Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 10. Derivadas de segunda ordem e aproximação quadrática

Objetivos

- Compreender o significado geométrico e analítico das derivadas parciais de segunda ordem.
- Saber calcular derivadas de segunda ordem, incluindo mistas, de funções de várias variáveis.
- Reconhecer as condições de simetria (teorema de Schwarz) e sua aplicabilidade.
- Entender a construção da aproximação quadrática de uma função em torno de um ponto.
- Aplicar a aproximação quadrática para estimar valores de funções com maior precisão do que a aproximação linear.

Exercício 10.1 (Contraexemplo do Teorema de Clairaut).

Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

não satisfaz o Teorema de Clairaut na origem.

Solução.

Primeiro, note que f está bem definida em todo $\mathbb{R}^2$. Para verificar a validade (ou não) do Teorema de Clairaut, vamos calcular as derivadas mistas na origem. Começamos com as derivadas de primeira ordem:

(i) Cálculo de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$:

Precisamos calcular primeiro $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

- Se $(x,y) \neq (0,0)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\
&= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \left(\frac{(x^2+y^2)(2x)-(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \left(\frac{2x[(x^2+y^2)-(x^2-y^2)]}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \left(\frac{2x(2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

- Na origem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(t\cdot 0\cdot\frac{t^2-0}{t^2+0}\right) = 0.$$

Desses dois cálculos obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Derivando essa função agora com respeito a y obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t(0^4-t^4+4\cdot 0^2\cdot t^2)}{(0^2+t^2)^2}-0}{t} = -1 \end{aligned}$$

(ii) Cálculo de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$:

Neste caso calculamos primeiro $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

- Se $(x,y)\neq(0,0)$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\ &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\ &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\left(\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\left(\frac{-2y[(x^2+y^2)+(x^2-y^2)]}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\left(\frac{-2y(2x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

- Na origem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(0\cdot t \cdot \frac{0^2 - t^2}{0^2+t^2}\right) = 0.$$

Desses dois cálculos obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Derivando essa função agora com respeito a x obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^5 - t\cdot 0^4 - 4\cdot t^3 \cdot 0^2}{(t^2+0^2)^2} - 0}{t} = 1 \end{aligned}$$

Concluímos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0),$$

ou seja, neste caso, o Teorema de Clairaut não é válido. Isso indica que alguma de suas hipóteses não está sendo satisfeita. De fato, vamos mostrar que as derivadas mistas não são contínuas na origem (basta que uma delas não seja). Para isso, precisamos determinar as expressões dessas derivadas mistas fora da origem. Para $(x,y) \neq (0,0)$, temos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left[y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)\right]\cdot (x^2+y^2)^2 - y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)\cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2)^2\right]}{(x^2+y^2)^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 - y^4 + 4x^2y^2\right) \cdot (x^2+y^2)^2 - y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{y \cdot (4x^3 + 8xy^2) \cdot (x^2+y^2)^2 - y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{4xy(x^2+2y^2)(x^2+y^2)^2 - 4xy(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

Juntando com o valor dessa derivada na origem que já determinamos obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy(x^2+2y^2)(x^2+y^2)^2 - 4xy(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ -1, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Para mostrar que a função acima não é contínua na origem basta exibir um caminho ao longo do qual o limite da função difere de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1,$$

independentemente da existência ou não desse limite ao longo do caminho. Escolhendo o caminho $x = y$, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y,y) = \frac{4y \cdot y \cdot (y^2+2y^2) \cdot (y^2+y^2)^2 - 4y \cdot y \cdot (y^4 - y^4 + 4y^2 \cdot y^2) \cdot (y^2+y^2)}{(y^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{4y^2 \cdot 3y^2 \cdot (2y^2)^2 - 4y^2 \cdot 4y^4 \cdot 2y^2}{(2y^2)^4}$$

$$= \frac{4y^2 \cdot 3y^2 \cdot 4y^4 - 4y^2 \cdot 4y^4 \cdot 2y^2}{16y^8} = \frac{48y^8 - 32y^8}{16y^8} = \frac{16y^8}{16y^8} = 1 \neq -1.$$

Analogamente pode ser mostrado que a função $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ não é contínua. □

Todos os exercícios a seguir são baseados na lista anterior, sobre a Nota de Aproximação Linear. O objetivo agora é aproveitar os cálculos já realizados naquela lista para compreender como a aproximação linear se relaciona e contrasta com a aproximação quadrática.

Exercício 10.2.

Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Determine a aproximação quadrática de f no ponto $(3,4)$.

(b) Use essa aproximação para estimar $f(3{,}01, 4{,}02)$.

(c) Compare com o valor da aproximação linear e discuta a qualidade da aproximação.

Solução.

Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. As derivadas de 1ª ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

As derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

No ponto $(3{,}4)$, com $r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,

$$f(3{,}4) = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3{,}4) = \tfrac{3}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3{,}4) = \tfrac{4}{5}, \quad H_f(3{,}4) = \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) A aproximação quadrática em $(3{,}4)$ é

$$Q_{(3,4)}(x,y) = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4) + \frac{1}{250}\left(16(x-3)^2 - 24(x-3)(y-4) + 9(y-4)^2\right).$$

(b) Para $(3.01, 4.02)$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.02$:

$$Q_{(3,4)} = 5 + \frac{3}{5}(0.01) + \frac{4}{5}(0.02) + \frac{1}{250}\left(16(0.01)^2 - 24(0.01)(0.02) + 9(0.02)^2\right) = 5.0220016.$$

(c) A linearização dava 5.022; o termo de 2ª ordem adiciona 1.6×10^{-6}, uma melhora sutil.

□

Exercício 10.3.

Seja $f(x,y) = e^{xy} + \ln(x+y)$.

(a) Calcule a aproximação quadrática de f em torno do ponto $(1,1)$.

(b) Estime $f(1{,}01, 0{,}98)$ usando a aproximação quadrática.

(c) Compare com o valor da aproximação linear e discuta a qualidade da aproximação.

Solução.

Temos as derivadas de 1ª ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,e^{xy} + \frac{1}{x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\,e^{xy} + \frac{1}{x+y}.$$

Derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - \frac{1}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} - \frac{1}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = e^{xy} + xy\,e^{xy} - \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Em (1,1):

$$f(1,1) = e + \ln 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = e + \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = e - \tfrac{1}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = e - \tfrac{1}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,1) = 2e - \tfrac{1}{4}.$$

(a) A aproximação quadrática:

$$\begin{aligned} Q_{(1,1)}(x,y) = e + \ln 2 + (e + \tfrac{1}{2})\big[(x-1) + (y-1)\big] \\ + \tfrac{1}{2}\Big[(e - \tfrac{1}{4})\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big) + 2(2e - \tfrac{1}{4})(x-1)(y-1)\Big] \end{aligned}$$

(b) Para (1.01,0.98), $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = -0.02$:

$$\text{linear} = -(e + \tfrac{1}{2}) \cdot 0.01,$$

$$\text{quadrático} = \tfrac{1}{2}\Big((e - \tfrac{1}{4})(\Delta x^2 + \Delta y^2) + 2(2e - \tfrac{1}{4})\Delta x \Delta y\Big) = -(1.5e + 0.125) \times 10^{-4}.$$

Logo,

$$Q_{(1,1)}(1.01,0.98) = e + \ln 2 - 0.01\Big(e + \tfrac{1}{2}\Big) - (1.5e + 0.125) \times 10^{-4}.$$

(c) A linearização era $e + \ln 2 - 0.01(e + \frac{1}{2})$. O termo de 2ª ordem corrige pela curvatura capturada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, reduzindo o erro local.

□

Exercício 10.4.

A função $f(x, y) = x^2 y + \cos(y)$ representa um modelo simplificado de custo de produção.

(a) Determine a aproximação quadrática de f no ponto $(1, \pi)$.

(b) Use a aproximação quadrática para estimar $f(1{,}05, \pi + 0{,}01)$.

(c) Compare com o valor da aproximação linear e discuta a qualidade da aproximação.

Solução.

Derivadas de 1ª ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \sin y.$$

Derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos y.$$

Em $(1,\pi)$:

$$f(1,\pi) = \pi - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi) = 2\pi, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\pi) = 2\pi, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,\pi) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,\pi) = 1.$$

(a) A aproximação quadrática:

$$Q_{(1,\pi)}(x,y) = \pi - 1 + 2\pi(x-1) + (y-\pi) + \tfrac{1}{2}\left[2\pi(x-1)^2 + 4(x-1)(y-\pi) + (y-\pi)^2\right].$$

(b) Para $(1.05, \pi + 0.01)$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.01$:

$$\text{linear} = 0.1\pi + 0.01, \qquad \text{quadrático} = 0.0025\pi + 0.00105.$$

Portanto,

$$Q_{(1,\pi)}(1.05, \pi + 0.01) = (1.1025)\pi - 0.98895.$$

(c) A linearização fornecia $(1.1)\pi - 0.99$. O termo de 2ª ordem acrescenta cerca de $0.0025\pi + 0.00105$, capturando a curvatura sobretudo via $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, e melhora a estimativa.

□

Exercício 10.5.

Considere a função $f(x,y,z) = xyz$.

(a) Calcule a aproximação quadrática de f no ponto $(1,2,3)$.

(b) Use a aproximação quadrática para estimar $f(1{,}01, 1{,}98, 3{,}02)$.

(c) Compare com o valor da aproximação linear e discuta a qualidade da aproximação.

Solução.

Derivadas de 1ª ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy.$$

Derivadas de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x.$$

Em (1,2,3):

$$f = 6, \quad \nabla f = (6,3,2), \quad H_f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) A aproximação quadrática:

$$Q = 6 + 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) + \tfrac{1}{2}\Delta^\top H_f(1,2,3)\,\Delta,$$

com $\Delta = (x-1, y-2, z-3)$. Expandindo o termo quadrático:

$$3(x-1)(y-2) + 2(x-1)(z-3) + (y-2)(z-3).$$

(b) Para $(1.01, 1.98, 3.02)$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = -0.02$, $\Delta z = 0.02$:

$$\text{linear} = 0.06 - 0.06 + 0.04 = 0.04,$$

$$\text{quadrático} = 3(0.01)(-0.02) + 2(0.01)(0.02) + (-0.02)(0.02) = -0.0006.$$

Logo,

$$Q(1.01, 1.98, 3.02) = 6 + 0.04 - 0.0006 = 6.0394.$$

(c) A aproximação linear era 6.04. A quadrática inclui interações de 2ª ordem via $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ e ajusta levemente para 6.0394.

□

Exercício 10.6.

Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s).

(a) $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$

(b) $f(x,y) = \sin(2x+5y)$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y}$

(c) $f(x,y,z) = e^{xyz^2}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$

Solução.

(a) $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 4x^3y^2 - 3x^2y.$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y^2 - 6xy \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 24xy^2 - 6y.$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 8x^3y - 3x^2 \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = 24x^2y - 6x.$

(b) $f(x,y) = \sin(2x+5y) \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5\cos(2x+5y) \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -10\sin(2x+5y) \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y} = -50\cos(2x+5y).$

(c) $f(x,y,z) = e^{xyz^2} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = yz^2e^{xyz^2} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (xyz^4 + z^2)e^{xyz^2} \implies \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (2xy^2z^5 + 6xyz^3 + 2z)e^{xyz^2}.$

□

Exercício 10.7.

Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de f forem contínuas, então

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial x}$$

Solução.

Pelo Teorema de Clairaut, temos:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial y} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_y = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)_y = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{xy} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{yx} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial x}$$

□