Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 15.

Objetivos

-

Exercício 15.1.

Encontre o maximizador de $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeito às restrições $2x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Solução.

O Lagrangeano é

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(2x + y - 2) + \nu_1 x + \nu_2 y.$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - 2\lambda + \nu_1 = 0 \\ L_y &= 2y - \lambda + \nu_2 = 0 \\ &\lambda(2x + y - 2) = 0 \\ &\nu_1 x = 0 \\ &\nu_2 y = 0 \\ &\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Resolva enumerando os casos. Existe uma solução com $x = 0$? Se sim, então $\nu_1 = 2\lambda$ e $y = 2$. Se $y = 2$, então $\nu_2 = 0$, logo $\lambda = 4$ e $\nu_1 = 8$, o que é consistente com as CPO (Condições de Primeira Ordem). Esta é uma solução.
Existe uma solução com $y = 0$? Se sim, então $\nu_2 = \lambda$ e $x = 1$. Se $x = 1$, então $\nu_1 = 0$, logo $\lambda = 1$ e $\nu_1 = 1$, o que é consistente com as CPO. Esta é uma solução.
$x = y = \nu_1 = \nu_2 = \lambda = 0$ é uma solução.
Se nem x nem y são 0, então $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Então $x = 4/5$ e $y = 2/5$. Isso é consistente.
Dentre esses quatro pontos, o máximo global ocorre em $(0,2)$ e o valor de f é 4. □

Exercício 15.2.

Encontre o maximizador de $f(x,y) = 2y^2 - x$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Solução.

O Lagrangeano é

$$L = 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \nu_1 x + \nu_2 y.$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned}
L_x &= -1 - 2\lambda x + \nu_1 = 0 \\
L_y &= 4y - 2\lambda y + \nu_2 = 0 \\
&\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\
&\nu_1 x = 0 \\
&\nu_2 y = 0 \\
&\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

A única solução para as condições de primeira ordem é

$$x = 0 \quad y = 1 \quad \nu_1 = 1 \quad \nu_2 = 0 \quad \lambda = 2$$

portanto, o ótimo é $x = 0$ e $y = 1$, e o valor de f é 2. □

Exercício 15.3.

Considere o problema de maximizar $f(x,y,z) = xyz + z$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 + z \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(a) Escreva um conjunto completo de condições de primeira ordem para este problema.

(b) Determine se a restrição $x^2 + y^2 + z \leq 6$ é ativa (binding) ou não em alguma solução.

(c) Encontre uma solução das condições de primeira ordem que inclua $x = 0$.

(d) Encontre três equações nas três incógnitas x, y, z que devem ser satisfeitas se $x \neq 0$ na solução.

(e) Mostre que $x = 1, y = 1, z = 4$ satisfaz essas equações.

Solução.

(a) O problema é

$$\begin{aligned} \max \quad & xyz + z \\ \text{sujeito a} \quad & x^2 + y^2 + z \le 6 \\ & x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0. \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= yz - 2\lambda x + v_1 = 0 \\ L_y &= xz - 2\lambda y + v_2 = 0 \\ L_z &= xy + 1 - \lambda + v_3 = 0 \\ & \lambda(x^2 + y^2 + z - 6) = 0 \\ & v_1 x = 0 \\ & v_2 y = 0 \\ & v_3 z = 0 \\ & v_1 \ge 0, \quad v_2 \ge 0, \quad v_3 \ge 0, \quad \lambda \ge 0. \end{aligned}$$

(b) Não há solução para as condições de primeira ordem com $\lambda = 0$, porque $\lambda = 0$ implica $xy + 1 + v_3 = 0$, e esta equação não tem solução não negativa (pois $x, y, v_3 \ge 0$). Como $\lambda > 0$, a restrição deve ser ativa (binding) em qualquer solução para as condições de primeira ordem.

(c) Se $x = 0$, então $v_1 = 2\lambda y$. Como $\lambda > 0$, $v_2 y = 2\lambda y^2 = 0$ implica $y = 0$ e $v_2 = 0$. Portanto $z = 6$, $v_1 = 0$, $v_3 = 0$, $\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = 1$, e $\lambda \ge 1$.

(d) Se $x > 0$, então $v_1 = 0$, logo $yz = 2\lambda x$. Como $\lambda > 0$, y e z são ambos positivos, então v_2 e v_3 são ambos 0. Assim, quatro equações em quatro incógnitas são as condições de primeira ordem para L_x, L_y, L_z e a igualdade da restrição:

$$\begin{aligned} yz - 2\lambda x &= 0 \\ xz - 2\lambda y &= 0 \\ xy + 1 - \lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 + z &= 6. \end{aligned}$$

Resolvendo para λ e substituindo, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} -2x - 2x^2y + yz &= 0 \\ -2y - 2xy^2 + xz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z &= 6. \end{aligned}$$

(e) Este sistema de equações tem apenas uma solução que satisfaz todas as restrições de não negatividade: $x = 1, y = 1$, e $z = 4$. Então $\lambda = 2$.

□

Exercício 15.4.

Maximize $3xy - x^3$ sujeito às restrições $2x - y = -5, 5x + 2y \geq 37, x \geq 0, y \geq 0$.

Solução.

O Lagrangeano é

$$L = 3xy - x^3 - \mu(2x - y + 5) - \lambda(-5x - 2y + 37) + \nu_1 x + \nu_2 y.$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= 3y - 3x^2 - 2\mu + 5\lambda + \nu_1 = 0 \\ L_y &= 3x + \mu + 2\lambda + \nu_2 = 0 \\ &\lambda(-5x - 2y + 37) = 0 \\ &\nu_1 x = 0 \\ &\nu_2 y = 0 \\ &2x - y + 5 = 0 \\ &\lambda, \nu_1, \nu_2, x, y, 5x + 2y - 37 \quad \text{todos } \geq 0. \end{aligned}$$

Se x ou y são 0, a restrição de igualdade e a restrição de desigualdade não podem ser simultaneamente satisfeitas. Assim, $\nu_1 = \nu_2 = 0$.
Se a restrição de desigualdade é ativa (binding), resolvendo ela e a restrição de igualdade temos $x = 3$ e $y = 11$. Das condições de primeira ordem $L_x = 0$ e $L_y =$

0 pode-se ver que $\lambda < 0$, então não pode haver tal solução para as condições de primeira ordem. Consequentemente, $\lambda = 0$.
Após substituir todos os multiplicadores conhecidos, as variáveis restantes podem ser resolvidas: $x = 5, y = 15$ e $\mu = -15$.
E, por fim, como a restrição de igualdade é linear, a NDCQ é válida. $\square$