LISTA 6 - TEORIA Q E QUESTÕES DIVERSAS

OPCIONAL

Exercício 1 (Teoria Q com custos quadráticos)

Considere uma firma em horizonte infinito em tempo discreto. Lucros operacionais são dados por

$$\pi_t = A_t F(K_t), \qquad F'(K) > 0, \quad F''(K) < 0$$

O capital segue $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$, com custo de ajustamento dado por

$$G(I_t, K_t) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 K_t.$$

A produtividade segue um processo AR(1), $\log A_t = \rho \log A_{t-1} + \varepsilon_t$, com $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. O desconto é dado por $R^{-1} = \beta$.

(a) Escreva o problema sequência e o problema recursivo da firma. Defina q_t como o preço sombra de K_{t+1}. (**Dica:** Não esqueça da condição de transversalidade; preço sombra de K_{t+1} é o co-estado do problema recursivo (i.e., $\partial V / \partial K'$)).

(b) Mostre que a condição de primeira ordem implica a relação (estática) de $q_t = 1 + \phi(I_t/K_t)$ e derive a equação de Euler em q.

(c) Linearize o sistema em torno do estado estacionário (i.e., $A = \bar{A}$, $q = 1$, $i = \delta$) e obtenha $\hat{i}_t = \kappa_0 + \kappa_1 \hat{q}_t$, explicitando κ_1 em função de (ϕ, β).

(d) (Resultado de Hayashi) Enuncie as condições sob as quais o q marginal $=$ q médio e discuta sua utilidade empírica quando só q médio é observável.

(e) Argumente os sinais esperados sob neutralidade ao risco e com/sem não linearidades relevantes:

$$\frac{\partial (I/K)}{\partial A}, \quad \frac{\partial (I/K)}{\partial \sigma^2}$$

Exercício 2 (Teoria Q com irreversibilidade)

Considere o mesmo ambiente do Exercício 1, exceto que ao vender capital a firma recebe apenas uma fração $s \in (0,1)$ do preço, com $s \equiv 1-\lambda$. Seja $I_t^+ \geq 0$ o investimento bruto e $I_t^- \geq 0$ o desinvestimento bruto. Defina o investimento líquido $I_t \equiv I_t^+ - I_t^-$ e a taxa $i_t \equiv I_t/K_t$.O custo de ajustamento é $G(I_t, K_t) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 K_t$.

(a) O problema sequencial da firma é dado por

$$\max_{\{I_t^+, I_t^-\}_{t\geq 0}} \mathbb{E}_0\left[\sum_{t\geq 0} \beta^t \Big\{\pi_t - I_t^+ - G(I_t, K_t) + s\, I_t^-\Big\}\right] \quad \text{s.a.} \quad K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t,\ I_t^+, I_t^- \geq 0\ \forall t$$

além da condição de transversalidade. Dê a formulação recursiva $V(K_t, A_t)$.

(b) Derive as condições de primeira ordem do problema e mostre que surgem dois preços sombras e caracterize as “regras de gatilho” para investir/desinvestir.

(c) Demonstre que existe uma banda de inação em q e caracterize os limiares e discuta o papel dos parâmetros (λ, ϕ, β).

(d) Explique por que maior incerteza (maior σ) amplia a inação.

Exercício 3 (Teoria Q com dois tipos de capital e colateral)

Considere que existem dois tipos de capital: K_T (tangível) e K_I (intangível). A produção é

$$Y_t = A_t\, F(K_{T,t}, K_{I,t}), \quad F \text{ neoclássica (Inada), estritamente crescente e côncava.}$$

As leis de movimento do capital são

$$K_{T,t+1} = (1-\delta_T)K_{T,t} + I_{T,t}, \qquad K_{I,t+1} = (1-\delta_I)K_{I,t} + I_{I,t}.$$

Os custos de ajustamento são separáveis:

$$G_T(I_{T,t}, K_{T,t}) = \frac{\phi_T}{2}\left(\tfrac{I_{T,t}}{K_{T,t}}\right)^2 K_{T,t}, \qquad G_I(I_{I,t}, K_{I,t}) = \frac{\phi_I}{2}\left(\tfrac{I_{I,t}}{K_{I,t}}\right)^2 K_{I,t}.$$

O preço do bem de investimento é normalizado a 1. A firma escolhe $\{I_{T,t}, I_{I,t}, D_{t+1}, X_t\}_{t\geq 0}$ para maximizar

$$\max\ \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, X_t \right\}$$

sujeita ao orçamento

$$X_t \;=\; A_t F(K_{T,t}, K_{I,t}) \;-\; \big[I_{T,t} + G_T(I_{T,t}, K_{T,t})\big] \;-\; \big[I_{I,t} + G_I(I_{I,t}, K_{I,t})\big] \;-\; R\, D_t \;+\; D_{t+1},$$

à restrição de colateral intertemporal $D_{t+1} \;\leq\; \kappa\, K_{T,t+1}$, e às condições de transversalidade usuais. Aqui $R > 0$ é o fator bruto livre de risco.

(a) Escreva o Lagrangiano com multiplicadores λ_t (orçamento) e μ_{t+1} (colateral). Derive q_T e q_I (preços sombras marginais).Mostre que, quando a restrição de collateral "liga" ($\mu_{t+1} > 0$), surge um *wedge* entre q_T e q_I. Interprete economicamente esse wedge.

(b) Estabeleça condições sob as quais I_T reage mais do que I_I a um choque positivo de produtividade A_t. Mostre que um afrouxamento financeiro ($\kappa \uparrow$) aumenta I_T relativamente a I_I quando a restrição fica ativa, e discuta o papel de $(\phi_T, \phi_I, \delta_T, \delta_I)$ nessa assimetria.

(c) Discuta como o Q médio $Q_t \equiv \frac{\text{valor de mercado da firma}}{\text{custo de reposição do capital reprodutível}}$ pode se distanciar do q marginal quando há capital intangível (não reprodutível como "máquina") e rendas.

Exercício 4 (HJB e diagrama de fases)

Uma firma escolhe investimento $I(t)$ para maximizar o valor presente dos pagamentos aos acionistas com taxa de desconto contínua $\rho > 0$. A tecnologia é

$$Y(t) \;=\; A(t)\,K(t)^{\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1),$$

e o capital evolui segundo

$$\dot{K}(t) \;=\; I(t) - \delta\,K(t), \qquad \delta > 0.$$

O custo de ajuste é do tipo

$$\Psi(I(t), K(t)) \;=\; \frac{\gamma}{2}\left(\frac{I(t)}{K(t)}\right)^2 K(t), \qquad \gamma > 0,$$

com preço do bem de investimento normalizado a 1. Seja $V(K; A)$ o valor da firma e defina o preço-sombra do capital como

$$q(t) \;\equiv\; \frac{\partial V}{\partial K}(K(t); A(t)).$$

Salvo indicação em contrário, tome $A(t) \equiv A > 0$ constante. Imponha a condição de transversalidade

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\,q(t)\,K(t) = 0.$$

(a) Escreva a HJB da firma e derive a condição de primeira ordem em I e encontre a política ótima. (**Dica:** o fluxo de renda é dado pela produção menos o custo de investimento e ajustamento).

(b) Usando $q = V'(K)$ e a regra de envelope, derive a dinâmica de q e escreva o sistema:

$$\dot{K} \;=\; \Big(\frac{q-1}{\gamma} - \delta\Big)K, \qquad \dot{q} \;=\; (\rho+\delta)\,q \;-\; \alpha A K^{\alpha-1} \;-\; \frac{(q-1)^2}{2\gamma}.$$

(c) Caracterize os nulclines (i.e., $\dot{K} = 0, \dot{q} = 0$). Caracterize o estado estacionário (K^*, q^*).

(d) Linearize o sistema em torno de (K^*, q^*) e escreva o jacobiano. Calcule os autovalores do Jacobiano. Esboce o diagrama de fases, indicando a trajetória estável. (**Dica:** um autovalor positivo e outro negativo representam um *saddle path*.)