Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 2. ???

Objetivos

- ???

Exercício 2.1.

Suponha que a demanda por refrigeradores em uma determinada região depende dos seguintes fatores:

- P: o preço do refrigerador,
- R: a renda dos consumidores,
- P_s: o preço de bens substitutos,
- P_c: o preço de bens complementares.

(a) Crie uma função *hipotética* que modele a quantidade demandada considerando os seguintes comportamentos:

- Quando o preço do refrigerador diminui, a quantidade demandada aumenta, ou seja, há uma relação inversamente proporcional entre o preço e a quantidade demandada.
- Um aumento na renda dos consumidores tende a aumentar a quantidade demandada de refrigeradores, ou seja, a quantidade demandada está positivamente relacionada à renda dos consumidores.
- Se os bens substitutos, como freezers ou outros eletrodomésticos de refrigeração, tornarem-se mais caros, a demanda por refrigeradores pode aumentar, indicando que a mesma está positivamente relacionada ao preço dos bens substitutos.
- Se os bens complementares, como utensílios para uso em conjunto com o refrigerador, ficarem mais caros, isso pode diminuir a demanda por refrigeradores, o que sugere que está inversamente relacionada ao preço de bens complementares.

(b) Determine o domínio da sua função.

(c) Determine o conjunto sobre o qual sua função reflete a realidade do problema.

Solução.

(a) Seja r a demanda por refrigerador, s a demanda pelo bem substituto e c a demanda pelo bem complementar. Um exemplo de função utilidade com essa caracteristica é: $u(r,s,c) = \min\{c, \max\{r,s\}\}$.

(b) O domínio da função utilidade $u(r,s,c) = \min\{c, \max\{r,s\}\}$ é dado por $D_u = \{(r,s,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

(c) O consumidor não pode escolher quantidades negativas dos bens e deve respeitar a restrição orçamentária. O conjunto de cestas de consumo factíveis é dado por:

$$\left\{(r,s,c) \in \mathbb{R}^3_+ \ : \ P\,r + P_s\,s + P_c\,c \leq R\right\}$$

onde

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

□

Exercício 2.2.

Encontre e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

(b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

Solução.

(a) $\ln(9 - x^2 - 9y^2)$ está definida apenas quando

$$9 - x^2 - 9y^2 > 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1.$$

Portanto, o domínio de f é

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\right\},$$

que corresponde ao interior de uma elipse.

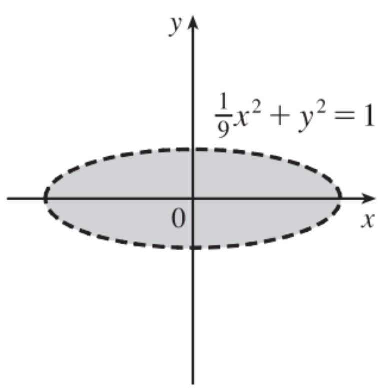

Figura 2.1

(b) $\sqrt{y-x^2}$ está definida apenas quando

$$y - x^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$y \geq x^2.$$

Além disso, f não está definida quando

$$1 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1.$$

Assim, o domínio de f é

$$\left\{(x, y) \,\middle|\, y \geq x^2,\ x \neq \pm 1\right\}.$$

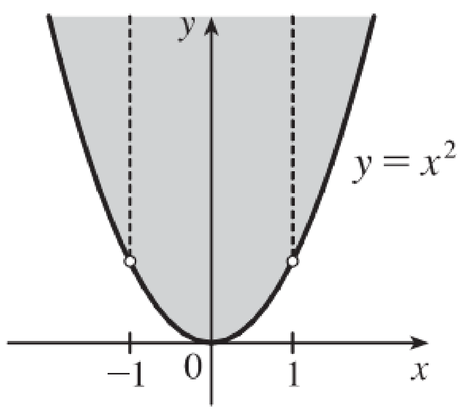

Figura 2.2

□

Exercício 2.3.

Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

(b) $f(x,y) = |xy|$

(c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x,y) = (x - y)^2$

(f) $f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$

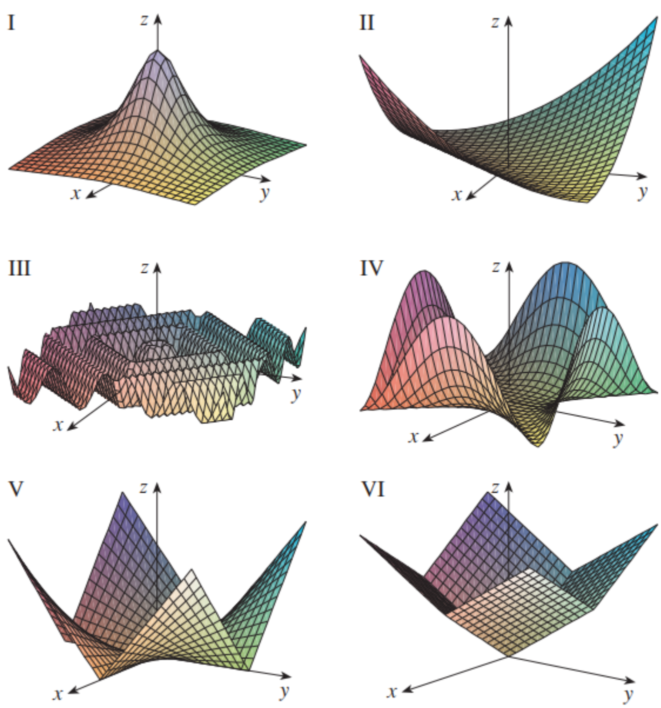

Figura 2.3

Solução.

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$. A seção em $x = 0$ é $z = |y|$, e em $y = 0$ é $z = |x|$, então deve ser o gráfico VI.

(b) $f(x,y) = |xy|$. A seção em $x = 0$ é $z = 0$, e em $y = 0$ é $z = 0$, então deve ser o gráfico V.

(c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. A seção em $x = 0$ é $z = \frac{1}{1+y^2}$, e em $y = 0$ é $z = \frac{1}{1+x^2}$. Além disso, podemos ver que f é próximo de 0 para valores grandes de x e y, portanto este é o gráfico I.

(d) $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$. A seção em $x = 0$ é $z = y^4$, e em $y = 0$ é $z = x^4$. Tanto o gráfico II quanto o gráfico IV parecem plausíveis; note também que na seção em $z = 0$, $(x^2 - y^2)^2 = 0 \implies x = \pm y$, então deve ser o gráfico IV.

(e) $f(x,y) = (x - y)^2$. A seção em $x = 0$ é $z = y^2$, e em $y = 0$ é $z = x^2$. Tanto o gráfico II quanto o gráfico IV parecem plausíveis; note também que na seção em $z = 0$, $(x - y)^2 = 0 \implies x = y$, então deve ser o gráfico II.

(f) $f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$. A seção em $x = 0$ é $z = \sin(|y|)$, e em $y = 0$ é $z = \sin(|x|)$. Além disso, observe que a natureza oscilatória do gráfico é característica de funções trigonométricas. Portanto, este é o gráfico III.

□

Exercício 2.4.

Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

(a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$

(b) $g(x,y) = 2f(x,y)$

(c) $g(x,y) = -f(x,y)$

(d) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$

(e) $g(x,y) = f(x-2,y)$

(f) $g(x,y) = f(x,y+2)$

(g) $g(x,y) = f(x+3,y-4)$

Solução.

(a) O gráfico de g é o gráfico de f deslocado 2 unidades para cima.

(b) O gráfico de g é o gráfico de f esticado verticalmente por um fator de 2.

(c) O gráfico de g é o gráfico de f refletido em relação ao plano xy.

(d) O gráfico de $g(x,y) = -f(x,y)+2$ é o gráfico de f refletido em relação ao plano xy e então deslocado 2 unidades para cima.

(e) Desloque o gráfico 2 unidades para a esquerda em relação ao xy.

(f) Desloque o gráfico 2 unidades para baixo em relação ao xy.

(g) Desloque o gráfico 3 unidades para a esquerda e 4 unidades para cima em relação ao xy.

□