Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 11. Integração Dupla

Objetivos

- Compreender o conceito geométrico de integral dupla como volume sob uma superfície.
- Identificar regiões de integração dos tipos I e II no plano.
- Reescrever integrais duplas em diferentes ordens de integração.
- Calcular integrais duplas de funções polinomiais e não polinomiais simples.

Em todas as soluções a seguir, use o GeoGebra para acompanhar a resolução.

Exercício 11.1.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\,dA,$$

onde R é a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

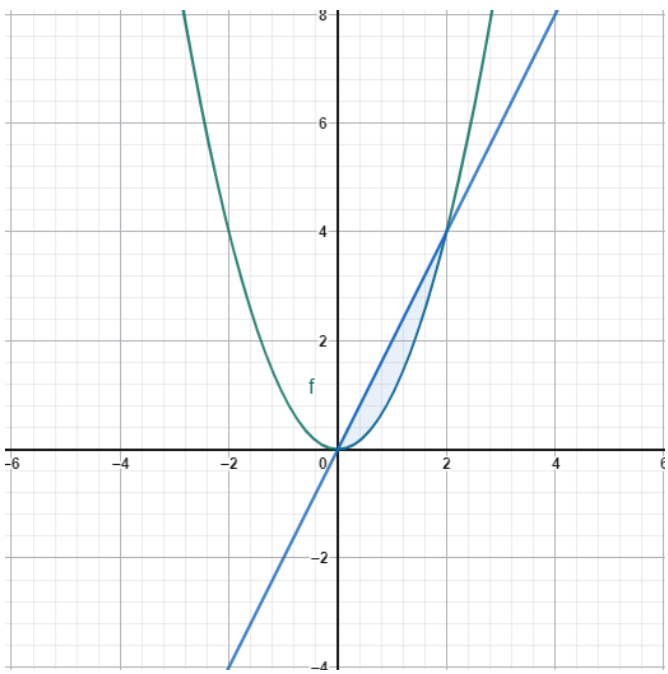
(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x.

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

(d) Calcule a integral para $f(x,y) = x + y$.

Solução.

A região é limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x$.



Vamos encontrar os pontos de interseção para entender os limites de integração.

$$x^2 = 2x \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = 0 ou x = 2,$$

Logo, os pontos de interseção são (0,0) e (2,4).
Assim, a região R é delimitada inferiormente pela parábola $y = x^2$ e superiormente pela reta $y = 2x$ no intervalo $0 \le x \le 2$.

(a) **Determinar se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.**

- **Tipo I**: A região é do **Tipo I**, descrita por:

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x\}$$

- **Tipo II**: Precisamos expressar x em função de y. A curva $y = 2x$ nos dá $x = y/2$ (a fronteira à esquerda) e a curva $y = x^2$ nos dá $x = \sqrt{y}$ (a fronteira à direita, pois $x \ge 0$). O valor de y varia de 0 a 4. Portanto, a região também é do **Tipo II**, descrita por:

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 4, \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}\}$$

Conclusão: A região R é tanto do Tipo I quanto do Tipo II.

(b) Usando a descrição da região como Tipo I, a integral se torna:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x, y)\, dy\, dx$$

(c) Usando a descrição da região como Tipo II, a integral se torna:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$$

(d) Vamos usar a integral do Tipo I, pois os limites de integração parecem mais simples de trabalhar.

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x + y)\, dy\, dx = \int_0^2 xy + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left(\left(x(2x) + \frac{(2x)^2}{2}\right) - \left(x(x^2) + \frac{(x^2)^2}{2}\right)\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\left(2x^2 + \frac{4x^2}{2}\right) - \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right)\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx \\
&= \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\Big|_0^2 \\
&= \left(\frac{4(2)^3}{3} - \frac{2^4}{4} - \frac{2^5}{10}\right) - (0) \\
&= \frac{4\cdot 8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{32}{10} \\
&= \frac{32}{3} - 4 - \frac{16}{5} \\
&= \frac{32\cdot 5}{15} - \frac{4\cdot 15}{15} - \frac{16\cdot 3}{15} \\
&= \frac{160 - 60 - 48}{15} \\
&= \frac{52}{15}
\end{aligned}
$$

□

Exercício 11.2.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\, dA,$$

onde R é a região limitada pela semicircunferência superior centrada na origem e o eixo x.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

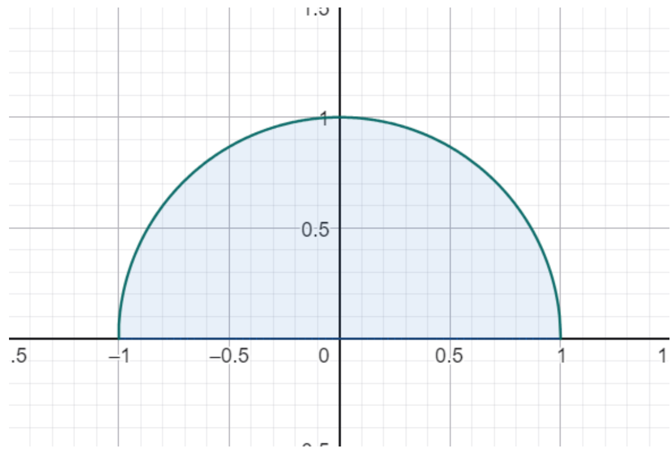
(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x.

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

(d) Calcule a integral para $f(x,y) = x$ (em coordenadas cartesianas!).

Solução.

A região é



(a) **Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.**

- **Tipo I**: Para a nossa região, x varia de $-a$ até a. Para cada x nesse intervalo, y varia da fronteira inferior $y = 0$ até a fronteira superior $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Portanto, a região é do **Tipo I**, descrita por:

$$R = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

- **Tipo II**: Para a nossa região, y varia de 0 até o raio a. Para cada y nesse intervalo, x varia da fronteira esquerda $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$ até a fronteira direita $x = \sqrt{a^2 - y^2}$. Portanto, a região também é do **Tipo II**, descrita por:

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a, -\sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$$

Conclusão: A região R é tanto do Tipo I quanto do Tipo II.

(b) Usando a descrição da região como Tipo I:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$$

(c) Usando a descrição da região como Tipo II:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

(d) A função $f(x,y) = x$ é uma função ímpar (o gráfico é antissimétrico respeito ao eixo y), logo, usando o item c, em que os limites de integração para cada x fixado são números opostos ($-\sqrt{a^2-y^2}$ e $\sqrt{a^2-y^2}$), a integral fica diretamente 0 (análise de Cálculo I), e portanto, a integral dupla fica 0. Mas você poderia ter feito a conta:

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} x\,dx\,dy = \int_0^a \left(\underbrace{\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}}_{0} \right) dy = 0.$$

Você poderia também usar o item (b), em que a ordem de integração seria primeiro em relação a y e depois a x:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx &= \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dydx \\
&= \int_{-a}^{a} x\; y\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}dx
\end{aligned}$$

Podemos resolver esta integral pelo método de Substituição u:

Faça $u = a^2 - x^2$. Então $du = -2x\,dx$, o que implica $x\,dx = -\frac{1}{2}du$. Mudamos os limites de integração:

- Se $x = -a$, então $u = a^2 - (-a)^2 = 0$.
- Se $x = a$, então $u = a^2 - a^2 = 0$.

A integral se torna:

$$\int_0^0 \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right) du = 0.$$

□

Exercício 11.3.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\,dA,$$

onde R é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x + y = 2$.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x.

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

(d) Calcule a integral para $f(x,y) = xe^y$.

Solução.

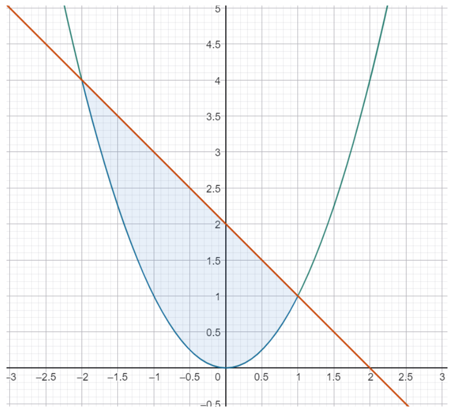
Primeiro, vamos encontrar os pontos de interseção das curvas $y = x^2$ e $x + y = 2$ (ou $y = 2 - x$) para definir a região R.

$$x^2 = 2 - x \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$$

As interseções ocorrem em $x = -2$ e $x = 1$.

- Se $x = -2$, então $y = (-2)^2 = 4$. Ponto: $(-2, 4)$.
- Se $x = 1$, então $y = 1^2 = 1$. Ponto: $(1, 1)$.

Na região de integração, para $x \in [-2, 1]$, a reta $y = 2 - x$ está acima da parábola $y = x^2$.



(a) **Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.**

- **Tipo I**: A variável x está contida no intervalo $[-2,1]$. Para qualquer x neste intervalo, y é limitado inferiormente por $y = x^2$ e superiormente por $y = 2-x$. Portanto, a região é do **Tipo I**, descrita por:

$$R = \{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-x\}$$

- **Tipo II**: A variável y varia do valor mínimo de 0 (no vértice da parábola) até o valor máximo de 4 (no ponto de interseção $(-2,4)$). As fronteiras em x são dadas por $x = \pm\sqrt{y}$ (da parábola) e $x = 2-y$ (da reta). Observamos que a fronteira direita de x muda.
  - Para $0 \leq y \leq 1$, x varia de $-\sqrt{y}$ a $\sqrt{y}$.
  - Para $1 \leq y \leq 4$, x varia de $-\sqrt{y}$ a $2-y$.

  Como a função que delimita x à direita muda, a região não é do Tipo II.

(b) Usando a descrição da região como Tipo I, a integral é:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

(c) A região pode ser expressa como a união de duas regiões do Tipo II. Logo, a integral é a soma de duas integrais:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

(d) É muito mais simples usar a ordem de integração do Tipo I.

$$\int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{2-x} xe^y\,dy\,dx$$

Primeiro, calculamos a integral interna em relação a y:

$$\int_{x^2}^{2-x} xe^y\,dy = x\int_{x^2}^{2-x} e^y\,dy = x\,e^y|_{y=x^2}^{y=2-x} = x(e^{2-x} - e^{x^2})$$

Agora, integramos o resultado em relação a x:

$$\int_{-2}^{1} x(e^{2-x} - e^{x^2})\,dx = \int_{-2}^{1} xe^{2-x}\,dx - \int_{-2}^{1} xe^{x^2}\,dx$$

Calculamos cada integral separadamente.

- Para a primeira integral, usamos integração por partes ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$): Seja $u = x$ e $dv = e^{2-x}dx$. Então $du = dx$ e $v = -e^{2-x}$.

$$\int xe^{2-x}\,dx = -xe^{2-x} - \int (-e^{2-x})\,dx$$
$$= -xe^{2-x} - e^{2-x}$$
$$-xe^{2-x} - e^{2-x}|_{-2}^{1} = (-e^1 - e^1) - (2e^4 - e^4) = -2e - e^4$$

- Para a segunda integral, usamos substituição: Seja $u = x^2$. Então $du = 2x\,dx \implies x\,dx = \frac{1}{2}du$.

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^u \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2}$$
$$\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{1}{2}e^{(-2)^2} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^4$$

Finalmente, combinamos os resultados:

$$(-2e - e^4) - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^4\right) = -2e - e^4 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^4 = -\frac{5}{2}e - \frac{1}{2}e^4$$

□

Exercício 11.4.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\, dA,$$

onde R é a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 4 - x^2$.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x.

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

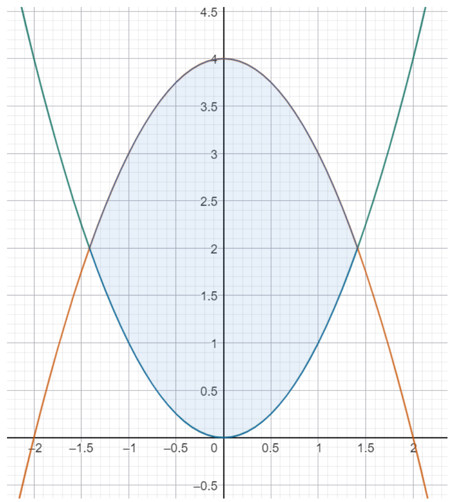
(d) Calcule a integral para $f(x,y) = x\cos(y + x^2)$.

Solução.

A região R é limitada por duas parábolas: $y = x^2$ (côncava para cima) e $y = 4 - x^2$ (côncava para baixo). Primeiro, encontramos os pontos de interseção:

$$x^2 = 4 - x^2 \implies 2x^2 = 4 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Os pontos de interseção ocorrem quando $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$. Nesses pontos, $y = (\pm\sqrt{2})^2 = 2$. A região é limitada inferiormente por $y = x^2$ e superiormente por $y = 4 - x^2$.



(a) **Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.**

- **Tipo I**: O intervalo de x é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Para cada x neste intervalo, y varia de x^2 até $4-x^2$. Portanto, a região é do **Tipo I**:

$$R = \{(x,y) \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq 4-x^2\}$$

- **Tipo II**: O valor mínimo de y é 0 (vértice de $y = x^2$) e o máximo é 4 (vértice de $y = 4-x^2$). As fronteiras em x são $x = \pm\sqrt{y}$ (de $y = x^2$) e $x = \pm\sqrt{4-y}$ (de $y = 4-x^2$).

  - Para $0 \leq y \leq 2$, a região é limitada por $x = -\sqrt{y}$ e $x = \sqrt{y}$.
  - Para $2 \leq y \leq 4$, a região é limitada por $x = -\sqrt{4-y}$ e $x = \sqrt{4-y}$.

  Como a descrição das fronteiras de x muda em $y = 2$, a região R não é do Tipo II.

(b) Usando a descrição da região como Tipo I:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

(c) A integral deve ser dividida em duas partes:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

(d) É muito mais simples usar a ordem de integração do Tipo I (dy dx).

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} x\cos(y+x^2)\,dy\,dx$$

Primeiro, resolvemos a integral interna em relação a y, tratando x como constante.

$$\begin{aligned}
\int_{x^2}^{4-x^2} x\cos(y+x^2)\,dy &= x\int_{x^2}^{4-x^2} \cos(y+x^2)\,dy \\
&= x\,\sin(y+x^2)\Big|_{y=x^2}^{y=4-x^2} \\
&= x\left(\sin((4-x^2)+x^2) - \sin(x^2+x^2)\right) \\
&= x(\sin(4)-\sin(2x^2))
\end{aligned}$$

Agora, integramos este resultado em relação a x:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x(\sin(4)-\sin(2x^2))\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\sin(4)\,dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\sin(2x^2)\,dx$$

Note que o integrando é ímpar e o intervalo é simétrico em torno da origem; portanto, pela propriedade das integrais de funções ímpares, o valor da integral é zero (Cálculo I).

Mas, se não perceber esse detalhe, pode calcular diretamente:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x(\sin(4)-\sin(2x^2))\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\sin(4)\,dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\sin(2x^2)\,dx$$

Primeira integral:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\sin(4)\,dx = \sin(4)\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\,dx = \sin(4)\cdot 0 = 0$$

Segunda integral: Usamos a substituição $u = 2x^2$, com $du = 4x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{4}du$. Os limites transformam-se:

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow u = 4, \quad x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 4$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\sin(2x^2)\,dx = \int_4^4 \frac{1}{4}\sin(u)\,du = \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

Resultado final:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x(\sin(4) - \sin(2x^2))\,dx = 0 - 0 = 0$$

□

Exercício 11.5.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\,dA,$$

onde R é a região limitada pela parábola $x = y^2 - 4$ e pela reta $x + y = 2$.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x, se possível. Justifique.

(d) Calcule a integral para $f(x,y) = \dfrac{1}{2-y}$.

Solução.

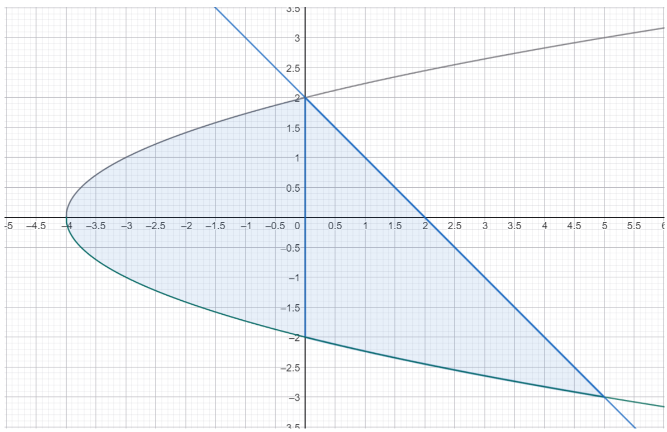
A região R é limitada pela parábola $x = y^2 - 4$ (uma parábola aberta para a direita com vértice em $(-4,0)$) e a reta $x = 2 - y$. Primeiro, encontramos os pontos de interseção:

$$y^2 - 4 = 2 - y \implies y^2 + y - 6 = 0 \implies (y+3)(y-2) = 0$$

As interseções ocorrem em $y = -3$ e $y = 2$.

- Se $y = -3$, então $x = 2 - (-3) = 5$. Ponto: $(5, -3)$.
- Se $y = 2$, então $x = 2 - 2 = 0$. Ponto: $(0, 2)$.

Para y no intervalo $[-3, 2]$, a reta $x = 2 - y$ está à direita da parábola $x = y^2 - 4$.



(a)
- **Tipo I**: Para descrever a região como Tipo I, precisamos expressar y em função de x. Da parábola, $y = \pm\sqrt{x+4}$, e da reta, $y = 2 - x$. A função que define a fronteira inferior ou superior de y muda dependendo do valor de x.
  - Para $-4 \leq x \leq 0$, y varia de $-\sqrt{x+4}$ a $\sqrt{x+4}$.
  - Para $0 \leq x \leq 5$, y varia de $-\sqrt{x+4}$ a $2 - x$.

  Como a descrição da fronteira superior de y muda, a região não é do Tipo I.
- **Tipo II**: A variável y está contida no intervalo constante $[-3, 2]$. Para qualquer y neste intervalo, x é limitado à esquerda pela parábola $x = y^2 - 4$ e à direita pela reta $x = 2 - y$. Portanto, a região é do **Tipo II**, descrita por:

$$R = \{(x, y) \mid -3 \leq y \leq 2,\ y^2 - 4 \leq x \leq 2 - y\}$$

(b) Esta é a ordem de integração natural para uma região do Tipo II:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-3}^{2}\int_{y^2-4}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

(c) Requer que a integral seja dividida em duas partes, pois a função que limita y superiormente muda em $x = 0$.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-4}^{0}\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{5}\int_{-\sqrt{x+4}}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

(d) Usaremos a ordem de integração do Tipo II (dx dy), que é muito mais simples.

$$\int_{-3}^{2}\int_{y^2-4}^{2-y} \frac{1}{2-y}\,dx\,dy$$

Primeiro, integramos em relação a x, tratando y como constante:

$$\begin{aligned}
\int_{y^2-4}^{2-y} \frac{1}{2-y}\,dx &= \frac{1}{2-y}\,x\Big|_{x=y^2-4}^{x=2-y} \\
&= \frac{1}{2-y}\Big((2-y)-(y^2-4)\Big) \\
&= \frac{1}{2-y}\left((2-y)+(2-y)(2+y)\right) \\
&= 3+y
\end{aligned}$$

Agora, integramos o resultado em relação a y:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{2}(y+3)\,dy &= \frac{y^2}{2}+3y\Big|_{-3}^{2} \\
&= \left(\frac{2^2}{2}+3(2)\right)-\left(\frac{(-3)^2}{2}+3(-3)\right) \\
&= \left(\frac{4}{2}+6\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right) \\
&= (2+6)-\left(\frac{9}{2}-\frac{18}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= 8 - \left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= 8 + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

□

Exercício 11.6.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\, dA,$$

onde R é a região limitada pelas parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = 8 - x$.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x, se possível. Justifique.

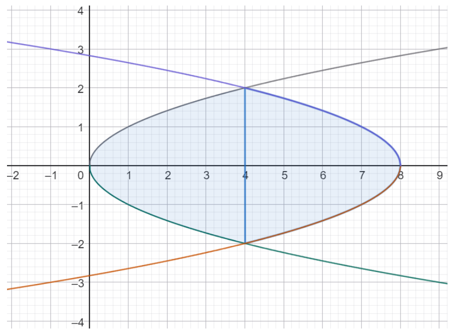
(d) Calcule a integral para $f(x,y) = xy^3$.

Solução.

A região R é limitada por duas parábolas: $x = y^2$ (aberta para a direita) e $x = 8 - y^2$ (aberta para a esquerda). Vamos encontrar os pontos de interseção:

$$y^2 = 8 - y^2 \implies 2y^2 = 8 \implies y^2 = 4 \implies y = \pm 2$$

Quando $y = \pm 2$, o valor de x é $x = (\pm 2)^2 = 4$. Os pontos de interseção são $(4, -2)$ e $(4, 2)$. Na região R, a parábola $x = y^2$ está à esquerda e a parábola $x = 8 - y^2$ está à direita.



(a) **Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.**

- **Tipo I**: Para $x \in [0,4]$, y varia de $-\sqrt{x}$ a $\sqrt{x}$. Para $x \in [4,8]$, y varia de $-\sqrt{8-x}$ a $\sqrt{8-x}$. Portanto, não é do Tipo I, mas é união de duas regiões do Tipo I.
- **Tipo II**: A região é do tipo II, pois pode ser descrita com y em um intervalo constante e x entre duas funções de y. O intervalo de y é $[-2,2]$. Para cada y neste intervalo, x varia de y^2 até $8-y^2$.

$$R = \{(x,y) \mid -2 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le 8-y^2\}$$

(b)

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{8-y^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

(c) A integral deve ser dividida em duas partes:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-x}}^{\sqrt{8-x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

(d) Usaremos a ordem de integração do Tipo II. A integral é:

$$\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{8-y^2} xy^3\,dx\,dy$$

Primeiro, integramos em relação a x:

$$\int_{y^2}^{8-y^2} xy^3\,dx = y^3\int_{y^2}^{8-y^2} x\,dx$$
$$= y^3\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=y^2}^{x=8-y^2}$$
$$= \frac{y^3}{2}\left((8-y^2)^2-(y^2)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(64y^3-17y^5+y^7\right).$$

Agora calculamos

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\cdot\left(64y^3-17y^5+y^7\right)\,dy$$

Como todos os termos do integrando são funções ímpares (potências ímpares de y) e o intervalo de integração é simétrico em relação à origem, a integral de cada termo é zero:

$$\int_{-2}^{2}\left(64y^3-17y^5+y^7\right)\,dy = 0$$

□

Exercício 11.7.

Considere a integral

$$\iint_R f(x,y)\,dA,$$

onde R é a região limitada pelas retas $y=x$, $y=4-x$ e $x-3y=0$.

(a) Determine se a região R é do tipo I e/ou do tipo II.

(b) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em y e depois em x.

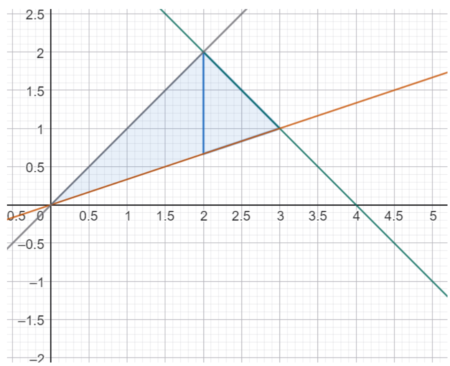
(c) Escreva a integral com ordem de integração primeiro em x e depois em y.

(d) Calcule a integral para $f(x,y)=xy$.

Solução.

A região R é um triângulo. Primeiro, encontramos seus vértices achando a interseção das retas duas a duas. As retas são $y = x$, $y = 4 - x$ e $y = x/3$.

- Interseção de $y = x$ e $y = x/3$: $x = x/3 \implies 3x = x \implies 2x = 0 \implies x = 0, y = 0$. Vértice: **(0, 0)**.
- Interseção de $y = x$ e $y = 4 - x$: $x = 4 - x \implies 2x = 4 \implies x = 2, y = 2$. Vértice: **(2, 2)**.
- Interseção de $y = 4 - x$ e $y = x/3$: $4 - x = x/3 \implies 12 - 3x = x \implies 4x = 12 \implies x = 3, y = 1$. Vértice: **(3, 1)**.



(a)
- **Tipo I**: A fronteira superior muda em $x = 2$. Para $x \in [0,2]$, a fronteira superior é $y = x$. Para $x \in [2,3]$, a fronteira superior é $y = 4 - x$. A fronteira inferior é sempre $y = x/3$. Portanto, R não é do Tipo I.
- **Tipo II**: A fronteira direita muda em $y = 1$. Para $y \in [0,1]$, a fronteira direita é $x = 3y$. Para $y \in [1,2]$, a fronteira direita é $x = 4 - y$. A fronteira esquerda é sempre $x = y$. Portanto, R não é do Tipo II.

(b) A integral deve ser dividida em $x = 2$:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{x/3}^{x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3 \int_{x/3}^{4-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

(c) A integral deve ser dividida em $y = 1$:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{y}^{3y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{y}^{4-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

(d) Ambas as ordens exijem o cálculo de duas integrais. Vamos usar a ordem de integração $dxdy$, ou seja, vamos a calcular a integral do item (c).

Calculamos a primeira integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{3y} xy\,dx\,dy &= \int_0^1 y\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=y}^{x=3y} dy \\
&= \int_0^1 y\left(\frac{(3y)^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \int_0^1 y\left(\frac{8y^2}{2}\right) dy = \int_0^1 4y^3\,dy \\
&= y^4\big|_0^1 = 1
\end{aligned}$$

Calculamos a segunda integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_y^{4-y} xy\,dx\,dy &= \int_1^2 y\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=y}^{x=4-y} dy \\
&= \int_1^2 \frac{y}{2}\left((4-y)^2 - y^2\right) dy \\
&= \int_1^2 \frac{y}{2}(16-8y+y^2-y^2)\,dy = \int_1^2 \frac{y}{2}(16-8y)\,dy \\
&= \int_1^2 (8y-4y^2)\,dy \\
&= 4y^2 - \frac{4y^3}{3}\bigg|_1^2 \\
&= \left(4(2^2) - \frac{4(2^3)}{3}\right) - \left(4(1^2) - \frac{4(1^3)}{3}\right) \\
&= \left(16 - \frac{32}{3}\right) - \left(4 - \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

O valor total da integral é a soma dos dois resultados:

$$\iint_R xy\,dA = 1 + \frac{8}{3} = \frac{3}{3} + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

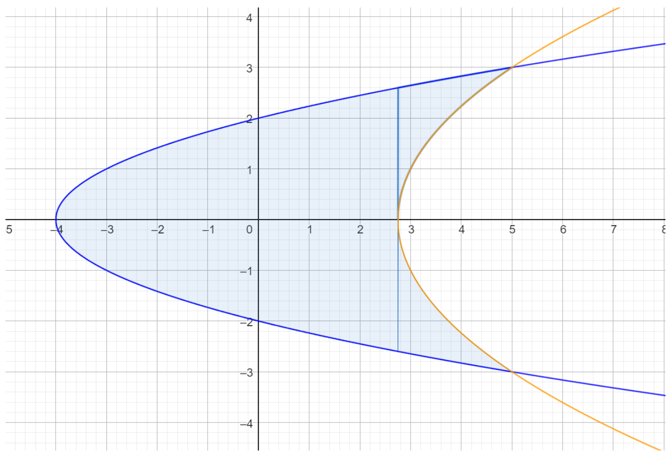
□

Exercício 11.8.

Calcule a área da região limitada pelas parábolas $y^2 = x+4$ e $y^2 = 4x-11$.

Solução.

As equações das parábolas podem ser reescritas como $x = y^2 - 4$ e $x = \frac{y^2+11}{4}$. Ambas são parábolas abertas para a direita.



Sabemos que

$$\text{Área de } R = \iint_R dA.$$

Agora precisamos determinar qual é a melhor ordem de integração para calcular a integral iterada. Para isso, encontramos os pontos de interseção para determinar os limites de integração.

$$y^2 - 4 = \frac{y^2+11}{4} \implies 4y^2 - 16 = y^2 + 11 \implies 3y^2 = 27 \implies y^2 = 9 \implies y = \pm 3$$

A região é limitada verticalmente por $y = -3$ e $y = 3$ e, para qualquer y neste intervalo, x está entre a parábola $x = y^2 - 4$ (azul) e a parábola $x = \frac{y^2+11}{4}$ (laranja). Logo, a região é do tipo I. Por outro lado, a região não é do tipo II. Logo, a melhor ordem de integração é $dx\,dx$.

Temos

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{3}\int_{y^2-4}^{\frac{y^2+11}{4}} 1\,dx\,dy \\
&= \int_{-3}^{3} x\Big|_{x=y^2-4}^{x=\frac{y^2+11}{4}}\,dy \\
&= \int_{-3}^{3}\left(\frac{y^2+11}{4}-(y^2-4)\right)dy \\
&= \int_{-3}^{3}\left(\frac{y^2}{4}+\frac{11}{4}-y^2+4\right)dy \\
&= \int_{-3}^{3}\left(-\frac{3}{4}y^2+\frac{27}{4}\right)dy
\end{aligned}$$

Como o integrando é uma função par, podemos simplificar o cálculo:

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_{0}^{3}\frac{1}{4}(-3y^2+27)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left(-y^3+27y\Big|_0^3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((-(3)^3+27(3))-0\right) \\
&= \frac{1}{2}(-27+81) = \frac{54}{2} = 27
\end{aligned}$$

A área da região é 27. □

Exercício 11.9.

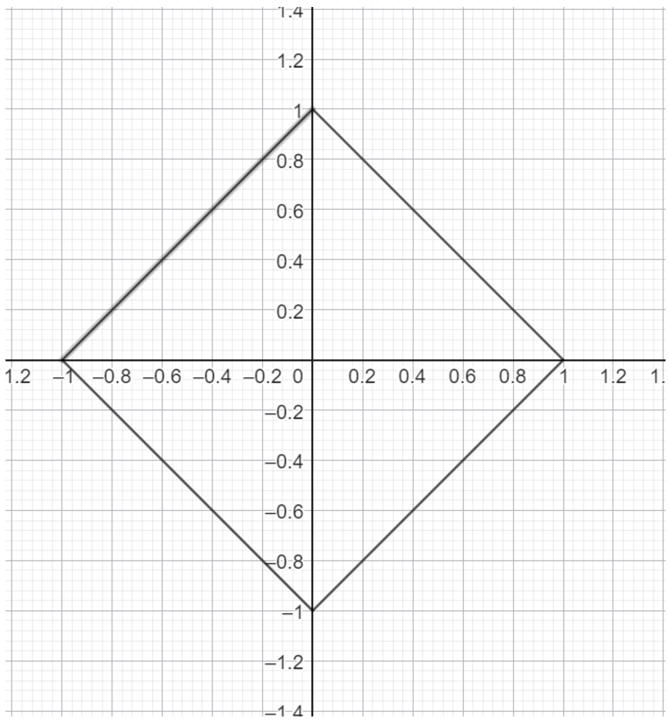
Calcule o volume embaixo do sólido de equação $z = x^2y^2$ e acima do quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$.
Dica: Use a simetria da região e da função.

Solução.

Observemos que $f(x,y) = x^2y^2 \geq 0$. Assim, o volume é dado por

$$V = \iint_R x^2y^2\,dA,$$

onde R é a região do quadrado,



Seguindo a dica, notamos que:

- A função $f(x,y) = x^2y^2$ é par em relação a x e a y, pois $f(-x,y) = f(x,y)$ e $f(x,-y) = f(x,y)$.
- A região R (o quadrado) é simétrica em relação aos eixos x e y.

Devido a essa dupla simetria, podemos calcular o volume no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por 4. Observemos também que o triângulo do primeiro quadrante é uma região do tipo I e do tipo II, e por conta da expressão da função, posso escolher qualquer ordem de integração. Escolheremos aqui a ordem $dy\,dx$. Neste caso temos: $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1-x$.
O volume total V é:

$$V = 4\iint_{R_1} x^2y^2\,dA = 4\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2y^2\,dy\,dx$$

Primeiro, integramos em relação a y:

$$\begin{aligned}\int_0^{1-x} x^2 y^2\, dy &= x^2 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1-x} \\ &= \frac{x^2(1-x)^3}{3}\end{aligned}$$

Agora, integramos o resultado em relação a x:

$$\begin{aligned}V &= 4\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{3}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 x^2(1-3x+3x^2-x^3)\, dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 (x^2-3x^3+3x^4-x^5)\, dx \\ &= \frac{4}{3}\left.\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right|_0^1 \\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{45}.\end{aligned}$$

□