

# Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves



## **Lista 15.**

### **Objetivos**

-

**Exercício 15.1.**

Encontre o maximizador de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , sujeito às restrições  $2x + y \leq 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**Solução.**

O Lagrangeano é

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(2x + y - 2) + \nu_1x + \nu_2y.$$

As condições de primeira ordem são

$$L_x = 2x - 2\lambda + \nu_1 = 0$$

$$L_y = 2y - \lambda + \nu_2 = 0$$

$$\lambda(2x + y - 2) = 0$$

$$\nu_1x = 0$$

$$\nu_2y = 0$$

$$\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Resolva enumerando os casos. Existe uma solução com  $x = 0$ ? Se sim, então  $\nu_1 = 2\lambda$  e  $y = 2$ . Se  $y = 2$ , então  $\nu_2 = 0$ , logo  $\lambda = 4$  e  $\nu_1 = 8$ , o que é consistente com as CPO (Condições de Primeira Ordem). Esta é uma solução.

Existe uma solução com  $y = 0$ ? Se sim, então  $\nu_2 = \lambda$  e  $x = 1$ . Se  $x = 1$ , então  $\nu_1 = 0$ , logo  $\lambda = 1$  e  $\nu_1 = 1$ , o que é consistente com as CPO. Esta é uma solução.

$x = y = \nu_1 = \nu_2 = \lambda = 0$  é uma solução.

Se nem  $x$  nem  $y$  são 0, então  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ . Então  $x = 4/5$  e  $y = 2/5$ . Isso é consistente. Dentre esses quatro pontos, o máximo global ocorre em  $(0, 2)$  e o valor de  $f$  é 4.

□

**Exercício 15.2.**

Encontre o maximizador de  $f(x, y) = 2y^2 - x$ , sujeito às restrições  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

**Solução.**

O Lagrangeano é

$$L = 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \nu_1x + \nu_2y.$$

As condições de primeira ordem são

$$L_x = -1 - 2\lambda x + \nu_1 = 0$$

$$L_y = 4y - 2\lambda y + \nu_2 = 0$$

$$\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

$$\nu_1x = 0$$

$$\nu_2y = 0$$

$$\nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

A única solução para as condições de primeira ordem é

$$x = 0 \quad y = 1 \quad \nu_1 = 1 \quad \nu_2 = 0 \quad \lambda = 2$$

portanto, o ótimo é  $x = 0$  e  $y = 1$ , e o valor de  $f$  é 2. □

### Exercício 15.3.

Considere o problema de maximizar  $f(x, y, z) = xyz + z$ , sujeito às restrições  $x^2 + y^2 + z \leq 6$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

- (a) Escreva um conjunto completo de condições de primeira ordem para este problema.
- (b) Determine se a restrição  $x^2 + y^2 + z \leq 6$  é ativa (binding) ou não em alguma solução.
- (c) Encontre uma solução das condições de primeira ordem que inclua  $x = 0$ .
- (d) Encontre três equações nas três incógnitas  $x, y, z$  que devem ser satisfeitas se  $x \neq 0$  na solução.
- (e) Mostre que  $x = 1, y = 1, z = 4$  satisfaz essas equações.

## Solução.

- (a) O problema é

$$\begin{aligned} \max \quad & xyz + z \\ \text{sujeito a} \quad & x^2 + y^2 + z \leq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

As condições de primeira ordem são

$$\begin{aligned} L_x &= yz - 2\lambda x + \nu_1 = 0 \\ L_y &= xz - 2\lambda y + \nu_2 = 0 \\ L_z &= xy + 1 - \lambda + \nu_3 = 0 \\ \lambda(x^2 + y^2 + z - 6) &= 0 \\ \nu_1 x &= 0 \\ \nu_2 y &= 0 \\ \nu_3 z &= 0 \\ \nu_1 \geq 0, \quad \nu_2 \geq 0, \quad \nu_3 \geq 0, \quad \lambda \geq 0. & \end{aligned}$$

- (b) Não há solução para as condições de primeira ordem com  $\lambda = 0$ , porque  $\lambda = 0$  implica  $xy + 1 + \nu_3 = 0$ , e esta equação não tem solução não negativa (pois  $x, y, \nu_3 \geq 0$ ). Como  $\lambda > 0$ , a restrição deve ser ativa (binding) em qualquer solução para as condições de primeira ordem.
- (c) Se  $x = 0$ , então  $\nu_1 = 2\lambda y$ . Como  $\lambda > 0$ ,  $\nu_2 y = 2\lambda y^2 = 0$  implica  $y = 0$  e  $\nu_2 = 0$ . Portanto  $z = 6$ ,  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_3 = 0$ ,  $\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = 1$ , e  $\lambda \geq 1$ .
- (d) Se  $x > 0$ , então  $\nu_1 = 0$ , logo  $yz = 2\lambda x$ . Como  $\lambda > 0$ ,  $y$  e  $z$  são ambos positivos, então  $\nu_2$  e  $\nu_3$  são ambos 0. Assim, quatro equações em quatro incógnitas são as condições de primeira ordem para  $L_x, L_y, L_z$  e a igualdade da restrição:

$$\begin{aligned} yz - 2\lambda x &= 0 \\ xz - 2\lambda y &= 0 \\ xy + 1 - \lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 + z &= 6. \end{aligned}$$

Resolvendo para  $\lambda$  e substituindo, obtemos o sistema de equações

$$-2x - 2x^2y + yz = 0$$

$$-2y - 2xy^2 + xz = 0$$

$$x^2 + y^2 + z = 6.$$

- (e) Este sistema de equações tem apenas uma solução que satisfaz todas as restrições de não negatividade:  $x = 1$ ,  $y = 1$ , e  $z = 4$ . Então  $\lambda = 2$ .

□