Lista 4 - Programação Dinâmica em Tempo Contínuo
Gabarito

Exercício 1 (McCall em Tempo Contínuo)

Em Macro I, vocês tiveram uma prévia do modelo de McCall, em tempo discreto. Para refrescar a memória, o *environment* de um modelo de McCall possui a seguinte função utilidade:

$$U = \mathbb{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t x_t$$

Onde:

$$x_t = \begin{cases} w, \text{ se empregado} \\ b, \text{ se desempregado} \end{cases}$$

Sendo w retirado de uma distribuição de salários i.i.d., com CDF $F(w)$.

As equações de Bellman são duas: uma para o empregado,

$$W(w) = w + \beta W(w)$$

E outra para o desempregado,

$$U = b + \beta\int_0^{\infty}\text{Max}\{U, W(w)\}dF(w)$$

Neste modelo, sabemos que existe um salário de reserva w^R tal que $W(w^R) = U$. Fazendo as devidas manipulações algébricas, vocês irão encontrar que:

$$w^R = b + \frac{\beta}{1-\beta}\int_{w^R}^{\infty}[1 - F(w)]dw$$

Agora, vocês terão que formular a dinâmica de um Modelo de McCall em tempo contínuo. Suponha que a taxa de desconto contínua é dada por r.

(a) Reescreva a equação de Bellman do empregado em tempo contínuo.

Há formas variadas de fazer essa transição de tempo discreto pro contínuo. Vou mostrar a forma que eu acho mais simples:

Usando o fato que $\beta = e^{-r\Delta}$, temos:

$$W(w) = w\Delta + e^{-r\Delta}W(w)$$

$$\Rightarrow (1 - e^{-r\Delta})W(w) = \Delta w$$

$$\Rightarrow \frac{1 - e^{-r\Delta}}{\Delta}W(w) = w$$

Basta então aplicar L'Hôspital no lado esquerdo para $\Delta \to 0$:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1-e^{-r\Delta}}{\Delta} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\Delta\to 0} re^{-r\Delta} = r$$

O que nos dá:

$$rW(w) = w$$

(b) Faça o mesmo para o Bellman do desempregado. Aqui, assuma que existe uma taxa α de se conseguir um emprego.

Agora, tome cuidado em como implementar a probabilidade α na equação. É necessário levar em consideração que ela representa uma taxa de um período pro outro (discreto). Para "continualizarmos" ela, temos então que implementá-la da seguinte forma:

$$U = \Delta b + e^{-r\Delta}\left[\alpha\Delta \int_0^\infty \text{Max}\{U, W(w)\}dF(w) + (1-\alpha\Delta)U\right]$$

Rearranje então o termo:

$$(1 - e^{-r\Delta}(1-\alpha\Delta))U = \Delta b + \alpha\Delta e^{-r\Delta}\int_0^\infty \text{Max}\{U, W(w)\}dF(w)$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^{-r\Delta}(1-\alpha\Delta)}{\Delta}U = b + \alpha e^{-r\Delta}\int_0^\infty \text{Max}\{U, W(w)\}dF(w)$$

Novamente, tome L'Hôspital do lado esquerdo:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1-e^{-r\Delta}(1-\alpha\Delta)}{\Delta} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{\Delta\to 0} re^{-r\Delta}(1-\alpha\Delta) - e^{-r\Delta}(-\alpha) = \lim_{\Delta\to 0} e^{-r\Delta}[r(1-\alpha\Delta)+\alpha] = r+\alpha$$

Para o lado direito, é facil: basta substituir $\Delta = 0$:

$$b + \alpha\int_0^\infty \text{Max}\{U, W(w)\}dF(w)$$

Juntando, obtemos:

$$(r+\alpha)U = b + \alpha\int_0^\infty \text{Max}\{U, W(w)\}dF(w)$$

Ainda podemos simplificar mais a expressão, de forma a obter:

$$rU = b + \alpha\int_0^\infty \text{Max}\{0, W(w)-U\}dF(w)$$

(c) Calcule o salário de reserva para a versão em tempo contínuo deste modelo. Ela é diferente do caso em tempo discreto? Explique.

Agora, basta pegar as duas equações de Bellman "continualizadas" acima para fazer as manipulações algébricas necessárias. Primeiro, usando o fato de que $rW(w^R) = rU$, temos:

$$w^R = b + \alpha \int_0^\infty \text{Max}\{0, \underbrace{W(w^R) - U}_{\frac{w^R - w}{r}}\} dF(w)$$

$$\Rightarrow w^R = b + \alpha \int_{w^R}^\infty \frac{w^R - w}{r} dF(w)$$

E, usando a clássica integral por partes, reescrevemos:

$$w^R = b + \frac{\alpha}{r} \int_{w^R}^\infty [1 - F(w)] dw$$

Nitidamente, o salário de reserva agora depende de uma probabilidade α de se conseguir um emprego. Logo, quanto maior essa probabilidade de se conseguir, maior o salário de reserva exigido para essa economia - afinal, temos mais poder na mão do potencial empregado para decidir entre suas opções.

Exercício 2 (Desenhando um Diagrama de Fases)

Imagine um modelo de RBC com gasto do governo e oferta inelástica de trabalho. Este gasto é financiado sem impostos distorcivos e não gera utilidade, nem aumento de produtividade. Sendo assim, apenas compete com o consumo e investimento como uso para os recursos. A sequência de choques sobre o produto, z_t, é predeterminada.

Pede-se:

(a) Escreva a HJB do planejador para o problema em tempo contínuo e derive suas condições de otimalidade.

O problema usual é descrito por:

$$\max \mathbb{E}\left[\sum \beta^t [u(C_t)]\right]$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & C_t + I_t + G_t = Z_t\, K_t^\alpha \\ & K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \end{aligned}$$

em que Z_t é uma sequência predeterminada de choques.

A HJB é dada por:

$$\rho V(K_t) = \max\, u(Z_t\, K_t^\alpha - I_t - G_t) + V_k(K_t)\, \dot{K}_t$$

em que $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$. Tiramos as condições de primeira ordem:

$$\rho u'(C_t) - V_k(K_t) = 0 \Rightarrow u''(C_t)\, \dot{C}_t = V_{kk}(K_t)\, \dot{K}_t$$

e derivamos a HJB:

$$\begin{aligned} & \rho V_k(K_t) = V_{kk}(K_t)\dot{K}_t + [\alpha Z_t K_t^{\alpha-1} - \delta] V_k(K_t) \\ \Rightarrow \quad & \rho u'(C_t) = u''(C_t)\, \dot{C}_t + [\alpha Z_t K_t^{\alpha-1} - \delta] u'(C_t) \end{aligned}$$

de modo que encontramos a equação de Euler:

$$\dot{C}_t = C_t[\alpha Z_t K_t^{\alpha-1} - \rho - \delta]\epsilon \tag{1}$$

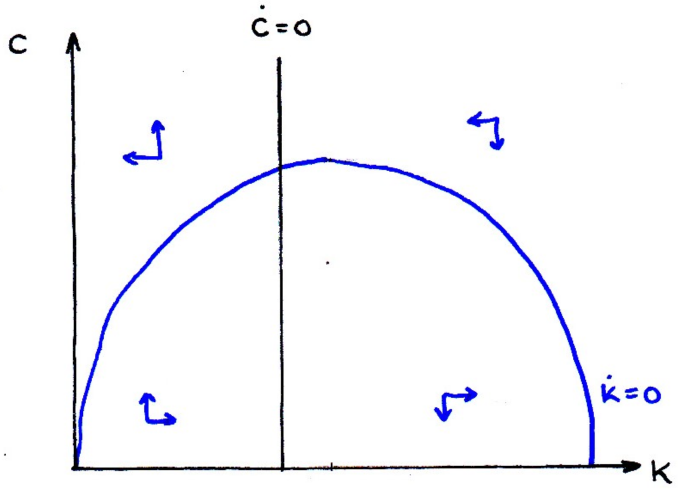
encontramos também a lei de movimento do capital:

$$\dot{K}_t = Z_t K_t^\alpha - \delta K_t - C_t - G_t \tag{2}$$

Agora, utilize as condções de otimalidade derivadas acima para representar as trajetórias ótimas em diagramas de fases para as seguintes situações:

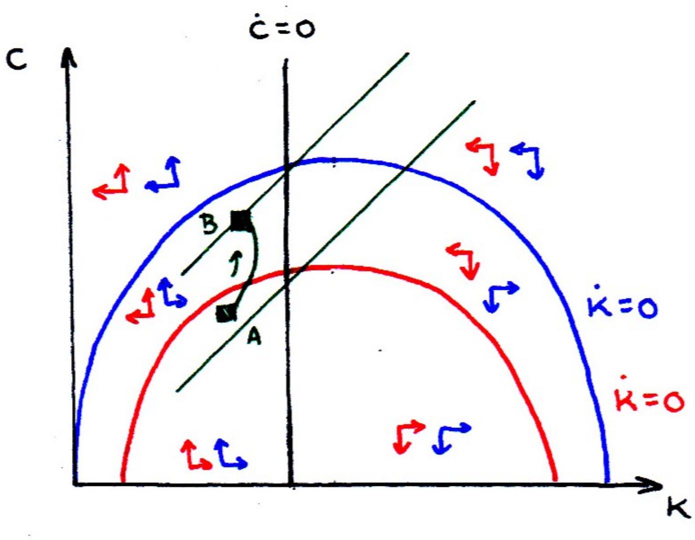
(b) O gasto é constante $g_t = \overline{g} > 0$.

Aqui nada acontece, pois com gastos constante, não observamos deslocamento de nenhuma curva. Representamos então o diagrama padrão:



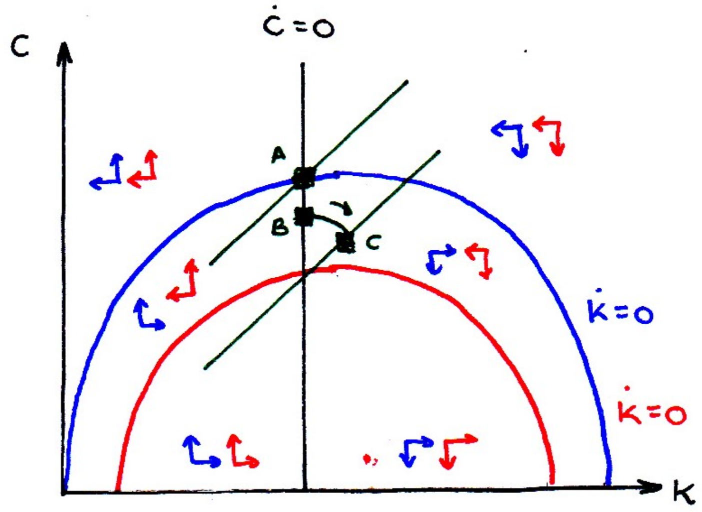
(c) O gasto é $\overline{g}$ até T e reverte para $g = 0$ dali em diante. Isto é perfeitamente conhecido hoje. A economia hoje tem k_0, abaixo do steady state de $g = 0$.

Veja o diagrama abaixo. Inicialmente o sistema é regido pelos componentes em vermelho. A economia se encontra no ponto A, abaixo do capital de steady state. Sabendo da eventual queda no nível de gastos do governo, o consumo gradualmente aumenta, de modo que quando o sistema passar a ser regido pelos componentes em azul, a economia esteja pontualmente sobre a nova trajetória de sela, rumo à convergência ao novo steady state.



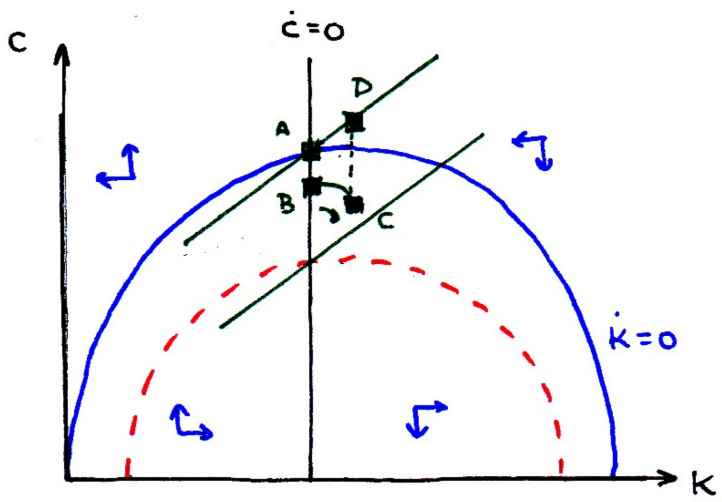
(d) A economia começa do capital de steady state de $g = 0$ e é feito um anúncio de que daqui a um tempo T o gasto passará a ser $\overline{g} > 0$ para sempre.

A economia se situa no ponto A, no sistema regido pelos componentes em azul. No momento do anúncio de aumento futuro de gastos, o consumo cai para o ponto B, ainda no locus de consumo. A partir de então, o consumo diminui e há acúmulo de capital, de modo que quando do momento da passagem para o sistema dinâmico em vermelho, a economia esteja sobre a trajetória de sela do novo sistema, convergindo para o novo estado estacionário.



(e) Suponha que o governo volta atrás deste anúncio, tido inicialmente como crível, de forma surpresa em $T_1 < T$.

A dinâmica no momento do anúncio e ao longo de parte do (suposto) período de transição é o mesmo do item anterior. Agora, quando do anúncio da reversão do anúncio, em T_1, o consumo salta de volta à trajetória de sela, no ponto D.



Exercício 3 (Simulando um Diagrama de Fases)

Considere o seguinte *environment*: Um planejador central escolhe as sequências de consumo e capital de modo a maximizar o bem-estar do consumidor, dado por:

$$U\left(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

Sujeito a restrição de evolução do estoque de capital (per capita) da economia como um todo:

$$\dot{k} = \bar{A} f(k_t) - c_t - \delta k_t$$

A utilidade do indivíduo é uma CRRA:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$$

E a função de produção é C-D:

$$f(k) = k^{\alpha}$$

Pede-se:

(a) Monte a HJB do problema, e encontre as condições de otimalidade do problema.

A HJB fica:

$$\rho V(k) = \underset{c}{\text{Max}}\ u(c) + V'(k)\dot{k}$$

$$\text{s.t. } \dot{k} = \bar{A} f(k) - c - \delta k$$

Tirando C.P.O. em c:

$$[c]: \quad u'(c) = V'(k) \Rightarrow u''(c)\dot{c} = V''(k)\dot{k}$$

Em particular,

$$u'(c) = c^{-\theta};\ u''(c) = \theta c^{-(\theta+1)}$$

E, aplicando Benveniste-Scheinkman em $V(k)$:

$$\rho V'(k) = V''(k)\dot{k} + V'(k)[\bar{A} f'(k) - \delta]$$

Note que, em particular, $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$.

Logo,

$$\Rightarrow \rho c^{-\theta} = -\theta c^{-(\theta+1)}\dot{c} + c^{-\theta}[\bar{A}\alpha k^{\alpha-1} - \delta]$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[\bar{A}\alpha k^{\alpha-1} - \rho - \delta]$$

Encontramos a eq. de Euler padrão, utilizada para o lócus onde $\dot{c} = 0$. Já o lócus de $\dot{k} = 0$ é tirado da própria lei de movimento do capital, dada no enunciado.

(b) Assuma que os parâmetros dessa economia são:

$$\begin{cases} \alpha = 0.33 \\ \delta = 0.08 \\ \rho = 0.04 \\ \theta = 2 \\ \bar{A} = 1 \end{cases}$$

Baixe o código de diagrama de fases disponibilizado na wiki do curso, calcule os valores de S-S de c^* e k^* e gere um gráfico que represente o diagrama de fases deste problema, junto com o seu braço estável. (Observe que o formato deste código está em Python!)

Basta impor que $\dot{c} = 0$ e $\dot{k} = 0$ para achar os valores do S-S.

Então, temos:

$$[\dot{c} = 0] : \quad \bar{A}\alpha k^{\alpha-1} - \rho - \delta = 0$$

$$\Rightarrow \bar{A}\alpha k^{-\alpha-1} = \rho + \delta$$

$$\Rightarrow k^{\alpha-1} = \frac{\rho+\delta}{\bar{A}\alpha}$$

$$\Rightarrow k^* = \left(\frac{\bar{A}\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Tendo obtido k^*, basta substituir em $\dot{k} = 0$:

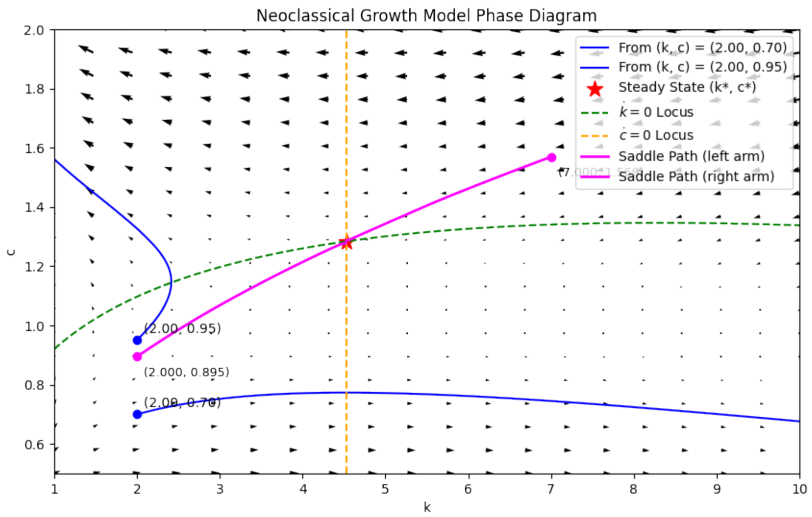
$$[\dot{k} = 0] : \quad c^* = \bar{A}\alpha k^{*\alpha-1} - \delta k^*$$

Ao baixar o código em Python, você pode notar que os parâmetros dados já estão escritos nas linhas 20-24. Logo, ele calcula automaticamente que:

$$k^* \approx 4.5261$$

$$c^* \approx 1.2838$$

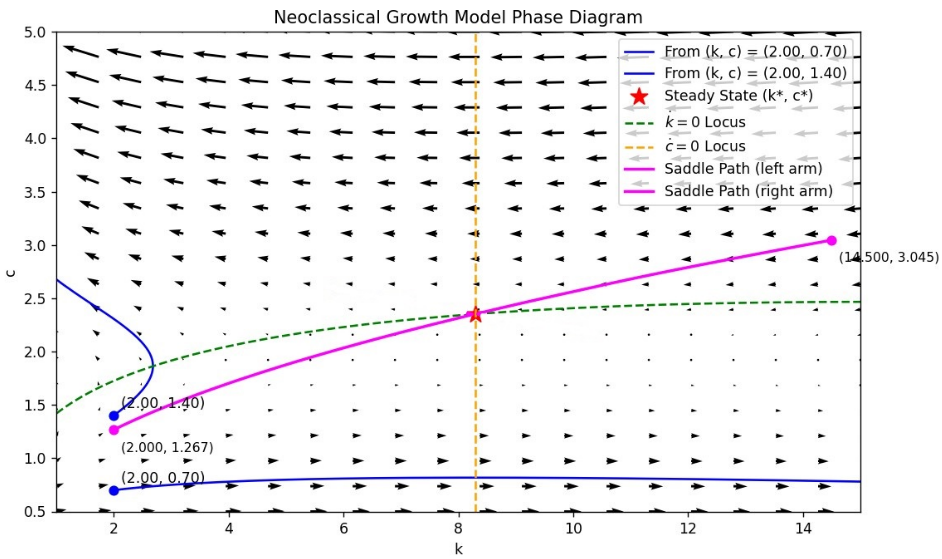
E o gráfico obtido é:



(c) Assuma que um choque de produtividade eleve o valor de $\bar{A}$ para 1.5 **do nada**, em $t = T$. Calcule os novos valores de S-S para c^* e k^*. Utilize o mesmo código (com as devidas modificações necessárias nos seus chutes iniciais) para conseguir plotar o novo diagrama de fases e o braço estável.

Aqui, você precisa tomar cuidado em não só em modificar o valor de $\bar{A}$ para 1.5, mas também ajustar os chutes iniciais para c0_left e c0_right e o *range* dos eixos do gráfico para que o seu novo braço estável não fique cortado para fora do gráfico.

Para obter a imagem abaixo:



Você precisa fazer as seguintes modificações:

$$\begin{cases} \bar{A} = 1.5 \text{ na linha 24 do código} \\ \text{k\_lim} = (1, 15) \text{ na linha 54} \\ \text{c\_lim} = (0.5, 5) \text{ na linha 54} \\ \text{find\_c0\_left} = 2 \text{ na linha 148} \\ \text{find\_c0\_right} = 14.5 \text{ na linha 181} \end{cases}$$

(d) Por fim, vamos agora estudar a **reação da economia** a esse choque de $\Delta\bar{A} > 0$. Aqui, vamos simular dois exercícios diferentes:

(i) Suponha que a economia esteja no S-S antigo imediatamente antes do choque acontecer. Calcule o valor de c_T. (i.e., calcule o valor para qual o consumo salta **imediatamente** após o choque de $\bar{A}$.)

Aqui, basta saber a dinâmica do diagrama de fases, como na questão anterior! O consumo salta imediatamente para o novo braço estável mantendo o nível de k prévio fixo, visto que este é um choque não previsto. Logo, substitua o valor de k^* na função find_c0_left para obter que $c_T \approx 1.796$. Note que precisamos substituir esse valor em "left" ao invés de "right", pois o S-S anterior está a esquerda do S-S novo.

(ii) Suponha que a economia esteja fora do S-S antes do choque de $\bar{A}$, mas ainda dentro do braço estável anterior, no ponto $(10, 1.858)$. Calcule o outro valor de c_T.

Igual no item anterior, basta pegar o valor de k no ponto dado, e substituir em find_c0_right, para obter $c_T \approx 2.562$.

Exercício 4 (*Cake eating*)

Neste exercício, formularemos um problema de programação dinâmica em tempo contínuo, encontrando também políticas ótimas das variáveis de controle.

Maria Antonieta tem preferências em formato log no consumo de brioche. Sua impaciência intertemporal é modelada com um fator de desconto exponencial. Seja k_0 o estoque inicial de brioche disponível, e k_t a quantidade disponível no tempo t. De início, não há incerteza.

(a) Primeiro, suponha que o brioche não cresce. Formule o problema recursivo de Maria Antonieta e encontre sua trajetória ótima de fluxo de consumo c e estoque de brioche k.

O problema é:

$$\rho V(k_t) = \underset{\{c_t\}}{\text{Max}} \ \log(c_t) + V'(k_t)\dot{k}_t$$

$$\text{s.t. } \dot{k}_t = -c_t$$

E a C.P.O.:

$$\frac{1}{c_t} = V'(k_t)$$

Agora, para encontrar a solução fechada do problema, faça o *guess* da função política como:

$$c = \alpha k$$

Precisamos encontrar o coeficiente α em termos dos demais parâmetros da economia (que, nesse caso, é somente ρ). Logo, substituindo isso na C.P.O.:

$$\alpha k_t = \frac{1}{V'(k_t)} \Rightarrow V'(k_t) = \frac{1}{\alpha k_t}$$

Integre isso em k_t para encontrar que:

$$V(k_t) = \frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C$$

Sendo C uma constante de integração. Substitua isso na HJB para encontrar que:

$$\rho\left[\frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C\right] = \log(\alpha k_t) - \frac{\alpha k_t}{\alpha k_t}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{\alpha}\log(k_t) + \rho C = \log(\alpha) - 1 + \log(k_t)$$

Disso, encontramos que:

$$\frac{\rho}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \rho$$

$$\rho C = \log(\alpha) - 1 \Rightarrow C = \frac{\log(\rho) - 1}{\rho}$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados.

Substitua $\alpha = \rho$ no *guess* de c_t, e então use a lei de movimento de k_t para encontrar uma solução fechada:

$$\dot{k}_t = -\rho k_t$$

Resolvendo a EDO:

$$k_t = k_0 e^{-\rho t}$$

Temos a solução fechada de k_t. A constante de integração foi ignorada, pois a mera existência dela implicaria um valor positivo de k_t quanto $t \to \infty$, o que seria sub-ótimo! Então, subsitua isso em c_t para obter:

$$c_t = \rho k_t = \underbrace{\rho k_0}_{=c_0} e^{-\rho t}$$

Ou seja: o estoque de brioche decai exponencialmente, junto com o consumo.

Método de Solução Alternativo: Uma outra forma de encontrar a regra de consumo sem necessitar de um guess envolve a seguinte lógica.

Partindo da CPO, sabemos que:

$$[c_t]: \quad \frac{1}{c_t} = V'(k_t) \Rightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t^2} = -V''(k_t)\dot{k}_t$$

Aplicando Benveniste-Scheinkman na HJB, temos então:

$$\rho V'(k_t) = V''(k_t)\dot{k}_t$$

Substituindo as CPO's encontradas, então obtemos:

$$\rho \frac{1}{c_t} = \frac{-\dot{c}_t}{c_t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\rho$$

Integrando essa EDO, obtemos:

$$c_t = c_0 e^{-\rho t}$$

A solução ainda não acabou! Precisamos encontrar c_0 em função de k_0. Para isso, note que $\dot{k}_t = -c_t$. Sendo assim, temos a seguinte EDO:

$$k_t = -\int c_t dt = -\int c_0 e^{-\rho t} dt = \frac{c_0}{\rho} e^{-\rho t} + C$$

Mas, sabemos que, para $\lim_{t\to\infty} k_t = 0$ (i.e., todo o brioche deve ser consumido no infinito). Logo,

$$\lim_{t\to\infty} k_t = \lim_{t\to\infty} \frac{c_0}{\rho} \cancelto{0}{e^{-\rho t}} + C = C = 0$$

Sendo assim, para $t = 0$, temos:

$$k_0 = \frac{c_0}{\rho} \Rightarrow c_0 = \rho k_0$$

(b) Suponha agora que o brioche deprecia exponencialmente a uma taxa δ. Reformule o problema e encontre a nova trajetória ótima de fluxo de consumo c e estoque de brioche k.

Agora, a HJB é

$$\rho V(k_t) = \max_{c_t} u(c_t) + V'(k_t)\dot{k}_t$$

$$\dot{k}_t = -c_t - \delta k_t$$

deste modo,

$$\rho V(k_t) = \max_{c_t} \log(c_t) - V'(k_t)\left[c_t + \delta k_t\right]$$
$$\text{FOC} : [c_t] : \quad \frac{1}{c_t} = V'(k_t)$$

Façamos o mesmo *guess* de antes, com $c = \alpha k$. Logo,

$$V(k_t) = \frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C$$

Pelos mesmos passos lógicos descritos anteriormente. Substituindo na HJB:

$$\rho\left[\frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C\right] = \log(\alpha k_t) - \frac{(\alpha+\delta)k_t}{\alpha k_t}$$
$$\Rightarrow \frac{\rho}{\alpha}\log(k_t) + \rho C = \log(k_t) + \log(\alpha) - \left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)$$

Disso, encontramos que:

$$\frac{\rho}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \rho$$
$$\rho C = \log(\alpha) - 1 - \frac{\delta}{\alpha} \Rightarrow C = \frac{\rho\log(\rho) - \rho - \delta}{\rho^2}$$

Então, substituindo o *guess* na lei de movimento de k_t, temos:

$$\dot{k_t} = -(\rho+\delta)k_t \Rightarrow k_t = k_0 e^{-(\rho+\delta)t}$$

Logo, a lei de movimento do consumo vira:

$$c_t = \rho k_t = \underbrace{\rho k_0}_{=c_0} e^{-(\rho+\delta)t}$$

O surgimento de δ no expoente mostra que tanto o capital quanto o consumo decai mais rapidamente com a inclusão da depreciação!

Método alternativo: Vamos empregar aqui o método alternativo!

A eq. de euler agora é:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -(\rho+\delta)$$

Integrando, recuperamos:

$$c_t = c_0 e^{-(\rho+\delta)t}$$

E, para achar, substituímos k_t na nova lei de movimento: $\dot{k_t} = -c_t - \delta k_t$:

$$\dot{k_t} = -c_0 e^{-(\rho+\delta)t} - \delta k_t$$

Essa é uma EDO mais complicada! Note no entanto, que k_t segue um formato exponencial padrão: $k_t = k_0 e^{-(\rho+\delta)t}$ (isso foi visto pelo *guess* da solução padrão). Substituindo acima:

$$-k_0(\rho+\delta)e^{-(\rho+\delta)t} = -c_0 e^{-(\rho+\delta)t} - \delta k_0 e^{-(\rho+\delta)t}$$
$$\Rightarrow \rho k_0 e^{-(\rho+\delta)t} = c_0 e^{-(\rho+\delta)t}$$
$$\Rightarrow c_0 = \rho k_0$$

O que satisfaz a solução original!

(c) Vamos introduzir depreciação estocástica do brioche. A cada intervalo Δ de tempo, existe uma probabilidade $\gamma\Delta$ de que o brioche deprecie e se torne $(1-\eta)k_t$, com $0 < \eta < 1$. Reformule o problema e encontre as trajetórias ótimas de fluxo de consumo c e estoque de brioche k. Relacione o resultado com o encontrado no item (b). (Dica: o choque de depreciação não precisa ser uma variável de estado, mas deve ser incluída na função valor)

A HJB é dada por

$$\rho V(k_t) = \max_{c_t} u(c_t) + V'(k_t)\dot{k}_t + \gamma[V((1-\eta)k_t) - V(k_t)]$$
$$\text{onde} \quad \dot{k}_t = -c_t$$

Assim,

$$\rho V(k_t) = \max_{c_t} u(c_t) - V'(k_t)\, c_t + \gamma[V((1-\eta)k_t) - V(k_t)]$$
$$\text{FOC:}[c_t]: \quad \frac{1}{c_t} - V'(k_t) = 0$$

Novamente, façamos o *guess*:

$$c_t = \alpha k_t$$
$$V(k_t) = \frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C$$

Substituindo na equação:

$$\rho\left[\frac{1}{\alpha}\log(k_t) + C\right] = \log(\alpha k_t) - \frac{\alpha k_t}{\alpha k_t} + \gamma\left[\frac{1}{\alpha}\log[(1-\eta)k_t] + C - \frac{1}{\alpha}\log(k_t) - C\right]$$
$$\Rightarrow \frac{\rho}{\alpha}\log(k_t) + \rho C = \log(k_t) + \log(\alpha) - 1 + \frac{\gamma}{\alpha}\log(1-\eta)$$

Encontramos os coeficientes:

$$\frac{\rho}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = \rho$$
$$\rho C = \log(\alpha) - 1 + \frac{\gamma}{\alpha}\log(1-\eta) \Rightarrow C = \frac{\rho\log(\rho) - \rho + \gamma\log(1-\eta)}{\rho^2}$$

Substituindo o *guess* na lei de movimento, temos:

$$\dot{k}_t = -\rho k_t \Rightarrow k_t = k_0 e^{-\rho t}$$

Logo, o consumo é:

$$c_t = \rho k_t = \underbrace{\rho k_0}_{=c_0} e^{-\rho t}$$

Ou seja: a depreciação estocástica não altera a regra de consumo, diferentemente da depreciação padrão!

Exercício 5 (Transições de renda)

Um agente com utilidade genérica sobre o consumo $u(c)$ tem acesso a um ativo livre de risco a que com rendimento contínuo r. A cada instante de tempo, sua renda pode assumir um entre dois níveis, a saber, $y(s) \in \{y_L, y_H\}$, com $y_H > y_L$. Sua restrição orçamentária é dada por

$$\dot{a} = ra + y(s) - c$$

A transição entre estados segue uma cadeia de Markov em tempo contínuo. Mais especificamente, ele transita do estado de renda alta para o de renda baixa com intensidade γ_{HL} e na direção contrária com intensidade γ_{LH}.

1. Escreva o problema do agente na forma recursiva e caracterize a(s) equação(ões) de Euler.

O problema na forma recursiva é formulado pela HJB

$$\begin{aligned} \rho V(a, s_i) = \max u(c) + V_a(a, s_i)\,\dot{a} + \mathbb{E}[V(a) - V(a, s_i)] \\ \text{s.t.} \quad \dot{a} = ra + y(s) - c \end{aligned}$$

em que $\mathbb{E}[V(a) - V(a, s_i)] = \gamma_{HL}[V(a, L) - V(a, H)] + \cancel{(1 - \gamma_{HL})[V(a, H) - V(a, H)]}$ para $s_i = H$, e $\mathbb{E}[V(a) - V(a, s_i)] = \gamma_{LH}[V(a, H) - V(a, L)] + \cancel{(1 - \gamma_{LH})[V(a, L) - V(a, L)]}$ para $s_i = L$.

Obtemos a CPO:

$$\begin{aligned} u_c(c, s_i) - V_a(a, s_i) = 0 \\ \Rightarrow \quad u_{cc}(c, s_i)\dot{c} - V_{aa}(a, s_i)\dot{a} = 0 \end{aligned}$$

Diferenciamos a HJB em a:

$$\rho V_a(a, s_i) = rV_a(a, s_i) + V_{aa}(a, s_i)\dot{a} + \gamma_{ij}[V(a) - V(a, s_i)]$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos a equação de Euler genérica:

$$\rho u_c(c, s_i) = ru_c(c, s_i) + u_{cc}(c, s_i)\dot{c}(a, s_i) + \gamma_{ij}[u_c(c) - u_c(c, s_i)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{c}(a, s_i)}{c(a, s_i)} = \epsilon \left\{ r - \rho + \gamma_{ij} \left[\frac{u_c(a)}{u_c(a, s_i)} - 1 \right] \right\}$$

de modo que temos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}(a, H)}{c(a, H)} &= \epsilon_H \left\{ r - \rho + \gamma_{HL} \left[\frac{u_c(a, L)}{u_c(a, H)} - 1 \right] \right\} \qquad \text{para } s_i = H \\ \frac{\dot{c}(a, L)}{c(a, L)} &= \epsilon_L \left\{ r - \rho + \gamma_{LH} \left[\frac{u_c(a, H)}{u_c(a, L)} - 1 \right] \right\} \qquad \text{para } s_i = L \end{aligned}$$

---

2. Mostre que se a utilidade marginal a cada nível de riqueza é mais alta para o agente no estado de renda baixa, isto é, $V_a(a, H) < V_a(a, L)$, então, para cada nível de riqueza, o consumo do agente no estado de renda alta cresce mais rápido do que o consumo no estado de renda baixa.

Das equações de Euler obtidas no item anterior,

$$\frac{\dot{c}(a,H)}{c(a,H)} = \epsilon_H \left\{ r - \rho + \gamma_{HL} \underbrace{\left[\frac{u_c(a,L)}{u_c(a,H)} - 1 \right]}_{>0} \right\}$$

$$\frac{\dot{c}(a,L)}{c(a,L)} = \epsilon_L \left\{ r - \rho + \gamma_{LH} \underbrace{\left[\frac{u_c(a,H)}{u_c(a,L)} - 1 \right]}_{<0} \right\}$$

Podemos subtrair as duas equações de Euler para chegar ao resultado. Note que, caso a utilidade seja do formato CRRA, $\epsilon_H = \epsilon_L$. Para uma função de utilidade genérica, dadas hipóteses sobre a concavidade da utilidade e maior utilidade marginal no estado de renda baixa, $\epsilon_H > \epsilon_L$. Assim, $\frac{\dot{c}(a,H)}{c(a,H)} - \frac{\dot{c}(a,L)}{c(a,L)} > 0$

Exercício 6 (Programação dinâmica em um problema de portfólios - P2, 2023)

Imagine um trabalhador que tem acesso a dois ativos: um índice de ações e um ativo livre de risco. Formularemos seu problema de portfólio abaixo.

A incerteza é descrita por uma cadeia de Markov em tempo contínuo com dois estados da Natureza, $s \in S = \{r, e\}$, em que r é um estado de recessão na economia e e é um estado de expansão. O índice de ações oferece dividendos $d(s)$ continuamente, com $d(e) > d(r)$. Seu preço é tal que $p(e) > p(r)$. Já o ativo livre de risco oferece um retorno instantâneo $r^f(s)$ e tem preço unitário sempre. Embora este retorno possa depender do estado, não há variação de preço deste ativo quando há troca de estado (pense em um fundo DI).

Além disto, o agente está sujeito a um risco de renda. Sua renda não derivada de ativos é $y(e)$ em caso de expansão e $y(r)$ em caso de recessão, com $y(e) > y(r)$.

A economia faz um transição de expansão para recessão com intensidade instantânea $\lambda_{e\to r}$ e de recessão para expansão com intensidade $\lambda_{r\to e}$.

Responda:

(a) Seja w a riqueza do agente. Descreva a evolução da riqueza do agente ($\dot{w}$) em função do estado da economia, assim como de sua escolha instantânea de quantas ações (a) e ativos livres de risco (b) deter e quanto consumir (c).

Existem duas formas de resolver essa questão. Eu vou focar na versão em que escrevemos ela como uma composição de portfólio, pois eu acho ela (muito) mais fácil de entender.

Perceba que essa questão é uma generalização do exercício anterior, onde temos um novo ativo, desta vez arriscado, na economia.

Se no exercício anterior, o fluxo de riqueza era:

$$\dot{a} = ra + y(s) - c$$

Com r sendo o ganho percentual de investir no ativo livre de risco, temos então que o novo fluxo de riqueza será:

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \left[\alpha \frac{d(s)}{p(s)} + r^f(s)\,(1-\alpha)\right] w + y(s) - c \\
&= \left[\alpha \left(\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right) + r^f(s)\right] w + y(s) - c
\end{aligned}$$

Pois $\frac{d(s)}{p(s)}$ representa o ganho percentual de investir em a, e $r^f(s)$ o ganho percentual de investir em b.

Aqui, α é o percentual investido no ativo a, e $1 - \alpha$ o percentual investido em b. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{p(s)\,a}{w} \\
(1-\alpha) &= \frac{b}{w}
\end{aligned}$$

Com $w = p(s)a + b$, pois o preço de b é sempre unitário, como dito no enunciado.

(b) Note que quando a economia faz uma transição entre estados, a riqueza do agente dá um salto proporcional à variação de preços do ativo arriscado. Descreva esta variação discreta de riqueza para cada uma das duas transições.

Note que quando há a mudança de estado, existe mudança de riqueza devido à mudança do preço do ativo arriscado:

$$\Delta_{e\to r}\, w = [p(r) - p(e)]\, a$$
$$\Delta_{r\to e}\, w = [p(e) - p(r)]\, a$$

Reescrevendo isto em termos de percentuais de investimento α, obtemos:

$$\Delta_{e\to r}\, w = \frac{[p(r) - p(e)]}{p(e)}\,\alpha w$$
$$\Delta_{r\to e}\, w = \frac{[p(e) - p(r)]}{p(r)}\,\alpha w$$

(c) Escreva um par de equações de HJB usando (w, s) como variáveis de estado.[1] Para isso, suponha taxa de desconto ρ e uma função arbitrária u para a utilidade instantânea do consumo.

Aqui, vou escrever em termos de um estado genérico s, para economizar na escrita. O HJB então fica:

$$\rho V(w,s) = \underset{c,\alpha}{\text{Max}}\; u(c) + V_w(w,s)\dot{w} + \lambda_{s\to s'}[V(w + \Delta_{s\to s'}w, s) - V(w,s)]$$

$$\text{s.t. } \dot{w} = \left[\alpha\left(\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right) + r^f(s)\right] w + y(s) - c$$

Com essa formulação, facilita ao tirarmos as C.P.O.'s do problema, visto que temos apenas duas variáveis de escolha (c, α), ao invés de três (c, a, b). Também não é necessário incluir a restrição extra em que $w = p(s)a + b$, uma vez que a equação $\dot{w}$ já incorpora automaticamente esta relação via α.

(d) Caracterize as equações de Euler do agente.

Tirando as duas C.P.O.'s do problema, obtemos:

$$[c]:\quad u_c(c) = V_w(w,s) \Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} = V_{ww}(w,s)\dot{w}$$

$$[\alpha]:\quad V_w(w,s)\left[\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right] w + \lambda_{s\to s'}\left[V_w(w + \Delta_{s\to s'}w, s)\left(\frac{p(s') - p(s)}{p(s)}\right) w\right] = 0$$

$$\Rightarrow V_w(w,s)\left[\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right] = -\lambda_{s\to s'}\left(\frac{p(s') - p(s)}{p(s)}\right) V_w(w + \Delta_{s\to s'}w, s)$$

[1] Dica: o par se faz necessário por termos $s \in \{r, e\}$.

E, por Benveniste-Scheinkman, derivamos $V_w(w,s)$ também:

$$\rho V_w(w,s) = V_{ww}(w,s)\dot{w} + \left[\alpha\left(\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right) + r^f(s)\right] V_w(w,s)$$
$$+\lambda_{s\longrightarrow s'}\left[V_w(w+\Delta_{s\longrightarrow s'}w, s')\left(1+\frac{p(s')-p(s)}{p(s)}\right)\alpha - V_w(w,s)\right]$$

Onde o termo multiplicando $V_w(w+\Delta_{s\longrightarrow s'}w, s')$ é oriundo do fato que:

$$w + \Delta_{s\longrightarrow s'}w = \left(1+\frac{p(s')-p(s)}{p(s)}\right)\alpha w$$

Manipulando então a expressão anterior, obtemos:

$$\rho V_w(w,s) = \dot{w}V_{ww}(w,s) + \alpha \underbrace{V_w(w,s)\left(\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right)}_{=-\lambda_{s\longrightarrow s'}\left(\frac{p(s')-p(s)}{p(s)}\right)V_w(w+\Delta_{s\longrightarrow s'}w,s),\text{ por C.P.O. de }[\alpha]} - r^f(s)$$
$$+\lambda_{s\longrightarrow s'}\left[V_w(w+\Delta_{s\longrightarrow s'}w, s')\left(1+\frac{p(s')-p(s)}{p(s)}\right)\alpha - V_w(w,s)\right]$$

$$\Rightarrow \rho V_w(w,s) = \dot{w}V_{ww}(w,s) + \lambda_{s\longrightarrow s'}\left[V_w(w+\Delta_{s\longrightarrow s'}w, s') - V_w(w,s)\right] - r^f(s)V_w(w,s)$$

Por fim, substituindo a C.P.O. de $[c]$:

$$\rho u_c(c(w,s)) = u_{cc}(c(w,s))\dot{c} + \lambda_{s\longrightarrow s'}\left[u_c(w+\Delta_{s\longrightarrow s'}w, s) - u_c(c(w,s))\right] - r^f(s)u_c(c(w,s))$$

E fazendo as manipulações usuais, conforme a questão anterior, obtemos:

$$\Rightarrow \left[-\frac{u_{cc}(c(w,s))}{u_c(c(w,s))}c(w,s)\right]\frac{\dot{c}(w,s)}{c(w,s)} = \left[r^f(s)-\rho\right] + \lambda_{s\to s'}\left[\frac{u_c(c(w+\Delta_{s\to r}w,s'))}{u_c(c(w,s))} - 1\right]$$

O que finaliza esta longa jornada.

(e) Se a economia é povoada por um contínuo de agentes idênticos a este, com utilidade $u(c) = log(c)$ e a riqueza agregada é uma oferta inelástica $\overline{a} = 1$ de ações e $\overline{b} = 0$ de títulos, o que você consegue dizer sobre preços de equilíbrio?

Com utilidade log, temos $-\frac{u''(c(w,s))}{u'(c(w,s))}c(w,s) = 1$. Com $\bar{a} = 1$ e $\bar{b} = 0$, temos também que $w(s) = p(s)$, e que a variação discreta na riqueza é

$$\Delta_{s\to s'}w = [p(s') - p(s)] \tag{3}$$

Em cada estado, o consumo é:

$$c(s) = d(s) + y(s)$$

Note que temos também que não há acumulo de riqueza, nem mudança de consumo enquanto não houver troca de estado. Logo, substituindo na equação de Euler encontrada no item anterior:

$$0 = \left[r^f(s) - \rho\right] + \lambda_{s\to s'}\left[\frac{d(s)+y(s)}{d(s')+y(s')} - 1\right] \qquad s = \{e, r\}$$

Estas duas equações de Euler determinam as taxas de juros nos dois estados. Os preços do ativos arriscado são determinados pelo sistema a seguir:

$$\left[\left(\frac{d(s)}{p(s)} - r^f(s)\right)\right] + \lambda_{s\to s'}\left[\frac{d(s)+y(s)}{d(s')+y(s')}\right]\frac{[p(s')-p(s)]}{p(s)} = 0 \qquad s = \{e, r\}$$

Exercício 7 (Um Modelo do Mercado Imobiliário - P2, 2023)

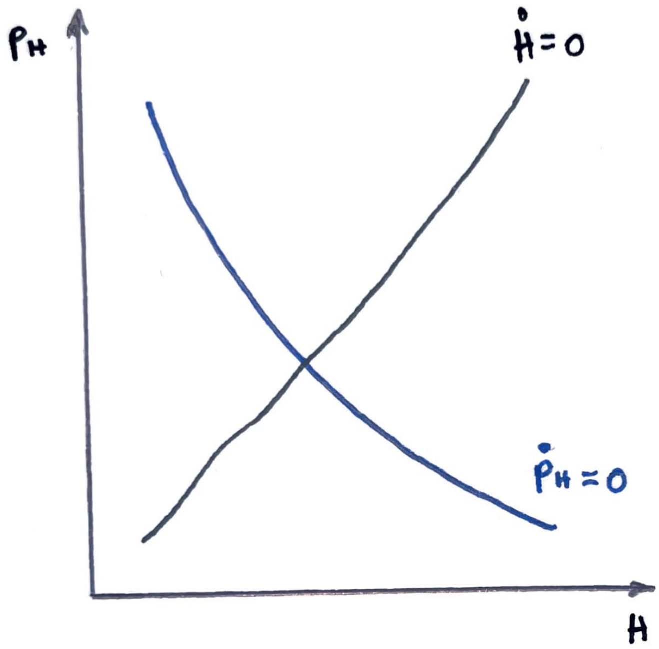
Sejam H o estoque de moradias na cidade do Rio de Janeiro, I a taxa de investimento imobiliário, p_H o preço real da moradia, e R o aluguel.

Suponha que I seja uma função crescente de p_H, de modo que $I = I(p_H)$, com $I'(\cdot) > 0$, e que $\dot{H} = I - \delta H$.

Suponha também que o aluguel é uma função decrescente de $H : R = R(H)$, $R'(\cdot) < 0$.

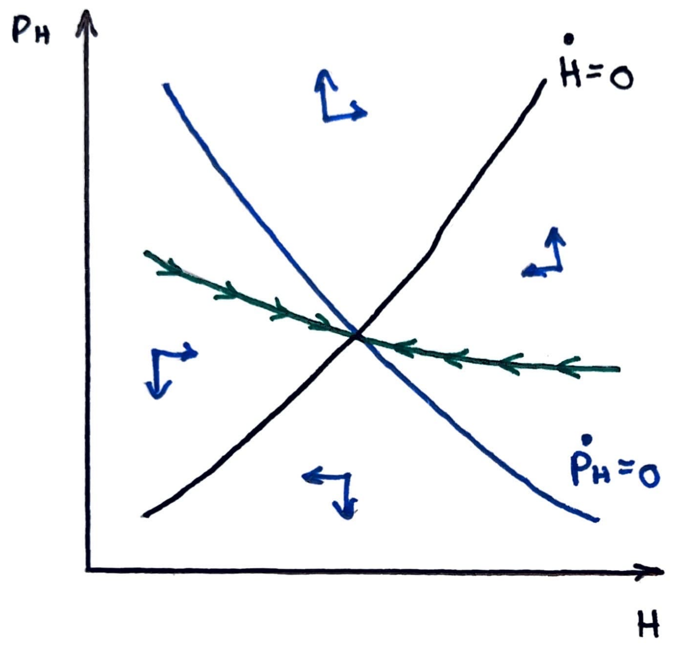
Finalmente, suponha que a renda de aluguel mais ganhos de capital devem igualar a taxa exógena requerida de retorno, $r : (R + \dot{p}_H) / p_H = r$.

(a) Esboce o conjunto de pontos no espaço (H, p_H) tal que $\dot{H} = 0$. Esboce o conjunto de pontos tal que $\dot{p}_H = 0$.

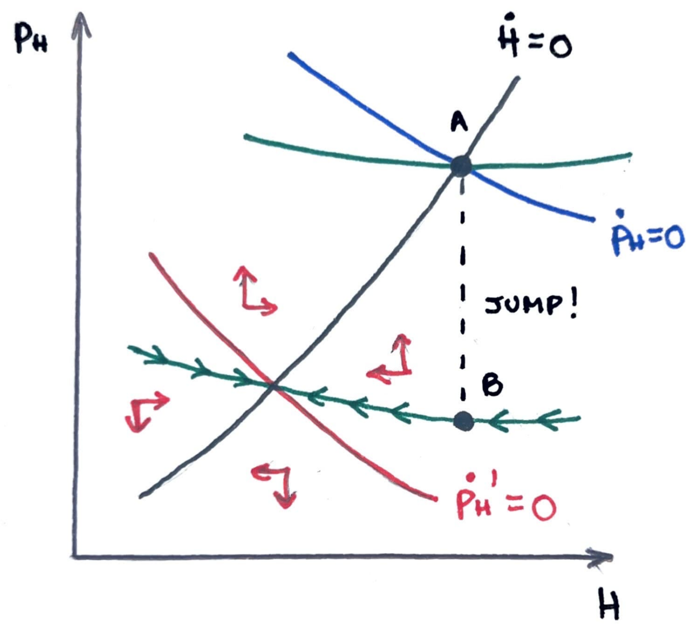


(b) Quais são as dinâmicas de H e p_H em cada região do diagrama resultante? Esboce o caminho de sela.

O caminho de sela está destacado em verde.

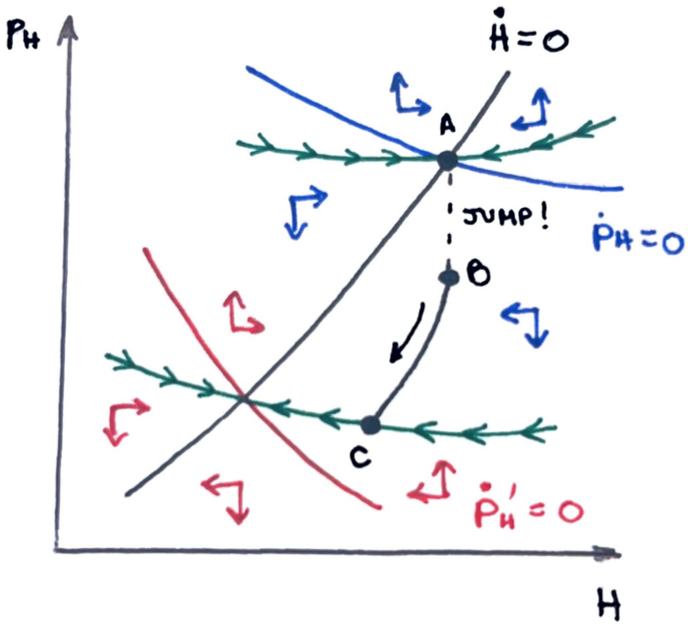


(c) Suponha que o mercado esteja inicialmente em equilíbrio de longo prazo e que haja um aumento permanente inesperado em r. O que acontece com H e p_H no momento da mudança? Como H, p_H, I, e R se comportam ao longo do tempo após a mudança?



No momento da mudança, p_H cai enquanto H permanece inalterado, de modo que a economia pula instantaneamente do ponto A até a nova trajetória de sela, no ponto B. Após a mudança, H diminui e p_H ao longo da sela, convergindo para o equilíbrio. O investimento, que caíra temporariamente, passa a aumentar, enquanto o aluguel também aumenta.

(d) Suponha que o mercado esteja inicialmente em equilíbrio de longo prazo e que se saiba que haverá um aumento permanente em r no tempo T no futuro. O que acontece com H e p_H no momento da notícia? Como H, p_H, I, e R se comportam entre o momento da notícia e o momento do aumento? O que acontece com eles quando o aumento ocorre? Como eles se comportam após o aumento?



No momento da notícia, p_H diminui e H se mantém inalterado, com a economia saltando do ponto A para um ponto abaixo da trajetória de sela do sistema ainda vigente, o ponto B. Entre o anúncio e o momento da mudança efetiva, H e p_H diminuem, com a economia se deslocando suavemente até se encontrar sobre a nova trajetória de sela no tempo T e ponto C — nessa transição o investimento continua em queda, já os alugueis aumentam —, momento a partir do qual p_H passa a aumentar enquanto H continua diminuindo. Após a mudança, o investimento passa a aumentar em relação à queda anterior, e os alugueis continuam aumentando.

Exercício 8 (Alocando em locadoras)

Modificado de Sutton & Barto (2020) página 81.

Imagine que você seja o dono de duas unidades de uma franquia de locadora de automóveis. A cada dia, um número qualquer de clientes chega em cada locadora a fim de alugar carros. Caso você tenha carros disponíveis naquela unidade, eles são alugados a um preço de \$10 cada — caso haja excesso de demanda em determinada unidade, você perde a oportunidade de negócio com esses clientes. Os carros se tornam disponíveis para locação no dia seguinte após seu retorno à unidade de origem. Entre um dia e outro você pode mexer sua frota de carros entre as unidades. Cada carro deslocado desta forma gera um custo de \$2. O desconto intertemporal é de β ao dia.

(a) Suponha que o número de carros pedidos e devolvidos em cada locadora são variáveis aleatórias de Poisson com parâmetros λ, em que $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. Suponha que λ é 3 e 4 para pedidos e 3 e 2 para devoluções nas unidades A e B. A capacidade máxima de cada unidade é de vinte carros, e lhe é permitido mover um máximo de cinco carros entre uma unidade a cada noite. Formule o seu problema de programação dinâmica em tempo discreto.

Vamos fazer o *set up* do problema. O conjunto de variáveis de estado é o número de carros nas unidades A e B, que denotamos por x e y, respectivamente. As variáveis de estado assumem valores discretos entre 0 e 20. A variável de controle é o número de carros transferidos entre as unidades à noite; vamos denotá-la $T = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, em que valores positivos representam transferências de A para B, valores negativos representam transferências de B para A, e o zero representa nenhuma transferência feita.

Na formulação recursiva, o problema discreto pode ser descrito como:

$$V(x, y) = \max_T \mathbb{E}\{10[\min\{x, PA\} + \min\{y, PB\}] - 2|T| + \beta V(x', y')\}$$

em que $x' = x - PA + DA - T$ e $y' = y - PB + DB + T$, onde PZ e DZ representam pedidos e devoluções na unidade Z.

(b) Suponha a mesma distribuição e parâmetros do item anterior, mas ignore o limite máximo de carros movidos à noite. Além disso, suponha que os carros possam ser movidos a qualquer momento. Formule o seu problema de programação dinâmica em tempo contínuo.

Dica: Ao deslocar um carro de uma locadora para outra, a função valor muda de $V(x, y)$ para $V(x + 1, y - 1)$ e paga-se um custo. Você vai precisar pensar em formulações da função valor que comparam objetos como $V(x, y)$ e $V(x + 1, y - 1) - c$ com o operador máximo.

De modo a simplificar a resolução do item, vamos considerar apenas soluções interiores do problema – isto é, não vamos lidar com situações em que o número de carros esteja no limite inferior ou superior de capacidade em qualquer uma das locadores.

Dado o estado (x, y), nos deparamos com três possíveis escolhas: não fazer mudança alguma, *OU* mudar um carro da unidade A para a unidade B, *OU* mudar um carro da unidade B para a unidade A. A decisão entre essas três linhas de ação é determinada por qual for mais vantajosa naquele momento infinitesimal de tempo:

$$V(x, y) = \max\{V^{NA}(x, y), V(x - 1, y + 1) - 2, V(x + 1, y - 1) - 2\}$$

Agora, temos de considerar a possibilidade de saltos no espaço de estado, ocorridos após a realização de pedidos de locação ou devolução de algum automóvel. Modelamos isso considerando os ganhos relativos ao transicionar de um espaço de estado a outro, a partir da ocorrência de pedidos ou devoluções em uma dada unidade:

$$\begin{aligned}\rho V^{NA}(x,y) =& \lambda_{PA}[10 + V(x-1,y) - V^{NA}(x,y)] \\ &+ \lambda_{PB}[10 + V(x,y-1) - V^{NA}(x,y)] \\ &+ \lambda_{DA}[V(x+1,y) - V^{NA}(x,y)] \\ &+ \lambda_{DB}[V(x,y+1) - V^{NA}(x,y)]\end{aligned}$$

Em que λ representa a intensidade / *arrival rate* de transição entre um conjunto de estados e outro. Está embutindo o número médio de eventos ocorridos em um dado momento infinitesimal de tempo. Note que, em um processo de Poisson, a probabilidade de ocorrência de múltiplos eventos em um mesmo intervalo infinitesimal de tempo é virtualmente zero — isso é consequência da propriedade de perda de memória da distribuição.

(c) Compare as formulações em tempo discreto e contínuo. Qual lhe parece mais simples? Por que não é necessário utilizar o operador esperança $\mathbb{E}(\cdot)$? Por que a função valor envolve apenas "estados vizinhos"e não grandes saltos? Este último motivo leva a algumas vantagens computacionais.

Como visto no item anterior, ao lidar com processos de Poisson o parâmetro λ já incorpora a taxa de transição média entre os estados, de modo que não é necessário utilizar o operador esperança. A "elegância" da formulação em tempo contínuo é que o formato do problema passa a considerar o benefício de ações e ocorrências marginais sobre o espaço de estado. Por isso consideramos apenas estados vizinhos e não grandes saltos, o que leva a considerações localizadas do espaço-estado e uma dinamização numérica da resolução do problema.
