FGV EPGE — Professor: Felipe S. Iachan

Teoria Macroeconômica II - 2024 — Monitor: Alex Muranaka

Primeira Prova

Gabarito

1 Questões Breves (2,0 pontos)

a) Considere uma cadeia de Markov simétrica de dois estados (x, P, π_0) com o espaço de estados

$$x = (\mu + \sigma, \mu - \sigma)$$

para μ dado (que pode ser positivo ou negativo) e $\sigma > 0$. Que as probabilidades de transição sejam

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

para $0 < p < 1$.

- Calcule a distribuição estacionária única desta cadeia de Markov.

$$(I - P')\bar{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-p & -(1-p) \\ -(1-p) & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1-p)\bar{\pi}_1 - (1-p)\bar{\pi}_2 = 0 \Rightarrow \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2$$

Usando o fato de que $\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = 1$, concluímos:

$$\bar{\pi}_1 = \frac{1}{2} = \bar{\pi}_2$$

- Qual a média e o desvio padrão desta distribuição estacionária?

A média do processo X_t aplicada sobre a distirbuição estacionária é:

$$\mathbb{E}\{X_t\} = \bar{\pi}_1(\mu + \sigma) + \bar{\pi}_2(\mu - \sigma) = \frac{1}{2}(\mu + \sigma + \mu - \sigma) = \mu$$

E o seu segundo momento é:

$$\mathbb{E}\left\{X_t^2\right\} = \bar{\pi}_1(\mu+\sigma)^2+\bar{\pi}_2(\mu-\sigma)^2 = \frac{1}{2}(\mu^2+2\mu\sigma+\sigma^2+\mu^2-2\mu\sigma+\sigma^2) = \mu^2+\sigma^2$$

Logo, a variância é:

$$V\left\{X_t\right\} = \mathbb{E}\left\{X_t^2\right\} - \mathbb{E}\left\{X_t\right\}^2 = \mu^2+\sigma^2-\mu^2 = \sigma^2$$

- Que propriedade do processo $\{X_t\}$ o parâmetro p controla? Como essa propriedade depende se p é maior ou menor que 0.5?

---

p representa a **persistência** do processo X_t. Quanto maior for o valor de p, maior a probabilidade de que o valor de X_t seja idêntico ao de X_{t-1}.

Somente o argumento de cima já seria o suficiente para resolver este item. Mas, uma forma mais algébrica de enxergar o papel da persistência em X_t seria calculando a correlação serial:

$$\mathbb{E}\left\{X_t X_{t-1}\right\} = \sum_i \sum_j x_i x_j \pi(x_j|x_i)\bar{\pi}_i$$

$$= (\mu+\sigma)^2\frac{p}{2} + 2(\mu+\sigma)(\mu-\sigma)\frac{1-p}{2} + (\mu-\sigma)^2\frac{p}{2}$$

$$= (\mu^2+2\mu\sigma+\sigma^2)\frac{p}{2} + (\mu^2-\sigma^2)(1-p) + (\mu^2-2\mu\sigma+\sigma^2)\frac{p}{2}$$

$$= p\mu^2 + p\sigma^2 + (1-p)\mu^2 - (1-p)\sigma^2$$

$$= \mu^2 + (2p-1)\sigma^2$$

Logo,

$$\text{Corr}\left\{X_t, X_{t-1}\right\} = \frac{\mu^2+(2p-1)\sigma^2-\mu^2}{\sigma^2} = 2p-1$$

Se $p=\frac{1}{2}$, não há correlação serial em X_t. Agora, se $p>\frac{1}{2}$, temos correlação serial positiva. Num caso extremo, se $p=1$, obteríamos correlação serial positiva perfeita.

---

b) Discutimos a figura abaixo, contida no livro de Jianjun Miao, em sala de aula.

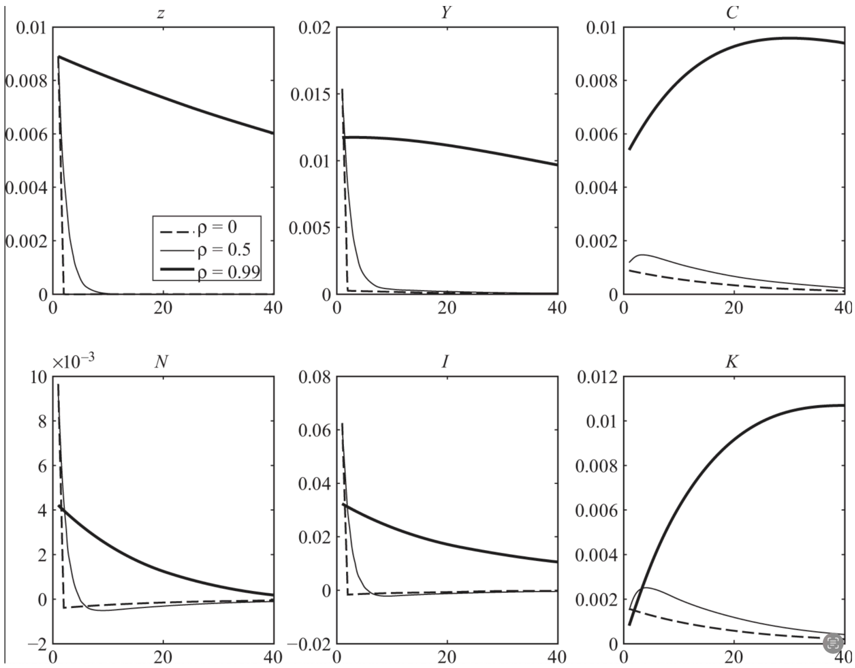

Figura 1: Impulso-respostas para choque de TFP

- Qual a justificativa econômica para o comportamento "corcoveado" do consumo? Porque a resposta é maior com choques mais persistentes?

Observe que o formato de C se movimenta de forma muito similar ao de K. O choque de TFP causa um enriquecimento temporário do indivíduo, que terá maior disponibilidade de recursos para escolher como alocar entre seu consumo e capital poupado para o próximo período, como visto na restrição orçamentária padrão abaixo:

$$c + k' = nw(K, z) + (1 + R(K, z) - \delta)k$$

Ademais, o motivo do formato dessa curva ser "corcoveada" pode ser inferido pela Equação de Euler (Restrição Intertemporal) na escolha de consumo:

$$1 = \beta \mathbb{E}_{z'|z} \left\{ (1 + R(K, z) - \delta) \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right\}$$

Pela concavidade da função utilidade, $u'(c) > u'(c') \Rightarrow c < c'$. Com um choque de TFP causando um aumento no retorno sobre capital, $\Delta R(K, z) > 0$, temos uma queda esperada na troca intertemporal de consumo, $\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ para compensar esse efeito, uma vez que a esperença acima deve se manter igual a 1: Isso simboliza que os agentes tem incentivo a poupar mais, nos fornecendo um aumento de c_{t+1} relativo a c_t (note que um aumento de c_{t+1} combinado com um c_t menor ou igual representa uma queda nesta razão de utilidades marginais). Este é um fator de suavização do consumo, que permite que ele se dissipe de forma suave e mais duradoura ao longo do tempo, potencializado pela escolha de poupança em k'.

Com a acumulação simultânea de capital K, a riqueza vai se perdurando por mais tempo, permitindo um aumento do consumo inicialmente. Por outro lado, temos a redução de z em direção ao S-S conforme o choque se dissipa, o que, junto com o acúmulo de capital, nos leva a queda na taxa de juros, $\Delta R(K, z) < 0$. Logo, olhando novamente para a eq. de Euler, teríamos um aumento de $\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ para compensar o efeito: isso nos dá a direção oposta do efeito descrito anteriormente. Eventualmente, temos então que o aumento de consumo atinge um "pico" e depois começa a diminuir, retornando ao seu S-S.

Logicamente, choques menos persistentes tornam esse aumento de riqueza pouco duradouro, o que gerariam respostas menores e menos duradouras em C e em K: Isso faz com que o "pico" seja atingido mais cedo, levando a uma queda mais rápida.

- Por que a resposta inicial do trabalho ao choque de TFP cai com a persistência do choque?

O ajuste em N é voluntário: com o aumento da riqueza disponível via choque de TFP, temos um impacto positivo no salário $w(K, z)$. Olhemos para a restrição Intratemporal de escolha do trabalho:

$$\underbrace{u_n(c, 1-n)}_{MC_n} = \underbrace{u_c(c, 1-n)w(K, z)}_{MB_n}$$

O lado direito desta equação representa o custo marginal do trabalho, enquanto o lado esquerdo representa o benefício marginal. Com $\Delta w(K, z) > 0$, temos um incentivo para trabalhar mais.

Mas, note também que o consumo tem papel negativo no benefício marginal, visto que a maior disponibilidade de riqueza permite consumo a níveis idênticos ou maiores, para um menor nível de trabalho! Sendo assim, como choques mais persistentes permitem aumentos maiores (e mais persistentes) no consumo, temos também um efeito negativo maior, causando um "salto" menor nas horas de trabalho. Sendo assim, temos que neste modelo, o efeito do consumo domina o efeito do salário sobre as horas trabalhadas!

Por outro lado, o nível de N permanecerá acima do S-S por maior tempo nesta ocasião, enquanto para pequenos choques, a queda é praticamente instantânea. Inclusive, choques menores nos levam a níveis de trabalho abaixo do S-S. Afinal, o efeito sobre o salário $w(K, z)$ é menos duradouro, se dissipando mais rapidamente do que o consumo, que permanece acima do S-S por mais tempo. Assim, teremos um período de "desincentivo" ao trabalho, com C acima do usual e com o aumento de $w(K, z)$ não sendo suficiente para "cobrir" tal efeito.

---

2 Compartilhamento de risco (2,0 pontos)

Suponha um grupo finito I de indivíduos. A renda de cada indivíduo é determinada a cada período como uma função do estado atual da natureza $s_t \in S$ (onde S é um conjunto finito): $y_t^i(s_t)$. Denote a renda agregada por $Y_t(s_t) \equiv \sum_{i \in I} y_t^i(s_t)$. Suponha que a utilidade para o indivíduo i é dada por

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u^i(c_t)$$

que, sob nossas hipóteses, é

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t u(c_t(s^t)) \Pr(s^t).$$

a) Suponha que não há tecnologia de poupança agregada e que o estado da natureza é observável.

   Escreva o problema de Pareto para pesos de Pareto dados $\{\lambda^i\}_{i \in I}$. Mostre que, no ótimo, o consumo para o indivíduo i, $c_t^i(s^t)$, pode ser escrito como dependendo apenas da renda agregada naquele período uma vez que controlamos por $Y_t(s^t)$, o consumo não depende adicionalmente de s^t.

O que pedimos aqui é basicamente o mesmo problema dos itens (a) e (b) da Q1, Lista 1!

O problema de Pareto é:

$$\max_{\{c_t^i(s^t)\}} \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} u^i(c_t^i(s^t)) Pr(s^t)$$
$$\text{s.a. } C_t(s^t) = \sum_i c_t^i(s^t) \leq \sum_i y_t^i(s^t) = Y_t(s^t), \quad \forall s^t, \forall t = 0, 1, 2, \ldots$$

Montamos o lagrangeano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} u^i(c_t^i(s^t)) Pr(s^t) + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \left(\sum_i \left[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t) \beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \left(\sum_i \left[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \\
&= \sum_t \sum_{s^t} \left[\sum_i \lambda_i \Pr(s^t) \beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \theta_t(s^t) \cdot \left(\sum_i \left[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) \right] \right) \right]
\end{aligned}$$

As CPOs são, $\forall i, \forall s^t, \forall t$:

$$\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \cdot \Pr(s^t) = \lambda_i^{-1} \theta_t(s^t) \tag{1}$$

Como $u_i \in C^2, u_i' > 0, u_i'' < 0$, sabemos que $\exists\, u_i'^{-1}$. Podemos encontrar $c_t^i(s^t)$

tomando uma família qualquer como referência; seja ela a família k:

$$\forall i, \quad \frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_k'(c_t^k(s^t))} = \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \Rightarrow \quad u_i'(c_t^i(s^t)) = u_k'(c_t^k(s^t))\frac{\lambda_k}{\lambda_i}$$

$$\Rightarrow \quad c_t^i(s^t) = u_i'^{-1}\left(u_k'(c_t^k(s^t))\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)$$

Ou seja, $c_t^i(s^t)$ pode ser expresso como uma função de $c_t^k(s^t)$, λ_k e λ_i.

Substituindo isso na restrição orçamentária:

$$Y_t(s^t) = \sum_{i \neq k} u_i'^{-1}\left(u_k'(c_t^k(s^t))\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) + c_t^k(s^t)$$

O que define implicitamente que:

$$c_t^k(s^t) = f^k(Y_t(s^t), \lambda_1, ..., \lambda_I)$$

Em outras palavras, conseguimos expressar $c_t^k(s^t)$ em função da renda agregada, $Y_t(s^t)$. Podemos repetir esse processo pra qualquer outro valor de $i \neq k$.

---

b) Agora, suponha alternativamente que a função utilidade seja da forma CRRA

$$u^i(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma},$$

em que a aversão ao risco σ é a mesma para todos os indivíduos. Mostre que o consumo toma a forma

$$c_t^i = \alpha^i C_t$$

com as constantes α^i satisfazendo $\sum_{i \in I} \alpha^i = 1$. Como as constantes α^i dependem dos pesos de Pareto λ^i?

Basta substituir a função utilidade no que derivamos anteriormente:

$$u'(c) = c^{-\sigma}$$

$$u'^{-1}(c) = c^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\Rightarrow c_t^i(s^t) = u_i'^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i} c_t^k(s^t)^{-\sigma}\right) = \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i} c_t^k(s^t)^{-\sigma}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = c_t^k(s^t)\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Somando todos os agentes, temos

$$C_t(s^t) = \sum_i \left[c_t^k(s^t)\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]$$

$$\Rightarrow c_t^k(s^t) = C_t(s^t)\left[\sum_i \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}$$

Denotando $\alpha^i = \left[\sum_i \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}$, atingimos a relação desejada.

Agora, resta provar que $\sum_i \alpha^i = 1$. Para isso, façamos:

$$\sum_k \alpha^k = \sum_k \left[\sum_i \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}$$

$$= \sum_k \left[\sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}$$

$$= \sum_k \frac{\left[\sum_i (\lambda_i)^{\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}}{\lambda_k^{-\frac{1}{\sigma}}}$$

$$= \frac{\sum_k \lambda_k^{\frac{1}{\sigma}}}{\left[\sum_i \lambda_i^{\frac{1}{\sigma}}\right]} = 1$$

.

A constante α^i depende positivamente dos pesos λ_i: Quanto maior for o consumo do agente, maior será o seu peso atribuído pelo planejador.

---

c) Agora, suponha que a função utilidade seja da forma CARA

$$u^i(c) = -\frac{1}{\gamma^i}\exp\{-\gamma^i c\}$$

e mostre que o consumo toma a forma:

$$c_t^i = a^i C_t + b^i,$$

em que a^i e b^i são constantes e $\sum a^i = 1$ e $\sum b^i = 0$. Como a distribuição de γ^i afeta a^i e b^i? Como a distribuição dos pesos de Pareto λ^i afeta a^i e b^i?

Agora, a utilidade fica:

$$u'(c) = \exp\left\{-\gamma^i c\right\}$$

$$u'^{-1}(c) = -\frac{\log(c)}{\gamma^i}$$

$$\Rightarrow c_t^i(s^t) = u_i'^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\exp\left\{-\gamma^k c_t^k(s^t)\right\}\right) = -\frac{\log\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\exp\left\{-\gamma^k c_t^k(s^t)\right\}\right)}{\gamma^i}$$

$$= -\log\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i} + \frac{\gamma^k}{\gamma^i}c_t^k(s^t)$$

Somando entre agentes:

$$C_t(s^t) = \sum_i\left[\frac{\gamma^k}{\gamma^i}c_t^k(s^t) - \log\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i}\right]$$

$$\Rightarrow c_t^k(s^t) = \left[\sum_i \frac{\gamma^k}{\gamma^i}\right]^{-1} C_t(s^t) + \left[\sum_i \frac{\gamma^k}{\gamma^i}\right]^{-1}\sum_i \log\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i}$$

Então, ao denotarmos:

$$\begin{cases} a^i = \left[\sum_i \frac{\gamma^k}{\gamma^i}\right]^{-1} \\ b^i = \left[\sum_i \frac{\gamma^k}{\gamma^i}\right]^{-1}\sum_i \log\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i} \end{cases}$$

Satisfazemos a relação do enunciado. Note que os passos algébricos para mostrar que $\sum_i a^i = 1$ são idênticos ao de $\sum_i \alpha^i = 1$ no item anterior, para um caso específico de $\sigma = -1$.

Já para mostrarmos que $\sum_i b^i = 0$, temos que fazer novas contas:

$$\sum_k b^k = \sum_k\left\{\left[\sum_i \frac{\gamma^k}{\gamma^i}\right]^{-1}\sum_i \log\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i}\right\}$$

$$= \sum_k\left\{\frac{1}{\gamma^k}\left[\sum_i \frac{1}{\gamma^i}\right]^{-1}\sum_i\left[\log(\lambda_k) - \log(\lambda_i)\right]\frac{1}{\gamma^i}\right\}$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_i \frac{1}{\gamma^i}\right]}\sum_k\left\{\frac{1}{\gamma^k}\sum_i\left[\log(\lambda_k) - \log(\lambda_i)\right]\frac{1}{\gamma^i}\right\}$$

$$= \frac{1}{\left[\sum_i \frac{1}{\gamma^i}\right]}\underbrace{\left\{\sum_k\sum_i \log(\lambda_k)\frac{1}{\gamma^i\gamma^k} - \sum_k\sum_i \log(\lambda_i)\frac{1}{\gamma^i\gamma^k}\right\}}_{0} = 0$$

Em termos econômicos, temos que γ^i representa a aversão ao risco do agente i. Dado que γ^i influencia negativamente os parâmetros a^i e b^i, temos que os indivíduos mais avessos ao risco costumam consumir e transferir menos, dado que eles são menos dispostos a se arcarem com riscos. O papel do peso de Pareto λ_i impacta positivamente o parâmetro b^i apenas, tendo a mesma interpretação do item (c), embora seu impacto esteja mensurado de outra forma com essa especificação.

---

d) Agora, generalizemos o resultado do ítem (a), trabalhando ainda com preferência gerais. Suponha que exista uma tecnologia de armazenamento: se no período $t-1$ uma quantidade $S_t(s^{t-1}) \geq 0$ for reservada para armazenamento, então no período t uma quantidade $(1+r_t(s_t))S_t(s^{t-1})$ estará disponível (para consumo ou armazenamento) além de qualquer renda corrente $Y_t(s^t)$. Mostre que um resultado semelhante ao de (a) vale, mas agora devemos condicionar ao consumo total $C(s^t) \equiv \sum_{i\in I} c_t^i(s^t)$.

Com a introdução da tecnologia, a nossa restrição orçamentária muda para:

$$S_{t+1}(s^t) + \sum_i c_t^i(s^t) \leq Y_t(s^t) + (1+r_t(s_t))S_t(s^{t-1})$$

Então, o novo problema se torna:

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t^i(s^t)\},\{S_{t+1}(s^t)\}} & \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} u^i(c_t^i(s^t))Pr(s^t) \\
\text{s.a. } & S_{t+1}(s^t) + \sum_i c_t^i(s^t) \leq Y_t(s^t) + (1+r_t(s_t))S_t(s^{t-1}), \quad \forall s^t, \forall t = 0,1,2,\dots \\
& S_t(s^t) \geq 0, \quad \forall s^t, \forall t = 0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

Como o enunciado mesmo diz, precisamos chegar numa condição semelhante ao do item (a), para o consumo agregado. Se isolarmos a R.O. em $C_t(s^t)$ ao invés de $Y_t(s^t)$ para resolver o problema, usando $S_{t+1}(s^t)$ como escolha ótima ao invés de $c_t^i(s^t)$ e seguindo os mesmos passos do item (a), chegaremos na relação desejada. Observe:

$$\mathcal{L} = \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} u^i(c_t^i(s^t))Pr(s^t) + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \Big(C_t(s^t) + S_{t+1}(s^t) - Y_t(s^t) + (1+r_t(s_t))S_t(s^{t-1})\Big)$$

$$= \sum_t \sum_{s^t} \left[\sum_i \lambda_i \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \theta_t(s^t) \cdot \Big(C_t(s^t) + S_{t+1}(s^t) - Y_t(s^t) + (1+r_t(s_t))S_t(s^{t-1})\Big) \right]$$

Tirando a C.P.O. em $\{S_{t+1}(s^t)\}$, temos:

$$\lambda_i Pr(s^t)\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) = \theta_t(s^t)$$

Logo, a razão das C.P.O.'s para uma família k de referência é:

$$\frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_k'(c_t^k(s^t))} = \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \Rightarrow c_t^i(s^t) = u_i'^{-1}\left(u_k'(c_t^k(s^t))\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right)$$

Somando entre os agentes, obtemos:

$$C_t(s^t) = \sum_{i \neq k} u_i'^{-1}\left(u_k'(c_t^k(s^t))\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) + c_t^k(s^t)$$

Logo, concluímos um resultado semelhante, onde conseguimos reescrever $c_t^k(s^t)$ em termos do consumo agregado $C_t(s^t)$:

$$c_t^k(s^t) = f^k(C_t(s^t), \lambda_1, ..., \lambda_I)$$

---

3 Robson Cruz e os coqueiros (3,0 pontos + bônus)

Robson Cruz vive sozinho em uma ilha remota. Toda sua alimentação depende de apenas dois coqueiros: o coqueiro 1 é seguro em sua capacidade de gerar frutos, mas o coqueiro 2 é incerto. Robson maximiza utilidade esperada, com o índice de utilidade $u(c) = log(c)$, e desconta o futuro com fator $\beta < 1$.

O tempo é discreto, o horizonte infinito e existem dois estados da natureza: $s \in \{h, l\}$. A transição entre estados ocorre de acordo com uma matriz de transição P, que é simétrica e tem persistência p.[1]

Em ambos estados, o coqueiro 1 paga uma unidade de frutos. Já o coqueiro 2 produz uma unidade de frutos apenas no estado $s = h$. Em $s = l$, ele não produz. Não há a possibilidade de plantar ou derrubar coqueiros, que são eternos.

Apesar de ser o único morador da ilha, Robson acredita em mercados financeiros sofisticados e é tomador de preços. Ele acredita que, em cada estado, pode comprar ações da empresa "Coqueiro Certo S.A." ao preço $q_1(s)$ e da empresa "Coqueiro Incerto S.A." ao preço $q_2(s)$. Existe um contínuo de medida unitária de ações emitidas de cada firma, negociadas na bolsa da ilha.

Cada ação pagará amanhã um dividendo,$d_j(s')$, igual à quantidade de frutos gerada por seu respectivo coqueiro. Estas ações também poderão ser revendidas aos preços $q_j(s')$ para $j \in \{1, 2\}$.

A restrição orçamentária sequencial de Robson é, portanto, da forma:

$$\sum_{j \in \{1,2\}} (q_j(s) + d_j(s))a_j \geq \sum_{j \in \{1,2\}} q_j(s)a'_j + c$$

em que a_j é um número de ações que Robson tem hoje da firma referente ao coqueiro j e a'_j é quanto ele compra para amanhã.

Responda:

a) Escreva o problema de consumo e poupança de Robson de forma recursiva. Defina as funções-política para consumo e poupança. Sugestão: use $W = \sum_{j \in \{1,2\}}(q_j(s) + d_j(s))a_j$ como uma variável de estado.

Este problema é simplesmente uma generalização da Q2 da Lista 2! Sendo assim, a montagem do problema é semelhante:

$$V(W, s) = \max_{c, a'_j} \log(c) + \sum_{s'} \beta V(W', s')P(s'|s) \quad \text{s.t.} \quad \sum_j (q_j(s) + d_j(s))a_j \geq \sum_j q_j(s)a'_j + c$$

Com o devido cuidado de que agora escolhemos dois ativos para poupar no futuro,

[1] Ou seja, uma matriz estocástica com p na diagonal.

a_1' e a_2'.

E as funções políticas de consumo e poupança são derivadas da maximização do problema acima:

$$g_c(W,s) = \arg\max_{c} \log(c) + \sum_{s'} \beta V(W',s')P(s'|s) \quad \text{s.t.} \quad \sum_j (q_j(s)+d_j(s))a_j \geq \sum_j q_j(s)a_j' + c$$

$$g_{a_j}(W,s) = \arg\max_{a_j'} \log(c) + \sum_{s'} \beta V(W',s')P(s'|s) \quad \text{s.t.} \quad \sum_j (q_j(s)+d_j(s))a_j \geq \sum_j q_j(s)a_j' + c$$

Observe que temos duas funções políticas para poupança (indexadas pelo índice j), uma vez que temos dois ativos nessa economia!

---

b) Derive equações de Euler que caracterizam a poupança ótima de Robson.

Tiramos a C.P.O. para um a_j' genérico:

$$[a_j'] : \ \frac{1}{c}(-q_j(s)) + \beta \sum_{s'} V_j(W',s')P(s'|s) = 0$$

E aplicamos Benveniste-Scheinkman:

$$V_j(W,s) = \frac{1}{c}[q_j(s) + d_j(s)]$$

Substituindo um no outro, temos a equação de Euler:

$$\frac{1}{c} q_j(s) = \beta \sum_{s'} \frac{1}{c'}[q_j(s') + d_j(s')]P(s'|s)$$

$$\Rightarrow q_j(s) = \beta \sum_{s'} \left(\frac{c}{c'}\right)[q_j(s') + d_j(s')]P(s'|s)$$

Para $j \in \{1,2\}$.

---

c) Em equilíbrio, precisaremos que $a_j = 1$ para cada j. Qual a relação destas condições com o "truque de (K,k)" e com market-clearing? Qual o consumo de equilíbrio em cada estado?

Nada muda com relação a resposta do gabarito da Lista 2. Embora a generalização para dois ativos aconteça, ainda é um fato de que Robson é o único morador no *environment* descrevido aqui, e portanto irá necessariamente deter todos os ativos da ilha em equilíbrio, $a_j = 1$, apesar de que, num cenário de escolha descentralizada, a decisão de a_j é feito sob a "ignorância" de que Robson os detêm integralmente, de forma a evitar que isso influencie na precificação de cada ativo. Dado isso, substituímos os valores de $a_j = 1$ na R.O. do problema:

$$\sum_j (q_j(s) + d_j(s)) = \sum_j q_j(s) + c \Rightarrow c = \sum_j d_j(s)$$

Ou seja: $a_j = 1$ garante também a condição de Market-Clearing, onde o consumo total da economia se iguala a todos os recursos disponíveis (que, no nosso caso, são os frutos dos coqueiros, $d_j(s)$).

---

d) Avalie a equações de Euler de Robson (estado a estado e ativo a ativo) neste equilíbrio, fazendo todas as substituições possíveis.

Pelas informações derivadas até aqui, sabemos que:

$$\begin{cases} P(s' = s|s) = p \text{ (Persistência)} \\ P(s' \neq s|s) = 1 - p \\ c(s) = \sum_j d_j(s) \text{ (Market-Clearing)} \\ d_1(h) = 1 = d_1(l) \text{ (Coqueiro Certo)} \\ d_2(h) = 1 \text{ (Coqueiro Incerto)} \\ d_2(l) = 0 \end{cases}$$

Logo, substituímos tais informações em cada equação de Euler:

$$q_j(s) = \beta \sum_{s'} \left(\frac{c}{c'}\right) [q_j(s') + d_j(s')] P(s'|s)$$

Como bem observado no enunciado, precisamos de **quatro** equações, pois temos 2 ativos e 2 estados! Logo, vamos começar pelo ativo 1 (Coqueiro Certo):

Se $s = h$:

$$q_1(h) = \beta \left\{ [q_1(h) + d_1(h)] P(h|h) + \left(\frac{\sum_j d_j(h)}{\sum_j d_j(l)}\right) [q_1(l) + d_1(l)] P(l|h) \right\}$$

$$\Rightarrow q_1(h) = \beta \left\{ [q_1(h) + 1]p + 2[q_1(l) + 1](1 - p) \right\}$$

Se $s = l$:

$$q_1(l) = \beta \left\{ [q_1(l) + d_1(l)]P(l|l) + \left(\frac{\sum_j d_j(l)}{\sum_j d_j(h)} \right) [q_1(h) + d_1(h)]P(h|l) \right\}$$

$$\Rightarrow q_1(l) = \beta \left\{ [q_1(l) + 1]p + \frac{1}{2}[q_1(h) + 1](1 - p) \right\}$$

Agora, vamos escrever as equações para o ativo 2 (Coqueiro Incerto):

Se $s = h$:

$$q_2(h) = \beta \left\{ [q_2(h) + d_2(h)]P(h|h) + \left(\frac{\sum_j d_j(h)}{\sum_j d_j(l)} \right) [q_2(l) + d_2(l)]P(l|h) \right\}$$

$$\Rightarrow q_2(h) = \beta \left\{ [q_2(h) + 1]p + 2q_2(l)(1 - p) \right\}$$

Se $s = l$:

$$q_2(l) = \beta \left\{ [q_2(l) + d_2(l)]P(l|l) + \left(\frac{\sum_j d_j(l)}{\sum_j d_j(h)} \right) [q_2(h) + d_2(h)]P(h|l) \right\}$$

$$\Rightarrow q_2(l) = \beta \left\{ q_2(l)p + \frac{1}{2}[q_2(h) + 1](1 - p) \right\}$$

Pronto! Deixamos tudo em função de β e p, uma vez que tais informações não nos foram dadas.

Note que o enunciado pediu para fazer as substituições na eq. de Euler, e não necessariamente para você isolar todos os $q_j(s)$ em termos só dos parâmetros! Isso seria custoso demais.

---

e) Existe risco no preço e no retorno do coqueiro seguro? Interprete.

Basta pegar e olhar para as equações de Euler que escrevi acima: Note que o preço do ativo seguro ($q_1(s)$) está condicionado ao estado desta economia, independente dele pagar a mesma quantia sempre! É razoável esperarmos que a existência do ativo incerto é suficiente para "infectar" o preço de equilíbrio, $q_1^*(h) \neq q_1^*(l)$. Como o retorno é uma função do preço do ativo, $1+r_1(s) = \frac{q_1(s)+d_1(s)}{q_1(s)}$, temos que ele também seria impactado pela existência de incerteza no ativo 2 (afinal, $d_1(h) = 1 = d_1(l)$).

Para exemplificar melhor essa diferença, podemos fazer 2 casos diferentes. Observe:

i) $p = 1$ (Sem incerteza): se $p = 1$, sempre estaremos no mesmo estado. Reescrevendo a equação de Euler para o ativo 1 entre estados, obtemos:

$$\begin{cases} q_1(h) = \beta[q_1(h) + 1] \\ q_1(l) = \beta[q_1(l) + 1] \end{cases}$$

Resolvendo (com uma álgebra simples), você encontrará:

$$\begin{cases} q_1(h) = \frac{\beta}{1-\beta} \\ q_1(l) = \frac{\beta}{1-\beta} \end{cases}$$

Ou seja, ativos com preços idênticos! O motivo disso é simples: sempre estamos no mesmo nível de consumo, pois os estados **nunca** mudam.

ii) $p = 0$ (Total incerteza): se $p = 0$, nunca estamos no mesmo estado por mais de um período! Neste caso, o sistema vira:

$$\begin{cases} q_1(h) = 2\beta[q_1(l) + 1] \\ q_1(l) = \frac{1}{2}\beta[q_1(h) + 1] \end{cases}$$

Resolvendo (com uma álgebra bem cansativa), você encontrará:

$$\begin{cases} q_1(h) = \frac{\beta(1+2\beta)}{1-\beta^2} \\ q_1(l) = \frac{\beta(1+2\beta)}{2(1-\beta^2)} \end{cases}$$

Claramente, agora temos que $q_1(h) \neq q_1(l)$! O motivo disso é análogo ao do outro: agora, temos que o consumo **sempre** muda de um périodo pra outro. Logo, começamos a sentir os efeitos do ativo arriscado "infectando" as decisões sobre o ativo seguro. Note que, apesar de $q_2(s)$ não entrar nas equações acima, lembre-se que ele tem papel importante via Market Clearing, onde $c(h) > c(l)$ devido a $d_2(h) > d_2(l)$.

Qual o motivo de $q_1(h) > q_1(l)$? Observe que, para o estado $s = h$, temos um consumo mais alto. Logo, a utilidade marginal cai. Isso significa que o ganho marginal de consumir mais é baixo, nos dando incentivo a poupar mais. Logo, o preço do ativo seguro sobe, por ser mais atraente.

Já se estivermos em $s = l$, temos baixo consumo, e alta utilidade marginal. O ativo se torna menos atraente por menor demanda por poupança.

---

4 Um Modelo RBC sem Capital (3,0 pontos)

Suponha uma seguinte economia com horizonte infinito e incerteza descrita abaixo:

- **Preferências:**

$$\mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\psi\frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi}\right]$$

- **Tecnologia:**

$$Y_t = A_t L_t$$

$$C_t \leq Y_t$$

$$\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$$

(Toda a notação tem seu significado usual).

Suponha que, apesar da inexistência de capital, existe um mercado intertemporal aberto. Neste mercado, são negociados títulos que dão direito a uma unidade de consumo no período seguinte, independente de qual estado seja realizado. Estes títulos são negociados aos preços $q(s^t)$ na história s^t e estão disponíveis em oferta líquida zero.

a) Escreva o problema de um agente representativo em uma implementação descentralizada e defina um equilíbrio competitivo (não recursivo).

O problema descentralizado consiste em duas etapas: o problema das firmas e o problema do agente (representativo, neste caso).

O Problema das firmas é dado por:

$$\max_{L_t(s^t)} A_t L_t(s^t) - w(s^t) L_t(s^t)$$

E o Problema do agente é:

$$\max_{C_t(s^t), L_t(s^t), a_{t+1}(s^t)} \mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left[\frac{C_t(s^t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}-\psi\frac{L_t(s^t)^{1+\phi}}{1+\phi}\right]$$

s.t.

$$C_t(s^t) + q(s^t)a_{t+1}(s^t) = w(s^t)L_t(s^t) + a_t(s^t)$$

$$\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$$

Um equilíbrio competitivo consiste na alocação de consumo $\{C_t(s^t)\}_{\forall s^t, t}$, trabalho $\{L_t(s^t)\}_{\forall s^t, t}$, ativos $\{a_t(s^t)\}_{\forall s^t, t}$ e de preços $\{w(s^t)\}_{\forall s^t, t}$ e $\{q(s^t)\}_{\forall s^t, t}$ t.q.:

i) $w(s^t)$ resolve o problema da firma

ii) $C_t(s^t)$ e $L_t(s^t)$ resolve o problema do agente, para dados $w(s^t)$ e $q(s^t)$

iii) Há Market-Clearing: $a_t(s^t) = 0$, $\forall t \Rightarrow C_t(s^t) = Y_t(s^t)$

Observação: s^t neste contexto representaria a sequência de valores para a TFP, A_t, observada até o período t. Afinal, a incerteza neste modelo está relacionado ao comportamento de A_t.

---

b) Caracterize a alocação de equilíbrio competitivo da forma mais completa possível.

Primeiro, encontremos a alocação de w_t que resolve o problema da firma:

$$\max_{L_t} A_t L_t - w_t L_t \;\Rightarrow\; A_t = w_t(A_t)$$

Observe que, ao resolvermos o problema da firma, descobrimos que w_t depende somente do estado corrente para A_t, e não da história como um todo, s^t.

Agora, usamos isso para resolver o problema do agente:

$$\begin{aligned}
&\max_{C_t, L_t, a_{t+1}} \; \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \psi \frac{L_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right] \\
&\text{s.t.} \\
&C_t + q(s^t) a_{t+1} = w_t(A_t) L_t + a_t \\
&\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \epsilon_t \\
&\epsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)
\end{aligned}$$

Substituindo a restrição orçamentária, tiramos a C.P.O. em L_t:

$$[L_t]: \; C_t^{-\gamma}\{w_t(A_t)\} - \psi L_t^{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow w_t(A_t) C_t^{-\gamma} = \psi L_t^{\phi}$$

$$\Rightarrow A_t C_t^{-\gamma} = \psi L_t^{\phi}$$

Então, podemos isolar L_t usando o fato de que $C_t = Y_t = A_t L_t$:

$$A_t^{1-\gamma} L_t^{-\gamma} = \psi L_t^{\phi}$$

$$\Rightarrow L_t^{\gamma+\phi} = \frac{1}{\psi} A_t^{1-\gamma}$$

$$\Rightarrow L_t = \left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{\gamma+\phi}} A_t^{\frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}}$$

E, portanto, conseguimos isolar C_t também:

$$C_t = A_t L_t = \left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{\gamma+\phi}} A_t^{\frac{1+\phi}{\gamma+\phi}}$$

Lembrando, como explicitado no enunciado, que a ausência de capital não implica ausência de um mercado intertemporal, que pode ser expresso pela equação de Euler típica (igual como eu mostrei em como chegarmos na taxa de juros da Q2 da Lista 3!):

$$[a_{t+1}]:\ C_t^{-\gamma} = \beta \frac{1}{q(s^t)} \mathbb{E}_{A_{t+1}|A_t} \left\{ C_{t+1}^{-\gamma} \right\}$$

Que pode ser reescrita em termos da troca Intertemporal de consumo:

$$1 = \beta \frac{1}{q(s^t)} \mathbb{E}_{A_{t+1}|A_t} \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} \right\}$$

E, usando a alocação de equilíbrio em termos da TFP:

$$1 = \beta \frac{1}{q(s^t)} \mathbb{E}_{A_{t+1}|A_t} \left\{ \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}} \right\}$$

E, finalmente, usando a lei de movimento de A_t, temos:

$$1 = \beta \frac{1}{q(s^t)} \mathbb{E}_{A_{t+1}|A_t} \left\{ \left(\frac{A_t^{\rho} e^{\epsilon_{t+1}}}{A_t}\right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}} \right\}$$

$$\Rightarrow 1 = \beta \frac{1}{q(s^t)} \mathbb{E}_{A_{t+1}|A_t} \left\{ \left(A_t^{\rho-1} e^{\epsilon_{t+1}}\right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}} \right\}$$

Por fim, estas equações caracterizam as alocações de equilíbrio.

---

c) Como o emprego responde a um choque positivo de produtividade? Como esta resposta depende de γ e ρ? Explique.

Facilita olharmos para a restrição Intratemporal em logs:

$$(\gamma + \phi) \log L_t = (1 - \gamma) \log A_t - \log \psi$$

$$\log L_t = \frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}\log A_t - \frac{1}{\gamma+\phi}\log\psi$$

Se avaliarmos a equação acima no Steady-State, temos:

$$\log L = \cancelto{0}{\frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}\log A} - \frac{1}{\gamma+\phi}\log\psi$$

Tirando a diferença, obtemos:

$$\hat{L}_t = \frac{1-\gamma}{\gamma+\phi}\hat{A}_t$$

Após essa log-linearização muito complexa, fica evidente que temos uma relação ambígua do trabalho com o choque de TFP: O efeito de $\hat{A}_t > 0$ será positivo somente se $1 > \gamma$. Caso contrário, veremos uma redução de L_t abaixo do seu S-S com um choque.

Observação: Eu não esperava uma linearização nesse item para responder a pergunta. Só fiz isso porque eu achei mais conveniente.

Qual o significado disso? Lembre-se da expressão em termos de benefício e custo marginal:

$$\underbrace{A_t C_t^{-\gamma}}_{MB_L} = \underbrace{\psi L_t^{\phi}}_{MC_L}$$

Um aumento na TFP leva ao aumento na demanda por trabalho, uma vez que temos um salário mais atrativo ($\Delta w(A) = \Delta A > 0$) enquanto um aumento do consumo a diminui (maior riqueza permite consumo a níveis idênticos ou maiores, para um menor nível de trabalho).

Dado que a escolha de consumo é ditada pela aversão ao risco do agente, γ, onde maiores níveis de aversão levam a uma maior preferência do agente à suavização do consumo, teremos que, quanto mais avesso o agente for, maior será a suavização, levando a um aumento do consumo acima do S-S ($\hat{C}_t > 0$), portanto diminuindo o efeito positivo (ou, potencializando o efeito negativo) que o choque de TFP positivo teria no total de horas trabalhadas.

Por fim, resta interpretar qual o papel da persistência, ρ. Note que uma maior persistência têm um efeito duplo também: Por um lado, altos valores de ρ permitem que A demore mais para convergir para o S-S. Isso nos indica que o salário será mais atraente por mais tempo, gerando incentivos ao trabalho!

Por outro lado, uma maior persistência permite níveis de consumo acima do S-S por mais tempo, o que gera desincentivos ao trabalho.

Sendo assim, o efeito líquido de ρ no impacto da movimentação de L_t pós-choque é ambíguo, e também dependerá do valor de γ.

Observação do prof. Felipe: Ainda que a constatação acima seja pertinente, é também necessário observar que a escolha de trabalho e consumo é feita **no período corrente**, por sair de uma condição **Intratemporal**. Juntando isso com o fato de que o equilíbrio deste modelo é uma sequência separável de equilíbrios estáticos, visto que achamos L_t e C_t em termos de A_t em valores correntes, é esperado que ρ não tenha papel na hora de ditar o impacto **momentâneo** sobre L_t, mas apenas na **demora** para o retorno ao S-S (que é mais facilmente observado em termos da log-diferença).

---

d) Como a taxa de juros livre de risco ($1 + r^f = \frac{1}{q(s^t)}$) responde a um choque positivo de produtividade? Explique.

Agora, retomamos a Equação de Euler:

$$1 = \beta \frac{1}{q(s^t)} \mathbb{E}_{A_{t+1}|A_t} \left\{ \left(A_t^{\rho-1} e^{\epsilon_{t+1}} \right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}} \right\}$$

Seguimos uma interpretação semelhante ao do item (b) da Q1: Um choque positivo de TFP ($\Delta\epsilon > 0$) implica na redução do valor de $\left(A_t^{\rho-1} e^{\epsilon_{t+1}} \right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}}$ (Desde que os agentes sejam avessos ao risco como de costume, com $\gamma > 0$). Para compensar essa queda de tal forma que a esperança mantenha a igualdade em um, teremos uma reação positiva da taxa de juros. Note que, análogo ao caso do item (e) da Q3, temos que um salto do consumo **instantâneo** dado o aumento da TFP (maior riqueza) leva a uma queda dos preços $q(s^t)$ para manter a igualdade da equação de Euler, subindo a taxa de juros.

Agora, a dependência do quão reativo a taxa de juros é relativo a γ segue uma interpretação semelhante ao do item (c): Agentes mais avessos ao risco suavizam mais o seu consumo; Logo, o aumento da taxa de juros reflete a decisão de "poupança" dos agentes - quanto mais avesso ao risco, maior será a vontade dele de suavizar via poupança (ainda que estejamos num mundo sem capital, temos a existência deste título como mecanismo). Logo, maiores valores de γ causam um salto menor de r^f.

No entanto, é notável que, após o choque, teremos uma queda de A até que ele retorne ao seu nível de S-S. Logo, observaremos valores crescentes no tempo para $\left(A_t^{\rho-1} e^{\epsilon_{t+1}} \right)^{-\frac{\gamma(1+\phi)}{\gamma+\phi}}$ (pois $\rho < 1$) neste meio tempo, o que implica uma redução da taxa de juros até que a economia atinja o S-S novamente. Esta queda pode ser acelerada ou lenta, a depender do parâmetro de persistência da TFP, ρ: Quanto mais próximo de 1, mais lento será a convergência (i.e., ao passarmos de um estado de baixo consumo para um maior, obtemos um aumento de $q(s^t)$, como visto na transição de $q_1(l)$ para $q_1(h)$ para o caso onde $p = 0$ na Q3).
