Lista 1 - Incerteza em uma economia de dotação
Gabarito

Exercício 1 (Agregação)

Nessa questão iremos estudar a agregação de agentes heterogêneos e possibilidade de um agente representativo.

Considere o problema do consumidor em mercados completos visto em sala de aula. A economia é povoada por um conjunto I de famílias, indexadas por $i \in I$. Cada família resolve

$$U_i(c(q, y_i)) = \max_{c_i} \textstyle\sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t))$$
$$\text{s.a. } \textstyle\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t).$$

Além disto, o índice de utilidade da família tem um formato CRRA (Constant Relative Risk Aversion) dado por $u_i(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ e a restrição de factibilidade impõe que $C_t\left(s^t\right) := \sum_i c_t^i\left(s^t\right) = \sum_i y_t^i\left(s^t\right) =: Y_t\left(s^t\right)$, para cada t e cada s^t.

(a) Defina o consumo agregado como: $C_t(s^t) = \sum_i c_t^i(s^t)$. Encontre a relação que liga o consumo individual ao consumo agregado, i.e., qual a fração do consumo agregado de cada família. Como ela varia com sua dotação e como se relaciona aos preços de estado e nível de consumo agregado?

Resposta: Conforme o enunciado, uma alocação factível satisfaz $\forall t = 0, 1, \ldots$ e $\forall s^t$,

$$C_t(s^t) := \sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t) := Y_t(s^t)$$

O problema da família $i \in I$ é:

$$\max_{c_i} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t))$$
$$\text{s.a.} \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t).$$

Sabemos que a solução será interior e, montando o lagrangeano, temos

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \mu_i \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \cdot [y_i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

As CPO são tais que, $\forall t, \forall s^t$:

$$0 = \Pr(s^t)\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) - \mu_i q_t^0(s^t) \tag{1}$$

Como isso vale para todos os agentes, podemos escolher uma família $A \in I$ e tomá-la como referência. Isso significa que encontraremos alocações de equilíbrio relativamente à alocação da família A — um passo de normalização, similar à escolha de um numerário. Podemos dividir (1) pela expressão correspondente da família A e obter, $\forall i \in I$:

$$\frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_A'(c_t^A(s^t))} = \frac{\mu_i}{\mu_A}$$

Como $\forall i \in I$, $u_i \in C^2, u_i' > 0, u_i'' < 0$, sabemos que $\exists\,(u_i')^{-1}$ e então

$$c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1}\left(u_A'(c_A(s^t)) \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A}\right) \tag{2}$$

Somando a expressão anterior para todos as famílias em I e utilizando a condição de factibilidade:

$$\sum_i (u_i')^{-1}\left(u_A'(c_t^A(s^t)) \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A}\right) = \sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_i(s^t) := Y_t(s^t) \tag{3}$$

de modo que a renda agregada é uma estatística suficiente para o consumo individual de cada família i.

Como as utilidades são CRRA, reescrevemos a equação (2) do consumo individual como:

$$c_t^i(s^t) = \left(c_t^A(s^t)^{-\sigma} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma} = c_t^A(s^t) \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma}.$$

De modo que somando para todos os agentes, (3) se torna:

$$C_t(s^t) := \sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i \left[c_t^A(s^t) \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma}\right]$$

o que implica, se isolarmos $c_t^A(s^t)$:

$$c_t^A(s^t) = C_t(s^t) \cdot \left[\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma}\right]^{-1} \tag{4}$$

de modo que o consumo individual de A é uma fração constante do consumo agregado. Isto é, a "fatia" do consumo agregado referente à família A é a mesma em qualquer momento no tempo e para qualquer história de eventos. Dito isto, respondemos a primeira parte do item.

Lembre-se que tomamos a família A de forma genérica (poderia ter sido qualquer outra em I). Podemos, então, definir a fração do consumo agregado de uma família $k \in I$ por

$$\alpha_k := \left[\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_k}\right)^{-1/\sigma}\right]^{-1} \tag{5}$$

Para computarmos os preços de estado (também chamados de preços de Arrow-Debreu), das CPOs (1) temos, $\forall i \in I$,

$$\begin{aligned} q_t^0(s^t) &= \mu_i^{-1} \cdot \Pr(s^t)\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \\ &= \mu_i^{-1} \cdot \Pr(s^t)\beta^t \Big[\alpha_i Y_t(s^t)\Big]^{-\sigma} \end{aligned} \tag{6}$$

em que a segunda igualdade vem da generalização de (4) $\forall i \in I$ e da condição de factibilidade.

Podemos ainda normalizar os preços, escolhendo (note que as trocas acontecem depois de s^0 ser realizado, com $\Pr(s^0) = 1$):

$$\begin{aligned}
1 &= q_0^0(s^0) \\
&= \mu_i^{-1} \cdot u_i'(c_0^i(s^0)) \\
&= \mu_i^{-1} c_0^i(s^0)^{-\sigma} \\
\Rightarrow \mu_i &= c_0^i(s^0)^{-\sigma}, \qquad \forall i \in I
\end{aligned} \tag{7}$$

Usando (4) em conjunto com a condição de factibilidade na restrição orçamentária temos:

$$\begin{aligned}
& \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) = \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\
\Rightarrow \quad & \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \alpha_i Y_t(s^t) = \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\
\Rightarrow \quad & \alpha_i \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) Y_t(s^t) = \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\
\Rightarrow \quad & \alpha_i = \frac{\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t)}{\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) Y_t(s^t)}
\end{aligned}$$

Onde a relação de igualdade da restrição orçamentária vem da não-saciedade local no ótimo. A última expressão acima denota a fração do consumo de cada família em correspondência à fração do valor de sua riqueza esperada individual sobre o valor da riqueza esperada agregada da economia, avaliados aos preços de mercado.

Mais do que isso, substituindo (7) em (5), obtemos:

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \left[\sum_k \left(\frac{\mu_k}{\mu_i} \right)^{-1/\sigma} \right]^{-1} \\
&= \left[\sum_k \left(\frac{c_0^k(s^0)^{-\sigma}}{c_0^i(s^0)^{-\sigma}} \right)^{-1/\sigma} \right]^{-1} = \left[\sum_k \left(\frac{c_0^k(s^0)}{c_0^i(s^0)} \right) \right]^{-1} \\
&= \frac{c_0^i(s^0)}{\sum_k c_0^k(s^0)} = \frac{c_0^i(s^0)}{Y_0(s^0)}
\end{aligned} \tag{8}$$

Isto é, o consumo na data 0 é uma estatística suficiente para indicar a fração da riqueza esperada da família em relação à riqueza esperada agregada da economia.

(b) Considere agora o problema do planejador, que maximiza uma soma ponderada das utilidades

$$W\left(\{Y_t(s^t)\}_{t,s^t} \right) = \max_{c_1,\dots,c_I} \textstyle\sum_i \lambda_i U_i(c_i)$$

$$\text{s.a., para cada } t, s^t, \textstyle\sum_i c_t^i(s^t) \leq Y_t(s^t).$$

Quais os pesos λ_i que cada família deve ter para que o problema centralizado gere alocações consistentes com o problema descentralizado? Interprete.

Dica: Normalize de uma maneira conveniente.

Resposta: Olhemos agora para o problema de Pareto. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_I \geq 0$ os pesos de Pareto associados a cada família. O problema do planejador é

$$\begin{aligned} \max_{\{c_i\}_{i\in I}} & \sum_{i\in I} \lambda_i \, U_i(c_i) \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^{I} c_t^i(s^t) \leq \sum_{i=1}^{I} y_t^i(s^t), \quad \forall s^t, \, \forall t = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Montamos o lagrangeano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_i \lambda_i U_i(c_i) + \sum_t \sum_{s^t \in S^t} \theta_t(s^t) \cdot \left(\sum_i \left[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \\ &= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t \in S^t} \Pr(s^t) \beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \sum_t \sum_{s^t \in S^t} \theta_t(s^t) \cdot \left(\sum_i \left[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \\ &= \sum_t \sum_{s^t} \left[\sum_i \lambda_i \Pr(s^t) \beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \theta_t(s^t) \cdot \left(\sum_i \left[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \right] \end{aligned}$$

As CPOs são, $\forall i, \forall s^t, \forall t$:

$$\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \cdot \Pr(s^t) = \lambda_i^{-1} \theta_t(s^t) \tag{9}$$

Como $u_i \in C^2, u_i' > 0, u_i'' < 0$, sabemos que $\exists \, u_i'^{-1}$. De forma similar ao item anterior, podemos encontrar $c_t^i(s^t)$ tomando uma família qualquer como referência; seja ela a família 1:

$$\begin{aligned} \forall i, \quad \frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_1'(c_t^1(s^t))} = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \Rightarrow \quad & u_i'(c_t^i(s^t)) = u_1'(c_t^1(s^t)) \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \\ \Rightarrow \quad & c_t^i(s^t) = u_i'^{-1} \left(u_1'(c_t^1(s^t)) \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right) \end{aligned}$$

Note que, de modo a garantir consistência entre as alocações do problema centralizado e do problema descentralizado, os pesos de Pareto deverão ser tais que $\forall i \in I, \lambda_i = \mu_i^{-1}$.

Este resultado é um reflexo do Primeiro e Segundo Teoremas do Bem-estar. Pelo Primeiro, as alocações do equilíbrio competitivo são eficientes no sentido de Pareto. Pelo Segundo conseguimos chegar na alocação eficiente do planejador via mercados competitivos com uma distribuição adequada das riquezas.

(c) Defina a solução do problema anterior $W\left(\{Y\,(s^t)\}_{t,s^t}\right)$ como a utilidade da família representativa dessa economia. Qual o formato funcional da utilidade dessa família representativa?

Resposta: Seja a seguinte normalização dos preços:

$$\begin{aligned} Y_0(s^0)^{-\sigma} &= q_0^0(s^0) \\ &= \mu_i^{-1} \cdot u_i'(c_0^i(s^0)) \\ &= \mu_i^{-1} c_0^i(s^0)^{-\sigma} \\ \Rightarrow \mu_i &= c_0^i(s^0)^{-\sigma} Y_0(s^0)^{\sigma}, \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Pelo enunciado, W é o valor que maximiza a utilidade da família representativa, de modo que,

$$\begin{aligned}
W\left(\left\{Y\left(s^t\right)\right\}_{t,s^t}\right) &= W\left(\left\{C\left(s^t\right)\right\}_{t,s^t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_i(c_i) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) \\
&= \sum_i \mu_i^{-1} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[\alpha_i \cdot C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} && \text{de (4)} \\
&= \sum_i c_0^i(s^0)^{\sigma} Y_0(s^0)^{-\sigma} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{\left[\frac{c_0^i(s^0)}{Y_0(s^0)} \cdot C(s^t)\right]^{1-\sigma}}{1-\sigma} && \text{de (8)} \\
&= Y_0(s^0)^{-\sigma} \sum_i \sum_t \sum_{s^t} c_0^i(s^0)^{\sigma} \cdot \Pr(s^t)\beta^t \left[\frac{c_0^i(s^0)}{Y_0(s^0)}\right]^{1-\sigma} \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \frac{Y_0(s^0)^{-\sigma}}{[Y_0(s^0)]^{1-\sigma}} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \sum_i c_0^i(s^0) \\
&= \frac{Y_0(s^0)^{1-\sigma}}{[Y_0(s^0)]^{1-\sigma}} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} && \text{da factibilidade em } t=0 \\
&= \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} && \text{mesmo formato do problema individual!}
\end{aligned}$$

(d) Mostre que o formato funcional da utilidade da família representativa não muda (a não ser por uma constante multiplicativa) com $\{\lambda_i\}$ e identifique preços sombra que sustentariam a alocação agregada.

Resposta: Ora,

$$\begin{aligned}
W\left(\left\{Y\left(s^t\right)\right\}_{t,s^t}\right) &= W\left(\left\{C\left(s^t\right)\right\}_{t,s^t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_i(c_i) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[\alpha_i \cdot C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \left[\sum_i \lambda_i \cdot \alpha_i^{1-\sigma}\right] \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma}
\end{aligned}$$

Veja que o termo multiplicativo inicial pode ser unitário por normalização conveniente de $q_0^0(s^0)$ (prova abaixo). De fato, dado que os coeficientes de risco dos agentes são idênticos, o formato funcional da família representativa não depende dos pesos de Pareto. Tampouco importa a distribuição de riqueza. Os preços sombra $\xi_t(s^t)$ que sustentariam a alocação agregada serão

$$\xi_t(s^t) = \theta_t(s^t) = \lambda_i \cdot \Pr(s^t)\beta^t \Big[\alpha_i Y_t(s^t)\Big]^{-\sigma}$$

iguais aos preços de estado de Arrow-Debreu $q_t^0(s^t)$ do problema descentralizado.

(extra: prova da normalização)

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_i \lambda_i \cdot \alpha_i^{1-\sigma} \\
&\overset{(5)}{=} \sum_i \lambda_i \cdot \left[\sum_i \left(\frac{\mu_k}{\mu_i}\right)^{-1/\sigma}\right]^{\sigma-1} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_i \lambda_i \cdot \left[\sum_k \left(\frac{c_0^k(s^0)^{-\sigma}\,\cancel{q_0^0(s^0)^{-1}}}{c_0^i(s^0)^{-\sigma}\,\cancel{q_0^0(s^0)^{-1}}}\right)^{-1/\sigma}\right]^{\sigma-1} \\
&= \sum_i \lambda_i \cdot \left[\sum_k \left(\frac{c_0^k(s^0)}{c_0^i(s^0)}\right)\right]^{\sigma-1} \\
&= \sum_i c_0^i(s^0)^\sigma\, q_0^0(s^0)\, c_0^i(s^0)^{1-\sigma} \left[\sum_k c_0^k(s^0)\right]^{\sigma-1} \\
&= \big[Y_0(s^0)\big]^{\sigma-1}\, q_0^0(s^0) \sum_i c_0^i(s^0) \\
&= Y_0(s^0)^\sigma\, q_0^0(s^0) \\
\Rightarrow q_0^0(s^0) &= Y_0(s^0)^{-\sigma}
\end{aligned}$$

Exercício 2 (Equilíbrio AD)

Considere uma economia de trocas com dois consumidores que vivem para sempre e possuem preferências idênticas, dadas por:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t)$$

Ambos os consumidores têm dotações aleatórias dependentes na variável de estado exógena s_t. Os s_t's são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e com mesma distribuição (i.i.d.). Mais especificamente, para cada t, $s_t = H$ com probabilidade π e $s_t = L$ com probabilidade $1 - \pi$, onde π não é dependente no tempo ou na realização dos estados anteriores. Caso $s_t = H$, a dotação do primeiro consumidor será igual a 2 e a do segundo consumidor será 1; caso $s_t = L$, a dotação do primeiro consumidor será 1 e a do segundo, 0. Os mercados são completos.

(a) Defina um equilíbrio competitivo com trocas na data zero (Arrow-Debreu) nessa economia. Assuma que os consumidores tomam decisões antes de observar o estado no período 0.

Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu é um par de preços e alocações $\{q_t^0(s^t),\ \{c_t^i(s^t)\}_{i=A,B}\}_{t=0}^{\infty}$ para $S = \{H, L\}$ tal que

(i) o consumidor $i = A, B$ soluciona

$$\begin{aligned} &\max_{c_t^i(s^t)} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t^i(s^t)) \\ &\text{s.a.} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, y_t^i(s^t) \end{aligned}$$

(ii) há *market clearing*,

$$c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) = y_t^A(s^t) + y_t^B(s^t)$$

(b) Determine a alocação de equilíbrio competitivo em termos de primitivas.

Vamos montar o lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} Pr(s^t)\, \beta^t \log(c_t^i(s^t)) + \mu_i \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

Observe que, no item (a), especifica-se que os consumidores tomam decisões *antes* de observar o estado no período 0. Portanto, mesmo em $t = 0$, os consumidores levam em consideração a possibilidade de ocorrer o estado H ou o estado L. As CPOs em $t = 0$ são:

$$\begin{aligned} Pr(s^0 = H)\, u'(c_0^i(s^0 = H)) &= \mu^i\, q_0^0(s^0 = H) \\ Pr(s^0 = L)\, u'(c_0^i(s^0 = L)) &= \mu^i\, q_0^0(s^0 = L) \end{aligned}$$

De forma geral, as CPOs do problema do consumidor são tais que, $\forall i, \forall t, \forall s^t$:

$$\frac{\beta^t \, Pr(s^t) \, u'(c_t^i(s^t))}{Pr(s^0 = H) \, u'(c_0^i(s^0 = H))} = \frac{q_t^0(s^t)}{q_0^0(s^0 = H)} \tag{10}$$

Onde a divisão pela CPO em $s^0 = H$ foi escolhida de forma arbitrária (poderia ter sido com $s^0 = L$). As CPOs (10), assim como a restrição orçamentária dos agentes e a condição de *market clearing* são suficientes e necessárias para computação do equilíbrio:

$$\frac{\beta^t \, Pr(s^t) \, c_0^i(H)}{\pi \, c_t^i(s^t)} = \frac{q_t^0(s^t)}{q_0^0(H)} \tag{11}$$

$$\frac{c_0^A(H)}{c_t^A(s^t)} = \frac{c_0^B(H)}{c_t^B(s^t)} \tag{12}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, c_t^A(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, y_t^A(s^t) \tag{13}$$

$$c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) = y_t^A(s^t) + y_t^B(s^t) \tag{14}$$

Em que invocamos a Lei de Walras para excluir a restrição orçamentária do agente B.

Sabemos que, em mercados completos, o consumo não depende da história de eventos, apenas da renda agregada, de modo que:

$$c_t^i(s^t) = c_t^i(s_t) = \begin{cases} c^i(H) & \text{se} \quad s_t = H \\ c^i(L) & \text{se} \quad s_t = L \end{cases}$$

De modo que, em (12):

$$\begin{aligned}
\frac{c^A(H)}{c^A(s_t)} &= \frac{c^B(H)}{c^B(s_t)} \overset{s_t = L}{\Longrightarrow} \frac{c^A(H)}{c^A(L)} = \frac{c^B(H)}{c^B(L)} \\
\Rightarrow \frac{c^A(H)}{c^A(L)} &= \frac{y^A(H) + y^B(H) - c^A(H)}{y^A(L) + y^B(L) - c^A(L)} \\
\Rightarrow \frac{c^A(H)}{c^A(L)} &= \frac{3 - c^A(H)}{1 - c^A(L)} \\
\Rightarrow \frac{c^A(H)}{c^A(L)} &= 3 = \frac{c^B(H)}{c^B(L)} \qquad (15)
\end{aligned}$$

A condição (11) pode ser reescrita da seguinte forma, a partir da normalização $q_0^0(H) = 1$:

$$q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t \, Pr(s^t) \, c^A(H)}{\pi \, c^A(s^t)}$$

de modo que

$$q_t^0(s^t) = \begin{cases} \frac{\beta^t \, Pr(s^{t-1}, H)}{\pi} & \text{se} \quad s_t = H \\ \frac{\beta^t \, Pr(s^{t-1}, L) \, c^A(H)}{\pi \, c^A(L)} = \frac{3 \, \beta^t \, Pr(s^{t-1}, L)}{\pi} & \text{se} \quad s_t = L \end{cases} \tag{16}$$

Substituindo (15) e (16) em (13):

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, c_t^A(s^t) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, y_t^A(s^t)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty}\left[\sum_{s^{t-1}}\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1},H)}{\pi}\,c^A(H)+3\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1},L)}{\pi}\,c^A(L)\right]$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}\left[\sum_{s^{t-1}}\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1},H)}{\pi}\,y_t^A(H)+3\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1},L)}{\pi}\,y_t^A(L)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty}\left[\sum_{s^{t-1}}\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1})}{\pi}\,Pr(H)\,c^A(H)+3\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1})}{\pi}\,Pr(L)\,c^A(L)\right]$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}\left[\sum_{s^{t-1}}\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1})}{\pi}\,Pr(H)\,y_t^A(H)+3\beta^t\,\frac{Pr(s^{t-1})}{\pi}\,Pr(L)\,y_t^A(L)\right] \qquad \text{(assumindo independência)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty}\left[\beta^t\,c^A(H)+3\beta^t\,\frac{1-\pi}{\pi}\,c^A(L)\right]=\sum_{t=0}^{\infty}\left[\beta^t\,y_t^A(H)+3\beta^t\,\frac{1-\pi}{\pi}\,y_t^A(L)\right] \qquad \left(\textstyle\sum_{s^{t-1}} Pr(s^{t-1})=1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty}\left[\beta^t\,\frac{1}{\pi}c^A(H)\right]=\sum_{t=0}^{\infty}\left[2\beta^t+3\beta^t\,\frac{1-\pi}{\pi}\right] \qquad \left(\textstyle\sum_t \beta^t=1/(1-\beta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad c^A(H)=3-\pi \tag{17}$$

De modo que a alocação de equilíbrio é dada por (usando (15) e factibilidade):

$$c^A(H)=3-\pi;\quad c^A(L)=1-\frac{1}{3}\,\pi;\quad c^B(H)=\pi;\quad c^B(L)=\frac{1}{3}\,\pi$$

(c) Determine os preços dos ativos de Arrow em termos de primitivas.

Os ativos de Arrow são aqueles que, dada a realização do estado em t, pagam uma unidade de consumo no próximo período, contingente na realização de um estado específico em $t+1$. Esse conceito vem da formulação do problema descentralizado em mercados sequenciais. Sabemos, de (16), os preços de Arrow-Debreu. Deste modo, os preços dos ativos de Arrow são dados por:

$$\tilde{Q}_t(H|H)=\frac{q_{t+1}^0(H,H,s^{t-1})}{q_t^0(H,s^{t-1})}=\frac{\beta^{t+1}\frac{Pr(H,H,s^{t-1})}{\pi}}{\beta^t\frac{Pr(H,s^{t-1})}{\pi}}=\frac{\beta\,Pr(s^{t-1})\,Pr(H)\,Pr(H)}{Pr(s^{t-1})\,Pr(H)}=\beta\pi$$

$$\tilde{Q}_t(L|H)=\frac{q_{t+1}^0(L,H,s^{t-1})}{q_t^0(H,s^{t-1})}=\frac{3\beta^{t+1}\frac{Pr(L,H,s^{t-1})}{\pi}}{\beta^t\frac{Pr(H,s^{t-1})}{\pi}}=\frac{3\beta\,Pr(s^{t-1})\,Pr(H)\,Pr(L)}{Pr(s^{t-1})\,Pr(H)}=3\beta(1-\pi)$$

$$\tilde{Q}_t(H|L)=\frac{q_{t+1}^0(H,L,s^{t-1})}{q_t^0(L,s^{t-1})}=\frac{\beta^{t+1}\frac{Pr(H,L,s^{t-1})}{\pi}}{3\beta^t\frac{Pr(L,s^{t-1})}{\pi}}=\frac{\beta\,Pr(s^{t-1})\,Pr(L)\,Pr(H)}{3Pr(s^{t-1})\,Pr(L)}=\frac{\beta}{3}\pi$$

$$\tilde{Q}_t(L|L)=\frac{q_{t+1}^0(L,L,s^{t-1})}{q_t^0(L,s^{t-1})}=\frac{3\beta^{t+1}\frac{Pr(L,L,s^{t-1})}{\pi}}{3\beta^t\frac{Pr(L,s^{t-1})}{\pi}}=\frac{\beta\,Pr(s^{t-1})\,Pr(L)\,Pr(L)}{Pr(s^{t-1})\,Pr(L)}=\beta(1-\pi)$$

(d) Use a sua resposta do item (c) para determinar a taxa de retorno médio de um título livre de risco (de um período) nessa economia. Um título livre de risco é aquele que paga uma unidade de consumo no próximo período independentemente da realização do estado e o retorno de um ativo é definido como seu payoff divido pelo seu preço.

Ora, se o título livre de risco paga uma unidade de consumo no próximo período independentemente da realização do estado em $t+1$, seu preço $Q_t^{RF}(s_t)$ deverá ser igual à soma do preço de dois ativos de Arrow:

$$Q_t^{RF}(H) = \tilde{Q}_t(H|H) + \tilde{Q}_t(L|H) = \beta\pi + 3\beta(1-\pi) = \beta(3-2\pi)$$

$$Q_t^{RF}(L) = \tilde{Q}_t(H|L) + \tilde{Q}_t(L|L) = \frac{\beta}{3}\pi + \beta(1-\pi) = \frac{\beta}{3}(3-2\pi)$$

De modo que a taxa de retorno média de um título de um período livre de risco é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R^{RF}) &= Pr(H)\,\frac{1}{Q_t^{RF}(H)} + Pr(L)\,\frac{1}{Q_t^{RF}(L)} \\
&= \pi\,\frac{1}{\beta(3-2\pi)} + (1-\pi)\,\frac{3}{\beta(3-2\pi)} \\
&= \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

Exercício 3 (Algoritmo de Negishi)

O Algoritmo de Negishi pode ser utilizado para computar o equilíbrio de Arrow-Debreu em mercados completos. Por meio de um processo iterativo, atualizamos os valores dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição orçamentária do problema dos agentes de modo a encontrar sequências de consumo e preços de equilíbrio. O código-base para a resolução deste exercício se encontra na wiki da disciplina.

Neste caso específico, a economia é povoada por três agentes. Em $t = 0$ o estado s_0 ocorre com certeza. Há duas possíveis realizações de estado no tempo $t = 1$, $S = \{1, 2\}$, cada um com a mesma probabilidade de ocorrência. No cenário base, os agentes recebem uma unidade de dotação em cada estado.

(a) Compute os multiplicadores de Lagrange para o cenário base. Interprete os resultados. Qual é a sequência de consumo para cada agente e quais são os preços de equilíbrio? (Atenção com a definição dos possíveis pares de preço e consumo)

Para este item não é necessário fazer alterações no código, apenas rodá-lo. O algoritmo deve convergir na primeira iteração, dado que a suposição inicial dos multiplicadores de Lagrange bate exatamente com os valores de equilíbrio alcançados pelo algoritmo.

```
# Inicializando processo iterativo
mu, C, Q = NegishiAlgorithm([1.0, 1.0, 1.0],10000,1e-2)


--------------------------------------------------------------
Iteration: 1 | Error: 0.0
Convergence reached after 1 iterations.
([1.0, 1.0, 1.0], [1.0 1.0 1.0; 1.0 1.0 1.0; 1.0 1.0 1.0], [1.0, 0.475, 0.475])
```

Isto é, os multiplicadores de Lagrange são iguais a um para cada agente. Dado que os agentes são idênticos em todas as esferas relevantes, esse resultado é esperado pela simetria. A sequência de consumo é dada por uma unidade de consumo para cada agente em cada estado possível, diga-se, $c^i(s^1 = [0,1]) = [1,1], c^i(s^1 = [0,2]) = [1,1]$ para cada $i = A, B, C$, enquanto os preços de equilíbrio são dados por $q_0^0(s^0) = 1, q_1^0(s^1 = [0,1]) = q_1^0(s^1 = [0,2]) = 0.475$. Os preços em $t = 1$ refletem a influência do fator de desconto e do risco atrelado à realização dos estados em sua computação.

(b) Suponha agora que o segundo consumidor receba duas unidades de dotação caso $s_1 = 1$, e três unidades de dotação caso $s_1 = 2$. Compute os pesos de Pareto associados aos agentes e interprete os resultados. Qual é a sequência de consumo para cada agente e quais são os preços de equilíbrio? (Atenção com a definição dos possíveis pares de preço e quantidades)

Para mudar a dotação do segundo agente, basta modificar as entradas apropriadas na segunda coluna da matriz de dotações.

```
# Mudando dotacoes do agente B
W[2,2] = 2
W[3,2] = 3
```

```

# Inicializando processo iterativo
mu, C, Q = NegishiAlgorithm([1.0, 1.0, 1.0],10000,1e-2)

-------------------------------------------------------------
Convergence reached after 245 iterations.
([1.0, 0.7826085988474126, 1.0028816449183782],
[0.8283341867861985 1.3497313383225216 0.8219344748975749;
1.1044455823790003 1.7996417844261254 1.0959126331949922;
1.3805569779718019 2.249552230529729 1.3698907914924094],
[1.098745747163824, 0.45198232143888323, 0.4042652781464644])
```

Veja que, agora que o segundo consumidor está mais rico, o multiplicador de Lagrange associado a ele se torna menor.

O que foi pedido nesta questão foram os pesos de Pareto associados aos agentes. Vamos calculá-lo por meio da sua relação inversa com os multiplicadores de Lagrange:

```
# Obtendo os pesos de Pareto
ones(3)./mu

3-element Vector{Float64}:
 1.0
 1.2777779358324848
 0.9971266350989875
```

De modo que o peso de Pareto associado ao segundo consumidor aumenta, como esperado. O planejador atribui maior peso ao agente mais rico por questões de eficiência, visando maximizar o bem-estar agregado. Dado que tomamos o primeiro consumidor por referência, seu peso de Pareto se mantém inalterado; podemos atribuir a diferença em relação ao valor esperado do peso de Pareto associado ao terceiro agente (valor unitário) com o encontrado (apx. 0.997) a erros computacionais.

Com relação às sequências de consumo, temos que, para o agente A, $c^A(s = \{0, 1\}) = \{0.828, 1.104\}$, $c^A(s = \{0, 2\}) = \{0.828, 1.380\}$; para o agente B, $c^A(s = \{0, 1\}) = \{1.349, 1.799\}$, $c^A(s = \{0, 2\}) = \{1.349, 2.249\}$; para o agente C, $c^A(s = \{0, 1\}) = \{0.821, 1.095\}$, $c^A(s = \{0, 2\}) = \{0.821, 1.369\}$. Já a sequência de preços é $q^0_0(s^0) = 1.098, q^0_1(s^1 = \{0, 1\}) = 0.451, q^0_1(s^1 = \{0, 2\}) = 0.404$.

(c) Repita o procedimento dos itens anteriores, mantendo a hipótese sobre dotações do item (b), mas também modificando a probabilidade de realização do estado 1 para 0.3 e a probabilidade de realização do estado 2 para 0.7. Interprete o que acontece com preços e pesos de Pareto.

Repetindo o item a, alterando as probabilidades de ocorrência dos estados em $t = 1$:

```
# Redefinindo dotacoes como no item (a)
W[2,2] = 1
W[3,2] = 1
# Alterando probabilidade de ocorrencia dos estados em t=1
```

```
P0[2] = 0.3
P0[3] = 0.7
# Inicializando processo iterativo
mu, C, Q = NegishiAlgorithm([1.0, 1.0, 1.0],10000,1e-2)


--------------------------------------------------------------
Iteration: 1 | Error: 0.0
Convergence reached after 1 iterations.
([1.0, 1.0, 1.0],
[1.0 1.0 1.0; 1.0 1.0 1.0; 1.0 1.0 1.0],
[1.0, 0.285, 0.6649999999999999])
```

Agora repetindo o item (b) com as novas probabilidades:

```
# Repetindo especificacoes do item (b) com novas probs.
W[2,2] = 2
W[3,2] = 3
# Inicializando processo iterativo
mu, C, Q = NegishiAlgorithm([1.0, 1.0, 1.0],10000,1e-2)


--------------------------------------------------------------
Iteration: 269 | Error: 0.009026094859953648
Convergence reached after 269 iterations.
([1.0, 0.7640404167313927, 1.0028696104048294],
[0.8103918649320198 1.385458060230094 0.8041500748448388;
1.080522486574232 1.8472774136355172 1.0722000997912458;
1.3506531082164444 2.3090967670409404 1.3402501247376526],
[1.110842439775235, 0.27417506514780504, 0.5722024778459586])
```

Quanto aos pesos de Pareto:

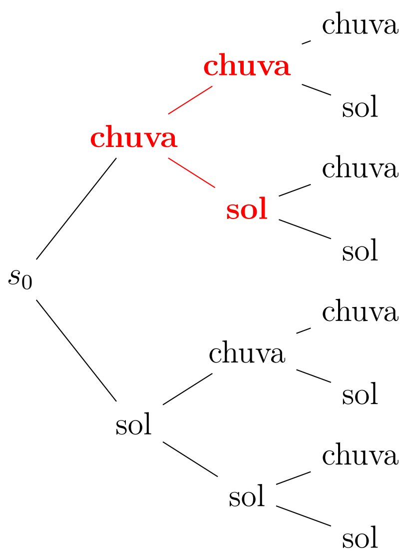
```
# Obtendo os pesos de Pareto
ones(3)./mu

3-element Vector{Float64}:
 1.0
 1.3088312844470396
 0.9971386006963847
```

As interpretações são as mesmas de antes, com a diferença que agora os preços dos estados mais prováveis são maiores. Isto reflete o prêmio de risco pago pelos agentes.

Exercício 4 (Árvore de Incerteza - P1, 2023)

Suponha uma economia em que a incerteza é descrita pela árvore abaixo:



Os preços em um mercado completo com todas as negociações feitas em $t = 0$ são os seguintes, para as três histórias marcadas:

- $q(s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}) = \frac{1}{3}$
- $q(s^2 = \{s_0, \text{chuva,chuva}\}) = \frac{1}{6}$
- $q(s^2 = \{s_0, \text{chuva,sol}\}) = \frac{1}{9}$

(a) Se olharmos para uma economia de mercados sequencialmente completos que gera a mesma trajetória de consumo para todos agentes, quais deveriam ser os preços de ativos contingentes nos mercados que estariam abertos em $s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}$?

Os preços descritos acima são os preços de ativos de Arrow-Debreu, e podem ser usados para calcular os preços de ativos contingentes nos mercados abertos em $s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}$ da seguinte forma:

$$\tilde{Q}_1(s_2 = \text{chuva} \,|\, s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}) = \frac{q(s^2 = \{s_0, \text{chuva,chuva}\})}{q(s^1 = \{s_0, \text{chuva}\})} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{Q}_1(s_2 = \text{sol} \,|\, s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}) = \frac{q(s^2 = \{s_0, \text{chuva,sol}\})}{q(s^1 = \{s_0, \text{chuva}\})} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$$

Repare que o enunciado pede apenas os preços dos mercados abertos, em $t = 1$, na sequência $s^1 = \{s_0, \text{chuva}\}$. Devido a falta de informação sobre a precificação de ativos em outros caminhos/sequências alternativas, não poderíamos precificar os ativos contingentes desses outros mercados.

Exercício 5 (Equilíbrio com crenças heterogêneas - P1, 2023)

Uma economia de trocas puras é povoada por dois consumidores. O consumidor i tem preferências sobre sequências de consumo contingentes no tempo $\{c_t^i\}$ ordenadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t\, u(c_t^i(s^t))\, \pi_t^i(s^t),$$

em que $u(c) = \log(c)$ e $\pi_t^i(s^t)$ é a probabilidade que o consumidor i atribui à história s^t.

O espaço de estado é invariante no tempo. Em particular, $s_t \in S = \{\Delta, 0.5, 1-\Delta\}$ para todo $t \geq 0$ e $\Delta \in [0,1]$. Somente duas histórias são possíveis para $t = 0, 1, 2, ...$:

$$\begin{array}{llllll} \text{história 1:} & 0.5, & 1-\Delta, & 1-\Delta, & 1-\Delta, & \dots \\ \text{história 2:} & 0.5, & \Delta, & \Delta, & \Delta, & \dots \end{array}$$

O consumidor 1 atribui probabilidade p à história 1 e probabilidade $(1-p)$ à história 2, enquanto o consumidor 2 atribui probabilidade $(1-p)$ à história 1 e probabilidade p à história 2.

As dotações dos consumidores são dadas por:

$$y_t^1 = s_t$$
$$y_t^2 = 1 - s_t.$$

(a) Descreva a incerteza do problema em um diagrama de árvore.

$$\begin{array}{lll} & \diagup & (1-\Delta) - (1-\Delta) - (1-\Delta) - \cdots \\ s_0 = \frac{1}{2} & & \\ & \diagdown & \Delta \text{ —— } \Delta \text{ —— } \Delta \text{ —— } \cdots \end{array}$$

(b) Defina um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu, em que mercados completos de consumo contingente a cada história estão abertos na data $t = 0$.

Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu é uma distribuição inicial s_0, uma alocação de consumo $\{c_t^i(s^t)\}_{\forall t,i,s^t}$ — onde $s^t = \{s_t\}_{\forall t}$ é a história completa até o tempo t — e um sistema de preços $\{q_t^0(s^t)\}_{\forall t,s^t}$ tais que

(i) Dado s_0, cada consumidor i soluciona

$$\max_{c_t^i(s^t)} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t\, \pi_t^i(s^t)\, u[c_t^i(s^t)]$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, y_t^i(s^t)$$

(ii) A condição de *market clearing* é satisfeita, $\sum_{i=1}^{2} c_t^i(s^t) = \sum_{i=1}^{2} y_t^i(s^t) \equiv Y(s_t)$

(c) Compute este equilíbrio para $\Delta = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2}$. Descreva a alocação de consumo, os preços do consumo contingente e a desigualdade de consumo realizada para cada história.

Para evitar confusão de notação, vamos redefinir o conjunto de consumidores como $i \in I = \{A, B\}$. Lembre-se da condição de factibilidade:

$$c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) = Y(s^t) \tag{18}$$

Montamos o lagrangeano e tiramos as condições de primeira ordem:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \, \ln[c_t^i(s^t)] + \mu_i \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \, [y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

$$\text{FOC:} \quad [c_t^i(s^t)]: \quad \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \frac{1}{c_t^i(s^t)} - \mu_i \, q_t^0(s^t) = 0 \tag{19}$$

Normalizamos $q_0^0(s_0) = 1$, de modo que em $t = 0$ temos $\mu_i = [c_0^i(s_0)]^{-1}$; assim,

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \, \frac{c_0^i(s_0)}{c_t^i(s^t)}$$

Aqui, uma sutileza **muito importante**: quando assumimos $p = \frac{1}{2}$, temos que $p = 1 - p$. Logo, os agentes concordam nas probabilidades que eles atribuem a cada galho da árvore, não gerando probabilidades subjetivas! (i.e., $\pi_t^A(s^t) = \pi_t(s^t) = \pi_t^B(s^t)$). Analogamente, $\Delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta = 1 - \Delta$, nos dando dotações idênticas em ambas as histórias.

No entanto, isso **NÃO SIGNIFICA** que duas histórias iguais impliquem termos uma única história! Note que, em $t = 0$, ainda não foi realizado em qual galho da árvore estaremos futuramente, independente de qual seja Δ. Logo, sob a ótica deste período, teríamos que $\pi_t(s^t) = \frac{1}{2} = p$. Apenas em s_0 temos concordância que estamos na mesma posição, sem ramificações na árvore. Logo, $\pi_0(s_0) = 1$. Sendo assim, vamos utilizar tais informações para recuperar $q_t^0(s^t)$:

$$\begin{aligned}
&\text{Se } t = 0: \ \frac{1}{q_0^0(s_0)} \left[\pi_0^A(s_0) \, c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s_0) \, c_0^B(s_0)\right] = 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{q_0^0(s_0)} \, \pi_0(s_0) \left[\cancelto{1}{c_0^A(s_0) + c_0^B(s_0)}\right] = 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{q_0^0(s_0)} = 1 \\
&\Rightarrow q_0^0(s_0) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Se } t \geq 1: \ \beta^t \frac{1}{q_0^t(s^t)} \left[\pi_t^A(s^t) \, c_t^A(s^t) + \pi_t^B(s^t) \, c_t^B(s^t)\right] = 1 \\
&\Rightarrow \beta^t \frac{1}{q_t^0(s^t)} \, \pi_t(s^t) \left[\cancelto{1}{c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t)}\right] = 1 \\
&\Rightarrow \beta^t \frac{1}{q_t^0(s^t)} \, \frac{1}{2} = 1 \\
&\Rightarrow q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t}{2}
\end{aligned}$$

Agora, vamos utilizar a R.O. para recuperar $c_0^i(s_0)$, usando o fato de que $c_t^i(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t) \frac{c_0^i(s_0)}{q_t^0(s^t)}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, c_t^i(s^t) &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, y_t^i(s^t) \\
\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \cancel{q_t^0(s^t)}\, \beta^t \pi_t(s^t) \frac{c_0^i(s_0)}{\cancel{q_t^0(s^t)}} &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, \frac{1}{2} \\
c_0^i(s_0) \cancelto{\frac{1}{1-\beta}}{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t} \cancelto{1}{\sum_{s^t} \pi_t(s^t)} &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t)}_{\bigstar}
\end{aligned}
$$

em que

$$
(\bigstar) \equiv 1 + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \cdots = \frac{1}{1-\beta}
$$

Esta soma dupla de $\frac{\beta^t}{2}$ se deve ao fato de termos **duas** histórias s^t apenas, para $t \geq 1$ (Logo, ao somarmos em s^t, duplicamos os valores, por eles serem iguais nos dois galhos da árvore). Note que, em $t = 0$, temos apenas o valor 1, pois não há incerteza neste período.

Logo, retomando a manipulação da R.O.:

$$
\begin{aligned}
\frac{c_0^i(s_0)}{1-\beta} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\beta} \\
c_0^i(s_0) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Substituímos esse valor em $c_t^i(s^t) = \beta^t \pi_t(s^t) \frac{c_0^i(s_0)}{q_t^0(s^t)}$ para obter a sequência de consumo com $t \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
c_t^i(s^t) &= \beta^t \cancelto{\frac{1}{2}}{\pi_t(s^t)} \frac{c_0^i(s_0)}{\cancelto{\beta^t \frac{1}{2}}{q_t^0(s^t)}} \\
c_t^i(s^t) &= \cancel{\beta^t \frac{1}{2}} \frac{c_0^i(s_0)}{\cancel{\beta^t \frac{1}{2}}} \\
c_t^i(s^t) &= c_0^i(s_0) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

de modo que as sequências de consumo e preços são dadas por:

$$
\begin{aligned}
\{c_t^i(s^t)\}_{\forall i, s^t} &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots \right\} \\
\{q_t^0(s^t)\}_{\forall s^t} &= \left\{ 1, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \dots \right\}
\end{aligned}
$$

Logo, o consumo é o mesmo para os dois agentes (não há desigualdade).

(d) Agora compute este equilíbrio para um caso geral, com $p \geq \frac{1}{2}$ e $\Delta \in [0,1]$.

Pela condição de factibilidade,

$$
\begin{aligned}
1 &= c_t^A(s_t) + c_t^B(s^t) \\
q_t^0(s^t) &= \beta^t[\pi_t^A(s^t)\, c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t)\, c_0^B(s_0)]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

De modo que na restrição orçamentária:

$$
\begin{aligned}
&\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, c_t^i(s^t) = \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, y_t^i(s^t) \\
\overset{i=A}{\Rightarrow}\quad & \sum_t \sum_{s^t} \cancel{q_t^0(s^t)}\, \beta^t \pi_t^A(s^t)\, \frac{c_0^A(s^0)}{\cancel{q_t^0(s^t)}} = \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)\, s_t \\
\overset{(20)}{\Longrightarrow}\quad & c_0^A(s^0) \sum_t \beta^t \cancelto{1}{\sum_{s^t} \pi_t^A(s^t)} = c_0^A(s_0) \underbrace{\sum_t, \beta^t \sum_{s^t} \pi_t^A(s^t)\, s_t}_{\star} + c_0^B(s_0) \underbrace{\sum_t, \beta^t \sum_{s^t} \pi_t^B(s^t)\, s_t}_{\star\star}
\end{aligned}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
(\bigstar) &\equiv \left[\left(p\frac{1}{2} + (1-p)\frac{1}{2}\right) + \beta\,(p(1-\Delta) + (1-p)\Delta) + \beta^2\,(p(1-\Delta) + (1-p)\Delta) + \dots\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{[p(1-\Delta) + (1-p)\Delta]\,\beta}{1-\beta} \\
(\bigstar\bigstar) &\equiv \left[\left((1-p)\frac{1}{2} + p\frac{1}{2}\right) + \beta\,((1-p)(1-\Delta) + p\Delta) + \beta^2\,((1-p)(1-\Delta) + p\Delta) + \dots\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{[(1-p)(1-\Delta) + p\Delta]\,\beta}{1-\beta}
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \frac{c_0^A(s_0)}{1-\beta} = c_0^A(s_0)\, &\left[\frac{1}{2} + \frac{[p(1-\Delta) + (1-p)\Delta]\,\beta}{1-\beta}\right] \\
&+ (1 - c_0^A(s^0))\, \left[\frac{1}{2} + \frac{[(1-p)(1-\Delta) + p\Delta]\,\beta}{1-\beta}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\quad c_0^A(s_0) = \frac{1}{2} = c_0^A(s_0)
$$

Conforme prometido na monitoria, vou abrir as contas mais explicitamente para mostrar como chegar em $c_0^A(s_0) = \frac{1}{2}$:

Note que podemos abrir as expressões dos somatórios como:

$$
\begin{cases}
p(1-\Delta) + (1-p)\Delta = p + \Delta - 2p\Delta \\
(1-p)(1-\Delta) + p\Delta = 1 - (p + \Delta - 2p\Delta)
\end{cases}
$$

Chamando $(p + \Delta - 2p\Delta) = \alpha$, podemos reescrever a R.O.:

$$\frac{c_0^A(s_0)}{1-\beta} = c_0^A(s_0)\left[\frac{1}{2}+\frac{\alpha\beta}{1-\beta}\right] + (1-c_0^A(s^0))\left[\frac{1}{2}+\frac{[1-\alpha]\beta}{1-\beta}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^A(s_0)}{2} + \frac{c_0^A(s_0)\alpha\beta}{1-\beta} + \frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\beta} - \frac{c_0^A(s_0)}{2} - \frac{(1-\alpha)c_0^A(s_0)\beta}{1-\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^A(s_0)\alpha\beta}{1-\beta} + \frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\beta} - \frac{c_0^A(s_0)\beta}{1-\beta} + \frac{\alpha c_0^A(s_0)\beta}{1-\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{c_0^A(s_0)\beta}{1-\beta}[2\alpha-1] + \frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\beta}$$

Usando esta última expressão, isolamos c:

$$\frac{c_0^A(s_0)}{1-\beta}[1+\beta-2\alpha\beta] = \frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\beta} = \frac{1-\beta+(2-2\alpha)\beta}{2(1-\beta)} = \frac{1+\beta-2\alpha\beta}{2(1-\beta)}$$

Com esta última linha simplificada, agora é fácil de enxergar que $c_0^A(s_0) = \frac{1}{2}$, depois de muito sofrimento algébrico.

Podemos então encontrar as sequências de consumo a partir de:

$$\begin{aligned} c_t^i(s^t) &= \beta^t \, \pi_t^i(s^t) \, \frac{c_0^i(s_0)}{q_t^0(s^t)} \\ &= \frac{\pi_t^i(s^t)\, c_0^i(s_0)}{\pi_t^A(s^t)\, c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t)\, c_0^B(s_0)} \end{aligned}$$

Então:

$$\{c_t^A(\bar{s}^t = \{0.5, 1-\Delta, 1-\Delta, \dots\}\} = \left\{\frac{1}{2}, p, p, \dots\right\}$$

$$\{c_t^A(\underline{s}^t = \{0.5, \Delta, \Delta, \dots\}\} = \left\{\frac{1}{2}, 1-p, 1-p, \dots\right\}$$

$$\{c_t^B(\bar{s}^t = \{0.5, 1-\Delta, 1-\Delta, \dots\}\} = \left\{\frac{1}{2}, 1-p, 1-p, \dots\right\}$$

$$\{c_t^B(\underline{s}^t = \{0.5, \Delta, \Delta, \dots\}\} = \left\{\frac{1}{2}, p, p, \dots\right\}$$

$$\{q_t^0(\bar{s}^t = \{0.5, 1-\Delta, 1-\Delta, \dots\}\} = \left\{1, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \dots\right\}$$

$$\{q_t^0(\underline{s}^t = \{0.5, \Delta, \Delta, \dots\}\} = \left\{1, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \dots\right\}$$

(e) Como os preços e a desigualdade de consumo dependem de Δ? E de p? Explique.

O consumo independe de Δ, enquanto os preços independem de Δ e de p. Cada agente consome relativamente mais nas histórias que acredita serem relativamente mais prováveis. Os preços refletem os valores de equilíbrio atribuídos pelos agentes, dadas suas preferências e crenças sobre realização de eventos; surgem da interação de oferta e demanda das reivindicações de consumo, em que os agentes realizam trocas com o intuito de otimizar seu consumo ao longo dos estados.
