Notas de Aula
Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

FGV EPGE

4. Conjuntos Convexos e Funções Convexas

Objetivos

- Compreender o conceito de conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$.
- Interpretar geometricamente a convexidade de conjuntos.
- Definir e identificar funções convexas e côncavas.
- Entender a relação entre convexidade da função e convexidade do domínio.
- Interpretar geometricamente a convexidade de uma função.

4.1 Conjuntos Convexos

Definição 4.1 (Conjunto convexo).

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se, para quaisquer dois pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$, tem-se:

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in D \quad \text{para todo } \lambda \in [0,1].$$

Geometricamente, isso significa que, ao escolher quaisquer dois pontos no conjunto, o segmento de reta que os conecta está inteiramente contido em C.

Exemplo 4.1.

A bola fechada centrada na origem, $\overline{B(0,r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \le r\}$, é um conjunto convexo.

Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$, logo, $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \le r$ e $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \le r$. Queremos mostrar que o ponto do segmento

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2,\ \lambda \in [0,1],$$

também pertence à bola, isto é, que $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \le r$.
Pela desigualdade triangular e pela homogeneidade da norma,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| &= \left\|\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + (1-\lambda)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)\right\| \\ &\le \lambda\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| + (1-\lambda)\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| \\ &\le \lambda r + (1-\lambda) r = r.\end{aligned}$$

Logo, $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| \le r$, e portanto $\mathbf{z} \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$. Como $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e λ eram arbitrários, conclui-se que $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$ é convexo.

É claro que, para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, a bola fechada centrada em $\mathbf{x}_0$,

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le r\},$$

também é um conjunto convexo.

Exemplo 4.2.

Qualquer *hiperplano* em $\mathbb{R}^n$ é convexo.

De forma geral, um hiperplano é um conjunto da forma

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle a, \mathbf{x} \rangle = b\}, \quad a \in \mathbb{R}^n,\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ e $\lambda \in [0,1]$. Como $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$, tem-se $a \cdot \mathbf{x} = b$ e $a \cdot \mathbf{y} = b$. Considere o ponto do segmento $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$. Então

$$a \cdot \mathbf{z} = a \cdot \big(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\big) = \lambda(a \cdot \mathbf{x}) + (1-\lambda)(a \cdot \mathbf{y}) = \lambda b + (1-\lambda) b = b.$$

Logo $\mathbf{z} \in H$. Como $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e λ eram arbitrários, o segmento entre quaisquer dois pontos de H permanece em H, isto é, H é convexo.

Exercício 4.1.

Mostre que as caixas em $\mathbb{R}^n$ são conjuntos convexos: $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Exercício 4.2.

Mostre que **não** são convexos os conjuntos a seguir:

(a) Círculos: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$.

(b) Curvas fechadas que não incluem a região interna.

(c) União de duas bolas disjuntas.

Exercício 4.3.

Seja $C_i,\ i \in \mathbb{N}$, uma família de conjuntos convexos.

(a) Mostre que o conjunto interseção $C = \bigcap_{i=1} C_i$ também é convexo.

(b) Dê o exemplo de um conjunto união $C = \bigcup_{i=1} C_i$ que não é convexo.

4.2 Funções Convexas

Definição 4.2 (Função convexa).

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é *convexa* se, para todos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$, tem-se:

$$f\big(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\big) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \text{para todo } \lambda \in [0,1].$$

Analogamente, f é dita *côncava* se vale a desigualdade contrária:

$$f\big(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\big) \ge \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \text{para todo } \lambda \in [0,1].$$

A exigência de que o domínio da função seja um conjunto convexo é essencial na definição de função convexa. Isso se deve ao fato de que ambas desigualdades envolvem a avaliação de f no ponto $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, que pertence ao *segmento de reta* entre $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Para que essa expressão faça sentido, é necessário que esse ponto também pertença a D. Isso é garantido exatamente quando D é um conjunto convexo como vimos na seção anterior.

Exemplo 4.3.

Lembremos de Cálculo I que a função $f(x) = x^2$ é convexa.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0,1]$. Temos:

$$\begin{aligned}
\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big)^2 &= \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 \\
&= \underbrace{\big(\lambda - \lambda(1-\lambda)\big)}_{\lambda^2} x_1^2 + \underbrace{\big((1-\lambda) - \lambda(1-\lambda)\big)}_{(1-\lambda)^2} x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 \\
&= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 \; - \; \lambda(1-\lambda)\big(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2\big) \\
&= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 \; - \; \lambda(1-\lambda)\,(x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Como $\lambda(1-\lambda) \geq 0$ e $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, temos $-\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2 \ \leq\ 0$, logo,

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Conclui-se que f é convexa.

Exemplo 4.4.

A função $f(x,y) = x^2 + y^2$ é convexa.

Lembremos que f é a função norma: $f(x,y) = x^2 + y^2 = \|x\|^2$. Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in [0,1]$. Temos:

$$\begin{aligned}
\|\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}\|^2 &= \lambda^2\|\mathbf{u}\|^2 + (1-\lambda)^2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \\
&= \underbrace{\big(\lambda - \lambda(1-\lambda)\big)}_{\lambda^2}\|\mathbf{u}\|^2 + \underbrace{\big((1-\lambda) - \lambda(1-\lambda)\big)}_{(1-\lambda)^2}\|\mathbf{v}\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \\
&= \lambda\|\mathbf{u}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{v}\|^2 - \lambda(1-\lambda)\big(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\big) \\
&= \lambda\|\mathbf{u}\|^2 + (1-\lambda)\|\mathbf{v}\|^2 - \underbrace{\lambda(1-\lambda)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2}_{\geq 0}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f\big(\lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}\big) \leq \lambda f(\mathbf{u}) + (1-\lambda) f(\mathbf{v}),$$

o que mostra que f é convexa.

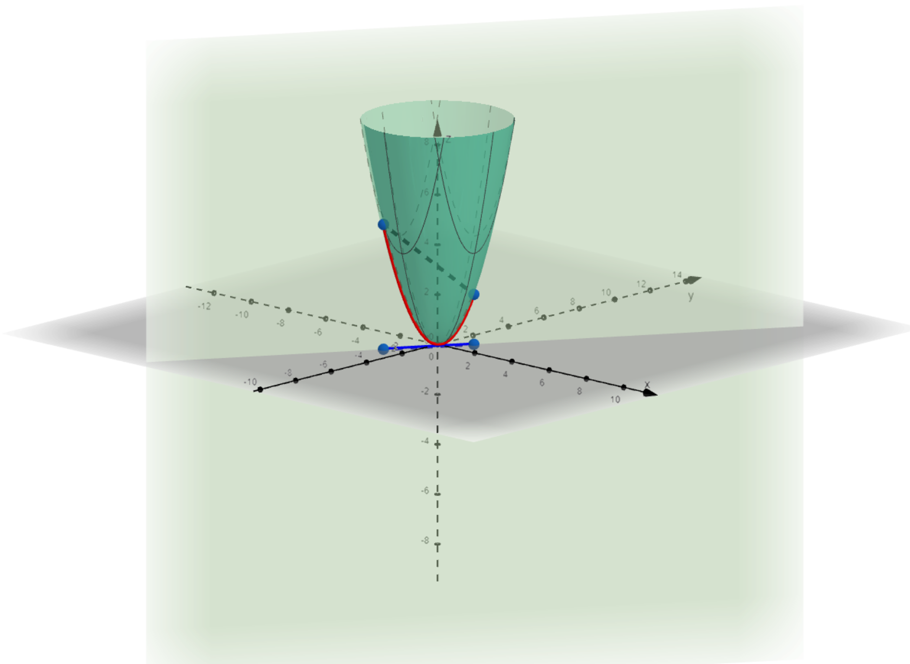
Observemos que a mesma prova vale para mostrar que a função norma definida sobre o espaço euclidiano de dimensão $n > 2$ é convexa.

Podemos usar o exemplo anterior para ilustrar geometricamente o conceito de função convexa (vide figura a seguir).

Dado dois pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$, a combinação convexa desses pontos é definida por

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \qquad \lambda \in [0,1],$$

o que representa um ponto no segmento de reta que liga $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ no plano xy (representado na figura pelo segmento azul).



Consideremos agora os pontos do gráfico da função associados a esses dois pontos: $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ e $(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2))$, no espaço tridimensional. O segmento de reta que liga esses dois pontos (em preto tracejado na figura) é dado por:

$$\lambda(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)) + (1-\lambda)(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)), \qquad \lambda \in [0,1].$$

Assim, a altura desses pontos é dada por:

$$\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2). \tag{4.1}$$

Por outro lado, a altura dos pontos do gráfico de f que estão sobre o segmento no plano xy (pontos localizados sobre a curva vermelha na figura) é exatamente

$$f\left(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\right). \tag{4.2}$$

No caso do exemplo, a curva vermelha fica sempre abaixo do segmento, ou seja, as alturas dos pontos que estão sobre a curva vermelha (4.2), são menores que as alturas dos pontos que estão sobre o segmento (4.1). Isto é:

$$f\left(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_2),$$

que é a definição de função convexa.

Exemplo 4.5.

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \langle a, \mathbf{x}\rangle + b, \qquad a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}.$$

Então f é simultaneamente *convexa* e *côncava*.

Tome $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ e $\lambda \in [0,1]$. Como D é convexo, $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in D$. Então:

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) &= \langle a, \lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\rangle + b \\
&= \lambda\,\langle a,\mathbf{x}_1\rangle + (1-\lambda)\,\langle a,\mathbf{x}_2\rangle + b. \\
&= \lambda\,\langle a,\mathbf{x}_1\rangle + (1-\lambda)\,\langle a,\mathbf{x}_2\rangle + (\lambda+(1-\lambda))\,b \\
&= \lambda\,(\langle a,\mathbf{x}_1\rangle + b) + (1-\lambda)\,(\langle a,\mathbf{x}_2\rangle + b) \\
&= \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2).
\end{aligned}$$

Como há igualdade, segue que:

$$f\left(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_2)$$

e

$$f\big(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\big) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

ou seja, f é convexa e côncava.

Observe que a função apresentada no Exemplo 4.5 é linear, e seu gráfico é um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$. Geometricamente, qualquer segmento de reta que liga dois pontos desse hiperplano está inteiramente contido nele, o que está de pleno acordo com a igualdade obtida analiticamente.

Exercício 4.4.

Mostre que as seguintes funções são convexas.

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \max\{x,y\}$

Exercício 4.5.

Mostre que se f é convexa, então $-f$ é côncava, e vice-versa.