Problemas recursivos com incerteza

Felipe Iachan

FGV EPGE

Macroeconomia II, MD,
30 de julho de 2025

Alguns exemplos

Modelo neoclássico com risco

Suponha que a função de produção é incerta:

$$y(s^t) = A(s_t)f(k(s^t))$$

- Em t, $s_t \in \mathcal{S}$.
- $\mathcal{S} = \{1, 2, ..., S\}$ conjunto de estados possíveis para produtividade.
- Mesmo que $A(\cdot)$ dependa só de um estado atual; alocações vão depender da história.

Alguns exemplos

Modelo neoclássico com incerteza

O problema em forma de sequência

$$V^*(k_0, A_0) = \max_{c,k} \sum_{t,s^t} \beta^t \Pr(s^t) u(c(s^t))$$

s.a.

$$k(s^{t+1}) = A(s_t) f(k(s^t)) + (1 - \delta) k(s^t) - c(s^t)$$

$$k(s^t) \geq 0,$$
$$c(s^t) \geq 0,$$
$$k_0, A_0 \text{ dados.}$$

Alguns exemplos

Problema de portfólio, Merton

Problema em forma de sequência

$$V^*(W_0) = \max_{c,a,b} \sum_{t,s^t} \beta^t \Pr(s^t) u(c(s^t))$$

s.a.

$$W_0 = c(s^0) + a(s^1) + b(s^1)$$

$$R_a(s^t) a(s^t) + R_f b(s^t) = c(s^t) + a(s^{t+1}) + b(s^{t+1}),$$

em que:

- $a(s^t)$ representa quanto o agente compra de ações, $b(s_t)$ títulos livres de risco,
- R_f é a taxa livre de risco e $R_a(s^t)$ o retorno arriscado das ações.

Alguns exemplos

Risco de desemprego

Em cada momento do tempo:

- o agente pode estar em $s_t \in \mathcal{S} = \{\text{emprego}, \text{desemprego}\}$,
- recebe salário ou seguro desemprego: $y(\text{emprego}) = w$ ou $y(\text{desemprego}) = y_0$.
- escolhe quanto comprar de um ativo livre de risco, b.
- está sujeito a um limite de crédito B.

Alguns exemplos

Risco de desemprego

Em forma de sequência,

$$V^*(b_0, s_0) = \max_{b,c} \sum_{t,s^t} \beta^t \Pr(s^t) u(c(s^t))$$

s.a.

$$b(s^{t+1}) = R_f b(s^t) + y(s_t) - c(s^t)$$

$$b(s^{t+1}) \geq -B$$

$$b_0, s_0 \text{ dados.}$$

Versão Recursiva

Em busca de uma formulação recursiva

- No modelo neoclássico, sem incerteza:
  - usamos k como variável de estado,
  - estatística suficiente sobre o passado para resolvermos o problema de continuação.
- Com incerteza, precisaremos também registrar a evolução dos estados exógenos à escolha do agente:
  - exs: produtividade, estado do mercado e emprego.
- Se as transições de estados não dependerem de forma complicada do passado:
  - formulação recursiva e estacionária.

Processos de Markov

- Para simplificar, por enquanto, espaço de estado discreto:
  - $x \in X = \left\{x^1, \ldots, x^N\right\}$.
- Exemplo: Produtividade $A_t \in \{A_h, A_l\}$
- **Propriedade de Markov**:

$$\Pr(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k}) = \Pr(x_{t+1} | x_t), \forall k \in \mathbb{N}.$$

- O estado atual é suficiente para transições futuras.
- Generaliza para casos de espaços de estado contínuos.

Cadeias de Markov

- No caso discreto, transições representadas por matriz de transição P, também chamada de matriz de Markov ou matriz estocástica.
- Uma matriz estocástica (à direita) é uma matriz $N \times N$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} P_{i,j} = 1.$$

- Cada linha i representa a probabilidade de transitarmos de um estado x^i para cada um dos estados x^j.

Cadeias de Markov

- Representamos uma probabilidade sobre estados com vetor linha π.
- Logo, $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$.
- Exemplos,

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

- Probabilidades degeneradas sobre estados (vetores canônicos):

$$e_1 = (1, 0)$$
$$e_2 = (0, 1)$$

Operações com cadeias de Markov

- Se estivermos, com certeza no estado $j = 1$ em t, podemos computar a distribuição de probabilidade sobre estados amanhã com

$$\pi_{t+1} = e_1 P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Operações com cadeias de Markov

- Analogamente, para $j = 2$:

$$\pi_{t+1} = e_2 P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Operações com cadeias de Markov

Caso geral, distribuição π_t sobre estados em t.

- Leva a

$$\pi_{t+1} = \pi_t P.$$

- Note que

$$\pi_{t+2} = (\pi_t P)P = \pi_t P^2.$$

Operações com cadeias de Markov

Caso geral, distribuição π_t sobre estados em t.

- Leva a

$$\pi_{t+1} = \pi_t P.$$

- Note que

$$\pi_{t+2} = (\pi_t P)P = \pi_t P^2.$$

- E, por indução,

$$\pi_{t+j} = (\pi_t P^{j-1})P = \pi_t P^j.$$

Natural nos perguntarmos “para onde vão” estas distribuições.

Distribuição invariante

De volta ao nosso exemplo, tome

$$\pi_t = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

- E, logo,

$$\begin{aligned} \pi_{t+1} &= \pi_t P \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Distribuição invariante

De volta ao nosso exemplo, tome

$$\pi_t = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

- E, logo,

$$\begin{aligned} \pi_{t+1} &= \pi_t P \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- π_t é invariante sob P.

Distribuição invariante

- Note que $T(\pi) = \pi P$ é uma operação linear.
  - Leva distribuições em distribuições.
- Notação de cadeias de Markov vs notação transposta: equivalentes
  - Seja $\hat{\pi} = \pi'$ um vetor coluna e $\hat{P}$ a transposta de P, temos

$$\hat{P}\hat{\pi} = (\pi P)'.$$

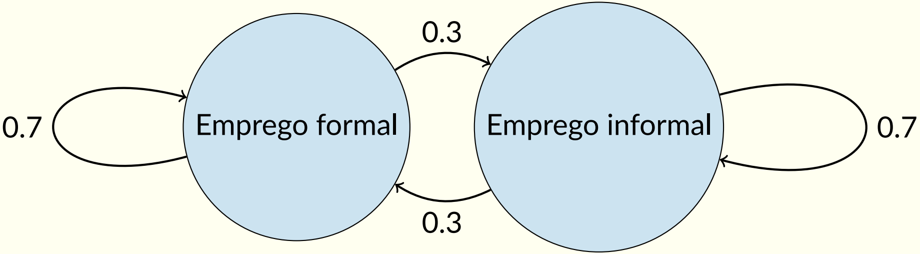
  - Para mim, mais natural. Cuidado com código dos outros.
  - Cuidado com definições de autovetores, esquerda vs direita, linha vs coluna.
- Mais sobre P: ▸ valores esperados e funções valor

Distribuição invariante

- A distribuição invariante satisfaz
$$\pi P = \pi.$$
- Ponto fixo de $T(\pi) = \pi P$.
- Também,
$$\pi(P - I) = 0.$$
- π é o autovetor (à esquerda) associado ao autovalor unitário, normalizado para $\sum_j \pi_j = 1$.
- Matrizes estocásticas sempre têm um autovalor igual a 1 :
  - e demais autovalores são ≤ 1.

Distribuição invariante: Intuição

- Imagine uma grande população distribuída entre os estados
- A cada período, indivíduos transitam segundo a matriz P
- **Pergunta**: Existe uma distribuição que permanece inalterada ao longo do tempo?
- Esta é a distribuição invariante ou estacionária



Mais exemplos

Exemplos:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \pi_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.643 \\ 0.357 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \text{qualquer } \pi \in \mathbb{R}^2,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \pi_2^* = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Convergência para distribuição invariante

Dois teoremas em LS (2.2.1 e 2.2.2):

- **Teorema 1:** Seja P uma matriz estocástica com $P_{i,j} > 0, \forall (i,j)$. Então, P tem uma distribuição invariante única π_∞ e $\lim_{t\to\infty} \pi_0 P^t = \pi_\infty, \forall \pi_0$.

- **Teorema 2:** Seja P uma matriz estocástica tal que $P^n_{i,j} > 0, \forall (i,j)$. Então, P tem uma distribuição invariante única π_∞ e $\lim_{t\to\infty} \pi_0 P^t = \pi_\infty, \forall \pi_0$.

Convergência para distribuição invariante

- Ambos impõem condições razoavelmente fortes.
- Versões com menos requisitos em SLP: também garantem propriedades de contração sobre $T(\pi) = \pi P$ e velocidade de convergência.
- Por exemplo: Sejam $\epsilon_j = \min_i P_{i,j}$ (menor probabilidade se chegar a j em $t+1$) e $\epsilon = \sum_j \epsilon_j$, então T é uma contração de módulo $1 - \epsilon$.

De volta aos nossos exemplos

1. Modelo neoclássico de crescimento com risco
2. Problema de portfólio de Merton
3. Risco de desemprego

Como Markov se aplica aos nossos exemplos

- **Modelo neoclássico**:
  - Produtividade $A_t \in \{A_h, A_l\}$ segue cadeia de Markov
  - Estado do modelo: (k_t, A_t)
- **Problema de portfólio**:
  - Retorno das ações $R_a(s_t)$ segue processo de Markov
  - Estado: riqueza e estado do mercado (W_t, s_t)
- **Risco de desemprego**:
  - Status laboral $s_t \in \{\text{empregado}, \text{desempregado}\}$
  - Estado: ativos e status laboral (b_t, s_t)

Chave: Estado exógeno (Markov) + estado endógeno $\implies$ MDP

Markov decision process – Processo de decisão de Markov

- Formalização matemática de problemas de decisão com controle imperfeito do estado.
- Análogo ao que viram em programação dinâmica, mas estado não é determinístico.
- Ainda precisamos de descrição de variáveis de estado:
  - Tudo que é necessário saber sobre um sistema/problema para descrever (e otimizar) sua continuação.
- Mais detalhes: ‣ MDP na wikipedia , ‣ MDP em Computer Science (David Silver)

Processo de decisão de Markov (MDP) – Formulação geral

Um MDP é caracterizado por:

- **Estados**: $s \in \mathcal{S}$ (espaço de estados)
- **Ações**: $y \in \mathcal{Y}(s)$ (conjunto de ações factíveis em s)
- **Transições**: $P(s'|s, y)$ (probabilidade de ir para s' dado estado s e ação y)
- **Recompensas**: $u(s, y)$ (utilidade/payoff imediato)
- **Fator de desconto**: $\beta \in (0, 1)$

Problema de otimização:

$$V(s) = \max_{y \in \mathcal{Y}(s)} \left\{ u(s, y) + \beta \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s'|s, y) V(s') \right\}$$

- $V(s)$: função valor (valor ótimo começando do estado s)
- Solução: função política ótima $g^*(s)$ que especifica ação ótima em cada estado

Modelo neoclássico de crescimento, com incerteza

- O problema em forma de sequência: ◂ voltar a ele
- Na versão determinística: k é variável de estado.
- Aqui, precisamos saber produtividade, A, e prever produtividades futuras.

Modelo neoclássico de crescimento, com incerteza

- O problema em forma de sequência: ◂ voltar a ele
- Na versão determinística: k é variável de estado.
- Aqui, precisamos saber produtividade, A, e prever produtividades futuras.
- **Hipótese:** A segue cadeia de Markov.
- **Consequência:** evolução de A depende apenas do estado atual.
- Buscaremos formulação com (k, A) como variáveis de estado.

Modelo neoclássico de crescimento

$$V(k, A) = \max_{c,k'} \left\{ u(c) + \beta \mathbb{E}[V(k', A')|A] \right\} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad k' &= Af(k) + (1-\delta)k - c, \\ k' &\geq 0, \\ c &\geq 0 \end{aligned}$$

Modelo neoclássico de crescimento

Substituições possíveis:

- c ou k, usando
$$k' = Af(k) + (1-\delta)k - c.$$

Levam a:

- $V(k, A) = \max_{k' \in [0, Af(k)+(1-\delta)k]} \left\{ u(Af(k) + (1-\delta)k - k') + \beta \mathbb{E}[V(k', A')|A] \right\},$

ou

- $V(k; A) = \max_{0 \leq c \leq Af(k)+(1-\delta)k} \left\{ u(c) + \beta \mathbb{E}[V(Af(k) + (1-\delta)k - c; A')|A] \right\}.$

- Aqui,
$$\mathbb{E}\left[V(k';A')|A\right] = \sum_{A'} \Pr(A'|A)V(k',A')$$
- Duas funções políticas markovianas: $c(k,A)$ e $k'(k,A)$.
- Restrição liga as duas: basta resolver para uma.

Modelo neoclássico de crescimento

Comentários

- Aqui,

$$\mathbb{E}\left[V(k';A')|A\right] = \sum_{A'} \Pr(A'|A)V(k',A')$$

- Estado (k, A) levado em (k', A'):
  - k' é conhecido hoje (depois de tomada a decisão) e sem risco.
  - A' depende apenas de A e incerteza na evolução é exógena.
  - Por isto, podemos escrever apenas $\Pr(A'|A)$ para descrever a evolução incerta (de parte) do estado.
- Cuidado: isto não é geral.

Modelo neoclássico de crescimento

Comentários

- Em geral, $P_a(X'|X)$ descrevendo evolução de um estado X dada ação a.
- Defina as funções $A(X)$ e $k(X)$ que extraem as coordenadas de X.
- Então, aqui, poderíamos escrever

$$P_a(X'|X) = \Pr(A(X')|A(X))1_{k(X')=a},$$

para uma ação a (escolha de k') arbitrária e

$$P_{g(X)}(X'|X) = \Pr(A(X')|A(X))1_{k(X')=g(X)},$$

para a função política $k' = g(X)$.

Ótimo no modelo neoclássico com incerteza

- CPO para c:

$$u'(c) - \lambda = 0$$

- CPO para k':

$$\beta \sum_{A'} \Pr(A'|A) V_K(k'; A') - \lambda = 0$$

- Envelope:

$$V_K(k; A) = \lambda[Af'(k) + (1 - \delta)],$$

  logo

$$V_K(k'; A') = \lambda'[A'f'(k') + (1 - \delta)].$$

Ótimo no modelo neoclássico com incerteza

Combinando:

$$u'\left(c\left(k,A\right)\right) = \beta \sum_{A'} \Pr(A'|A) \underbrace{\left[A' f'\left(k'\right) + (1-\delta)\right]}_{=:R(k',A')} u'\left(c\left(k^{'},A^{'}\right)\right)$$

ou:

$$u'\left(c\left(k,A\right)\right) = \beta \mathbb{E}\left[R\left(k',A'\right) u'\left(c\left(k^{'},A^{'}\right)\right) \middle| A\right]$$

- Equação de Euler, com retorno arriscado.

Modelo Neoclássico

A solução define um sistema de equações em diferenças estocásticas em k, c e A:

$$
\begin{aligned}
u'(c_t) &= \beta \mathbb{E}_t[(A_{t+1} f'(k_{t+1}) + (1-\delta))u'(c_{t+1})], \\
k_{t+1} &= A_t f(k_t) + (1-\delta) - c_t, \\
A_{t+1} &\sim \text{exogenamente descrito.}
\end{aligned}
$$

- Este é um processo de Markov para o vetor (k, c, A).
- A não ser que imponhamos um grid para c e k, este processo é definido sobre um espaço de estado contínuo.
- Quais propriedades tem este sistema? Convergência? Para onde?

Problema de portfólio, Merton

Escrevemos o problema em forma de sequência assim

$$V^*(W_0) = \max_{c,a,b} \sum_{t,s^t} \beta^t \Pr(s^t) u(c(s^t))$$

s.a.

$$W_0 = c(s^0) + a(s^1) + b(s^1)$$
$$R_a(s_t)a(s^t) + R_f b(s^t) = c(s^t) + a(s^{t+1}) + b(s^{t+1}),$$

em que:

- $a(s^t)$ representa quanto o agente compra de ações, $b(s^t)$ títulos livres de risco,
- R_f é a taxa livre de risco e $R_a(s_t)$ o retorno das ações.

Problema de portfólio, Merton

Escrevemos o problema em forma de sequência assim

$$V^*(W_0) = \max_{c,a,b} \sum_{t,s^t} \beta^t \Pr(s^t) u(c(s^t))$$

s.a.

$$W_0 = c(s^0) + a(s^1) + b(s^1)$$
$$\underbrace{R_a(s^t)a(s^t) + R_f b(s^t)}_{W(s^t)} = c(s^t) + a(s^{t+1}) + b(s^{t+1})$$

Note que:

- $R_a(s_t)$ depende de incerteza e está fora do controle do agente.
- $W\left(s^t\right)$ é riqueza do agente em s^t: análogo a W_0.

Problema de portfólio, Merton

Se incerteza descrevendo evolução de R_a seguir uma cadeia de Markov:

- Podemos buscar formulação recursiva com estado (W, s).

Problema de portfólio, Merton

Se incerteza descrevendo evolução de R_a seguir uma cadeia de Markov:

- Podemos buscar formulação recursiva com estado (W, s).

$$V(W, s) = \max_{a,b,c} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V\left(W', s'\right)|s\right]$$

s.a.

$$\begin{aligned} W &= a + b + c \\ W' &= R_a(s')a + R_f b \end{aligned}$$

Problema de portfólio, Merton

Se incerteza descrevendo evolução de R_a seguir uma cadeia de Markov:

- Podemos buscar formulação recursiva com estado (W, s).

$$V(W, s) = \max_{a,b,c} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V\left(W', s'\right)|s\right]$$

s.a.

$$\begin{aligned} W &= a + b + c \\ W' &= R_a(s')a + R_f b \end{aligned}$$

- Repare que W' não é determinístico dado a e b.
- Qual o papel de s aqui? E o caso iid?
- Exercício: formulação com (a, b, s) como estado?

Desemprego

Em forma de sequência,

$$V^*(b_0, s_0) = \max_{b,c} \sum_{t,s^t} \beta^t \Pr(s^t) u(c(s^t))$$

s.a.

$$b(s^{t+1}) = R_f b(s^t) + y(s_t) - c(s^t)$$

$$b(s^{t+1}) \geq -B$$

$$b_0, s_0 \text{ dados.}$$

- $y(s_t)$ é única variável diretamente afetada por incerteza.
- c, b são escolhas e vão refletir realizações da incerteza.
- Seja s gerado por cadeia de Markov, tentemos (b, s) como variáveis de estado.

Desemprego

Em forma recursiva,

$$V(b,s) = \max_{b',c} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V\left(b^{'}, s^{'}\right)|s\right]$$

s.a.

$$b^{'} = R_f b + y(s) - c$$

$$b' \geq -B$$

Desemprego

Em forma recursiva,

$$V(b,s) = \max_{b',c} u(c) + \beta \mathbb{E}\left[V\left(b^{'}, s^{'}\right)|s\right]$$

s.a.

$$b^{'} = R_f b + y(s) - c$$

$$b' \geq -B$$

- Formulação não é única.
- Poderíamos usar cash-on-hand (riqueza financeira após juros+ salário) para descrever riqueza.
  Exercício: como fica e por que pode ser útil?

Comentários Finais

- Qualquer processo com dependência finita, do tipo

$$\Pr(s_{t+1}|s^t) = \Pr(s_{t+1}|s_t, s_{t-1}, ..., s_{t-k}),$$

satisfaz a propriedade de Markov quando redefinimos

$$\hat{s}_t = (s_t, s_{t-1}, ..., s_{t-k}).$$

- Estados contínuos versus discretos.
- Problemas estacionários vs não estacionários: o tempo como variável de estado.
- Tempo contínuo: limite.

Mais sobre a matriz P

Quando usamos P como uma matriz estocástica à direita (linhas somam um), temos:

- Além de $\pi_{t+1} = \pi_t P$ descrever evolução de medidas de probabilidade sob P,
- Temos $E[f(s')|s_i] = P_i f, \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ (função de S), em que:
  - P_i é a linha correspondente ao estado s,
  - f é uma função do estado, descrita por um vetor coluna.
  - Útil para definir valor do estado e função valor.

Mais sobre a matriz P

Exemplo

Suponha um mundo com dois estados para o dividendo de um ativo, $s \in \mathcal{S} = \{h, l\}$.
Valor do ativo é valor presente esperado,

$$v(s) = d(s) + \frac{\mathbb{E}\left[v(s')|s\right]}{1+r}$$

Temos, $\mathbb{E}\left[v(s')|s\right] = P_s v$ e, matricialmente,

$$v = d + (1+r)^{-1} P v.$$

Podemos resolver

$$v\left(I - (1+r)^{-1} P\right) = d.$$