Lista 3 - Ciclos Reais de Negócios (RBC)
Gabarito

Exercício 1 (RBC)

Este exercício apresenta uma discussão sobre alguns aspectos teóricos subjacentes à construção dos modelos de Real Business Cycle (RBC). Antes de mais nada, devemos apresentar as hipóteses dessa questão:

- **Tempo:** o tempo é discreto, $t = 0, 1, 2, ...$, e o horizonte é infinito
- **Preferências:** a economia é composta por um grande número de indivíduos iguais que vivem infinitamente e maximizam seu fluxo esperado de utilidade, dado por $\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$ em que $\beta \in (0, 1)$. Supõe-se que $u(c, l)$ é côncava e crescente no consumo c e no lazer l e duas vezes continuamente diferenciável.
- **Dotações:** a única dotação de cada indivíduo é uma unidade de tempo, que pode ser divida entre trabalho n e lazer l.
- **Tecnologia:** $F(K, N)$ é duas vezes continuamente diferenciável, côncava e homogênea de grau 1. Além disso, $F(K, N)$ satisfaz as condições de Inada com respeito ao capital. Supomos que o produto da economia pode ser usado para consumo ou investimento, $y_t = c_t + i_t$, e que o capital se deprecia a uma taxa $\delta \in (0, 1)$, sem crescimento.
- **Incerteza:** o produto y_t é dado por $y_t = A_t F(K_t, N_t)$, em que A_t é um choque aleatório de produtividade, cuja lei de movimento é dada por $\ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t$, onde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ e $\rho \in (0, 1)$.

Tendo em vista as hipóteses acima, responda aos itens abaixo.

(a) Monte o problema do planejador central na versão sequencial e na versão recursiva. Obtenha as condições de primeira ordem do problema recursivo e monte o sistema de equações que permite caracterizar as funções políticas de capital, consumo e de oferta de trabalho

---

Na versão sequencial, o problema do planejador é:

$$
\begin{aligned}
\max_{C,K,N} \quad & \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, 1 - N_t) \\
\text{s.t.} \quad & Y_t = A_t F(K_t, N_t) \\
& Y_t = C_t + I_t \\
& K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t \\
& K_0 > 0, C_t \geq 0, 0 \leq N_t \leq 1 \\
& \ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Já o problema na versão recursiva é dado por:

$$V(K,A) = \max_{C,N,K'} \left\{ u(C,1-N) + \beta\, \mathbb{E}_{A'|A} V(K',A') \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad C + K' = AF(K,N) + (1-\delta)K$$
$$C \geq 0, 0 \leq N \leq 1$$
$$\ln(A_t) = \rho\, \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Seja λ o multiplicador de Lagrange associado à primeira restrição. As condições de primeira ordem do problema recursivo são:

$$[C]: \quad u_c(C,1-N) = \lambda$$
$$[N]: \quad u_n(C,1-N) = \lambda\, AF_n(K,N)$$
$$[K']: \quad \beta\, \mathbb{E}_{A'|A} V_k(K',A') = \lambda$$
$$[\lambda]: \quad C + K' = AF(K,N) + (1-\delta)K$$

Do Teorema do Envelope,

$$u_c(C,1-N) = \beta \mathbb{E}_{A'|A} u_c(C',1-N')\, [A'F_k(K',N') + 1 - \delta]$$

$$u_n(C,1-N) = u_c(C,1-N)[AF_n(K,N)]$$

$$C + K' = AF(K,N) + (1-\delta)K$$

que são as expressões que caracterizam o equilíbrio.

(b) Suponha que os consumidores sejam donos do estoque de capital e que façam três decisões inter-relacionadas: quanto trabalho oferecer n, quanto capital acumular k' e quanto consumir c. Monte o problema do consumidor representativo na versão recursiva e o problema da firma. Defina um equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.

Dados os preços $w = w(K,A)$, $R = R(K,A)$ e uma lei de movimento para o capital agregado $K' = H(K,A)$, o problema do consumidor é descrito por

$$V(k,K,A) = \max_{c,n,k'} u(c,1-n) + \beta\, \mathbb{E}_{A'|A} V(k',K',A')$$

$$\text{s.t.} \quad c + k' = w(K,A)n + (1 + R(K,A) - \delta)k$$
$$c \geq 0; \quad 0 \leq N \leq 1$$
$$\ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t$$
$$K' = H(K,A)$$

Já o problema da firma é tal que ela decide, em cada período de tempo, quanto contratar dos fatores capital e trabalho:

$$\max_{K,N} \quad AF(K,N) - wN - RK$$

$$\text{FOC:} \quad [K]: \quad AF_k(K,N) = R$$
$$[N]: \quad AF(_n(K,N) = w$$

Definição: um equilíbrio competitivo recursivo é uma função valor $V(k, K, A)$, funlçoes políticas de consumo $c(k, K, A)$, trabalho $n(k, K, A)$ e poupança $g(k, K, A)$, leis de movimento de capital $H(K, A)$ e trabalho $G(K, A)$, assim como funções de preços $w(K, A)$ e $R(K, A)$ tais que:

(i) Dados os preços $w = w(K, A)$, $R = R(K, A)$ e a lei de movimento de capital $H(K, A)$, as funções valor e políticas de consumo, trabalho e poupança são solução para o problema do consumidor;

(ii) Dados os preços w e R, as condições de primeira ordem do problema das firmas são satisfeitas;

(iii) Há *market clearing*: $c(k, K, A) + g(k, K, A) = AF(K, n(K, K, A)) + (1 - \delta)K$, para todo K e A;

(iv) Condição de consistência:
a) $K' = H(K, A) = g(K, K, A)$, para todo K e A;
b) $G(K, A) = N(K, K, A) = 1 - L(K, K, A)$.

Observação: Note que precisei definir duas consistências no item (iv), pois temos a escolha de trabalho nesse modelo. Ainda que a lei de movimento de trabalho não entre como restrição no problema dos agentes (pois n é suficientemente determinado por K, k e A), é importante a garantia de consistência na hora definir o ECR, para que $G(K, A) = N(K, K, A) = 1 - L(K, K, A)$ seja satisfeito em equilíbrio.

(c) Obtenha as condições de primeira ordem dos problemas do item (b). O que pode ser afirmado a respeito da conexão entre os problemas dos itens anteriores? Você pode apenas argumentar o que seria feito para demonstrar a equivalência entre os problemas.

Seja μ o multiplicador de Lagrange associado à restrição orçamentária, temos as seguintes CPOs:

$$\begin{aligned}
[c]: &\quad u_c(c, 1-n) = \mu \\
[N]: &\quad u_n(c, 1-n) = \mu w(K, A) \\
[k']: &\quad \beta \mathbb{E}_{A'|A} V_k(k', A') = \mu \\
[\mu]: &\quad c + k' = nw(K, A) + (1 + R(K, A) - \delta)k
\end{aligned}$$

Do Teorema do Envelope, temos que:

$$u_c(c, 1-n) = \beta \mathbb{E}_{A'|A}\, u_c(c', 1-n')[1 + R(K, A) - \delta]$$

$$u_n(c, 1-n) = u_c(c, 1-n) w(K, A)$$

$$c + k' = nw(K, A) + (1 + R(K, A) - \delta)k$$

Veja que, uma vez substituindo as expressões de salário e juros pelas CPOs das firmas, teremos o mesmo sistema do problema do planejador. Esta equivalência reflete o Primeiro e Segundo Teoremas do Bem-estar.

(d) Suponha, agora, que exista um governo nessa economia e que ele cobra impostos sobre a renda do trabalho por meio de uma taxa τ, que pode ser uma função do estado agregado. O governo pega essa receita e gasta com bens públicos que não geram utilidade diretamente para o agente representativo. Diante dessa alteração, repita o que foi feito no item (b).

O problema do firma não apresenta alterações. O problema do consumidor, por sua vez, é reescrito da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
V(k,K,A) = \max_{c,n,k'} \ & u(c,1-n) + \beta \mathbb{E}_{A'|A} V(k',K',A') \\
\text{s.t.} \quad & c + k' = (1-\tau(K,A))w(K,A)n + (1 + R(K,A) - \delta)k \\
& c \geq 0; 0 \leq N \leq 1 \\
& \ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t \\
& K' = H(K,A)
\end{aligned}
$$

Definição: um equilíbrio competitivo recursivo é uma função valor $V(k,K,A)$, funções políticas de consumo $c(k,K,A)$, trabalho $n(k,K,A)$ e poupança $g(k,K,A)$, leis de movimento de capital $H(K,A)$ e trabalho $G(K,A)$, funções preços $w(K,A)$, $R(K,A)$ e uma função de imposto sobre a renda do trabalho $\tau(K,A)$ tais que:

(i) Dados os preços $w = w(K,A)$, $R = R(K,A)$, o imposto $\tau(K,A)$, e a lei de movimento de capital $H(K,A)$, as funções valor e políticas de consumo, trabalho e poupança são solução do problema do consumidor;

(ii) Dados os preços w, R, as condições de primeira ordem das firmas são satisfeitas;

(iii) Há *market clearing*: $c(k,K,A) + g(k,K,A) = AF(K, n(K,K,A)) + (1-\delta)K$ para todo K e A;

(iv) Condição de consistência:
a) $K' = H(K,A) = g(K,K,A)$, para todo K e A;
b) $G(K,A) = N(K,K,A) = 1 - L(K,K,A)$.

(e) A alocação eficiente referente ao problema do item (d) coincidirá com as alocações do equilíbrio competitivo recursivo? Justifique. Algo mudaria se o governo transferisse a receita desses impostos por meio de uma transferência *lump-sum* ao invés de gastar em bens públicos?

A menos que a alíquota da taxa seja nula, a imposição de um imposto sobre a renda do trabalho irá alterar o preço relativo do trabalho relativamente ao problema anterior, de modo que as alocações serão distintas em ambos os problemas.

Para melhor exemplificar essa divergência entre o caso do planejador vs. o descentralizado, note que o problema do planejador é dado por:

$$
\begin{aligned}
V(K,A) = \max_{C,N,K'} \ & u(C,1-N) + \beta \mathbb{E}_{A'|A} V(K',A') \\
\text{s.t.} \quad & C + K' + G = AF(K,N) + (1-\delta)K \\
& C \geq 0; 0 \leq N \leq 1 \\
& \ln(A_t) = \rho \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t \\
& K' = H(K,A)
\end{aligned}
$$

Atenção ao componente G na restrição orçamentária, que representa os gastos do governo para financiar a taxação neste caso.

Tirando as C.P.O.'s:

$$u_C(C, 1-N) = \beta \mathbb{E}_{A'|A} \{u_C(C', 1-N')[A'F_K(K', N') + 1 - \delta]\}$$

$$u_C(C, 1-N)AF_N(K, N) = u_N(C, 1-N)$$

Agora, compare isso com as C.P.O.'s do caso descentralizado, onde teríamos:

$$u_c(c, 1-n) = \beta \mathbb{E}_{A'|A}\, u_c(c', 1-n')[1 + R(K, A) - \delta]$$

$$u_n(c, 1-n) = u_c(c, 1-n)(1 - \tau(K, A))w(K, A)$$

Note que o imposto NÃO afeta a decisão ótima no caso do planejador, pois G não aparece na equação de Euler e nem na restrição Intratemporal de escolha de trabalho. No entanto, isto não vem ao caso para o imposto τ no problema descentralizado. Ademais, ao considerarmos $w(K, A) = AF_N(K, N)$ e $R(K, A) = AF_K(K, N)$, o problema se torna equivalente com o descentralizado sem taxação, pelos teoremas de bem-estar. Devolver as taxações prévias ao somar um componente lump-sum aos indivíduos também não seria o suficiente, pois isso não muda o fato de que a C.P.O.'s continuam diferentes.

Caso tenha mais curiosidade sobre como distorções afetam os problemas, cheque o gabarito da Q4 desta lista do Cézar, pág. 10.

Exercício 2 (Oferta de trabalho e RBC sem capital)

Suponha uma economia sem capital com um agente representativo com preferências descritas por

$$\sum_t \beta^t \left(C_t - \frac{N_t^{(1+\phi)}}{1+\phi} \right),$$

em que N_t são horas trabalhadas e a produção é dada por

$$Y_t = Z_t N_t$$

e Z_t é a uma sequência pré-determinada de TFP.

(a) Derive o efeito de equilíbrio de um choque de TFP sobre emprego, produto e a taxa de juros.

O modelo descrito acima é tal que o agente tem utilidade linear no consumo e desutilidade no emprego, para uma dada elasticidade da oferta de trabalho ϕ. A ausência de capital na economia implica que toda a produção é destinada ao consumo, $Y_t = C_t$. Nesse modelo sem investimento, a taxa de juros é determinada pela preferência intertemporal do agente, sendo constante no tempo e igual a $R = \frac{1}{\beta}$ — isso significa que os agentes dão valor ao consumo presente e futuro de acordo com o fator de desconto.

Para encontrarmos a taxa de juros, escrevemos a Equação de Euler:

$$u_C(C_t) = \beta(1 + r^f)u_C(C_{t+1})$$

Mas, como $u_C(C) = 1$ neste caso (pois o componente de consumo é linear aqui), obtemos:

$$1 + r^f = \frac{1}{\beta} = R$$

Montamos o lagrangeano, subtituindo a restrição:

$$\mathcal{L} = \sum_t \beta^t \left(Z_t N_t - \frac{N^{1+\phi}}{1+\phi} \right)$$

$$\text{FOC:}[N_t]: \quad Z_t - N_t^{\phi} = 0$$

de modo que, no equilíbrio, $N_t^* = Z_t^{\frac{1}{\phi}}$ e $Y_t^* = C_t^* = Z_t N_t^* = Z_t^{\frac{1+\phi}{\phi}}$.
Assim, podemos derivar o efeito de um choque de TFP, Z_t, sobre as variáveis de interesse:

- *Emprego:* $dN_t/dZ_t = \frac{1}{\phi} Z_t^{(\frac{1-\phi}{\phi})}$
- *Produto:* $dY_t/dZ_t = \frac{1+\phi}{\phi} Z_t^{\frac{1}{\phi}}$
- *Taxa de juros:* $dR/dZ_t = 0$

(b) O que acontece se houver crescimento de longo prazo de Z_t?

Podemos tomar o limite de Z_t, para diferentes valores de ϕ:

$$\lim_{Z_t \to \infty} N_t^* = 0, \quad \text{caso } \phi < 0$$
$$\lim_{Z_t \to \infty} N_t^* = \infty, \quad \text{caso } \phi > 0$$

Vamos analisar ambos os casos. No primeiro, com $\phi < 0$ (elasticidade de oferta de trabalho negativa), há um aumento de produto e capital com Z_t maior; contudo, dado que a desutilidade do trabalho é crescente na oferta de trabalho, o agente é incentivado a reduzir sua oferta de trabalho em decorrência de um aumento no consumo. No limite, isso implica em oferta de trabalho decrescente a zero, para valores de consumo muito altos.

No segundo caso, com $\phi > 0$ (elasticidade de oferta de trabalho positiva), o agente é incentivado a aumentar sua oferta de trabalho em resposta a um aumento no consumo, dado que a desutilidade de trabalho diminui na oferta de trabalho. Isso implica em sequências de oferta de trabalho maiores em decorrência de uma sequência crescente de TFP.

(c) Como preferências da forma

$$\log(C_t) - \frac{N_t^{(1+\phi)}}{1+\phi}$$

afetariam o resultado acima? Interprete.

Montamos o lagrangeano novamente:

$$\mathcal{L} = \sum_t \beta^t \left(\log(Z_t N_t) - \frac{N^{1+\phi}}{1+\phi} \right)$$

$$\text{FOC:}[N_t]: \quad \frac{Z_t}{Z_t N_t} - N_t^{-\phi} = 0$$

de modo que, no equilíbrio, $N_t^* = 1$ e $Y_t^* = C_t^* = Z_t N_t^* = Z_t$.

A oferta de trabalho é constante em 1, e as sequências de produto/consumo seguem os valores da sequência de TFP. Assim, choques de TFP não variam a oferta de trabalho nem a taxa de juros, e têm efeito 1 para 1 no produto.

A diferença com a formulação original é sutil, mas importante. A introdução de concavidade nas preferências sobre o consumo é essencial para garantir um custo de oportunidade intertemporal, de modo a garantir suavização do consumo — quando a TFP é maior, produto e consumo são maiores, mas a utilidade marginal decrescente em C_t implica que os ganhos de uma unidade adicional de consumo são menores. No caso da utilidade linear, esse mecanismo de suavização intertemporal não é observado.

(d) Em que medida o modelo com estas novas preferências teria sucesso e insucesso em replicar os fatos estilizados de RBC?

O modelo não consegue replicar vários dos outros fatos estilizados de RBC. Vamos relembrar alguns deles: (i) consumo procíclico, com um menor volatilidade relativamente ao produto; (ii) investimento fortemente procíclico e mais volátil do que o produto; (iii) variações nas horas trabalhadas são responsáveis por dois terços da variação do produto, enquanto variações na TFP são responsáveis por um terço, e estoque de capital não tem impacto.

No presente modelo, a ausência de capital impossibilita o investimento, a oferta de trabalho é inelástica, e o consumo apresenta a mesma volatilidade do que o produto. Dos fatos estilizados, apenas o comportamento procíclico do consumo é observado.

Exercício 3 (Simulação de um RBC)

Em aula, vimos uma solução analítica para o seguinte modelo de RBC:

$$\max_{C_t, N_t, I_t} \mathbb{E} \sum \beta^t [\log C_t + \chi \log(1 - N_t)]$$

$$\text{s.a.} \quad C_t + I_t = z_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$$

$$K_{t+1} = I_t,$$

$$\ln z_t = \rho \ln z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1).$$

Ou seja, fizemos hipóteses específicas sobre a função utilidade e a depreciação completa do capital. Neste modelo, chegamos à representação do log do produto como um processo AR(2):

$$\log Y_{t+1} = (1 - \rho)\, \Gamma + (\rho + \alpha) \log Y_t - \alpha\rho \log Y_{t-1} + \sigma \varepsilon_{t+1}$$

em que $\Gamma \equiv \alpha \log s + (1 - \alpha) \log \bar{N}$ e $\log z_{t+1} = \rho \log z_t + \sigma \varepsilon_{t+1}$. O código base para realização deste exercício se encontra na wiki.

(a) Compute as autocorrelações de primeira e segunda ordem do log do produto.

```
# Computing first/second order autocorrelations of output
autocorr_1 = autocorr(y, 1) # apx. 0.9691
autocorr_2 = autocorr(y, 2) # apx. 0.9197
```

(b) Agora, volte ao modelo e veja como as variáveis se relacionam. Compute as autocorrelações de primeira ordem do consumo, investimento, horas trabalhadas, e TFP (resíduo de Solow). Use as variáveis em log.

```
# (b) Calculate first order autocorrelation of...
# consumption
cons = log(1-alpha*beta).+y
autocorr_cons = autocorr(cons, 1) # apx. 0.9691
# investment
inv = log(alpha*beta).+y
autocorr_inv = autocorr(inv, 1) # apx. 0.9691
# TFP
autocorr_TFP = autocorr(z,1) # apx. 0.9397
```

Note que, para encontrar uma solução analítica do modelo, supomos que a oferta de trabalho é inelástica, $N_t = \bar{N} = 1$.

(c) Compute o desvio padrão das variáveis do item anterior, assim como do produto. Discuta quanto da variação do (log do) produto é associada à variação de horas, estoque de capital e TFP (todas em logs). Dica: olhe para a função de produção, em logs.

```
# (c) Calculate standard deviation of...
# output
stdev_y = std(y) # apx. 3.92
# consumption
stdev_cons = std(cons) # apx. 3.92
# investment
stdev_inv = std(inv) # apx. 3.92
# TFP
stdev_TFP = std(z) # apx. 2.68

# share of variation in Y attributed to...
# capital
k_share = stdev_inv/stdev_y # 1.0
# TFP
z_share = stdev_TFP/stdev_y # apx. 0.68
```

Aproximadamente 68% da variação do produto está associada a variações na TFP. Calculamos o estoque de capital/investimento como fração do produto, assim, é de se esperar que tenham o mesmo desvio padrão. Adicionalmente, dado que o número de horas trabalhadas é fixo, com valor unitário, a variável não contribui para variações do produto.

(d) Como você interpretaria os resultados dos itens anteriores à luz dos fatos estilizados da literatura de *Real Business Cycles*?

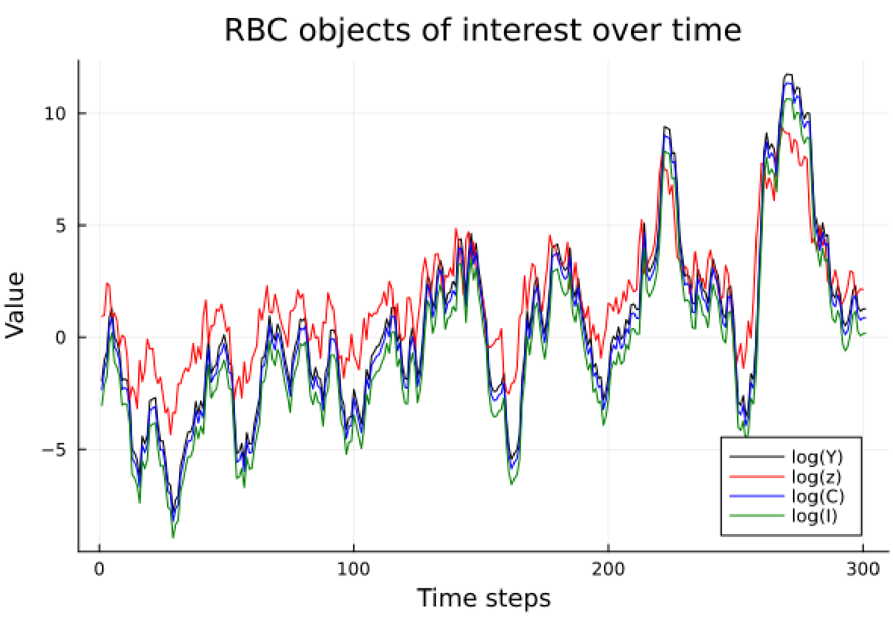


Figura 1: Séries simuladas

A figura (1) mostra as séries simuladas de produto, consumo, investimento, e TFP (variáveis em logs). A partir do que já calculamos, vamos discutir os resultados da simulação à luz de alguns dos fatos estilizados:

- "consumption is strongly procyclical and fluctuates about a third as much as output in percentage terms" $\Rightarrow$ o consumo é pró-cíclico, mas tem a mesma volatilidade do que o produto na série simulada;
- "investment is strongly procyclical and fluctuates about three times as much as output" $\Rightarrow$ o investimento é pro-cíclico, tendo sido calculado como fração da série de produto. Agora, isso expõe uma falha do modelo com solução analítica: a série de investimento aqui apresenta a mesma volatilidade do produto;
- "two-thirds of output fluctuations are accounted for by variations in the labor input, one-third by variations in TFP and essentially zero by variations in capital input" $\Rightarrow$ dado que para a solução analítica a oferta trabalho se manteve fixa, o produto nada da variação do produto pode ser atribuída à variação em horas; não só isso, como a simulação mostrou que a maior parte da variação do produto (aproximadamente dois terços dela) está associada à variação em TFP. No item anterior, viu-se também que por termos calculado o investimento como fração do produto, e dadas as hipóteses simplificadoras em que reposição de estoque de capital e investimento confundem-se, a série de capital não contribui para a variação no produto.

Exercício 4 (Uma economia estocástica)

Suponha a existência de um agente representativo, cuja função de utilidade é dada por:

$$u(c,l)=\frac{\left(c-\frac{l^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\rho}}{1-\rho}$$

em que c denota o consumo, l denota trabalho, $\rho>0$ e $\theta>0$ são parâmetros. O agente pode produzir bens de acordo com a função de produção $y=z\,l^{1-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$. Note que o agente enfrenta um choque de produtividade z com CDF $\mathcal{Z}(z)$. Denote a média de z por $\bar{z}=\int zd\mathcal{Z}(z)$. O produto é perecível e não pode ser poupado de um período para o outro.

(a) Escreva e resolva o problema de escolha do agente representativo, supondo que ele toma suas decisões após a realização do choque

---

O problema do agente representativo é dado por

$$\max_{c,l}\left\{\frac{\left(c-\frac{l^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\rho}}{1-\rho}\right\}$$

$$\text{s.t.}\quad c\leq zl^{1-\alpha}$$

Podemos substituir a restrição de recursos na função principal:

$$\max_{c,l}\left\{\frac{\left(zl^{1-\alpha}-\frac{l^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{1-\rho}}{1-\rho}\right\}$$

$$\text{CPO:}\quad [l]:\ [(1-\alpha)zl^{-\alpha}-l^{\theta}]\left(zl^{1-\alpha}-\frac{l^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{-\rho}=0$$

Supondo $|zl^{1-\alpha}-\frac{l^{1+\theta}}{1+\theta}|<\infty$, temos que

$$(1-\alpha)zl^{-\alpha}=l^{\theta}$$
$$\Rightarrow l=[(1-\alpha)z]^{\frac{1}{\alpha+\theta}}$$

Com $c=zl^{1-\alpha}$ no ótimo,

$$c=z[(1-\alpha)z]^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}}$$

(b) Como o choque z influencia a oferta de trabalho?

Tomamos a derivada da expressão ótima de oferta de trabalho com relação ao choque:

$$\frac{dl}{dz}=\frac{(1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\theta}}}{\alpha+\theta}z^{-\frac{(1-\alpha-\theta)}{\alpha+\theta}}>0$$

Logo, quanto maior for o choque de produtividade z, maior será a oferta de trabalho do agente representativo.

(c) Escreva a função de utilidade do agente como função do choque z (uma utilidade indireta). Escreva sua utilidade esperada.

Note que

$$\frac{l^{1+\theta}}{1+\theta} = \frac{(1-\alpha)^{\frac{1+\theta}{\alpha+\theta}}}{1+\theta} z^{\frac{1+\theta}{\alpha+\theta}}$$

Portanto, a utilidade indireta $V(z)$ do agente representativo será

$$V(z) = \frac{K^{1-\rho}}{1-\rho} z^{\frac{(1+\theta)(1-\rho)}{\alpha+\theta}}$$

onde

$$K = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}} - \frac{(1+\theta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}}}{1-\theta}$$

Note que, como $0 < 1-\alpha < 1$, $1+\theta > 1$ e $\alpha+\theta > 0$,

$$(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}} > (1+\theta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}} > \frac{(1+\theta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\theta}}}{1-\theta}$$

de modo que $K > 0$. A utilidade esperada do agente representativo é, portanto,

$$\mathbb{E}[V(z)] = \int \frac{K^{1-\rho}}{1-\rho} z^{\frac{(1+\theta)(1-\rho)}{\alpha+\theta}} \, d\mathbb{Z}(z) = \frac{K^{1-\rho}}{1-\rho} \int z^{\frac{(1+\theta)(1-\rho)}{\alpha+\theta}} \, d\mathbb{Z}(z)$$

(d) Suponha que $\rho = 0$. O agente prefere viver no mundo descrito acima ou num mundo em que a TFP é sempre constante e igual a $\bar{z}$? Qual a intuição para o seu resultado? (Dica: utilize a desigualdade de Jensen)

Se $\rho = 0$, então

$$K \int z^{\frac{(1+\theta)(1-\rho)}{\alpha+\theta}} \, d\mathbb{Z}(z)$$

Como $\alpha < 1$, $\frac{1+\theta}{\alpha+\theta} > 1$, portanto, a utilidade indireta do agente é uma função convexa. Pela desigualdade de Jansen, $\mathbb{E}[V(z)] > V(\mathbb{E}[z])$ — o agente é *risk-lover*, preferindo um mundo com volatilidade na produtividade ao invés do mundo com produtividade fixa $\bar{z}$.

(e) Agora, suponha que ρ é muito grande. Refaça o item anterior.

Para ρ suficientemente grande, $\frac{(1+\theta)(1-\rho)}{\alpha+\theta} < 1$, de modo que a utilidade indireta do agente se torna côncava — o agente é avesso ao risco, de modo que passa a preferir a economia com produtividade estabilizada em $\bar{z}$.

Exercício 5 (RBC log-linearizado)

Considere o problema do planejador central de maximizar uma utilidade

$$\mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\log(c_t)+\log(l_t)]\right\}$$

sujeita a uma restrição de recursos

$$c_t+k_{t+1}=z_tk_t^{\alpha}n_t^{1-\alpha}+(1-\delta)k_t \qquad k_0 \text{ dado}$$

e uma restrição de dotação de tempo

$$n_t+l_t=1$$

Suponha que o logaritmo do choque tecnológico siga um processo AR(1):

$$\log(z_{t+1})=\rho\log(z_t)+\varepsilon_t \qquad 0<\rho<1$$

onde $\{\varepsilon_{t+1}\}$ é um ruído branco Gaussiano, e realização inicial z_0 é dada.

(a) Derive as condições de primeira ordem que caracterizam as escolhas ótimas de consumo, emprego e formação de capital

---

Podemos substituir a restrição na função objetivo, como a seguir:

$$\mathbb{E}_0\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\log(z_tk_t^{\alpha}n_t^{1-\alpha}+(1-\alpha)k_t-k_{t+1})+\log(1-n_t)]\right\}$$

de modo que as condições de primeira ordem para o trabalho e capital são

$$[n_t]: \quad \beta^t\frac{1}{c_t}(1-\alpha)z_tk_t^{\alpha}n_t^{-\alpha}=\beta^t\frac{1}{1-n_t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_t}{1-n_t}=(1-\alpha)\,z_tk_t^{\alpha}n_t^{-\alpha} \tag{1}$$

$$[k_{t+1}]: \quad \beta^t\frac{1}{c_t}=\mathbb{E}_t\left\{\beta^{t+1}\frac{1}{c_{t+1}}\left(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha}+1-\delta\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\mathbb{E}_t\left\{\beta\frac{c_t}{c_{t+1}}\left(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha}+1-\delta\right)\right\} \tag{2}$$

em que a equação (1) é a taxa marginal de substituição do trabalho quando o salário real é dado por $w_t\equiv(1-\alpha)z_tk_t^{\alpha}n_t^{-\alpha}$, e a equação (2) é a equação de Euler padrão de acumulação do capital quando o retorno bruto sobre o capital é

$$R_{t+1}\equiv\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha}+1-\delta \tag{3}$$

Símbolo	Nome	Valor
β	fator de desconto	0,99
α	fatia do capital na produção	0,33
δ	depreciação do capital	0,04
ρ	autocorrelação do choque de tecnologia	0,95

(b) Suponha que os parâmetros do modelo são esses descritos na tabela.

Encontre o estado estacionário determinístico.

De modo a encontrar o estado estacionário determinístico, sejam $\bar{z} = 1$ e $k_t = k_{t+1} = \bar{k}$. O retorno bruto sobre o capital satisfaz $1 = \beta \bar{R}$, de modo que a razão capital-trabalho é:

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad 1 + \alpha \left(\frac{\bar{k}}{\bar{n}} \right)^{\alpha - 1} - \delta = \frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{k}}{\bar{n}} = \left(\frac{\alpha\beta}{1 - \beta + \delta\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4}$$

Já a equação (1) é tal que

$$\frac{\bar{c}}{\bar{l}} = (1-\alpha) \left(\frac{\bar{k}}{\bar{n}} \right)^{\alpha} = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta} \} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{c} = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta} \} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1 - \bar{n}) \tag{5}$$

Por último, temos a restrição de recursos

$$\bar{c} + \delta \bar{k} = \bar{k}^{\alpha} \bar{n}^{1-\alpha} \tag{6}$$

De modo que substituindo dividindo (6) por $\bar{n}$ e substituindo (4) e (5):

$$\frac{\bar{c}}{\bar{n}} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta+\delta\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{7}$$

As equações (5) e (7) definem um sistema linear com duas incógnitas, $\bar{c}$ e $\bar{n}$. Com os valores dos parâmetros, podemos encontrar os valores de vários objetos de interesse (ver código em Julia):

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= 0,8879 \\
\bar{n} &= 0,4763 \\
\bar{k} &= 7,9399 \\
\bar{i} &= 0,3176 \\
\bar{l} &= 0,5237 \\
\bar{R} &= 1,0101 \\
\bar{w} &= 1.6955 \\
\bar{y} &= 1,2055
\end{aligned}$$

(c) Log-linearize o modelo em torno de seu *steady state* determinístico. Mostre que o modelo log-linearizado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0 &= AX_t + BX_{t-1} + CY_t + DZ_t \\ 0 &= \mathbb{E}_t\{FX_{t+1} + GX_t + HX_{t-1} + JY_{t+1} + KY_t + LZ_{t+1} + MZ_t\} \\ Z_{t+1} &= NZ_t + \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

Encontre soluções que caracterizem cada um dos coeficientes $A, B, \dots, N$. Nas equações acima, X_t é um vetor de variáveis de estado endógenas, Y_t contém as variáveis de controle, e Z_t contém as variáveis de estado exógenas. Como parte da sua resposta, explicite quais variáveis estão contidas em X_t, Y_t e Z_t.

Antes da linearização, um comentário: A depender da forma funcional da equação, precisamos recorrer a uma aproximação de Taylor de primeira ordem. Por exemplo, considere que eu queira aproximar $\log X_t$ em torno do seu valor de S-S, dado por $\log X$. Uma aproximação de Taylor em primeira ordem é:

$$f(\log X_t) - f(\log X) \approx f'(\log X)[\log X_t - \log X]$$

É importante termos a "manha" de como aplicar essa aproximação: nós queremos escrever uma variável em termos do seu desvio do steady-state. Por exemplo, denote $\hat{X}_t = \log X_t - \log X$ como a distância em log da variável X_t do seu nível de S-S, dado por X. Logo, iremos isolar $\hat{X}_t$ nesta ocasião. Além disso, em certas ocasiões, iremos também querer isolar $\log X_t$ em termos de X_t e outras constantes. Você verá a seguir como que eu aplico tais manipulações.

Primeiro vamos log-linearizar a relação Intratemporal do problema, que é dada por:

$$\frac{c_t}{1-n_t} = (1-\alpha)\, z_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} \tag{8}$$

Aplicando o log nela, obtemos:

$$\log c_t - \log(1-n_t) = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha \log k_t - \alpha \log n_t \tag{9}$$

Obviamente, o termo $\log(1-n_t)$ não é linear. Logo, para linearizarmos ele, precisamos fazer a aproximação linear de $\log(1-n_t) = \log(1-e^{\log n_t})$ em torno de $\log(1-e^{\log \bar{n}})$, para $f(x) = \log x$, sendo $x = \log n_t$ a minha variável de interesse a ser aproximada:

$$f(1-e^{\log n_t}) - f(1-e^{\log \bar{n}}) \approx f'(1-e^{\log \bar{n}})\frac{d(1-e^{\log n_t})}{d\log n_t}(\bar{n})[\log n_t - \log \bar{n}] \tag{10}$$

Essa derivação pode soar confusa no começo (na verdade, ela sempre é). Mas observe que eu estou aproximando para $x = \log n_t$, e não para $x = n_t$. Por isso que do lado direito eu tenho uma diferença de $\log n_t - \log \bar{n}$ ao invés de $n_t - \bar{n}$. No fim, isto é nada mais do que um "malabarismo algébrico" para que eu tenha a diferença de logs do lado, visto que nós analisamos tudo em termos de log ao invés da variável no nível!

Derivando e substituindo, obtemos:

$$\log(1-n_t) - \log(1-\bar{n}) \approx \frac{-\bar{n}}{1-\bar{n}}[\log n_t - \log \bar{n}] \tag{11}$$

Isolando $\log(1-n_t)$ da relação acima, obtemos uma aproximação linear:

$$\log(1-n_t) \approx \underbrace{\log(1-\bar{n}) + \frac{\bar{n}\log\bar{n}}{1-\bar{n}}}_{=\eta} - \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}\log n_t \tag{12}$$

Todo esse termo que eu selecionei em parênteses é meramente uma constante, que denominei como η para simplificar na escrita.

Então, substituímos isso daí de volta na restrição Intratemporal:

$$\log c_t - \eta + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}\log n_t = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha\log k_t - \alpha\log n_t \tag{13}$$

Agora, vamos analisar a equação de cima no S-S:

$$\log\bar{c} - \eta + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}\log\bar{n} = \log(1-\alpha) + \cancelto{0}{\log\bar{z}} + \alpha\log\bar{k} - \alpha\log\bar{n} \tag{14}$$

Subtraindo a equação base pela avaliação no S-S, obtemos:

$$\hat{c}_t + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}\hat{n}_t = \hat{z}_t + \alpha(\hat{k}_t - \hat{n}_t) \tag{15}$$

Terminamos de linearizar nossa primeira relação. Agora, vamos para a próxima: A eq. de Euler. Relembrando que ela é dada por:

$$\frac{1}{c_t} = \mathbb{E}_t\left\{\beta\frac{1}{c_{t+1}}\left(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right)\right\} \tag{16}$$

Vamos abrir ela um pouco mais:

$$\frac{1}{c_t} = \beta\mathbb{E}_t\left\{\frac{1}{c_{t+1}}(1-\delta) + \frac{1}{c_{t+1}}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha})\right\} \tag{17}$$

A estratégia de como linearizar agora será diferente. Temos 3 termos diferentes a serem linearizados:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_t} \quad (\bigstar) \\ \frac{1}{c_{t+1}}(1-\delta) \quad (\bigstar\bigstar) \\ \frac{1}{c_{t+1}}(\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha}) \quad (\bigstar\bigstar\bigstar) \end{cases}$$

Lembre-se que uma aproximação de Taylor em primeira ordem é:

$$f(\log X_t) - f(\log X) \approx f'(\log X)[\log X_t - \log X]$$

Aqui, considere $f(x) = e^x$, com $f'(x) = e^x = f(x)$. Assim, obtemos:

$$X_t - X \approx X[\log X_t - \log X]$$

Vamos usar a fórmula acima para aproximar $\bigstar$: $X_t = c_t^{-1}$. Substituindo, temos:

$$c_t^{-1} - \bar{c}^{-1} \approx \bar{c}^{-1}[\log c_t^{-1} - \log\bar{c}^{-1}] = -\bar{c}^{-1}[\cancelto{\hat{c}_t}{\log c_t - \log\bar{c}}] \tag{18}$$

$$\Rightarrow c_t^{-1} \approx \bar{c}^{-1}[1-\hat{c}_t] \tag{19}$$

Por consequência, a linearização de ★★ é:

$$c_{t+1}^{-1}(1-\delta) \approx \bar{c}^{-1}(1-\delta)[1-\hat{c}_{t+1}] \tag{20}$$

e a de ★★★,

$$c_{t+1}^{-1}\alpha z_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha} \approx \bar{c}^{-1}\alpha\bar{k}^{\alpha-1}\bar{n}^{1-\alpha}[1-\hat{c}_{t+1}-(1-\alpha)\hat{k}_{t+1}+(1-\alpha)\hat{n}_{t+1}+\hat{z}_{t+1}] \tag{21}$$

Observação: Você pode estar se perguntando agora: Por que aqui eu pude aplicar a aproximação que fiz lá em cima de X como uma fórmula direta, enquanto isso não foi possível no caso anterior, quando aproximei $\log n_t$? De novo, a resposta está na "manha": Aqui, é mais "simples" de aplicar a fórmula, uma vez que a diferença em logs surge do outro lado facilmente!

Substituindo as três aproximações, obtemos o termo:

$$\begin{aligned} \bar{c}^{-1}(1-\hat{c}_t) \;\approx\; & \beta\bar{c}^{-1}(1-\mathbb{E}_t\hat{c}_{t+1})(1-\delta)+ \\ & +\beta\bar{c}^{-1}\alpha\bar{k}^{\alpha-1}\bar{n}^{1-\alpha}\mathbb{E}_t[1-\hat{c}_{t+1}-(1-\alpha)\hat{k}_{t+1}+(1-\alpha)\hat{n}_{t+1}+\hat{z}_{t+1}] \end{aligned} \tag{22}$$

Por fim, lidando algebricamente com essa expressão e usando a CPO do problema estacionário, que garante que $\beta^{-1} = \alpha(\bar{n}/\bar{k})^{1-\alpha} + (1-\delta)$, temos a seguinte expressão

$$\mathbb{E}_t\left[\hat{c}_{t+1}\right] - \hat{c}_t = \beta\alpha\,\frac{\bar{y}}{\bar{k}}\,\mathbb{E}_t\Big[\hat{z}_{t+1}-(1-\alpha)\hat{k}_{t+1}+(1-\alpha)\hat{n}_{t+1}\Big] \tag{23}$$

Que podemos reescrever ainda mais como:

$$0 = \mathbb{E}_t\Big\{\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} + \beta\bar{r}\left[\hat{z}_{t+1}-(1-\alpha)(\hat{k}_{t+1}-\hat{n}_{t+1})\right]\Big\} \tag{24}$$

onde substituímos $\bar{r} = \bar{R} - 1 + \delta$, com $\bar{R} = \alpha(\bar{n}/\bar{k})^{1-\alpha}$.

Por fim, só nos resta linearizar a restrição de recursos. Lembrando que ela é da forma:

$$c_t + k_{t+1} = z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} + (1-\delta)k_t \tag{25}$$

Onde linearizamos o termo nos mesmos moldes da fórmula anterior:

$$z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \approx \bar{k}^{\alpha}\bar{n}^{1-\alpha}(1+\hat{z}_t+\alpha\hat{k}_t+(1-\alpha)\hat{n}_t) \tag{26}$$

Mas, note que também temos que "linearizar"as variáveis em nível também! Logo, aplicando a fórmula:

$$X_t \approx X[1+\hat{X}_t] \tag{27}$$

Conseguimos cortar os termos de 1, reescrevendo:

$$\bar{c}\,\hat{c}_t + \bar{k}\,\hat{k}_{t+1} = \hat{z}_t + [\alpha\bar{y} + (1-\delta)\bar{k}]\hat{k}_t + (1-\alpha)\bar{y}\hat{n}_t \tag{28}$$

Com $\bar{y} = \bar{k}^{\alpha}\bar{n}^{1-\alpha}$.

Observe que as derivações daqui seguem o mesmo raciocínio que as notas de aula do Iachan (Álgebra da Log-linearização).

Deste modo, a coleção de equações é tal que

$$X_t \equiv \hat{k}_{t+1}$$

$$Y_t \equiv \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \end{pmatrix}$$

$$Z_t \equiv \hat{z}_t$$

O sistema de equações estáticas é formado pela equação de oferta de trabalho e pela restrição de recursos, a saber:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{k} \end{pmatrix} \hat{k}_{t+1} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\bar{y} + (1-\delta)\bar{k} \end{pmatrix} \hat{k}_t + \begin{pmatrix} -1 & -(\alpha + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}) \\ -\bar{c} & (1-\alpha)\bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{z}_t$$

A equação *forward-looking* é

$$0 = \mathbb{E}_t \Bigg\{ (0)\hat{k}_{t+2} + (-\beta\hat{r}(1-\alpha))\, \hat{k}_{t+1} + (0)\hat{k}_t + \begin{pmatrix} -1 & \beta\bar{r}(1-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{n}_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} + (\beta\bar{r})\, \hat{z}_{t+1} + (0)\, \hat{z}_t \Bigg\}$$

Exercício 6 (RBC com Governo)

Considere o seguinte problema do planejador central do modelo RBC, agora incorporando gastos do governo. Considere que os gastos do governo não fornecem utilidade e a taxação é feita de maneira *lump-sum* satisfazendo sua restrição orçamentária:

$$\max_{C_t,N_t,I_t} \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(C_t) + \frac{N_t^{1+(1/\eta)}}{1+(1/\eta)} \right]$$

s.a.

$$C_t + I_t + G_t = z_t\, K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} = Y_t$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)\, K_t + I_t$$

$$\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \sigma\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

$$\ln(G_t) = (1-\rho_g)\ln(\bar{G}) + \rho_g \ln(G_{t-1}) + \sigma_g \epsilon_{gt}, \quad \epsilon_{gt} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

(a) Encontre as condições de primeira ordem para as famílias e para as firmas.

(Resposta:) Atenção ao enunciado! Precisamos escrever o problema descentralizado, diferentemente do enunciado, que nos forneceu o problema centralizado. Logo, vamos definir o problema das firmas:

$$\max_{L_t,K_t} z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - W_t N_t - R_t K_t$$

As C.P.O.'s são:

$$\alpha z_t N_t^{1-\alpha} K_t^{\alpha-1} = R_t$$

$$(1-\alpha) z_t N_t^{-\alpha} K_{t-1}^{\alpha} = (1-\alpha) Y_t / N_t = W_t$$

Então, partimos para os problema das famílias:

$$V(K_t, k_t, z_t) = \max_{C_t,k_{t+1},N_t} \left\{ \ln(C_t) - \frac{N_t^{1+1/\eta}}{1+1/\eta} + \beta \mathbb{E}_t V(K_{t+1}, k_{t+1}, z_{t+1}) \right\}$$

s.a.

$$C_t + k_{t+1} = W_t(z_t, K_t) N_t + (1 + R(z_t, K_t) - \delta) k_t - T_t$$

$$K_{t+1} = H(z_t, K_t, k_t) \text{ (Lei de Movimento do Capital)}$$

$$\ln(z_t) = \rho \ln(z_{t-1}) + \sigma\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

$$\ln(G_t) = (1-\rho_g)\ln(\bar{G}) + \rho_g \ln(G_{t-1}) + \sigma_g \epsilon_{gt}, \quad \epsilon_{gt} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

$$G_t = T_t$$

Onde T_t representa a taxação lump-sum do problema. Como sabemos que $T_t = G_t$ neste modelo, a lei de movimento de T_t é idêntica a de G_t.

As C.P.O.'s são:

$$N_t^{1/\eta} = \frac{W_t}{C_t}$$

$$\frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t \left(1 + R_{t+1} - \delta\right) \frac{1}{C_{t+1}}$$

Então, fazemos as devidas substituições para chegar na equação de Euler (Intertemporal), e na escolha de trabalho (Intratemporal):

$$[C_t]: \quad \frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} \cdot \left(\alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) \right] \tag{29}$$

$$[N_t]: \quad N_t^{1/\eta} \cdot C_t = (1-\alpha) z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \tag{30}$$

Aqui, substituí os valores de W_t, R_t e T_t, de forma a reescrever as restrições em termos de K_t e N_t. Observe que o problema é idêntico ao do planejador central!

(b) Log-linearize o sistema de equações em diferenças não lineares que descrevem as alocações de equilíbrio dessa economia.

(Resposta:) A grande novidade nessa linearização (comparado a um RBC padrão) advém da introdução dos gastos do governo, que surgirá quando linearizarmos a restrição de factibilidade. Primeiro, tiramos o log da restrição Intratemporal:

$$\frac{1}{\eta} \log N_t + \log C_t = \log(1-\alpha) + \log z_t + \alpha \log K_t - \alpha \log N_t \tag{31}$$

Para a nossa sorte, nenhuma aproximação de Taylor foi necessária aqui! A mera aplicação do log em tudo foi o suficiente.

A partir de agora, definimos para qualquer variável X_t o desvio em log para o estado estacionário. Isso é, $\hat{X}_t = \log X_t - \log X$. Vamos então avaliar a equação derivada aqui no estado estacionário:

$$\frac{1}{\eta} \log N + \log C = \log(1-\alpha) + \log z + \alpha \log K - \alpha \log N \tag{32}$$

Subtraindo a restrição Intratemporal da expressão acima, obtemos:

$$\hat{N}_t = \frac{\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{z}_t + \frac{\alpha\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{K}_t - \frac{\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{C}_t \tag{33}$$

Agora, nos voltamos para a eq. de Euler (Intertemporal), que é dada por:

$$\frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} \cdot \left(\alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta \right) \right] \tag{34}$$

Avaliando ela no S-S, obtemos:

$$1 = \beta(\alpha z K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} + 1 - \delta) \tag{35}$$

Lembre-se que uma aproximação de Taylor em primeira ordem é:

$$f(\log X_t) - f(\log X) \approx f'(\log X)[\log X_t - \log X]$$

Aqui, considere $f(x) = e^x$, com $f'(x) = e^x = f(x)$. Assim, obtemos:

$$X_t - X \approx X[\log X_t - \log X]$$

Manipulando a eq. de Euler original, temos 3 termos distintos para linearizar, marcados em $\bigstar$:

$$\underbrace{\frac{1}{C_t}}_{\star} = \beta \mathbb{E}_t \left[\underbrace{\frac{1}{C_{t+1}}(1-\delta)}_{\star\star} + \underbrace{\frac{1}{C_{t+1}}\left(\alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right)}_{\star\star\star} \right] \tag{36}$$

Vamos usar a fórmula acima para aproximar $\bigstar$: $X_t = C_t^{-1}$. Substituindo, temos:

$$C_t^{-1} - C^{-1} \approx C^{-1}[\log C_t^{-1} - \log C^{-1}] = -C^{-1}[\cancelto{\hat{C}_t}{\log C_t - \log C}] \tag{37}$$

$$\Rightarrow C_t^{-1} \approx C^{-1}[1 - \hat{C}_t] \tag{38}$$

Por consequência, a linearização de $\bigstar\bigstar$ é:

$$C_{t+1}^{-1}(1-\delta) \approx C^{-1}(1-\delta)[1 - \hat{C}_{t+1}] \tag{39}$$

e a de $\bigstar\bigstar\bigstar$,

$$C_{t+1}^{-1} \alpha z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} \approx C^{-1} \alpha K^{\alpha-1} N^{1-\alpha}[1 - \hat{C}_{t+1} - (1-\alpha)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1} + \hat{z}_{t+1}] \tag{40}$$

O que nos leva a obtenção do termo:

$$\begin{aligned} C^{-1}(1 - \hat{C}_t) \;\approx\; & \beta C^{-1}(1 - \mathbb{E}_t \hat{C}_{t+1})(1-\delta) + \\ & + \beta C^{-1} \alpha K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} \mathbb{E}_t[1 - \hat{C}_{t+1} - (1-\alpha)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1} + \hat{z}_{t+1}] \end{aligned} \tag{41}$$

Por fim, lidando algebricamente com essa expressão e usando a CPO do problema estacionário, que garante que $\beta^{-1} = \alpha(N/K)^{1-\alpha} + (1-\delta)$, temos a seguinte expressão

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{C}_{t+1}\right] - \hat{C}_t = \beta\alpha \frac{Y}{K} \mathbb{E}_t \Big[\hat{z}_{t+1} - (1-\alpha)\hat{K}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1}\Big] \tag{42}$$

Agora, substituindo a restrição Intratemporal avaliada em $t+1$, podemos obter

$$\mathbb{E}_t \left[\hat{C}_{t+1}\right] - \hat{C}_t = \beta\alpha \frac{Y}{K} \mathbb{E}_t \Big[\frac{1+\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{z}_{t+1} - \frac{(1-\alpha)}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{K}_{t+1} - \frac{(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta} \cdot \hat{C}_{t+1}\Big] \tag{43}$$

Agora, vamos linearizar a restrição de factibilidade, onde entrarão diretamente os gastos do governo. Essa restrição é dada por $K_{t+1} = z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1-\delta)K_t - C_t - G_t$.

Antes de continuar, linearizamos com a mesma aproximação de Taylor a seguinte parcela:

$$z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \approx Y[1 + \hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] \tag{44}$$

e portanto obtemos o resultado: $K\hat{K}_{t+1} = Y[\hat{z}_t + \alpha\hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] + (1-\delta)K\hat{K}_t - C\hat{C}_t - G\hat{G}_t$. Dividindo por K, obtemos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}[\hat{z}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t] + (1-\delta)\hat{K}_t - \frac{C}{K}\hat{C}_t - \frac{G}{K}\hat{G}_t \tag{45}$$

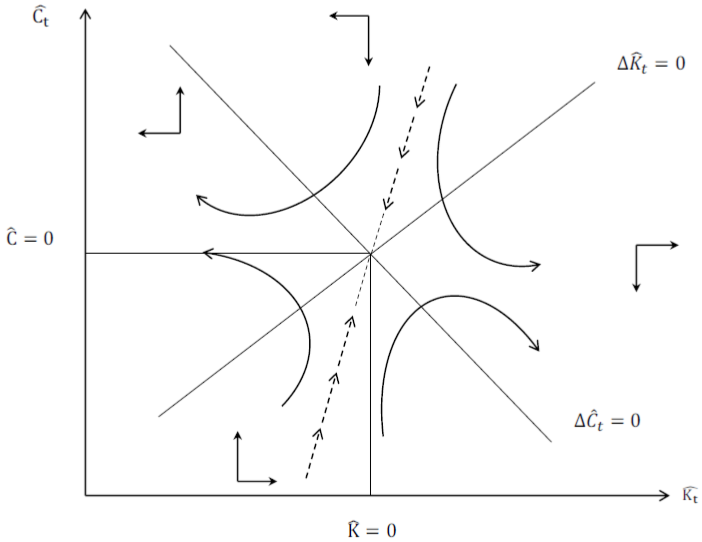
Usando a condição de Euler de estado estacionário e a restrição Intratemporal, reescrevemos

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}\Big[\hat{z}_t + (1-\alpha)\Big(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\cdot \hat{z}_t + \frac{\alpha\eta}{1+\alpha\eta}\cdot \hat{K}_t - \frac{\eta}{1+\alpha\eta}\cdot \hat{C}_t\Big)\Big] + \frac{1}{\beta}\hat{K}_t - \frac{C}{K}\hat{C}_t - \frac{G}{K}\hat{G}_t \tag{46}$$

$$\hat{K}_{t+1} = \frac{Y}{K}\cdot\frac{1+\eta}{1+\alpha\eta}\cdot \hat{z}_t + \Big(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta}\cdot\frac{Y}{K}\Big)\hat{K}_t - \Big(\frac{C}{K} + \frac{(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta}\cdot\frac{Y}{K}\Big)\hat{C}_t - \frac{G}{K}\hat{G}_t$$

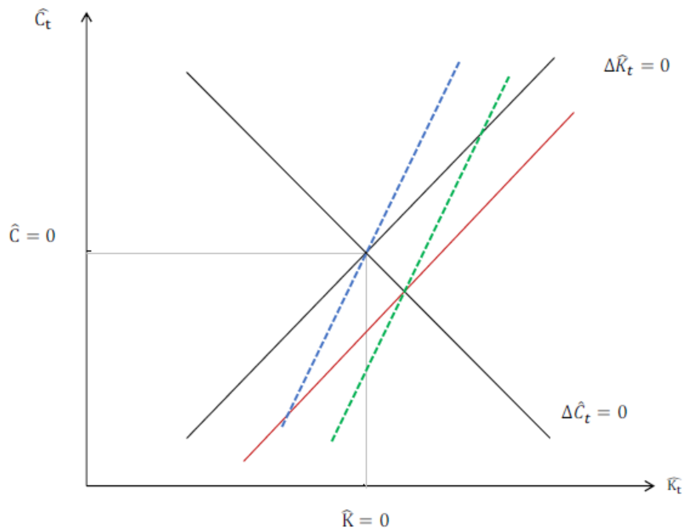
(c) Construa o diagrama de fases.

(Resposta:)



(d) Com o diagrama de fases e as equações log-linearizadas, analise os efeitos nas variáveis do modelo de um aumento transitório nos gastos do governo.

(Resposta:) Nesse caso, há o deslocamento da curva $\Delta\hat{K}_t$ para a direita (passa da linha preta para se tornar a linha vermelha). O consumo cai imediatamente, para o ponto no qual o a trajetória de sela em verde intercepta a linha $\hat{K} = 0$. Contudo, no período seguinte esse choque se desfaz, e logo voltamos a ter o par de curvas originais. Nesse contexto, a economia retorna gradativamente ao estado estacionário original, pela trajetória de sela em azul.



(e) Faça o mesmo para um aumento permanente dos gastos.

(Resposta:) Nesse caso, usamos a seguinte representação no diagrama de fases. Perceba que o locus $\Delta\hat{K}_t$ se altera, sendo deslocado para a direita (passa da linha preta para se tornar a linha vermelha). Nesse caso, o consumo cai inicialmente, mas depois se recupera gradativamente até se estabilizar no nosso estado estacionário, que possui nível de consumo mais baixo que o estado estacionário original. Além disso, temos que após o choque o capital cresce até se estabelecer em nível mais alto do que o original.