Lista 2 - Programação dinâmica com incerteza
Gabarito

Exercício 1 (Cadeias de Markov)

Considere o exemplo de Hamilton (1989), que calculou uma matriz de transições entre estados para a economia americana. As entradas da matriz são $P(1,1) = 0.9$, $P(1,2) = 0.1$, $P(2,1) = 0.25$, $P(2,2) = 0.75$, em que o estado 1 é de crescimento e o estado 2 é de recessão. O crescimento esperado no estado 1 é de 1,2% a.t., enquanto no estado 2 é de 0,4% a.t..

(a) Qual a probabilidade incondicional de a economia estar em uma recessão?

(Resposta): Queremos probabilidades incondicionais, então precisamos descobrir a distribuição invariante.

$$\bar{\pi} = P'\,\bar{\pi} \Rightarrow (I - P')\,\bar{\pi} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,90 & 0,25 \\ 0,10 & 0,75 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,10 & -0,25 \\ -0,10 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0,10\,\bar{\pi}_1 - 0,25\bar{\pi}_2 = 0 \Rightarrow \bar{\pi}_1 = 2,5\bar{\pi}_2$$

Como $\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_1 = 1$, temos que $\bar{\pi}_1 = \frac{5}{7}$ é a probabilidade incondicional da economia estar em expansão e $\bar{\pi}_2 = \frac{2}{7}$ é a probabilidade incondicional de uma recessão.

(b) Qual o crescimento médio da economia?

(Resposta): Podemos tomar a distribuição invariante como a probabilidade de permanência em cada estado no longo prazo. O crescimento da economia dependerá, em geral, da distribuição inicial dos estados; essa dependência se reduzirá até que a economia atinja a invariante. Assim, por "crescimento médio" estamos nos referindo ao crescimento de longo prazo: $(1,2\%) * (5/7) + (0,4\%) * (2/7) = 0.97\%$ a.t..

(c) Qual a duração esperada de uma recessão? Qual a duração esperada de um *boom*?

(Resposta): Poderíamos parafrasear a questão como: dado que a economia está numa recessão (boom) hoje, quantos períodos são necessários para se obter, em média, o primeiro período de boom (recessão)?

Assim, estamos interessados na esperança de uma distribuição geométrica com parâmetro $p = \dfrac{1}{4}$ — a probabilidade de uma sucesso, para a primeira parte da pergunta, é de passar na recessão para o boom.

$$\mathbb{E}(Recession) = \frac{1}{p} = 4\,\text{trimestres}$$

De modo análogo, para a segunda parte da pergunta o parâmetro da geométrica é $\dfrac{1}{10}$:

$$\mathbb{E}(Boom) = 10\,\text{trimestres}$$

(d) Suponha que a economia esteja numa recessão hoje. Qual a probabilidade de que a economia ainda se encontre em recessão nos próximos dois anos? (lembre-se que as estimativas usam dados trimestrais)

(Resposta): Hoje estamos numa recessão, uma certeza. O que a questão deseja saber é a probabilidade de uma sequência de oito trimestres de recessão. Usando a propriedade de Markov, temos que:

$$P(\text{recessão nos próximos dois anos}|\text{recessão hoje}) = 0,75^8 \approx 0,10$$

(e) Imagine agora que temos dados relativos ao mercado de trabalho. A probabilidade de se tornar desempregado é de 5%, enquanto a probabilidade de ser contratado é de 50%. Construa uma matriz de transição de Markov e encontre a distribuição estacionária de estados de emprego.

(Resposta): Agora a matriz de trasição é

$$M = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,50 & 0,50 \end{bmatrix}$$

Para calcular a distribuição invariante procedemos da mesma forma que no item (a):

$$\bar{\pi} = M'\,\bar{\pi} \Rightarrow (I - M')\,\bar{\pi} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,95 & 0,50 \\ 0,05 & 0,50 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,05 & -0,50 \\ -0,50 & 0,50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0,05\,\bar{E} - 0,50\bar{D} = 0 \Rightarrow \bar{E} = 10\bar{D}$$

De modo que a distribuição estacionária no estado de emprego é $\bar{E} = \frac{10}{11}$ e no estado de desemprego é $\bar{D} = \frac{1}{11}$.

Exercício 2 (Robson Cruz e o Coqueiro - P1, 2023)

Robson Cruz vive sozinho em uma ilha remota. Toda sua alimentação depende de um único coqueiro. Robson deriva utilidade apenas do consumo, de acordo com o índice de utilidade $u(c)$, e desconta o futuro com fator $\beta < 1$.

O tempo é discreto, o horizonte infinito e existem dois estados da natureza: $s \in \{sorte, azar\}$. A transição entre estados ocorre de acordo com uma matriz de transição P, que é simétrica e tem persistência p.[1] O coqueiro gera uma unidade de fruto no estado $s = sorte$ e meia unidade no estado $s = azar$.

Apesar de ser o único morador da ilha, Robson acredita em mercados financeiros sofisticados e é tomador de preços. Ele acredita que, em cada estado, pode comprar ações da empresa "Coqueiro S.A." ao preço $q(s)$. Existe um contínuo de medida unitária de ações emitidas, negociadas na bolsa da ilha.

Cada ação pagará amanhã um dividendo de uma unidade de coco caso $s' = sorte$ e meia unidade caso $s' = azar$. Ou seja, $d(sorte) = 1$ e $d(azar) = \frac{1}{2}$. Esta ação poderá também ser revendida ao preço $q(s')$.

A restrição orçamentária sequencial de Robson é, portanto, da forma:

$$(q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c,$$

em que a é um número de ações que Robson tem hoje e a' é quanto ele compra para amanhã.

Responda:

(a) Escreva o problema de consumo e poupança de Robson de forma recursiva. Defina as funções-política para consumo e poupança. Sugestão: use $W = (q(s) + d(s))a$ como uma variável de estado.

O problema de Robson pode ser escrito, na forma recursiva, da seguinte forma:

$$V(W, s) = \underset{c,a'}{max}\, u(c) + \sum_{s'} \beta V(W', s')P(s'|s) \quad \text{s.t.} \quad (q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c$$

em que W denota a riqueza de Robson, e s é o estado da natureza em que se encontra. As funções política de consumo e poupança dele são tais que

$$g_c(W, s) = \arg \underset{c}{max}\, u(c) + \sum_{s'} \beta V(W', s')P(s'|s) \quad \text{s.t.} \quad (q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c$$

$$g_a(W, s) = \arg \underset{c}{max}\, u(c) + \sum_{s'} \beta V(W', s')P(s'|s) \quad \text{s.t.} \quad (q(s) + d(s))a \geq q(s)a' + c$$

(b) Derive uma equação de Euler que caracteriza a poupança ótima de Robson.

Tomamos as condições de primeira ordem do problema recursivo:

$$[c]: \quad u'(c) - \lambda = 0 \tag{1}$$

$$[a']: \quad \beta \sum_{s'} V_1(W', s')\, P(s'|s) - \lambda\, q(s) = 0 \tag{2}$$

[1] Ou seja, uma matriz estocástica com p na diagonal.

De modo que $\beta \sum_{s'} V_1(W', s')\, P(s'|s) = q(s)u'(c)$. Pelo Teorema do Envelope,

$$V_1(W, s) = u'(c)\,[q(s) + d(s)]$$

$$\Rightarrow q(s)\, u'(c) = \beta \sum_{s'} u'(c')\,[q(s') + d(s')]\, P(s'|s) \tag{3}$$

Em que (3) é a equação de Euler desejada.

(c) Em equilíbrio, precisaremos que $a = 1$ e $c(s) = d(s)$. Qual a relação destas condições com o "truque de (K, k)" e com market-clearing?

A primeira condição, $a = 1$, implica que Robson possui uma única ação da Coqueiro S.A., enquanto a segunda condição, $d(s) = c(s)$, implica que Robson consome todo o dividendo pago em s.

Intuitivamente, é claro que Robson deve ser o único acionista da Coqueiro S.A., de forma que $a = 1$. Ora, pelo truque (K, k), a escolha ótima de consumo não depende do nível absoluto de riqueza, mas sim da proporção entre o estoque de ações que Robson detém e o seu consumo. Em equilíbrio, $a = 1$, de modo que a proporção também é unitária. O *market clearing*, por sua vez, implica que tudo que é produzido deve ser consumido; assim, os dividendos pagos pela Coqueiro S.A. são todos consumidos por Robson.

(d) Avalie a equações de Euler de Robson (estado a estado) neste equilíbrio, fazendo todas as substituições possíveis.

Aqui, teremos **duas** equações distintas, pois a probabilidade de persistência em cada estado, p, é condicional ao estado passado!

Logo, vamos escrever primeiro a equação de Euler para o caso onde $s = sorte$:

$$u'(c(s))\, q(s) = \beta \sum_{s'} u'(c(s'))[q(s') + d(s')]P(s'|s)$$

$$\Rightarrow u'((c(sorte))q(sorte) = \beta\ \{u'(c(sorte))[q(sorte) + d(sorte)]P(sorte|sorte)$$
$$+ u'(c(azar))[q(azar) + d(azar)]P(azar|sorte)\}$$

Feita a equação acima, substituímos os seguintes valores:

$$\begin{cases} d(sorte) = 1 = c(sorte) \\ d(azar) = \frac{1}{2} = c(azar) \\ P(s' = s|s) = p \\ P(s' \neq s|s) = 1 - p \end{cases}$$

Chegando na simplificação:

$$\Rightarrow u'(1)q(sorte) = \beta\ \left\{u'(1)[q(sorte) + 1]p + u'\left(\frac{1}{2}\right)\left[q(azar) + \frac{1}{2}\right](1 - p)\right\}$$

Por analogia, temos a equação para $s = azar$ como:

$$\Rightarrow u'\left(\frac{1}{2}\right) q(azar) = \beta \left\{ u'\left(\frac{1}{2}\right) \left[q(azar) + \frac{1}{2} \right] p + u'(1)[q(sorte) + 1](1-p) \right\}$$

Comentário geral: Algumas pessoas se guiaram pelo gabarito da A1 do ano passado, que confundia a probabilidade p do problema como se fosse uma probabilidade incondicional para cada estado. No entanto, conforme comentado na monitoria do dia 31/08, tal construção era inconsistente com o enunciado, que ressaltava p como uma probabilidade de **persistência** entre estados (ou seja, $P(s' = s|s) = p$). O fato desse erro não ter modificado a resposta do item (e) é uma mera **coincidência**.

(e) Encontre os preços de equilíbrio das ações da “Coqueiro S.A.” quando $u(c) = \log(c)$ e $p = \frac{2}{3}$.

Substituindo as novas informações nas 2 equações anteriores:

$$\begin{cases} q(sorte) = \beta \left[(q(sorte) + 1)\frac{2}{3} + 2(q(azar) + \frac{1}{2})\frac{1}{3} \right] \\ 2q(azar) = \beta \left[2(q(azar) + \frac{1}{3}) + (q(sorte) + 1)\frac{1}{3} \right] \end{cases}$$

Denote $q(sorte) = x$ e $q(azar) = y$ para economizar na escrita. Logo,

$$\begin{cases} x = \beta \left[(x+1)\frac{2}{3} + 2(y + \frac{1}{2})\frac{1}{3} \right] \\ 2y = \beta \left[2(y + \frac{1}{2})\frac{2}{3} + (x+1)\frac{1}{3} \right] \end{cases}$$

Multiplicando tudo por 3, conseguimos exterminar as frações de dentro:

$$\begin{cases} 3x = \beta \left[2(x+1) + (2y+1) \right] \\ 6y = \beta \left[2(2y+1) + (x+1) \right] \end{cases}$$

Agora, manipulamos o sistema até chegarmos nas soluções (sim, a conta é muito mais infernal ao resolvermos do jeito correto...)

Isolando y com a equação de baixo, temos:

$$y = \frac{\beta x + 3\beta}{6 - 4\beta}$$

Agora, manipulamos a equação de cima:

$$(3 - 2\beta)x - 3\beta = 2\beta y = 2\beta \frac{\beta x + 3\beta}{6 - 4\beta}$$

$$(6 - 4\beta)[(3 - 2\beta)x - 3\beta] = 2\beta^2 x + 6\beta^2$$

$$(18 - 24\beta + 8\beta^2)x - 18\beta + 12\beta^2 = 2\beta^2 x + 6\beta^2$$

$$(18 - 24\beta + 6\beta^2)x = 18\beta - 6\beta^2$$

$$x = \frac{18\beta - 6\beta^2}{18 - 24\beta + 6\beta^2} \xrightarrow{\div 6} \frac{3\beta - \beta^2}{3 - 4\beta + \beta^2} = \frac{\beta(3-\beta)}{(1-\beta)(3-\beta)} = \frac{\beta}{1-\beta}$$

Logo,

$$x = \frac{\beta}{1-\beta} = q(sorte)$$

.

Substituindo de volta em y, temos:

$$y = \frac{\beta\frac{\beta}{1-\beta} + 3\beta}{6 - 4\beta} = \frac{\beta^2 + 3\beta(1-\beta)}{(6-4\beta)(1-\beta)} = \frac{\beta(3-2\beta)}{2(3-2\beta)(1-\beta)} = \frac{\beta}{2(1-\beta)}$$

Logo,

$$y = \frac{\beta}{2(1-\beta)} = q(azar)$$

.

Exercício 3 (Ilhas)

Considere uma economia composta por duas ilhas: $\{A, B\}$. Na ilha A, os agentes recebem um salário w^A e um aluguel R^A por unidade de capital. Na ilha B, o salário é w^B e o aluguel é R^B. Note que esses preços são constantes no tempo. O capital se deprecia igualmente nas duas ilhas à taxa δ.

Os agentes vivem infinitamente, tem oferta de trabalho inelástica, e utilidade dada por:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \qquad \beta \in (0,1)$$

onde $u' > 0$, $u'' < 0$.

Sendo assim, a restrição orçamentária na ilha $j \in \{A, B\}$ é dada por:

$$c_t + k_{t+1} \leq w^j + R^j k_t + (1-\delta)k_t$$

O tempo é discreto e entre um período e outro, com probabilidade $1-\alpha$, o agente é transportado (involuntariamente) para a outra ilha. Com probabilidade α o agente permanece na mesma ilha em que se encontra.

(a) Seja $v^j(k)$ o valor um indivíduo que se encontra na ilha j, com estoque de capital k. Escreva as equações de Bellman para $v^A(k)$ e $v^B(k)$.

Podemos escrever a equação de Bellman genérica como:

$$V^j(k^j) = \underset{c^j, k'^j}{max}\ u(c^j) + \beta \mathbb{E}\left\{V^j(k'^j)\right\} \quad \text{s.t.} \quad c^j + k'^j \leq w^j + R^j k^j + (1-\delta)k^j$$

Mas, como sabemos que as probabilidades de transição α são dadas, podemos abrir a esperança, de forma a obter:

$$V^j(k^j) = \underset{c^j, k'^j}{max}\ u(c^j) + \beta\left\{\alpha V^j(k'^j) + (1-\alpha)V^i(k'^j)\right\} \quad \text{s.t.} \quad c^j + k'^j \leq w^j + R^j k^j + (1-\delta)k^j$$

Com $i, j \in \{A, B\}$ e $i \neq j$.

Logo, obtemos as duas equações de Bellman para cada ilha:

$$V^A(k^A) = \underset{c^A, k'^A}{max}\ u(c^A) + \beta\left\{\alpha V^A(k'^A) + (1-\alpha)V^B(k'^A)\right\} \quad \text{s.t.} \quad c^A + k'^A \leq w^A + R^A k^A + (1-\delta)k^A$$

$$V^B(k^B) = \underset{c^B, k'^B}{max}\ u(c^B) + \beta\left\{\alpha V^B(k'^B) + (1-\alpha)V^A(k'^B)\right\} \quad \text{s.t.} \quad c^B + k'^B \leq w^B + R^B k^B + (1-\delta)k^B$$

Seja $g^j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a escolha ótima de poupança (função política) associada ao problema recursivo do agente que se encontra na ilha j.

(b) Escreva a equação de Euler para um indivíduo que se encontra na ilha A e outra equação para um indivíduo que se encontra na ilha B. Você deve escrever um sistema de equações funcionais: duas equações e duas incógnitas: g^A e g^B. **Obs**: você pode assumir que as funções v^j admitem derivada e que vale o teorema do envelope (Benveniste-Scheinkman).

Tirando a C.P.O. para a ilha A, obtemos:

$$u'(c^A) = \beta \left\{\alpha V'^A(k'^A) + (1-\alpha)V'^B(k'^A)\right\}$$

E, aplicando Benveniste-Scheinkman em V^A, obtemos:

$$V'^A(k^A) = u'(c^A)[R^A + 1 - \delta]$$

Por analogia, também obtemos para B:

$$V'^B(k^B) = u'(c^B)[R^B + 1 - \delta]$$

Logo, substituindo nas C.P.O.'s, obtemos:

$$\frac{V'^A(k^A)}{R^A + 1 - \delta} = \beta \left\{\alpha V'^A(k'^A) + (1-\alpha)V'^B(k'^A)\right\}$$

$$\frac{V'^B(k^B)}{R^B + 1 - \delta} = \beta \left\{\alpha V'^B(k'^B) + (1-\alpha)V'^A(k'^B)\right\}$$

Onde $g^A(k^A) = k'^A$ e $g^B(k^B) = k'^B$ resolvem o sistema de 2 equações acima. Note que aqui, substituímos a equação de Euler em termos de $V'^j(k^j)$ ao invés de $u'(c^j)$, visto que estamos interessados em encontrar g^A e g^B.

(c) Suponha que $w^A = w^B$, $\alpha > \frac{1}{2}$ e $R^A > R^B$. Para um dado nível de capital k, o agente deve poupar mais em qual das ilhas? Isto é, $g^A(k)$ deve ser maior, menor ou igual a $g^B(k)$? **Obs**: Você pode argumentar informalmente.

$R^A > R^B$ implica que o retorno sobre o capital poupado na ilha A é maior que o da ilha B. Ademais, $\alpha > \frac{1}{2}$ implica que a probabilidade de você se manter na mesma ilha é superior ao de mover para outro local. Intuitivamente, para níveis idênticos de salário w, a resposta seria uma maior poupança na ilha A. No entanto, é importante se lembrar da possibilidade do **Efeito Renda-Substituição**: Se w for muito superior a k, poderíamos atingir um caso onde $g^A < g^B$ (i.e., o efeito substituição superando o de renda). Sem uma forma funcional, torna-se impossível fazer uma afirmação certeira sobe a relação entre g^A e g^B.

Observação: Caso quisessemos resolver o sistema de fato para g^A e g^B, precisaríamos fazer um *guess and verify* para V^j, o que não é possível dado a falta de uma forma funcional de $u(c)$ para este problema. Tendo em vista que a interpretação do item (c) pode ser muito difícil sem uma forma funcional de $u(c)$, serei leniente na correção deste item também.

Exercício 4 (Caça aos Alimentos)

Robson Cruz é um náufrago isolado em uma vasta ilha remota. Sua alimentação depende das frutas nativas da ilha, que podem ser encontradas com probabilidade π. Quando Robson encontra uma fruta, seu consumo é dado por $c = v$. Caso contrário, $c = 0$. Assuma também que ele deriva uma função utilidade $u(c)$, com $u(0) = 0$. O período futuro nesta economia é descontado por um fator $\beta < 1$.

(a) Formule o problema recursivo de Robson, e reescreva sua função valor V em função dos demais parâmetros da economia usando uma recursão.

A equação de Bellman é:

$$V = \pi u(v) + (1 - \pi)0 + \beta V$$

Isolando V:

$$V = \frac{\pi u(v)}{1 - \beta}$$

Note que temos uma equivalência do problema recursivo com o caso sequencial, onde:

$$V = \frac{\pi u(v)}{1 - \beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi u(v)$$

Após algumas semanas isolado, Robson também descobre a existência de animais selvagens na ilha, que podem ser caçados como forma de alimento, obtendo um nível de consumo $c = m > v$. No entanto, é valido ressaltar que, como cada animal possui um comportamento diferente, a probabilidade de sucesso na caça $\lambda(s)$ é condicionado ao seu tipo (s), que pode ser agressivo $(s = a)$, ou manso $(s = n)$, com $\lambda(a)u(m) < \pi u(v) < \lambda(n)u(m)$.

(b) Dado o novo *environment* acima, formule os novos problemas recursivos de Robson. Aqui, assuma que Robson decidirá consumir a opção que lhe dará o **maior** nível de utilidade esperado a cada período (i.e., Robson só pode escolher caçar apenas um dos tipos de alimento a cada período). Chame a função valor do consumo de animais como W_m, a de frutas como W_v, e a função valor geral como W.

Observação: Como o enunciado não foi claro com relação a sequência de estados dos animais ser pré-determinada ou estocástica, a função do próximo período também poderia ser dependente de uma esperança para o último caso. De toda forma, a única coisa que muda aqui seria a inclusão do operador $\mathbb{E}(.)$ nos termos com $W(s')$. Portanto, essas duas respostas serão aceitas como corretas.

Vamos resolver os dois problemas separadamente, e então "juntá-los" em um só. Começando pelo problema do consumo de animais, temos:

$$W_m(s) = \lambda(s)u(m) + (1 - \lambda(s))0 + \beta W(s')$$

Analogamente ao caso acima, o problema de consumo de frutas é:

$$W_v = \pi u(v) + (1 - \pi)0 + \beta W(s')$$

Agora, vamos juntar os dois problemas. Note que, em ambos, temos o componente W em comum, que representa a utilidade esperada do indivíduo. Podemos denotar W como um máximo:

$$W(s) = \text{Max}\{W_v; W_m(s)\}$$

Não necessariamente precisamos parar por aqui! Note que podemos abrir W da seguinte forma:

$$W(s) = \text{Max}\{\pi u(v) + \beta W(s'); \lambda(s)u(m) + \beta W(s')\}$$

$$\Rightarrow W(s) = \text{Max}\{\pi u(v); \lambda(s)u(m)\} + \beta W(s')$$

Dado a informação no enunciado, $\lambda(a)u(m) < \pi u(v) < \lambda(n)u(m)$, podemos simplificar W ainda mais, de forma a obter:

$$W(s) = \mathbb{I}\{s = n\}\lambda(n)u(m) + \mathbb{I}\{s = a\}\pi u(v) + \beta W(s')$$

$$\Rightarrow W(s) = \mathbb{I}\{s = n\}W_m(n) + \mathbb{I}\{s = a\}W_v$$

Observação 2: Você consegue enxergar que, para qualquer sequência pré-determinada ∞ de s possível, tal equação seria equivalente a uma representação sequencial do problema?

Comentário geral: Alguns de vocês não levaram em conta que o tipo do animal s representa uma variável de **estado** no problema. Isso implica o fato de que, a cada período, você só pode buscar caçar **um** dos tipos de animal, ao invés dos dois ao mesmo tempo! Isso deveria ser inferido do enunciado, na hora de resolver o problema. Sendo assim, equações do tipo:

$$W_m = \lambda(n)u(m) + \lambda(a)u(m) + \beta W(s')$$

Estariam **erradas**!

Alguns de vocês também assumiram que, na ilha, havia uma fração de cada tipo de animal. Por exemplo, vamos supor que a probabilidade de encontrar animais mansos aqui seria de δ. Isso seria completamente aceitável de se incluir no problema, **desde que elas fossem aplicadas na esperança pro próximo período, $\mathbb{E}\{W(s')\}$, ao invés do período presente, que foi o caso de equações do tipo**:

$$W_m = \delta\lambda(n)u(m) + (1 - \delta)\lambda(a)u(m) + \beta W(s')$$

Claramente, tal represntação seria uma generalização errada da equação anterior a essa.

(c) Após mais algumas semanas, Robson decide mudar sua dieta na ilha: Agora, ele irá caçar animais se, e somente se, ele tiver consumido frutas no período anterior. Analogamente, ele também consumirá frutas se, e somente se, sua refeição no período anterior tenha sido um animal selvagem. Formule os novos problemas recursivos de Robson. *Dica: Agora, o problema deve ser representado em duas funções valor separadas.*

Observação: Aqui, a interpretação correta do enunciado seria: Robson irá caçar "x" se tiver consumido "y" no período anterior, sendo "y$\neq$x". Ainda, se Robson não tivesse obtido "y" no período anterior, ele escolheria caçar "y" novamente até que o obtenha. Como houve margem para uma interpretação alternativa nesse item (Por exemplo: se Robson não conseguisse caçar "y", ele não consumiria nada no período anterior. Logo, ele teria liberdade para escolher a melhor opção W no período seguinte), também levarei isso em consideração na correção. Observe, no entanto, que a dica é explícita: temos apenas **duas** funções valores (W_v e W_m), ao invés de três (W, W_v e W_m).

Então, seguindo a interpretação original, o novo problema se torna:

$$W_m(s) = \lambda(s)[u(m) + \beta W_v] + (1 - \lambda(s))\beta W_m(s')$$

$$W_v = \pi[u(v) + \beta W_m(s')] + (1 - \pi)\beta W_v$$

Exercício 5 (Pênaltis - P1, 2023)

Suponha a seguinte situação: um jogo de futebol será decidido em pênaltis alternados e seu time será o segundo a cobrar.

O estado do jogo no momento da cobrança do seu time pode ser $s \in \{0, 1\}$, descrevendo se o oponente marcou em sua cobrança ($s = 1$) ou se a perdeu ($s = 0$).

O jogo pode terminar com vitória do seu time (payoff 1), derrota (payoff 0) ou seguir para mais uma rodada de pênaltis (payoff $\tilde{W}$ para você). O seu time converte favoravelmente pênaltis com probabilidade p. Já o oponente marca com probabilidade q.

Escreva sua função valor (ignore desconto) e encontre também o valor de $\tilde{W}$ em função dos demais parâmetros usando uma recursão.

Vamos primeiro computar as funções valor do nosso time no momento da cobrança de pênaltis, a depender do que o time adversário realizou.

Caso o time adversário tenha marcado ($s = 1$), então nosso time deve converter favoravelmente o pênalti e seguir para mais uma rodada, caso contrário perderá a partida:

$$V(s = 1) = p \cdot \tilde{W} + (1 - p) \cdot 0$$

Agora, caso o time adversário tenha perdido a cobrança, nosso time tem a oportunidade de ganhar a partida ao fazer o gol, caso contrário seguirá para uma nova rodada de cobranças:

$$V(s = 0) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \tilde{W}$$

O valor de $\tilde{W}$ depende do resultado da cobrança do time adversário, a saber:

$$\begin{aligned}
& \tilde{W} = q \cdot V(s = 1) + (1 - q) \cdot V(s = 0) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{W} = pq \cdot \tilde{W} + p(1 - q) + (1 - p)(1 - q) \cdot \tilde{W} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{W} = \frac{p(1 - q)}{p + q - 2pq}
\end{aligned}$$

Observação: De primeira, a solução desse problema pode soar um pouco desconfortável, visto que $\tilde{W}$ pode parecer um valor exotérico que "veio do além". No entanto, note que podemos usar uma notação mais amigável e familiar ao definir $\tilde{W} = \mathbb{E}\{V(s')\}$. Sendo assim, reescrevemos as funções valor $V(s)$ como:

$$V(s = 1) = p \cdot \mathbb{E}\{V(s')\} + (1 - p) \cdot 0$$

$$V(s = 0) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \mathbb{E}\{V(s')\}$$

Afinal, você só irá para outra rodada se não errar quando $s = 1$, ou se errar quando $s = 0$.

E o estado do próximo período depende somente das ações do time rival, determinados pelas probabilidades $Pr(s = 1) = q$ e $Pr(s = 0) = 1 - q$, que são independentes do estado anterior. Logo:

$$\mathbb{E}\{V(s)\} = q \cdot V(s = 1) + (1 - q) \cdot V(s = 0)$$

Exercício 6 (Crime)

Considere um agente que vive infinitamente e toma decisões sobre quanto poupar, quanto consumir e se comete um crime ou não. O agente maximiza a utilidade esperada do consumo:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

O agente recebe, no início de cada período, uma retorno $R\,a_t$ sobre a poupança, onde R é a taxa de juros bruta. Adicionalmente, também recebe renda y_t, que é aleatória e iid. Após saber quais serão seus rendimentos no período, o agente escolhe se comete um crime ou não. Cometer um crime dá a ele uma renda adicional x, mas com probabilidade π o indivíduo é pego no ato, e acaba na prisão durante o período corrente.

Se o agente não comete um crime, ou se comente e não é pego, ele escolhe o nível de consumo c_t e a poupança para o próximo período, a_{t+1}. Se ele é pego, vai parar na cadeia. Neste caso, ele recebe um nível de consumo de subsistência $\bar{c}$ (exógeno), sua poupança será dada por $R\,a_t$ e toda renda restante lhe é confiscada. O crime não gera outras consequências futuras.

(a) Escreva a restrição orçamentária do agente que não comete um crime, e a do agente que comete um crime mas não é pego.

(Resposta:) A restrição orçamentária do agente não criminoso é $c_t + a_{t+1} \leq R\,a_t + y_t$, $\forall t$. Já a restrição do agente criminoso que escapa à prisão é $c_t + a_{t+1} \leq R\,a_t + y_t + x$, $\forall t$.

(b) Monte o problema na forma recursiva.

(Resposta:) Uma forma de trabalhar com esse tipo de escolha binária, entre cometer um crime ou não, é montar uma função valor auxiliar para cada escolha e definir a função valor do agente como o máximo das funções valor auxiliares. Para a escolha de não cometer um crime, a função valor auxiliar é:

$$\begin{aligned} V^*(a, y) = \max_{c,a'} \ & \{u(c) + \beta \mathbb{E}[V(a', y')]\} \\ \text{s.t.} \quad & c + a' = Ra + y \\ & c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

Em que foi feita a hipótese de que o agente não pode se endividar. Note que a esperança é incondicional, já que y' e y são independentes.

A função valor auxiliar da escolha de cometer um crime é

$$\begin{aligned} V^{**}(a, y) = (1 - \pi) \max_{c,a'} \ & \{u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V(a', y')\right]\} + \pi \left\{u(\bar{c}) + \beta \mathbb{E}\left[V(Ra, y')\right]\right\} \\ \text{s.t.} \quad & c + a = Ra + y + x \\ & c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

note que, se for pego, o agente não faz escolha de consumo nem de poupança, como especificado pelo enunciado da questão.

Por fim, a função valor do agente é dada por

$$V(a,y) = \max\{V^*(a,y), V^{**}(a,y)\}$$

(c) Assuma agora que se o criminoso é pego, sua renda futura é permanentemente reduzida: ao invés da renda y, receberá $\gamma\, y$, onde $0 < \gamma < 1$. Se ele comete um crime duas vezes, e é pego nas duas, sua renda futura será $\gamma^2\, y$, e assim por diante. Reescreva o problema de programação dinâmica.

(Resposta:) Note que agora ser pego cometendo um crime traz consequências futuras, de modo que a informação sobre ter sido pego deve ser passada adiante, isto é, deve ser uma variável de estado. Defina n como o número o vezes que o agente foi pego cometendo um crime. As funções valor auxiliares agora são:

$$\begin{aligned} V^*(a,y,n) = \underset{c,a'}{max}\ & \{u(c) + \beta\mathbb{E}[V(a',y',n)]\} \\ \text{s.t.}\quad & c + a' = Ra + \gamma^n y \\ & c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^{**}(a,y,n) = (1-\pi)\,\underset{c,a'}{max}\ & \{u(c) + \beta\mathbb{E}\left[V(a',y',n)\right]\} + \pi\left\{u(\bar{c}) + \beta\mathbb{E}\left[V(Ra,y',n+1)\right]\right\} \\ \text{s.t.}\quad & c + a = Ra + \gamma^n y + x \\ & c \geq 0, a' \geq 0 \end{aligned}$$

Por fim, a função valor do agente é dada por

$$V(a,y,n) = \max\{V^*(a,y,n), V^{**}(a,y,n)\}$$
