Lista 5 - Asset Pricing

Data de entrega: 11/09/2025 (23:59)

Exercício 1 (FTAP e Mercados Completos vs. Incompletos)

Considere uma economia de trocas com $i \in I$ agentes, dois períodos $t \in \{0, 1\}$ e incerteza apenas em $t = 1$, com realização $s \in S$ finito (com probabilidade π^i_s, potencialmente heterogênea entre agentes). Cada agente i tem dotação $e_i = (e_{i0}, \{e_{is}\}_{s\in S})$ e preferências separáveis no tempo,

$$U_i(C_i) = u_{i0}(c_{i0}) + \beta_i \sum_{s\in S} \pi^i_s u_{is}(c_{is})$$

Há j ativos em oferta líquida zero, com vetor de preços $P = (p_1, \cdots , p_J) \in \mathbb{R}^J$ e matriz de pagamentos $X \in \mathbb{R}^{S\times J}$ (ativos são comprados em $t = 0$).

(a) Formule o problema do agente i, explicitando as variáveis de escolha, restrição orçamentária e conjunto factíveis (utilize a notação de θ para posição em ativos).

(b) Defina um equilíbrio competitivo para essa economia **Dica:** Precisamos de preços, escolhas e market-clearing.

(c) (Fundamental Theory of Asset Pricing - FTAP) Mostre que ausência de arbitragem é equivalente à existência de um vetor de preços por estado $q \in [0, \infty)^S$ tal que $P = X'q$. Discuta a unicidade de q quando os mercados são completos (i.e., $\text{rank}(X) = S$) e a multiplicidade quando são incompletos. Dê a interpretação econômica de q.

(d) Defina a Taxa Marginal de Substituição (TMS) entre $t = 0$ e o estado s do agente i

$$\text{TMS}^i_{0,s} = \beta_i \pi^i_s \frac{\partial u_{is}(c^*_{is})/\partial c_{is}}{\partial u_{i0}(c^*_{i0})/\partial c_{i0}}$$

e prove que, sob mercados completos, todas as TMS coincidem no equilíbrio.

(e) Construa um exemplo numérico simples (e.g. $S = 2, J = 1$) e mostre que, para qualquer ativo no $\text{span}(X)$, os preços são consensuais, enquanto ativos fora do $\text{span}(X)$ podem gerar discordância entre os agentes. Explique a conexão com a multiplicidade de q.

(f) Mostre como os preços por estado q podem ser reescritos via um fator estocástico de desconto m escolhendo uma crença de referência $\overline{\pi}$, e obtenha a forma

$$p_j = \mathbb{E}[mx^j], \qquad \text{ou equivalentemente,} \qquad 1 = \mathbb{E}[mR^j]$$

Comente brevemente por que essa identidade não depende da completude de mercado.

Exercício 2 (Equação fundamental de apreçamento)

Considere um agente representativo com utilidade CRRA

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad \gamma > 0, \gamma \neq 1$$

e fator de desconto $\beta \in (0,1)$. Para um ativo j com payoff x_{t+1}^j e retorno bruto R_{t+1}^j, denote o fator estocástico de desconto por

$$m_{t+1} \equiv \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$$

(a) Derive a equação de Euler e mostre as formas de apreçamento

$$p_j = \mathbb{E}_t[m_{t+1} x_{t+1}^j], \qquad 1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1} R_{t+1}^j]$$

identifique m_{t+1} em termos de $(\beta, \gamma, c_t, c_{t+1})$.

(b) Mostre que o retorno livre de risco satisfaz $R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}]$, e interprete "prêmios são determinados por como R_{t+1}^j se co-move com m_{t+1}". Em seguida, especialize a Euler para o ativo livre de risco.

(c) Derive a representação por covariância

$$\mathbb{E}_t[R_{t+1}^j] - R_f = -\frac{\text{Cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}^j)}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]}$$

e discuta por que o risco idiossincrático não é precificado.

(d) Obtenha a decomposição $\beta - \lambda$ projetando R^j em m, i.e.

$$\mathbb{E}[R^j] - R_f = \beta_{j,m}\lambda_m, \quad \beta_{j,m} = \frac{\text{Cov}(R^j, m)}{\text{Var}(m)}, \quad \lambda_m = -\frac{\text{Var}(m)}{\mathbb{E}[m]}$$

(e) Suponha que $\Delta \ln c_{t+1} \equiv \ln c_{t+1} - \ln c_t$ e R_{t+1}^j são conjuntamente normais com

$$\Delta \ln c_{t+1} \sim \mathcal{N}(\mu_c, \sigma_c^2), \quad \ln R_{t+1}^j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2), \quad \text{Cov}(\Delta \ln c_{t+1}, \ln R_{t+1}^j) = \sigma_{cj}$$

Encontre R_f em função de $(\beta, \gamma, \mu_c, \sigma_c^2)$. Encontre o prêmio $\mathbb{E}[R^j] - R_f$ em função de (γ, σ_{cj}). Interprete econômica os sinais obtidos. **Dica:** Use as identidades padrão de médias lognormais.

(f) Reescreva (c) em forma "tipo CAPM", tomando como fator um retorno R^* perfeitamente correlacionado com m. Mostre que

$$\mathbb{E}[R^j] - R^f = \beta_j^* \mathbb{E}[R^* - R_f], \quad \beta_j^* = \frac{\text{Cov}(R^j, R^*)}{\text{Var}(R^*)}$$

Exercício 3 (Equity premium puzzle)

Considere o agente representativo com utilidade CRRA e a notação do Exercício 2. Recorde que temos

$$R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}], \qquad \mathbb{E}_t[R_{t+1}^j] - R_f = -\frac{\mathrm{Cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}^j)}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]}$$

e, sob lognormalidade de $\Delta \ln c_{t+1}$ e $\ln R_{t+1}^j$, temos expressões fechadas para R_f e o prêmio $\mathbb{E}[R^j] - R_f$.

(a) Usando as formulas do Exercício 2 (e), mostre que, para o "consumption claim" o prêmio tem ordem

$$\mathbb{E}[R^j] - R_f \sim \gamma \sigma_{cj}$$

Discuta o sinal e a intuição econômica.

(b) Considere números compatíveis com os dados anuais de pós-guerra para os EUA: crescimento médio do consumo $g \in [1.8\%, 2.0\%]$, volatilidade $\sigma_c \in [1\%, 2\%]$, e comovimento σ_{cj} consistente com um ativo de mercado plausível. Use β anual próximo de 0.99 e $\gamma \in [2, 5]$ para estimar R_f e $\mathbb{E}[R^m] - R_f$. Compare seus números com um prêmio observado em torno de 6% ao ano. Mostre que para termos 6% de prêmio exigiria γ irrealisticamente alto. Discuta em termos econômicos.

(c) Usando a expressão do Exercício 2 (b) para R_f sob lognormalidade, explique por que valores de γ elevados que ajudam no *EPP* **derrubam em excesso** R_f. Dê a intuição (substituição intertemporal vs. aversão ao risco e o papel de $\mathbb{E}[m]$).

(d) Considere as preferências do tipo Epstein-Zin (EZ), representadas pela utilidade

$$U_t = \left[(1-\beta) C_t^{1-\frac{1}{\psi}} + \beta \mu_t^{1-\frac{1}{\psi}}\right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\psi}}} \qquad \mu_t \equiv \left(\mathbb{E}_t[U_{t+1}^{1-\gamma}]\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Derive a condição de apreçamento e fator estocástico de desconto sob EZ. Mostre que, denotando por R_{t+1}^w o retorno sob a riqueza agregada (portfólio que internaliza a continuação de utilidade) vale a forma canônica

$$m_{t+1} = \beta^\theta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\frac{1}{\psi}} (R_{t+1}^w)^{\theta - 1}, \qquad \theta \equiv \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$$

Use que $R_f^{-1} = \mathbb{E}_t[m_{t+1}]$ e a expressão acima para discutir como ψ afeta principalmente o nível de R_f enquanto γ governa o preço do risco.

Exercício 4 (CAPM)

Considere uma economia de duas datas $t \in \{0, 1\}$ com J ativos em oferta fixa. Os payoffs $(x_1, \cdots, x_J)$ em $t = 1$ são conjuntamente normais (média μ e covariância Σ). Há um ativo livre de risco com retorno bruto R_f. Um agente representativo escolhe portfólio e consumo, suponha utilidade quadrática em faixa onde a utilidade marginal é positiva. O consumo $t = 1$ provém do payoff do portfólio.

(a) Escreva o problema de portfólio do agente representativo, usando z_j para a posição no ativo j (lembre $z_j = 1$ como dotação). Defina um equilíbrio competitivo (use a oferta fixa $\overline{z}_j$ com market clearing $\sum_i z_{ij} = \overline{z}_j$).

(b) Derive as condições de primeira ordem e caracterize o consumo de equilíbrio em $t = 1$. Descreva o fator estocástico de desconto gerado por esse agente.

(c) Defina o retorno do portfólio de mercado como

$$R_m = \frac{\sum_j x_j}{\sum_j p_j}$$

Mostre que, sob normalidade dos payoffs e utilidade quadrática, o SDF é linear em $R_m : m = a + bR_m$ para constantes a, b.

(d) Argumente condições sob as quais um ativo arriscado pode ter retorno esperado inferior ao livre de risco em equilíbrio (papel de hedge contra variações em R_m e utilidade quadrática).

Exercício 5 (Árvore de Lucas)

Considere um agente representativo com utilidade separável no tempo e log

$$\mathbb{E}_0\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln c_t\right], \qquad \beta \in (0,1)$$

que detém uma árvore (dotação) que paga dividendos d_t. A taxa de crescimento do dividendo é binária e segue uma cadeia de Markov

$$\frac{d_{t+1}}{d_t} \in \{\mu+\sigma, \mu-\sigma\}, \quad \mu > 1, \sigma > 0$$

com matriz de transição simétrica P em que a probabilidade de troca de estados é $p \in (0,1)$. Existem mercados para bens, para árvore e para ativos de Arrow que pagam uma unidade de consumo em um estado específico de $t+1$. Suponha $\lim_{n\to\infty}\beta^{n+1}\mathbb{E}_t[x_{t+n}] = 0$.

(a) Formule o problema do agente representativo. Identifique as variáveis de estado mínimas. Defina o consumo viável e a relação entre consumo e dividendos em equilíbrio.

(b) Defina um equilíbrio competitivo recursivo (preço da árvore $P(d,z)$, preços de Arrow $Q(z,z')$, regras de decisão e market-clearing).

(c) Mostre que, com utilidade log e sob hipótese de não bolha, o preço da árvore é proporcional ao dividendo (i.e., $P(d,z) = \varphi(z)d$). Escreva as equações de objetos de avaliação que determinam $\varphi(z)$.

(d) Derive os preços de Arrow $Q(z,z')$ e interprete-os em termos de SDF de equilíbrio.

(e) Introduza um título que paga uma unidade de consumo em $t+1$ calcule seu preço e deduza o retorno livre de risco $R_f(z)$.

(f) No caso $p = \frac{1}{2}$, calcule a taxa de retorno média do título livre de risco e da árvore e obtenha o equity premium. Comente como (β, μ, σ, p) afetam R_f, o retorno esperado da árvore e o prêmio.