FGV EPGE — Professor: Felipe S. Iachan

Teoria Macroeconômica II - 2025 — Monitor: João von Montfort Kling

P1 - Gabarito

Tempo total: 3h30 (inclui período de tolerância não prorrogável).
Pontuação: A prova possui pontos bônus, totalizando 10,3 pontos.

1 Questões Breves (3,0 pontos)

Q1. Cadeias de Markov e Ciclos Econômicos (1,0 ponto)

Considere uma economia em que os ciclos econômicos são modelados por uma cadeia de Markov de dois estados: Expansão (E) e Recessão (R). A matriz de transição é

$$P = \begin{bmatrix} p_E & 1-p_E \\ 1-p_R & p_R \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule a distribuição estacionária (π_E, π_R) associada a esta cadeia.

Resposta:

A distribuição invariante satisfaz $P'\bar{\pi} = \bar{\pi} \Rightarrow (P - \mathbb{I})\bar{\pi} = 0$

$$\begin{bmatrix} p_E - 1 & 1-p_R \\ 1-p_E & p_R - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_E \\ \pi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (p_E - 1)\pi_E + (1-p_R)\pi_R = 0 \Rightarrow \pi_E = \frac{(1-p_R)}{(1-p_E)}\pi_R$$

Então, usando que $\pi_R = 1 - \pi_E$, temos que

$$\pi_E = \frac{1-p_R}{2-p_E-p_R} \qquad \pi_R = \frac{1-p_E}{2-p_E-p_R}$$

(b) Derive uma expressão para a duração esperada de cada estado em termos de p_E e p_R.

Resposta:

A duração esperada é dada pela soma geométrica de permanecersmo em cada estado, isso é:

$$\mathbb{E}[D^E] = 1 + p^E + (p^E)^2 + \cdots \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[D^E] = \frac{1}{1-p^E}$$

Analogamente, temos que $\mathbb{E}[D^R] = \frac{1}{1-p^R}$.

(c) Dados os fatos estilizados do NBER de que expansões duram em média 58 meses e recessões duram em média 11 meses, como você calibraria os parâmetros p_E e p_R?

Resposta:

Segue que

$$58 = \frac{1}{1-p_E} \quad \Rightarrow \quad p_E = \frac{57}{58}$$
$$11 = \frac{1}{1-p_R} \quad \Rightarrow \quad p_R = \frac{10}{11}$$

Q2. Busca de Emprego (1,0 ponto)

Considere um indivíduo que pode estar empregado ou desempregado. Se empregado, recebe salário w e perde o emprego com probabilidade σ. Se desempregado, escolhe esforço de busca $e \in [0,1]$ a custo $\frac{\psi}{2}e^2$, recebe benefício b, e encontra emprego com probabilidade $\lambda_0 + \lambda_1 e$. O fator de desconto é β. Todos estes valores de fluxo já são medidos em unidades de utilidade.

A função valor do empregado é, portanto,

$$V_E = w + \beta[\sigma V_U + (1-\sigma)V_E]$$

(a) Escreva a equação de Bellman para V_U.

Resposta:

A equção de Bellman segue:

$$V_U = \max_e \left\{ b - \frac{\psi}{2}e^2 + \beta\left[(\lambda_0 + \lambda_1 e)V_E + (1 - \lambda_0 - \lambda_1 e)V_U\right] \right\}$$

(b) Derive a condição de primeira ordem para o esforço ótimo e^* e resolva para e^* em função de $(V_E - V_U)$.

Resposta:

A condição de primeira ordem é dada por:

$$-\psi e^* + \beta[\lambda_1 V_E + (-\lambda_1)V_U] = 0$$

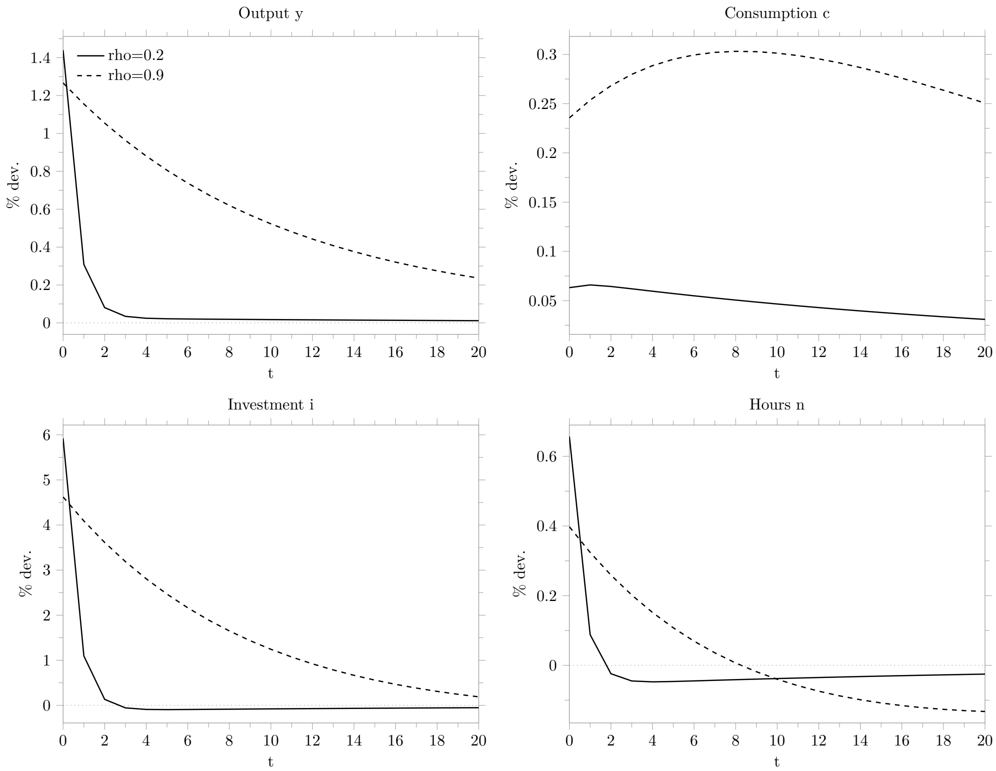
$$e^* = \frac{\beta\lambda_1}{\psi}(V_E - V_U)$$

(c) Explique intuitivamente o trade-off na escolha do esforço e como e^* varia com o benefício b.

Resposta:

O esforço ótimo pondera o custo marginal de aumentar a procura (ψe) com o benefício marginal de conseguir encontrar o emprego (λ_1) multiplicado pelo ganho de estar empregado (em comparação a estar desempregado ($V_E - V_U$). Logo, quando o valor de estar desempregado aumenta por meio de b, o esforço ótimo é menor.

Q3. RBC - Resposta a Choques (1,0 ponto)



Considere choques tecnológicos AR(1) com persistência ρ: $a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$.

(a) Explique por que, nos gráficos de investimento e trabalho, para ρ menor o salto inicial é maior e decai mais rápido, enquanto para ρ maior o salto é menor e mais duradouro. Discuta o papel relativo de efeito substituição versus efeito riqueza.

Resposta:

ρ **menor:** O ganho de produtividade é curto. O efeito substituição domina: famílias e firmas querem aproveitar esse ganho de produtividade e antecipam mais trabalho e investimento (salto maior).

ρ **maior:** Aumenta o rendimento permanente (efeito riqueza domina). Consumo sobe mais e de forma mais duradoura, trabalho e investimento têm saltos menores, porém são mais persistentes.

(b) Argumente por que o investimento i é mais volátil do que o consumo c e discuta como ambas funções IR reagem a ρ.

Resposta:

Por causa da suavização intertemporal, c responde menos. O ajuste, então, cai em i (que alinha o capital à nova produtividade marginal do capital), tornando o i mais volátil. Maior ρ aumenta a persistência das respostas de c e i. O pico de i tende a ser menor quando ρ é alto, mas apresenta cauda mais longa.

---

2 Modelo RBC com Depreciação Completa (2,8 pontos)

Considere uma economia RBC em tempo discreto com utilidade e tecnologia dadas por

$$u(C_t, L_t) \;=\; \log C_t \;+\; \theta \log(1 - L_t), \qquad Y_t \;=\; Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha},$$

e depreciação completa $\delta = 1$ (logo $K_{t+1} = I_t$), e produtividade estocástica

$$\log Z_{t+1} \;=\; \rho \log Z_t \;+\; \sigma \varepsilon_{t+1}, \qquad \varepsilon_{t+1} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Em que L_t é trabalho e $1 - L_t$ é lazer.

Notação. Defina as variáveis em logaritmos por $c_t = \log C_t$, $l_t = \log L_t$, $k_t = \log K_t$, $y_t = \log Y_t$ e $z_t = \log Z_t$. Assuma que a solução é linear nos logaritmos das variáveis.

1. **Problema do planejador social (0,4)**
   Escreva o problema do planejador social que maximiza

$$\max_{\{C_t, L_t, K_{t+1}\}_{t \geq 0}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \big[\log C_t + \theta \log(1 - L_t) \big],$$

   especificando claramente todas as restrições.

Resposta:

O problema do planejador é dado por

$$
\begin{aligned}
\max_{\{C_t, L_t, K_{t+1}\}_{t\geq 0}} \quad & \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\log C_t + \theta \log(1 - L_t)] \\
\text{s.t.} \quad & C_t + K_{t+1} \leq Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\
& \log Z_{t+1} = \rho \log Z_t + \sigma \varepsilon_{t+1} \\
& K_{t+1} \geq 0 \quad L_t \geq 0 \quad C_t \geq 0
\end{aligned}
$$

2. **Condições de primeira ordem (0,6)**
Derive as condições de primeira ordem em relação a: consumo (C_t), trabalho (L_t) e capital (K_{t+1}).

Resposta:

As condições de primeira ordem são

$$
\begin{aligned}
[C_t]: \quad & \beta^t \frac{1}{C_t} + \lambda_t[-1] = 0 \\
[L_t]: \quad & \beta^t \frac{\theta}{1 - L_t}(-1) + \lambda_t[(1-\alpha) Z_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha}] = 0 \\
[K_{t+1}]: \quad & \lambda_t[-1] + \lambda_{t+1} \mathbb{E}_t[\alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha}] = 0
\end{aligned}
$$

3. **Sistema não linear (0,5)**
Combine as condições de primeira ordem com as restrições para escrever o sistema de equações não-lineares que caracteriza o equilíbrio, incluindo: (i) a condição intertemporal (eq. de Euler), (ii) a condição intratemporal (trabalho-lazer), (iii) restrições de recursos, (iv) lei de movimento do capital e (v) processo estocástico de produtividade.

Resposta:

Combinando a condição de primeira ordem do consumo e do trabalho, temos a eq. intratemporal:

$$\frac{\theta}{1-L_t} = \frac{1}{C_t}(1-\alpha)Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

E combinando a condição de primeira ordem do consumo com a do capital do próximo período, temos a eq. de Euler:

$$\frac{1}{C_t} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{C_{t+1}} \alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right]$$

Então o sistema não linear que caracteriza o equilíbrio é dado por

$$\begin{cases} \text{(i) Euler} & \dfrac{1}{C_t} = \beta E_t \left[\dfrac{1}{C_{t+1}} \alpha Z_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right] \\ \text{(ii) Intra} & \dfrac{\theta}{1-L_t} = \dfrac{1}{C_t}(1-\alpha)Z_t K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} \\ \text{(iii) Recursos} & C_t + K_{t+1} = Z_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\ \text{(iv) Lei capital} & K_{t+1} = I_t \\ \text{(v) TFP} & \log Z_{t+1} = \rho \log Z_t + \sigma \varepsilon_{t+1} \end{cases}$$

---

4. **Solução por coeficientes indeterminados (1,0)**
   Considere que as funções de política ótimas sejam lineares nos logaritmos:

$$c_t \;=\; A_c + B_c\, k_t + C_c\, z_t, \qquad l_t \;=\; A_l + B_l\, k_t + C_l\, z_t.$$

   (a) Substitua essas conjecturas no sistema não linear e encontre os parâmetros $(A_\cdot, B_\cdot, C_\cdot)$ (pode usar um "chute direto" como em aula ou o método dos coeficientes a determinar).

   (b) Interprete economicamente os sinais de C_c e C_l.

Resposta:

Primeiro, note que em steady-state determinístico, da equação de Euler, temos:

$$\frac{1}{\bar{C}} = \beta \frac{1}{\bar{C}} \alpha \underbrace{\bar{K}^{\alpha-1}\bar{L}^{\alpha}}_{\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}} \quad \Rightarrow \quad \bar{K} = \beta\alpha\bar{Y}$$

E da restrição de recursos, temos

$$\bar{C} + \bar{K} = \bar{Y} \quad \Rightarrow \quad (1-\beta\alpha)\bar{Y}$$

Então, substituindo ambos resultados na equação intratemporal, temos

$$\frac{\theta}{1-\bar{L}} = \frac{1}{(1-\beta\alpha)\bar{Y}}(1-\alpha) \underbrace{\bar{K}^{\alpha}\bar{L}^{-\alpha}}_{\frac{\bar{Y}}{\bar{L}}} \quad \Rightarrow \quad \theta\bar{L} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\beta\alpha)}(1-\bar{L})$$

E concluímos que

$$\bar{L} = \frac{(1-\alpha)}{(1-\beta\alpha)\theta + (1-\alpha)}$$

ou seja, o trabalho não depende de K_t e de Z_t. Par, portanto, a política ótima de trabalho, supondo a forma sugerida, seria

$$l_t = A_l + B_l k_t + C_l z_t, \quad A_l = \log\bar{L},\ B_l = C_l = 0$$

Agora, aplicando log no produto, temos

$$y_t = z_t + \alpha k_t + (1-\alpha) l_t$$

e podemos substituir em

$$\begin{aligned} \bar{C} &= (1-\beta\alpha)\bar{Y} \\ c_t &= \log(1-\beta\alpha) + y_t \\ c_t &= \log(1-\beta\alpha) + z_t + \alpha k_t + (1-\alpha) l_t \end{aligned}$$

E chamando

$$A_c = \log(1-\beta\alpha) + (1-\alpha)\log \bar{L}, \quad B_c = \alpha, \quad C_c = 1$$

temos o resultado desejado. Observe que $C_c > 0$, ou seja, um aumento de TFP eleva o consumo proporcionalmente enquanto $C_l = 0$ implica que as horas de trabalho não reagem. Com $\log C$ e $\log(1-L)$, a renda e o salário crescem na mesma proporção que Y_t, mantendo o L_t constante.

---

5. **Limitações do modelo (0,3)**
   Liste três limitações principais deste RBC básico para explicar os dados de ciclos econômicos reais e sugira uma extensão para cada limitação.

Resposta:

A primeira limitação é que as horas são muito suaves e pouco voláteis, enquanto nos dados elas variam no ciclo. Uma forma de torná-las mais voláteis e incluir indivisibilidade de trabalho ou rigidez nominal.

Além disso, com $\delta = 1$ e sem custos de ajuste ou uso, o investimento é mero resíduo de Y_t. Então a volatilidade dele no modelo, no impacto, é mais alto do que o observado enquanto a persistência de K_t é menor do que nos dados. A correção seria possível com $\delta < 1$ e custos (convexos) de ajuste de investimento.

Por fim, o consumo também varia proporcionalmente ao produto. O consumo observado na prótica é mais suave do que o produto, mas não proporcional. E depende da persistência do choque. Uma forma de mitigar esse efeito seria intrdução de hábitos em consumo.

---

3 Compartilhamento de Risco em Mercados Completos (2,5 pontos)

Considere uma economia com dois períodos ($t = 0, 1$) e dois agentes ($i \in \{1, 2\}$). Em $t = 0$, não há consumo, nem produção; apenas mercados financeiros estão abertos. Em $t = 1$, as rendas são $y_i \in \{1, 2\}$ i.i.d., com probabilidade 1/2 cada.

Há quatro estados $s \in S = \{1, 2, 3, 4\}$ que correspondem a $(y_1, y_2) \in \{(2, 2), (2, 1), (1, 2), (1, 1)\}$, respectivamente. A utilidade é $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, para $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$, com fator de desconto $\beta = 1$.

1. **Mercados e equilíbrio (0,6)**

   Descreva os mercados financeiros disponíveis em $t = 0$ e defina formalmente um equilíbrio competitivo.

Resposta:

Tem-se um ativo contingente para cada estado s (Arrow-Debreu) com preço $q(s)$. O problema do agente é dado por:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_i(s)\}_s} \quad & \mathbb{E}\left[\frac{c_i(s)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right] = \frac{1}{4}\sum_s \frac{c_i(s)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
\text{s.t} \quad & \sum_s q(s)c_i(s) \leq \sum_s q(s)y_i(s)
\end{aligned}
$$

Equilíbrio Competitivo: São as sequências de consumo $\{c_i(s)\}_{i,s}$ e preços $\{q(s)\}_s$ tais que:

(I) Dado os preços $\{q(s)\}_s$, as sequências de consumo $\{c_i(s)\}_{i,s}$ são solução do problema de maximização dos agentes.

(II) Market clear: em cada s, $\sum_i c_i(s) = \sum_i y_i(s)$.

---

2. **Solução do equilíbrio (0,9)**

   (a) Use as condições de primeira ordem dos agentes para derivar uma condição de compartilhamento de risco.

   (b) Resolva para as alocações de consumo ótimas $c_i(s)$ em cada estado.

   (c) Determine os preços de equilíbrio $q(s)$ dos ativos contingentes.

Resposta:

Pela condição de primeira ordem, temos que para cada agente i e cada s

$$c_i(s)^{-\sigma} = \mu_i q(s)$$

Dividindo a condição de primeira ordem de um agente pelo outro, temos

$$\frac{c_1(s)}{c_2(s)} = \underbrace{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}_{\text{não depende de } s}$$

Pela simetria de renda, os multiplicadores são iguais ($\mu_1 = \mu_2$), o que implica que $c_1(s) = c_2(s)$. Subistuindo na condição de market clearing, temos

$$2c_1(s) = \underbrace{y_1(s) + y_2(s)}_{Y(s)} \quad \Rightarrow \quad c_1(s) = c_2(s) = \frac{Y(s)}{2} \quad \forall s$$

Da condição de primeira ordem, temos que os preços são proporcionais (por μ) ao consumo, então:

$$\mu \cdot q(s) = \left(\frac{Y(s)}{2}\right)^{-\sigma}$$

Escolhendo uma normalização, temos os preços. No caso de $\sum_s q(s) = 1$, concluímos que

$$q(s) = \frac{(Y(s)/2)^{-\sigma}}{\sum_s (Y(s)/2)^{-\sigma}}$$

de forma que ativos para estados ruins (com $Y(s)$ baixo) são mais caros proporcionalmente.

3. **Retornos dos ativos (1,0)**
   Defina o retorno $R^j(s) = \frac{1}{q(s)}$ do ativo contingente no estado s e calcule o retorno esperado $\mathbb{E}[R^j(s)]$. Explique intuitivamente por que alguns ativos têm retornos esperados diferentes e como isso depende do parâmetro de aversão ao risco σ.

Resposta:

Para o título que paga somente no estado s: $R(s) = 1/q(s)$ com probabilidade de $1/4$. Logo,

$$\mathbb{E}[R(s)] = \frac{1}{4}\frac{1}{q(s)} = \frac{1}{4}\frac{\sum_{s'}[Y(s')/2]^{-\sigma}}{(Y(s)/2)^{-\sigma}}$$

Ou seja, títulos que pagam em maus estados tem preços maiores e logo menos retorno esperado; os que pagam em bons estado têm prêmio de risco maior. A dispersão aumenta com o σ.

---

4 Equilíbrio Competitivo Recursivo (2,0 pontos)

Considere uma vila com um lago de pesca comum. O tempo é discreto e o horizonte é infinito. As preferências são $\sum_{t\geq 0}\beta^t u(c_t)$, com $u' > 0$, $u'' < 0$.

O estado é dado pelo estoque individual de peixes f e o total de peixes no lago F. Cada peixe rende 1 unidade comestível no período.

A decisão é manter $x \in [0, f]$ para reprodução, com consumo $c = f - x$. A taxa de crescimento privada é $z(F) > 0$, decrescente em F (congestionamento), por exemplo $z(F) = 1 + g - \phi F$. A transição individual é $f' = z(F)\,x$.

Não há mercado de peixe, agentes são atomistas e tomam como dada a lei de movimento agregada $F' = G(F)$.

O problema recursivo individual é

$$V(f; F) = \max_{x\in[0,f]} \left\{u(f - x) + \beta\,V(z(F)x,\ G(F))\right\}.$$

1. **Definição de RCE (0,8)**
   Defina formalmente um Equilíbrio Competitivo Recursivo especificando os objetos que caracterizam o equilíbrio e as condições que devem satisfazer (otimização individual, viabilidade, consistência agregada). Escreva explicitamente a condição de consistência agregada.

Resposta:

O equilíbrio competitivo recursivo é dado pela função valor V e função política g e lei de movimento agregada G tais que:

(I) **Otimização individual:** A função valor V satisfaz a equação de Bellman e $x = g(f, F)$ é sua função política.

(II) **Viabilidade:** $g(f, F) = x \in [0, f], \quad c = f - x$

(III) **Consistência agregada:** sob equilíbrio simétrico, $F' = G(F) = z(F)g(F; F)$

---

2. **Condições de equilíbrio (1,2)**

   (a) (Suponha interioridade.) Derive a equação de Euler que caracteriza as decisões ótimas dos agentes.

   (b) Escreva essa condição em termos agregados sob equilíbrio simétrico $f = F$.

   (c) Compare com o problema do planejador social e explique por que as soluções diferem.

Resposta:

A equação de Primeira ordem nos dá que:

$$-u'(f - x) + \beta V_f(f', F')z(F) = 0$$

o teorema do envelope nos dá que $V_f(f, F) = u'(f - x)$, e portanto, a equação de Euler é

$$u'(f - x) = \beta z(F)u'(f' - x')$$

com $f' = z(F)x, \quad F' = G(F), \quad x' = g(f', F')$.

Em termos agregados (equilíbrio simétrico), temos

$$u'(F - x(F, F)) = \beta z(F) u'\big(z(F)x(F, F) - x(G(F), G(F))\big)$$

O problema do planejador é dado por

$$W(F) = \max_{x \in [0,F]} \{u(F - x) + \beta W(z(F)x)\}$$

que nos dá a condição de primeira ordem:

$$-u'(F - x) + \beta \cdot W_F(z(F)x) \cdot z(F) = 0$$

E o envelope: $W_F(F) = u'(F - x) + \beta W_F(z(F)x) \cdot z'(F)x$

Então, chamando de $F' = z(F)x$, temos:

$$u'(F - x) = \beta z(F) \left[u'(F' - x') + \underbrace{\beta z'(F')x' W_F(F'')}_{\text{externalidade}} \right]$$

Ou seja, enquanto no equilíbrio competitivo, o agente ignora como seu consumo x hoje altera o F', não considera seu efeito de externalidade. Já no caso do planejador, ele internaliza esse efeito e escolhe menos reprodução do que o competitivo, isto é:

$$x^{\text{Planner}}(F) < x^{\text{RCE}}(F)$$

Ou seja, com recursos comuns congestionáveis, ampliar o estoque agregado futuro F' via reprodução hoje piora a produtividade da reprodução de amanhã (z menor). A agente competitivo não internaliza esse efeito sobre $z(\cdot)$, enquanto o planejador sim.

Boa prova!