Lista 6 - Teoria Q
Completamente Opcional

Exercício 1 (Teoria Q)

Suponha uma firma de horizonte infinito, em tempo discreto, detida por um investidor neutro ao risco que desconta o futuro usando o fator β.

Os lucros da firma são lineares em k_t, com

$$\pi_t = Ak_t, \tag{1}$$

em que A é uma produtividade constante. O objetivo da firma é maximizar o valor presente dos lucros líquidos do custo total do investimento (ou seja, o VPL do fluxo de dividendos líquidos).

O custo de investimento é dado por

$$i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t,$$

em que i_t é o investimento bruto e G é a função custo de ajustamento dada por

$$G(i_t, k_t) = \xi \frac{(i_t)^2}{2k_t}.$$

Suponha que $\beta(A + 1 - \delta) > 1$ e que não haja incerteza.

(a) Monte o problema em forma sequencial (não recursivo) da firma.

(Resposta):

$$\begin{aligned}
\max_{i_t, k_{t+1}} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [Ak_t - i_t - \frac{\xi i_t^2}{2k_t}] \\
\text{s.t.} \quad & i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t
\end{aligned}$$

(b) Monte o problema em versão recursiva.

(Resposta):

$$\begin{aligned}
V(k) = \max_{i,k'} \quad & Ak - i - \frac{\xi i^2}{2k} + \beta \cdot V(k') \\
& i = k' - (1-\delta)k
\end{aligned}$$

(c) Obtenha a condição de otimalidade para k_{t+1} e a interprete. Dica: a forma sequencial pode ser mais um pouco mais fácil.

(Resposta): Reescrevendo o problema sequencial

$$\max_{k_{t+1}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [Ak_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - \frac{\xi(k_{t+1} - (1-\delta)k_t)^2}{2k_t}]$$

FOC: $\forall t$,

$$0 = -\beta^t \Big[1 + \frac{\xi \cdot i_t}{k_t}\Big] + \beta^{t+1} \Big[A + 1 - \delta - \xi \frac{-2(1-\delta)i_{t+1}2k_{t+1} - i_{t+1}^2 2}{4k_{t+1}^2}\Big]$$

$$\implies 1 + \frac{\xi(i_t)}{k_t} = \beta[A + 1 - \delta + \xi \frac{i_{t+1}[(1-\delta)2k_{t+1} + i_{t+1}]}{2k_{t+1}^2}]$$

Veja que, no lado direito da equação, temos o Q marginal.

(d) Mostre que a condição de otimalidade obtida pode ser representada como função apenas de taxas de investimento, da forma i_t/k_t e i_{t+1}/k_{t+1}.

(Resposta): Ora,

$$1 + \xi \cdot \frac{i_t}{k_t} = \beta \Big[A + 1 - \delta + \xi \cdot \frac{i_{t+1}}{k_{t+1}} \cdot \Big((1-\delta) + \frac{1}{2}\frac{i_{t+1}}{k_{t+1}}\Big)\Big]$$

(e) Argumente que um plano ótimo de investimento, se existe, envolve uma taxa de investimento fixa. Encontre uma equação quadrática para essa taxa. Focaremos na menor raiz desta equação como candidata à nossa solução.

(Resposta): Defina $x_t := \frac{i_t}{k_t}$. Então

$$1 + \xi \cdot x_t = \beta(A + 1 - \delta) + (1-\delta)\beta\xi \cdot x_{t+1} + \frac{\beta\xi}{2}x_{t+1}^2$$

Note que $x_t \geq 0$. Assim, para cada x_t, teremos x_{t+1} como raízes da equação acima. Como $\beta(A + 1 - \delta) > 1$ por hipótese e $(1-\delta)$ é próximo de 1 para valores razoáveis de δ, os valores da taxa de investimento logo se tornam negativos.

Seja x a taxa de investimento ótima dessa economia. Então

$$1 + \xi \cdot x = \beta \Big[A + 1 - \delta + \xi \cdot x \cdot \Big((1-\delta) + \frac{1}{2}x\Big)\Big]$$

$$\implies 0 = \beta(A + 1 - \delta) - 1 + \xi(\beta(1-\delta) - 1)x + \frac{\beta\xi}{2}x^2$$

(f) Usando a equação quadrática anterior e um argumento gráfico, mostre que existe uma relação monótona entre A e i/k.

(Resposta): Trivial.

(g) Suponha que exista um cross-section de firmas que divirja apenas em A. Qual a relação no cross-section entre A, q marginal e i/k?

(Resposta): Todos andam na mesma direção.

$$A_i > A_j \iff x_i > x_j \iff q_i > q_j$$

(h) Como você poderia usar o resultado de Hayashi, uma vez que q marginal não é observável aqui?

(Resposta): A função de custo de ajustamento é homegênea de grau um, a função lucro é linear, e assim vale o resultado de Hayashi. Portanto, podemos usar o q-médio para observar o q-marginal.

Exercício 2 (Teoria Q em tempo contínuo)

Considere uma firma neutra ao risco que escolhe investimento líquido e capital de modo a maximizar seu valor, sujetio a custos de ajustamento quadráticos

$$\max_{(I_t, K_{t+1})} \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \left\{ A_t F(K_t) - I_t - \frac{\gamma}{2} I_t^2 \right\} \right]$$

A restrição de acúmulo de capital é dado por:

$$K_{t+1} = K_t + I_t$$

$AF(K_t)$ é a função de produção bruta, onde A_t é a produtividade da firma, e a função F satisfaz as seguintes condições: $F' > 0$, $F'' < 0$, $F'(0) = \infty$, e $F'(\infty) = 0$. $\mathbb{E}_0$ denota valor esperado condicional em informações na data 0.

(a) Reformule o problema em tempo contínuo, e derive a equação Hamilton-Jacobi-Bellman associada ao problema.

$$rV(K) = \underset{\{I\}}{\text{Max}}\ AF(K) - I - \frac{\gamma}{2} I^2 + V'(K)\dot{K}$$
$$\text{s.t. } \dot{K} = I$$

(b) Enontre as condições de primeira ordem para o investimento e a equação de Euler para q.

CPO:

$$-1 - \gamma I + V'(K) = 0 \Rightarrow V'(K) = 1 + \gamma I = q$$
$$\Rightarrow V''(K)\dot{K} = \dot{q}$$

B-S:

$$rV\text{”}(K) = AF'(K) + V''(K)\dot{K}$$

Substituindo da CPO:

$$rq = AF'(K) + \dot{q}$$

Caracterizamos a eq. de Euler acima.

(c) Para este item, assuma produtividade constante, $A_t = \bar{A}$. Encontre um sistema de equações diferenciais com K_t e q_t que descrevam o problema e represente a sua dinâmica num diagrama de fases — coloque K no eixo horizontal e q no eixo vertical.

Isolando I da CPO anterior:

$$1 + \gamma I = q \Rightarrow I = \frac{q-1}{\gamma}$$

E então, substituindo em $\dot{K}$:

$$\dot{K} = \frac{q-1}{\gamma}$$

Para o lócus $\dot{K} = 0$:

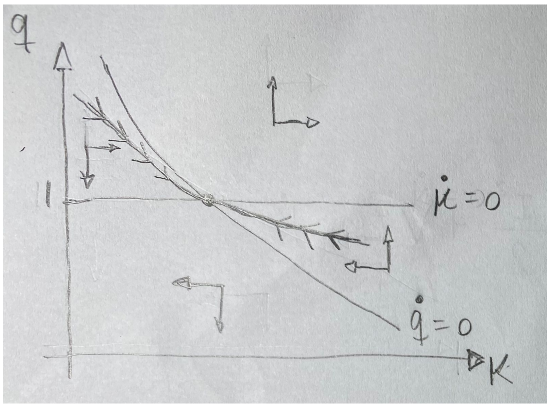
$$q = 1$$

Ou seja: o lócus $\dot{K} = 0$ é horizontal.

Já o outro lócus $\dot{q} = 0$ sai da eq. de Euler:

$$rq = AF'(K) \Rightarrow q = \frac{AF'(K)}{r}$$

Dado que $F'(K) < 0$, o lócus $\dot{q} = 0$ será negativamente inclinado. O gráfico então fica:



(d) Suponha agora que A_t flutue estocasticamente com intensidade λ entre dois níveis, A_L e A_H, onde $A_L < A_H$. Reformule a HJB incorporando esses saltos. Discuta a dinâmica do investimento. A firma experimenta períodos de baixa produtividade mas alto investimento (ou alta produtividade e baixo investimento)?

A HJB muda para:

$$rV(K_i, A_i) = \underset{\{I\}}{\text{Max}}\ A_i F(K_i) - I - \frac{\gamma}{2} I^2 + V'(K_i, A_i)\dot{K} + \lambda[V(K_i, A_j) - V(K_i, A_i)]$$

$$\text{s.t. } \dot{K} = I$$
