Lista 3 - Ciclo Reais de Negócios (RBC)
Gabarito

Exercício 1 (RBC)

Este exercício apresenta uma discussão sobre alguns aspectos teóricos subjacentes à construção dos modelos de Real Business Cycle (RBC). Antes de mais nada, devemos apresentar as hipóteses dessa questão:

- **Tempo:** o tempo é discreto, $t = 0, 1, 2, \ldots$, e o horizonte é infinito.
- **Preferências:** a economia é composta por um continuum de indivíduos iguais que vivem infinitamente e maximizam seu fluxo esperado de utilidade, dado por $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$, em que $\beta \in (0, 1)$. Supõe-se que $u(c, l)$ é côncava e crescente no consumo c e no lazer l, e duas vezes continuamente diferenciável.
- **Dotações:** a única dotação de cada indivíduo é uma unidade de tempo, que pode ser dividida entre trabalho n e lazer l.
- **Tecnologia:** $F(K, N)$ é duas vezes continuamente diferenciável, côncava e homogênea de grau 1. Além disso, $F(K, N)$ satisfaz as condições de Inada com respeito ao capital. Supomos que o produto da economia pode ser usado para consumo ou investimento, $y_t = c_t + i_t$, e que o capital se deprecia a uma taxa $\delta \in (0, 1)$, sem crescimento.
- **Incerteza:** o produto y_t é dado por $y_t = A_t F(K_t, N_t)$, em que A_t é um choque aleatório de produtividade, cuja lei de movimento é dada por $\ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t$, em que $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e $\rho \in (0, 1)$.

Tendo em vista as hipóteses acima, responda aos itens abaixo.

(a) Monte o problema do planejador central na versão sequencial e na versão recursiva. Obtenha as condições de primeira ordem do problema recursivo e monte o sistema de equações que permite caracterizar as funções políticas de capital, consumo e de oferta de trabalho.

Resposta:

O problema do planejador na formulação sequencial é dada por

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\{C_t, K_{t+1}, N_t\}_{t=0}^{\infty}} & \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, u(C_t,\, 1 - N_t) \right] \\
\text{s.t.} & C_t + K_{t+1} \leq A_t F(K_t, N_t) + (1-\delta) K_t \quad \forall\, t, \\
& K_0,\, C_t \geq 0, \qquad N_t \in [0, 1], \\
& \ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t
\end{cases}
$$

O problema do planejador na formulação recursiva é dada por

$$\mathcal{V}(K, A) = \begin{cases} \max\limits_{C, K', N} & u(C,\, 1-N) + \beta\, \mathbb{E}\big[\mathcal{V}(K', A') \,\big|\, A\big] \\ \text{s.t.} & C + K' \leq AF(K, N) + (1-\delta)K, \\ & C \geq 0, \qquad N \in [0, 1], \\ & \ln A' = \rho \ln A + \varepsilon' \end{cases}$$

O Lagrangiano da formulação recursiva é dada por

$$\mathscr{L} = u(C, 1-N) + \beta\mathbb{E}[\mathcal{V}(K', A')|A] + \lambda[AF(K, N) + (1-\delta)K - C - K']$$

Que nos dá as condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \text{[C]: } & u_c(C, 1-N) + \lambda[-1] = 0, \\ \text{[N]: } & u_n(C, 1-N)(-1) + \lambda\,[AF_n(K, N)] = 0, \\ \text{[K}'\text{]: } & \beta\, \mathbb{E}[V_k(K', A') \,|\, A] + \lambda[-1] = 0. \end{aligned}$$

Então, com o teorema do envelope, temos:

$$V_k(K, A) = u_c(C, 1-N)\,\big[AF_k(K, N) + (1-\delta)\big].$$

Dessa forma, o sistema dinâmico fica caracterizado por:

$$\begin{cases} \beta\, \mathbb{E}\big[u_c(C', 1-N')\,\big(A'F_k(K', N') + (1-\delta)\big) \,\big|\, A\big] = u_c(C, 1-N), \\ u_n(C, 1-N) = u_c(C, 1-N)\,[AF_n(K, N)], \\ C + K' \leq AF(K, N) + (1-\delta)K. \end{cases}$$

(b) Suponha que os consumidores sejam donos do estoque de capital e que façam três decisões inter-relacionadas: quanto trabalho oferecer n, quanto capital acumular k' e quanto consumir c. Monte o problema do consumidor representativo na versão recursiva e o problema da firma. Defina um equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.

Resposta:

A nova função valor do consumidor será

$$\mathcal{W}(k, K, A) = \begin{cases} \max\limits_{c,k',n} & u(c,\, 1-n) + \beta\, \mathbb{E}\big[\mathcal{W}(k, K', A') \,\big|\, A, K\big] \\ \text{s.t.} & c + k' \le w(K, A)n + r(K, A)\cdot k + (1-\delta)k, \\ & c \ge 0, \qquad n \in [0, 1], \\ & K' = \mathcal{G}(K, A) \\ & \ln A' = \rho \ln A + \varepsilon' \end{cases}$$

A firma representativa resolve o problema, período a período,

$$\max_{K,N} \quad \Pi = AF(K, N) - w(K, A)N - r(K, A)K$$

Que satisfazem as condições de primeira ordem

$$\text{[K]: } AF_k(K, N) - r(K, A) = 0,$$
$$\text{[N]: } AF_n(K, N) - w(K, A) = 0,$$

Note, então, que a condição de market clearing de trabalho é tal que

$$N(K, A) = n(K, A)$$

Equilíbrio competitivo recursivo (ECR). Um ECR é um conjunto

$$\{\, \mathcal{W},\, c(\cdot), n(\cdot), k'(\cdot),\; w(\cdot), r(\cdot),\; \mathcal{G}(\cdot)\,\}$$

tal que, para todo (K, A):

(i) **Ótimo do consumidor:** dadas $w(K, A), r(K, A)$ e $K' = \mathcal{G}(K, A)$, as políticas $c(k, K, A)$ e $n(k, K, A)$, $k'(k, K, A)$ resolvem o problema acima e satisfazem as FOCs.

(ii) **Preços competitivos:** $w(K, A) = A\, F_N\big(K, N(K, A)\big)$ e $r(K, A) = A\, F_K\big(K, N(K, A)\big)$.

(iii) **Fechamento de mercados:**

$$N(K, A) = n(K, A), \qquad K = k,$$

$$c(K,A) + K' \;=\; A\,F\big(K,\,n(K,A)\big) + (1-\delta)\,K.$$

(iv) **Consistência agregada:**

$$K' = \mathcal{G}(K,A) = k'(K,K,A).$$

Observação. No RBC básico, N é controle intraperíodo (não estado). A dependência dos preços em (K,A) já incorpora a determinação de N via $N(K,A) = n(K,A)$.

(c) Obtenha as condições de primeira ordem dos problemas do item 2. O que pode ser afirmado a respeito da conexão entre os problemas dos itens anteriores? Você pode apenas argumentar o que seria feito para demonstrar a equivalência entre os problemas.

Resposta:

O Lagrangiano do problema é dado por

$$\mathscr{L} = u(c, 1-n) + \beta\mathbb{E}[\mathcal{W}(k', K', A)|A, K] + \lambda[w(A,K)n + r(A,K)k + (1-\delta)k - c - k']$$

com as condições de primeira ordem

$$\begin{aligned}
[c] &: u_c(c, 1-n) + \lambda[-1] = 0,\\
[n] &: u_n(c, 1-n)(-1) + \lambda[w(A,K)] = 0,\\
[k'] &: \beta\mathbb{E}[\mathcal{W}_k(k', K', A')|A, K] + \lambda[-1] = 0,
\end{aligned}$$

E pelo teorema do envelope, temos

$$\mathcal{W}_k(k, K, A) = u_c(c, 1-n)[r(A,K) + (1-\delta)]$$

Dessa forma, o sistema dinâmico fica caracterizado por:

$$\begin{cases}
u_c(c, 1-n) = \beta\mathbb{E}[u_c(c', 1-n')[r(A', K') + (1-\delta)]|A, K],\\
u_n(c, 1-n) = u_c(C, 1-n)\,[w(A,K)],\\
c + k' \leq w(A,K)n + r(A,K)k + (1-\delta)k.
\end{cases}$$

Note que, substituindo as expressões de salário e juros pelas CPOs da firmas, temos o mesmo sistema do problema do planejador, refletindo o Primeiro e o Segundo Teorema do Bem-Estar.

(d) Suponha, agora, que exista um governo nessa economia e que ele cobra impostos sobre a renda do trabalho por meio de uma taxa τ, que pode ser uma função do estado agregado. O governo pega essa receita e gasta com bens públicos que não geram utilidade diretamente para o agente representativo. Diante dessa alteração, repita o que foi feito no item (b).

Resposta:

O problema da firma não muda. O problema do consumir é, então, dado por

$$\mathcal{U}(k, K, A) = \begin{cases} \max\limits_{c,k',n} & u(c,\, 1-n) + \beta\, \mathbb{E}\big[\mathcal{U}(k, K', A') \,\big|\, A, K\big] \\ \text{s.t.} & c + k' \leq (1-\tau(K,A))w(K,A)n + r(K,A)\cdot k + (1-\delta)k, \\ & c \geq 0, \qquad n \in [0,1], \\ & K' = \mathcal{G}(K,A) \\ & \ln A' = \rho \ln A + \varepsilon' \end{cases}$$

Equilíbrio competitivo recursivo (ECR). Um ECR é um conjunto

$$\{\, \mathcal{W},\, c(\cdot), n(\cdot), k'(\cdot),\ w(\cdot), r(\cdot),\ \mathcal{G}(\cdot)\, \tau(\cdot)\}$$

tal que, para todo (K, A):

(i) **Ótimo do consumidor:** dadas $w(K,A), r(K,A)$, $\tau(K,A)$ e $K' = \mathcal{G}(K,A)$, as políticas $c(k,K,A)$ e $n(k,K,A)$, $k'(k,K,A)$ resolvem o problema acima e satisfazem as FOCs.

(ii) **Preços competitivos:** $w(K,A) = A\, F_N\big(K, N(K,A)\big)$ e $r(K,A) = A\, F_K\big(K, N(K,A)\big)$.

(iii) **Fechamento de mercados:**

$$N(K,A) = n(K,A), \qquad K = k,$$

$$c(K,A) + K' \ = \ A\, F\big(K,\, n(K,A)\big) + (1-\delta)\, K.$$

(iv) **Consistência agregada:**

$$K' = \mathcal{G}(K,A) = k'(K,K,A).$$

(e) A alocação eficiente referente ao problema do item (d) coincidirá com as alocações de equilíbrio do item correspondente? Justifique. Algo mudaria se o governo transferisse a receita desses impostos de forma proporcional ao consumo entre os agentes, em vez de gastar em bens públicos?

Resposta:

Exceto pelo caso trivial, i.e. $\tau(A, K) = 0$, a imposição de um imposto sobre a renda do trabalho altera o preço relativo do trabalho e do consumo, de forma que as alocações serão distintas em ambos os problemas.

Para melhor visualizar isso, observe que o problema do planejador seria dado por

$$\mathcal{U}^P(K, A) = \begin{cases} \max\limits_{C, K', N} & u(C,\, 1 - N) + \beta\, \mathbb{E}\big[\mathcal{U}^P(K', A') \,\big|\, A'\big] \\ \text{s.t.} & C + K' + G \leq AF(K, N) + (1 - \delta)K, \\ & C \geq 0, \qquad N \in [0, 1], \\ & \ln A' = \rho \ln A + \varepsilon' \end{cases}$$

Observe que incorporamos o gasto público diretamente na restrição orçamentária. A CPO desse caso é dada por:

$$\begin{aligned} u_c(C, 1 - N) &= \beta \mathbb{E}[u_c(C', 1 - N')[A' F_K(K', N') + (1 - \delta)]|A] \\ u_N(C, 1 - N) &= u_c(C, 1 - N) A F_N(K, N) \end{aligned}$$

E repare como é diferente das CPOs do caso descentralizado

$$\begin{aligned} u_c(c, 1 - n) &= \beta \mathbb{E}[u_c(c', 1 - n')[1 + r(K, A) + (1 - \delta)]|A] \\ u_N(c, 1 - n) &= u_c(c, 1 - n)(1 - \tau(K, A)) w(K, A) \end{aligned}$$

Dessa forma, mesmo se substituirmos pela política ótima da firma, não teremos a equivalência entre o problema descentralizado e o centralizado.

Exercício 2 (RBC sem Capital - P1, 2024)

Suponha uma seguinte economia com horizonte infinito e incerteza descrita abaixo:

- **Preferências:**

$$\mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \psi \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \right\}$$

- **Tecnologia:**

$$\begin{aligned} Y_t &= A_t L_t \\ C_t &\leq Y_t \\ \ln A_t &= \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim \text{ iid } \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

Suponha que, apesar da inexistência de capital, existe um mercado intertemporal aberto. Neste mercado são negociados títulos que dão direito a uma unidade de consumo no período seguinte, independente de qual estado seja realizado. Estes títulos sõa negociados aos preços $q(s^t)$ na história s^t e estão disponíveis em oferta líquida zero.

(a) Escreva o problema do agente representativo em uma implementação descentralizada e defina um equilíbrio competitivo (não recursivo).

Resposta:

O problema das firmas é dado por

$$\max_{L_t(s^t)} A_t L_t(s^t) - w(s^t) L_t(s^t)$$

Com a condição de primeira ordem que $w(s^t) = A_t$

E o problema do agente representativo é dado por

$$\begin{cases} \max\limits_{C_t(s^t), L_t(s^t), a_{t+1}(s^t)} & \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \psi \frac{L_t(s^t)^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\ \text{s.t.} & C_t(s^t) + q(s^t) a_{t+1}(s^t) = w(s^t) L_t(s^t) + a_t(s^t) \\ & \ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \\ & \varepsilon_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{cases}$$

Um equilíbrio competitivo consiste nas sequências de consumo $\{C_t(s^t)\}_{t,s^t}$, de trabalho $\{L_t(s^t)\}_{t,s^t}$, de ativos $\{a_t(s^t)\}_{t,s^t}$, de preços $\{w(s^t)\}_{t,s^t}$ e $\{q(s^t)\}_{t,s^t}$ tais que:

- Dado os preços, as sequências $\{C_t(s^t)\}_{t,s^t}$ e $\{L_t(s^t)\}_{t,s^t}$ resolvem o problema dos agentes,
- O salário resolve o problema da firma (i.e., $\{w_t(s^t)\}_{t,s^t} = \{A_t\}_{t,s^t}$),
- Há market-clearing $\{a_t(s^t)\}_{t,s^t} = \{0\}_{t,s^t}$ (pois não há capital)

(b) Caracterize a alocação de equilíbrio competitivo de forma mais completa possível.

Resposta:

Da condição de primeira ordem do agente, obtemos

$$
\begin{aligned}
[C_t] &: \beta^t C_t^{-\gamma} + \lambda[-1] = 0, \\
[L_t] &: -\beta^t \psi L_t^{\phi} + \lambda\,[A_t] = 0, \\
[a_{t+1}] &: \lambda_t[-q(s^t)] + \lambda_{t+1}[1] = 0
\end{aligned}
$$

Todo o produto irá para o consumo (já que não há capital), então $C_t = Y_t = A_t L_t$. O equilíbrio de oferta de trabalho é dado, então, por:

$$
\psi L_t^{\phi} = A_t C_t^{-\gamma} \quad \Rightarrow \quad L_t = \psi^{-\frac{1}{\gamma+\phi}} A_t^{\frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}}
$$

E também o consumo

$$
C_t = A_t L_t \quad \Rightarrow \quad C_t = \psi^{-\frac{1}{\gamma+\phi}} A_t^{\frac{1+\phi}{\gamma+\phi}}
$$

Da equação de Euler temos que

$$
C_t^{\gamma} = \frac{1}{q(s^t)} \beta \mathbb{E}[C_{t+1}^{-\gamma}]
$$

Reorganizando e substituindo o consumo por nosso resultado:

$$
1 = \frac{1}{q(s^t)} \beta \mathbb{E}\left[\left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}} \right]
$$

Substituindo pela lei de movimento de A_{t+1} temos

$$
1 = \frac{1}{q(s^t)} \beta \mathbb{E}\left[(A_t^{\rho-1} e^{\varepsilon_t+1})^{-\frac{\gamma(1-\phi)}{\gamma+\phi}} \right]
$$

E caracterizamos o equilíbrio.

(c) Como o emprego responde a um choque positivo de produtividade? Como esta resposta depende de γ e de ρ? Explique.

Resposta:

Pela equação de oferta de trabalho, temos que

$$\frac{\partial L_t}{\partial A_t} = \underbrace{\psi^{-\frac{1}{\gamma+\phi}}}_{>0} \underbrace{\left[A_t^{\frac{1-2\gamma-\phi}{\gamma+\phi}}\right]}_{>0} \underbrace{\left[\frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}\right]}_{>0}$$

Observe que o efeito sera positivo se $\gamma > 1$, caso contrário, será menor. Além disso, simplificando que $A_{t+1} \approx A_t^{\rho}$, temos que

$$\frac{\partial L_{t+1}}{\partial A_t} = \psi^{-\frac{1}{\gamma+\phi}} \left[A_t^{\frac{(1-\gamma)\rho-\gamma-\phi}{\gamma+\phi}}\right] \rho \left[\frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}\right]$$

Ou seja, é bem similar, exceto por um pequeno desconto (ρ). Ou seja, suaviza o choque de forma a aproximar mais do steady state.

A interpretação é que um choque positivo de produtividade aumenta a oferta de trabalho (efeito substituição), mas é negativamente influenciado por γ, guardando parte do efeito renda.

Em outras palavras, o choque de TFP aumenta a produtividade marginal do trabalho e, com isso, o salário. Logo, o agente tem estímulo maior a trabalhar e consumir mais (efeito substituição). No entanto, a utilidade do consumo é côncava e a desutilidade do trabalho é convexa (então um vai crescendo cada vez mais devagar, enquanto o outro vai crescendo cada vez mais rápido). De forma que, depois de certo nível, não compensa mais substituir lazer por consumo. Daí que entra γ e ϕ: γ captura a concavidade do consumo, enquanto ϕ captura a convexidade do trabalho. Portanto, maior γ, menor é a utilidade marginal do consumo e mais custoso é abrir mão do lazer.

O efeito de ρ se dá apenas no tempo esperado para retornar ao estado estacionário. Ou seja, não se espera que ela influence na escolha de oferta de trabalho, pois essa sai de uma escolha no período corrente.

(d) Como a taxa de juros livre de risco $(1 + r^f = 1/q(s^t))$ responde a um choque positivo de produtividade? Explique.

Resposta:

Observe que toda a produção no período t depende de L_t e de A_t. Se temos um choque positivo de produtividade, a produção/consumo é maior. Similarmente ao item anterior, quanto maior for o γ mais o agente deseja poupar para o futuro (em que sabe que o efeito do choque positivo será um pouco menor), e portanto vai consumir menos hoje (i.e., maiores valores de γ implicam em um salto menor de r^f).

Por outro lado, quanto mais persistente for o choque, mais tempo o agente ficará se sentindo "rico", e o produto futuro será mais próximo ao de hoje, então o efeito do salto será mais ou menos duradouro (mas ainda assim, não deve mudar o nível do salto).

Exercício 3 (Simulação de RBC)

Em aula, vimos uma solução analítica para o seguinte modelo de RBC:

$$
\begin{aligned}
\max_{C_t, N_t, I_t} \quad & \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln C_t + \chi \ln(1 - N_t) \right] \right\} \\
\text{s.a.} \quad & C_t + I_t = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \\
& K_{t+1} = I_t \\
& \ln z_t = \rho \ln z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)
\end{aligned}
$$

Ou seja, fizemos hipóteses específicas sobre a função utilidade e a depreciação completa do capital. Neste modelo, chegamos à representação do log do produto como um processo AR(2):

$$
\ln Y_{t+1} = (1 - \rho)\Gamma + (\rho + \alpha) \ln Y_t - \alpha\rho \ln Y_{t-1} + \sigma \varepsilon_{t+1}
$$

em que $\Gamma \equiv \alpha \ln s + (1 - \alpha) \ln \overline{N}$ e $\ln z_{t+1} = \rho \ln z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}$. O código base para a realização deste exercício se encontra na wiki.

(a) Compute as autocorrelações de primeira e segunda ordem do log do produto.

Resposta:

Conseguimos calcular o valor das correlações pelo código. Mas conseguimos também encontrar os valores "na mão". Primeiro, observe que $\ln Y_t$ é um processo estacionário. Podemos ver isso ao avaliar a eq. característica

$$
\lambda^2 - (\rho + \alpha)\lambda + \alpha\rho = 0
$$

Com as raízes $\lambda_1 = \rho < 1$ e $\lambda_2 = \alpha < 1$. Agora podemos calcular as correlações de primeira e de segunda ordem (por meio das equações de Yule-Walker). Temo os sistema

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y_t\, Y_t] = (\alpha+\rho)\, \mathbb{E}[Y_{t-1}\, Y_t] - \alpha\rho\, \mathbb{E}[Y_{t-2}\, Y_t] + \sigma\, \mathbb{E}[Y_t\, \varepsilon_t], \\ \mathbb{E}[Y_t\, Y_{t-1}] = (\alpha+\rho)\, \mathbb{E}[Y_{t-1}\, Y_{t-1}] - \alpha\rho\, \mathbb{E}[Y_{t-2}\, Y_{t-1}] + \sigma\, \mathbb{E}[Y_{t-1}\, \varepsilon_t], \\ \mathbb{E}[Y_t\, Y_{t-2}] = (\alpha+\rho)\, \mathbb{E}[Y_{t-1}\, Y_{t-2}] - \alpha\rho\, \mathbb{E}[Y_{t-2}\, Y_{t-2}] + \sigma\, \mathbb{E}[Y_{t-2}\, \varepsilon_t]. \end{cases}$$

Pela definição, as covariâncias de séries estacionárias são tais que $\mathbb{E}[Y_t\, Y_{t-s}] = \mathbb{E}[Y_{t-s}\, Y_t] = \mathbb{E}[Y_{t-k}\, Y_{t-k-s}] = \gamma_s$. Além disso $\mathbb{E}[Y_t\, \varepsilon_t] = 1$ e $\mathbb{E}[Y_{t-s}\, \varepsilon_t] = 0$ (por ε serem iids). Então o sistema simplifica para

$$\begin{cases} \gamma_0 = (\alpha+\rho)\gamma_1 - \alpha\rho\gamma_2 + \sigma^2, \\ \gamma_1 = (\alpha+\rho)\gamma_0 - \alpha\rho\gamma_1, \\ \gamma_2 = (\alpha+\rho)\gamma_1 - \alpha\rho\gamma_0. \end{cases}$$

Conseguimos deixar γ_1 e γ_2 em função de γ_0:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\alpha+\rho}{1+\alpha\rho}\gamma_0, \\ \gamma_2 = \left(\dfrac{(\alpha+\rho)^2}{1+\alpha\rho} - \alpha\rho \right) \gamma_0. \end{cases}$$

Usando a identidade que $Corr(Y_t, Y_{t-s}) = \gamma_s/\gamma_0$, concluímos que

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\alpha+\rho}{1+\alpha\rho} \qquad Corr(Y_t, Y_{t-2}) = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{(\alpha+\rho)^2}{1+\alpha\rho} - \alpha\rho$$

Substituindo os valores que estão no código, obtemos:

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) \approx 0.95 \qquad Corr(Y_t, Y_{t-2}) \approx 0.87$$

(b) Agora, volte ao modelo e veja como as variáveis se relacionam. Compute as autocorrelações de primeira ordem do consumo, investimento, horas trabalhadas, e TFP (resíduo de Solow). Use as variáveis em log.

Resposta:

Usando os resultados da aula, temos que $C_t = (1-\alpha\beta)Y_t$ e $K_{t+1} = \alpha\beta Y_t$. Aplicando o log, temos que

$$\begin{cases} \ln C_t = \ln(1-\alpha\beta) + \ln Y_t, \\ \ln K_{t+1} = \ln(\alpha\beta) + \ln Y_t \end{cases}$$

Observe que $\ln C_t$ e $\ln K_{t+1}$ são lineares (e com coeficiente 1) em $\ln Y_t$, portanto herdarão as mesmas autocorrelações de Y_t, pois nada mais são do deslocamentos de $\ln Y_t$.

Apesar que conseguimos aproximar numericamente o valor da correlação de ρ, também conseguimos uma expressão analítica para ele. Como o processo é estacionário, podemos reescrevê-lo como um processo MA(∞):

$$\ln Z_t = \sigma \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$$

Sabendo que a covariância entre os termos ε é 0 (pois são iids), temos que a variância é dada por

$$V(\ln Z_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^2 i = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

E a covariância entre o processo é dado por:

$$Cov(\ln Z_t, \ln Z_{t-1}) = Cov(\rho \ln Z_{t-1} + \sigma\varepsilon_t, \ln Z_t) = \rho\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

E, portanto, a correlação é dada por $Corr(\ln Z_t, \ln Z_{t-1}) = \rho$.

(c) Compute o desvio padrão das variáveis do item anterior, assim como o produto. Discuta quanto da variação do (log do) produto é associada à variação de horas, estoque de capital e TFP (todas em logs). Dica: olhe para a função de produção, em logs.

Resposta:

Já temos a variância de $\ln Z_t$, falta ainda calcular a variância de $\ln Y_t$. Conseguimos isso ao recuperar γ_0. Do sistema de Yule-Walker, conseguimos

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (\alpha+\rho)\frac{\alpha+\rho}{1+\alpha\rho}\gamma_0 - \alpha\rho\left(\frac{(\alpha+\rho)^2}{1+\alpha\rho} - \alpha\rho\right)\gamma_0 \\ V(\ln Y_t) = \gamma_0 &= \frac{1}{1 - A + \alpha\rho A - \alpha^2\rho^2} \end{aligned}$$

Em que $A = \frac{(\alpha+\rho)^2}{1+\alpha\rho}$. Novamente, a variância do log do consumo e do log investimento será igual à variância do log do produto. A razão do desvio padrão será dada por

$$\frac{s(\ln Z_t)}{s(\ln Y_t)} = \frac{\sqrt{1 - A + \alpha\rho A - \alpha^2\rho^2}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

que no nosso caso dá que, aproximadamente, 70% da variação do produto está associada a variações de TFP.

(d) Como você interpretaria os resultados dos itens anteriores à luz dos fatos estilizados da literatura de *Real Business Cycles*?

Resposta:

Resultados da simulação e comparação com fatos estilizados. Primeiro, observamos o comportamento pró-cíclico do consumo e do investimento. Contudo, nas séries simuladas ambos exibem *praticamente a mesma volatilidade do produto*, o que contraria os fatos estilizados (em que o consumo é menos volátil e o investimento mais volátil do que Y). O mercado de trabalho permanece praticamente constante: como a solução analítica impõe oferta de trabalho inelástica, o modelo não gera pró-ciclicidade de horas.

Na decomposição da variância do produto, a TFP responde por cerca de 70% da variação de Y; o capital contribui essencialmente com zero, pois, com $K_{t+1} = I_t$, investimento e reposição de estoque coincidem; e, como N_t é fixo, horas não explicam a variação do produto. Por fim, a persistência do choque (ρ elevado) transmite-se para o produto via a representação AR(2).

- "*consumption is strongly procyclical and fluctuates about a third as much as output*" $\Rightarrow$ o consumo é pró-cíclico, mas, na simulação, sua volatilidade sai *igual* à do produto.
- "*investment is strongly procyclical and fluctuates about three times as much as output*" $\Rightarrow$ o investimento é pró-cíclico; entretanto, por ser construído como fração de Y nesta solução analítica, termina com $\sigma(I) \approx \sigma(Y)$, evidenciando a limitação dessa representação para volatilidades relativas.
- "*two-thirds of output fluctuations are accounted for by variations in the labor input, one-third by variations in TFP, and essentially zero by variations in capital input*" $\Rightarrow$ com N_t fixo, horas não contribuem para a variação de Y; a maior parte (aprox. 2/3, $\sim$ 70%) é atribuída à TFP, e o capital não tem papel relevante dado $K_{t+1} = I_t$.

Exercício 4 (Oferta de trabalho e RBC - P1, 2023)

Suponha uma economia sem capital com um agente representativo com preferências descritas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[C_t - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right]$$

em que N_t são horas trabalhadas e a produção é dada por

$$Y_t = Z_t N_t$$

e Z_t é uma sequência pré-determinada de TFP.

(a) Derive o efeito de equilíbrio de um choque de TFP sobre emprego, produto e a taxa de juros.

Resposta:

Como não há investimento, toda renda será utilizada em consumo. Nesse modelo sem investimento, a taxa de juros é determinada apenas pela preferência intertemporal do agente. De forma que, se pudesse levar consumo livremente entre os períodos, a qual taxa ficaria indiferente em fazer isso. Portanto, considere a equação de Euler.

$$u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1})$$

Isto é, a utilidade marginal de consumir hoje iguala a utilidade marginal de consumir amanhã descontando-se a preferência intertemporal (β) e o ganho pela taxa de juros $(1+r)$. Ora, sabemos que como a utilidade é linear no consumo, $u'(c_t) = u'(c_{t+1})$, e então, a taxa de juros que iguala essa identidade é $R \equiv (1+r) = 1/\beta$.

O problema, então, se resume em

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(Z_t N_t - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right)$$

Cuja condição de primeira ordem é

$$[N_t]: \quad N_t^{\phi} = Z_t \quad \Rightarrow N_t = Z_t^{\frac{1}{\phi}}$$

Sob o máximo, então, o produto é $Y_t = Z_t^{\frac{1+\phi}{\phi}}$. Os efeitos de um choque de TFP podem ser compreendidos como as derivadas parciais sob cada variável:

$$\frac{\partial N_t}{\partial Z_t} = \frac{1}{\phi} Z_t^{\frac{1-\phi}{\phi}} \quad \frac{\partial Y_t}{\partial Z_t} = \frac{1+\phi}{\phi} Z_t^{\frac{1}{\phi}} \quad \frac{\partial R_t}{\partial Z_t} = 0$$

(b) O que acontece se houver crescimento de longo prazo de Z_t?

Resposta:

Se $\phi > 0$, temos que $\lim_{Z_t \to \infty} Z_t^{\frac{1}{\phi}} = \infty$. Nesse caso, a desutilidade do trabalho é menor do que 1 (em específico, é decrescente no trabalho) e menor do que a utilidade marginal do consumo. Nesse caso, quanto maior for a produtividade, mais o agente gostaria de transformar trabalho em consumo.

Se $\phi < 0$, temos que $\lim_{Z_t \to \infty} Z_t^{\frac{1}{\phi}} = 0$. A ideia é similar, mas agora a desutilidade marginal do trabalho é maior do que a utilidade marginal do consumo, então o agente gostaria de cada vez menos transformar trabalho em consumo. De fato, frente a um aumento da produtividade, o agente prefere deixar o consumo constante e trabalhar menos do que deixar o trabalho constante e consumir mais.

No caso de $\phi = 0$ a utilidade marginal do consumo e a desutilidade marginal do trabalho são iguais, então não haverá troca entre um e outro caso aumente a TFP.

(c) Como preferências da forma

$$\ln(C_t) - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi}$$

afetariam o resultado acima? Interprete.

Resposta:

Agora teríamos uma concavidade na parte do consumo na utilidade de forma que

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln(Z_t N_t) - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right)$$

Cuja condição de primeira ordem é

$$[N_t] : \quad \frac{1}{N_t} - N_t^{\phi} = 0$$

Considerando que $\phi \neq -1$, o trabalho ofertado seria constante e igual a 1. De forma que apenas o consumo e produto variam com os choques de TFP.

(d) Em que medida o modelo com estas novas preferências teriam sucesso e insucesso em replicar os fatos estilizados de RBC?

Resposta:

O modelo falha em reproduzir vários dos fatos estilizados típicos dos modelos RBC. Em particular: (i) consumo pró-cíclico, com volatilidade inferior à do produto; (ii) investimento altamente pró-cíclico e mais volátil que o produto; (iii) horas trabalhadas explicando cerca de dois terços da variação do produto, enquanto flutuações em TFP respondem por aproximadamente um terço, e o capital não tendo impacto relevante.

No modelo analisado, a ausência de capital impede o investimento, a oferta de trabalho é inelástica e o consumo apresenta a mesma volatilidade do produto. Assim, dentre os fatos estilizados, apenas a pró-ciclicidade do consumo é replicada.

Exercício 5 (RBC log-linearizado)

Considere o problema do planejador central de maximizar uma utilidade

$$\mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log(c_t) + \log(l_t)\right] \right\}$$

sujeita a uma restrição de recursos

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t \quad \text{com } k_0 \text{ dado}$$

e uma restrição de dotação de tempo

$$n_t + l_t = 1$$

Suponha que o logaritmo do choque tecnológico siga um processo AR(1):

$$\log(z_{t+1}) = \rho \log(z_t) + \varepsilon_t, \quad \text{com } 0 < \rho < 1$$

onde $\{\varepsilon_{t+1}\}$ é um ruído branco Gaussiano, e a realização inicial z_0 é dada.

(a) Derive as condições de primeira ordem que caracterizam as escolhas ótimas de consumo, emprego e formação de capital.

Resposta:

Podemos substituir a restrição orçamentária na função objetivo como segue:

$$\mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\Big[\log\big(z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\big) + \log(1-n_t)\Big]\right\}.$$

Dessa forma, as condições de primeira ordem para trabalho e capital são

$$\begin{aligned}
[n_t]: \quad & \beta^t \frac{1}{c_t}(1-\alpha)\, z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} = \beta^t \frac{1}{1-n_t} \\
\Rightarrow \quad & \frac{c_t}{1-n_t} = (1-\alpha)\, z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[k_{t+1}]: \quad & \beta^t \frac{1}{c_t} = \mathbb{E}_t\left\{\beta^{t+1}\frac{1}{c_{t+1}}\Big(\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\Big)\right\} \\
\Rightarrow \quad & 1 = \mathbb{E}_t\left\{\beta\frac{c_t}{c_{t+1}}\Big(\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\Big)\right\}
\end{aligned}$$

em que a equação (1) é a condição intratemporal (TMS entre lazer e consumo) quando o salário real é

$$w_t \equiv (1-\alpha)\, z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha},$$

e a equação (2) é a equação de Euler padrão para acumulação de capital quando o retorno bruto do capital é

$$R_{t+1} \equiv \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta.$$

(b) Suponha que os parâmetros do modelo são esses descritos na tabela abaixo.

Símbolo	**Nome**	**Valor**
β	fator de desconto	0,99
α	fatia do capital na produção	0,33
δ	depreciação do capital	0,04
ρ	autocorrelação do choque de tecnologia	0,95

Encontre o estado estacionário determinístico.

Resposta:

Estado estacionário determinístico. Para encontrar o estado estacionário, imponha $\bar{z} = 1$ e $k_t = k_{t+1} = \bar{k}$. O retorno bruto do capital em estado estacionário é $\bar{R} = \alpha \left(\frac{\bar{k}}{\bar{n}}\right)^{\alpha-1} + 1 - \delta$. Da condição $1 = \beta \, \bar{R}$ obtemos que a razão capital–trabalho satisfaz

$$1 + \alpha \left(\frac{\bar{k}}{\bar{n}}\right)^{\alpha-1} - \delta = \frac{1}{\beta} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\bar{k}}{\bar{n}} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{1}$$

Da condição intratemporal $\frac{c_t}{1-n_t} = (1-\alpha) z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha}$, no estado estacionário ($\bar{z} = 1$) segue que

$$\frac{\bar{c}}{1-\bar{n}} = (1-\alpha)\left(\frac{\bar{k}}{\bar{n}}\right)^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{c} = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\bar{n}). \tag{2}$$

A restrição de recursos em estado estacionário é

$$\bar{c} + \delta\bar{k} = \bar{k}^{\alpha}\bar{n}^{1-\alpha}. \tag{3}$$

Dividindo (3) por $\bar{n}$ e usando (1)–(2), obtemos

$$\frac{\bar{c}}{\bar{n}} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta\left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4}$$

As expressões (2) e (4) formam um sistema linear em $\bar{c}$ e $\bar{n}$. Com a calibração adotada, os valores de steady state são:

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= 0{,}8879\\
\bar{n} &= 0{,}4763\\
\bar{k} &= 7{,}9399\\
\bar{i} &= 0{,}3176\\
\bar{\ell} &= 0{,}5237\\
\bar{R} &= 1{,}0101\\
w &= 1{,}6955\\
\bar{y} &= 1{,}2055
\end{aligned}$$

(c) Log-linearize o modelo em torno de seu *steady state* determinístico. Mostre que o modelo log-linearizado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &= AX_t + BX_{t-1} + CY_t + DZ_t \\ 0 &= \mathbb{E}_t \{FX_{t+1} + GX_t + HX_{t-1} + JY_{t+1} + KY_t + LZ_{t+1} + MZ_t\} \\ Z_{t+1} &= NZ_t + \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Encontre soluções que caracterizem cada um dos coeficientes $A, B, \ldots, N$. Nas equações acima, X_t é um vetor de variáveis de estado endógenas, Y_t contém as variáveis de controle, e Z_t contém as variáveis de estado exógenas. Como parte da sua resposta, explicite quais variáveis estão contidas em X_t, Y_t e Z_t.

Resposta:

Comentário inicial sobre aproximações. A depender da forma funcional, recorremos a uma aproximação de Taylor de primeira ordem. Se quisermos aproximar $\log X_t$ em torno de $\log X$, podemos usar

$$f(\log X_t) - f(\log X) \approx f'(\log X)\,[\log X_t - \log X].$$

A "manha" é escrever as variáveis em termos do desvio em log em relação ao steady state (S–S): $\widehat{X}_t \equiv \log X_t - \log \bar{X}$.

Log-linearização da condição intratemporal. Partimos de

$$\frac{c_t}{1-n_t} = (1-\alpha)\, z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha}. \tag{5}$$

Aplicando log:

$$\log c_t - \log(1-n_t) = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha \log k_t - \alpha \log n_t. \tag{6}$$

O termo $\log(1-n_t)$ não é linear. Linearizando $\log(1-n_t)$ ao redor de $\bar{n}$ via $x \mapsto \log x$ e usando $x = 1 - e^{\log n_t}$, obtemos

$$\log(1-n_t) \approx \log(1-\bar{n}) + \underbrace{\frac{\bar{n}\log\bar{n}}{1-\bar{n}}}_{=\eta} - \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}} \log n_t. \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6),

$$\log c_t - \eta + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}} \log n_t = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha \log k_t - \alpha \log n_t. \tag{8}$$

Avaliando em S–S ($\bar{z} = 1 \Rightarrow \log \bar{z} = 0$) e subtraindo a relação de S–S da (8), chegamos à forma log-linear:

$$\widehat{c}_t + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}\,\widehat{n}_t = \widehat{z}_t + \alpha(\widehat{k}_t - \widehat{n}_t). \tag{9}$$

Log-linearização da equação de Euler. Começamos de

$$\frac{1}{c_t} = \mathbb{E}_t\Big\{\beta\,\frac{1}{c_{t+1}}\Big(\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\Big)\Big\}. \tag{10}$$

Reescrevendo:

$$\frac{1}{c_t} = \beta\,\mathbb{E}_t\Big\{\frac{1}{c_{t+1}}(1-\delta) + \frac{1}{c_{t+1}}\big(\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha}\big)\Big\}. \tag{11}$$

Usaremos a aproximação de primeira ordem

$$X_t - X \approx X\,[\log X_t - \log X],$$

com $X_t = c_t^{-1}$. Disso resulta

$$c_t^{-1} - \bar{c}^{\,-1} \approx \bar{c}^{\,-1}\,[\log c_t^{-1} - \log \bar{c}^{\,-1}] = -\,\bar{c}^{\,-1}\,[\log c_t - \log \bar{c}], \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad c_t^{-1} \approx \bar{c}^{\,-1}\,[1 - \widehat{c}_t]. \tag{13}$$

Logo,

$$c_{t+1}^{-1}(1-\delta) \approx \bar{c}^{\,-1}(1-\delta)[1 - \widehat{c}_{t+1}], \tag{14}$$

$$c_{t+1}^{-1}\alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} \approx \bar{c}^{\,-1}\alpha \bar{k}^{\alpha-1}\bar{n}^{\,1-\alpha}\big[1 - \widehat{c}_{t+1} - (1-\alpha)\widehat{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widehat{n}_{t+1} + \widehat{z}_{t+1}\big]. \tag{15}$$

Substituindo (13)–(15) em (11):

$$\begin{aligned}\bar{c}^{\,-1}(1-\widehat{c}_t) \;&\approx\; \beta\bar{c}^{\,-1}(1 - \mathbb{E}_t\widehat{c}_{t+1})(1-\delta) \\ &\quad + \beta\bar{c}^{\,-1}\alpha\bar{k}^{\alpha-1}\bar{n}^{\,1-\alpha}\,\mathbb{E}_t\big[1 - \widehat{c}_{t+1} - (1-\alpha)\widehat{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widehat{n}_{t+1} + \widehat{z}_{t+1}\big].\end{aligned} \tag{16}$$

Usando a condição de S–S $\beta^{-1} = \alpha(\bar{n}/\bar{k})^{1-\alpha} + (1-\delta)$ e $\bar{y} \equiv \bar{k}^{\alpha}\bar{n}^{\,1-\alpha}$, manipulando (16) obtemos

$$\mathbb{E}_t[\widehat{c}_{t+1}] - \widehat{c}_t = \beta\,\alpha\,\frac{\bar{y}}{\bar{k}}\,\mathbb{E}_t\Big[\widehat{z}_{t+1} - (1-\alpha)\widehat{k}_{t+1} + (1-\alpha)\widehat{n}_{t+1}\Big]. \tag{17}$$

Equivalente e convenientemente,

$$0 = \mathbb{E}_t\Big\{\widehat{c}_t - \widehat{c}_{t+1} + \beta\bar{r}\,[\,\widehat{z}_{t+1} - (1-\alpha)(\widehat{k}_{t+1} - \widehat{n}_{t+1})\,]\Big\}, \tag{18}$$

com $\bar{r} \equiv \bar{R} - 1 + \delta = \alpha(\bar{n}/\bar{k})^{1-\alpha}$.

Log-linearização da restrição de recursos. A restrição é

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t. \tag{19}$$

Aplicando a mesma regra (aproximando cada termo em torno do S–S) e usando $\bar{y} = \bar{k}^{\alpha}\bar{n}^{\,1-\alpha}$,

$$z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \approx \bar{y}\,[\,1 + \widehat{z}_t + \alpha\widehat{k}_t + (1-\alpha)\widehat{n}_t\,], \tag{20}$$

$$X_t \approx X\,[1 + \widehat{X}_t] \quad \text{para } X \in \{c, k\}. \tag{21}$$

Substituindo (20)–(21) em (19) e cancelando termos de nível,

$$\bar{c}\,\widehat{c}_t + \bar{k}\,\widehat{k}_{t+1} = \widehat{z}_t + \big[\alpha\bar{y} + (1-\delta)\bar{k}\big]\widehat{k}_t + (1-\alpha)\bar{y}\,\widehat{n}_t. \tag{22}$$

Coleção de equações e arranjo em espaço de estados. Definimos os vetores

$$X_t \equiv \widehat{k}_{t+1}, \qquad Y_t \equiv \begin{pmatrix} \widehat{c}_t \\ \widehat{n}_t \end{pmatrix}, \qquad Z_t \equiv \widehat{z}_t.$$

As duas equações (9) e (22) formam o bloco estático, que pode ser escrito genericamente como

$$\mathbf{0} = A_{k^+}\,X_t + A_k\,\widehat{k}_t + A_y\,Y_t + A_z\,Z_t,$$

onde, por exemplo, um arranjo coerente é

$$A_{k^+} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{k} \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha\bar{y} + (1-\delta)\bar{k} \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\bar{n}}{1-\bar{n}} + \alpha \\ \bar{c} & (1-\alpha)\bar{y} \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} -1 \\ -\bar{y} \end{pmatrix}.$$

A equação (18) fornece o bloco *forward-looking*:

$$0 = \mathbb{E}_t\Big\{\, B_{k^{++}}\,\widehat{k}_{t+2} + B_{k^+}\,\widehat{k}_{t+1} + B_k\,\widehat{k}_t + B_y\,Y_{t+1} + C_y\,Y_t + D_z\,\widehat{z}_{t+1}\Big\},$$

com, por exemplo,

$$\begin{aligned} B_{k^{++}} &= 0 \\ B_{k^+} &= -\beta\,\bar{r}\,(1-\alpha) \\ B_k &= 0 \\ B_y &= \begin{pmatrix} -1 & \beta\,\bar{r}\,(1-\alpha) \end{pmatrix} \\ C_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ D_z &= \beta\,\bar{r} \end{aligned}$$
