Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

9. Aproximação linear e Diferencial Total

Objetivos

- Saber determinar a aproximação linear de uma função em um ponto.
- Entender que a aproximação linear fornece uma estimativa local dos valores da função.
- Compreender a relação entre o plano tangente e a aproximação linear.
- Aplicar a aproximação linear para estimar valores numéricos de expressões difíceis.
- Avaliar a precisão da aproximação com base na proximidade ao ponto de referência.
- Entender o conceito de diferencial total como uma estimativa da variação da função.
- Avaliar quando a diferencial fornece uma boa estimativa e reconhecer suas limitações.

9.1 Aproximação Linear

Em Cálculo I, aprendemos que quando lidamos com uma função derivável $h : I \to \mathbb{R}$ em um ponto x_0, a reta tangente ao gráfico dessa função se aproxima significativamente do próprio gráfico quando os pontos considerados estão muito próximos de $(x_0, h(x_0))$. Esse fato decorre diretamente do Teorema de Taylor, que estabelece que qualquer função diferenciável pode ser aproximada por um polinômio de primeiro grau em um intervalo suficientemente pequeno centrado em x_0:

$$h(x) \approx h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$

Em outras palavras, os valores de $h(x)$ estão muito próximos dos valores da função linear $\ell(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$ nesse intervalo limitado. Essa aproximação é fundamental para compreender como as funções se comportam em escalas muito pequenas ao redor de um ponto específico.

Surge assin uma questão natural: será que algo semelhante ocorre no caso de funções que dependem de mais de uma variável? Em outras palavras, é possível aproximar os valores de uma função por meio de uma função linear quando lidamos com múltiplas variáveis, o que poderia tornar as análises mais simples e acessíveis?

Esse fato se generaliza para funções de n variáveis, como consequência do Teorema de Taylor $n-$dimensional.

Teorema 9.1 (Teorema de Taylor (grau 1)).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma vizinhança aberta de um ponto $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Então para pontos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ suficientemente próximos de $\mathbf{x}_0$ temos que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0) + R(\mathbf{x}),$$

onde

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{R(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Corolário 9.2 (Aproximação Linear de uma função).

Se definirmos a função linear

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)(x_k - x_k^0), \tag{9.1}$$

então temos que

$$f(\mathbf{x}) \approx L(\mathbf{x})$$

em uma vizinhança suficientemente pequena de $\mathbf{x}_0$.

Por razões óbvias, chamamos L de *Aproximação Linear* de f. Observe que o teorema de Taylor implica diretamente que L se torna mais precisa à medida que o ponto $\mathbf{x}$ se aproxima de $\mathbf{x}_0$.

Exercício 9.1.

Reescreva (9.1) em forma vectorial.

No caso de duas variáveis, a Aproximação Linear é a função

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{9.2}$$

Exemplo 9.1.

Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Nosso objetivo é estimar o valor de $f(1{,}01, 2{,}03)$.

Sabemos que:

$$f(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2x = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2y = 4.$$

Podemos, então, utilizar a aproximação linear de f em torno do ponto $(x_0, y_0) = (1,2)$ para estimar o valor de $f(1{,}01, 2{,}03)$. A função linear correspondente é dada por:

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) \\ &= 5 + 2(x-1) + 4(y-2). \end{aligned}$$

Aplicando a aproximação, temos:

$$\begin{aligned} f(1{,}01, 2{,}03) \approx L(1{,}01, 2{,}03) &= 5 + 2(1{,}01 - 1) + 4(2{,}03 - 2) \\ &= 5 + 2 \cdot 0{,}01 + 4 \cdot 0{,}03 \\ &= 5 + 0{,}02 + 0{,}12 \\ &= 5{,}14. \end{aligned}$$

Note que o valor exato é $f(1{,}01, 2{,}03) = (1{,}01)^2 + (2{,}03)^2 = 5{,}141$, o que mostra que a aproximação linear $L(1{,}01, 2{,}03)$ fornece um valor bastante próximo do real.

Exercício 9.2.

Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Determine a aproximação linear de f ao redor do ponto $(2{,}5)$.

(b) Compare com a aproximação linear da mesma função ao redor de $(1{,}2)$, encontrada no Exemplo 7.1.

(c) Usando a aproximação linear obtida no item (a), estime o valor de $f(1{,}05, 0{,}95)$. Compare com o valor exato da função nesse ponto.

(d) Você acha que a aproximação obtida no item (a) fornece uma boa estimativa para o valor de $f(2{,}4)$? Compare com o valor exato da função nesse ponto e discuta a qualidade da aproximação.

É claro que, para ilustrar a importância de um teorema, utilizamos exemplos. O objetivo desses exemplos não é apenas verificar a validade matemática do resultado, mas demonstrar como ele pode ser aplicado em situações concretas. Em particular, quando lidamos com problemas do mundo real, é comum termos acesso aos valores de uma função em determinado ponto, bem como às suas variações. Nesses casos, a aproximação linear se torna uma ferramenta poderosa para estimar valores da função em pontos próximos, sem a necessidade de cálculos exatos complexos.

A seguir, apresentamos um exemplo de aplicação econômica em que isso se torna evidente.

Exemplo 9.2.

Considere uma empresa que produz determinado bem utilizando dois insumos: mão de obra x (em horas) e matéria-prima y (em kg).
Atualmente, a empresa utiliza $x_0 = 10$ horas de trabalho e $y_0 = 20$ kg de matéria-prima. Por meio de análises anteriores, a empresa sabe que:

- O custo total de produção no ponto atual é R$1200,00;
- A taxa marginal de variação do custo em relação à mão de obra, mantendo constante a quantidade de matéria-prima, é de 100 reais por hora;
- A taxa marginal de variação do custo em relação à matéria-prima, mantendo constante a quantidade de trabalho, é de 70 reais por kg.

Deseja-se estimar como o custo total seria afetado se a empresa aumentasse a mão de obra para $x = 10{,}3$ horas e reduzisse a matéria-prima para $y = 19{,}8$ kg.

Podemos usar a aproximação linear para estimar o custo total com base nas variações dos insumos:

$$C(x,y) \approx C(x_0,y_0) + \frac{\partial C}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial C}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Substituindo os dados fornecidos temos:

- $(x_0,y_0) = (10{,}20)$
- $C(10,20) = 12000$
- $\frac{\partial C}{\partial x}(10,20) = 100$ e $\frac{\partial C}{\partial y}(10,20) = 70$

Portanto, o novo custo total estimado é:

$$\begin{aligned} C(10{,}3, 19{,}8) &\approx C(10,20) + 100 \cdot (10{,}3 - 10) + 70 \cdot (19{,}8 - 20) \\ &\approx C(10,20) + 100 \cdot 0{,}3 + 70 \cdot (-0{,}2) \\ &= 1200 + 30 - 14 = \text{R\$}1216{,}00 \end{aligned}$$

Assim, com as pequenas alterações nos insumos, estima-se que o custo total da produção aumentará em aproximadamente 16 reais.

9.1.1 Plano tangente ao gráfico de uma função

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0). Sabemos que a aproximação linear de f ao redor do ponto (x_0, y_0) é dada por (9.2).

Como L é uma função definida a partir da função f, é intuitivo pensar que seu gráfico tem alguma relação com o gráfico de f.

Sendo L uma função linear, seu gráfico é um plano cuja equação é:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{9.3}$$

Esse plano passa claramente pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathrm{Gr}(f)$ e em uma pequena vizinhança desse ponto, o plano toca o gráfico de f apenas no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, a menos que f seja também uma função linear, cujo gráfico coincida com esse plano.

Concluímos, portanto, que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é exatamente o gráfico da aproximação linear de f nesse ponto, ou seja, o plano dado pela equação (9.3).

Exemplo 9.3.

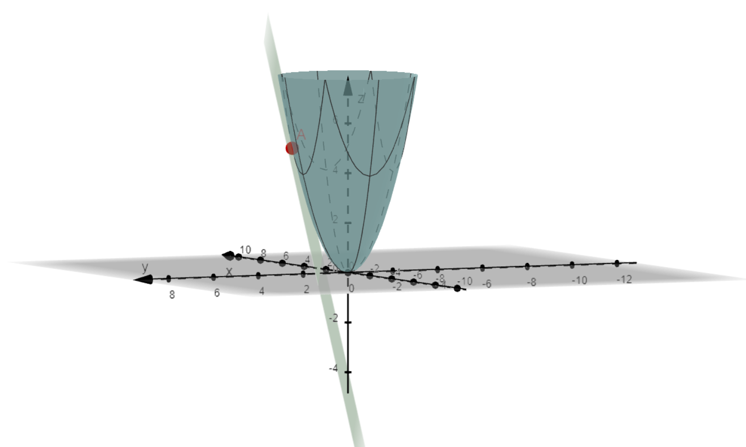
Queremos determinar a equação do plano tangente ao paraboloide $\{(x,y,z);\ z = x^2 + y^2\}$ no ponto $(1,2,5)$.

Sabemos que o paraboloide é o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$, Logo, o plano tangente ao paraboloide no ponto $(1,2,5) = (1,2,f(1,2))$ pode ser determinado usando a equação (9.3).
Temos:

$$\begin{aligned} z &= f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) \\ &= 5 + 2(x-1) + 4(y-2), \end{aligned}$$

donde

$$2x + 4y - z = 5.$$



Observe que os cálculos feitos neste exemplo são os mesmos realizados no Exemplo 7.1. Isso ocorre exatamente porque o gráfico da aproximação linear é o próprio plano tangente ao gráfico da função.

Na figura do exemplo, é possível observar que esse plano tangente permanece muito próximo do gráfico de f quando os pontos considerados estão suficientemente próximos de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$; por outro lado, quanto mais distantes esses pontos estão do ponto de tangência, maior é o afastamento entre o gráfico da função e o plano tangente. Esse comportamento confirma, na prática, o que o Teorema de Taylor afirma: a aproximação linear permite estimar valores da função com boa precisão, desde que os pontos estejam próximos do ponto de tangência.

9.2 Diferencial total

Definição 9.3 (Diferencial total).

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos a *diferencial total* de f no ponto $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ como sendo:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\, dx_i, \tag{9.4}$$

onde dx_i representa uma variação infinitesimal na variável x_i.

Para compreendermos melhor o significado de df, observemos que as variáveis independentes na expressão (9.4) são as variações infinitesimais dx_i, e não diretamente as variáveis x_i. Se considerarmos que cada variável x_i sofre uma pequena variação de x_i^0 para x_i, então temos

$$dx_i = x_i - x_i^0 = \Delta x_i$$

e diferencial total pode ser reescrita como

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0).$$

Segue diretamente da expressão da aproximação linear no ponto $\mathbf{x}_0$, dada em (9.1), que:

$$df = L(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \approx f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \Delta f.$$

Logo, a diferencial total fornece uma aproximação da variação da função f em torno do ponto $\mathbf{x}_0$, quando as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sofrem pequenas variações simultâneas. O teorema de Taylor garante que essa é uma boa aproximação sempre que os incrementos $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ forem suficientemente pequenos.

Para termos uma ideia visual, consideremos o caso em que f é uma função de duas variáveis. Nesse contexto, a variação real da função entre os pontos (x_0, y_0) e (x, y) é dada por:

$$\Delta z = \Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0).$$

Por outro lado, a diferencial total satisfaz:

$$df = L(x,y) - f(x_0,y_0),$$

ou seja, df representa a variação da altura do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0) entre os pontos (x_0, y_0) e (x, y)[1], enquanto que Δf representa a variação real da função f nesse deslocamento.

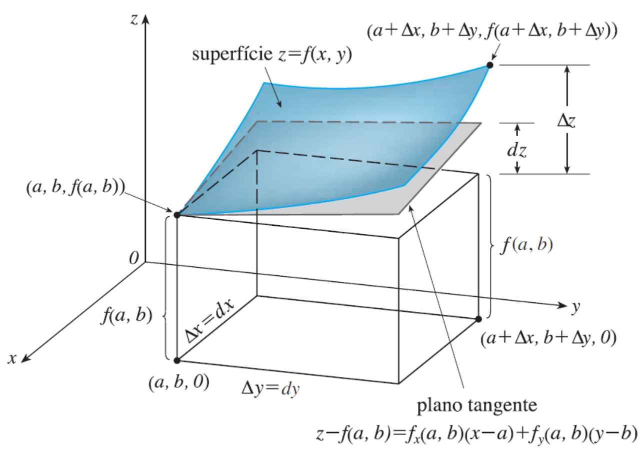


Figura 9.1: Figura 7, página 853, do livro *Cálculo, Volume 2* (6ª edição), de James Stewart

[1] Lembre-se de que o gráfico de L é justamente o plano tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0).

Exemplo 9.4.

Seja $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$. Vamos comparar os valores de Δf e df quando (x,y) varia de $(1,2)$ para $(1{,}05, 2{,}1)$.

Primeiro, calculamos os valores de $f(x,y)$ nos pontos inicial e final.
Para o ponto inicial $(x_0, y_0) = (1,2)$, temos:

$$f(1,2) = 1^2 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 1 - 2 + 12 = 11.$$

Para o ponto final $(x,y) = (1{,}05, 2{,}1)$, temos:

$$f(1{,}05, 2{,}1) = (1{,}05)^2 - (1{,}05)(2{,}1) + 3(2{,}1)^2 = 1{,}1025 - 2{,}205 + 13{,}23 = 12{,}1275.$$

Logo,

$$\Delta f = f(1{,}05, 2{,}1) - f(1,2) = 12{,}1275 - 11 = 1{,}1275.$$

Por outro lado, a diferencial total df em $(x_0, y_0) = (1,2)$ é dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}2) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}2) \cdot dy.$$

Calculamos as derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 6y.$$

Avaliando em $(1,2)$, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}2) = 2 \cdot 1 - 2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}2) = -1 + 12 = 11.$$

As variações em x e y são:

$$dx = 1{,}05 - 1 = 0{,}05, \quad dy = 2{,}1 - 2 = 0{,}1.$$

Substituindo na fórmula de df, temos:

$$df = 0 \cdot 0{,}05 + 11 \cdot 0{,}1 = 0 + 1{,}1 = 1{,}1.$$

Portanto, ao comparar os dois resultados:

$$\Delta f = 1{,}1275 \quad \text{e} \quad df = 1{,}1,$$

observamos que a diferença entre df e Δf é pequena, confirmando que a diferencial total fornece uma boa aproximação da variação real da função quando as mudanças em x e y são pequenas.

Exercício 9.3.

Considere a função $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$.

(a) Calcule a diferencial total df quando (x,y) varia do ponto $(1,2)$ para $(1{,}01, 1{,}95)$.

(b) Compare o resultado obtido com a diferencial calculada no exemplo anterior, em que a variação era de $(1,2)$ para $(1{,}05, 2{,}1)$, e justifique qual é a melhor aproximação de Δf.

Exercícios Suplementares

Exercício 9.4.

Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Determine a aproximação linear de f no ponto $(3,4)$.

(b) Use essa aproximação para estimar $f(3{,}01, 4{,}02)$.

(c) Compare com o valor exato e discuta a qualidade da aproximação.

Exercício 9.5.

Seja $f(x,y) = e^{xy} + \ln(x+y)$.

(a) Calcule a aproximação linear de f em torno do ponto $(1,1)$.

(b) Estime $f(1{,}01, 0{,}98)$ usando a aproximação linear.

Exercício 9.6.

A função $f(x,y) = x^2y + \cos(y)$ representa um modelo simplificado de custo de produção.

(a) Determine a aproximação linear de f no ponto $(1,\pi)$.

(b) Estime o valor de $f(1{,}05, \pi + 0{,}01)$.

Exercício 9.7.

Considere a função $f(x,y,z) = xyz$.

(a) Calcule a aproximação linear de f no ponto $(1,2,3)$.

(b) Use a aproximação linear para estimar $f(1{,}01, 1{,}98, 3{,}02)$.

Exercício 9.8.

Considere $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(a) Obtenha a aproximação linear de f no ponto $(1,1)$.

(b) Estime $f(1{,}1, 1{,}1)$ e compare com o valor exato.

(c) Estime $f(2,3)$ com a mesma aproximação e compare com o valor exato.

(d) Discuta por que a aproximação linear é eficaz em um dos casos e ineficaz no outro.

Exercício 9.9.

Considere a função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(a) Calcule a diferencial total df no ponto $(2,1)$.

(b) Use a diferencial para estimar o valor de $f(2{,}03, 1{,}02)$.

(c) Calcule o valor real de $f(2{,}03, 1{,}02)$ e compare com a estimativa.

Exercício 9.10.

Considere a função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(a) Calcule a diferencial total df no ponto $(1,2)$.

(b) Use a diferencial para estimar o valor de $f(1{,}02, 1{,}98)$.

(c) Calcule o valor real de $f(1{,}02, 1{,}98)$ e compare com a estimativa.