Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 3. Conjuntos de nível e mapas de contorno

Objetivos

- Compreender o conceito de conjunto de nível para funções reais de várias variáveis.
- Interpretar geometricamente curvas de nível (em $\mathbb{R}^2$) e superfícies de nível (em $\mathbb{R}^3$).
- Reconhecer curvas de nível como projeções da interseção do gráfico com planos horizontais.
- Identificar e interpretar mapas de contorno.
- Relacionar a forma das curvas de nível com o comportamento da função no espaço.

Exercício 3.1.

Realize uma análise comparativa análoga à que foi feita entre as funções dos Exemplos 3.2 e 3.3, agora considerando os pares f e h, e g e h, sendo h a função do Exemplo 3.3. Para isso, construa mapas de contorno dessas funções utilizando os mesmos valores de c.

Exercício 3.2.

Para cada função, desenhe as curvas de nível (indiferença) para $u(x_1, x_2) = k$, com $k > 0$.

(a) Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0$

(b) Linear (Substitutos Perfeitos): $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad a, b > 0$

(c) Leontief (Complementares Perfeitos): $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}, \quad a, b > 0$

(d) CES (Elasticidade de Substituição Constante): $u(x_1, x_2) = \left(ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho}\right)^{1/\rho}$, com $a, b > 0$.

Solução.

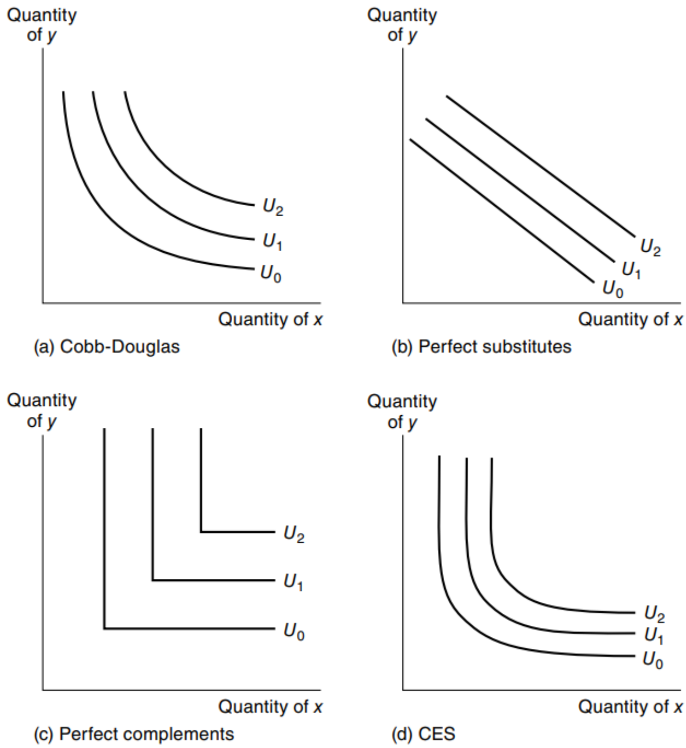


Figura 3.1

□

Exercício 3.3.

Faça um esboço de um mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

(a) $f(x,y) = x^2 + 9y^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

Solução.

(a) O mapa de contorno consiste nas curvas de nível $k = x^2 + 9y^2$, uma família de elipses com eixo maior ao longo do eixo x. (Ou, se $k = 0$, a origem.)

O gráfico de $f(x,y)$ é a superfície $z = x^2 + 9y^2$, um paraboloide elíptico.

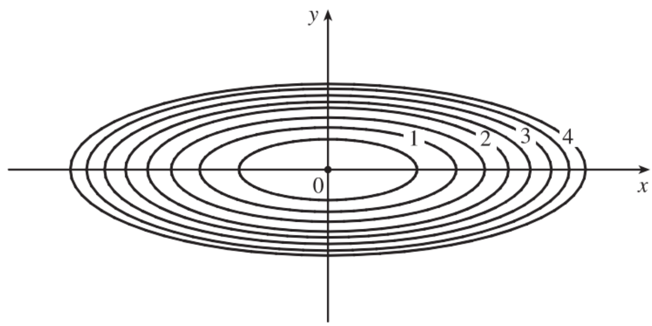


Figura 3.2

Se visualizarmos o levantamento de cada elipse $k = x^2 + 9y^2$ do mapa de contorno ao plano $z = k$, teremos traços horizontais que indicam o formato do gráfico de f.

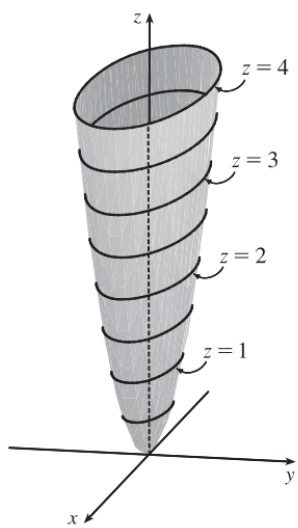


Figura 3.3

(b) O mapa de contorno consiste nas curvas de nível

$$k = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \implies 9x^2 + 4y^2 = 36 - k^2, \quad k \geq 0$$

uma família de elipses com eixo maior ao longo do eixo y. (Ou, se $k = 6$, a origem.)

O gráfico de $f(x, y)$ é a superfície

$$z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$$

ou, equivalente, a metade superior do elipsoide

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36.$$

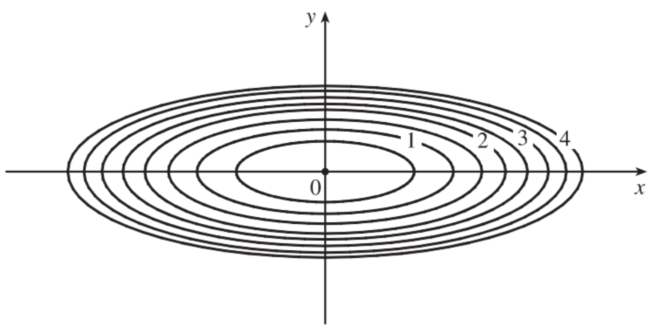


Figura 3.4

Se visualizarmos o levantamento de cada elipse $k = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ do mapa de contorno ao plano $z = k$, teremos traços horizontais que indicam o formato do gráfico de f.

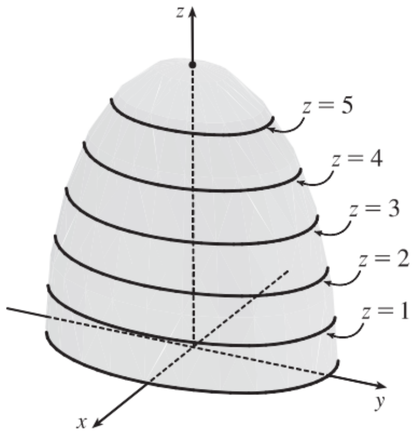


Figura 3.5

□

Exercício 3.4.

Descreva as superfícies de nível das funções abaixo.

(a) $f(x,y,z) = x+3y+5z$

(b) $f(x,y,z) = x^2+3y^2+5z^2$

(c) $f(x,y,z) = y^2+z^2$

(d) $f(x,y,z) = x^2-y^2-z^2$

Solução.

(a) $N_c = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y+5z = c\right\}$ que é um plano que corta os eixos coordenados em $(c,0,0)$, $(0,c/3,0)$ e $(0,0,c/5)$.

(b)
- $c < 0$: $N_c = \emptyset$
- $c = 0$: $N_0 = \{(0,0,0)\}$
- $c > 0$: $N_c = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+3y^2+5z^2 = c\right\}$ que é um elipsoide centrado na origem, cortando os eixos em $(\sqrt{c},0,0)$, $(0,\sqrt{c}/\sqrt{3},0)$ e $(0,0,\sqrt{c}/\sqrt{5})$.

(c)
- $c < 0$: $N_c = \emptyset$
- $c = 0$: $N_0 = \{(x, 0, 0)\}$
- $c > 0$: $N_c = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = c\right\}$ que é um cilindro circular de raio $\sqrt{c}$, cujo eixo é paralelo ao eixo x.

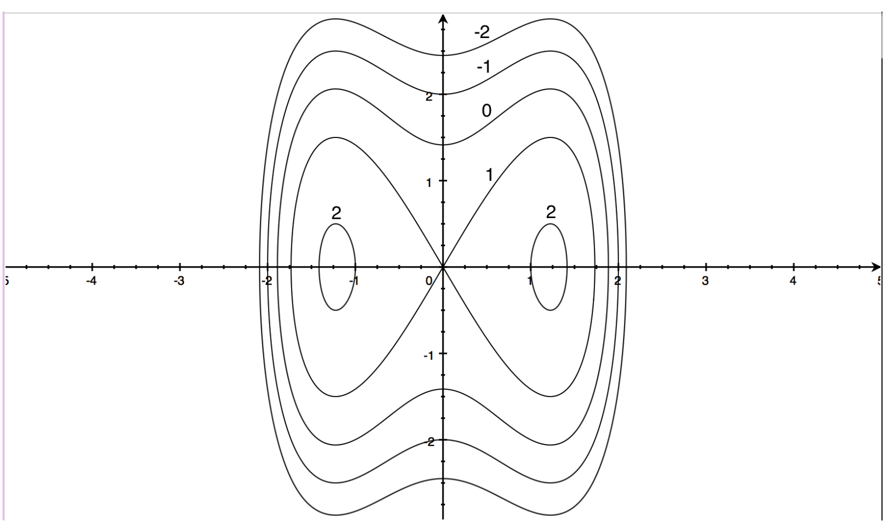
(d) $N_c = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = c\right\}$

- $c < 0$: Neste caso, temos um hiperbolóide de uma folha, com eixo ao longo do eixo x.
- $c = 0$: A equação se torna $x^2 = y^2 + z^2$, que descreve um cone circular duplo com vértice na origem e eixo ao longo do eixo x.
- $c > 0$: A equação representa um hiperbolóide de duas folha, com eixo ao longo do eixo x. A superfície é composta por duas partes desconectadas, localizadas em regiões onde $x^2 > |c|$.

□

Exercício 3.5 (Interpretação de mapa de contorno).

A figura a seguir representa o mapa de contorno de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com curvas de nível rotuladas por seus respectivos valores.



Com base nesse mapa de contorno, responda às seguintes questões:

1. Identifique os pontos (ou regiões) onde a função parece atingir o menor valor e o maior valor nessa janela. Justifique sua resposta com base nas curvas de nível.
2. A função cresce mais rapidamente na direção do eixo x ou do eixo y? Explique com base no espaçamento das curvas de nível.
3. Determine, aproximadamente, o valor da função nos seguintes pontos:
   (a) $(0,0)$
   (b) $(1,0)$
   (c) $(0,2)$
4. Diga se a função parece ser crescente, decrescente ou constante ao longo da reta $y = x$. Justifique com base nas curvas de nível.

Solução.

1. A função apresenta o maior valor no interior dos círculos da curva de nível igual a 2, aproximadamente nos pontos $(-1.25, 0)$ e $(1.25, 0)$. Na janela apresentada, a função atinge seu mínimo nos pontos pertencentes à curva de nível igual a -2.
2. A função cresce mais rapidamente na direção do eixo x, pois as curvas de nível estão mais próximas ao longo desse eixo.
3. (a) $f(0,0) = 1$
   (b) $f(1,0) = 2$
   (c) $f(0,2) = -1$
4. À medida que nos afastamos da origem na reta $y = x$, o valor da função reduz, entretanto, aproximadamente para $-1 \leq x \leq 1$ a função aparenta estar constante e igual a 1 ao longo da reta $y = x$. Desse modo:
   - para $x < -1$, a função é crescente na reta $y = x$;
   - para $-1 \leq x \leq 1$, a função é constante na reta $y = x$;
   - para $x > 1$, a função é decrescente na reta $y = x$.

□