LISTA 1 - INCERTEZA EM UMA ECONOMIA DE DOTAÇÃO
GABARITO

Exercício 1 (Agregação)

Nessa questão iremos estudar a agregação de agentes heterogêneos e possibilidade de um agente representativo.

Considere o problema do consumidor em mercados completos visto em sala de aula. A economia é povoada por um conjunto I de famílias, indexadas por $i \in I$. Cada família resolve

$$U_i(c(q, y_i)) = \max_{c_i} \textstyle\sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t))$$

$$\text{s.a. } \textstyle\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)y_t^i(s^t).$$

Além disto, o índice de utilidade da família tem um formato CRRA (Constant Relative Risk Aversion) dado por $u_i(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ e a restrição de factibilidade impõe que $C_t(s^t) := \sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t) =: Y_t(s^t)$, para cada t e cada s^t.

(a) Defina o consumo agregado como: $C_t(s^t) = \sum_i c_t^i(s^t)$. Encontre a relação que liga o consumo individual ao consumo agregado, i.e., qual a fração do consumo agregado de cada família. Como ela varia com sua dotação e como se relaciona aos preços de estado e nível de consumo agregado?

Resposta:

O problema da família i é dada por:

$$\begin{aligned} \max_{c_i} & \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) \\ \text{s.a.} & \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_t \sum_{s^t} q_t^0 y_t^i(s^t) \end{aligned}$$

Como a função utilidade é estritamente côncava e estritamente crescente, o problema tem solução interior, e o Lagrangeano da família é dado por

$$\mathscr{L} = \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \mu_i \cdot \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

Que nos dão as condições de primeira ordem:

$$[c_t^i(s^t)]: \quad \Pr(s^t)\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) - \mu_i q_t^0(s^t) = 0 \qquad \forall (t, s^t)$$

Como isso vale para todos os agentes, podemos escolher uma família A e tomá-la como referência. Isso é, vemos as alocações relativas à de uma família em específica, como se fosse um numerário. Então, pegando a CPO de uma família i e dividindo pela família A, obtemos:

$$\frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_A'(c_t^A(s^t))} = \frac{\mu_i}{\mu_A}$$

Como, para todo i, as funções de utilidade são C^2 e estritamente côncavas e estritamente crescentes, temos que existe uma função inversa de $u'(\cdot)$, e podemos escrever:

$$c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1}\left\{u_A'(c_t^A(s^t)) \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A}\right\}$$

Isso é, conseguimos escrever o consumo da família i como uma função apenas do consumo da família A e da razão dos multiplicadores de Lagrange. Somando toas as famílias, temos que:

$$\sum_i c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1}\left\{u_A'(c_t^A(s^t)) \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A}\right\} = \sum_i y_t^i(s^t) := Y_t(s^t)$$

em que, a terceira igualdade, é consequência da restrição de recursos. Portanto, a renda agregada é estatística suficiente para o consumo individual de cada família (dada a razão dos multiplicadores).

Agora vamos usar a forma específica da utilidade. Podemos reescrever a equação do consumo individual como

$$c_t^i(s^t) = \left(c_t^A(s^t)^{-\sigma} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma} = c_t^A(s^t) \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma}$$

e o consumo agregado, torna-se:

$$C_t(s^t) := \sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i \left[c_t^A(s^t) \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma}\right] \quad \Rightarrow \quad c_t^A(s^t) = C_t(s^t) \cdot \left[\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_A}\right)^{-1/\sigma}\right]^{-1}$$

Note, então, que o consumo da família de referência A é uma fração constante do consumo agregado. Além disso, note que o termo multiplicativo é constante no tempo, não mudando com as histórias.

Como escolhemos a família A arbitrariamente, podemos estender tomando outra família de referência. De fato, a fração do consumo agregado de forma geral, para uma família j é da forma

$$\alpha_j := \left[\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{-1/\sigma}\right]^{-1}$$

Voltando a condição de primeira ordem, segue que o preço satisfaz, para todas as famílias i:

$$\begin{aligned} q_t^0(s^t) &= \mu_i^{-1}\Pr(s^t)\beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \\ &= \mu_i^{-1}\Pr(s^t)\beta^t \left[\alpha_i Y_t(s^t)\right]^{-\sigma} \end{aligned}$$

Em específico, para o período inicial (depois de s^0 acontecer, i.e. $\Pr(s^0) = 1$):

$$1 = q_0^0(s^0) = \mu_i^{-1} c_0^i(s^0)^{-\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mu_i = c_0^i(s^0)^{-\sigma}, \quad \forall i$$

Além disso, verificando a restrição orçamentária das famílias, temos que

$$\begin{aligned} \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) &= \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\ \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \alpha_i Y_t(s^t) &= \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\ \alpha_i \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) Y_t(s^t) &= \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\ \alpha_i &= \frac{\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t)}{\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) Y_t(s^t)} \end{aligned}$$

De forma que, para cada família, sua fração do consumo agregado é proporcional à razão da sua riqueza esperada individual com o valor da riqueza esperada agregada da economia, avaliado aos preços de mercado.

Finalmente, note que podemos usar

$$
\begin{aligned}
\alpha_j &= \left[\sum_i \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{-1/\sigma}\right]^{-1} \\
&= \left[\sum_i \left(\frac{c_0^i(s^0)^{-\sigma}}{c_0^j(s^0)^{-\sigma}}\right)^{-1/\sigma}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{\sum_i c_0^i(s^0)}{c_0^j(s^0)}\right]^{-1} \\
&= \frac{c_0^j(s^0)}{\sum_i c_0^i(s^0)} = \frac{c_0^i(s^0)}{Y_0(s^0)}
\end{aligned}
$$

Logo, o consumo na data 0 é uma estatística suficiente para indicar a riqueza esperada da família em relação à riqueza esperada agregada da economia.

(b) Considere agora o problema do planejador, que maximiza uma soma ponderada das utilidades

$$W\left(\{Y_t\left(s^t\right)\}_{t,s^t}\right) = \max_{c_1,\ldots,c_I} \textstyle\sum_i \lambda_i U_i(c_i)$$

$$\text{s.a., para cada } t, s^t, \textstyle\sum_i c_t^i\left(s^t\right) \leq Y_t\left(s^t\right).$$

Quais os pesos λ_i que cada família deve ter para que o problema centralizado gere alocações consistentes com o problema descentralizado? Interprete.

Dica: Normalize de uma maneira conveniente.

Resposta:

Dado uma sequência de pesos de Pareto $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, tal que $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in I$ e $\|\lambda\|_1 = 1$, o problema do planejador é dado por

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_i\}_{i\in I}} \quad & \sum_{i\in I} \lambda_i U_i(c_i) \\
s.a. \quad & \sum_{i\in I} c_t^i(s^t) \leq \sum_{i\in I} y_t^i(s^t), \quad \forall (t, s^t)
\end{aligned}
$$

O lagrangeano é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \sum_i \lambda_i U_i(c_i) + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \left[\sum_i (y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)) \right] \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t) \beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \left[\sum_i (y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)) \right]
\end{aligned}
$$

Então a condição de primeira ordem é dada por:

$$
[c_t^i(s^t)] : \quad \beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \Pr(s^t) - \lambda_i^{-1} \theta_t(s^t) = 0
$$

Novamente, como a função de utilidade é duas vezes continuamente diferenciável, estritamente côncava e estritamente crescente, sabemos que sua primeira derivada admite uma inversa. Além disso, podemos tomar uma família de referência, digamos a família A e temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_A'(c_t^A(s^t))} &= \frac{\lambda_A}{\lambda_i} \\
u_i'(c_t^i(s^t)) &= u_A'(c_t^A(s^t)) \frac{\lambda_A}{\lambda_i} \\
c_t^i(s^t) &= (u_i')^{-1} \left\{ u_A'(c_t^A(s^t)) \frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right\}
\end{aligned}
$$

Observe que o consumo ótimo do problema descentralizado e do problema do planejador são bem similares

$$
c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1} \left\{ u_A'(c_t^A(s^t)) \cdot \frac{\mu_i}{\mu_A} \right\}, \quad c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1} \left\{ u_A'(c_t^A(s^t)) \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right\}
$$

De fato, para o planejador implementar a mesma alocação do problema descentralizados, precisamos que as $\frac{\lambda_j}{\lambda_i} = \frac{\mu_i}{\mu_j}$ para quaisquer pares i, j. Com a normalização $\sum_i \lambda_i = 1$, essa escolha determina unicamente $\{\lambda_i\}$.

Esse resultado é um reflexo do Primeiro e do Segundo Teorema do Bem-estar. Pelo primeiro, as alocações de equilíbrio competitivo são eficientes no sentido de Pareto. Pelo segundo, conseguimos chegar na alocação eficiente do planejador via mercados competitivos com uma distribuição adequada das riquezas.

(c) Defina a solução do problema anterior $W\left(\{Y(s^t)\}_{t,s^t}\right)$ como a utilidade da família representativa dessa economia. Qual o formato funcional da utilidade dessa família representativa?

Resposta:

Ao invés de usarmos a normalização de $q_0^0(s^0) = 1$, usemos

$$Y_0(s^0)^{-\sigma} = q_0^0(s^0) = \mu_i^{-1} u_i'(c_0^i(s^0)) \quad \forall i$$

de forma que temos $\mu_i = c_0^i(s^0)^{-\sigma} Y_0(s^0)^{\sigma}$. Pelo enunciado, W é o valor que maximiza a utilidade da família representativa, de modo que,

$$\begin{aligned}
W\left(\left\{Y(s^t)\right\}_{t,s^t}\right) &= W\left(\left\{C(s^t)\right\}_{t,s^t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_i(c_i) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_i^t(s^t)) \\
&= \sum_i \mu_i^{-1} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[\alpha_i \cdot C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \sum_i c_i^0(s^0)^{\sigma} Y_0(s^0)^{-\sigma} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \left[\frac{c_i^0(s^0)}{Y_0(s^0)} \cdot C(s^t)\right]^{1-\sigma} \\
&= Y_0(s^0)^{-\sigma} \sum_i \sum_t \sum_{s^t} c_i^0(s^0)^{\sigma} \cdot \Pr(s^t)\beta^t \left[\frac{c_i^0(s^0)}{Y_0(s^0)}\right]^{1-\sigma} \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \frac{Y_0(s^0)^{-\sigma}}{[Y_0(s^0)]^{1-\sigma}} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \sum_i c_i^0(s^0) \\
&= \frac{Y_0(s^0)^{1-\sigma}}{[Y_0(s^0)]^{1-\sigma}} \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \qquad \text{da factibilidade em } t = 0 \\
&= \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma}
\end{aligned}$$

Notando que conseguimos o exato mesmo formato apenas pela normalização de preços. Houvéssemos escolhido outro (como $q_0^0(s^0) = 1$) teríamos uma solução com formato análogo apenas com uma constante multiplicativa. Isso não é problema, pois ainda corresponde as mesmas preferências.

(d) Mostre que o formato funcional da utilidade da família representativa não muda (a não ser por uma constante multiplicativa) com $\{\lambda_i\}$ e identifique preços sombra que sustentariam a alocação agregada.

Resposta:

Similar ao problema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
W\left(\left\{Y(s^t)\right\}_{t,s^t}\right) &= W\left(\left\{C(s^t)\right\}_{t,s^t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \lambda_i U_i(c_i) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_i^t(s^t)) \\
&= \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[\alpha_i \cdot C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
&= \left[\sum_i \lambda_i \cdot \alpha_i^{1-\sigma}\right] \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t \frac{[C(s^t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma}
\end{aligned}$$

Note que o termo multiplicativo inicial, no caso com a normalização da questão anterior, é unitário. Os preços sombra $\xi_t(s^t)$ que sustentariam a alocação agregada serão:

$$\xi_t(s^t) = \theta_t(s^t) = \lambda_i \Pr(s^t)\beta^t \left[\alpha_i Y_t(s^t)\right]^{-\sigma}$$

note que são iguais aos preços de estado de Arrow-Debreu $q_t^0(s^t)$. Isso se dá como uma consequência de que eles representam a mesma restrição de recursos, embora de formas distintas: um implicitamente, como no caso do planejador, e outra explicitamente, por meio dos preços de AD.

Exercício 2 (Equilíbrio AD)

Considere uma economia de trocas com dois consumidores que vivem para sempre e possuem preferências idênticas, dadas por:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t)$$

Ambos os consumidores têm dotações aleatórias dependentes na variável de estado exógena s_t. Os s_t's são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e com mesma distribuição (i.i.d.). Mais especificamente, para cada t, $s_t = H$ com probabilidade π e $s_t = L$ com probabilidade $1-\pi$, onde π não é dependente no tempo ou na realização dos estados anteriores. Caso $s_t = H$, a dotação do primeiro consumidor será igual a 2 e a do segundo consumidor será 1; caso $s_t = L$, a dotação do primeiro consumidor será 1 e a do segundo, 0. Os mercados são completos.

(a) Defina um equilíbrio competitivo com trocas na data zero (Arrow-Debreu) nessa economia.

Assuma que os consumidores tomam decisões antes de observar o estado no período 0.

Resposta:

Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu é um par de sequência de preços e alocações contingentes $\{q_t^0(s^t), \{c_t^i(s^t)\}_{i \in I}\}_{t,s^t}$, tal que

1.) Dado o vetor de preços, O consumidor $i \in \{A, B\}$ (A é o primeiro consumidor), soluciona o problema

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t^i(s^t)\}_{t,s^t}} \quad & \mathbb{E}_0 \left[\sum_t^\infty \beta^t \ln(c_t^i(s^t)) \right] \\
s.a. \quad & \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t)
\end{aligned}
$$

(A esperança é tomara em respeito à todas possíveis histórias condizentes no tempo)

2.) Há market-clearing

$$c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) = y_t^A(s^t) + y_t^B(s^t) \quad \forall (t, s^t)$$

(b) Determine a alocação de equilíbrio competitivo em termos de primitivas.

Resposta:

O lagrangeano é dado por

$$\mathscr{L} = \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t) \beta^t \ln(c_t^i(s^t)) + \mu_i \cdot \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)[y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)]$$

As condições de primeira ordem seguem , já substituindo as probabilidades:

$$
\begin{aligned}
[c_t^i(s_t = L)] : \quad & \beta^t (1 - \pi) \left(\frac{1}{c_t^i(s_t = L)} \right) - \mu_i q_t^0(s_t = L) = 0 \\
[c_t^i(s_t = H)] : \quad & \beta^t \pi \left(\frac{1}{c_t^i(s_t = H)} \right) - \mu_i q_t^0(s_t = H) = 0
\end{aligned}
$$

Vamos definir, como numerário, $q_0^0(s_0 = H)$, então temos que o multiplicador de cada consumir satisfaz (em $t = 0$)

$$\mu_i = \frac{\pi}{c_0^i(s_0 = H)}$$

De foram geral, pegando a relação das condições de primeira ordem do tempo t e $s_0 = H$, obtemos:

$$\frac{\beta^t \Pr(s^t)}{c_t^i(s^t)} = \frac{\pi q_t^0(s^t)}{c_0^i(s_0 = H)} \quad \Rightarrow \quad c_t^i(s^t) = \frac{\beta^t \Pr(s^t)}{\pi q_t^0(s^t)} c_0^i(s_0 = H)$$

Para um dado período e estado, podemos dividir a condição de primeira ordem dos agentes e obter:

$$\frac{c_t^A(s^t)}{c_t^B(s^t)} = \frac{c_0^A(s_0 = H)}{c_0^B(s_0 = H)}$$

Pela condição de market clearing, temos o sistema:

$$\begin{cases} c_t^A(s_t) + c_t^B(s_t) = 3 = Y_t(s_t) & \text{se } s_t = H \\ c_t^A(s_t) + c_t^B(s_t) = 1 = Y_t(s_t) & \text{se } s_t = L \end{cases}$$

e que $q_t^0(s^t) = \beta^t \Pr(s^t) \frac{c_0^i(s_0=H)}{c_t^i(s^t)}$.

Note que, da restrição orçamentária intertemporal do agente B, temos que

$$\begin{aligned} \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) \cdot \left[c_t^B(s^t) - y_t^B(s^t)\right] &= 0 \\ \sum_t \beta^t \sum_{s^t} \Pr(s^t) \frac{c_0^B(s_0 = H)}{c_t^B(s^t)} \cdot \left[c_t^B(s^t) - y_t^B(s^t)\right] &= 0 \\ \pi \cdot \left[\frac{c_0^B(s_0 = H)}{c_t^B(s_t = H)} \cdot [c_t^B(s_t = H) - 1]\right] + (1 - \pi) \cdot \left[\frac{c_0^B(s_0 = H)}{c_t^B(s_t = L)} \cdot [c_t^B(s_t = L) - 0]\right] &= 0 \\ \pi \cdot \left[1 - \frac{1}{c_t^B(s_t = H)}\right] + (1 - \pi) \cdot [1] &= 0 \\ \frac{\pi}{c_t^B(s_t = H)} &= 1 \end{aligned}$$

Então, sabendo que $c_t^B(s_t = H) = \pi$, recuperamos $c_t^A(s_t = H) = 3 - \pi$. E segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{c_t^A(s_t = L)}{c_t^B(s_t = L)} &= \frac{c_0^A(s_0 = H)}{c_0^B(s_0 = H)} = \frac{3 - \pi}{\pi} \\
\frac{c_t^A(s_t = L)}{1 - c_t^A(s_t = L)} &= \frac{3 - \pi}{\pi} \\
(3 - \pi + \pi)c_t^A(s_t = L) &= 3 - \pi \\
c_t^A(s_t = L) &= 1 - \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

E assim, temos que $c_t^B(s_t = L) = \frac{\pi}{3}$. Resumindo, temos que:

$$c_t^A(s_t = H) = 3 - \pi, \quad c_t^B(s_t = H) = \pi, \quad c_t^A(s_t = L) = 1 - \frac{\pi}{3}, \quad c_t^B(s_t = L) = \frac{\pi}{3}$$

Note que, apesar de os dois agentes estarem pior no estado $s_t = L$, a possibilidade de troca melhora a alocação dos agentes, comparada a se estivessem em autarquia. Em específico, o agente B promete sempre "pagar" π no estado bom para o agente A em troca de "receber" $\frac{1}{\pi}$ no estado ruim (em que, caso contrário, teria consumo zero).

(c) Determine os preços dos ativos de Arrow em termos de primitivas.

Resposta:

Vamos ter os *price kernel* de forma $\tilde{Q}_t(s_{t+1}|s_t)$. Para gerarem a mesma alocação que o equilíbrio de Arrow-Debreu, eles devem "atualizar" os preços do estado anterior, isto é:

$$q_{t+1}^0(s^{t+1}) = \tilde{Q}_t(s_{t+1}|s_t)q_t^0(s^t)$$

De forma que segue:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_t(H|H) &= \frac{\beta^{t+1}\Pr(s^{t-1})\Pr(s_t=H)\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_{t+1}^A(s_{t+1}=H)}}{\beta^t\Pr(s^{t-1})\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_t^A(s_t=H)}} = \beta\pi, \\
\tilde{Q}_t(L|H) &= \frac{\beta^{t+1}\Pr(s^{t-1})\Pr(s_t=L)\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_{t+1}^A(s_{t+1}=L)}}{\beta^t\Pr(s^{t-1})\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_t^A(s_t=H)}} = \beta(1-\pi)\frac{c_t^A(s_t=H)}{c_{t+1}^A(s_{t+1}=L)} = 3\beta(1-\pi), \\
\tilde{Q}_t(H|L) &= \frac{\beta^{t+1}\Pr(s^{t-1})\Pr(s_t=H)\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_{t+1}^A(s_{t+1}=H)}}{\beta^t\Pr(s^{t-1})\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_t^A(s_t=L)}} = \beta\pi\frac{c_t^A(s_t=L)}{c_{t+1}^A(s_{t+1}=H)} = \frac{\beta\pi}{3}, \\
\tilde{Q}_t(L|L) &= \frac{\beta^{t+1}\Pr(s^{t-1})\Pr(s_t=L)\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_{t+1}^A(s_{t+1}=L)}}{\beta^t\Pr(s^{t-1})\frac{c_0^A(s_0=H)}{c_t^A(s_t=L)}} = \beta(1-\pi),
\end{aligned}
$$

(d) Use a sua resposta do item (c) para determinar a taxa de retorno médio de um título livre de risco (de um período) nessa economia. Um título livre de risco é aquele que paga uma unidade de consumo no próximo período independentemente da realização do estado e o retorno de um ativo é definido como seu payoff divido pelo seu preço.

Resposta:

Um título livre de risco é um ativo que garante uma unidade de consumo no próximo período independentemente do estado do mundo em $t+1$. Assim, o preço desse título, $Q_t^{RF}(s_t)$, é a soma dos preços dos dois ativos de Arrow:

$$
\begin{aligned}
Q_t^{RF}(s_t=H) &= \tilde{Q}_t(H|H) + \tilde{Q}_t(L|H) = \beta\pi + 3\beta(1-\pi) = \beta(3-2\pi) \\
Q_t^{RF}(s_t=L) &= \tilde{Q}_t(H|L) + \tilde{Q}_t(L|L) = \frac{\beta}{3}\pi + \beta(1-\pi) = \frac{\beta}{3}(3-2\pi)
\end{aligned}
$$

Portanto, a taxa de retorno médio de um título livre de risco é dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(R^{RF}) &= \Pr(s_t=H)\frac{1}{Q_t^{RF}(s_t=H)} + \Pr(s_t=L)\frac{1}{Q_t^{RF}(s_t=L)} \\
&= \frac{\pi}{\beta(3-2\pi)} + \frac{(1-\pi)}{\frac{\beta}{3}(3-2\pi)} = \frac{1}{\beta}
\end{aligned}
$$

Exercício 3 (Algoritmo de Negishi)

O Algoritmo de Negishi pode ser utilizado para computar o equilíbrio de Arrow-Debreu em mercados completos. Por meio de um processo iterativo, atualizamos os valores dos multiplicadores de Lagrange associados à restrição orçamentária do problema dos agentes de modo a encontrar sequências de consumo e preços de equilíbrio. O código-base para a resolução deste exercício se encontra na wiki da disciplina.

Neste caso específico, a economia é povoada por três agentes. Em $t = 0$ o estado s_0 ocorre com certeza. Há duas possíveis realizações de estado no tempo $t = 1$, $S = \{1, 2\}$, cada um com a mesma probabilidade de ocorrência. No cenário base, os agentes recebem uma unidade de dotação em cada estado.

(a) Compute os multiplicadores de Lagrange para o cenário base. Interprete os resultados. Qual é a sequência de consumo para cada agente e quais são os preços de equilíbrio? (Atenção com a definição dos possíveis pares de preço e consumo)

Resposta:

Para este item, não é necessário fazer alterações no código, apenas rodá-lo. Nesse caso, os multiplicadores são iguais entre os agentes. Dado que os agentes são idênticos em todas as esferas relevantes, esse é o resultado esperado pela simetria. Em cada estado possível, os agentes vão consumir uma unidade de consumo, sua dotação. Os preços são iguais à

$$q_0^0(s^0) = 1, \quad q_1^0(s^1 = [0, 1]) = q_1^0(s^1 = [0, 2]) = 0.475$$

Os preços em $t = 1$ refletem o desconto ($\beta = 0.95$) e que a chance de cair em cada estado é apenas 0.5.

(b) Suponha agora que o segundo consumidor receba duas unidades de dotação caso $s_1 = 1$, e três unidades de dotação caso $s_1 = 2$. Compute os pesos de Pareto associados aos agentes e interprete os resultados. Qual é a sequência de consumo para cada agente e quais são os preços de equilíbrio? (Atenção com a definição dos possíveis pares de preço e quantidades)

Resposta:

Como o consumir está mais rico, o multiplicador de Lagrange associado a ele torna-se menor. De fato, os multiplicadores ficaram como:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7826 & 1.0029 \end{bmatrix}$$

Para calcular os pesos de Pareto associados aos agentes, podemos calcular por meio da sua relação inversa com os multiplicadores de Lagrange.

O que nos dá

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.2777 & 0.9971 \end{bmatrix}$$

O peso de Pareto associado ao segundo consumidor aumenta. O planejador atribui maior peso ao agente mais rico por questões de eficiência, visando maximizar o bem estar agregado.

Com relação às sequências de consumo, temos que, para o agente A, $c^A(s = \{0, 1\}) = \{0.828, 1.104\}$, $c^A(s = \{0, 2\}) = \{0.828, 1.380\}$;

para o agente B, $c^A(s = \{0, 1\}) = \{1.349, 1.799\}$, $c^A(s = \{0, 2\}) = \{1.349, 2.249\}$;

para o agente C, $c^A(s = \{0, 1\}) = \{0.821, 1.095\}$, $c^A(s = \{0, 2\}) = \{0.821, 1.369\}$.

Já a sequência de preços é $q_0^0(s^0) = 1.098$, $q_0^1(s^1 = \{0, 1\}) = 0.451$, $q_0^1(s^1 = \{0, 2\}) = 0.404$.

(c) Repita o procedimento dos itens anteriores, mantendo a hipótese sobre dotações do ítem (b), mas também modificando a probabilidade de realização do estado 1 para 0.3 e a probabilidade de realização do estado 2 para 0.7. Interprete o que acontece com preços e pesos de Pareto.

Resposta:

É análogo ao exercício anterior. Nesse caso, temos que, para o item (a), mudando as probabilidades:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.285 & 0.6649 \end{bmatrix}$$

E para o item (b):

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7640 & 1.0003 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1.1108 & 0.2742 & 0.5722 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.3088 & 0.9971 \end{bmatrix}$$

Exercício 4 (Compartilhamento de risco – P1, 2024)

Suponha um grupo finito I de indivíduos. A renda de cada indivíduo é determinada a cada período como uma função do estado atual da natureza $s_t \in S$ (em que S é finito e enumerável): $y_t^i(s_t)$. Denote a renda agregada por $Y_t(s_t) \equiv \sum_{i\in I} y_t^i(s_t)$. Suponha que a utilidade para o indivíduo i é dada por

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u^i(c_t)\right]$$

que, sob nossas hipóteses, é

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t} \beta^t u(c_t(s^t))\mathbb{P}(s^t)$$

(a) Suponha que não há tecnologia de poupança agregada e que o estado da natureza é observável. Escreva o problema de Pareto para pesos de Pareto dados $\{\lambda^i\}_{i\in I}$. Mostre que, no ótimo, o consumo para o indivíduo i, $c_t^i(s^t)$, pode ser escrito como dependendo apenas da renda agregada daquele período, i.e., uma vez que controlamos por $Y_t(s^t)$, o consumo não depende adicionalmente de s^t.

Resposta:

O problema de Pareto é:

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_i\}_{i\in I}} \quad & \sum_{i\in I} \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) \\
s.a. \quad & \sum_{i\in I} c_t^i(s^t) \leq \sum_{i\in I} y_t^i(s^t), \quad \forall (t, s^t)
\end{aligned}$$

O lagrangeano é dado por

$$\mathscr{L} = \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} \Pr(s^t)\beta^t u_i(c_t^i(s^t)) + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \left[\sum_i (y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t))\right]$$

Com as condições de primeira ordem:

$$[c_t^i(s^t)]: \quad \beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) \cdot \Pr(s^t) - \lambda_i^{-1}\theta_t(s^t), \quad \forall (i, t, s^t)$$

Novamente, como a função de utilidade é duas vezes continuamente diferenciável, estritamente côncava e estritamente crescente, sabemos que sua primeira derivada admite uma inversa. Além disso, podemos tomar uma família de referência, digamos a família A e temos que:

$$c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1}\left\{u_A'(c_t^A(s^t))\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right\}$$

Substituindo na restrição orçamentária:

$$Y_t(s^t) = C_t(s^t) = \sum_{i\neq A}(u_i')^{-1}\left\{u_A'(c_t^A(s^t))\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right\} + c_t^A(s^t)$$

Definindo implicitamente que $c_t^A(s^t) = f^A(Y_t(s^t), \{\lambda_i\}_{i\in I})$.

(b) Agora, suponha alternativamente que a função utilidade seja da forma CRRA

$$u^i(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

em que a aversão ao risco σ é a mesma para todos os indivíduos. Mostre que o consumo toma a forma

$$c_t^i = \alpha^i C_t$$

com as constantes a^i satisfazendo $\sum_{i\in I}\alpha^i = 1$. Como as constants a^i dependem dos pesos de Pareto λ^i?

Resposta:

Substituindo na questão anterior a forma funcional da utilidade, obtemos:

$$c_t^i(s^t) = c_t^A(s^t)\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Usando a relação com o consumo agregado, obtemos:

$$C_t(s^t) = \sum_i\left[c_t^A(s^t)\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right] \quad\Rightarrow\quad c_t^A(s^t) = C_t(s^t)\left[\sum_i\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}$$

Observe que $\alpha^i = \left[\sum_i\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^{-1}$ é constante. Conseguindo a relação desejada. Além disso, observe que:

$$
\begin{aligned}
\sum_A \alpha^A &= \sum_A \left[\sum_i \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \right]^{-1} \\
&= \sum_A \left[\sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_A} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{-1} \\
&= \sum_A \frac{\left[\sum_i (\lambda_i)^{\frac{1}{\sigma}} \right]^{-1}}{\lambda_A^{-\frac{1}{\sigma}}} \\
&= \frac{\sum_A \lambda_A^{\frac{1}{\sigma}}}{\left[\sum_i \lambda_i^{\frac{1}{\sigma}} \right]} = 1
\end{aligned}
$$

(c) Agora, suponha que a função utilidade seja da forma CARA

$$
u^i(c) = -\frac{e^{-\gamma^i c}}{\gamma^i}
$$

e mostre que o consumo toma a forma

$$
c_t^i = a^i C_t + b^i
$$

em que a^i e b^i são constantes e $\sum a^i = 1$ e $\sum b^i = 0$. Como a distribuição de γ^i e dos pesos de Pareto λ^i afeta a^i e b^i?

Resposta:

Aplicando o formato específico da função utilidade, chegamos que:

$$
c_t^i(s^t) = -\ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right) \frac{1}{\gamma^i} + \frac{\gamma^A}{\gamma^i} c_t^A(s^t)
$$

Somando entre os agentes, obtemos:

$$
C_t(s^t) = \sum_i \left[\frac{\gamma^A}{\gamma^i} c_t^A(s^t) - \ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right) \frac{1}{\gamma^i} \right]
$$

$$
\Rightarrow c_t^A(s^t) = \left[\sum_i \frac{\gamma^A}{\gamma^i} \right]^{-1} C_t(s^t) + \left[\sum_i \frac{\gamma^A}{\gamma^i} \right]^{-1} \sum_i \ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right) \frac{1}{\gamma^i}
$$

Então, ao denotarmos:

$$
\begin{cases}
a^i = \left[\sum_i \frac{\gamma^A}{\gamma^i}\right]^{-1} \\
b^i = \left[\sum_i \frac{\gamma^A}{\gamma^i}\right]^{-1} \sum_i \ln\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i}
\end{cases}
$$

mostramos o pedido no enunciado. Para mostrar que $\sum_i a^i = 1$ é similar ao caso anterior. Já para mostrar que $\sum_i b^i = 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_A b^A &= \sum_A \left\{ \left[\sum_i \frac{\gamma^A}{\gamma^i}\right]^{-1} \sum_i \log\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_i}\right)\frac{1}{\gamma^i} \right\} \\
&= \sum_A \left\{ \frac{1}{\gamma^A}\left[\sum_i \frac{1}{\gamma^i}\right]^{-1} \sum_i \left[\log(\lambda_A) - \log(\lambda_i)\right]\frac{1}{\gamma^i} \right\} \\
&= \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\gamma^i}} \sum_A \left\{ \frac{1}{\gamma^A} \sum_i \left[\log(\lambda_A) - \log(\lambda_i)\right]\frac{1}{\gamma^i} \right\} \\
&= \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\gamma^i}} \left\{ \sum_A \sum_i \log(\lambda_A)\frac{1}{\gamma^i\gamma^A} - \sum_A \sum_i \log(\lambda_i)\frac{1}{\gamma^i\gamma^A} \right\} = 0
\end{aligned}
$$

Do ponto de vista econômico, γ^i pode ser interpretado como o grau de aversão ao risco do agente i. Como esse parâmetro afeta negativamente os coeficientes a^i e b^i, conclui-se que agentes mais avessos ao risco tendem a consumir e transferir menos, refletindo sua menor disposição a se expor a incertezas. Já o peso de Pareto λ_i influencia positivamente apenas o parâmetro b^i, preservando a mesma interpretação atribuída no item (b), embora o seu efeito seja captado de forma distinta nesta formulação.

(d) Agora, generalizemos o resultado do item (a), trabalhando ainda com preferência gerais. Suponha que exista uma tecnologia de armazenamento: se no período $t-1$ uma quantidade $S_t(s^{t-1}) \geq 0$ for reservada para armazenamento, então no período t uma quantidade $(1 + r_t(s_t))S_t(s^{t-1})$ estará disponível (para consumo ou armazenamento)além de qualquer renda corrente $Y_t(s^t)$. Mostre que um resultado semelhante ao de (a) vale, mas agora devemos condicionar ao consumo total $C(s^t) \equiv \sum_{i\in I} c_t^i(s^t)$.

Resposta:

Com a introdução da tecnologia, a restrição orçamentária muda para

$$
S_{t+1}(s^t) + \sum_i c_t^i(s^t) \leq Y_t(s^t) + \big(1 + r_t(s^t)\big)\, S_t(s^{t+1}) \tag{1}
$$

Então, o novo problema torna-se:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t^i(s^t)\},\{S_{t+1}(s^t)\}} \quad & \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} u^i(c_t^i(s^t)) \Pr(s^t) \\
\text{s.a.} \quad & (1),\ \forall (t, s^t) \\
& S_t(s^t) \geq 0, \quad \forall (t, s^t)
\end{aligned}
$$

O lagrangeano, então, é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = & \sum_i \lambda_i \sum_t \sum_{s^t} u^i(c_t^i(s^t)) \Pr(s^t) + \\
& + \sum_t \sum_{s^t} \theta_t(s^t) \cdot \big(C_t(s^t) + S_{t+1}(s^t) - Y_t(s^t) - (1 + r_t(s_t)) S_t(s^{t-1}) \big)
\end{aligned}
$$

Note que, escolhendo $S_{t+1}(s^t)$, implicitamente também estaremos escolhendo $c_t(s^t)$. Portanto, focarei apenas nele. A Condição de primeira ordem é dada por:

$$
[S_{t+1}(s^t)]: \quad \lambda_i \Pr(s^t) \beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) + \theta_t(s^t) = 0
$$

de forma que, para uma família de referência A:

$$
\lambda_i \Pr(s^t) \beta^t u_i'(c_t^i(s^t)) = \lambda_A \Pr(s^t) \beta^t u_A'(c_t^A(s^t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_i'(c_t^i(s^t))}{u_A'(c_t^A(s^t))} = \frac{\lambda_A}{\lambda_i}
$$

Seguindo os mesmos passos, conseguimos isolar o consumo do agente i e agregar, obtendo:

$$
C_t(s^t) = \sum_{i \neq A} (u_i')^{-1} \left\{ u_A'(c_t^A(s^t)) \frac{\lambda_A}{\lambda_i} \right\} + c_t^A(s^t)
$$

então, implicitamente, definimos uma função de consumo para a família A, de forma que:

$$
c_t^A(s^t) = f^A(C_t(s^t), \{\lambda_i\}_{i \in I})
$$

Exercício 5 (Equilíbrio com crenças heterogêneas – P1, 2023)

Uma economia de trocas puras é povoada por dois consumidores. O consumidor i tem preferências sobre sequências de consumo contingentes no tempo $\{c_t^i\}$ ordenadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \, u(c_t^i(s^t)) \, \pi_t^i(s^t),$$

em que $u(c) = \ln(c)$ e $\pi_t^i(s^t)$ é a probabilidade que o consumidor i atribui à história s^t.

O espaço de estado é invariante no tempo. Em particular, $s_t \in S = \{\Delta, 0.5, 1-\Delta\}$ para todo $t \geq 0$ e $\Delta \in [0,1]$. Somente duas histórias são possíveis para $t = 0, 1, 2, ...$:

$$\begin{array}{llllll} \text{história 1:} & 0.5, & 1-\Delta, & 1-\Delta, & 1-\Delta, & \dots \\ \text{história 2:} & 0.5, & \Delta, & \Delta, & \Delta, & \dots \end{array}$$

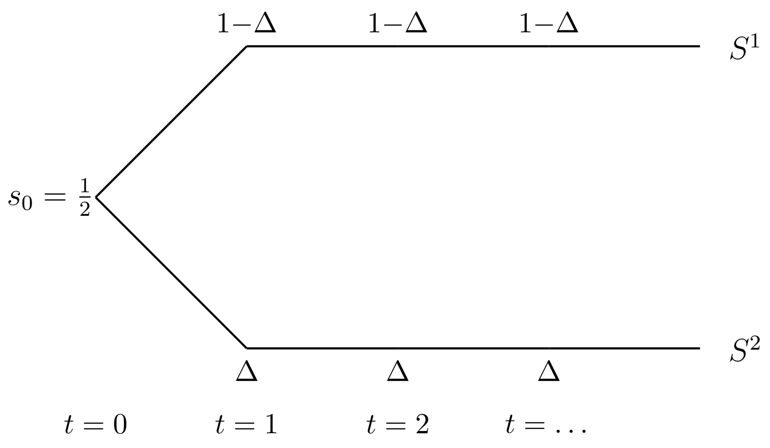
O consumidor 1 atribui probabilidade p à história 1 e probabilidade $(1-p)$ à história 2, enquanto o consumidor 2 atribui probabilidade $(1-p)$ à história 1 e probabilidade p à história 2.

As dotações dos consumidores são dadas por:

$$y_t^1 = s_t$$
$$y_t^2 = 1 - s_t.$$

(a) Descreva a incerteza do problema em um diagrama de árvore.

Resposta:



(b) Defina um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu, em que mercados completos de consumo contingente a cada história estão abertos na data $t = 0$.

Resposta:

Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu é uma distribuição inicial s_0, um sistema de preços $\{q_t^0(s^t)\}_{t,s^t}$ e uma alocação de consumo $\{c_t^i(s^t)\}_{t,s^t,i}$ tal que

1.) Dado a distribuição de riqueza s_0, o consumo $\{c_t^i(s^t)\}_{t,s^t}$ é a solução do problema de maximização da família i

$$\begin{aligned} \max_{c_t^i(s^t)} & \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} \beta^t \pi_t^i(s^t) u(c_t^i(s^t)) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \end{aligned}$$

2.) A condição de market clearing é satisfeita

$$\sum_i c_t^i(s^t) = \sum_i y_t^i(s^t), \quad \forall (t, s^t)$$

(c) Compute este equilíbrio para $\Delta = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{1}{2}$. Descreva a alocação de consumo, os preços do consumo contingente e a desigualdade de consumo realizada para cada história.

Resposta:

Vamos chamar nossos consumidores de $i \in \{A, B\}$. Nosso lagrangeano é dado por:

$$\mathscr{L} = \sum_t \sum_{s^t} \beta^t \pi_t^i(s^t) u^i(c_t^i(s^t)) + \mu^i \left[\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t)(y_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)) \right]$$

A condição de primeira ordem é, então,

$$[c_t^i(s^t)] : \quad \beta^t \pi_t^i(s^t) u_i'(c_t^i(s^t)) - \mu^i q_t^0(s^t) = 0 \quad \forall (t, s^t, i)$$

e, novamente, conseguimos expressar consumo como função dos primitivos do modelo:

$$c_t^i(s^t) = (u_i')^{-1} \left\{ \frac{q_t^0(s^t)\mu^i}{\beta^t \pi^i(s^t)} \right\} \quad \Rightarrow \quad c_t^i(s^t) = \frac{\beta^t \pi_t^i(s^t)}{q_t^0(s^t)\mu^i}$$

em específico, para $t = 0, s^0$ temos

$$\mu^i = \frac{1}{q_0^0(s^0)c_0^i(s^0)} = (c_0^i(s^0))^{-1}, \qquad \text{usando a normalização } q_0^0(s^0) = 1$$

e assim, podemos expressar o consumo em t, s^t como

$$c_t^i(s^t) = \beta^t \pi_t^i(s^t) \frac{c_0^i(s^0)}{q_t^0(s^t)}$$

Observe que temos, então, $\pi_t^A(s^t) = \pi_t^B(s^t) = 1/2$, usando a condição de market clearing, segue-se que

$$\begin{aligned} c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t) &= y_t^A(s^t) + y_t^B(s^t) \\ \beta^t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q_t^0(s^t)} \cdot \underbrace{[c_0^A(s^0) + c_0^B(s^0)]}_{=1} &= 1 \end{aligned}$$

Então, temos que $q_t^0(s^t) = \frac{\beta^t}{2}$ para todos os períodos $t \geq 1$, para $t = 0$, o preço é normalizado para 1, ou seja:

$$\{q_t^0(s^t)\}_{\forall s^t} = \left\{1, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \cdots\right\}$$

Agora usando a restrição orçamentária das famílias,

$$\begin{aligned} \sum_t \sum_s^t q_t^0(s^t) c_t^i(s^t) &= \sum_t \sum_s^t q_t^0(s^t) y_t^i(s^t) \\ c_0^i(s^0) \sum_t \beta^t \underbrace{\sum_{s^t} \pi_t^i(s^t)}_{=1} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{t\geq 1} \underbrace{\sum_{s^t} q_t^0(s^t)}_{\frac{\beta^t}{2} + \frac{\beta^t}{2}} + q_0^0(s^0) \right] \\ c_0^i(s^0) \frac{1}{1-\beta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\beta}{1-\beta} + 1 \right] \quad \Rightarrow \quad c_0^i(s^0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

E segue que $c_t^i(s^t) = \beta^t \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{\beta^t} = \frac{1}{2} \; \forall (t, s^t, i)$.

(d) Agora compute este equilíbrio para um caso geral, com $p \geq \frac{1}{2}$ e $\Delta \in [0,1]$.

Resposta:

Temos que, para todo (t, s^t), $1 = c_t^A(s^t) + c_t^B(s^t)$. Usando a condição de primeira ordem, temos

$$q_t^0(s^t) = \beta^t \left[\pi_t^A(s^t) c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t) c_0^B(s_0)\right]$$

focando no agente $A, (y_t^A(s^t) = s_t)$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) c_t^A(s^t) &= \sum_t \sum_{s^t} q_t^0(s^t) y_t^A(s^t) \\
\sum_t \beta^t \sum_{s^t} \pi_t^A(s^t) c_0^A(s_0) &= \sum_t \beta^t \sum_{s^t} [\pi_t^A(s^t) c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t) c_0^B(s_0)] \cdot s_t \\
\frac{c_0^A(s_0)}{(1-\beta)} &= c_0^A(s_0) \underbrace{\sum_t \beta^t \sum_{s^t} \pi_t^A(s^t) s_t}_{(A)} + (1 - c_0^A(s_0)) \underbrace{\sum_t \beta^t \sum_{s^t} \pi_t^B(s^t) s_t}_{(B)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(A)]: \quad & \left[1\left(p\frac{1}{2} + (1-p)\frac{1}{2}\right) + \beta\left(p(1-\Delta) + (1-p)\Delta\right) + \cdots\right] = \frac{1}{2} + \frac{\beta(p(1-\Delta) + (1-p)\Delta)}{(1-\beta)} \\
[(B)]: \quad & \left[1\left(p\frac{1}{2} + (1-p)\frac{1}{2}\right) + \beta\left((1-p)(1-\Delta) + p\Delta\right) + \cdots\right] = \frac{1}{2} + \frac{\beta((1-p)(1-\Delta) + p\Delta)}{(1-\beta)}
\end{aligned}$$

Chamamos de $(p + \Delta - 2p\Delta) = \alpha$ e segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{c_0^A(s^0)}{1-\beta} &= c_0^A \frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta} \alpha c_0^A(s^0) + \frac{1}{2} + \\
&\quad + \frac{\beta}{1-\beta}(1-\alpha) - c_0^A(s^0) \frac{1}{2} \frac{\beta}{1-\beta}(1-\alpha) \\
\frac{c_0^A(s^0)}{1-\beta} &= \frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta}(1-\alpha) + c_0^A(s^0) \left[\underbrace{\frac{\beta}{(1-\beta)}\alpha - \frac{\beta}{1-\beta}(1-\alpha)}_{\frac{\beta}{1-\beta}(2\alpha-1)}\right] \\
c_0^A(s^0) \cdot \left[\frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta}(2\alpha - 1)\right] &= \frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\alpha}(1-\alpha) \\
c_0^A(s^0) &= \frac{1}{1-\beta(2\alpha-1)} \cdot \left[\frac{1}{2} 91 - \beta + \beta(1-\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{1-\beta(2\alpha-1)} \cdot \left[(1-\beta(2\alpha-1))\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ai conseguimos recuperar o consumo a partir de

$$c_t^i(s^t) = \frac{\pi_t^i(s^t)c_0^i(s^0)}{\pi_t^A(s^t)c_0^A(s_0) + \pi_t^B(s^t)c_0^B(s_0)}$$

Obtendo, então,

$$\begin{aligned}
\left\{c_t^A(\bar{s}^t = \{0.5, 1-\Delta, 1-\Delta, \dots\})\right\} &= \left\{\frac{1}{2}, p, p, \dots\right\} \\
\left\{c_t^A(s^t = \{0.5, \Delta, \Delta, \dots\})\right\} &= \left\{\frac{1}{2}, 1-p, 1-p, \dots\right\} \\
\left\{c_t^B(\bar{s}^t = \{0.5, 1-\Delta, 1-\Delta, \dots\})\right\} &= \left\{\frac{1}{2}, 1-p, 1-p, \dots\right\} \\
\left\{c_t^B(s^t = \{0.5, \Delta, \Delta, \dots\})\right\} &= \left\{\frac{1}{2}, p, p, \dots\right\} \\
\left\{q_t^0(\bar{s}^t = \{0.5, 1-\Delta, 1-\Delta, \dots\})\right\} &= \left\{1, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \dots\right\} \\
\left\{q_t^0(s^t = \{0.5, \Delta, \Delta, \dots\})\right\} &= \left\{1, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta^2}{2}, \dots\right\}
\end{aligned}$$

(e) Como os preços e a desigualdade de consumo dependem de Δ? E de p? Explique.

Resposta:

O consumo é invariante em relação ao parâmetro Δ, ao passo que os preços não dependem nem de Δ nem de p. Cada agente aloca relativamente mais consumo nos históricos que considera mais prováveis, de acordo com suas crenças subjetivas. Os preços, por sua vez, refletem os valores de equilíbrio atribuídos pelos agentes com base em suas preferências e crenças sobre a realização dos estados da natureza. Tais preços emergem da interação entre oferta e demanda por planos de consumo, no contexto de trocas intertemporais realizadas com o objetivo de maximizar a utilidade ao longo do tempo.
