Curso de ECONOMIA

Disciplina: CÁLCULO II **A1**

Aluno: ____

Data: 27/09/2024

Informações sobre a prova estabelecidas pelo professor

- O aluno só pode realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- Não serão entregues folhas de respostas. Cada questão deve ser resolvida nos espaços reservados para as soluções. Pode-se usar o frente e o verso de todas as folhas.
- O nome do aluno deve ser incluído em todas as folhas utilizadas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta com tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta com tinta vermelha ou verde.
- Apresente seu raciocínio de forma clara para que seus desenvolvimentos sejam avaliados, mesmo que parcialmente. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só pode ter consigo lápis, borracha e caneta. Se necessário, o fiscal pode solicitar ajuda a outro aluno, e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico. O celular deve ser desligado e guardado.

Extraído do Regulamento do Curso de Economia

Art. 46 - As penas previstas no artigo 43 serão aplicadas conforme a gravidade ou reincidência das faltas abaixo exemplificadas:

b) improbidade na execução dos atos escolares, destacando-se como **atos gravíssimos**, o **uso da 'cola'**, **cópia** e **plágio** durante a realização de avaliações escolares e/ou atividades escolares;

§ 1º A prática da **'cola'**, **cópia** e **plágio** em avaliações escolares será punida com a reprovação automática na disciplina.

Quadro de Notas

Questão	1	2	3	4	Total
Valor	4	2,5	3	0,5	10
Nota					
Revisão					

Questão 1.

Seja $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \log(1 + y^2)$.

(a) Determine uma aproximação de $f(0.05, -0.8)$.

(b) Determine, de forma aproximada, o quanto a função variou entre $(0, 0)$ e $(0.05, -0.8)$.

(c) Mostre que $f(x, y) \approx x + y^2$ numa vizinhança de $(0, 0)$.

Solução:

(a) Para determinar uma aproximação de $f(0.05, -0.8)$, podemos usar a aproximação linear de f em torno do ponto $(0, 0)$:

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot (y - 0).$$

Temos:

$$f(0, 0) = \operatorname{sen}(0) + \log(1 + 0^2) = 0 + 0 = 0,$$

logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \cos(0) = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + y^2} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{2 \cdot 0}{1 + 0^2} = 0.$$

Substituindo os valores tem-se

$$L(x, y) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$$

Segue, portanto,

$$f(0.05, -0.8) \approx L(0.05, -0.8) = 0.05.$$

(b)

Solução rápida: É suficiente fazer $\Delta f \approx df = L(0.05, -0.8) - f(0, 0) = 0.05$.

Segunda solução: Uma aproximação para a variação da função entre os pontos $(0, 0)$ e $(0.05, -0.8)$ é dada pela diferencial:

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) dy.$$

Temos que $dx = \Delta x = 0.05 - 0 = 0.05$ e $dy = \Delta y = -0.08 - 0 = -0.08$. Logo,

$$\Delta f \approx df = 1 \cdot 0.05 + 0 \cdot (-0.08) = 0.05.$$

(c) Observamos que a Aproximação Linear que encontramos na parte (a) não resolve o problema. Podemos pensar, então, na aproximação quadrática em torno de $(0, 0)$. Para isso, falta apenas calcular as derivadas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\operatorname{sen} x \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -\operatorname{sen}(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2(1 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + y^2)^2} = \frac{2(1 + y^2 - 2y^2)}{(1 + y^2)^2} = \frac{2(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{2(1 - 0)}{(1 + 0)^2} = 2$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Logo,

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2$$

Substituindo os valores obtemos

$$f(x,y) \approx x + y^2.$$

Questão 2.

Seja $f(x, y, z) = y^2 + xz$.

(a) Calcule a derivada direcional de f na direção de $\overrightarrow{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(b) No ponto $P(1, 2, 2)$, a função irá crescer mais na direção do vetor $\overrightarrow{v}$ do item anterior ou na direção de $\overrightarrow{w} = (2, 4, 1)$? Justifique.

Solução:

(a) Sabemos que a derivada direcional é dada pela fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x, y, z) = \langle \nabla f(x, y, z), \overrightarrow{v} \rangle.$$

Calculemos o gradiente de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + xz) = z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + xz) = 2y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + xz) = x,$$

logo

$$\nabla f(x, y, z) = (z, 2y, x).$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(x, y, z) = \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}(x - y + z).$$

(b) Crescerá mais na direção de $\overrightarrow{w} = (2, 4, 1)$ pois $\overrightarrow{w} = (2, 4, 1) = \nabla f(1, 2, 2)$, e o gradiente é a direção de maior crescimento da função.

Questão 3.
Considere a função $z = z(x, y)$ definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = e^{xz} + \sin(yz)$. Determine as taxas de variação de z com respeito a x e a y.

A equação fornecida é:

$$g(x, y, z) = e^{xz} + \sin(yz) - x^2 - y^2 = 0.$$

De acordo com o Teorema da Função Implícita, se temos uma função $g(x, y, z) = 0$ que define z implicitamente em termos de x e y, então

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y)}$$

Vamos calcular as derivadas parciais de $g(x, y, z)$ em relação a x, y, e z:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial x}(\sin(yz)) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = ze^{xz} + 0 - 2x - 0 = ze^{xz} - 2x,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin(yz)) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + z\cos(yz) - 0 - 2y = z\cos(yz) - 2y$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(yz)) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2) = xe^{xz} + y\cos(yz) - 0 - 0 = xe^{xz} + y\cos(yz)$$

Substituindo nas fórmulas das derivadas obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{ze^{xz} - 2x}{xe^{xz} + y\cos(yz)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{z\cos(yz) - 2y}{xe^{xz} + y\cos(yz)}$$

Claramente, essas duas expressões quando

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = xe^{xz} + y\cos(yz) \neq 0$$

Questão 4.

Mostre que o vetor gradiente de uma função diferenciável, $f(x, y)$, é ortogonal às suas curvas de nível nos pontos onde esse vetor não se anula.

Solução: Sejam $f(x, y)$ uma função diferenciável, (x_0, y_0) um ponto qualquer no domínio de f e $N = N_{f(x_0,y_0)}$ a curva de nível da função que contêm (x_0, y_0). Sabemos que existe uma parametrização local de N com $\alpha(0) = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(0) \neq 0$ (pois $\nabla f(x_0, y_0)$ é diferente de zero e é a direção de de maior crescimento de f. Assim,

$$f(\alpha(t)) = f(x_0, y_0),$$

Usando a Regra da Cadeia obtemos

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \langle \nabla f(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

e, avaliando em $t = 0$, concluí-se que

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), \alpha'(0) \rangle = 0.$$

Como nenhum dos dois vetores é nulo, segue que são ortogonais.