restrições definidas por *desigualdades*:

$$g_1(x_1,\ldots,x_n) \leq b_1,\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n) \leq b_k$$

Infelizmente, o método de encontrar máximos condicionados em problemas com restrições de desigualdade é um pouco mais complexo do que o método que utilizamos para restrições de igualdade. As condições de primeira ordem envolvem tanto igualdades quanto desigualdades, e sua solução acarreta a investigação de vários casos.

Para manter a situação sob controle, no restante deste capítulo vamos continuar a usar h para denotar as funções que definem restrições de igualdade e g para denotar as funções que definem restrições de desigualdade. Utilizamos μ para os multiplicadores de h e λ para os multiplicadores de g. Esta convenção será especialmente útil quando trabalharmos com o caso geral que inclui as restrições de igualdade e de desigualdade.

Uma Restrição de Desigualdade

Comecemos novamente observando o caso mais simples, o de duas variáveis e uma restrição de *desigualdade*:

maximizar	$f(x, y)$
sujeita a	$g(x, y) \leq b$

Na Figura 18.4, a curva mais grossa é a curva $g(x, y) = b$; a região à esquerda e abaixo dessa curva é o conjunto-restrição $g(x, y) \leq b$. As linhas mais finas são as curvas de nível da função objetivo f. Estudando a Figura 18.4, notamos que a curva de nível de f de maior nível que encontra o conjunto-restrição, toca esse conjunto no ponto **p**. Como **p** está na fronteira do conjunto-restrição, onde $g(x, y) = b$, dizemos que a restrição é **ativa** (ou, então, vinculadora, eficaz ou justa) em **p**. Como observamos na Figura 18.1, o conjunto de nível de f e o conjunto de nível de g são tangentes entre si no ponto **p**. Como na Figura 18.2, isso significa que $\nabla f(\mathbf{p})$ e $\nabla g(\mathbf{p})$ estão alinhados, apontando no mesmo sentido ou em sentidos opostos e, portanto, que $\nabla f(\mathbf{p})$ é um múltiplo de $\nabla g(\mathbf{p})$. Se λ denotar este múltiplo, então $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p})$, ou

$$\nabla f(\mathbf{p}) - \lambda \nabla g(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \tag{16}$$

Desta vez, contudo, o sinal do multiplicador é importante! Lembre que na Seção 14.6 vimos que $\nabla f(\mathbf{p})$ aponta no sentido em que f *cresce* o mais rápido em **p**. Em particular, $\nabla g(\mathbf{p})$ aponta para o conjunto $g(x, y) \geq b$ e não para o conjunto $g(x, y) \leq b$. Como **p** maximiza f no conjunto $g(x, y) \leq b$, o gradiente de f não pode apontar para o conjunto-restrição. Se apontasse, poderíamos aumentar f e ainda manter $g(x, y) \leq b$. Assim, $\nabla f(\mathbf{p})$ deve apontar para a região em que $g(x, y) \geq b$. Isto significa que $\nabla f(\mathbf{p})$ e $\nabla g(\mathbf{p})$ *apontam no mesmo sentido*. Assim, se $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p})$, então o multiplicador λ deve ser ≥ 0. Vale a pena fazer uma pausa para entender claramente esta diferença entre restrições de igualdade e de desigualdade.

Conseqüentemente, para a situação esboçada na Figura 18.4, continuamos a formar a função lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$$

e, como mostramos em (16), colocamos ambos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

iguais a zero. Também queremos, como fizemos na seção anterior, a qualificação de restrição, que o máximo não seja um ponto crítico da função de restrição g.

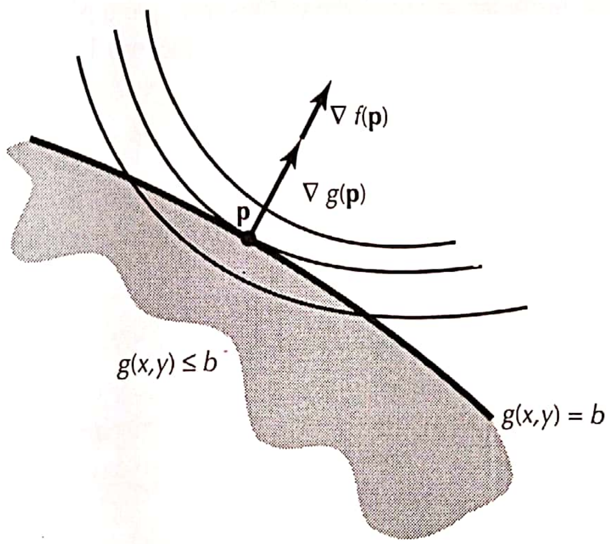

Figura 18.4 *∇f e ∇g apontam na mesma direção e sentido no máximo* **p**.

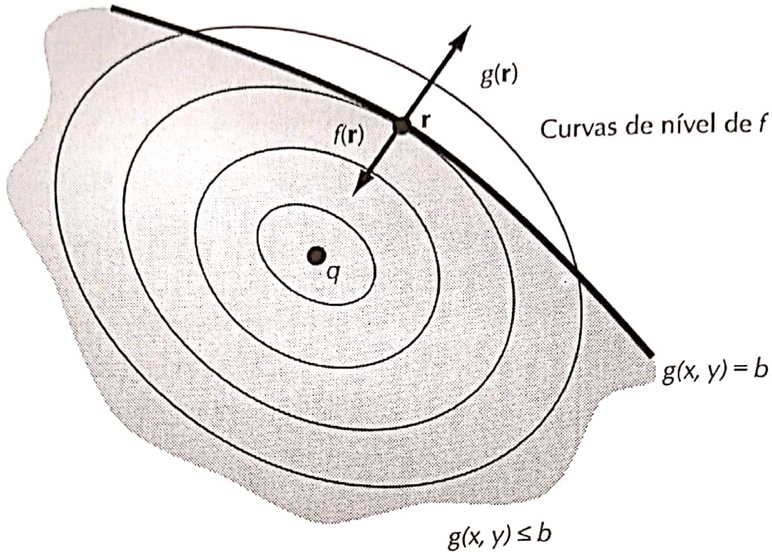

Figura 18.5 *A situação em que a restrição não é ativa.*

Antes de considerar $\partial L/\partial\lambda$, precisamos examinar mais uma situação. Suponha que o máximo de f no conjunto-restrição $g(x, y) \leq b$ não ocorre onde $g(x, y) = b$, mas sim num ponto em que $g(x, y) < b$. A Figura 18.5 ilustra este cenário, em que ainda usamos uma linha mais grossa para representar a fronteira $g(x, y) = b$ do conjunto-restrição. O conjunto-restrição inteiro fica à esquerda e abaixo dessa curva. Contudo, desta vez o máximo de f ocorre num ponto **q** no interior do conjunto-restrição. Existe um ponto **r** no conjunto de nível $g(x, y) = b$ em que esse conjunto de nível é tangente a um conjunto de nível de f, mas ∇f e ∇g apontam em sentidos opostos em **r**. De fato, podemos aumentar o valor de f dirigindo-nos mais *para dentro* do conjunto-restrição a partir de **r**, até alcançar **q**. Como $g(x, y)$ é estritamente menor do que b em **q**, ou seja, **q** está no interior do conjunto-restrição, dizemos que a restrição é **inativa** (não-vinculadora, ineficaz ou solta) em **q**. Observe que o ponto **q** deve ser um max local de f, ou seja, um max local não-condicionado. Pelo Teorema 17.1, isso significa que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{q}) = 0$$

As derivadas de g não seguem esse critério nem as contas no ponto **q**. Podemos ainda usar nosso lagrangiano

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$$

e igualar $\partial L/\partial x$ e $\partial L/\partial y$ a zero, *desde que* coloquemos λ igual a zero. Colocar $\lambda = 0$ faz com que a função restrição caia fora da análise; isto é exatamente o que se quer quando a restrição no max não é ativa.

Resumindo, ou a restrição é ativa, isto é, $g(x, y) - b = 0$, como na Figura 18.4, caso em que o multiplicador λ deve ser ≥ 0, ou então a restrição é inativa, como na Figura 18.5, caso em que o multiplicador λ deve ser $= 0$. Tal situação, na qual uma das duas desigualdades deve ser ativa, é denominada **condição de folga complementar**. Uma maneira conveniente de resumir a exigência de que um de dois números deve ser zero é afirmar que o seu *produto* deve ser zero. Portanto, vamos resumir nosso critério, a saber, que $g(x, y) - b = 0$ ou $\lambda = 0$, exigindo que

$$\lambda \cdot [g(x, y) - b] = 0 \tag{17}$$

Como não sabemos *a priori* se a restrição será ou não ativa no máximo, não podemos usar a condição $\partial L/\partial \mu = 0$ que foi utilizada com restrições de igualdade, pois esta condição é equivalente a $g(x, y) - b = 0$. Vamos substituir essa afirmação pela condição (17), que diz que *ou* a restrição é ativa *ou* seu multiplicador é zero (ou, em circunstâncias raras, ambos). Juntando esses dois casos, podemos resumir nossas observações nesta seção no teorema que segue.

Teorema 18.3 Suponha que f e g são funções C^1 em $\mathbf{R}^2$ e que (x^*, y^*) maximiza f no conjunto-restrição $g(x, y) \leq b$. Se $g(x^*, y^*) = b$, suponha que

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(x^*, y^*\right) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial g}{\partial y}\left(x^*, y^*\right) \neq 0$$

Em qualquer caso, forme a função lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot [g(x, y) - b]$$

Então, existe um multiplicador λ^* tal que:

$$(a) \qquad \frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*, y^*, \lambda^*\right) = 0$$

$$(b) \qquad \frac{\partial L}{\partial y}\left(x^*, y^*, \lambda^*\right) = 0$$

$$(c) \qquad \lambda^* \cdot \left[g\left(x^*, y^*\right) - b\right] = 0$$

$$(d) \qquad \lambda^* \geq 0$$

$$(e) \qquad g\left(x^*, y^*\right) \leq b$$

Observação Em alguns textos, a restrição é escrita como $g(x, y) \geq b$ em vez de $g(x, y) \leq b$ e o lagrangiano é, então, escrito como $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot [g(x, y) - b]$. Estas duas alterações se anulam, de modo que a conclusão do Teorema 18.3 continua valendo num max condicionado.

Observe as semelhanças e diferenças entre o enunciado do Teorema 18.2, que trata de restrições de igualdade, e o enunciado do Teorema 18.3, que cobre restrições de desigualdade:

(1) Ambos usam o mesmo lagrangiano L e ambos requerem que as derivadas de L em relação aos x_i sejam nulas.

(2) A condição $\partial L/\partial \mu = h(x, y) - c = 0$ para restrições de igualdade pode não valer mais para restrições de desigualdade, pois a restrição não precisa ser ativa no máximo no caso de restrição de desigualdade. A condição é substituída por duas condições:

$$\lambda \cdot [g(x, y) - b] = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) - b \leq 0$$

A segunda destas duas condições é simplesmente uma repetição da própria restrição de desigualdade.

(3) Ambas as situações requerem que verifiquemos uma qualificação de restrição. Contudo, só precisamos conferir a qualificação de restrição para uma restrição de desigualdade se a restrição é ativa no candidato a solução.

(4) Não havia restrições no sinal do multiplicador na situação de restrições de igualdade; contudo, o multiplicador para restrições de desigualdade deve ser não-negativo.

(5) Para restrições de igualdade (e para problemas sem restrições), as mesmas condições de primeira ordem que valem para problemas de maximização também valem para problemas de minimização. Contudo, o argumento que $\nabla f(\mathbf{p})$ e $\nabla g(\mathbf{p})$ apontam no *mesmo* sentido para restrições de desigualdade, resumido na Figura 18.4, vale somente para o problema de maximização. O mesmo tipo de raciocínio leva a concluir que $\nabla f(\mathbf{p})$ e $\nabla g(\mathbf{p})$ devem apontar em sentidos *opostos* para problemas de minimização com restrições. Veremos mais sobre a distinção de problemas de maximização e problemas de minimização na Seção 18.5.

Exemplo 18.7 Considere o problema de maximizar $f(x, y) = xy$ no conjunto-restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$. O único ponto crítico de g ocorre na origem, bem distante da fronteira $x^2 + y^2 = 1$ do conjunto-restrição. Assim, a qualificação de restrição estará satisfeita em qualquer candidato a solução. Forme o lagrangiano

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

e escreva por extenso as condições de primeira ordem descritas no Teorema 18.3:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0$$

$$\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 \qquad x^2 + y^2 \leq 1 \qquad \lambda \geq 0$$

As duas primeiras equações fornecem

$$\lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \qquad \text{ou} \qquad x^2 = y^2 \tag{18}$$

Se $\lambda = 0$, então $x = y = 0$. Esta combinação satisfaz todas as condições de primeira ordem, portanto, é um candidato a solução. Se $\lambda \neq 0$, então a terceira equação torna-se $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Combinando isso com (18), obtemos $x^2 = y^2 = 1/2$, ou $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Combinando essas com a equação para λ em (18), obtemos os quatro seguintes candidatos:

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = +\frac{1}{2};$$
$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = +\frac{1}{2};$$
$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = -\frac{1}{2};$$
$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad y = +\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Descartamos os dois últimos candidatos, pois envolvem um multiplicador negativo. Assim, incluindo (0, 0, 0), há três candidatos que satisfazem todas as cinco condições de primeira ordem. Substituindo esses três na função objetivo, encontramos que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

são as soluções do nosso problema inicial.

Os dois pontos com os multiplicadores negativos são as soluções do problema de *minimizar xy* no conjunto-restrição $x^2 + y^2 \leq 1$.

Uma maneira de pensar na condição c do Teorema 18.3 é que se $\lambda > 0$, então sabemos que a restrição será ativa e podemos tratá-la como uma restrição de igualdade em vez de uma restrição de desigualdade, o que é um critério muito mais simples com o qual trabalhar. Em alguns problemas econômicos, este tipo de análise pode fornecer informação útil sobre o fenômeno que estamos estudando, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 18.8 Considere novamente o problema padrão de maximização da utilidade do Exemplo 18.1. Continuamos a ignorar as restrições de não-negatividade, mas agora não forçamos a restrição orçamentária a ser ativa no enunciado do problema. Veremos que a justeza da restrição orçamentária, ou seja, a conclusão de que o consumidor gasta toda a renda disponível, é uma conseqüência de uma hipótese natural de monotonicidade sobre a função utilidade.

Nosso objetivo é maximizar uma função utilidade $U(x_1, x_2)$ que é C^1 sujeita a uma restrição orçamentária $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$, onde p_1 e p_2 representam preços unitários positivos. Vamos supor que para cada cesta de mercadorias (x_1, x_2) temos

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$$

Isto é uma versão da hipótese usual de monotonicidade ou não-saturação, que afirma que as mercadorias em questão são *bens* cujo aumento de consumo aumenta sua utilidade. Como a qualificação de restrição usual está satisfeita, podemos formar o lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

e calcular seus pontos críticos em x_1 e x_2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

No máximo, o multiplicador λ não pode ser zero; se fosse, ambas as parciais $\partial U/\partial x_1$ e $\partial U/\partial x_2$ seriam nulas em (19), em contradição a nossa hipótese de monotonicidade. Como

$$\lambda > 0 \quad \text{e} \quad \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) = 0$$

segue que $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$; o consumidor gastará toda renda disponível e podemos tratar a restrição orçamentária como uma restrição de igualdade.

Várias Restrições de Desigualdade

A generalização do Teorema 18.3 para mais variáveis e mais restrições é imediata. Apresentaremos seu enunciado aqui e então veremos alguns problemas concretos usando essa generalização, mas sua prova será apresentada apenas na Seção 19.6. Lembre que uma restrição $g(\mathbf{x}) \leq b$ é **ativa** (ou então, eficaz ou justa) em um candidato a solução $\mathbf{x}^*$ se $g(\mathbf{x}^*) = b$. Se $g(\mathbf{x}^*) < b$, dizemos que a restrição é **inativa** (ineficaz ou solta) em $\mathbf{x}^*$.

Teorema 18.4 Suponha que f, $g_1, \ldots, g_k$ são funções C^1 de n variáveis. Suponha que $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ é um máximo local de f no conjunto-restrição definido pelas k desigualdades

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq b_1, \ldots, g_k(x_1, \ldots x_n) \leq b_k$$

Para facilitar a notação, suponha que as primeiras k_0 restrições são ativas em $\mathbf{x}^*$ e que as últimas $k - k_0$ restrições são inativas. Suponha que a seguinte qualificação de restrição não-degenerada está satisfeita em $\mathbf{x}^*$.

O posto em $\mathbf{x}^*$ da matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

das restrições *ativas* é k_0, ou seja, é o maior possível.

Forme o lagrangiano

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \equiv f(\mathbf{x}) - \lambda_1[g_1(\mathbf{x}) - b_1] - \cdots - \lambda_k[g_k(\mathbf{x}) - b_k]$$

Então existem multiplicadores $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*$ tais que:

(a) $$\frac{\partial L}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*,\lambda^*) = 0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*,\lambda^*) = 0$$

(b) $$\lambda_1^*[g_1(\mathbf{x}^*) - b_1] = 0,\ldots,\lambda_k^*[g_k(\mathbf{x}^*) - b_k] = 0$$

(c) $$\lambda_1^* \geq 0,\ldots,\lambda_k^* \geq 0$$

(d) $$g_1(\mathbf{x}^*) \leq b_1,\ldots,g_k(\mathbf{x}^*) \leq b_k$$

Observação A qualificação de restrição no enunciado do Teorema 18.4 é a generalização natural das qualificações de restrição dos Teoremas 18.2 e 18.3. Esta condição envolve somente as restrições *ativas*, pois as restrições inativas não devem desempenhar um papel nas condições de primeira ordem. Assim, tratamos as restrições ativas exatamente como tratamos as restrições de igualdade no Teorema 18.2, supondo que sua matriz jacobiana tem posto máximo. Continuaremos a abreviar essa versão das qualificações de restrição não-degeneradas por QRND.

Exemplo 18.9 Considere o problema de maximizar $f(x, y, z) = xyz$ no conjunto-restrição definido pelas desigualdades

$$x + y + z \leq 1 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad z \geq 0$$

Este é o problema típico de maximização da utilidade num espaço-mercadoria tridimensional. Como precisamos escrever todas nossas restrições de desigualdade consistentemente, com um $\leq$, escrevemos as três restrições de não-negatividade como

$$-x \leq 0 \quad -y \leq 0 \quad \text{e} \quad -z \leq 0$$

A matriz jacobiana das funções restrição é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como suas colunas são linearmente independentes, seu posto é três. Como no máximo três das quatro restrições podem ser ativas em qualquer ponto, a QRND vale em qualquer candidato a solução. Forme o lagrangiano

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = xyz - \lambda_1(x + y + z - 1) - \lambda_2(-x) - \lambda_3(-y) - \lambda_4(-z)$$

Por causa do duplo sinal de menos nas três últimas parcelas deste lagrangiano, podemos escrevê-lo mais esteticamente como

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = xyz - \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 z$$

Daqui em diante iremos tratar as restrições de não-negatividade desta maneira, incluindo-as no lagrangiano como $+\lambda_i x_i$ em vez de $-\lambda_i(-x_i)$. Agora escrevemos a relação completa de condições de primeira ordem, de acordo com o Teorema 18.4:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda_1 + \lambda_4 = 0$

(4) $\lambda_1(x + y + z - 1) = 0$

(5) $\lambda_2 x = 0$

(6) $\lambda_3 y = 0$

(7) $\lambda_4 z = 0$

(8) $\lambda_1 \geq 0$

(9) $\lambda_2 \geq 0$

(10) $\lambda_3 \geq 0$

(11) $\lambda_4 \geq 0$

(12) $x + y + z \leq 1$

(13) $x \geq 0$

(14) $y \geq 0$

(15) $z \geq 0$

Podemos escrever as condições 1, 2 e 3, sem o sinal de menos, como

$$\lambda_1 = yz + \lambda_2 = xz + \lambda_3 = xy + \lambda_4 \tag{20}$$

Vamos examinar dois casos: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_1 > 0$

Se $\lambda_1 = 0$ na equação (20) então, por ser não-negativa cada variável da equação (20), temos

$$yz = xz = xy = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \tag{21}$$

As equações (21) levam a um conjunto (infinito) de candidatos a solução nos quais duas variáveis são nulas e a terceira é qualquer número no intervalo [0, 1]. Em particular, a função objetivo é nula em cada (x, y, z) que satisfaz (21).

Em seguida, vejamos o caso $\lambda_1 > 0$. Pela condição 4, temos $x + y + z = 1$; pelo menos um dentre x, y e z deve ser não-nulo. Suponha por um momento que $x = 0$. Então, usando as equações (20) e a hipótese que $\lambda_1 > 0$, vemos que $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1 > 0$. Mas então as condições 6 e 7 implicam que $y = z = 0$, contradizendo $x + y + z = 1$. Como a hipótese $x = 0$ leva a uma contradição, concluímos que $x > 0$. Argumentos semelhantes mostram que também y e z são positivos. Então as condições 5, 6 e 7 implicam que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e as equações (20) simplificam para

$$yz = xz = xy$$

Agora decorre que

$$x = y = z = \frac{1}{3} \tag{22}$$

e, usando a equação (20) mais uma vez, que $\lambda_1 = 1/9$. Como

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} > 0$$

concluímos que (22) é a solução do problema de maximização condicionada.

Como mostra este exemplo, a solução de um problema de maximização condicionada comumente envolve repartir as condições de primeira ordem em vários casos. Muitas vezes, o mais fácil é começar com as restrições de não-negatividade ou com os sinais dos multiplicadores. No Exemplo 18.9, trabalhamos primeiro com o caso $\lambda_1 = 0$. Cada caso precisa ser levado até o fim, até que se calcule um candidato completo para a solução, inclusive valores para os multiplicadores, ou então até alcançar alguma contradição em uma das condições de primeira ordem. Enquanto se trabalha em qualquer dado caso, é possível que precisemos repartir o caso em dois subcasos, dependendo se uma segunda restrição de desigualdade é ou não é ativa. No Exemplo 18.9, ao estudar o caso $\lambda_1 > 0$, tivemos de examinar dois subcasos, dependendo do sinal de x.

Na teoria econômica, entretanto, raramente precisamos calcular os máximos ou mínimos de um problema específico. Em geral, estamos mais interessados em estudar as condições de primeira ordem que surgem em um *tipo* específico de problema, pois estas podem levar a relações interessantes entre as variáveis do problema ou até a princípios econômicos gerais. Neste capítulo fornecemos vários exemplos e exercícios concretos que tornam mais fácil trabalhar e entender as condições de primeira ordem do Teorema 18.4. Assim, apresentaremos mais um exemplo concreto com restrições de desigualdade na última seção deste capítulo.

EXERCÍCIOS

18.10 Encontre o máximo de $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeita a $2x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

18.11 Encontre o máximo de $f(x, y) = 2y^2 - x$, sujeita a $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

18.12 Considere o problema de maximizar $f(x, y, z) = xyz + z$, sujeita a $x^2 + y^2 + z \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

a) Escreva a coleção completa das condições de primeira ordem deste problema.

b) Determine se a restrição $x^2 + y^2 + z \leq 6$ é ou não é ativa em alguma solução.

c) Encontre uma solução das condições de primeira ordem que inclua $x = 0$.

d) Encontre três equações nas três incógnitas x, y, z que devem ser satisfeitas se $x \neq 0$ na solução.

e) Mostre que $x = 1$, $y = 1$, $z = 4$ satisfaz essas equações.

18.13 No Exemplo 18.8, mostre que a restrição de desigualdade orçamentária é ativa mesmo na presença das restrições $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ de não-negatividade. Ao longo do caminho, confira a QRND para este problema mais geral.

18.14 Permita preços e rendas mais gerais no Exemplo 18.9; em outras palavras, mude a restrição $x + y + z \leq 1$ para a restrição $p_1x + p_2y + p_3z \leq I$.

18.4 RESTRIÇÕES MISTAS

Como observamos no Exemplo 18.8, alguns problemas de maximização envolvem tanto restrições de igualdade quanto de desigualdade. É imediato combinar os enunciados dos Teoremas 18.2 e 18.4 em um único resultado que trata do caso geral.

Teorema 18.5 Suponha que $f, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_m$ são funções C^1 de n variáveis. Suponha que $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ é um máximo local de f no conjunto-restrição definido pelas k desigualdades e m igualdades:

$$g_1(x_1,\ldots,x_n) \leq b_1,\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n) \leq b_k$$
$$h_1(x_1,\ldots,x_n) = c_1,\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n) = c_m$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que as primeiras k_0 restrições de desi-gualdade são ativas em $\mathbf{x}^*$ e que as outras $k - k_0$ restrições de desigualdade são inativas. Suponha que a seguinte qualificação de restrição não-degenerada está satisfeita em $\mathbf{x}^*$.

O posto em $\mathbf{x}^*$ da matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

das restrições de igualdade e das restrições de desigualdade *ativas* é $k_0 + m$, ou seja, é o maior possível.

Forme o lagrangiano

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_m)$$
$$\equiv f(\mathbf{x})-\lambda_1[g_1(\mathbf{x})-b_1]-\cdots-\lambda_k[g_k(\mathbf{x})-b_k]$$
$$-\mu_1[h_1(\mathbf{x})-c_1]-\cdots-\mu_m[h_m(\mathbf{x})-c_m]$$

Então existem multiplicadores $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*,\mu_1^*,\ldots,\mu_m^*$ tais que:

(a) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=0,\ldots,\dfrac{\partial L}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=0$

(b) $\quad \lambda_1^*[g_1(\mathbf{x}^*)-b_1]=0,\ldots,\lambda_k^*[g_k(\mathbf{x}^*)-b_k]=0$

(c) $\quad h_1(\mathbf{x}^*)=c_1,\ldots,h_m(\mathbf{x}^*)=c_m$

(d) $\quad \lambda_1^*\geq 0,\ldots,\lambda_k^*\geq 0$

(e) $\quad g_1(\mathbf{x}^*)\leq b_1,\ldots,g_k(\mathbf{x}^*)\leq b_k$

Exemplo 18.10 Considere o problema de maximizar $x-y^2$ no conjunto-restrição $x^2+y^2=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$. Verificando primeiro a QRND, observe que o gradiente de x^2+y^2 é nulo somente na origem, um ponto que não está no conjunto-restrição. Se qualquer uma das restrições de não-negatividade for ativa, então o candidato a solução é (2, 0) ou (0, 2). Em ambos os casos, a matriz jacobiana 2×2 correspondente às restrições tem posto dois e portanto a QRND está automaticamente satisfeita. Forme o lagrangiano

$$L=x-y^2-\mu(x^2+y^2-4)+\lambda_1 x+\lambda_{2y}$$

As condições de primeira ordem são:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=1-2\mu x+\lambda_1=0$ $\qquad$ (3) $x^2+y^2-4=0$ $\qquad$ (5) $\lambda_2 y=0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y}=-2y-2\mu y+\lambda_2=0$ $\qquad$ (4) $\lambda_1 x=0$ $\qquad$ (6) $\lambda_1\geq 0$ $\quad$ (7) $\lambda_2\geq 0$

(8) $x\geq 0$ $\quad$ (9) $y\geq 0$

Escreva a condição 1 sem o sinal de menos como $1+\lambda_1=2\mu x$. Como $\lambda_1\geq 0$, $1+\lambda_1>0$. Portanto $\mu>0$ e $x>0$ (e $\lambda_1=0$). Escreva a condição 2 como $2y(1+\mu)=\lambda_2$. Como $1+\mu>0$, ou y e λ_2 são nulos ou ambos são positivos. Pela condição 5, não podem ambos ser positivos. Portanto $\lambda_2=y=0$. Agora, $x=2$ pelas condições 3 e 8, $\lambda_1=0$ por 4 e $\mu=1/4$ por 1. Isso leva à solução

$$(x,y,\mu,\lambda_1,\lambda_2)=(2,0,1/4,0,0).$$

EXERCÍCIOS

18.15 Maximize $3xy - x^3$ sujeita a $2x - y = -5$, $5x + 2y \geq 37$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

18.5 PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO CONDICIONADA

As condições de primeira ordem de um problema de minimização com restrições de igualdade, que consideramos na Seção 18.2, são as mesmas das condições de primeira ordem de um problema de maximização. No entanto, na Seção 18.3, onde tratamos problemas de restrições de *desigualdade*, nossa discussão sobre o sinal do multiplicador se aplica somente a problemas de maximização. O mesmo argumento mostraria que, se quiséssemos minimizar f em vez de maximizá-la sobre o mesmo conjunto-restrição, escreveríamos o lagrangiano da mesma maneira, mas iríamos requerer que os multiplicadores fossem ≤ 0. Isto está ilustrado no Exemplo 18.7, no qual os pontos minimizantes correspondem a multiplicadores negativos.

No entanto, existe uma maneira mais comum de tratar problemas de minimização condicionada. As restrições de desigualdade num problema de minimização são, geralmente, apresentados com $g(\mathbf{x}) \geq b$ em vez de $g(\mathbf{x}) \leq b$, como ocorre nos problemas de maximização. Portanto, iremos usar uma formulação de problemas de minimização que tira vantagem desta situação e que é um análogo mais natural da nossa abordagem de problemas de maximização, especialmente para o estudo de dualidade. Apresentamos esta formulação como um teorema, que é análogo ao Teorema 18.5 para problemas de maximização.

Teorema 18.6 Suponha que $f, g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_m$ são funções C^1 de n variáveis. Suponha que $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ é um **mínimo local** de f no conjunto-restrição definido pelas k desigualdades e m igualdades:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \geq b_1, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \geq b_k$$
$$h_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, h_m(x_1, \ldots x_n) = c_m$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que as primeiras k_0 restrições de desigualdade são ativas em $\mathbf{x}^*$ e que as outras $k - k_0$ restrições de desigualdade são inativas. Suponha que a seguinte qualificação de restrição não-degenerada está satisfeita em $\mathbf{x}^*$.

O posto em $\mathbf{x}^*$ da matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix}$$

das restrições de igualdade e das restrições de desigualdade *ativas* é $k_0 + m$, ou seja, é o maior possível.

Forme o lagrangiano

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots\mu_m)$$
$$\equiv f(\mathbf{x})-\lambda_1[g_1(\mathbf{x})-b_1]-\cdots-\lambda_k[g_k(\mathbf{x})-b_k]$$
$$-\mu_1[h_1(\mathbf{x})-c_1]-\cdots-\mu_m[h_m(\mathbf{x})-c_m]$$

Então existem multiplicadores $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*,\mu_1^*,\ldots,\mu_m^*$ tais que:

(*a*) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=0,\ldots,\dfrac{\partial L}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*,\lambda^*)=0$

(*b*) $\lambda_1^*[g_1(\mathbf{x}^*)-b_1]=0,\ldots,\lambda_k^*[g_k(\mathbf{x}^*)-b_k]=0$

(*c*) $h_1(\mathbf{x}^*)=c_1,\ldots,h_m(\mathbf{x}^*)=c_m$

(*d*) $\lambda_1^*\geq 0,\ldots,\lambda_k^*\geq 0$, e

(*e*) $g_1(\mathbf{x}^*)\geq b_1,\ldots,g_k(\mathbf{x}^*)\geq b_k$

Para usar essa formulação, precisamos escrever todas as restrições de desigualdade na forma $g(\mathbf{x}) \geq b$. Por exemplo, escreveríamos a restrição $x^2 + y^2 \leq 5$ como a restrição $-(x^2 + y^2) \geq -5$. Note que, neste caso, as restrições de não-negatividade já estão na forma correta; agora elas aparecem no lagrangiano como $-\lambda_i x_i$.

Outros textos podem seguir outras abordagens em problemas de mínimos condicionados (e até em problemas de máximos condicionados). Outras possíveis formulações para problemas de minimização condicionada são:

(1) Substitua f por $-f$, já que minimizar f é equivalente a maximizar $-f$. Mantenha todo o restante exatamente como na formulação de max condicionado, inclusive a forma das restrições de desigualdade.

(2) Coloque os multiplicadores no lagrangiano com um sinal de mais em vez do sinal de menos, mantendo as restrições como elas estavam para o problema de maximização condicionada.

Exemplo 18.11 Considere o problema

$$\text{minimizar} \qquad f(x,y)=2y-x^2$$
$$\text{sujeita a} \qquad x^2+y^2\leq 1 \quad x\geq 0 \quad y\geq 0 \tag{23}$$

Antes de escrever o lagrangiano, escrevemos a primeira restrição como $-x^2-y^2\geq -1$. Então, o lagrangiano é

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,)=2y-x^2-\lambda_1(-x^2-y^2+1)-\lambda_2 x-\lambda_3 y$$

As condições de primeira ordem são

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + 2\lambda_{1x} - \lambda_2 = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda_1 y - \lambda_3 = 0 \tag{25}$$

$$\lambda_1\left(-x^2 - y^2 + 1\right) = 0 \tag{26}$$

$$\lambda_2 x = 0 \qquad \lambda_3 y = 0 \tag{27}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \tag{28}$$

junto com as restrições originais (23).

Uma maneira eficiente de começar a resolver um sistema de equações e desigualdades como este é escrever as equações $\partial L/\partial x_i$ sem o sinal de menos. Neste caso, as equações (24) e (25) fornecem

$$2x + \lambda_2 = 2\lambda_1 x \tag{29}$$

$$2 + 2\lambda_1 y = \lambda_3 \tag{30}$$

Como cada variável em (29) e (30) é não-negativa, podemos ver imediatamente a partir de (30) que $\lambda_3 \geq 2 > 0$. Concluímos de (27) que $y = 0$ e de (30) que $\lambda_3 = 2$.

Em seguida examinamos dois casos, dependendo do sinal de x. Se $x = 0$, então $\lambda_1 = 0$ por (26) e por ser $y = 0$ e $\lambda_2 = 0$ por (24). Assim, $(x, y) = (0, 0)$ satisfaz as condições de primeira ordem (24) a (28) e $f(0, 0) = 0$.

Se $x > 0$, então $\lambda_2 = 0$ por (27), $\lambda_1 = 1$ por (29) e $x^2 + y^2 = 1$ por (26). Como $y = 0$, temos $x^2 = 1$ e, como $x \geq 0$, temos $x = 1$. A solução $(x, y) = (1, 0)$ das condições de primeira ordem levam ao valor $f(1, 0) = -1$ da função objetivo. Concluímos que $(x, y) = (1, 0)$ minimiza $f(x, y) = 2y - x^2$ no conjunto-restrição (23).

EXERCÍCIOS

18.16 Confira que a QRND está satisfeita no Exemplo 18.11.

18.17 Minimize $x^2 - 2y$ sujeita a $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

18.18 Minimize $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 9y$ no conjunto-restrição

$$4x + 3y \leq 10 \qquad y - 4x^2 \geq -2 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Este problema é bem complexo, de modo que fornecemos algumas sugestões para sua resolução. 1) Como sempre, escreva primeiro o lagrangiano e a coleção completa das condições de primeira ordem. 2) Escreva as duas primeiras equações das condições de primeira ordem sem sinais de menos. 3) Examine separadamente cada um dos três casos seguintes e mostre que cada um leva a uma contradição de condições de primeira ordem: $x = 0$, $y = 0$; $x > 0$, $y = 0$; $x = 0$, $y > 0$. 4) Conclua que $x > 0$ e $y > 0$ e que cada um de seus multiplicadores λ_3 e λ_4 é nulo. 5) Examine quatro casos de acordo com a positividade de λ_1 e λ_2. Mostre que cada um dos três casos seguintes leva a uma contradição de condições de primeira ordem: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$; $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. 6) Calcule a solução que corresponde a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$.

18.19 Apresente uma prova geométrica do seguinte fato: no problema de minimizar $f(x, y)$ no conjunto-restrição $g(x, y) \geq b$, o gradiente de f e o gradiente de g apontam no *mesmo* sentido em um mínimo para o qual a restrição é ativa.

18.6 FORMULAÇÃO DE KUHN-TUCKER

Os problemas de maximização condicionada mais comuns em Economia envolvem somente restrições de desigualdade e uma coleção completa de restrições de não-negatividade:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sujeita a} & g_1(x_1,\ldots,x_n) \leq b_1, \ldots, g_k(x_1,\ldots,x_n) \leq b_k \\ & x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{array} \tag{31}$$

Observe que separamos as restrições de não-negatividade do restante das restrições de desigualdade. Esta situação é tão comum que se criou um lagrangiano especial para tratar deste caso. Como a abordagem que estamos prestes a descrever remonta ao trabalho pioneiro de Harold Kuhn e A. W. Tucker sobre problemas de maximização com restrições de desigualdade, ela é conhecida como **formulação Kuhn-Tucker**.

Ao longo desta seção vamos considerar que a QRND usual vale na solução $\mathbf{x}^*$ do problema (31). Se utilizássemos as técnicas da Seção 18.3 para resolver o problema (31), escreveríamos o lagrangiano como

$$\begin{aligned} &L(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \nu_1, \ldots \nu_n) \\ &= f(\mathbf{x}) - \lambda_1 \cdot [g_1(\mathbf{x}) - b_1] - \cdots - \lambda_k \cdot [g_k(\mathbf{x}) - b_k] + \nu_1 x_1 + \cdots + \nu_n x_n. \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem correspondentes são

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} + \nu_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_n \frac{\partial g_1}{\partial x_n} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} + \nu_n = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 (g_1(\mathbf{x}) - b_1) &= -\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ &\vdots \\ \lambda_k (g_k(\mathbf{x}) - b_k) &= -\lambda_k \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \nu_1 x_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \nu_n x_n &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \nu_1, \ldots, \nu_n \geq 0$$

mais as desigualdades em (31).

Kuhn e Tucker trabalharam com um lagrangiano $\tilde{L}$ que *não* inclui as restrições de não-negatividade:

$$\tilde{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \equiv f(\mathbf{x}) - \lambda_1 \cdot [g_1(\mathbf{x}) - b_1] - \cdots - \lambda_k \cdot [g_k(\mathbf{x}) - b_k] \tag{35}$$

Vamos denominar $\tilde{L}$ o **lagrangiano Kuhn-Tucker**. Observe que

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \nu_1, \ldots, \nu_n) = \tilde{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) + \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_n x_n$$

Para $j = 1, \ldots, n$, escreva (32) como

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} + \nu_j = 0 \tag{36}$$

ou

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} = -\nu_j \tag{37}$$

na solução, para cada j. Por (34), (37) e as equações $\nu_j \geq 0$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{e} \quad x_j \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_j} = 0 \tag{38}$$

Por outro lado, para cada $\mathbf{x}$,

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = b_j - g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \tag{39}$$

Combinando (34), (38) e (39), verifcamos que as condições de primeira ordem em termos do lagrangiano Kuhn-Tucker são

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_1} \leq 0, \ldots \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_n} \leq 0 \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_1} \geq 0, \ldots \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_k} \geq 0 \\ &x_1 \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_1} = 0, \ldots x_n \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_n} = 0 \quad \lambda_1 \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_1} = 0, \ldots \lambda_k \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda_k} = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

Esta formulação tem algumas vantagens sobre a formulação da Seção 18.3. Em primeiro lugar, envolve $n + k$ equações a $n + k$ incógnitas, em vez das $2n + k$ equações a $2n + k$ incógnitas no sistema (32) a (34). Contudo, ao resolver um problema numérico específico, como nos exercícios ao final da Seção 18.3, muitas vezes é mais fácil trabalhar com os n_j na formulação original. Uma vantagem mais importante de (40) é a maneira simétrica pela qual os x_i e λ_j entram nas condições de primeira ordem. Esta abordagem naturalmente leva à consideração do problema dual de (31), a saber, o problema de minimização no qual os λ_j são as variáveis principais. O próximo teorema resume as observações desta seção.

Teorema 18.7 Considere o problema de maximização condicionada (31) sem restrições de igualdade e com uma coleção completa de restrições de não-negatividade. Forme o lagrangiano Kuhn-Tucker $\tilde{L}$ como em (35). Suponha que $\mathbf{x}^*$ é uma solução de (31) e que a matriz $(\partial g_i/\partial x_j)$ tem posto máximo em $\mathbf{x}^*$, onde os i variam sobre os índices das restrições g_i que são ativas em $\mathbf{x}^*$ e os j variam sobre os índices j para os quais $x_j^* > 0$. Então existem multiplicadores não-negativos $\lambda_1^*,\ldots,\lambda_k^*$ tais que $x_1^*,\ldots,x_k^*,\lambda_1^*,\ldots\lambda_k^*$ satisfaz o sistema de equações e desigualdades (40).

Exemplo 18.12 Nesta estruturação, o lagrangiano Kuhn-Tucker para o problema usual de maximização da utilidade do Exemplo 18.1 é

$$\tilde{L}(x_1,x_2,\lambda) = U(x_1,x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - I)$$

e as condições de primeira ordem agora são:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 \le 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 \le 0$$

$$x_1 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1\right) = 0 \qquad x_2 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 - p_2x_2 \ge 0 \qquad \lambda\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda} = \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2) = 0$$

EXERCÍCIOS

18.20 Mostre que a QRND usual, quando aplicada ao problema (31), leva à qualificação de restrição formulada no enunciado do Teorema 18.7.

18.21 Escreva por extenso a formulação Kuhn-Tucker para um problema de *minimização* condicionada.

18.7 EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Aplicação: Uma Firma Maximizadora de Vendas com Propaganda

Para determinar o efeito de tais itens como propaganda, maximização de vendas, impostos e restrições governamentais sobre o comportamento ótimo de uma firma utilizamos princípios de programação. Encerramos este capítulo com dois exemplos de tais estudos.

Suponha que a política de uma firma é determinada por um gerente cuja função objetivo é maximizar vendas, ou seja, receita, sem deixar o lucro cair abaixo de algum nível estabelecido. Para incrementar o problema, vamos acrescentar um custo com propaganda $a \in \mathbf{R}_+$. Seja $R(y, a)$ a receita da firma quando o nível de produção é $y \in \mathbf{R}_+$ e o custo com a propaganda é

$a \in \mathbf{R}_+$. Seja $C(y)$ o custo de manufaturar y unidades do produto. Vamos supor que C e R são funções C^1, que $C' > 0$ e que $\partial R/\partial a > 0$. Nosso problema de programação é maximizar $R(y, a)$ sujeita às restrições

$$\Pi \equiv R(y,a) - C(y) - a \geq m, \qquad y \geq 0, \qquad a \geq 0.$$

Considere que (y^*, a^*) é uma solução ótima com $y^* > 0$. Forme o lagrangiano

$$L(y,a;\lambda_1,\lambda_2) \equiv R(y,a) + \lambda_1 a - \lambda_2\big(m - R(y,a) + C(y) + a\big).$$

Supondo que a QRND vale em (y^*, a^*), as condições de primeira ordem são

$$\frac{\partial L}{\partial y} = (1+\lambda_2)\frac{\lambda R}{\lambda y} - \lambda_2 C'(y) = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = (1+\lambda_2)\frac{\partial R}{\partial a} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{42}$$

$$\lambda_1 a = 0 \ \text{ e } \ \lambda_2\big(m - R(y,a) + C(y) + a\big) = 0. \tag{43}$$

Como $\partial R/\partial a > 0$ e $\lambda_2 \geq 0$ em (42), temos $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$. Como $\lambda_1 \geq 0$, λ_2 deve ser estritamente positivo. Logo, $\Pi(y^*, a^*) = m$; *o lucro obtido é o lucro mínimo permitido.*

Como $\lambda_2 > 0$ e $C'(y^*) > 0$ em (41), temos $\partial R/\partial y > 0$ e a receita marginal é positiva no nível ótimo. Por outro lado, o lucro marginal $\partial\Pi/\partial y$ é negativo em (y^*, a^*) pois, por (41),

$$\begin{aligned}(1+\lambda_2)\frac{\partial \Pi}{\partial y}(y^*,a^*) &= (1+\lambda_2)\left(\frac{\partial R^*}{\partial y} - C'(y)\right)\\ &= \frac{\partial L}{\partial y}(y^*,a^*) - C'(y^*)\\ &= 0 - C'(y^*) < 0\\ &< 0.\end{aligned}$$

?

Conseqüentemente, *o nível de produção y^* é maior do que o nível de produção na situação de maximização de lucro.*

Aplicação: O Efeito Averch-Johnson

Considere o efeito de uma restrição reguladora por taxa de retorno sobre o comportamento de uma firma monopolista que usa capital e trabalho para produzir uma única mercadoria. Neste caso, o preço cobrado pela firma está sujeito ao controle governamental, na medida em que uma agência reguladora garante que, depois de a firma subtrair as despesas operacionais de suas receitas, a receita líquida remanescente deve ser exatamente suficiente para compensar o investimento em instalação e equipamento da própria firma. Este exemplo é devido a H. Averch e L. Johnson (ver notas ao final do capítulo), que aplicaram sua análise à regulamentação da indústria telefônica e telegráfica pela Comissão Federal de Comunicações dos EUA.

Seja $y = f(x_1, x_2)$ a quantidade de produto produzido com x_1 unidades de capital e x_2 unidades de trabalho. Suponha que a produção requer quantidades positivas tanto do trabalho quanto de capital, ou seja, que $y = 0$ se $x_1 = 0$ ou se $x_2 = 0$. Sejam $p(y)$ a função demanda inversa e $R(y) = p(y)y$ a receita da venda de y unidades de produto. Sejam r_1 o custo dos juros envolvidos em manter uma unidade de instalação e equipamento e c_1 o custo de aquisição de uma unidade de instalação e material. Seja r_2 o salário pago por unidade de trabalho. Para simplificar, escolha as unidades de tal modo que $c_1 = 1$.

O valor do capital utilizado na produção é c_1x_1, o custo total do trabalho é r_2x_2 e $(R(y) - r_2x_2)/c_1x_1$ é a taxa de retorno em instalação e equipamento. A restrição reguladora é expressa pelo fato de existir uma constante $s_1 > 0$ tal que

$$\frac{R(y)-r_2x_2}{c_1x_1} \le s_1 \tag{44}$$

Supondo que o objetivo da firma é maximizar lucro, ela encara o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \pi = R\big(f(x_1,x_2)\big) - r_1x_1 - r_2x_2 \\ &\text{sujeito a } R\big(f(x_1,x_2)\big) - r_2x_2 - s_1x_1 \le 0 \\ &\qquad\qquad x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{45}$$

Escrevemos $R^*(x_1, x_2)$ para a receita da firma como função dos insumos, em vez de $R(f(x_1, x_2))$. Consideremos que R^* tem regularidade suficiente para satisfazer a QRND nas soluções de (45). O lagrangiano para o problema (45) é

$$L = R^*(x_1,x_2) - r_1x_1 - r_2x_2 - \lambda\big(R^*(x_1,x_2) - r_2x_2 - s_1x_1\big) + v_1x_1 + v_2x_2$$

As condições necessárias para a otimização são a existência de λ, v_1 e v_2, todos não-negativos, tais que

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = (1-\lambda)\frac{\partial R^*}{\partial x_1} - r_1 + \lambda s_1 + v_1 = 0 \tag{46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = (1-\lambda)\frac{\partial R^*}{\partial x_2} - (1-\lambda)r_2 + v_2 = 0 \tag{47}$$

$$\lambda\big(R^*(x_1,x_2) - r_2x_2 - s_1x_1\big) = 0 \quad v_1x_1 = 0 \quad \text{e} \quad v_2x_2 = 0 \tag{48}$$

Primeiro afirmamos que, para que a firma realize algum lucro, a taxa de retorno s_1 permitida deve ser maior do que o custo do capital r_1. Suponha que $s_1 \le r_1$. Então,

$$\begin{aligned} \pi &= R^*(x_1,x_2) - r_1x_1 - r_2x_2 \\ &= \big(R^*(x_1,x_2) - s_1x_1 - r_2x_2\big) + (s_1 - r_1)x_1 \\ &\le 0 + (s_1 - r_1)x_1 \quad \text{(por (44))} \\ &\le 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos considerar que $s_1 > r_1$ e que x_1 e x_2 são positivos, caso em que $v_1 = v_2 = 0$. Isto também significa que $\lambda \ne 1$ em (46). Afirmamos que λ deve ser menor do que 1. Para observar isso, escolha s_1 tão grande que a restrição reguladora seja ineficaz, isto é, que $\lambda = 0$. À medida que s_1 tende de volta a r_1, λ varia continuamente, mas sem jamais alcançar 1. Conseqüentemente, $0 \leq \lambda < 1$.

Como $n_2 = 0$ e $1 - \lambda \neq 0$ em (47),

$$\frac{\partial(p(y)y)}{\partial x_2} = r_2$$

como na situação desregulada. Por (46),

$$\begin{aligned}\frac{\partial(p(y)y)}{\partial x_1} &\leq \frac{r_1 - \lambda s_1}{1-\lambda}\\ &= r_1 - \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda)}r_1 + \frac{r_1 - \lambda s_1}{1-\lambda}\\ &= r_1 - \frac{\lambda(s_1 - r_1)}{1-\lambda}\end{aligned}$$

Se $\lambda > 0$, de modo que a restrição reguladora é ativa, então $\lambda/(1 - \lambda) > 0$. Como também $s_1 - r_1 > 0$

$$r_1 > \frac{\partial(p(y)y)}{\partial x_1}$$

no máximo. Portanto, o insumo de capital é tal que seu custo marginal é maior do que o lucro marginal produzido. A firma substitui capital por trabalho e opera num nível de produção em que o custo não é minimizado. Assim, a restrição reguladora distorce as proporções relativas eficientes entre capital e trabalho que seriam utilizadas na ausência da restrição reguladora.

Mais um Exemplo Detalhado

Encerramos este capítulo sobre condições de primeira ordem desenvolvendo por extenso a solução de um problema de maximização condicionada bastante complexo, com uma restrição de desigualdade e duas restrições de não-negatividade.

Exemplo 18.13 Considere o problema de maximizar $f(x, y) = x^2 + x + 4y^2$ sujeita às restrições de desigualdade

$$2x + 2y \leq 1 \qquad x \geq 0 \qquad \text{e} \qquad y \geq 0$$

A matriz jacobiana das funções de restrição é

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

No máximo duas restrições podem ser ativas ao mesmo tempo e qualquer submatriz 2×2 desta jacobiana tem posto 2. Portanto, para qualquer candidato a solução, vale a QRND. Forme o lagrangiano

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = x^2 + x + 4y^2 - \lambda_1(2x+2y-1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$$

onde tratamos as restrições de não-negatividade como no exemplo anterior. Em seguida, escreva as condições de primeira ordem:

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+1-2\lambda_1+\lambda_2 = 0$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 8y-2\lambda_1+\lambda_3 = 0$

3) $\lambda_1(2x+2y-1)=0$

4) $\lambda_2 x = 0$

5) $\lambda_3 y = 0$

6) $\lambda_1 \geq 0$

7) $\lambda_2 \geq 0$

8) $\lambda_3 \geq 0$

9) $2x+2y\leq 1$

10) $x \geq 0$

11) $y \geq 0$

Escrevemos a condição 1 sem o sinal de menos como $2x + 1 + \lambda_1 = 2\lambda_1$. Junto com as condições 7 e 10, esta equação implica $2\lambda_1 \geq 1 > 0$ e isto, pela condição 3, implica que a primeira relação é ativa:

$$2x + 2y = 1 \tag{49}$$

Agora precisamos examinar alguns casos. Primeiro consideramos o caso $\lambda_2 > 0$. Neste caso, a partir da condição 4, $x = 0$; da equação (49), $y = 0{,}5$ e, da condição 5, $\lambda_3 = 0$. Substituindo $y = 0{,}5$ e $\lambda_3 = 0$ na condição 2, obtemos $\lambda_1 = 2$. Substituindo $x = 0$ e $\lambda_1 = 2$ na condição 1, obtemos $\lambda_2 = 3$. Assim, supondo que $\lambda_2 > 0$, chegamos ao candidato

$$(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0;\ 0{,}5;\ 2;\ 3;\ 0).$$

Agora vamos tentar o caso oposto: $\lambda_2 = 0$. Combinando as condições 1 e 2, encontramos

$$2x+1+\lambda_2 = 8y+\lambda_3 = 2\lambda_1 \tag{50}$$

Substituindo $\lambda_2 = 0$ e $2x = 1 - 2y$ da equação (49), obtemos

$$1-2y+1 = 8y+\lambda_3 \quad \text{ou} \quad 2 = 10y+\lambda_3$$

Combinando a última equação com a condição 5, somos levados à conclusão que ou bem $y = 0$ ou bem $\lambda_3 = 0$, mas não ambos. Se $y = 0$, então $\lambda_3 = 2$; pela equação (49), resulta $x = 0{,}5$ e, pela equação (50), $\lambda_1 = 1$. Se, em vez disso, $\lambda_3 = 0$, então $y = 0{,}2$, $x = 0{,}3$ e $\lambda_1 = 0{,}8$. Conseqüentemente, o caso $\lambda_2 = 0$ leva aos dois candidatos

$$(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{cases} (0{,}5;\ 0;\ 1;\ 0;\ 2) & \text{ou} \\ (0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}8;\ 0;\ 0). \end{cases}$$

Calculando a função objetivo em cada um destes três candidatos, vemos que o máximo condicionado ocorre no ponto $x = 0$, $y = 0{,}5$, onde $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$.