

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 1. Noções sobre conjuntos no espaço euclidiano

#### Objetivos

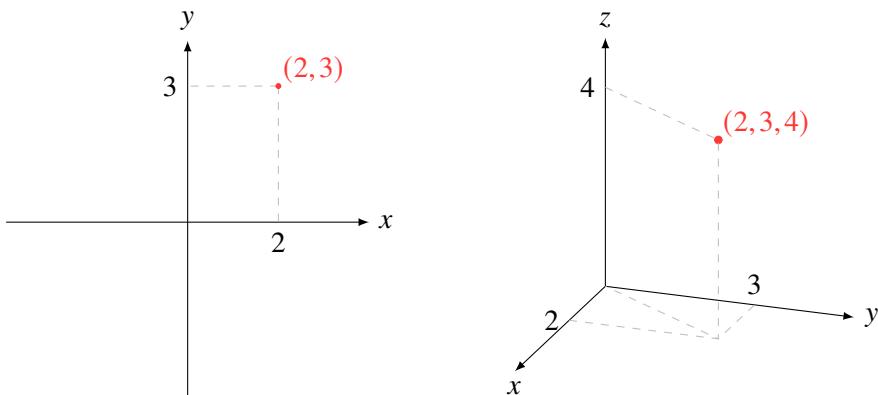
- Compreender os conceitos fundamentais de conjuntos em  $\mathbb{R}^n$
- Identificar e descrever geometricamente conjuntos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .
- Interpretação de notações envolvendo conjuntos em  $\mathbb{R}^n$
- Definir e exemplificar conjuntos abertos, fechados, limitados e compactos.
- Interpretar os conceitos de interior, fronteira e complemento de conjuntos.

## 1.1 Conjuntos no Espaço Euclidiano

Nesta primeira parte, estudamos conjuntos no plano e no espaço, que formam a base para o Cálculo a Várias Variáveis. A compreensão da topologia no espaço euclidiano é essencial para o estudo de funções de várias variáveis.

Começaremos lembrando que o símbolo  $\mathbb{R}^n$  representa o espaço euclidiano  $n$ -dimensional, também conhecido como espaço real  $n$ -dimensional, e é o conjunto das  $n$ -tuplas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  em que cada coordenada  $x_i$  é um número real correspondente à coordenada do ponto no espaço. O índice  $n$  em  $\mathbb{R}^n$  indica o número de dimensões do espaço euclidiano.

Por exemplo,  $\mathbb{R}^2$  representa o espaço euclidiano bidimensional, onde os pontos são representados por pares ordenados de números reais  $(x, y)$  e podem ser visualizados como pontos em um plano cartesiano (Figura 1.1a). Similarmente,  $\mathbb{R}^3$  representa o espaço tridimensional, onde os pontos são representados por triplas ordenadas de números reais  $(x, y, z)$  e podem ser visualizados como pontos em um espaço tridimensional (Figura 1.1b).

(a) O ponto  $(2, 3)$  em  $\mathbb{R}^2$ (b) O ponto  $(2, 3, 4)$  em  $\mathbb{R}^3$ **Figura 1.1:** Pontos no espaço euclidiano

**Definição 1.1 (Conjunto no espaço euclidiano).**

Um *conjunto no espaço euclidiano*  $\mathbb{R}^n$  é uma coleção de pontos em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, uma coleção de  $n$ -tuplas de números reais.

Exemplos de conjuntos no plano são as retas e os círculos. As retas são conjuntos de pontos que satisfazem uma equação linear nas variáveis  $x$  e  $y$ , da forma

$$y = mx + b, \quad (1.1)$$

onde  $m$  e  $b$  são constantes que representam, respectivamente, a inclinação da reta em relação ao eixo  $x$  e o ponto onde a reta intercepta o eixo  $y$  (também chamado de *intercepto em y*). Assim, a reta  $r$  de equação (1.1) é o conjunto:

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = mx + b\} \equiv \{(x, mx + b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Os círculos, por sua vez, são conjuntos do plano que consistem em todos os pontos que estão a uma distância fixa de um certo ponto, chamado centro do círculo<sup>1</sup>. Essa distância é chamada de raio do círculo. Matematicamente, um círculo  $C$  com centro em  $(h, k)$  e raio  $r$  pode ser descrito pela equação

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \quad (1.2)$$

Essa equação representa todos os pontos  $(x, y)$  no plano cartesiano cuja distância até o ponto  $(h, k)$  é *igual* ao raio  $r$ . Ou seja,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}.$$

<sup>1</sup>Lembre que a distância entre dois pontos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é dada pela fórmula

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Claramente, a distância é sempre um valor não negativo e representa o comprimento do segmento de reta que conecta os dois pontos. Tal fórmula é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

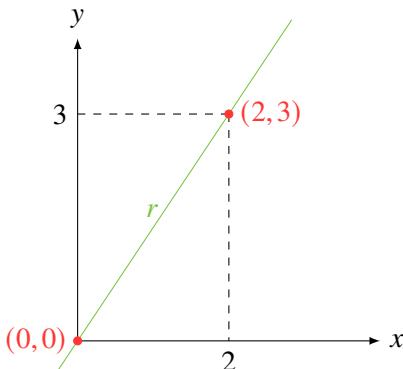
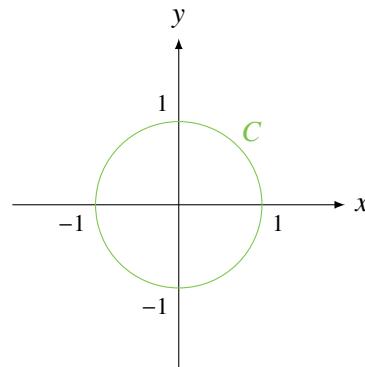
Na Figura 1.2 mostramos dois exemplos desses tipos de conjuntos no plano. O primeiro é a reta  $r$  que une os pontos  $(0,0)$  e  $(2,3)$  (Figura 1.2a), ou seja, o conjunto

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 3/2x\} \equiv \{(x, 3/2x) \in \mathbb{R}^2\}.$$

O segundo é o círculo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\},$$

isto é, o conjunto de pontos no plano que está a uma distância da origem de 1 unidade (Figura 1.2b).

(a) A reta  $r$ (b) O círculo  $C$ 

**Figura 1.2:** Exemplos de conjuntos no plano

No espaço euclidiano tridimensional também conhecemos vários exemplos de conjuntos. Por exemplo, os planos são descritos por uma equação linear da forma

$$ax + by + cz = d, \quad (1.3)$$

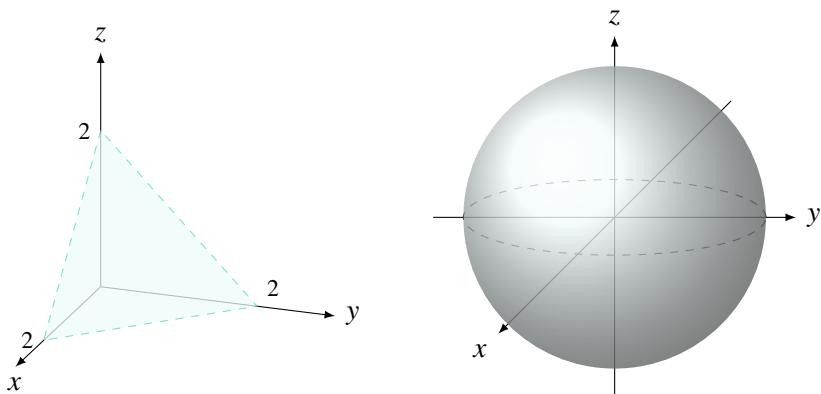
onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes reais. Na Figura 1.3a está representado o plano cuja equação é  $x + y + z = 2$ , ou seja, o conjunto de pontos

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 2\}.$$

Outro exemplo é a esfera, que, analogamente ao círculo no plano, é o conjunto dos pontos que equidistam de um ponto fixo chamado centro:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}, \quad (1.4)$$

Na Figura 1.3b temos a esfera centrada na origem e de raio 1, ou seja, o conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^3$  que está a uma distância fixa de 1 unidade da origem.



(a) Representação no primeiro quadrante do plano cuja equação é  $x + y + z = 2$ .

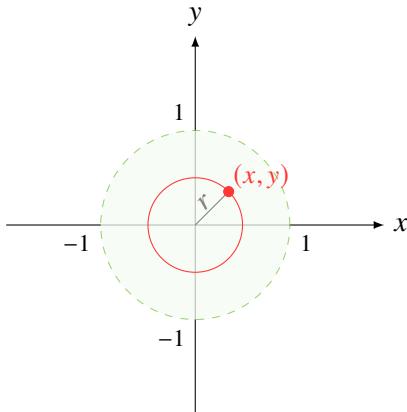
(b) A esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Figura 1.3**

Até o momento, estudamos conjuntos no plano e no espaço que podem ser descritos por uma única equação relacionando suas coordenadas. Esses conjuntos são de grande importância no estudo de funções de várias variáveis, pois representam os chamados *conjuntos de nível*, que são aqueles conjuntos de pontos onde uma função assume um mesmo valor, fundamentais para a análise gráfica e geométrica dessas funções. Além disso, também surgem naturalmente como expressões de restrições em problemas de otimização, nos quais buscamos maximizar ou minimizar uma função sujeita a condições impostas por outras.

Mas, e se, por exemplo, quisermos considerar todos os pontos que estão “dentro” de um círculo, ou “dentro” de uma esfera? Como poderíamos repre-

sentar *analiticamente* o conjunto dos pontos que estão dentro do círculo  $C$  da Figura 1.2b? Para isto, basta observar que qualquer ponto  $p = (x, y)$  nesse conjunto está sobre um círculo centrado na origem cujo raio  $r$  é estritamente menor do que 1 (vide Figura 1.4), isto é,  $x^2 + y^2 = r^2 < 1$ .



**Figura 1.4:** A bola  $B(O, 1)$  de raio 1 e o ponto  $(x, y)$  dentro do círculo.

Logo, esse conjunto é

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}.$$

Intuitivamente, estaremos “preenchendo” o círculo, obtendo uma área no plano. Em termos matemáticos, esse preenchimento corresponde a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^2$ .

De forma geral, uma *bola aberta* é uma região geométrica no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  que consiste em todos os pontos que estão a uma distância menor que um determinado raio positivo de um ponto central especificado. Mais precisamente, dado um ponto  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ , a bola aberta de raio  $r > 0$  centrada em  $\mathbf{x}$  é denotada por  $B(\mathbf{x}, r)$  e é definida como:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\},$$

onde  $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  representa a distância entre os pontos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Por exemplo, o conjunto dos pontos que estão dentro da esfera da Figura 1.3b é a bola aberta

$$B(O, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

onde  $O$  é a origem do espaço euclidiano tridimensional.

### Definição 1.2 (Região).

Chamaremos de *região* em  $\mathbb{R}^n$  qualquer conjunto que contenha pontos de uma bola aberta em torno de cada um de seus pontos.

### Exemplo 1.1 (Região de vínculo orçamentário: dois produtos).

Suponha que uma empresa tem um orçamento limitado de R\$ 1000 para investir em duas atividades: a produção de um produto  $X$  e a produção de um produto  $Y$ . O custo unitário de produção de  $X$  é R\$ 50 e de  $Y$  é R\$ 30. A empresa deseja determinar todas as combinações possíveis de produção de  $X$  e  $Y$  que se encaixam dentro do seu orçamento.

Denotemos por  $x$  o número de unidades do produto  $X$  a ser produzido e  $y$  o número de unidades do produto  $Y$  a ser produzido. O custo total de produção é dado por

$$C = 50x + 30y.$$

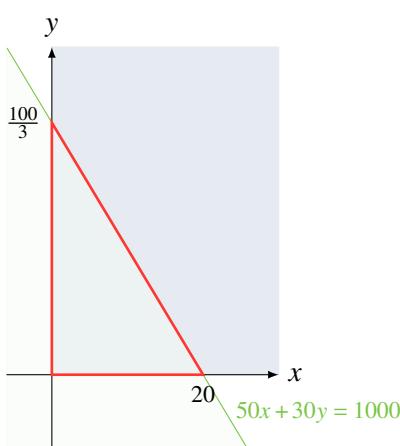
A restrição do orçamento pode ser escrita como  $C \leq 1000$ , ou seja,

$$50x + 30y \leq 1000.$$

Além disso, sendo  $x$  e  $y$  quantidades, ambas variáveis são não negativas. Concluindo,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 50x + 30y \leq 1000\}.$$

A figura a seguir ressume o raciocínio.



### Exemplo 1.2 (Região de vínculo orçamentário: três produtos).

Um consumidor dispõe de um orçamento de R\$ 3.000 para comprar três tipos de roupas:  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Os preços unitários desses produtos são R\$ 10, R\$ 50 e R\$ 100, respectivamente. Determine todas as combinações possíveis das quantidades de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  que ele pode adquirir, respeitando o limite do orçamento.

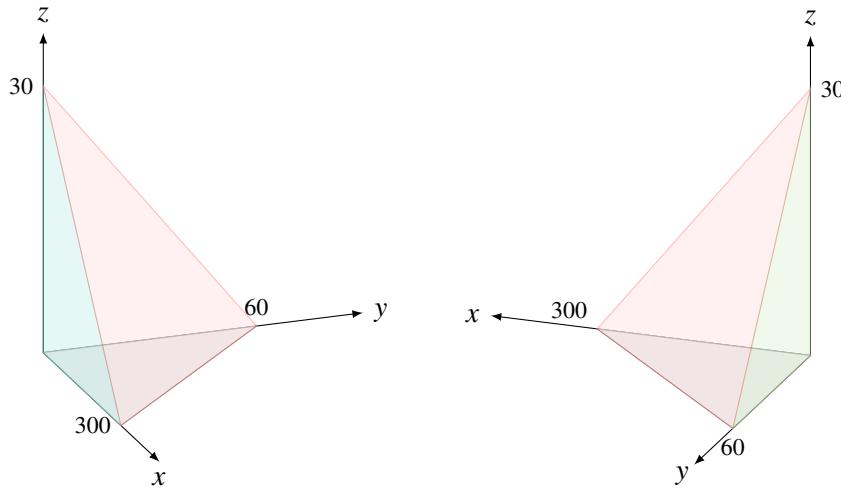
Definindo  $x$  como a quantidade de unidades do produto  $X$  a ser adquirida,  $y$  como a quantidade do produto  $Y$  e  $z$  como a quantidade do produto  $Z$ , a restrição orçamentária pode ser expressa pela seguinte inequação:

$$10x + 50y + 100z \leq 3000. \quad (1.5)$$

Essa inequação representa que o valor total gasto no produto  $X$  ( $10x$ ), no produto  $Y$  ( $50y$ ) e no produto  $Z$  ( $100z$ ) não pode exceder R\$ 3000. A região de vínculo orçamentário é, então, o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  que satisfazem (1.5) e, também,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $z \geq 0$ , pois tais variáveis representam quantidades.

Podemos concluir, então, que as combinações possíveis de produtos que pode adquirir, respeitando seu orçamento é dada pelo conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 10x + 50y + 100z \leq 3000\}.$$



## 1.2 Propriedades topológicas de conjuntos em $\mathbb{R}^n$

E se, no Exemplo 1.1, impusermos a condição de que a empresa deve necessariamente adquirir alguma quantidade de cada um dos três produtos e, além disso, não pode gastar todo o orçamento disponível? Nesse caso, a região de escolhas possíveis corresponderá apenas aos pontos *estritamente* dentro da região orçamentária, sem incluir sua fronteira (Figura 1.5):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, 50x + 30y < 1000\}.$$

Esse conjunto é um exemplo do que chamamos de conjunto aberto.

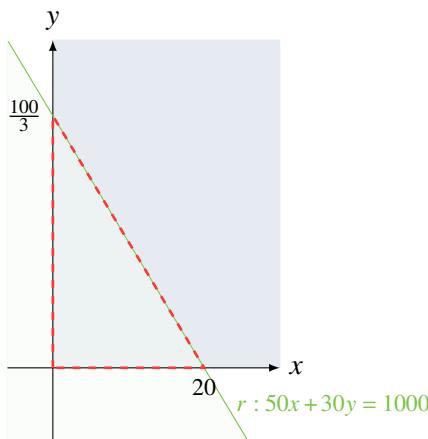


Figura 1.5

**Definição 1.3 (Conjunto aberto).**

Um conjunto  $D$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é chamado de *conjunto aberto* se, para cada ponto  $x$  em  $D$ , existe uma bola aberta centrada em  $x$  totalmente contida em  $D$ .

Vamos mostrar que, de fato, o conjunto  $D$  representado na Figura 1.5 é aberto. Seja  $p = (x, y) \in D$  um ponto arbitrário. As distâncias de  $p$  às três retas que formam a fronteira do triângulo são<sup>2</sup>:

- $\text{dist}(p, \text{eixo } x) = y = d_1 > 0;$
- $\text{dist}(p, \text{eixo } y) = x = d_2 > 0;$
- $\text{dist}(p, r) = \frac{1000 - 50x - 30y}{\sqrt{50^2 + 30^2}} = \frac{1000 - 50x - 30y}{\sqrt{3400}} = d_3 > 0.$

Defina

$$r = \frac{1}{2} \min\{d_1, d_2, d_3\}.$$

<sup>2</sup>Lembre, de Álgebra Linear, que a distância entre um ponto e uma reta é igual à distância entre esse ponto e a sua projeção ortogonal sobre a reta.

Então a bola aberta  $B(p, r)$  não intercepta nenhuma das retas de fronteira do conjunto, de modo que  $B(p, r) \subset D$  (Figura 1.6). Como  $p \in D$  foi escolhido de forma arbitrária, segue que  $D$  é um conjunto aberto.

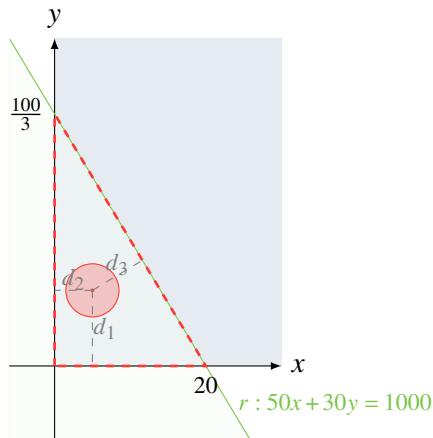
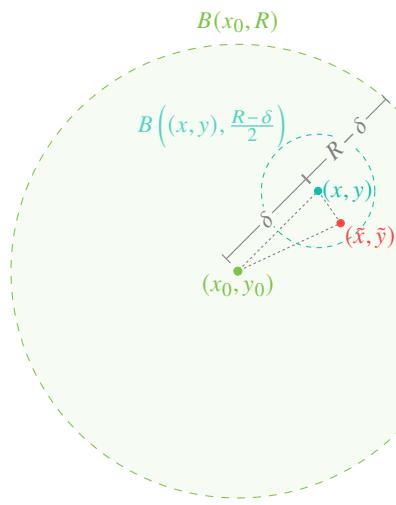


Figura 1.6

### Exercício 1.1.

Mostre que as bolas abertas são conjuntos abertos.

**Dica:**



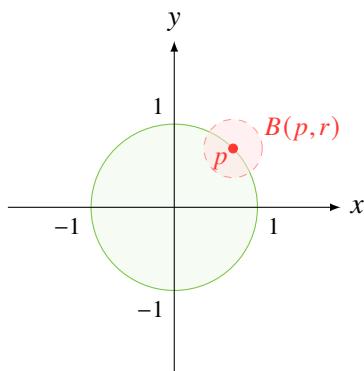
**Observação 1.4.**

Até aqui usamos o termo *bola aberta* apenas como nomenclatura. O resultado acima justifica o nome: de fato, cada bola  $B(x, r)$  é um *conjunto aberto*.

E o que acontece se “juntarmos” o círculo  $C$  à bola aberta  $B(O, 1)$ ? Ou seja, se considerarmos o conjunto

$$\overline{B(O, 1)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esse conjunto já não seria um conjunto aberto. Pois qualquer bola centrada em pontos de  $C$  contém pontos que não estão em  $\overline{B(O, 1)}$ , como mostra a Figura 1.7.



**Figura 1.7**

Esse conjunto, na verdade, é um conjunto fechado. Mas para definirmos formalmente o que é um *conjunto fechado*, precisamos introduzir primeiro o conceito de complemento de um conjunto.

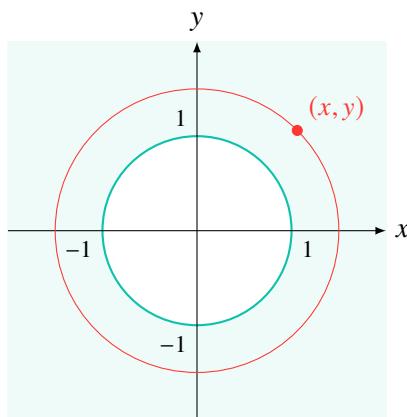
**Definição 1.5 (Complemento de um conjunto).**

O *complemento* de um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , denotado por  $D^c$ , é o conjunto de todos os pontos que não pertencem a  $D$ .

Por exemplo, o complementar da bola aberta  $B(O, 1)$  representada na Figura 1.4 é o conjunto de pontos

$$B(O, 1)^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

De fato, seguindo o mesmo raciocínio que antes, qualquer ponto  $(x, y) \in B(O, 1)^c$  está em uma circunferência de raio  $r \geq 1$  como se mostra na Figura 1.8 (lembre que a circunferência de raio 1 não faz parte da bola aberta  $B(O, 1)$ .)



**Figura 1.8:** Representação de  $B(O, 1)^c$  e um ponto  $(x, y) \in B(O, 1)^c$ .

Como outro exemplo, considere a região do Exemplo 1.1:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 50x + 30y \leq 1000\}.$$

Seu complementar em  $\mathbb{R}^2$  é (vide Figura 1.9)

$$D^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } 50x + 30y > 1000\}.$$

### Definição 1.6 (Conjunto fechado).

Dizemos que um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um *conjunto fechado* se  $D^c$  é um conjunto aberto.

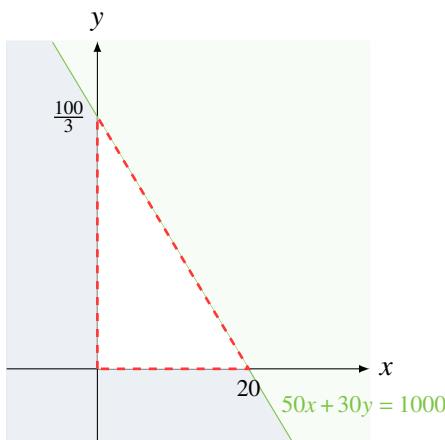


Figura 1.9

Assim,  $B(O, 1)^c$  é fechado pois  $B(O, 1)$  é um conjunto aberto. Também é fechado o conjunto  $\overline{B(O, 1)}$ , pois seu complementar é o conjunto

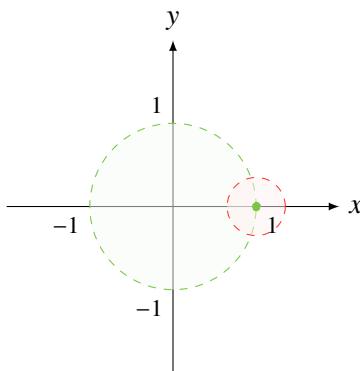
$$\overline{B(O, 1)}^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$$

que é aberto. De fato, se  $p = (x, y) \in \overline{B(O, 1)}^c$ , então  $\|p\| = \sqrt{x^2 + y^2} > 1$ , logo, escolhendo  $r = (\|p\| - 1)/2 > 0$ , temos que  $B((x, y), r) \subset \overline{B(O, 1)}^c$  (tente fazer o desenho para entender esse raciocínio!).

Deixamos ao leitor a verificação de que o conjunto da Figura 1.9 é aberto e, portanto, a região do vínculo orçamentário do Exemplo 1.1 é fechado.

Um exemplo interessante é o conjunto obtido ao acrescentarmos à bola aberta  $B(O, 1)$  o ponto  $(0, 1)$  (Figura 1.10). Note que nenhuma bola centrada em  $(0, 1)$  está inteiramente contida nesse conjunto e, portanto, esse conjunto não é aberto.

Por outro lado, ele também não é fechado. De fato, o seu complementar contém todo o círculo  $C$  exceto o ponto  $(1, 0)$ . Escolhendo, por exemplo, o ponto  $(-1, 0) \in C$ , observamos que qualquer bola centrada nesse ponto contém elementos do conjunto original; logo, tal bola não está contida no complementar, o que mostra que este não é aberto. (Faça um desenho deste segundo raciocínio!)



**Figura 1.10:** Representação de  $B(0, 1) \cup \{(0, 1)\}$

Tal exemplo mostra que os conceitos de *aberto* e *fechado* não são excludentes, isto é, o fato de um conjunto não ser aberto não implica que ele seja fechado, e vice-versa.

#### Definição 1.7 (Fronteira de um conjunto).

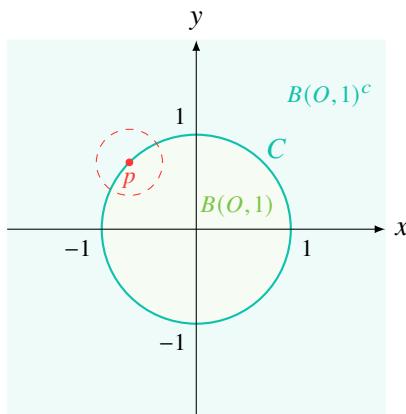
A *fronteira* de um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é o conjunto dos pontos tais que *toda* bola aberta que tem o ponto como centro contém pontos que estão tanto em  $D$  quanto em  $D^c$ . Denotá-se por  $\partial D$ .

No caso do exemplo da bola que vimos ilustrando, observamos que toda bola centrada em qualquer ponto situado sobre o círculo contém pontos que pertencem tanto a  $B(O, 1)$  quanto a  $B(O, 1)^c$  (ver Figura 1.11). Assim,  $\partial B(O, 1) = C$ . Mais ainda,  $\partial B(O, 1)^c = C$  pois o complementar de  $B(O, 1)^c$  é  $B(O, 1)$ .

Isso ocorre em geral: a fronteira de qualquer conjunto coincide com a fronteira do seu complementar.

No caso do Exemplo 1.1 temos que

$$\begin{aligned}\partial D &= \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 20 \right\} \bigcup \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \frac{100}{3} \right\} \\ &\quad \bigcup \left\{ \left( x, \frac{1000 - 50x}{30} \right) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 20 \right\} \subset D.\end{aligned}$$

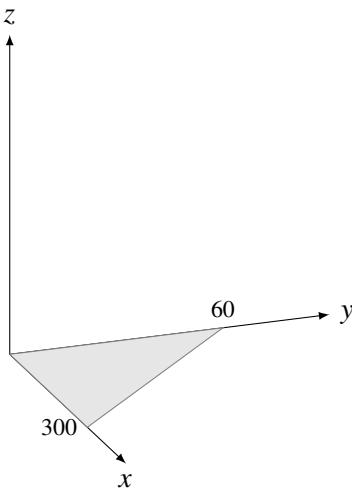


**Figura 1.11:** O círculo como fronteira de  $B(O, 1)$ <sup>3</sup>.

Para o Exemplo 1.2, a análise requer mais cuidado; por isso, vamos apresentá-la de forma detalhada em um exemplo.

### Exemplo 1.3 (Fronteira da região do Exemplo 1.2).

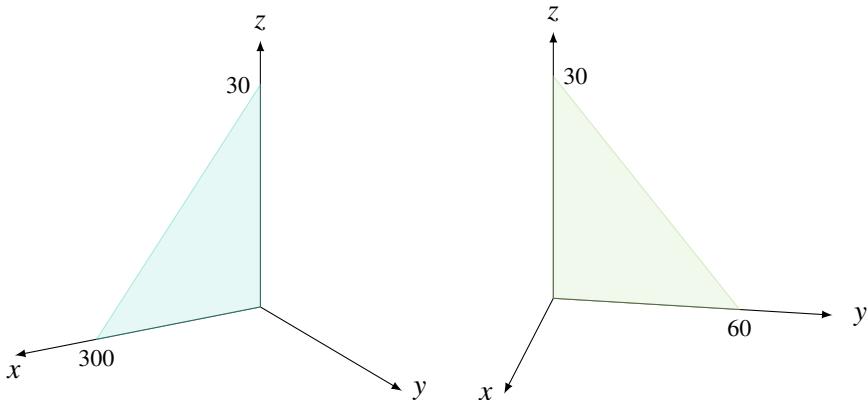
Visualmente percebe-se que a fronteira desse conjunto são as faces da pirâmide. Vamos descrever separadamente os quatro triângulos que conformam a pirâmide. A figura a seguir mostra o triângulo da base.



A base é, portanto, o conjunto

$$\left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y \leq 60 - \frac{x}{5}, 0 \leq x \leq 300 \right\}. \quad (1.6)$$

Agora iremos representar as arestas laterais que estão contidas nos planos  $xz$  e  $yz$ , que são os planos cujas equações são  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente.



No primeiro caso o triângulo representado é o conjunto

$$\left\{ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 30 - \frac{x}{10}, 0 \leq x \leq 300 \right\}$$

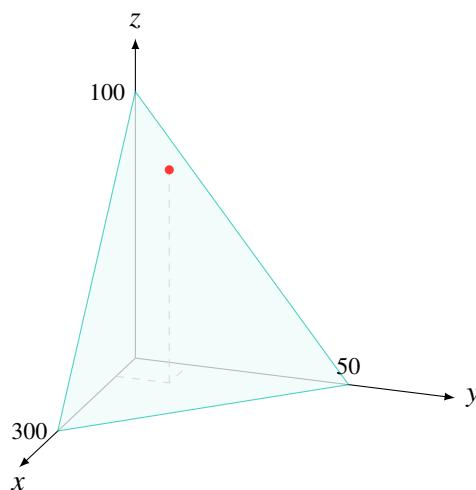
e no segundo

$$\left\{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 30 - \frac{y}{2}, 0 \leq y \leq 60 \right\}.$$

Falta descrever a aresta *contida* no plano cuja equação é

$$10x + 50y + 100z = 3000,$$

representado no primeiro quadrante a seguir.



Observe que se  $(x, y, z)$  está sobre essa aresta, então também temos que  $x + 5y \leq 300$ . Logo, tal conjunto é

$$\left\{ \left( x, y, 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2} \right) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y \leq 60 - \frac{x}{5}, 0 \leq x \leq 300 \right\}.$$

A fronteira é a união desses quatro conjuntos.

### Exercício 1.2.

- (a) Mostre que um conjunto é fechado se ele contém *todos* os seus pontos de fronteira.
- (b) Mostre que um conjunto é aberto se ele não contém *nenhum* ponto de fronteira.
- (c) Dê outros exemplos de conjuntos em  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) que não sejam abertos nem fechados.

**Definição 1.8 (Interior de um conjunto).**

O *interior* de um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , denotado por  $D^\circ$ , é o conjunto de todos os pontos em  $D$  para os quais é possível encontrar uma bola aberta com centro no ponto e raio positivo completamente contida em  $D$ .

Claramente,  $B(p, r)^\circ = \overline{B(p, r)}^\circ = B(p, r)$ . No caso da região do Exemplo 1.1, temos que  $D^\circ$  é o conjunto da Figura 1.5 e que, analiticamente, o escrevemos como

$$D^\circ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3; 0 < y < \frac{1000 - 50x}{30} \text{ e } 0 < x < 20 \right\}.$$

Para determinar  $D^\circ$  no caso do Exemplo 1.2, observamos que  $(x, y)$  pertencem sempre ao *interior* da base da pirâmide (vide (1.6)). Além disso, esses pontos interiores estão situados estritamente entre o plano  $xy$  e o plano de equação  $10x + 50y + 100z = 3000$ , sem “tocar” esses planos. Em outras palavras, a coordenada  $z$  (altura desses pontos interiores) satisfaz

$$0 < z < 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}.$$

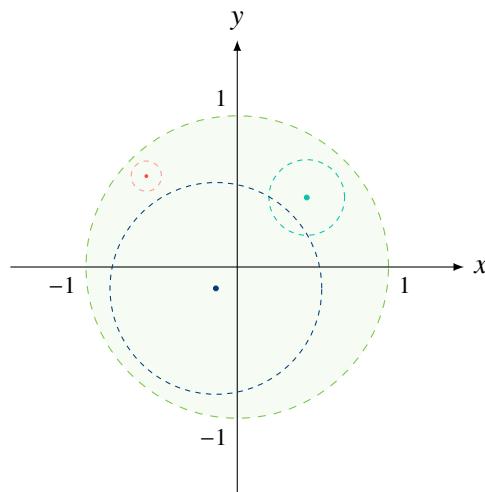
Portanto,

$$D^\circ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}, 0 < y < 60 - \frac{x}{5} \text{ e } 0 < x < 300 \right\}.$$

Intuitivamente, se um ponto de um conjunto está afastado<sup>4</sup> da sua fronteira, então ele possui vizinhos muito próximos que também estão afastados da fronteira (Figura 1.12). Em outras palavras, existe uma bola aberta centrada nesse ponto, totalmente contida no conjunto. Assim, o *interior* de um conjunto pode ser entendido como o conjunto obtido ao se remover todos os seus pontos de fronteira.

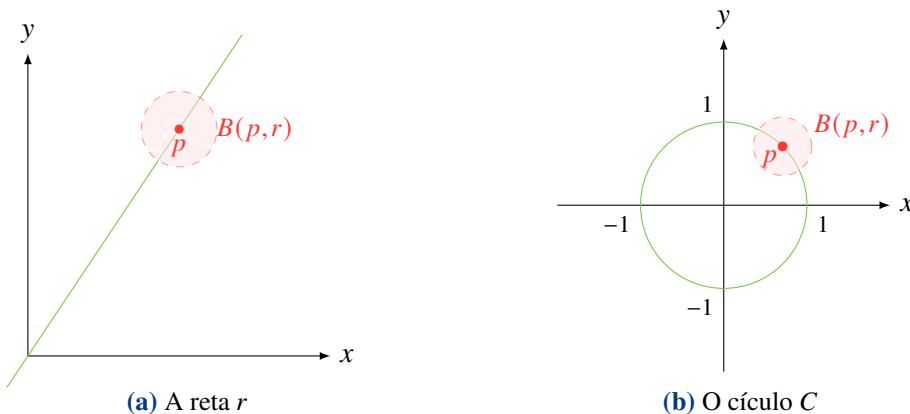
---

<sup>4</sup>No contexto matemático, estar *afastado* ou *longe* de alguma referência significa estar a uma distância positiva dela, mesmo que tal distância seja pequena.



**Figura 1.12:**  $B(O, 1)^{\circ} = B(O, \sqrt{2})^{\circ}$ .

Por outro lado, existem conjuntos nos quais não “cabe” nenhuma bola, como é o caso das retas e dos círculo – e das curvas em geral (vide Figura 1.13). Ou seja, são conjuntos cujo interior é vazio ( $\emptyset$ ). Deixamos aos leitores a verificação de que os planos e as esferas são conjuntos com interior vazio em  $\mathbb{R}^3$ , assim como todas as superfícies que conhecem até agora.



**Figura 1.13:** Conjuntos com interior vazio.

Nos exemplos que vimos até agora, há também uma outra característica que merece atenção. Em alguns conjuntos, como os círculos em  $\mathbb{R}^2$  e as esferas em  $\mathbb{R}^3$ , conseguimos perceber claramente que eles estão contidos em uma região finita do espaço, ou seja, “possuem um tamanho limitado”. Por outro lado, conjuntos como as retas em  $\mathbb{R}^2$  e os planos em  $\mathbb{R}^3$  se estendem indefinidamente, sem que possamos delimitar uma fronteira que os contenha por completo. Surge, assim, um conceito importante para o nosso curso: o de *conjunto limitado*.

### Definição 1.9 (Conjunto limitado).

Dizemos que  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um *conjunto limitado* se existe uma bola que o contém.

Além dos conjuntos mencionados acima, os conjuntos dos Exemplos 1.1 e 1.2 . Para o Exemplo 1.1, note que  $D \subset [0, 20] \times \left[0, \frac{100}{3}\right]$ . Assim, para  $(x, y) \in D$ , tem-se

$$\|(x, y)\| \leq \sqrt{20^2 + \left(\frac{100}{3}\right)^2} < \sqrt{2 \cdot 100^2} = 100\sqrt{2} \text{ (por exemplo!)},$$

e, portanto,  $D \subset B(O, 100\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^2$ .

Para o Exemplo 1.2 , temos  $D \subset [0, 300] \times [0, 60] \times [0, 30]$ . Segue que, para  $(x, y) \in D$ ,

$$\|(x, y, z)\| \leq \sqrt{300^2 + 60^2 + 30^2} < \sqrt{3 \cdot 300^2} = \sqrt{9 \cdot 100^2} = 300 \text{ (por exemplo!)},$$

portanto,  $D \subset B(O, 300) \subset \mathbb{R}^3$ . As respectivas fronteiras e interiores também ficam contidos nessas mesmas bolas, e, portanto, também são limitados.

O último conceito desta seção é o de *conjunto compacto*. Tais conjuntos desempenham um papel fundamental em problemas de otimização, pois possuem propriedades importantes que facilitam o estudo e a resolução de diversos tipos de problemas.

**Definição 1.10 (Conjunto compacto).**

Dizemos que  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um *conjunto compacto* se for fechado e limitado.

Pensando nos exemplos tratados até aqui, já mostramos que as bolas fechadas, os círculos e as esferas, bem como os conjuntos dos Exemplos 1.1 e 1.2, são fechados e limitados nos seus respectivos espaços e, portanto, são compactos. Também são fechadas e limitadas todas as faces da pirâmide do Exemplo 1.2 (vide Exemplo 1.3).

Por outro lado, as retas e os planos não são limitados e, por isso, não são compactos. O conjunto ilustrado na Figura 1.9 é aberto e, consequentemente, também não é compacto.

## Exercícios Suplementares

**Exercício 1.3.**

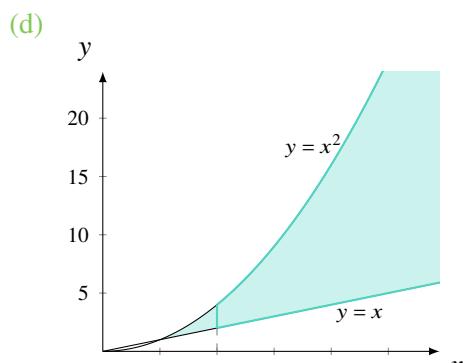
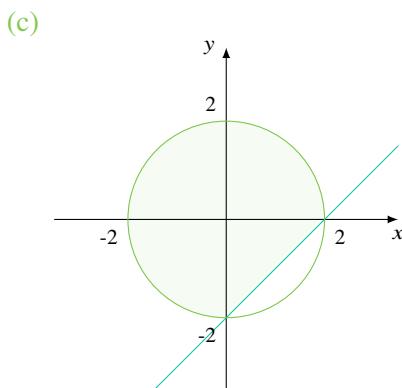
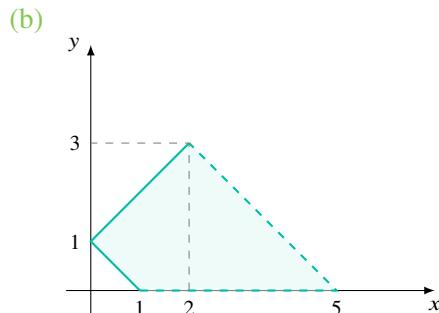
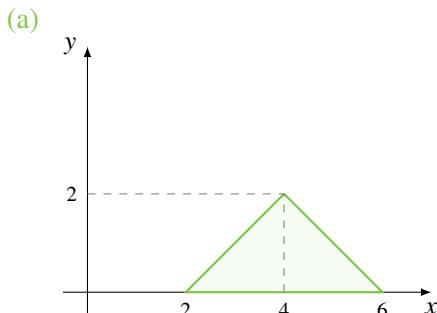
Para cada um dos conjuntos abaixo, execute as seguintes tarefas:

- Represente-o graficamente.
  - Determine o seu complemento, o seu interior e a sua fronteira.
  - Verifique se o conjunto é fechado, limitado e/ou compacto, justificando a resposta.
- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\};$
- (b)  $B = \{(x, y); y \leq x^2, x \leq 1, y \geq 0, \};$
- (c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 1\} \cup [-1, 1] \times [-1, 1];$
- (d)  $D = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2\};$
- (e)  $E = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < 16, z \geq 2\}.$

**Exercício 1.4.**

Para cada um dos conjuntos ilustrados abaixo, execute as seguintes tarefas:

- Descreva-o analiticamente na forma  
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$ .
- Descreva-o analiticamente na forma  
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(y) \leq x \leq g(y), a \leq y \leq b\}$ .
- Diga se o conjunto é fechado, limitado e/ou compacto. Justifique



**Exercício 1.5 (Fecho de um conjunto).**

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  e considere a distância euclidiana usual.

Definimos o *fecho* do conjunto  $D$ , denotado por  $\overline{D}$ , como o conjunto interseção de todos os conjuntos fechados de  $\mathbb{R}^n$  que contêm  $D$ , isto é,

$$\overline{D} = \cap \{F \subset \mathbb{R}^n ; F \text{ é fechado e } D \subset F\}.$$

- (a) Mostre que  $\overline{D}$  é um conjunto fechado que contém  $D$ .
- (b) Prove que  $\overline{D}$  é o menor conjunto fechado que contém  $D$ , no sentido de inclusão.
- (c) Mostre que  $\overline{D} = D \cup \partial D$ .

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 2. Funções de várias variáveis

#### Objetivos

- Compreender o conceito de função real de várias variáveis reais.
- Identificar e determinar o domínio natural da função, bem como o domínio de interesse.
- Determinar e interpretar a imagem de uma função de várias variáveis.
- Compreender o conceito de gráfico e representá-lo geometricamente.
- Entender e identificar os conjuntos de nível de uma função.

Na economia, assim como em todas outras áreas do conhecimento, muitos fenômenos não podem ser descritos de forma adequada por funções que dependem de apenas uma variável independente. Por exemplo, a *lei da demanda* estabelece a relação entre a quantidade demandada de um bem  $D$  e o seu preço  $P$ , afirmando que, à medida que o preço aumenta, a quantidade demandada tende a diminuir, e vice-versa.

Entretanto, a demanda não depende apenas do preço: outros fatores também influenciam a quantidade que os consumidores desejam adquirir, mesmo que o preço permaneça constante. Entre eles, destacam-se a renda dos consumidores ( $R$ ), o preço de bens substitutos ( $P_s$ ) e o preço de bens complementares ( $P_c$ ).

Assim, para cada combinação possível desses fatores ( $P, R, P_s, P_c$ ), obtemos uma quantidade demandada do produto, modelada por

$$D = D(P, R, P_s, P_c).$$

Diante da complexidade e diversidade dos fatores que influenciam os fenômenos em geral, torna-se necessário estudar funções que dependem de várias variáveis independentes. Essas funções permitem analisar e modelar situações mais realistas, nas quais múltiplos fatores interagem para determinar um resultado específico.

### Definição 2.1 (Função real de várias variáveis reais).

Uma *função real de várias variáveis reais* é uma aplicação

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada  $n$ -upla ordenada de números reais  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  um único número real  $f(\mathbf{x})$ .

O conjunto  $D$  é chamado *domínio* de  $f$  e será denotado por  $\text{Dom}(f)$ . A *imagem* de  $f$  é o conjunto

$$\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) ; \mathbf{x} \in D\} \subset \mathbb{R}.$$

Em outras palavras, se  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$ , então  $f(\mathbf{x})$  é um número real que pertence à imagem  $\text{Im}(f)$ .

### Exemplo 2.1 (Função produto).

Considere a função que, a cada par de números reais, associa o valor do seu produto, isto é,

$$f(x, y) = x y.$$

- **Domínio:** não há restrições sobre  $x$  e  $y$ , logo, a função está definida sobre todo o espaço  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ .
- **Imagem:** para cada  $r \in \mathbb{R}$ , basta escolher  $x = r$  e  $y = 1$ , para obtermos  $f(x, y) = r$ . Portanto,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .

### Exemplo 2.2 (Função quadrática).

Considere a função

$$g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Temos:

- **Domínio:** não há restrições sobre  $x$  e  $y$ , logo,  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}^2$ .
- **Imagem:** como  $x^2 \geq 0$  e  $y^2 \geq 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos  $g(x, y) \geq 0$ . Além disso, dado  $r \geq 0$ , temos  $g(\sqrt{r}, 0) = r$  e, portanto,  $\text{Im}(g) = [0, \infty)$ .

Observe que essa função também representa o *quadrado da distância* do ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  à origem  $(0, 0)$  ou, equivalentemente, a *norma ao quadrado* do vetor  $(x, y)$ , ou seja,  $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$ .

### Exemplo 2.3 (Função distância à origem ou função norma).

Considere a função

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que é exatamente a distância do ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  à origem  $(0, 0)$ , ou a norma do vetor  $(x, y)$ . Temos:

- **Domínio:** não há restrições sobre  $x$  nem  $y$ , logo  $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}^2$ .
- **Imagem:** claramente  $h(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y)$ . Além disso,  $h(r, 0) = r$  para todo  $r \geq 0$ . Assim,  $\text{Im}(h) = [0, \infty)$ .

### Exemplo 2.4.

Considere a função

$$k(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

- **Domínio:** para que a raiz quadrada esteja definida, é necessário que  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ , o que é equivalente a  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Portanto,

$$\text{Dom}(k) = \overline{B(0, 1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- **Imagem:** como  $x^2 + y^2 \geq 0$  no domínio, temos  $1 - x^2 - y^2 \leq 1$  e, portanto,  $0 \leq k(x, y) \leq 1$ . Ambos os extremos são atingidos:  $k(0, 0) = 1$  e, para pontos da fronteira  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $k(x, y) = 0$ . Assim,  $\text{Im}(k) = [0, 1]$ .

Por outro lado, nem sempre é necessário estudar uma função em todo o seu domínio de definição. Muitas vezes, o estudo se restringe a um subconjunto  $D \subset \text{Dom}(f)$ . Nesse caso, denotamos a função por  $f|_D$ , lido como *f restrita ao subconjunto D*. Chamamos  $D$  de *domínio de interesse* de  $f$ .

Por exemplo, consideremos a função

$$U(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Temos que

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Suponha agora que essa função modele as preferências de um consumidor em relação a diferentes quantidades de dois bens,  $X$  e  $Y$ , que ele pode consumir. Nesse contexto, o consumidor possui um orçamento total de R\$ 1000. Se o preço unitário do produto  $X$  é R\$ 50 e o de  $Y$  é R\$ 30, a restrição orçamentária é dada por

$$50x + 30y \leq 1000.$$

Assim, o estudo da função  $U$  restringe-se ao subconjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 50x + 30y \leq 1000\}.$$

Ou seja, neste caso o *domínio de interesse* não coincide com o domínio de  $f$ , mas sim com o conjunto do Exemplo 1.1 da Nota anterior.

A função  $U$  anterior é um exemplo de *função de utilidade*, conhecida como *função de Cobb-Douglas*, proposta em 1928 pelos economistas Charles W. Cobb e Paul H. Douglas no artigo *A Theory of Production*. De forma geral, uma função de utilidade atribui um valor numérico a cada cesta de consumo, isto é, a cada combinação de  $n$  bens ou serviços disponíveis ao consumidor, representando o grau de satisfação obtido. A seguir, apresentamos alguns exemplos de funções de utilidade.

### **Exemplo 2.5 (Função de utilidade para $n$ bens).**

Dado  $n$  bens de consumo, representamos por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  suas respectivas quantidades. A função de utilidade é denotada por  $U$  e atribui a cada combinação específica de quantidades dos bens,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , um número real  $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que reflete a utilidade total do consumidor com essa cesta de consumo.

**Utilidade Cobb-Douglas:**

A função de utilidade Cobb-Douglas generalizada é dada por:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são os coeficientes que medem as elasticidades de produção ou preferências de cada bem ou fator de produção (tais coeficientes devem ser estritamente positivos e a soma deles deve ser menor que 1 para garantir a substituibilidade entre os bens).

**Utilidade Quadrática:**

De forma mais geral, a função de utilidade quadrática é dada por

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2,$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são coeficientes positivos que medem a importância relativa ou o peso de cada bem ou fator de produção na função de utilidade ou de produção. Nesse caso, a utilidade total ou a quantidade produzida é uma soma ponderada dos quadrados das quantidades dos  $n$  bens ou fatores de produção. Cada coeficiente  $a_i$  representa a importância relativa de cada bem ou fator de produção. Valores maiores para  $a_i$  indicam que o consumidor valoriza mais a quantidade do bem ou fator  $x_i$ , enquanto valores menores implicam em uma valoração menor.

**Exercício 2.1.**

Suponha que a demanda por refrigeradores em uma determinada região depende dos seguintes fatores:

- $P$ : o preço do refrigerador,
- $R$ : a renda dos consumidores,
- $P_s$ : o preço de bens substitutos,

- $P_c$ : o preço de bens complementares.
- (a) Crie uma função *hipotética* que modele a quantidade demandada considerando os seguintes comportamentos:
- Quando o preço do refrigerador diminui, a quantidade demandada aumenta, ou seja, há uma relação inversamente proporcional entre o preço e a quantidade demandada.
  - Um aumento na renda dos consumidores tende a aumentar a quantidade demandada de refrigeradores, ou seja, a quantidade demandada está positivamente relacionada à renda dos consumidores.
  - Se os bens substitutos, como freezers ou outros eletrodomésticos de refrigeração, tornarem-se mais caros, a demanda por refrigeradores pode aumentar, indicando que a mesma está positivamente relacionada ao preço dos bens substitutos.
  - Se os bens complementares, como utensílios para uso em conjunto com o refrigerador, ficarem mais caros, isso pode diminuir a demanda por refrigeradores, o que sugere que está inversamente relacionada ao preço de bens complementares.
- (b) Determine o domínio da sua função.
- (c) Determine o conjunto sobre o qual sua função reflete a realidade do problema.

## 2.1 Gráfico de uma função de várias variáveis

**Definição 2.2 (Gráfico de uma função de várias variáveis).**

O gráfico de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é o conjunto no espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por

$$\text{Graf}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) ; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}.$$

Em outras palavras, o gráfico de  $f$  é o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formado por todos os pontos cuja projeção nas  $n$  primeiras coordenadas pertence ao domínio  $D$  e cuja última coordenada é igual ao valor de  $f$  nessas  $n$  coordenadas. Essa última coordenada pode ser interpretada geometricamente como a *altura* do gráfico em relação ao hiperplano  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

### Exemplos 2.6 (Planos como gráficos de funções lineares).

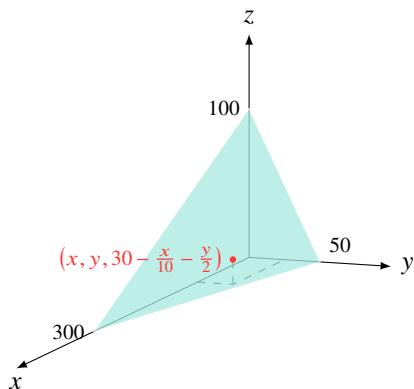
O gráfico da função

$$f(x, y) = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}$$

é o conjunto

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2} \right\},$$

isto é, o plano de equação  $10x + 50y + 100z = 3000$ . No Exemplo 1.1 da Nota 1 analisamos a interseção desse plano com o primeiro octante, interpretando-a como parte da fronteira de um conjunto. Aqui, consideraremos o mesmo plano sob a perspectiva de ser o gráfico de uma função linear de duas variáveis.



De forma geral, todo plano não vertical em relação ao eixo  $z$  pode ser visto como o gráfico de uma função de duas variáveis, pois é possível escrever  $z$  explicitamente como função de  $x$  e  $y$ .

### Exemplo 2.7 (Paraboloide como o gráfico da função quadrática).

O gráfico da função

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

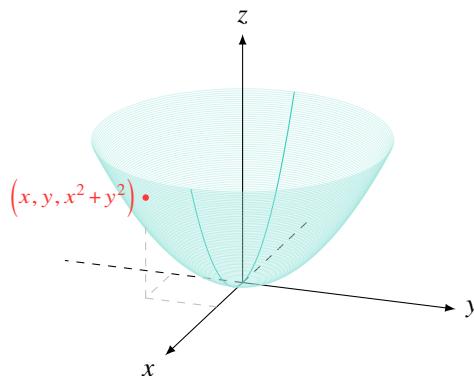
é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x^2 + y^2\},$$

que descreve um *paraboloide circular reto* com vértice na origem e eixo paralelo ao eixo  $z$ . Para ver isso, analisemos interseções:

- Interseção com o plano  $xz$  ( $y = 0$ ): temos  $z = x^2$ , uma parábola que se abre para cima.
- Interseção com o plano  $yz$  ( $x = 0$ ): da mesma forma obtém-se  $z = y^2$ , uma parábola que também abre para cima.
- Interseção com os planos horizontais ( $z = c$ ,  $c \geq 0$ ): a equação se reduz a  $x^2 + y^2 = c$ , que é uma circunferência de raio  $\sqrt{c}$  no plano  $xy$ .

Essas seções revelam que a superfície se obtém girando uma parábola em torno do eixo  $z$ , o que justifica o nome paraboloide.



### Exemplo 2.8 (Cone como o gráfico da função distância à origem).

Considere a função

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

O gráfico dessa função no espaço tridimensional é o conjunto de pontos

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Essa superfície pode ser analisada por meio de suas interseções com planos coordenados:

- Interseção com o plano  $xz$  ( $y = 0$ ): neste plano, a função se reduz a  $z = \sqrt{x^2} = |x|$ , onde  $|x|$  representa a *função valor absoluto*. Assim, o gráfico resultante consiste na união das semirretas

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x, x \geq 0\} \cup \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = -x, x < 0\},$$

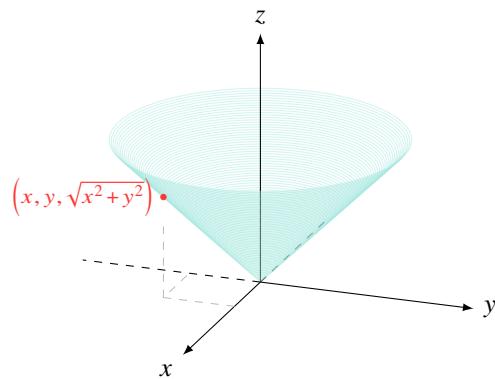
, que forma uma curva contínua e simétrica em relação ao eixo  $z$ .

- Interseção com o plano  $yz$  ( $x = 0$ ): analogamente, obtemos

$$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = y, y \geq 0\} \cup \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = -y, y < 0\},$$

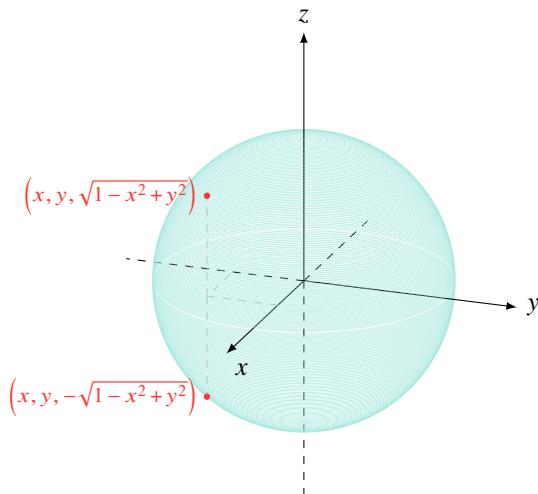
- Interseção com os planos horizontais ( $z = c$ ,  $c \geq 0$ ): temos a equação  $x^2 + y^2 = c^2$ , que descreve uma circunferência de raio  $c$  centrada na origem no plano  $xy$ .

Essas seções indicam que a superfície é obtida por uma rotação da curva  $z = |x|$  (ou  $z = |y|$ ) em torno do eixo  $z$ , resultando em uma superfície cônica com eixo de simetria ao longo de  $z$ . Tal superfície é o *cone circular reto*.



### Exemplo 2.9 (Semiesfera como gráfico).

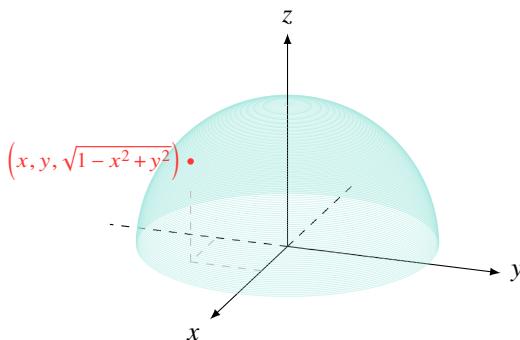
As esferas **não** são gráficos de funções reais de duas variáveis, pois violam o critério fundamental de unicidade do valor associado a cada ponto do domínio. Em termos geométricos, isso ocorre porque qualquer reta vertical (paralela ao eixo  $z$ ) intersecta a superfície da esfera em, no máximo, dois pontos distintos. De fato, considerando o exemplo modelo da esfera de raio 1, para cada  $(x, y) \in B(O, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , os pontos  $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  e  $(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$  pertencem à esfera.



Por outro lado, se considerarmos apenas a semiesfera superior, então cada ponto  $(x, y) \in B(O, 1)$  está associado a uma única altura:  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Ou seja, tal superfície é o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

definida sobre  $\overline{B(O, 1)}$ .



## Exercícios Suplementares

### Exercício 2.2.

Encontre e esboce o domínio das funções:

(a)  $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

(b)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

### Exercício 2.3.

Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.

(a)  $f(x, y) = |x| + |y|$

(b)  $f(x, y) = |xy|$

- (c)  $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$   
 (d)  $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$   
 (e)  $f(x, y) = (x - y)^2$   
 (f)  $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$

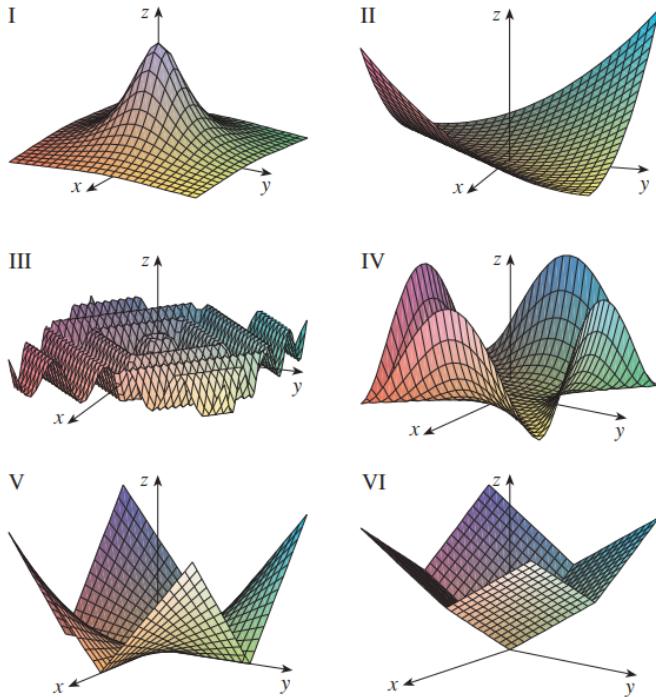


Figura 2.1

**Exercício 2.4.**

Descreva como o gráfico de  $g$  é obtido a partir do gráfico de  $f$ .

- (a)  $g(x, y) = f(x, y) + 2$   
 (b)  $g(x, y) = 2f(x, y)$   
 (c)  $g(x, y) = -f(x, y)$

- (d)  $g(x, y) = 2 - f(x, y)$
- (e)  $g(x, y) = f(x - 2, y)$
- (f)  $g(x, y) = f(x, y + 2)$
- (g)  $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 3. Conjuntos de nível de uma função de várias variáveis

#### Objetivos

- Compreender o conceito de conjunto de nível para funções reais de várias variáveis.
- Interpretar geometricamente curvas de nível (em  $\mathbb{R}^2$ ) e superfícies de nível (em  $\mathbb{R}^3$ ).
- Reconhecer curvas de nível como projeções da interseção do gráfico com planos horizontais.
- Identificar e interpretar mapas de contorno.
- Relacionar a forma das curvas de nível com o comportamento da função no espaço.

A análise do comportamento geométrico de uma função real de várias variáveis pode ser facilitada pelo estudo de seus *conjuntos de nível*. Esses conjuntos permitem visualizar, em dimensões inferiores, como os valores da função se distribuem no domínio.

### Definição 3.1 (Conjunto de nível).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Para um número real fixado  $c \in \mathbb{R}$ , define-se o *conjunto de nível* (ou *nível*  $c$ ) da função  $f$  como o subconjunto:

$$N_c = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}.$$

Ou seja,  $N_c$  é o conjunto de todos os pontos do domínio  $D$  nos quais a função  $f$  assume o valor constante  $c$ .

#### 3.0.1 Funções de Duas Variáveis: Curvas de Nível e Mapas de Contorno

Considere agora uma função de duas variáveis, isto é, uma aplicação

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sabemos que, para cada ponto  $(x, y) \in D$ , o ponto  $(x, y, f(x, y))$  pertence ao gráfico de  $f$ , denotado por  $\text{Graf}(f)$ .

Por outro lado, pela definição de curva de nível, se  $f(x, y) = c$ , para algum valor constante  $c \in \mathbb{R}$ , estamos interessados nos pontos do gráfico da função que se encontram exatamente na altura  $z = c$ . Isto é, nos pontos que satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = c, \end{cases}$$

Geometricamente, isso corresponde à interseção entre o gráfico da função e o plano horizontal de equação  $z = c$ .

A projeção ortogonal dessa interseção sobre o plano  $xy$  produz o conjunto

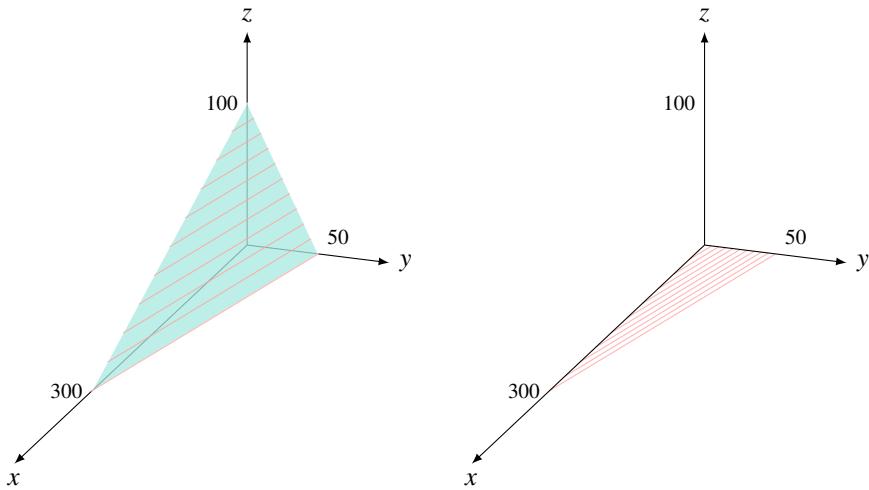
$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\},$$

que é precisamente a curva de nível associada ao valor  $c$  da função  $f$ . Esse conjunto consiste nos pontos do domínio onde a função assume o valor constante  $c$ , e pode ser interpretado como a imagem da interseção  $\text{Graf}(f) \cap \{z = c\}$  sob a projeção  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ .

### Exemplo 3.1.

Consideremos a função  $k(x, y) = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}$ . Sabemos que  $\text{Graf}(k)$  é o plano de equação  $z = 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2}$ .

A figura a seguir ilustra, no primeiro octante, a interpretação geométrica das curvas de níveis. Na imagem à esquerda, as retas em vermelho representam as interseções no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  entre o  $\text{Graf}(k)$  e planos horizontais de equação  $z = c$ . Já na imagem à direita, observamos as respectivas projeções ortogonais sobre o plano  $xy$ .



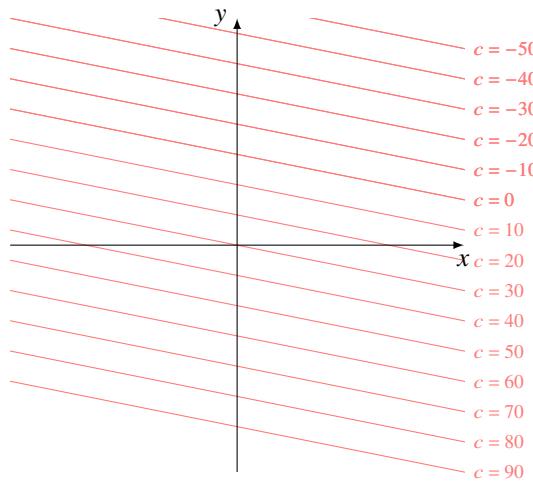
Formalmente, dado um valor  $c \in \mathbb{R}$ , a equação do conjunto de nível correspondente é:

$$k(x, y) = c \iff 30 - \frac{x}{10} - \frac{y}{2} = c \iff \frac{x}{10} + \frac{y}{2} = 30 - c,$$

que é a equação de uma reta no plano  $xy$ . Assim, para cada valor real de  $c$ , o conjunto de nível é a reta:

$$N_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{10} + \frac{y}{2} = 30 - c \right\}.$$

Variando o valor de  $c$ , vemos que os conjuntos de nível de  $k$  são retas paralelas entre si e deslocadas verticalmente de acordo com o valor de  $c$ . A seguir segue uma representação de vários conjuntos de níveis de  $k$ .



A última figura do exemplo exibe diversas curvas de nível da função  $k$ , cada uma associada a um valor específico de  $c$ . Esse tipo de representação é conhecido como *mapa de contorno*.

A visualização de um mapa de contorno é extremamente útil para analisar o comportamento global da função, permitindo identificar regiões onde a função

apresenta crescimento ou decrescimento, variações abruptas ou suaves nos valores da função etc.

### Exemplo 3.2.

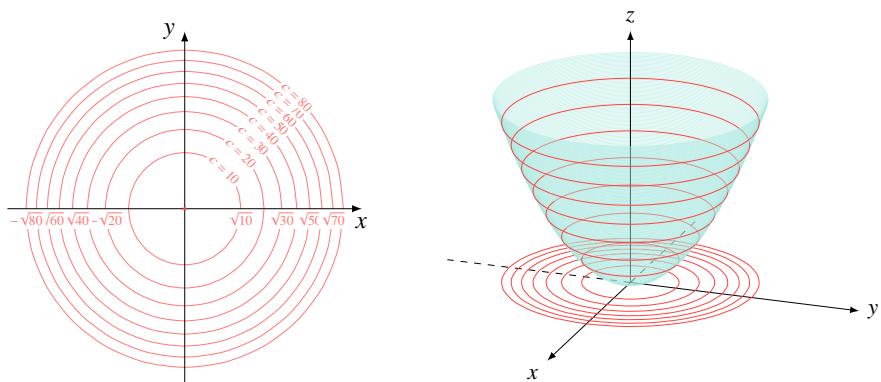
Consideremos a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Observe que o domínio da função é  $\mathbb{R}^2$ , enquanto sua imagem é o intervalo  $[0, \infty)$ , pois a função assume apenas valores não negativos.

Vamos agora analisar o comportamento dos conjuntos de nível  $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ , de acordo com o valor do parâmetro  $c \in \mathbb{R}$ :

- $c < 0$ : Como  $f(x, y)$  é a soma de dois quadrados, temos  $f(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Portanto, o conjunto de nível é vazio:  $N_c = \emptyset$ .
- $c = 0$ : O valor zero é atingido somente quando  $x = 0$  e  $y = 0$ . Assim, o conjunto de nível é o ponto de origem:  $N_0 = \{(0, 0)\}$ .
- $c > 0$ : Neste caso, a equação  $f(x, y) = c$  equivale a  $x^2 + y^2 = c$ , que representa uma circunferência de raio  $\sqrt{c}$ , centrada na origem. Portanto, o conjunto de nível é dado por:  $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}$ .

Na figura a seguir à esquerda temos um mapa de contorno de  $f$ . À direita ilustramos o gráfico da função  $f$ , as interseções desse gráfico com planos horizontais de diferentes níveis  $z = c$ , e as correspondentes projeções no plano  $xy$ .



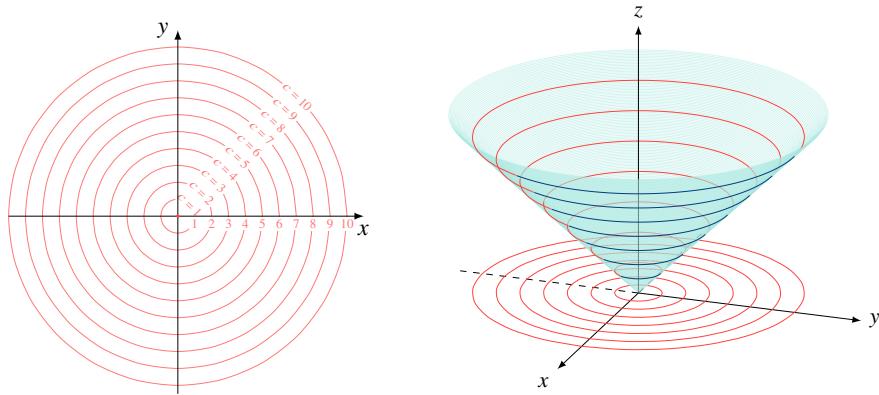
Observe como a interseção dos planos horizontais abaixo do plano  $xy$  com o paraboloide é vazia, com o plano de equação  $z = 0$  é a origem e com planos horizontais acima do plano  $xy$  são círculos. Essas interseções estão em perfeita concordância com o mapa de contorno.

### Exemplo 3.3.

Seja  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Primeiro vejamos que o domínio da função é  $\mathbb{R}^2$  e a imagem é  $[0, \infty)$ . Agora, vamos analisar o comportamento de  $f(x, y)$ :

- $c < 0$ : como  $f$  é não negativa – a raiz quadrada é sempre positiva, então  $N_c = \emptyset$ .
- $c = 0$ : o único ponto onde  $f(x, y) = 0$  é a origem  $(0, 0)$ . Logo  $N_0 = \{(0, 0)\}$ .
- $c > 0$ : neste caso a condição  $f(x, y) = c > 0$  se traduz em  $x^2 + y^2 = c^2$ . Ou seja, a forma das curvas de nível de  $f$  são círculos concêntricos com centros na origem e cujos raios são exatamente os valores da função:  $N_c = \{(x, y) \in D; x^2 + y^2 = c^2\}$ .

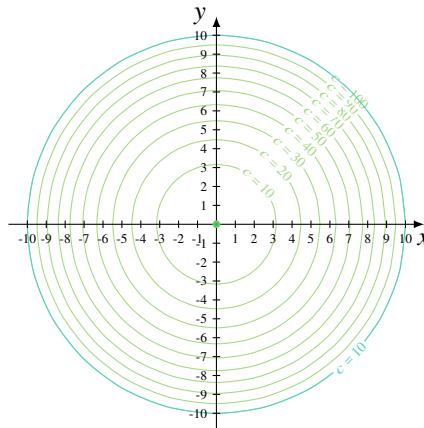
Na figura a seguir ilustramos um mapa de contorno à esquerda, e, à direita, o gráfico da função, a interseção desse gráfico com planos em diferentes *níveis* de altura, e as respectivas projeções.



Observemos que, nos dois exemplos anteriores, as curvas de nível (nos casos em que  $N_c \neq \emptyset$ ) são circunferências centradas na origem. No entanto, os mapas de contorno resultantes são diferentes. Uma maneira de compreender essa diferença é comparar os dois mapas de contorno sob uma mesma janela de visualização, utilizando a mesma escolha de níveis  $c \in C$ , para algum subconjunto finito  $C \subset \mathbb{R}$ , como na seguinte figura.

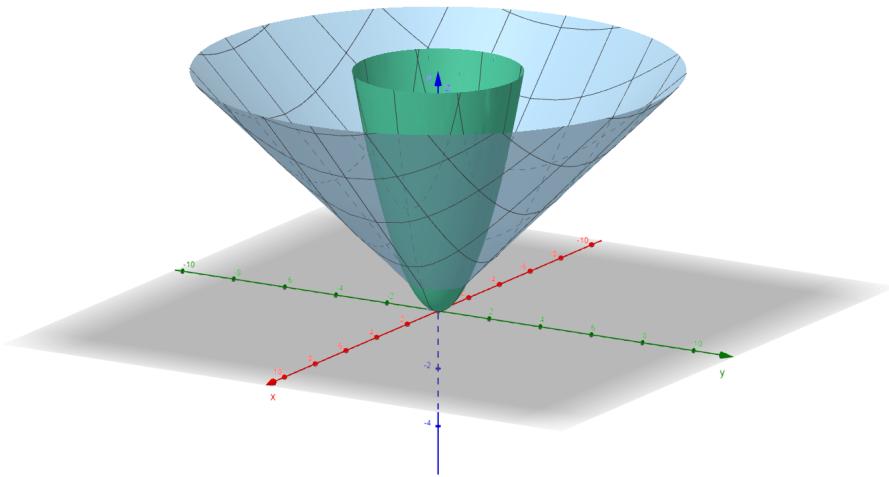
Escolhemos, por exemplo,  $c \in \{0, 1, \dots, 10\}$  e uma janela de visualização  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ . Na figura a seguir, observa-se, em verde, o mapa de contorno da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , o qual contém onze curvas de nível – uma para cada valor de  $c$  selecionado.

No caso da função  $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , o mapa de contorno correspondente, dentro da mesma janela, contém apenas duas curvas de nível, associadas aos valores  $c = 0$  e  $c = 10$ . Isso indica que  $g(x, y)$  atinge os demais valores de  $c$  apenas em pontos situados fora da região considerada, isto é, mais distantes da origem.



Geometricamente, isso significa que o gráfico da função  $f$  está acima do gráfico da função  $g$  fora do círculo de raio 1 (sobre o qual  $f(x, y) = g(x, y)$ ). Em outras palavras, a função  $f$  cresce mais rapidamente que  $g$  à medida que nos afastamos da origem<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Observe que ambas as funções crescem monotonamente em qualquer direção à medida que nos afastamos da origem.



### Exemplo 3.4.

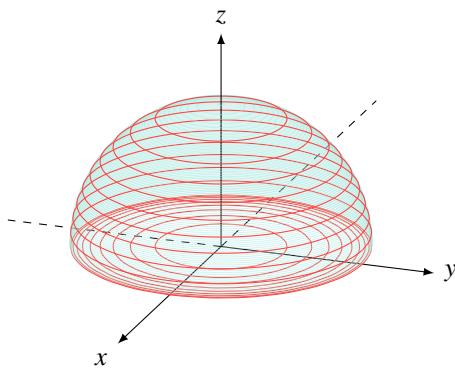
Seja  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . O domínio desta função é  $\overline{B(0, 1)}$  e a imagem é  $[0, 1]$ . Agora, vamos analisar o comportamento de  $f(x, y)$ :

- $c < 0$ : como  $f$  é não negativa – a raiz quadrada é sempre positiva, então  $N_c = \emptyset$ .
- $0 < c < 1$ : neste caso a condição  $f(x, y) = c > 0$  se traduz em  $x^2 + y^2 = 1 - c^2$ . Ou seja, a forma das curvas de nível de  $f$  são círculos:

$$N_c = \{(x, y) \in D; x^2 + y^2 = 1 - c^2\}$$

- $c = 1$ : Neste caso  $N_1 = \{(1, 0)\}$ .
- $c > 1$ : Como a máximo valor possível para  $f$  é 1, então  $N_c = \emptyset$ .

Na figura a seguir ilustramos o gráfico da função, a interseção desse gráfico com planos em diferentes *níveis* de altura, e as projeções no plano  $xy$ .



### Exercício 3.1.

Realize uma análise comparativa análoga à que foi feita entre as funções dos Exemplos 3.2 e 3.3, agora considerando os pares  $f$  e  $h$ , e  $g$  e  $h$ , sendo  $h$  a função do Exemplo 3.3. Para isso, construa mapas de contorno dessas funções utilizando os mesmos valores de  $c$ .

## 3.1 Funções de três variáveis: Superfícies de nível

No caso de funções de três variáveis,  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , o conjunto de nível  $N_c$ , para um valor constante  $c \in \mathbb{R}$ , é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  no domínio da função para os quais  $f(x, y, z) = c$ . Isto é:

$$N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}.$$

Geometricamente, os conjuntos de nível de uma função de três variáveis correspondem à interseção do gráfico da função, que vive em  $\mathbb{R}^4$ , com hiperplanos do tipo  $w = c$ . A projeção dessas interseções no espaço  $\mathbb{R}^3$  resulta, em geral, em superfícies chamadas *superfícies de nível*.

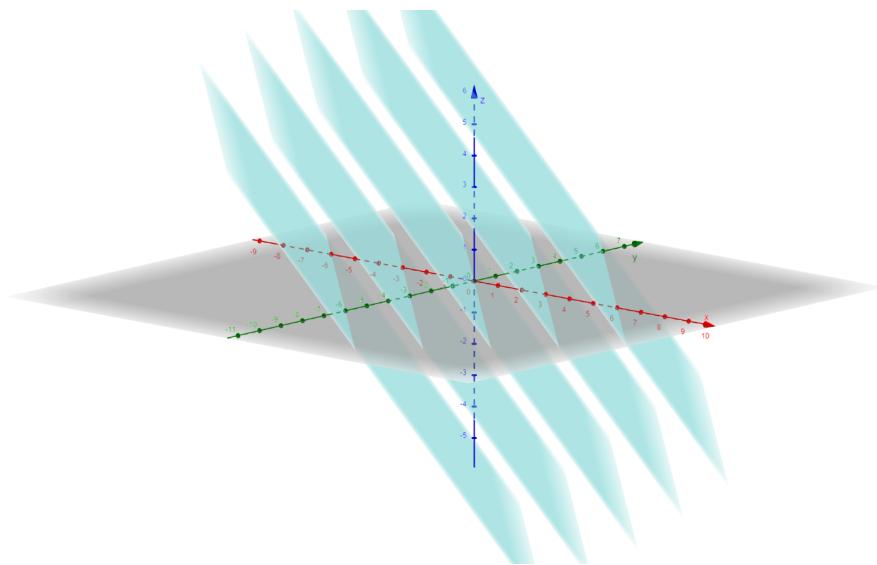
Diferentemente do caso bidimensional, não utilizamos o termo *mapa de contorno* neste contexto, pois ele é reservado exclusivamente à representação bidimensional de curvas de nível associadas a funções de duas variáveis reais.

### Exemplo 3.5 (Planos como superfícies de nível).

Considere  $f(x, y, z) = x + y + z$ . O conjunto de nível para  $c \in \mathbb{R}$  é dado por

$$N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = c\}.$$

Trata-se de um plano no espaço tridimensional, cuja posição depende do valor de  $c$ . Para  $c = 0$ , é o plano que passa pela origem com normal  $(1, 1, 1)$ .



### Exemplo 3.6 (A esfera como superfície de nível).

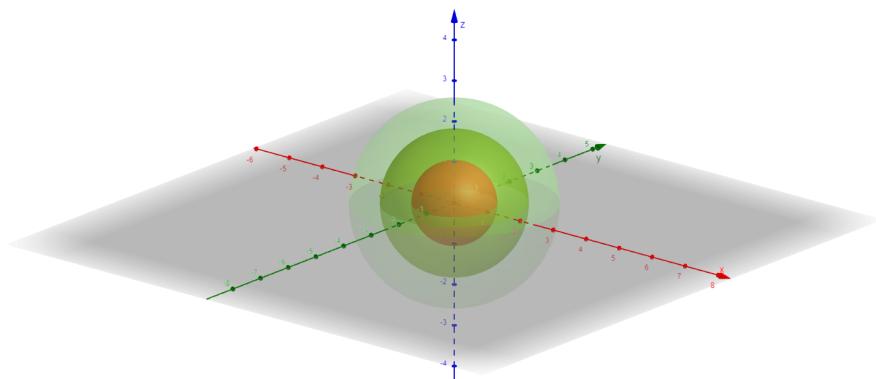
Analisemos as superfícies de nível da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  para diferentes valores de  $c \in \mathbb{R}$ :

- $c < 0$ : A equação  $x^2 + y^2 + z^2 = c$  não possui soluções reais, pois a soma de quadrados de números reais é sempre não negativa. Assim, para  $c < 0$ ,  $N_c = \emptyset$ .
- $c = 0$ : A equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  admite como única solução o ponto  $(0, 0, 0)$ , pois todos os termos devem ser simultaneamente nu-

los. Nesse caso, a superfície de nível degenera em um único ponto:  $N_0 = \{(0, 0, 0)\}$ .

- **$c > 0$ :** Para valores positivos de  $c$ , a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = c$  representa uma esfera de raio  $\sqrt{c}$ , centrada na origem. Assim,

$$N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = c\}.$$



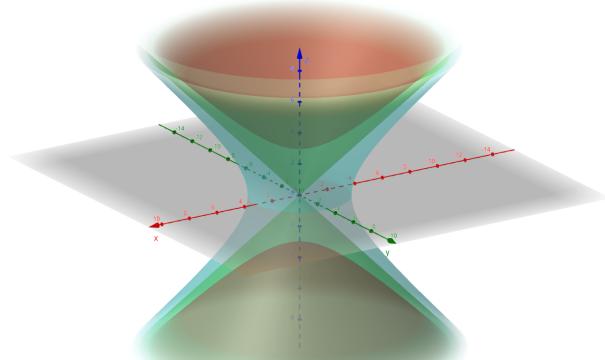
Observe que o raio cresce à medida que  $c$  aumenta, o que significa que os valores da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  aumentam à medida que nos afastamos da origem. Em outras palavras, a função cresce radialmente no espaço tridimensional.

Claramente, a própria expressão da função já revela esse comportamento, pois trata-se da função distância ao ponto  $(0, 0, 0)$ . No entanto, em funções mais complexas, esse tipo de análise pode ser significativamente facilitado pela observação das superfícies de nível, que oferecem uma representação geométrica eficaz do crescimento (ou decrescimento) da função em diferentes regiões do domínio.

### Exemplo 3.7.

Considere a função  $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$ . Para um valor fixado  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível é dado por  $N_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = c\}$ . Esses conjuntos correspondem a diferentes superfícies quadráticas, dependendo do valor de  $c$ :

- $c = 0$ : A equação torna-se  $z^2 = x^2 + y^2$ , que descreve um cone circular duplo com vértice na origem e simetria em relação ao plano  $xy$ . O eixo do cone é o eixo  $z$ .
- $c < 0$ : Podemos reescrever a equação como  $x^2 + y^2 - z^2 = -c > 0$ , o que equivale a um hiperbolóide de uma folha, centrado na origem e com eixo de simetria ao longo do eixo  $z$ .
- $c > 0$ : Neste caso, a equação  $z^2 - x^2 - y^2 = c$  representa um hiperbolóide de duas folhas, também centrado na origem e com eixo ao longo de  $z$ . Para cada valor negativo de  $c$ , a superfície está definida apenas para valores de  $z$  suficientemente grandes em módulo (fora de uma região ao redor do plano  $z = 0$ ).



**Figura 3.1:** Superfícies de nível da função  $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$ : cone duplo ( $c = 0$ ), hiperbolóide de uma folhas ( $c < 0$ ) e de duas folhas ( $c > 0$ ).

## Exercícios Suplementares

### Exercício 3.2.

Para cada função, desenhe as curvas de nível (indiferença) para  $u(x_1, x_2) = k$ , com  $k > 0$ .

- (a) Cobb-Douglas:  $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ , com  $\alpha, \beta > 0$
- (b) Linear (Substitutos Perfeitos):  $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ , com  $a, b > 0$ .
- (c) Leontief (Complementares Perfeitos):  $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ , com  $a, b > 0$ .
- (d) CES (Elasticidade de Substituição Constante):  
 $u(x_1, x_2) = (ax_1^\rho + bx_2^\rho)^{1/\rho}$ , com  $a, b > 0$ .

### Exercício 3.3.

Faça um esboço de um mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

- (a)  $f(x, y) = x^2 + 9y^2$
- (b)  $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

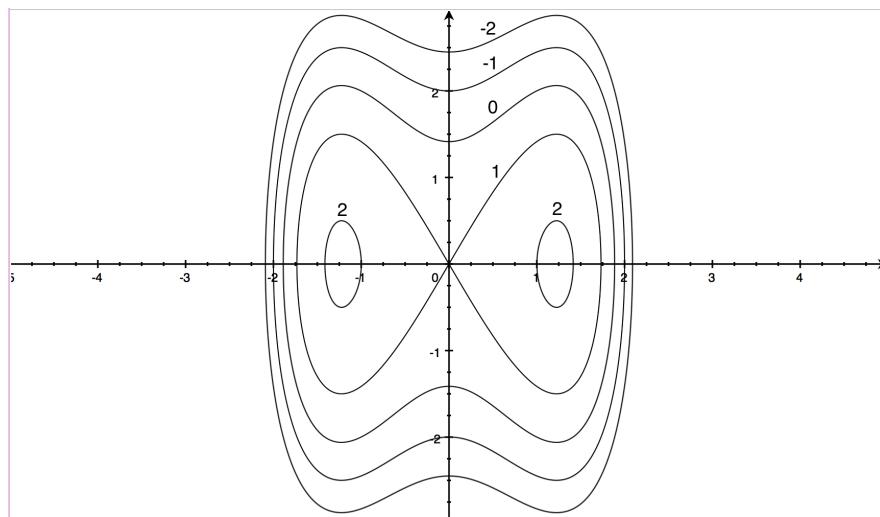
### Exercício 3.4.

Descreva as superfícies de nível das funções abaixo.

- (a)  $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$
- (b)  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
- (c)  $f(x, y, z) = y^2 + z^2$
- (d)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

### Exercício 3.5 (Interpretação de mapa de contorno).

A figura a seguir representa o mapa de contorno de uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com curvas de nível rotuladas por seus respectivos valores.



Com base nesse mapa de contorno, responda às seguintes questões:

1. Identifique os pontos (ou regiões) onde a função parece atingir o menor valor e o maior valor nessa janela. Justifique sua resposta com base nas curvas de nível.
2. A função cresce mais rapidamente na direção do eixo  $x$  ou do eixo  $y$ ? Explique com base no espaçamento das curvas de nível.
3. Determine, aproximadamente, o valor da função nos seguintes pontos:
  - (a)  $(0,0)$
  - (b)  $(1,0)$
  - (c)  $(0,2)$
4. Diga se a função parece ser crescente, decrescente ou constante ao longo da reta  $y = x$ . Justifique com base nas curvas de nível.

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 4. Conjuntos Convexos e Funções Convexas

#### Objetivos

- Compreender o conceito de conjunto convexo em  $\mathbb{R}^n$ .
- Interpretar geometricamente a convexidade de conjuntos.
- Definir e identificar funções convexas e côncavas.
- Entender a relação entre convexidade da função e convexidade do domínio.
- Interpretar geometricamente a convexidade de uma função.

## 4.1 Conjuntos Convexos

### Definição 4.1 (Conjunto convexo).

Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é dito *convexo* se, para quaisquer dois pontos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ , tem-se:

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in D \quad \text{para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Geometricamente, isso significa que, ao escolher quaisquer dois pontos no conjunto, o segmento de reta que os conecta está inteiramente contido em  $C$ .

### Exemplo 4.1.

A bola fechada centrada na origem,  $\overline{B(0, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ , é um conjunto convexo.

Sejam  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$ , logo,  $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq r$  e  $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \leq r$ . Queremos mostrar que o ponto do segmento

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2, \quad \lambda \in [0, 1],$$

também pertence à bola, isto é, que  $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r$ .

Pela desigualdade triangular e pela homogeneidade da norma,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| &= \|\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + (1 - \lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)\| \\ &\leq \lambda \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + (1 - \lambda) \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \end{aligned}$$

Logo,  $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \leq r$ , e portanto  $\mathbf{z} \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$ . Como  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  e  $\lambda$  eram arbitrários, conclui-se que  $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$  é convexo.

É claro que, para qualquer ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , a bola fechada centrada em  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\},$$

também é um conjunto convexo.

### Exemplo 4.2.

Qualquer *hiperplano* em  $\mathbb{R}^n$  é convexo.

De forma geral, um hiperplano é um conjunto da forma

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle a, \mathbf{x} \rangle = b\}, \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Sejam  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ , tem-se  $a \cdot \mathbf{x} = b$  e  $a \cdot \mathbf{y} = b$ .

Considere o ponto do segmento  $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ . Então

$$a \cdot \mathbf{z} = a \cdot (\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) = \lambda(a \cdot \mathbf{x}) + (1 - \lambda)(a \cdot \mathbf{y}) = \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Logo  $\mathbf{z} \in H$ . Como  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\lambda$  eram arbitrários, o segmento entre quaisquer dois pontos de  $H$  permanece em  $H$ , isto é,  $H$  é convexo.

### Exercício 4.1.

Mostre que as caixas em  $\mathbb{R}^n$  são conjuntos convexos:  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ .

### Exercício 4.2.

Mostre que **não** são convexos os conjuntos a seguir:

- (a) Círculos:  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ .
- (b) Curvas fechadas que não incluem a região interna.
- (c) União de duas bolas disjuntas.

### Exercício 4.3.

Seja  $C_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , uma família de conjuntos convexos.

- (a) Mostre que o conjunto interseção  $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$  também é convexo.
- (b) Dê o exemplo de um conjunto união  $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  que não é convexo.

## 4.2 Funções Convexas

### Definição 4.2 (Função convexa).

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo. Dizemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é *convexa* se, para todos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ , tem-se:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2) \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Analogamente,  $f$  é dita *côncava* se vale a desigualdade contrária:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2) \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

A exigência de que o domínio da função seja um conjunto convexo é essencial na definição de função convexa. Isso se deve ao fato de que ambas desigualdades envolvem a avaliação de  $f$  no ponto  $\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$ , que pertence ao *segmento de reta* entre  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ . Para que essa expressão faça sentido, é necessário que esse ponto também pertença a  $D$ . Isso é garantido exatamente quando  $D$  é um conjunto convexo como vimos na seção anterior.

### Exemplo 4.3.

Lembremos de Cálculo I que a função  $f(x) = x^2$  é convexa.

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Temos:

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 &= \lambda^2 x_1^2 + (1 - \lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2 \\ &= \underbrace{(\lambda - \lambda(1 - \lambda))x_1^2}_{\lambda^2} + \underbrace{((1 - \lambda) - \lambda(1 - \lambda))x_2^2}_{(1 - \lambda)^2} + 2\lambda(1 - \lambda)x_1 x_2 \\ &= \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 - \lambda(1 - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2) \\ &= \lambda x_1^2 + (1 - \lambda)x_2^2 - \lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Como  $\lambda(1-\lambda) \geq 0$  e  $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ , temos  $-\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \leq 0$ , logo,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Conclui-se que  $f$  é convexa.

#### Exemplo 4.4.

A função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é convexa.

Lembremos que  $f$  é a função norma:  $f(x, y) = x^2 + y^2 = \|x\|^2$ . Sejam  $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Temos:

$$\begin{aligned} \|\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}\|^2 &= \lambda^2\|\mathbf{u}\|^2 + (1-\lambda)^2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \\ &= \underbrace{\lambda^2}_{\lambda^2} \|\mathbf{u}\|^2 + \underbrace{(1-\lambda)^2}_{(1-\lambda)^2} \|\mathbf{v}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \\ &= \lambda\|\mathbf{u}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{v}\|^2 - \lambda(1-\lambda)(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle) \\ &= \lambda\|\mathbf{u}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{v}\|^2 - \underbrace{\lambda(1-\lambda)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}) \leq \lambda f(\mathbf{u}) + (1-\lambda)f(\mathbf{v}),$$

o que mostra que  $f$  é convexa.

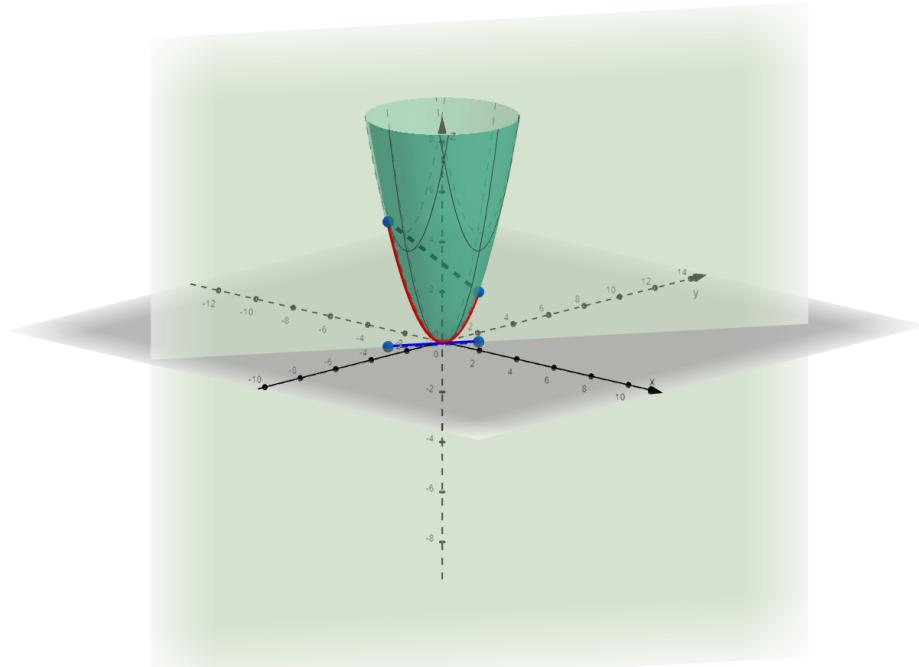
Observemos que a mesma prova vale para mostrar que a função norma definida sobre o espaço euclidiano de dimensão  $n > 2$  é convexa.

Podemos usar o exemplo anterior para ilustrar geometricamente o conceito de função convexa (vide figura a seguir).

Dado dois pontos  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ , a combinação convexa desses pontos é definida por

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \quad \lambda \in [0, 1],$$

o que representa um ponto no segmento de reta que liga  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  no plano  $xy$  (representado na figura pelo segmento azul).



Consideremos agora os pontos do gráfico da função associados a esses dois pontos:  $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$  e  $(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2))$ , no espaço tridimensional. O segmento de reta que liga esses dois pontos (em preto tracejado na figura) é dado por:

$$\lambda(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)) + (1 - \lambda)(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Assim, a altura desses pontos é dada por:

$$\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2). \tag{4.1}$$

Por outro lado, a altura dos pontos do gráfico de  $f$  que estão sobre o segmento no plano  $xy$  (pontos localizados sobre a curva vermelha na figura) é exa-

tamente

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2). \quad (4.2)$$

No caso do exemplo, a curva vermelha fica sempre abaixo do segmento, ou seja, as alturas dos pontos que estão sobre a curva vermelha (4.2), são menores que as alturas dos pontos que estão sobre o segmento (4.1). Isto é:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

que é a definição de função convexa.

### Exemplo 4.5.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(\mathbf{x}) = \langle a, \mathbf{x} \rangle + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}.$$

Então  $f$  é simultaneamente *convexa* e *côncava*.

Tome  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $D$  é convexo,  $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in D$ . Então:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) &= \langle a, \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \rangle + b \\ &= \lambda \langle a, \mathbf{x}_1 \rangle + (1 - \lambda) \langle a, \mathbf{x}_2 \rangle + b. \\ &= \lambda \langle a, \mathbf{x}_1 \rangle + (1 - \lambda) \langle a, \mathbf{x}_2 \rangle + (\lambda + (1 - \lambda)) b \\ &= \lambda (\langle a, \mathbf{x}_1 \rangle + b) + (1 - \lambda) (\langle a, \mathbf{x}_2 \rangle + b) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Como há igualdade, segue que:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2)$$

e

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

ou seja,  $f$  é convexa e côncava.

Observe que a função apresentada no Exemplo 4.5 é linear, e seu gráfico é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Geometricamente, qualquer segmento de reta que liga dois pontos desse hiperplano está inteiramente contido nele, o que está de pleno acordo com a igualdade obtida analiticamente.

#### Exercício 4.4.

Mostre que as seguintes funções são convexas.

(a)  $f(x, y) = |x| + |y|$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c)  $f(x, y) = \max\{x, y\}$

#### Exercício 4.5.

Mostre que se  $f$  é convexa, então  $-f$  é côncava, e vice-versa.

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 5. Limite e Continuidade

#### Objetivos

- Entender a noção de limite de uma função de várias variáveis quando nos aproximamos de um ponto específico no domínio.
- Compreender a definição formal de limite em termos de  $\varepsilon$ - $\delta$ .
- Explorar as propriedades dos limites, incluindo as regras de soma, produto, constante e quociente.
- Compreender o conceito de limite ao longo de caminhos e como eles são relevantes na definição de limites de funções de várias variáveis.
- Entender a definição de continuidade de uma função  $f(x, y)$  em um ponto  $(a, b)$ , envolvendo a existência do limite no ponto.
- Identificar diferentes tipos de descontinuidades, como descontinuidades removíveis e não removíveis.

Suponha que queiramos estudar a demanda por empréstimos bancários. Nesse contexto, a quantidade de empréstimos demandada ( $Q$ ) depende da taxa de juros dos empréstimos ( $r$ ) e da renda disponível ( $I$ ) dos tomadores de empréstimos.<sup>1</sup>

Queremos analisar como pequenas variações em cada uma dessas variáveis influenciam a quantidade de empréstimos demandada. Por exemplo:

- Se a taxa de juros aumentar levemente, como isso afetará a quantidade de empréstimos demandada? Podemos calcular o valor de  $Q$  quando  $r$  assume um valor ligeiramente maior e compará-lo com o valor original de  $Q$ . Isso nos dá uma ideia de como a demanda por empréstimos responde a variações na taxa de juros.
- Se a renda disponível dos tomadores aumentar um pouco, como isso influenciará a demanda por empréstimos? Novamente, podemos calcular  $Q$  quando  $I$  assume um valor ligeiramente maior e comparar os resultados.

Vejamos a seguir um exemplo muito particular.

### Exemplo 5.1 (Demanda por empréstimos bancários).

Suponha que a quantidade de empréstimos demandada seja dada pela função:

$$Q(r, I) = \frac{100}{r} \cdot I^{0,5},$$

onde  $r$  representa a taxa de juros dos empréstimos e  $I$  a renda disponível dos tomadores. Vamos analisar o comportamento da função quando a taxa de juros se aproxima de 5% (isto é,  $r = 0,05$ ) e a renda disponível se aproxima de 3000 reais.

Considere a seguinte matriz, que apresenta os valores de  $Q(r, I)$  para diferentes combinações de  $(r, I)$  próximas a  $(0,05, 3000)$ :

---

<sup>1</sup>Observe que, em cenários reais,  $Q$  depende do tempo. No entanto, como o tempo não é uma variável contínua neste exemplo, não o consideraremos.

$r \backslash I$	2600	2800	3000	3200	3400
<b>0,03</b>	18257,82	20000,00	21821,89	23734,98	25757,92
<b>0,04</b>	14142,14	15491,91	16970,56	18596,68	20389,09
<b>0,05</b>	11547,68	12649,11	<b>13856,88</b>	15172,59	16598,76
<b>0,06</b>	9718,58	10606,60	11547,68	12534,09	13559,46
<b>0,07</b>	8288,62	9064,03	9898,98	10777,14	11693,75

A tabela mostra que os valores de  $Q(r, I)$  ao redor de  $(0,05, 3000)$  são relativamente próximos de  $Q(0,05, 3000) = 13856,88$ .

O exemplo anterior ilustra como pequenas variações nas variáveis  $r$  e  $I$  afetam a quantidade de empréstimos demandada. Para descrever esse comportamento de forma precisa e generalizável, utilizamos o conceito de *limite*. Assim como no cálculo de uma variável, o limite nos permite entender como uma função se comporta quando suas variáveis independentes se aproximam de determinados valores.

## 5.1 Limite

### Definição 5.1 (Limite de funções de várias variáveis).

Dizemos que o *limite de uma função*  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  quando  $\mathbf{x} \in D$  se aproxima de  $\mathbf{x}_0 \in D$  é  $L$ , e escrevemos

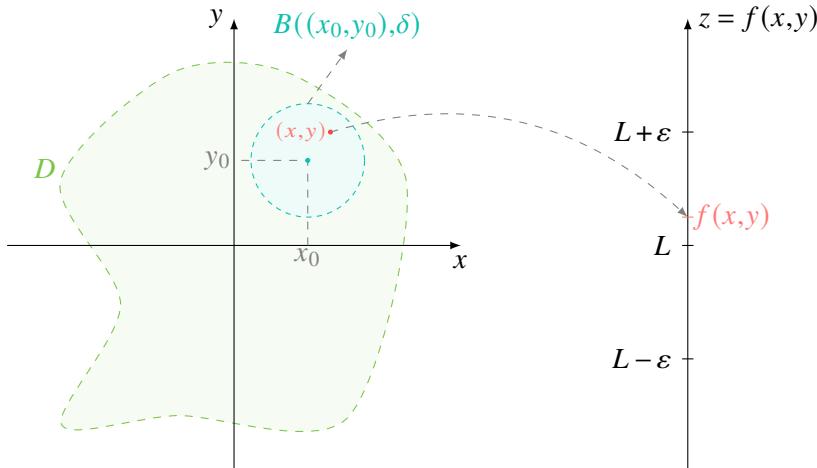
$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L,$$

se, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$  tal que, para todo  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ , temos que  $f(\mathbf{x}) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ .

Em outras palavras,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ , se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

A figura a seguir ilustra a ideia de limite em duas variáveis: para qualquer intervalo de tamanho  $2\epsilon$  ao redor do valor  $L$  que escolhermos, existe uma bola de raio  $\delta$  ao redor de  $(x_0, y_0)$  no domínio de  $f$  tal que a imagem de qualquer ponto nessa vizinhança cai dentro do intervalo inicial.



**Figura 5.1**

Vamos mostrar um exemplo prático de como escolher  $\delta$  em função de  $\epsilon$ .

### Exemplo 5.2.

Queremos calcular o limite de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  quando  $(x, y)$  se aproxima de  $(0, 0)$ . Ou seja, estamos interessados em

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Pela definição de limite, precisamos propor um candidato  $L$ . Note que  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é exatamente o quadrado da distância de  $(x, y)$  à origem. Assim, quando  $(x, y)$  se aproxima de  $(0, 0)$ , essa distância diminui para 0. Portanto, o valor natural a ser considerado como limite é

$$L = 0.$$

Seja, então,  $\varepsilon > 0$  qualquer. Para nosso exemplo temos,

$$|f(x,y) - L| = |x^2 + y^2 - 0| = x^2 + y^2 = \|(x,y) - (0,0)\|^2.$$

Escolhendo  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ , temos que, se

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta = \sqrt{\varepsilon},$$

então

$$|f(x,y) - L| < \|(x,y) - (0,0)\|^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon,$$

mostrando que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

### Exercício 5.1.

Use a ideia do exemplo anterior para calcular  $\lim_{x \rightarrow O} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , onde  $O$  é a origem.

### Exemplo 5.3.

Vamos provar, usando a definição formal de limite, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Note que a função

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

está bem definida para todo  $(x,y) \neq (0,0)$ , e queremos saber se o limite existe na origem e, se existir, qual é o seu valor.

Seja  $\varepsilon > 0$ . Seja  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Note que  $r \rightarrow 0$  implica que  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . Então:

$$\left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right| = \left| \frac{\sin(r^2)}{r^2} - 1 \right|.$$

Mas sabemos do cálculo em uma variável que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Logo, existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < |r^2| < \delta$ , então:

$$\left| \frac{\sin(r^2)}{r^2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Como  $r^2 = x^2 + y^2$ , basta escolher  $\delta > 0$  tal que  $0 < x^2 + y^2 < \delta$  implica

$$\left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Portanto, pela definição de limite, concluímos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

### Observação 5.2.

Sempre que a função for definida por uma única fórmula e essa fórmula estiver bem definida no ponto considerado, podemos usar a definição de limite para provar que o valor do limite é simplesmente o valor da função no ponto. Esse seria o caso do Exemplo 5.2, e o leitor pode mostrar esse fato usando a definição de limite.

Por outro lado, no caso em que a função não estiver definida no ponto no qual estivermos calculando o limite, ou estiver definida por mais de uma expressão e esse ponto for uma transição entre as definições, não podemos concluir o valor do limite apenas avaliando a expressão. Nesses casos, é necessário fazer uma análise diferente do comportamento da função em torno do ponto.

No Exemplo 5.3, usamos recursos conhecidos (como uma identidade trigonométrica fundamental e uma substituição de variáveis) para investigar o comportamento da função e determinar a existência do limite.

A seguir, continuamos com uma série de resultados que nos dão ferramentas importantes para determinar limites de funções de várias variáveis e também nos ajudam a identificar situações em que esses limites não existem.

### Teorema 5.3 (Unicidade do limite).

Se o limite de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  existe, então ele é único.

#### Prova.

Suponha que existam dois limites distintos  $L_1$  e  $L_2$  de  $f$  em  $\mathbf{x}_0$ . Pela definição de limite, para todo  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tais que:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1 \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2 \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos que, para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - L_2| \leq |L_1 - f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{x}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, segue que  $|L_1 - L_2| = 0$ , isto é,  $L_1 = L_2$ . Portanto, o limite é único. □

O teorema anterior garante que, se o limite de uma função de várias variáveis existe em um ponto, então o limite dessa função ao longo de qualquer curva que passe por esse ponto também existe e é igual ao valor do limite.

Para reforçar essa conclusão de forma mais formal, suponha que temos um candidato a limite  $L$  para uma função  $f$  no ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Esse valor pode, por

exemplo, ser sugerido ao restringirmos  $f$  a um determinado caminho que leva até  $\mathbf{x}_0$ , como uma reta ou parábola em  $\mathbb{R}^2$ , e observarmos que o limite ao longo desse caminho é igual a  $L$ .

No entanto, suponha agora que, ao considerarmos um *segundo caminho* contendo também  $\mathbf{x}_0$ , verificamos que existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $|f(x, y) - L| \geq \varepsilon$  para todos os pontos  $(x, y)$  suficientemente próximos de  $\mathbf{x}_0$  ao longo desse segundo caminho. Ou seja, por menor que seja o raio  $\delta > 0$  considerado, sempre haverá pontos sobre esse caminho cujas imagens estão a uma distância maior ou igual a  $\varepsilon$  de  $L$ .

Isso viola a definição formal de limite. Logo,  $L$  não pode ser o limite de  $f$  no ponto  $\mathbf{x}_0$ , e concluímos que o limite de  $f$  nesse ponto não existe.

Vejamos exemplos da aplicação desse fato.

#### Exemplo 5.4.

Vamos mostrar que não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(x-1) \cos y + y^3 \cos x}{x^2 + y^2}. \quad (5.1)$$

Pelo raciocínio anterior, basta achar dois caminhos para os quais o limite da função

$$f(x, y) = \frac{x^2(x-1) \cos y + y^3 \cos x}{x^2 + y^2}$$

ao longo deles seja diferente. Podemos escolher nos aproximarmos da origem primeiramente ao longo do eixo  $x$ , que é o conjunto  $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Restringindo a função a esse conjunto temos,

$$f(x, 0) = \frac{x^2(x-1) \cos 0 + 0^3 \cos x}{x^2 + 0^2} = \frac{x^2(x-1)}{x^2} = x-1,$$

que é uma função de uma variável. Logo,

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1.$$

Agora, podemos nos acercar da origem ao longo do eixo  $y$ , que é o caminho  $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Temos,

$$f(0,y) = \frac{0^2(0-1)\cos y + y^3 \cos 0}{0^2 + y^2} = \frac{y^3}{y^2} = y.$$

Dai,

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0.$$

Pelo teorema anterior (unicidade do limite) não pode existir o limite (5.1).

### Exemplo 5.5.

Vamos mostrar que não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + y^2}. \quad (5.2)$$

Novamente, basta achar dois caminhos para os quais o limite da função

$$f(x,y) = \frac{xy}{3x^2 + y^2}$$

ao longo deles seja diferente. Podemos escolher nos aproximarmos da origem primeiramente ao longo do eixo  $x$ , que é o caminho  $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$ . Neste caso temos,

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{3x^2 + 0^2} = 0.$$

Agora, se nos acercarmos da origem ao longo do eixo  $y$ , que é o caminho  $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Temos

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{3 \cdot 0^2 + y^2} = 0.$$

Embora esses dois limites sejam iguais, isso não diz nada sobre a existência do limite da função em si, pois podem existir outros caminhos para os quais o limite da função restrito a eles sejam diferentes. De fato, se nos acercarmos da origem ao longo da reta de equação  $y = x$ , por exemplo, que é conjunto  $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$ , temos

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{3 \cdot x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4},$$

que é diferente do limite da função ao longo dos eixos coordenados (ou seja, diferente de 0). Logo, não existe o limite (5.2) como queríamos mostrar.

É natural questionar se, analogamente ao que ocorre com limites laterais em funções de uma variável, a coincidência dos limites ao longo de todas as retas que passam por um ponto seria suficiente para garantir a existência do limite de uma função de duas variáveis. A resposta é negativa, como ilustra o exemplo a seguir.

### Exemplo 5.6.

Queremos determinar se existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Vamos calcular esse limite ao longo de todas as retas possíveis que passam pela origem que são os conjuntos:

$$R_m = \{(x, mx) \in \mathbb{R}^2\}, \quad m \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Avaliemos  $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$  sobre  $R_m$ . Temos:

$$f(x, mx) = \frac{x^2(mx)}{x^4 + (mx)^2} = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}.$$

Tomando o limite quando  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

Portanto, ao longo de qualquer reta  $y = mx$ , o limite é zero.

No caso da reta de equação  $x = 0$ , temos  $f(0, y) = 0$ , logo o limite ao longo dessa reta também é zero.

Por outro lado, consideremos a aproximação da origem ao longo da parábola de equação  $y = x^2$ , isto é, sobre o conjunto:

$$\{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Temos:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

portanto:

$$\lim_{(x, x^2) \rightarrow (0, 0)} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Assim, o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  não existe. Isso mostra que a coincidência dos limites ao longo de todas as retas não é suficiente para garantir a existência do limite total.

Assim como no cálculo de uma variável, os limites de funções de várias variáveis obedecem a certas propriedades algébricas. Essas propriedades nos permitem calcular limites de expressões compostas a partir dos limites das partes que as compõem, facilitando bastante a resolução de problemas. A seguir, listamos as principais propriedades que usaremos ao longo do curso.

### Propriedades 5.4 (Propriedades dos limites).

Sejam  $f, g$  e  $h$  funções definidas em um subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Suponha que, para  $\mathbf{x}_0 \in D$ , existam os limites:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L_2.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

- **Soma:**  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = L_1 + L_2;$
- **Produto:**  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})] = L_1 \cdot L_2;$
- **Quociente:**  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L_1}{L_2}$  desde que  $L_2 \neq 0$ ;
- **Multiplicação por constante:**  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} (c \cdot f(\mathbf{x})) = c \cdot L_1$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ ;
- **Valor absoluto:**  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x})| = |L_1|.$

### Prova.

#### Soma:

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_1$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que, se  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1$ , então

$$|f(\mathbf{x}) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L_2$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que, se  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2$ , então

$$|g(\mathbf{x}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definimos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Assim, se  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , então valem simultaneamente as duas desigualdades acima. Logo,

$$\begin{aligned}|[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] - (L_1 + L_2)| &= |(f(\mathbf{x}) - L_1) + (g(\mathbf{x}) - L_2)| \\&\leq |f(\mathbf{x}) - L_1| + |g(\mathbf{x}) - L_2| \quad (\text{Desigualdade triangular}) \\&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = L_1 + L_2.$$

### Valor absoluto:

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , então:

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Agora, pela desigualdade do valor absoluto, temos:

$$||f(\mathbf{x})| - |L|| \leq |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Assim, pela definição de limite,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x})| = |L|.$$

As demais propriedades podem ser demonstradas de forma análoga. □

### Exemplo 5.7 (Limite do produto de funções).

Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y+1) \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Da Observação 5.2, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y + 1) = 1.$$

No Exemplo 5.3, mostramos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y + 1) \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} &= \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y + 1) \right) \cdot \left( \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right) \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

### Exemplo 5.8 (Limite do quociente de funções).

Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2)^2}{\sin(x^2 + y^2)}.$$

A função pode ser reescrita como o seguinte quociente:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}}.$$

Dos Exemplos 5.2 e 5.3, temos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Observemos que, na Propriedade 5.4, assumimos como hipótese que os limites das funções que estamos operando entre si existem. Por outro lado, isso **não implica** que, se o limite de uma delas não existir, o limite da operação também não existirá. Vejamos um exemplo.

### Exemplo 5.9 (Soma com limites individuais indefinidos).

Considere as funções

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Observe que:

$$f(x,y) + g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \quad \text{com } (x,y) \neq (0,0).$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y) + g(x,y)] = 1.$$

No entanto, os limites de  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$ , individualmente, **não existem** quando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , pois:

- Se tomarmos o eixo  $x$  ( $y = 0$ ), temos

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1, \quad g(x,0) = 0.$$

- Se tomarmos o eixo  $y$  ( $x = 0$ ), temos

$$f(0,y) = 0, \quad g(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1.$$

Ainda assim, a **soma das funções tem limite constante igual a 1.**

### Teorema 5.5 (Límite da composição de funções).

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ , e seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\lim_{t \rightarrow L} g(t) = M$ . Então, o limite da composição  $g(f(\mathbf{x}))$  existe e é dado por

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = M.$$

### Prova.

Queremos mostrar que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(f(\mathbf{x})) = M,$$

assumindo que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow L} g(t) = M.$$

Seja  $\varepsilon > 0$ , como  $\lim_{t \rightarrow L} g(t) = M$ , existe  $\eta > 0$  tal que,

$$|t - L| < \eta \implies |g(t) - M| < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Por outro lado, como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ , existe  $\delta > 0$  tal que,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \eta.$$

Então, fazendo  $t = f(\mathbf{x})$  em (5.3), obtem-se

$$|g(f(\mathbf{x})) - M| < \varepsilon.$$

Logo, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |g(f(\mathbf{x})) - M| < \varepsilon$$

como desejado. □

### Exemplo 5.10 (Limite de uma composição).

No Exemplo 5.3 mostramos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1. \quad (5.4)$$

A “substituição radial” usada ali é precisamente tomar

$$t = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|.$$

Vejamos agora a opção de aplicar o Teorema do Limite da Composição.

Defina

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \quad (t \neq 0).$$

Então

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = g(f(x,y)).$$

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 1,$$

segue do Teorema do Limite da Composição que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1,$$

isto é, (5.4).

**Exemplo 5.11.**

Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 - x^2 - y^2).$$

Escrevemos  $F$  como uma composição:

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \quad g(t) = \ln(t) \quad (t > 0),$$

de modo que

$$F(x,y) = g(f(x,y)).$$

Observemos que, em uma vizinhança do ponto  $(0,0)$ , vale  $1 - x^2 - y^2 > 0$ , pois  $x^2 + y^2$  é pequeno e positivo, logo o argumento do logaritmo é bem definido.

Pelo Exemplo 5.2 e Observação 5.2,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1.$$

Do cálculo em uma variável,

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = \ln(1) = 0.$$

Aplicando o Teorema do Limite da Composição, obtemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 - x^2 - y^2) = 0.$$

**Teorema 5.6 (Teorema do Confronto).**

Se  $h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  para todos os  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ , exceto possivelmente em  $\mathbf{x}_0$  em si, e se  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L$ , então  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ .

**Prova.**

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1 \implies |h(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon,$$

isto é,

$$L - \varepsilon < h(\mathbf{x}) < L + \varepsilon.$$

De modo análogo, como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_2 \implies |g(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon,$$

isto é,

$$L - \varepsilon < g(\mathbf{x}) < L + \varepsilon.$$

Pela hipótese do enunciado, existe  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\} \implies h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}).$$

Defina

$$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}.$$

Então, para todo  $\mathbf{x}$  com  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , valem simultaneamente:

$$L - \varepsilon < h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) < L + \varepsilon.$$

Logo,

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, concluímos que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

□

**Exemplo 5.12.**

Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( 1 + (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right).$$

Sabemos que, para todo  $t$  real,

$$-1 \leq \operatorname{sen}(t) \leq 1.$$

Logo, para  $(x,y) \neq (0,0)$ ,

$$-(x^2 + y^2) \leq (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \leq (x^2 + y^2).$$

Somando 1 em todos os termos:

$$\underbrace{1 - (x^2 + y^2)}_{h(x)} \leq \underbrace{1 + (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{f(x)} \leq \underbrace{1 + (x^2 + y^2)}_{g(x)}.$$

Agora,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 - (x^2 + y^2)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + (x^2 + y^2)) = 1.$$

Pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( 1 + (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right) = 1.$$

**Corolário 5.7 (Consequência do Teorema do Confronto).**

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida em uma vizinhança perfurada de  $\mathbf{x}_0$  e suponha que  $f$  seja limitada nessa vizinhança, isto é, existe  $M > 0$  tal que

$$|f(\mathbf{x})| \leq M \quad \text{para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0.$$

Se  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0,$$

então

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0.$$

### Prova.

Se  $M = 0$ , então  $|f(\mathbf{x})| \leq 0$  e, portanto,  $f \equiv 0$  na vizinhança perfurada; nesse caso,  $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \equiv 0$  e o resultado é trivial. Suponhamos, portanto, que  $M > 0$ .

Seja  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_1 \implies |g(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Por hipótese,  $f$  é limitada em alguma vizinhança perfurada de  $\mathbf{x}_0$ , digamos em  $B(\mathbf{x}_0, \delta_2)$ . Definindo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , temos que, para todo  $\mathbf{x}$  com  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ,

$$|f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})||g(\mathbf{x})| \leq M|g(\mathbf{x})| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Assim, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| < \varepsilon,$$

o que mostra que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0.$$

□

**Exemplo 5.13.**

Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Escreva

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{g(x,y)}}_{\substack{}} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{f(x,y)}}_{\substack{}}.$$

Temos que  $f$  é limitada pois

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0).$$

Por outro lado,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0.$$

Pelo corolário anterior,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

## 5.2 Continuidade

O conceito de continuidade está diretamente ligado ao de limite. Já no Cálculo I vimos que uma função de uma variável é contínua em um ponto quando o limite da função, ao nos aproximarmos desse ponto, coincide com o valor que ela assume nele. Em termos do gráfico, isso significa que não há buracos: o ponto onde avaliamos a função faz parte do mesmo comportamento que se observa ao redor.

Um exemplo clássico em uma variável é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

onde a definição  $f(0) = 1$  elimina o buraco no gráfico, tornando a função contínua em  $x = 0$ . Veremos situações análogas em duas variáveis.

Em funções de várias variáveis a ideia é a mesma: exigimos que o valor da função no ponto coincida com o limite da função quando nos aproximamos dele por qualquer direção. Dessa forma, dizemos que o gráfico da função não apresenta buracos naquele ponto.

### Definição 5.8 (Função contínua).

Dizemos que uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é *contínua no ponto  $\mathbf{x}_0 \in D$*  se

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Resumindo,  $f$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$  se o limite existir e coincidir com o valor da função no ponto. Caso  $f$  seja contínua em todo ponto de  $D$ , dizemos que  $f$  é *contínua em  $D$* .

### Observação 5.9.

A definição anterior é, na verdade, apenas uma reformulação do conceito de limite: dizer que o limite de  $f(\mathbf{x})$  em  $\mathbf{x}_0$  existe e é igual a  $f(\mathbf{x}_0)$  equivale a afirmar que *para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ , vale*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Em termos intuitivos, isso significa que, se fizermos uma pequena perturbação no ponto  $\mathbf{x}_0$ , o valor da função diferirá muito pouco de  $f(\mathbf{x}_0)$ . Essa ideia será ilustrada em exemplos a seguir.

**Exemplo 5.14.**

Determine onde a função a seguir é contínua:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}.$$

A função está bem definida em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Nesses pontos, a função é dada por uma única expressão e o denominador não zera; portanto, pelos fatos já estabelecidos sobre limites (Observação 5.2), o limite coincide com a avaliação e  $f$  é contínua em todo  $(x,y) \neq (0,0)$ .

Na origem,  $f$  não está definida, logo  $f$  não é contínua na origem.

**Exemplo 5.15.**

Diga se

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é contínua na origem.

Segue diretamente do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0),$$

Logo,  $g$  é contínua na origem.

**Teorema 5.10 (Álgebra da continuidade).**

Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $f,g : D \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas em  $\mathbf{x}_0 \in D$ . Então valem:

- **Soma:**  $f+g$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$ .
- **Multiplicação por constante:**  $c f$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .

- **Produto:**  $f \cdot g$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$ .
- **Quociente:** Se  $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , então  $\frac{f}{g}$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$  (em particular, no que diz respeito ao domínio onde  $g \neq 0$ ).
- **Composição:** Se  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $L = f(\mathbf{x}_0)$ , então  $h \circ f$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$ .

### Prova.

Segue diretamente das regras de limite (soma, produto, quociente e composição) combinadas com a definição de continuidade.  $\square$

### Exemplo 5.16 (Soma de funções contínuas).

Considere

$$f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) \quad \text{e} \quad g(x,y) = \sqrt{1-x^2+y^2}.$$

Temos:

$$\text{Dom}(f) = B(O,1) \quad \text{e} \quad \text{Dom}(g) = \overline{B(O,1)}.$$

Ambas funções são contínuas nos seus domínios. Logo  $f+g$  é contínua no domínio interseção que é  $B(O,1)$ .

### Exemplo 5.17 (Produto de funções contínuas).

Sejam

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad p(x,y) = x+y+1.$$

Temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 1$$

de modo que  $h$  é contínua em  $(0,0)$  e em todo ponto de  $\mathbb{R}^2$ . Como  $p$  também é contínua, o produto  $p \cdot h$  é contínuo em  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemplo 5.18 (Quociente com denominador não nulo).

Considere

$$q(x,y) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

definida para  $x^2 + y^2 < 1$ .

O numerador e o denominador são contínuos no disco aberto  $x^2 + y^2 < 1$ , e o denominador não se anula nesse conjunto. Portanto,  $q$  é contínua em todo ponto com  $x^2 + y^2 < 1$ . (Observe que  $q$  não está definida na fronteira  $x^2 + y^2 = 1$ .)

### 5.2.1 Tipos de descontinuidade

No Exemplo 5.15, observe que a  $f$  do Exemplo 5.14 “virou” contínua na origem pelo simples fato de definirmos

$$g(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Ou seja, quando o limite existe (como número real) mas o valor da função não está definido no ponto ou está definido com outro valor podemos *costurar* o valor do limite no ponto para obter continuidade ali.

#### Definição 5.11 (Ponto removível de descontinuidade).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \overline{D}$ . Dizemos que  $\mathbf{x}_0$  é um *ponto removível de descontinuidade* de  $f$  se existe o limite

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R},$$

mas ou (i)  $\mathbf{x}_0 \notin D$ , ou (ii)  $\mathbf{x}_0 \in D$  e  $f(\mathbf{x}_0) \neq L$ .

### Exercício 5.2 (Extensão por continuidade (removível)).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \overline{D}$  um ponto removível de descontinuidade.

Defina  $\tilde{f} : (D \cup \{\mathbf{x}_0\}) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}_0\}, \\ L, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Mostre que  $\tilde{f}$  é contínua em  $\mathbf{x}_0$  e coincide com  $f$  em  $D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ .

### Definição 5.12 (Descontinuidade não removível).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \overline{D}$ . Dizemos que  $f$  tem uma *descontinuidade não removível* em  $\mathbf{x}_0$  quando **não existe** um limite finito

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}.$$

Isso pode ocorrer, por exemplo, se (i) o valor “explode” ( $|f(\mathbf{x})| \rightarrow +\infty$ ), (ii) há *oscilação* sem valor-limite, ou (iii) em várias variáveis, o limite *depende do caminho* de aproximação. Nesses casos, não é possível “costurar” um valor em  $\mathbf{x}_0$  que torne  $f$  contínua ali.

### Observação 5.13.

Compare com o caso *removível*: se o limite  $L = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  existe e é finito mas  $f$  não está definida em  $\mathbf{x}_0$  (ou  $f(\mathbf{x}_0) \neq L$ ), então redefinindo  $f(\mathbf{x}_0) := L$  obtemos continuidade em  $\mathbf{x}_0$ . Já nas situações acima, isso é impossível.

### Exemplo 5.19 (Dependência do caminho (não removível)).

Considere

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Ao longo de  $y = 0$ ,  $f(x,0) = 1$ ; ao longo de  $x = 0$ ,  $f(0,y) = 0$ . Como os limites ao aproximar  $(0,0)$  por caminhos diferentes são distintos, o limite *não* existe. Assim, a descontinuidade em  $(0,0)$  é **não removível**.

### Exemplo 5.20 (Explosão do valor (não removível)).

Considere

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Escreva  $h(x,y) = x^2 + y^2$  e  $g(t) = \frac{1}{t}$  para  $t > 0$ . Então

$$f(x,y) = g(h(x,y)).$$

Pelo Cálculo I,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ . Como  $h(x,y) \rightarrow 0^+$  quando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , segue por composição que  $f(x,y) \rightarrow +\infty$ . Logo, não há limite finito em  $(0,0)$  e a descontinuidade é **não removível**.

### Exemplo 5.21 (Oscilação sem limite (não removível)).

Considere

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Defina  $h(x,y) = x^2 + y^2$  e  $g(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$  para  $t > 0$ . Assim,

$$f(x,y) = g(h(x,y)).$$

Em Cálculo I, sabe-se que o limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$  não existe devido à oscilação: para quaisquer  $\delta > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ , existem pontos  $t$  com  $0 < t < \delta$  tais que  $\sin(1/t) = 1$  e também pontos com  $\sin(1/t) = -1$ . Logo, para qualquer vizinhança de  $t = 0$  (equivalentemente, para qualquer vizinhança de  $(0,0)$  em  $(x,y)$ ), os valores de  $f$  tomam 1 e  $-1$ . Pela definição de limite (Cálculo I), isso impede a existência de um limite em  $(0,0)$ . Concluímos que a descontinuidade é **não removível**.

### 5.2.2 Teorema do Valor Extremo ou de Weierstrass

A seguir introduzimos um teorema fundamental para problemas de otimização (que estudaremos adiante). Em Economia, ele garante a existência de soluções de maximização e minimização sempre que o conjunto viável for *compacto* e a função objetivo for contínua. Por exemplo, com preços  $p \gg 0$  e renda  $m > 0$ , o conjunto orçamentário

$$D(p,m) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot x \leq m\}$$

é compacto; assim, toda utilidade contínua  $u : D(p,m) \rightarrow \mathbb{R}$  (e.g.,  $u(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ ) atinge um máximo em  $D(p,m)$ . De modo análogo, funções de custo contínuas atingem mínimos em conjuntos viáveis fechados e limitados (por exemplo, quando há limites de capacidade).

#### Teorema 5.14 (Teorema do Valor Extremo ou de Weierstrass).

Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  atinge um valor máximo e um valor mínimo em  $K$ , isto é, existem  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$  tais que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{y}) \quad \text{para todo } \mathbf{z} \in K.$$

A demonstração completa do Teorema do Valor Extremo apoia-se em resultados como Bolzano–Weierstrass ou Heine–Borel que são tópicos que fogem do

escopo deste texto; por isso, omitiremos a prova e adotaremos o teorema como fato a partir daqui.

### Exemplo 5.22.

Seja

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Defina

$$B = \overline{B(O,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Temos  $\text{Dom}(f) = B$ , que é compacto (fechado e limitado), e  $\text{Graf}(f)$  é a semiesfera superior de equação  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  sobre  $B$ . Como o radicando é não negativo em  $B$  e as operações envolvidas (soma, produto por  $-1$ , raiz para  $t \geq 0$ ) preservam continuidade, concluímos que  $f$  é contínua em  $B$ . Pelo Teorema do Valor Extremo,  $f$  atinge um máximo e um mínimo em  $B$ . Neste exemplo, os valores extremos se identificam diretamente pela leitura geométrica do gráfico:  $\text{Graf}(f)$  é a semiesfera superior de raio 1 apoiada no plano  $z = 0$ . A *maior altura* ocorre no topo da semiesfera, exatamente acima do centro do disco  $B$ , isto é, em  $(0,0)$ , onde  $f(0,0) = 1$ . A *menor altura* ocorre na “saia” da semiesfera, onde ela encontra o plano  $z = 0$ , isto é, na fronteira  $\partial B$  (com  $x^2 + y^2 = 1$ ), onde  $f(x,y) = 0$ . Portanto,

$$\max_B f = 1 \text{ (em } (0,0)) \quad \text{e} \quad \min_B f = 0 \text{ (em toda a fronteira } \partial B).$$

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 6. Derivadas parciais

#### Objetivos

- Compreender o conceito de derivada parcial de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em relação a uma variável, mantendo as demais constantes.
- Interpretar geometricamente a derivada parcial como a taxa de variação da função ao longo de uma direção coordenada.
- Ser capaz de calcular derivadas parciais utilizando regras de diferenciação: soma, produto, quociente, cadeia, e derivadas de funções elementares.
- Aplicar as derivadas parciais ao estudo local do comportamento de funções de múltiplas variáveis.

Vamos começar por lembrar a famosa lei da demanda. Basicamente essa lei nos diz que a quantidade demandada ( $D$ ) de um bem diminui varia inversamente à medida que seu preço  $p$  aumenta. Na linguagem matemática: a derivada da função de demanda em relação ao preço é negativa, ou seja,  $D'(p) < 0$ .

No entanto, em geral, a demanda por um produto não depende apenas do preço. Como vimos antes, a demanda por um bem ou serviço pode ser influenciada por diversos outros fatores, como a renda dos consumidores ( $R$ ), os preços de bens substitutos ( $P_s$ ) ou complementares ( $P_c$ ) (entre outros). Considerando todos esses fatores, a função de demanda se torna mais complexa, refletindo a interdependência entre várias variáveis:  $D(p, R, P_s, P_c)$ .

Surge, então, uma pergunta crucial: como medir a sensibilidade da demanda a variações no preço? Em outras palavras, como podemos entender a taxa de variação da demanda quando o preço de um bem ou serviço muda?

Para isso, precisamos de uma noção que capture a variação da função em relação a uma variável específica, mantendo as outras constantes. É nesse contexto que introduzimos o seguinte conceito fundamental.

### Definição 6.1 (Derivada parcial).

A *derivada parcial* de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em relação à variável  $x_i$  (com  $1 \leq i \leq n$ ) no ponto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  é denotada por  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$  e é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}, \quad (6.1)$$

sempre que tal limite exista e seja finito.

De forma intuitiva, a derivada parcial é uma generalização da derivada usual para funções de várias variáveis. Enquanto a derivada de uma função de uma variável mede a taxa de variação instantânea ao longo da única direção possível, a derivada parcial mede a variação da função em relação a uma variável específica, mantendo as demais constantes.

Note que o limite do *quociente incremental*, dado na equação (6.1), está em uma forma indeterminada. Para resolvê-la, aplicam-se manipulações algébricas, tais como fatorações, simplificações ou substituições, conforme a estrutura da função considerada (sempre lembrando que o limite pode não existir, como já vimos em Cálculo I).

### Exemplo 6.1.

Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Vamos determinar as derivadas parciais de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ .

Por ora, dispomos apenas da definição para o cálculo das derivadas parciais.

- Em relação a  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, 2) - f(1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2 + 2^2 - (1^2 + 2^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t + t^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (2 + t) = 2.\end{aligned}$$

- Em relação a  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1, 2+t) - f(1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1^2 + (2+t)^2 - (1^2 + 2^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t + t^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (4 + t) = 4.\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 = 2 \cdot x_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4 = 2 \cdot y_0.$$

É claro que essa função nos lembra a função quadrática estudada em Cálculo I,  $f(x) = x^2$ , cuja derivada é  $f'(x) = 2x$ . No caso da generalização  $f(x,y) = x^2 + y^2$ , as derivadas parciais também resultam no dobro da variável correspondente:

- Em relação a  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xh + t^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (2x + t) = 2x.\end{aligned}$$

- Em relação a  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^2 + (y+t)^2 - (x^2 + y^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2yh + t^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (2y + t) = 2y.\end{aligned}$$

### Exemplo 6.2.

Consideremos a função  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ . Calculemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Em geral, calcula-se primeiro as expressões das derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

e, em seguida, avaliam-se essas expressões nos pontos desejados. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2} - \sqrt{1-x^2-y^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2} - \sqrt{1-x^2-y^2}}{t} \cdot \frac{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(2x+t)}{\sqrt{1-(x+t)^2-y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando  $t$  tende a zero obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Analogamente, obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Agora avaliamos essas duas funções no ponto desejado:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### Exercício 6.1.

Seja  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ . Calcular as derivadas parciais de  $f$  pela definição.

Para dar uma interpretação geométrica desse conceito, consideremos o Exemplo 6.2. Sabemos que o gráfico de  $f$  é a semiesfera superior, e podemos analisar as curvas obtidas pela interseção entre esse gráfico e os planos verticais  $y = -\frac{1}{2}$  e  $x = \frac{1}{2}$ , respectivamente. Essas curvas são dadas por:

$$\{(x, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}-x^2}) \mid -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\} \quad \text{e} \quad \{(\frac{1}{2}, y, \sqrt{\frac{3}{4}-y^2}) \mid -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

Tais curvas são, na verdade, os gráficos de duas funções de uma variável real:

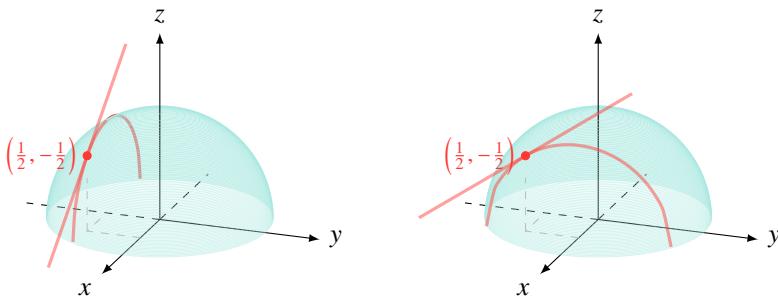
$$f_1(x) = \sqrt{\frac{3}{4}-x^2} \quad \text{e} \quad f_2(y) = \sqrt{\frac{3}{4}-y^2}.$$

Essas funções correspondem aos cortes da superfície realizados por planos verticais. Mais precisamente,  $f_1(x)$  é obtida ao fixarmos  $y = -\frac{1}{2}$ , o que equivale a cortar o gráfico de  $f$  com o plano vertical  $y = -\frac{1}{2}$ , paralelo ao plano  $xz$ . Analogamente,  $f_2(y)$  resulta do corte com o plano vertical  $x = \frac{1}{2}$ , mantendo  $x$  fixo e variando  $y$ , ou seja, um plano paralelo ao plano  $yz$ . Assim, podemos aplicar as ideias de Cálculo I: as derivadas de  $f_1$  e  $f_2$  em seus respectivos pontos

representam as inclinações das tangentes a essas curvas. Em particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f'_1\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f'_2\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Essa é precisamente a interpretação geométrica das derivadas parciais: elas medem a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  ao longo de cortes em planos verticais paralelos aos planos coordenados  $xz$  e  $yz$ .



**Figura 6.1**

### Observação 6.2.

Olhando desde um ponto de vista vetorial, temos:

$$(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + t \cdot (0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posição}}, \dots, 0) = \mathbf{x} + t e_i.$$

Ou seja, ao calcular a derivada parcial em relação à  $i$ -ésima variável, estamos avaliando a função  $f$  ao longo de um pequeno segmento retilíneo em torno do ponto  $\mathbf{x}$ , cujo vetor diretor é exatamente o  $i$ -ésimo vetor canônico de  $\mathbb{R}^n$ . Em outras palavras, a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$  mede a taxa de variação de  $f$  quando nos deslocamos a partir de  $\mathbf{x}$  exclusivamente na direção de  $e_i$ , isto é, ao longo do segmento

$$t \mapsto \mathbf{x} + t e_i,$$

com  $t$  suficientemente pequeno de modo que  $t \mapsto \mathbf{x} + t\mathbf{e}_i \in D$ .

Observamos que, ao calcular uma derivada parcial em relação a uma variável, as demais funcionam como constantes. Assim, o processo é análogo ao cálculo de derivadas de funções de uma variável. Por isso, podemos aplicar diretamente as mesmas regras de diferenciação já conhecidas, o que simplifica bastante os cálculos.

Mais precisamente, temos o seguinte resultado. Caso o leitor deseje, as regras apresentadas a seguir podem ser demonstradas diretamente a partir da definição de derivada parcial como limite. Como exercício, sugerimos adaptar as provas das propriedades dos limites para obter essas fórmulas.

### Proposition 6.3 (Regras de Diferenciação).

Sejam  $f$  e  $g$  funções que admitem a derivada parcial em relação a  $x_i$  em  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Temos:

- **Soma:**  $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ .
- **Produto:**  $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ .
- **Multiplicação por constante:**  $\frac{\partial(c \cdot f)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \forall c \in \mathbb{R}$ .
- **Quociente:**  $\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{[g(\mathbf{x})]^2}$  desde que  $g(\mathbf{x}) \neq 0$ .

### Exemplo 6.3 (Derivada parcial da soma de funções).

Sejam  $f(x, y) = x^2$  e  $g(x, y) = \ln(y)$ . Vamos calcular suas derivadas parciais.

Usando a linearidade, e lembrando que ao derivar em relação a  $x$  a variável  $y$  permanece constante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + \ln(y)) = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial \ln(y)}{\partial x} = 2x + 0 = 2x.$$

Como  $x^2$  é constante em relação a  $y$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\ln(y)) = \frac{1}{y}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial y}(f + g) = 0 + \frac{1}{y} = \frac{1}{y}.$$

#### Exemplo 6.4 (Derivada parcial do produto de funções).

Seja  $f(x, y) = x \cdot e^y$ . Vamos calcular as derivadas parciais.

Aplicando a regra do produto e lembrando que  $y$  fica constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot e^y) = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot e^y + x \cdot \frac{\partial e^y}{\partial x} = 1 \cdot e^y + x \cdot 0 = e^y.$$

Mantendo  $x$  constante e derivando em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot e^y) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) \cdot e^y = xe^y.$$

#### Exemplo 6.5 (Quociente de funções).

Seja  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Vamos calcular as derivadas parciais:

Aplicando a regra do quociente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot (x^2+y^2) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x) \cdot (x^2+y^2) - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{0 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot (2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Até aqui, trabalhamos com exemplos de funções relativamente simples, no sentido de que suas derivadas parciais podiam ser obtidas diretamente a partir das regras algébricas de diferenciação (soma, produto, quociente e múltiplo constante).

Entretanto, em muitas situações práticas, as funções aparecem como composições, como no Exercício 6.1. Observe que já estudamos limites de composições do tipo  $g(f(x,y))$ . O próximo passo é compreender como calcular derivadas parciais nesse mesmo contexto: isto é, quando uma função é composta com outra. Para lidar com esse tipo de caso, precisamos estender as regras já conhecidas.

**Teorema 6.4 (Regra da Cadeia (caso particular)).**

Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Suponha que  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  admite a derivada parcial em relação a  $x_i$  no ponto  $\mathbf{x} \in D$ , e que  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $f(\mathbf{x})$ . Definindo

$$h(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})),$$

temos

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

**Prova.**

Fixe  $i \in \{1, \dots, n\}$  e denote por  $e_i$  o  $i$ -ésimo vetor canônico. Defina a função de uma variável (lembre da Observação 6.2)

$$a(t) = f(\mathbf{x} + t e_i),$$

com  $t$  suficientemente pequeno de modo que  $\mathbf{x} + t e_i \in D$ . Pela definição de derivada parcial, temos

$$a'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(t) - a(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t e_i) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Logo,  $a$  é derivável em  $t = 0$ . Agora considere

$$\varphi(t) = h(\mathbf{x} + t e_i) = g(f(\mathbf{x} + t e_i)) = g(a(t)).$$

Como  $g$  é diferenciável em  $a(0) = f(\mathbf{x})$  e  $a$  é diferenciável em 0, pela regra da cadeia de uma variável temos

$$\varphi'(0) = g'(a(0)) a'(0) = g'(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Por outro lado, pela definição de derivada parcial,

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - h(\mathbf{x})}{t} = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Concluímos que

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = g'(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

como desejado. □

### Exemplo 6.6 (Derivadas parciais da função Gaussiana).

Considere

$$h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Definimos a função interna

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

e a função externa

$$g(t) = e^{-t},$$

de modo que

$$h(x,y) = g(f(x,y)).$$

Temos

$$g'(t) = -e^{-t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-e^{-(x^2+y^2)}) \cdot (2x) = -2x e^{-(x^2+y^2)},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-e^{-(x^2+y^2)}) \cdot (2y) = -2y e^{-(x^2+y^2)}.$$

Na verdade, o teorema anterior é um caso particular de uma versão mais geral da regra da cadeia, na qual a função externa também depende de várias variáveis.

### Teorema 6.5 (Regra da Cadeia (versão geral)).

Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Suponha que  $f_1, \dots, f_m : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  admitem derivadas parciais em relação a  $x_i$  no ponto  $\mathbf{x} \in D$ , e seja  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ . Se

$$h(\mathbf{x}) = g(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

temos, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial u_j}(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

### Exemplo 6.7.

Queremos calcular a derivada da função

$$h(x,y) = \cos(x^2 + y) + \sin(xy).$$

Podemos escrever  $h$  como uma composição:

$$h(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

onde:

$$f_1(x,y) = x^2 + y, \quad f_2(x,y) = xy, \quad g(u,v) = \cos(u) + \sin(v).$$

Calculamos:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\sin(u), \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \cos(v),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y.$$

Aplicamos a regra da cadeia para calcular  $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y). \\ &= -\sin(x^2+y) \cdot 2x + \cos(xy) \cdot y.\end{aligned}$$

### Exercício 6.2.

Calcule  $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$  para a função do exemplo anterior.

### Exemplo 6.8.

Queremos calcular a derivada da função

$$h(x,y) = \ln((x+y)^2 + (xy)^2).$$

Podemos escrever  $h$  como uma composição:

$$h(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

onde:

$$f_1(x,y) = x+y, \quad f_2(x,y) = xy, \quad g(u,v) = \ln(u^2+v^2).$$

Calculamos:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{2u}{u^2+v^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{2v}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y.$$

Aplicamos a regra da cadeia para calcular  $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y). \\ &= \frac{2(x+y)}{(x+y)^2 + (xy)^2} \cdot 1 + \frac{2(xy)}{(x+y)^2 + (xy)^2} \cdot y.\end{aligned}$$

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

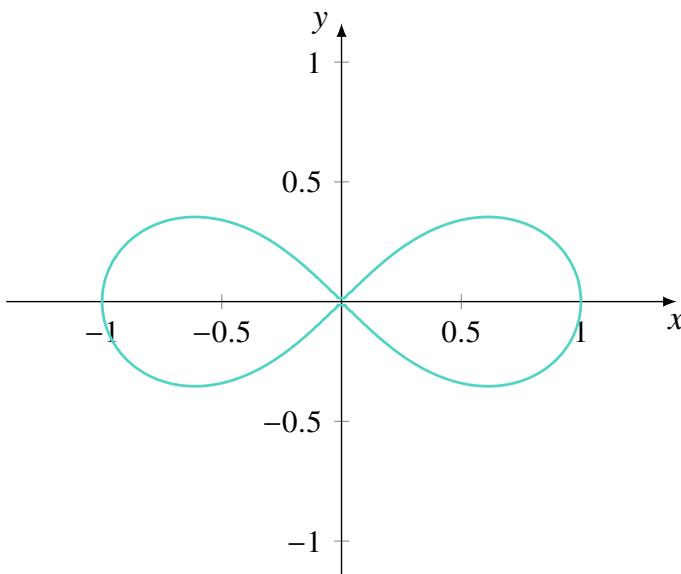


### 7. Derivação Implícita

#### Objetivos

- Compreender o conceito de funções definidas implicitamente.
- Aplicar a regra da cadeia para derivar equações onde  $y$  não está isolada.
- Encontrar variação de uma variável definida implicitamente em com respeito às demais.
- Determinar a inclinação da reta tangente a curvas implícitas.
- Resolver problemas aplicados envolvendo derivação implícita.

Como motivação, consideremos a seguinte curva no plano  $\mathbb{R}^2$ , conhecida como a *Lemniscata de Bernoulli*<sup>1</sup>. Tal curva é simétrica em relação aos eixos coordenados, com uma estrutura que se assemelha a um “8” deitado, forma característica das lemniscatas. Curiosamente, esse mesmo formato foi adotado como símbolo do infinito ( $\infty$ ).



**Figura 7.1:** L

Ela é definida por uma *equação implícita* notável, cuja forma torna inviável isolar  $y$  em função de  $x$  de maneira direta:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \quad (7.1)$$

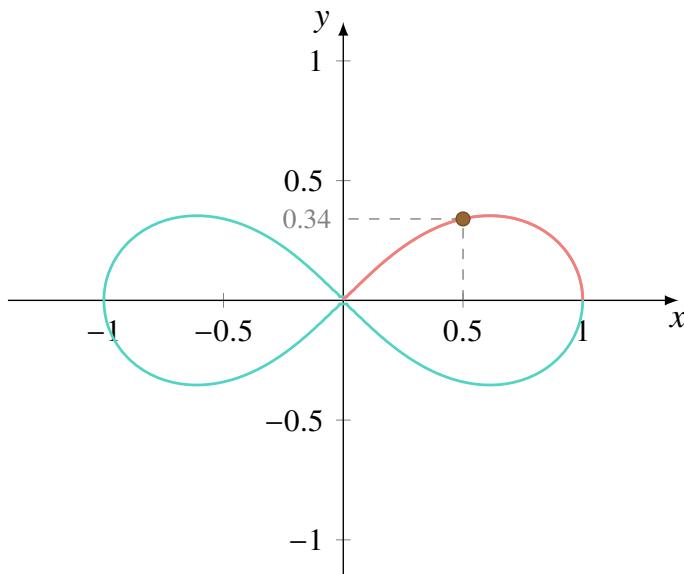
Isso está relacionado ao próprio formato da curva: ela não representa o gráfico de uma função  $y = h(x)$ , pois, para certos valores de  $x$ , existem dois (ou mais) valores distintos de  $y$  que satisfazem a equação. O mesmo ocorre se

---

<sup>1</sup> A *Lemniscata de Bernoulli* foi estudada inicialmente por Jakob Bernoulli, matemático suíço do século XVII, conhecido por suas contribuições ao cálculo e à teoria das curvas.

tentarmos isolar  $x$  em função de  $y$ ; ou seja, a relação entre as variáveis não é unívoca em nenhuma das direções.

Pensemos agora no ponto  $(0.5, 0.34)$  da curva, e consideremos a parte da Lemniscata de Bernoulli localizada no primeiro quadrante.



**Figura 7.2: L**

Podemos observar que, nesse trecho, a curva se comporta como o gráfico de uma função  $y = h(x)$ , mesmo que não conheçamos sua expressão explícita devido à complexidade algébrica da equação. Ainda assim, existe localmente uma função  $h$  que associa cada valor de  $x$  a um único valor de  $y$  em uma pequena vizinhança aberta do ponto  $(0.5, 0.34)$ .

Surge então uma questão natural: mesmo sem conhecer a expressão de  $h(x)$ , será que podemos determinar a taxa de variação de  $y$  em função de  $x$  nesse ponto?

Voltemos à equação (7.1). Levando todos os termos para um lado, podemos reescrever a equação como:

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0,$$

ou seja, a curva está definida como a **curva de nível zero** da função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$g(x, y) := (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2).$$

Mesmo sem conhecermos a expressão de  $y$  como função de  $x$ , podemos diferenciar essa equação implícita com respeito a  $x$ , utilizando a Regra da Cadeia. A função  $g$  depende de  $x$  diretamente e também indiretamente por meio de  $y = y(x)$ , de modo que:

$$\frac{d}{dx} [g(x, y(x))] = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \cdot y'(x) = 0. \quad (7.2)$$

Essa é uma aplicação direta da derivada composta, assumindo que  $g(x, y(x)) = 0$  ao longo da curva.

Isolando  $y'$ , obtemos:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0. \quad (7.3)$$

Vamos então calcular as derivadas parciais de  $g$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{d}{dx} [(x^2 + y^2)^2] - \frac{d}{dx}(x^2 - y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 2x = 4x(x^2 + y^2) - 2x, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{d}{dy} [(x^2 + y^2)^2] - \frac{d}{dy}(x^2 - y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2y = 4y(x^2 + y^2) + 2y. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Avaliando no ponto  $(x, y) = (0,5, 0,34)$ , temos:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,5, 0,34) \approx 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3656 - 2 \cdot 0,5 = 0,7312 - 1 = -0,2688,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,5, 0,34) \approx 4 \cdot 0,34 \cdot 0,3656 + 2 \cdot 0,34 \approx 0,4972 + 0,68 = 1,1772.$$

Observe que, de fato,  $\frac{\partial g}{\partial y}(0,5, 0,34) \neq 0$ . Substituindo essas expressões na equação da derivada total, temos:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{-0,2688}{1,1772} \approx 0,228.$$

Portanto, a taxa de variação de  $y$  em função de  $x$ , no ponto  $(0,5, 0,34)$ , é aproximadamente  $y'(0,5) \approx 0,228$ , mesmo sem conhecermos explicitamente a função  $y = h(x)$ .

Observe que as equações (7.2) e (7.3) foram obtidas de forma geral, sem que fosse necessário conhecer a expressão explícita da função  $y = h(x)$ , nem mesmo a forma exata da função  $g$ . Logo, surge uma questão natural: será que, de maneira geral, é possível determinar a variação de uma variável em função de outra, mesmo quando essa dependência é definida apenas de forma implícita por uma equação?

A resposta é sim, e essa ideia se estende para dimensões maiores. Essa generalização é formalizada por um dos resultados mais importantes do cálculo multivariável: o **Teorema da Função Implícita**, apresentado a seguir.

### Teorema 7.1 (Teorema da Função Implícita).

Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em uma vizinhança  $D \subset \mathbb{R}^n$  de um ponto  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ . Suponha que:

- $g(\mathbf{x}_0) = c$ ;
- as derivadas parciais de  $g$  existem e são contínuas em  $D$ ;

- $\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

Então, existe uma vizinhança  $\hat{D} \subset \mathbb{R}^{n-1}$  de  $\hat{\mathbf{x}}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$  e uma única função contínua  $h: \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , tal que:

- $h(\hat{\mathbf{x}}_0) = x_n^0$ ;
- $g(\hat{\mathbf{x}}, h(\hat{\mathbf{x}})) = c$  para todo  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{D}$ .

Além disso, para todo  $i = 1, \dots, n-1$ , a derivada parcial de  $h$  é dada por:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}, h(\hat{\mathbf{x}}))}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\hat{\mathbf{x}}, h(\hat{\mathbf{x}}))}. \quad (7.6)$$

### Observação 7.2.

De forma mais usual, (7.6) escreve-se como:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x})}. \quad (7.7)$$

*A grosso modo*, o Teorema da Função Implícita nos diz que, sob certas condições, é possível descrever uma das variáveis envolvidas em uma equação implícita do tipo  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$  como função das demais. Mais ainda, mesmo sem conhecermos explicitamente essa relação, podemos calcular a taxa de variação dessa variável em relação a todas as outras variáveis presentes na equação.

### Exemplo 7.1.

Consideremos a esfera definida pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Queremos aplicar o Teorema da Função Implícita para expressar  $z$  como função de  $x$  e  $y$ , ao redor do ponto  $(0, 0, 1)$  (polo norte da esfera).

Seja  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Note que a esfera é a superfície de nível 1 dessa função e que  $g(0, 0, 1) = 1$ . Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1) = 2 \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita, podemos afirmar que, em torno do ponto  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , a variável  $z$  depende explicitamente de  $x$  e  $y$ . Ou seja, existe uma função  $h(x, y)$  definida em uma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $z = h(x, y)$ . O teorema ainda garante que essa função existe e que é possível calcular sua taxa de variação em relação a  $x$  e a  $y$ , por meio da fórmula (7.7).

Como

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z,$$

temos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 1)}{\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = 0$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 1)}{\frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 1)} = -\frac{2 \cdot 0}{2 \cdot 1} = 0.$$

É claro que, no exemplo anterior, já sabemos que a função que descreve  $z$  em função de  $x$  e  $y$  explicitamente é dada por:

$$z = h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

e que  $\hat{D} = \overline{B(O, 1)}$ , isto é, o disco aberto de raio 1 centrado na origem. No Exemplo 6.2 da Nota 6, calculamos explicitamente as derivadas parciais dessa função, e observamos que isso envolve certa dificuldade algébrica, devido à presença da raiz quadrada. Por outro lado, ao usarmos o Teorema da Função Implícita, mesmo conhecendo a função  $h$ , o cálculo das derivadas fica signifi-

cativamente mais simples, pois envolve apenas as derivadas da função  $g$ , que é uma expressão polinomial.

Isso mostra que o Teorema da Função Implícita pode ser útil mesmo quando conhecemos a função  $h$  explicitamente, especialmente quando sua expressão é mais complicada do que a da função  $g$ .

### Observação 7.3.

Embora o enunciado do Teorema da Função Implícita geralmente envolva a variável  $x_n$  como dependente, isso não significa que só ela possa ser determinada em função das demais. Na verdade, qualquer uma das variáveis pode ser expressa como função das outras, desde que a derivada parcial correspondente de  $g$  não se anule no ponto considerado. Ou seja, o papel da “variável dependente” não precisa ser, necessariamente, o da última coordenada.

### Exercício 7.1.

Considere a Lemnicata de Bernoulli dada pela equação:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Use o Teorema da Função Implícita para calcular a taxa de variação de  $x$  em relação a  $y$  no ponto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ .

### Exercício 7.2.

Considere a esfera dada pela equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Use o Teorema da Função Implícita para calcular a taxa de variação de  $x$  em função de  $y$  e de  $z$  no ponto  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Até agora, toda a nossa análise foi baseada no comportamento da equação implícita nos pontos em que a derivada parcial da função  $g$  em relação à variável dependente é diferente de zero.

Isso decorre naturalmente da aplicação da regra da cadeia: ao derivarmos a equação implícita, a possibilidade de isolar a derivada da variável dependente exige que o denominador (isto é, a derivada parcial de  $g$  em relação a essa variável) não seja nulo.

Mas o que acontece nos pontos em que a derivada parcial  $\frac{\partial g}{\partial y}$  se anula?

Para ilustrar, retomemos o caso da Lemniscata de Bernoulli (ver Equação (7.5)), temos:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \iff y = 0.$$

Substituindo  $y = 0$  na equação da lemniscata,

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,$$

obtemos:

$$x^4 = x^2 \iff x = 0, \pm 1.$$

Portanto, existem exatamente três pontos da curva em que  $\frac{\partial g}{\partial y}$  se anula:  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ .

Nos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , observamos que as retas tangentes à curva são verticais. Isso pode ser explicado por meio da derivada implícita: se tentarmos descrever localmente a curva na forma  $y = y(x)$ , então  $y'(x)$  representa o coeficiente angular da reta tangente à curva. Como  $\frac{dy}{dx}$  envolve um denominador que se anula nesses pontos (isto é,  $\partial g / \partial y = 0$ ), o valor da derivada diverge, indicando que a reta tangente é vertical.

O terceiro ponto é a origem,  $(0, 0)$ . Nesse ponto, a curva possui duas retas tangentes bem definidas (com equações  $y = x$  e  $y = -x$ ) apesar de a derivada parcial de  $g$  em relação a  $y$  também se anular. Isso mostra que a anulação da derivada parcial não implica ausência de tangente, e sim que não podemos descrever a curva localmente como o gráfico de uma função  $y = h(x)$ . A origem é, na ver-

dade, um ponto singular da curva, onde ela *se cruza consigo mesma*, formando uma auto-interseção. Nesses casos, não há uma única direção de tangência e, portanto, o Teorema da Função Implícita não se aplica.

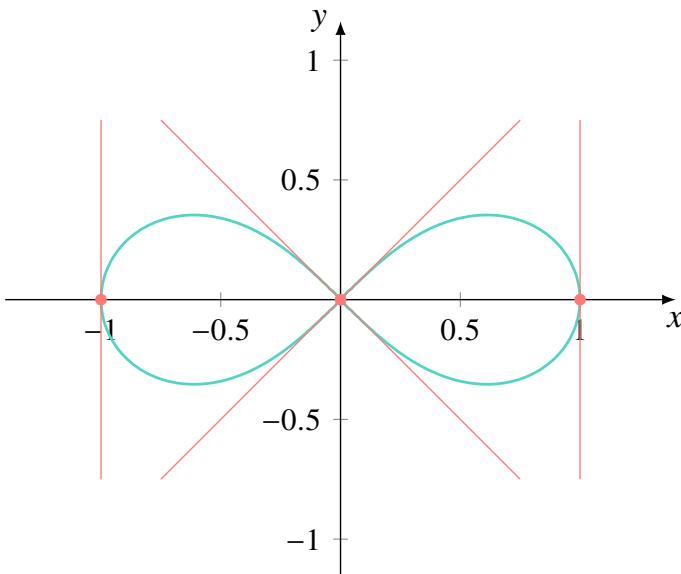
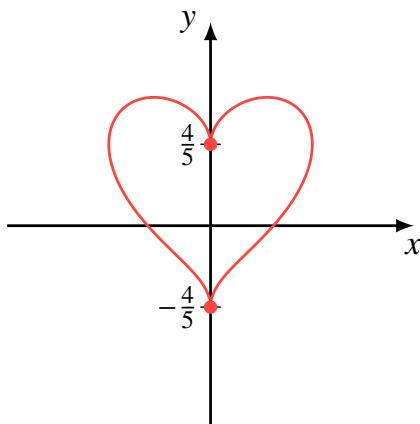


Figura 7.3

Por outro lado, consideremos a seguinte equação implícita:

$$x^2 + \left(\frac{5y}{4} - \sqrt{|x|}\right)^2 = 1.$$

Essa equação define uma curva no plano com formato semelhante a um coração.



Pelo gráfico, observa-se que a curva apresenta dois pontos “pontiagudos” sobre o eixo  $y$ , que são  $(0, 4/5)$  e  $(0, -4/5)$ . Nesses pontos específicos, não existe uma reta tangente bem definida.

Entretanto, é possível perceber visualmente que, em uma pequena vizinhança de cada um desses pontos, a curva ainda pode ser descrita como o gráfico de uma função  $y = h(x)$ . No entanto, como sabemos do Cálculo de uma variável, essa função não é derivável nesses pontos, pois o gráfico apresenta um “canto”.

Nesse caso, a equação da derivada implícita (obtida por meio do Teorema da Função Implícita) não é válida, pois uma de suas hipóteses não está satisfeita: a derivada parcial da função

$$g(x, y) = x^2 + \left( \frac{5y}{4} - \sqrt{|x|} \right)^2$$

não existe nos pontos em que  $x = 0$ , devido à presença do termo  $\sqrt{|x|}$ .

Isso mostra que a existência e a continuidade das derivadas parciais são condições suficientes para garantir a existência da função  $h$ , conforme estabelece o Teorema da Função Implícita, mas não são condições necessárias. Ou seja, há situações em que as derivadas da função  $g$  não existem em determinado ponto, mas ainda assim é possível descrever a equação  $g(x, y) = 0$  localmente

como o gráfico de uma função, mesmo que essa função não seja diferenciável naquele ponto.

No caso do exemplo, temos que  $y$  se expressa explicitamente em relação a  $x$ , seguindo a seguinte expressão explícita, ao redor de  $(0, \frac{4}{5})$ :

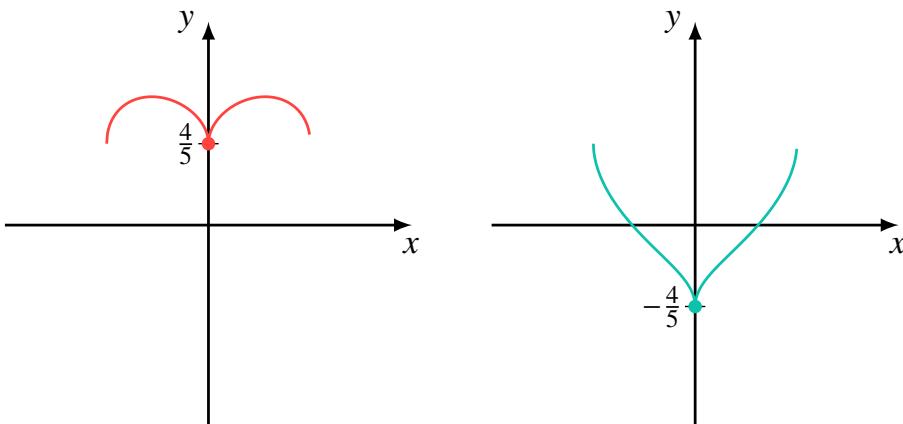
$$y(x) = \frac{4}{5} \left( \sqrt{1-x^2} + \sqrt{|x|} \right), \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1.$$

Seu gráfico é a parte superior da curva (“cortando” a mesma a partir de onde a reta tangente é vertical).

Analogamente, no caso do ponto  $(0, -\frac{4}{5})$ , a função que descreve localmente a parte inferior da curva é

$$y(x) = -\frac{4}{5} \left( \sqrt{1-x^2} - \sqrt{|x|} \right), \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1,$$

ainda que, como antes, ela não seja derivável no ponto  $x = 0$ . O gráfico é a parte inferior do “coração”,



## Exercícios Suplementares

### Exercício 7.3.

Encontre  $\frac{dy}{dx}$  usando derivação implícita, assumindo que  $y = f(x)$  está definida implicitamente por cada equação abaixo.

- (a)  $x^2 + y^2 = 25$
- (b)  $x^3 + y^3 = 6xy$
- (c)  $\sin(xy) + x^2 = y$
- (d)  $e^y + x^2y = x$
- (e)  $\ln(xy) = x + y$

### Exercício 7.4.

Encontre as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , assumindo que  $z$  está definida implicitamente em função de  $x$  e  $y$  por cada equação abaixo.

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- (b)  $x^2z + y^2 = z^3$
- (c)  $\sin(xz) + \cos(yz) = 0$
- (d)  $e^{xz} + y^2z = x + y$
- (e)  $\ln(z) + x^2 + y^2 = xyz$

### Exercício 7.5.

Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função  $y = f(x)$  definida implicitamente na equação  $2x^2 + y^3 + y - 6 = 3xy$  no ponto  $(1, 2)$ .

**Exercício 7.6.**

Encontre a equação da reta tangente à curva de equação  $x^2 + y^2 + \ln(xy) = 10$  no ponto  $(1,3)$ .

# Notas de Aula

## Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez



### 8. Derivada direcional

#### Objetivos

- Compreender o conceito de derivada direcional como generalização da derivada parcial.
- Interpretar geometricamente a derivada direcional como taxa de variação de uma função em uma direção específica.
- Calcular derivadas direcionais utilizando o gradiente.
- Relacionar a derivada direcional ao vetor gradiente e sua direção de crescimento máximo.
- Resolver exercícios aplicados envolvendo derivadas direcionais em funções de duas e três variáveis.

Sabemos que a derivada parcial de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em relação a  $x_i$  no ponto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  é o limite

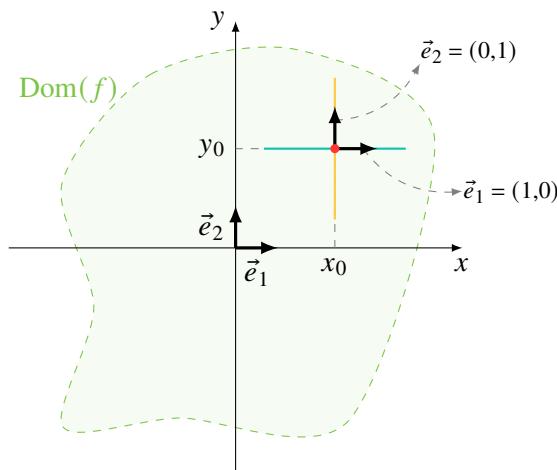
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t}. \quad (8.1)$$

Lembremos novamente que (Observação 6.2 da Nota 6):

$$(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) = \mathbf{x} + t \cdot \vec{e}_i,$$

onde  $\vec{e}_i$  é o  $i$ -ésimo vetor canônico de  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja, a derivada parcial mede a variação de  $f$  ao longo de um pequeno segmento que parte de  $\mathbf{x}$  e tem vetor diretor  $\vec{e}_i$ .

A figura a seguir ilustra esse raciocínio no caso de uma função arbitrária de duas variáveis. Em torno de um ponto  $(x_0, y_0)$ , consideramos pequenas variações das variáveis  $x$  e  $y$  paralelas aos eixos coordenados, que correspondem exatamente a segmentos cujos vetores diretores são os vetores canônicos  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  e  $\vec{e}_2 = (0, 1)$ .



**Figura 8.1:** O segmento em azul é paralelo ao eixo  $x$ , e é parametrizado por  $(x_0, y_0) + t(1, 0)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , enquanto o segmento em amarelo, paralelo ao eixo  $y$ , é dado por  $(x_0, y_0) + s(0, 1)$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, ambos os segmentos ficam contidos em  $\text{Dom}(f)$ .

Dado que em  $\mathbb{R}^n$  existem infinitas direções possíveis, surge naturalmente a seguinte pergunta: podemos investigar também como  $f$  se comporta ao longo de uma direção arbitrária  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , e não apenas nas direções dos vetores canônicos?

De fato, temos a seguinte definição.

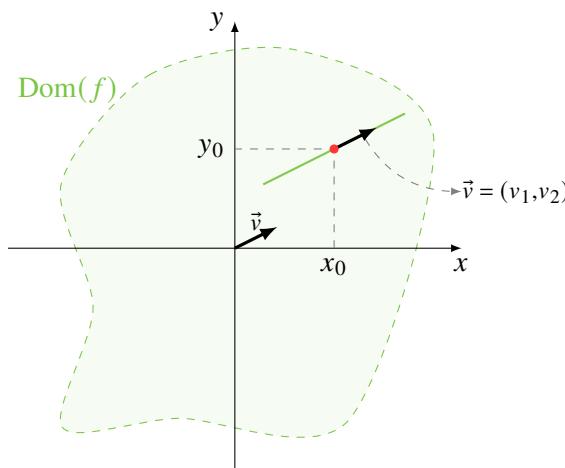
### Definição 8.1 (Derivada direcional).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in D$  e  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  um vetor. A *derivada direcional* de  $f$  em  $\mathbf{x}$  na direção de um vetor **unitário**  $\vec{v}$  é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\vec{v}) - f(\mathbf{x})}{t},$$

sempre que esse limite existir.

Ou seja, estamos interessados em compreender como a função  $f$  varia quando todas as variáveis sofrem uma pequena variação simultaneamente, em vez de apenas uma coordenada de cada vez.



**Figura 8.2:** O segmento em verde é dado por  $(x_0, y_0) + t\vec{v} = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , sendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno para que o mesmo esteja contido em  $\text{Dom}(f)$ .

**Exemplo 8.1.**

No caso particular  $\vec{v} = \vec{e}_i$ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

**Exemplo 8.2 (Função quadrática).**

Seja  $f(x,y) = x^2 + y^2$  e considere o ponto  $(1,2)$ . Queremos calcular a derivada direcional na direção do vetor  $\vec{v} = (1,1)$ .

Como  $\vec{v}$  não é unitário, normalizamos:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Então, a derivada direcional de  $f$  em  $(1,2)$  na direção de  $\vec{u}$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left((1,2) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1,2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 5}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} + 4 + \frac{4t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - 5}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{6t}{\sqrt{2}} + t^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{6}{\sqrt{2}} + t \right) \\ &= \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.3 (Derivada direcional da semiesfera via limite).**

Seja  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ , e considere o ponto  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  e o vetor  $\vec{v} = (1,2)$ . Queremos calcular a derivada direcional de  $f$  nesse ponto, na direção de  $\vec{v}$ .

Normalizando o vetor:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

Aplicamos a definição:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2} + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t} \\ &\quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t} \\ &\quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} - t}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{5}} - t^2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1/\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

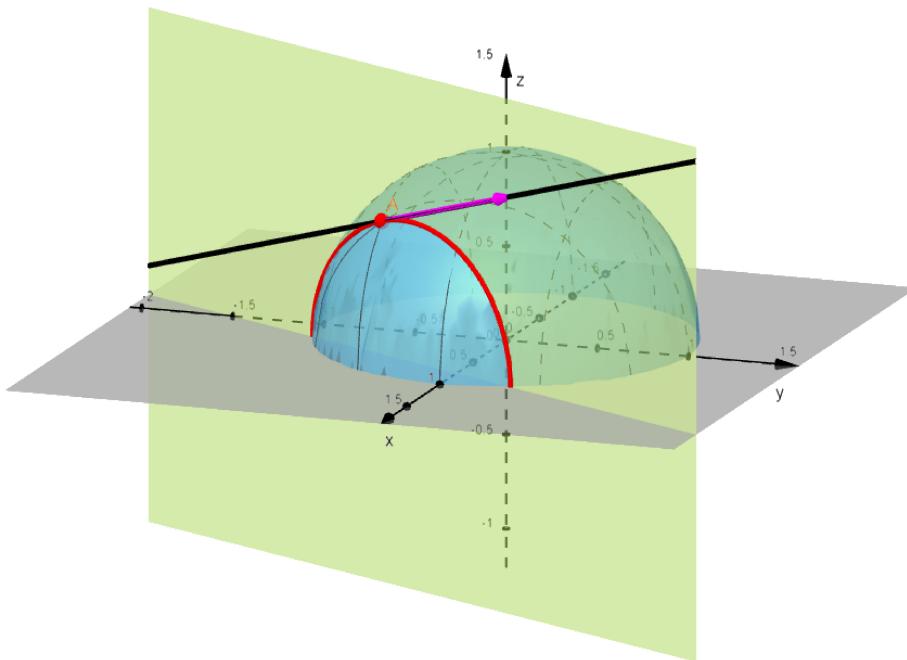
## 8.1 Interpretação da derivada direcional

Para dar uma interpretação geométrica, pensemos em funções de duas variáveis. Na aula de derivadas parciais vimos como a derivada parcial em relação a  $x$ , por exemplo, pode ser entendida como o coeficiente angular da reta tangente à curva obtida pela interseção entre o gráfico da função e o plano vertical paralelo

ao eixo  $xz$ . De forma análoga, a derivada parcial em relação a  $y$  corresponde à inclinação da reta tangente na interseção com o plano paralelo ao eixo  $yz$ .

Uma interpretação semelhante vale para a *derivada direcional*. Seja  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  um vetor unitário no plano  $xy$ . Consideremos o plano que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  e é gerado pelos vetores  $(v_1, v_2, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . A interseção desse plano com  $\text{Graf}(f)$  é uma curva contida nesse plano. A derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  nada mais é do que a inclinação da reta tangente a essa curva no ponto correspondente.

Usaremos o Exemplo 8.3 para ilustrar esse fato:



**Figura 8.3:** O plano verde representa o corte vertical do gráfico na direção escolhida, cuja interseção é a curva vermelha. A reta preta é a tangente a essa curva no ponto dado que está em vermelho, com vetor diretor  $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$  representado em cor rosa, sendo a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$  o coeficiente angular dessa reta no plano de corte.

Como pode ser observado no exemplo, a última coordenada do vetor diretor da reta tangente é a derivada direcional. E isso ocorre de forma geral para qualquer função, pois ao nos movermos na direção do vetor unitário  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  no plano  $xy$ , os pontos sobre o gráfico da função sofrem dois tipos de variação: um deslocamento horizontal, dada pelas duas primeiras coordenadas do vetor, e uma variação vertical em  $z$ , que corresponde à *taxa de crescimento de  $f$  naquela direção*.

Essa taxa de crescimento é precisamente a derivada direcional, que nos diz quanto  $f$  aumenta (ou diminui) por unidade de deslocamento na direção de  $\vec{v}$ . Assim, o vetor diretor da reta tangente é

$$\left( v_1, v_2, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \right),$$

e a terceira coordenada surge naturalmente como a medida da variação em  $z$ , isto é, como a taxa de crescimento da função na direção  $\vec{v}$  escolhida.

Essa interpretação geométrica se estende naturalmente para funções definidas em dimensões mais altas. Se consideramos  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , um ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , e uma direção unitária  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , ao nos movermos a partir de  $\mathbf{x}_0$  na direção  $\vec{v}$ , o deslocamento no espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  pode ser decomposto em duas partes:

- uma variação **horizontal**, no subespaço  $\mathbb{R}^n$ , dada pelo vetor  $\vec{v}$ ;
- uma variação **vertical**, ao longo do eixo  $x_{n+1}$ , determinada pela derivada direcional de  $f$  na direção  $\vec{v}$ , avaliada em  $\mathbf{x}_0$ .

Portanto, o vetor diretor da reta tangente à curva traçada no gráfico de  $f$  por esse movimento é dado por:

$$\left( v_1, v_2, \dots, v_n, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

## 8.2 Caracterização da derivada direcional

Ficou claro no exemplo que a definição da derivada direcional pelo limite pode ser de difícil aplicação, dependendo da função considerada, em muitos casos, ainda mais trabalhosa do que calcular diretamente uma derivada parcial. Por isso, é importante buscar uma caracterização mais conveniente, que nos permita determinar a variação de  $f$  na direção  $\vec{v}$  de forma simples e sistemática.

### Teorema 8.2 (Caracterização da derivada direcional).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e seja  $\mathbf{x} \in D$  um ponto interior a  $D$ . Suponha que, para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existe em uma vizinhança de  $\mathbf{x}$  e é contínua em  $\mathbf{x}$ . Então, para qualquer vetor unitário  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\vec{v}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

existe e vale

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}). \quad (8.2)$$

### Exemplo 8.4.

Voltemos ao Exemplo 1.2, no qual calculamos a derivada direcional da função  $f(x,y) = x^2 + y^2$  no ponto  $(1,2)$  na direção do vetor  $\vec{v} = (1,1)$ . O objetivo agora é, usando o Teorema anterior, ilustrar que o resultado coincide com o cálculo feito pela definição.

Já temos a normalização do vetor  $\vec{v} = (1,1)$ :

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

As derivadas parciais de  $f$  são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

No ponto  $(1,2)$  obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4.$$

Multiplicando cada derivada parcial pela respectiva componente de  $\vec{u}$  e somando, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2},$$

mesmo valor obtido pela definição.

Observe que, como hipótese, estamos supondo que as derivadas parciais de  $f$  são contínuas em uma vizinhança do ponto  $x$ . O seguinte exercício mostra que a mera existência das derivadas parciais no ponto  $x$  não garante, em geral, que a identidade (8.2) se verifique.

### Exercício 8.1.

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ , onde  $\vec{u} = (a,b)$  é um vetor unitário dado, e verifique que, em geral,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq f_x(0,0)a + f_y(0,0)b.$$

## Vetor gradiente

Observem que a equação (8.2) pode ser reinterpretada como um produto escalar entre o vetor direcional  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  e o vetor das derivadas parciais de  $f$  no ponto  $\mathbf{x}$ . Ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \left\langle \vec{v}, \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) \right\rangle.$$

Esse vetor de derivadas parciais possui um papel fundamental em cálculo multivariável. Vamos agora formalizá-lo.

### Definição 8.3 (Vetor gradiente).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existe em  $\mathbf{x} \in D$ , para  $i = 1, \dots, n$ . O *vetor gradiente* de  $f$  em  $\mathbf{x}$ , denotado por  $\nabla f(\mathbf{x})$ , é definido por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Assim, a equação (8.2) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle, \quad (8.3)$$

nos casos em que as derivadas parciais de  $f$  são contínuas em uma vizinhança de  $\mathbf{x}$ .

### 8.2.1 Direção de maior crescimento de uma função

Lembrando agora da fórmula do produto escalar aprendida em Álgebra Linear, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \|\vec{v}\| \cdot \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor  $\vec{v}$  e  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

Essa expressão atinge seu valor máximo quando  $\cos \theta = 1$ , o que ocorre exatamente quando o vetor  $\vec{v}$  tem a mesma direção e sentido do vetor  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

Concluímos, por tanto, que a direção do gradiente é aquela em que a função  $f$  apresenta sua **maior taxa de crescimento** a partir do ponto  $\mathbf{x}$ .

No caso em que  $\vec{v} = -\nabla f(\mathbf{x})$ , temos que o vetor direcional possui a mesma direção, mas sentido oposto ao gradiente. Assim, o ângulo entre  $\vec{v}$  e  $\nabla f(\mathbf{x})$  é  $\theta = \pi$ , e portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \cos(\pi) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|.$$

Ou seja, a função  $f$  apresenta sua **maior taxa de decrescimento** na direção oposta ao vetor gradiente<sup>1</sup>.

### 8.2.2 Interpretação geométrica do gradiente

A modo de motivação, pensemos agora em uma função arbitrária  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Fixado um valor  $c \in \mathbb{R}$ , consideremos a **curva de nível**

$$C = \{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}.$$

Suponha que  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  seja uma parametrização<sup>2</sup> suave de um arco dessa curva, isto é,

$$f(\gamma(t)) = c, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Definindo a função composta

$$h(t) = f(\gamma(t)),$$

---

<sup>1</sup>Esse fato fundamenta métodos como o gradiente descendente, usados para minimizar funções seguindo a direção oposta ao gradiente.

<sup>2</sup>Para revisar o tema de curvas parametrizadas, além dos apontamentos feitos em aula, recomendamos a leitura do livro *Cálculo*, Volume 2, de James Stewart, páginas 778 a 790.

vemos que  $h(t) \equiv c$  é constante. Logo,

$$h'(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in I.$$

Por outro lado, aplicando a regra da cadeia,

$$h'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) y'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Portanto,

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Concluímos que, sempre que  $\nabla f(\gamma(t)) \neq 0$ , o gradiente  $\nabla f$  em um ponto é ortogonal ao vetor tangente  $\gamma'(t)$  da curva de nível nesse ponto.

### Exemplo 8.5.

A modo de motivação pensemos na função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Vamos verificar que o raciocínio anterior no círculo.

As curvas de nível dessa função são os círculos de raio  $\sqrt{c}$ , sempre que  $c \geq 0$ , ou seja, o conjunto dos pontos  $(x, y)$  tais que:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = c.$$

Esses círculos possuem uma parametrização natural em coordenadas polares. Para um valor fixo de  $c > 0$ , temos:

$$\gamma(t) = (\sqrt{c} \cos t, \sqrt{c} \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

que descreve a curva de nível correspondente a  $f(x, y) = c$ . Calculamos:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \implies \nabla f(\gamma(t)) = (2\sqrt{c} \cos t, 2\sqrt{c} \sin t).$$

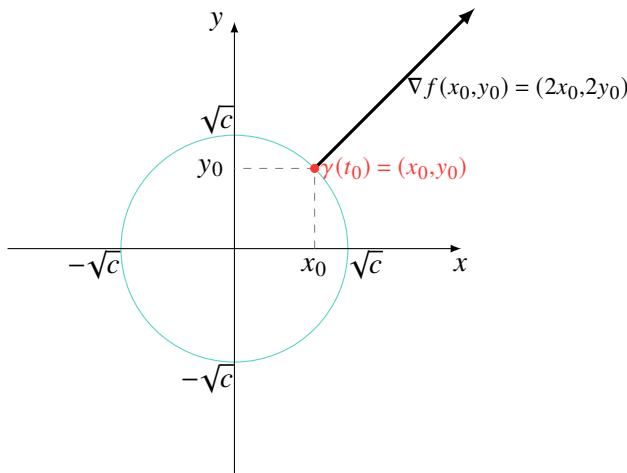
e

$$\gamma'(t) = (-\sqrt{c} \operatorname{sen} t, \sqrt{c} \cos t).$$

Logo:

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= \langle (2\sqrt{c} \cos t, 2\sqrt{c} \operatorname{sen} t), (-\sqrt{c} \operatorname{sen} t, \sqrt{c} \cos t) \rangle \\ &= (2\sqrt{c} \cos t)(-\sqrt{c} \operatorname{sen} t) + (2\sqrt{c} \operatorname{sen} t)(\sqrt{c} \cos t) \\ &= -2c \cos t \operatorname{sen} t + 2c \operatorname{sen} t \cos t = 0.\end{aligned}$$

Como sabemos que  $\nabla f(\gamma(t)) \neq 0$  (exceto na origem), concluímos que o gradiente é ortogonal às curvas de nível em qualquer ponto.



Observamos, ainda, que na ilustração o vetor gradiente está apontando para fora do círculo. Isso ocorre, neste exemplo, em qualquer ponto  $(x_0, y_0)$ , pois, como já vimos, o gradiente indica a direção de maior crescimento da função  $f$ ; em outras palavras, aponta para regiões onde  $f$  assume valores maiores que  $f(x_0, y_0)$ .

Tal raciocínio se estende para funções de  $n$  variáveis:

### Proposition 8.4 (Ortogonalidade do gradiente às superfícies de nível).

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas parciais contínuas em um ponto  $\mathbf{x}_0 \in N_c = \{ \mathbf{x} \in D; f(\mathbf{x}) = c \}$ . Então,  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  é ortogonal ao conjunto de nível<sup>3</sup>  $N_c$  no ponto  $\mathbf{x}_0$ , desde que  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ .

#### Prova.

Ideia da demonstração:

**Fato:** Para qualquer vetor tangente a  $N_c$  em  $\mathbf{x}_0$ , existe uma curva  $\gamma(t)$  suave contida em  $N_c$ , tal que  $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$  e  $\gamma'(t_0) = v$ .

Assim,  $f(\gamma(t)) = c$  para todo  $t$ . Definindo  $h(t) = f(\gamma(t))$ , temos  $h(t)$  constante, e portanto  $h'(t) = 0$ . Pela regra da cadeia:

$$h'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Logo,

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Como  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , então ele é ortogonal a  $\gamma'(t_0)$ , que é tangente a  $N_c$  em  $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$ . □

#### Exemplo 8.6.

Considere a função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Suas superfícies de nível são as esferas centradas na origem sempre que  $c \geq 0$ :

$$f(x, y, z) = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

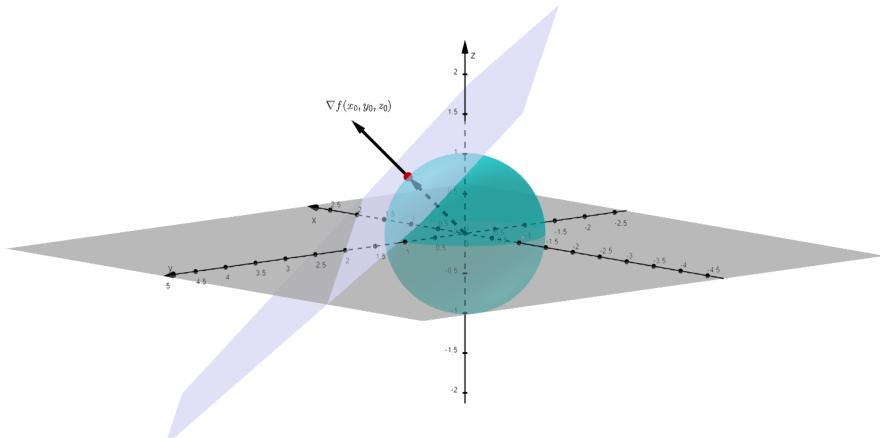
Para uma esfera centrada na origem, sabemos que o vetor posição  $\vec{p} = (x, y, z)$  de um ponto sobre a esfera é ortogonal à superfície da esfera na-

<sup>3</sup>Lembre que dizer que um vetor é ortogonal a uma superfície em um determinado ponto significa que ele é ortogonal a todos os vetores tangentes à superfície naquele ponto, isto é, ao subespaço vetorial conhecido como *espaço tangente*.

quele ponto. Como o gradiente da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  é dado por

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z) = 2\vec{p},$$

vemos que o gradiente é um vetor paralelo ao vetor posição. Portanto, ele também é ortogonal à esfera, isto é, perpendicular ao plano tangente no ponto considerado.



**Figura 8.4**

## Exercícios Suplementares

### Exercício 8.2.

Calcule a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2y + y^3$  no ponto  $(1, 2)$  na direção do vetor  $\vec{v} = (3, 4)$ .

### Exercício 8.3.

Seja  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ .

(a) Determine, no ponto  $(1, -1)$ , a direção de maior crescimento de  $f$ .

(b) Qual é a taxa de variação máxima nesse ponto?

#### Exercício 8.4.

Encontre a equação da reta tangente à curva dada implicitamente por  $x^2 + xy + y^2 = 3$  no ponto  $(1,1)$ .

#### Exercício 8.5.

Encontre a equação do plano tangente ao cone de equação  $z^2 = x^2 + y^2$  no ponto  $(1,1,\sqrt{2})$ .