Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 1. Noções sobre conjuntos em $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

Objetivos

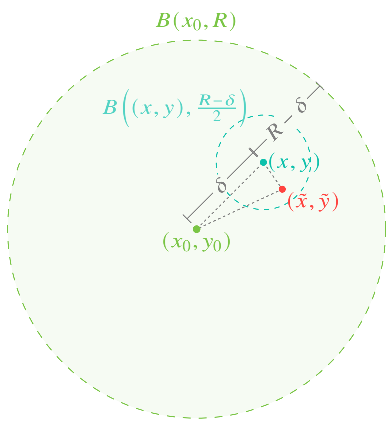
- Compreender os conceitos fundamentais de conjuntos em $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$
- Identificar e descrever geometricamente conjuntos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- Interpretação de notações envolvendo conjuntos em $\mathbb{R}^n$
- Identificar conjuntos abertos, fechados, limitados e compactos.
- Interpretar os conceitos de interior, fronteira e complemento de conjuntos.

Exercício 1.1.

Mostre que as bolas abertas são conjuntos abertos.

Solução.

Considere a bola aberta $B(\mathbf{x}_0, R) \subset \mathbb{R}^m$. Queremos mostrar: Se $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, R)$, então existe $r_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset B(\mathbf{x}_0, R)$.
Defina $\delta = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < R$ e $r_{\mathbf{x}} = \frac{R-\delta}{2} > 0$. Vamos mostrar que $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$ está dentro da bola $B(\mathbf{x}_0, R)$. A seguinte figura no caso de dimensão 2 pode ajudar.



Para isso, seja $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$, vamos mostrar que $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, R)$[a]

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < r_{\mathbf{x}}+\delta_{\mathbf{x}} = \frac{R-\delta_{\mathbf{x}}}{2}+\delta_{\mathbf{x}} = \frac{R+\delta_{\mathbf{x}}}{2}$$

Logo:

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\| < \frac{R+\delta_{\mathbf{x}}}{2} \leq R,$$

com isso,

$$B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset B_0(\mathbf{x}_0, R),$$

provando o que queríamos. □

[a] Lembre da desigualdade triangular: $\|a+b\| \leq \|a\|+\|b\|$.

Exercício 1.2.

(a) Mostre que um conjunto é fechado se ele contêm *todos* os seus pontos de fronteira.

(b) Mostre que um conjunto é aberto se ele não contêm *nenhum* ponto de fronteira.

(c) Dê outros exemplos de conjuntos em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) que não sejam abertos nem fechados.

Solução.

(a) Sabemos que um conjunto F é fechado se seu complementar é aberto. Seja F um conjunto fechado. Suponha por contradição que F não contenha pelo menos um ponto de fronteira, x_0, logo x_0 pertenceria ao complementar de F. Pela definição de ponto de fronteira, qualquer uma bola aberta com centro em x_0 possui interseção não vazia com F e com seu complementar, logo, não seria possível que essa bola esteja contida em no complementar de F, e, portanto, este não seria um conjunto aberto. Isso implica que F não seria um conjunto fechado, uma contradição.

(b) Sabemos que um conjunto A é fechado se para qualquer ponto x_0 existe bola aberta centrada em x_0 inteiramente contida em A. Suponha por contradição que A contenha pelo menos um ponto de fronteira, x_0. Pela definição de ponto de fronteira, qualquer uma bola aberta com centro em x_0 possui interseção não vazia com A e com seu complementar, logo, não seria possível que essa bola esteja contida em A, e, portanto, este não seria um conjunto aberto, uma contradição.

(c) Existem vários exemplos, por exemplo $(0, 1]$.

□

Exercício 1.3.

Para cada um dos conjuntos abaixo, execute as seguintes tarefas:

- Represente-o graficamente.
- Determine o seu complemento, o seu interior e a sua fronteira.
- Verifique se o conjunto é fechado, limitado e/ou compacto, justificando a resposta.

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge x\}$;

(b) $B = \{(x,y);\ y \le x^2,\ x \le 1\ y \ge 0,\}$;

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \ge 1\} \cup [-1,1] \times [-1,1]$;

(d) $D = \{(x,y,z);\ z = x^2+y^2\}$;

(e) $E = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 < 16,\ z \ge 2\}$.

Solução.

(a) Para o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge x\}$:

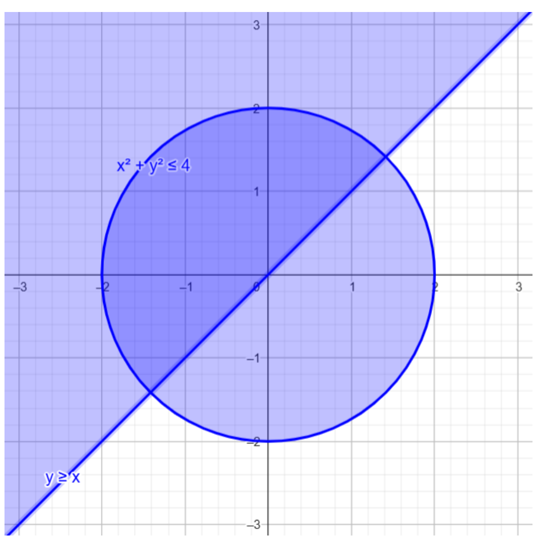


Figura 1.1

- **Complemento**: $A^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$

- **Interior**: $\text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4,\ y > x\}$
- **Fronteira**: $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4,\ y \geq x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x,\ x^2+y^2 \leq 4\}$
- **Fechado**: Sim, pois contém sua fronteira.
- **Limitado**: Sim, pois está contido no disco de raio 2.
- **Compacto**: Sim, pois é fechado e limitado.

(b) Para o conjunto $B = \{(x,y) : y \leq x^2,\ x \leq 1,\ y \geq 0\}$:

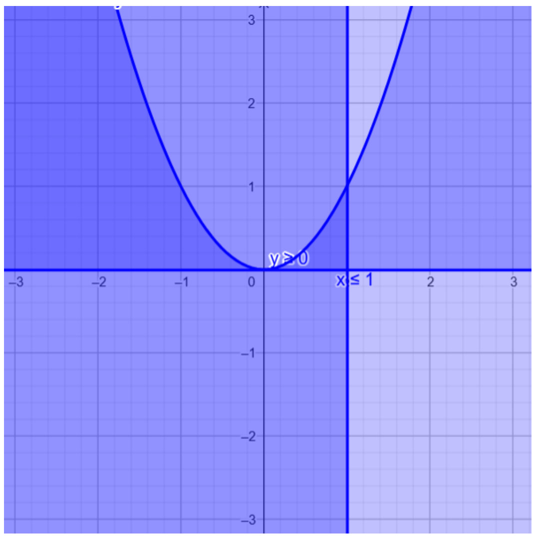


Figura 1.2

- **Complemento**: $B^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$
- **Interior**: $\text{int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2,\ x < 1,\ y > 0\}$
- **Fronteira**: $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, y \geq 0, x \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 1\}$
- **Fechado**: Sim, pois contém os pontos de fronteira.
- **Limitado**: Não, pois para qualquer bola $B(O,r)$, que escolhermos, o ponto $(-2r,0)$, que está dentro do conjunto, fica fora da bola. Logo, esse conjunto não está contido em nenhuma bola. Isso é equivalente a dizer que x e y podem tomar valores que, em módulo, são arbitrariamente grandes.

- **Compacto**: Não, pois não é limitado.

(c) Para $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \cup [-1,1] \times [-1,1]$:

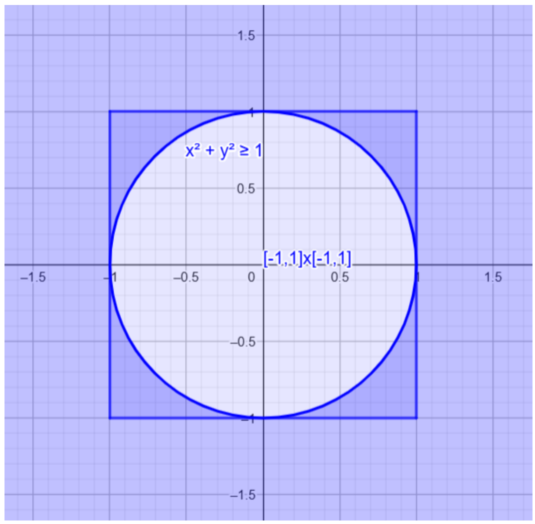


Figura 1.3

- **Complemento**: $C^c = \emptyset$
- **Interior**: $\text{int}(C) = \mathbb{R}^2$
- **Fronteira**: $\partial C = \emptyset$
- **Fechado**: Sim, ambos os conjuntos são fechados e a união de fechados é fechada.
- **Limitado**: Não.
- **Compacto**: Não, pois não é limitado.

(d) Para $D = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2\}$:

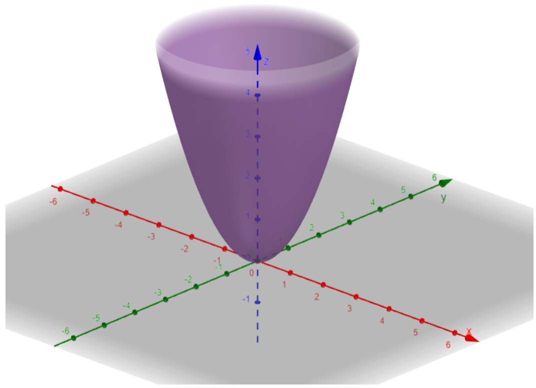


Figura 1.4

- **Complemento**: $D^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq x^2 + y^2\}$
- **Interior**: $\text{int}(D) = \emptyset$ pois não contém bolas abertas (toda superfície em $\mathbb{R}^3$ tem interior vazio).
- **Fronteira**: $\partial D = D$ (toda superfície é sua própria fronteira em $\mathbb{R}^3$).
- **Fechado**: Sim, pois é o conjunto de zeros de uma função contínua.
- **Limitado**: Não, pois x, y podem ser arbitrariamente grandes.
- **Compacto**: Não, pois não é limitado.

(e) Para $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 16,\ z \geq 2\}$:

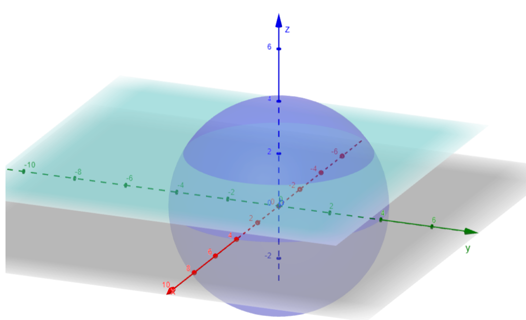


Figura 1.5

- **Complemento**: $E^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 16 \text{ ou } z < 2\}$

- **Interior**: $\text{int}(E) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 16,\ z > 2\}$
- **Fronteira**: $\partial E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 2\} \cup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 16, z = 2\}$
- **Fechado**: Não, pois não inclui os pontos onde $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
- **Limitado**: Sim, pois está contido na esfera de raio 4.
- **Compacto**: Não, pois não é fechado.

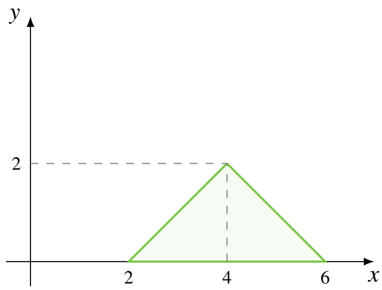
□

Exercício 1.4.

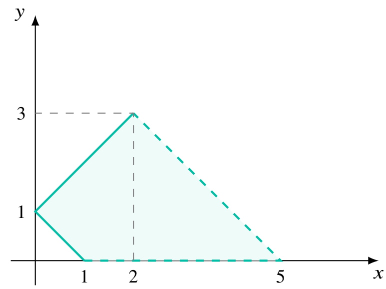
Para cada um dos conjuntos ilustrados abaixo, execute as seguintes tarefas:

- Descreva-o analiticamente na forma
  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$.
- Descreva-o analiticamente na forma
  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(y) \leq x \leq g(y),\ a \leq y \leq b\}$.
- Diga se o conjunto é fechado, limitado e/ou compacto. Justifique

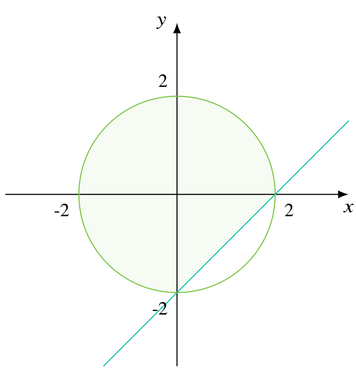
(a)



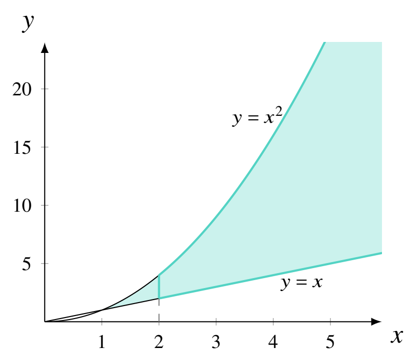
(b)



(c)



(d)



Solução.

(a) **Forma:** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$

Analisando o gráfico, temos:

Para x entre 2 e 6, y entre a linha abaixo ($f(x)$) e acima ($g(x)$).

As funções são:

$f(x) = 0$ (reta sobre x-eixo)

$g(x)$ é uma função triangular, cujo pico está em $x = 4, y = 2$. De $x = 2$ a $x = 4$, $g(x) = x - 2$; De $x = 4$ a $x = 6$, $g(x) = 6 - x$.

Então:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq x - 2, 2 \leq x \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 6 - x, 4 \leq x \leq 6\}.$$

Forma: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ f(y) \leq x \leq g(y), \ a \leq y \leq b\}$

Para y entre 0 e 2, o triângulo começa de $x = 2$ até $x = 6$, com as funções:

Para cada y, lados em $x = y + 2$ (esquerda) e $x = 6 - y$ (direita).

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ y + 2 \leq x \leq 6 - y, \ 0 \leq y \leq 2\right\}$$

Fechado, limitado e compacto:

O conjunto é **fechado** (inclui fronteiras), **limitado** (restrito em x e y), logo **compacto**.

(b) **Forma:** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ f(x) \leq y \leq g(x), \ a \leq x \leq b\}$

Para x de 0 a 5:

Inferior: $y = f(x)$:

Para $0 \leq x \leq 1$: $y = 1 - x$; Para $1 \leq x \leq 5$: $y = 0$.

Superior: $y = g(x)$:

Para $1 \leq x \leq 3$: $y = x + 1$; Para $3 \leq x \leq 5$: $y = 5 - x$.

Então:

$$\begin{aligned} B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 - x \leq y \leq x + 1, 0 \leq x < 1\} \\ \cup \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y \leq x + 1, 1 \leq x < 2\} \\ \cup \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < 5 - x, 2 \leq x \leq 5\} \end{aligned}$$

Forma: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(y) \leq x \leq g(y),\ a \leq y \leq b\}$

Para y entre 1 e 3:

Limite inferior: Para y entre 0 e 1: $x = 1 - y$; Para y entre 1 e 3: $x = y - 1$.

Limite superior: $x = 5 - y$.

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - y \leq x < 5 - y, 0 < y < 1\}$$
$$\cup\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y - 1 \leq x < 5 - y, 1 \leq y \leq 3\}$$

Fechado, limitado e compacto:

O conjunto é **não é fechado**, é **limitado** e, portanto, **não é compacto**.

(c) **Forma:** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$

Para x de -2 a 0: y de $-\sqrt{4-x^2}$ até $\sqrt{4-x^2}$;

Para x de 0 a 2: y de $x - 2$ até $\sqrt{4-x^2}$

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ -2 \leq x \leq 0\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - 2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ 0 < x \leq 2\right\}$$

Forma: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(y) \leq x \leq g(y),\ a \leq y \leq b\}$

Para y de -2 a 0: x de $x + 2$ até $\sqrt{4-y^2}$

Para y de 0 a 2: x de $-\sqrt{4-y^2}$ até $\sqrt{4-y^2}$

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq y + 2,\ -2 \leq y \leq 0\right\}$$
$$\cup\ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2},\ 0 < y \leq 2\right\}$$

Fechado, limitado e compacto:

O conjunto é **fechado** (inclui fronteira), **limitado**, logo **compacto**.

(d) **Forma:** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$

Da figura: - x de 2 em diante: Inferior: $y = x$; Superior: $y = x^2$.

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le y \le x^2,\ x \ge 2\right\}$$

Forma: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(y) \le x \le g(y),\ a \le y \le b\}$

Para y entre 2 e 4: $2 \le x \le y$

Para y de maior que 4: $x \le y \le x^2 \implies x \in [\sqrt{y}, y]$.

$$\begin{aligned} D = &\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2 \le x \le y,\ 2 \le y < 4\right\} \\ &\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{y} \le x \le y,\ y \ge 4\right\} \end{aligned}$$

Fechado, limitado e compacto:

O conjunto é **fechado**, **não é limitado**, logo **não é compacto**.

□

Exercício 1.5 (Fecho de um conjunto).

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e considere a distância euclidiana usual.
Definimos o *fecho* do conjunto D, denotado por $\overline{D}$, como o conjunto interseção de todos os conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ que contêm D, isto é,

$$\overline{D} = \cap\{F \subset \mathbb{R}^n\ ;\ F \text{ é fechado e } D \subset F\}.$$

(a) Mostre que $\overline{D}$ é um conjunto fechado que contém D.

(b) Prove que $\overline{D}$ é o menor conjunto fechado que contém D, no sentido de inclusão.

(c) Mostre que $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Solução.

(a) Como cada F na família considerada é fechado, e a interseção arbitrária de conjuntos fechados em $\mathbb{R}^n$ é fechada, segue que $\overline{D}$ é fechado. Além disso, como $D \subset F$ para todo F considerado, temos $D \subset \overline{D}$.

(b) Seja C qualquer conjunto fechado tal que $D \subset C$. Então C aparece na família de conjuntos cuja interseção é $\overline{D}$, logo $\overline{D} \subset C$.

(c) Para mostrar que $\overline{D} = D \cup \partial D$ precisamos mostrar que $D \cup \partial D$ é o menor conjunto fechado que contém D.

Note que $D \cup \partial D$ é fechado e contém D. Suponha por contradição que exista outro conjunto fechado, F, que contem D de modo que $F \subset D \cup \partial D$ e $F \neq D \cup \partial D$. Neste caso, como F contém D, F não contém algum dos ponto de fronteira de D e, portanto, F não pode ser fechado.

□