Cálculo II para Economia

Professora: Yunelsy N Alvarez

Monitores: Guilherme A. Cota e Marcos A. Alves

FGV EPGE

Lista 4. Conjuntos Convexos e Funções Convexas

Objetivos

- Compreender o conceito de conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$.
- Interpretar geometricamente a convexidade de conjuntos.
- Definir e identificar funções convexas e côncavas.
- Entender a relação entre convexidade da função e convexidade do domínio.
- Interpretar geometricamente a convexidade de uma função.

Exercício 4.1.

Mostre que as caixas em $\mathbb{R}^n$ são conjuntos convexos: $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Solução.

Recordemos que um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$, vale

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in C.$$

Seja então

$$C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Um ponto $\mathbf{x} \in C$ pode ser escrito como

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \qquad a_i \le x_i \le b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, n.$$

De modo análogo, para $\mathbf{y} \in C$ temos

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \qquad a_i \le y_i \le b_i \;\; \forall i.$$

Seja $\lambda \in [0,1]$. Consideremos a combinação convexa

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} = \big(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda) y_n\big).$$

Fixando i, como $x_i, y_i \in [a_i, b_i]$ e o intervalo $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ é convexo, concluímos que

$$\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \in [a_i, b_i].$$

Portanto, todas as coordenadas de $\mathbf{z}$ pertencem aos intervalos correspondentes, isto é,

$$\mathbf{z} \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = C.$$

Concluímos que C é convexo. $\square$

Exercício 4.2.

Mostre que **não** são convexos os conjuntos a seguir:

(a) Círculos: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$.

(b) Curvas fechadas que não incluem a região interna.

(c) União de duas bolas disjuntas.

Solução.

(a) Este conjunto é apenas a circunferência, não o disco. Considere dois pontos opostos, por exemplo $A = (r, 0)$ e $B = (-r, 0)$. O segmento que liga A e B contém pontos, como $(0, 0)$, que não pertencem à circunferência (pois $0^2 + 0^2 \neq r^2$). Portanto, existe um segmento entre pontos do conjunto que não está todo contido nele, logo o conjunto não é convexo.

(b) Em curvas fechadas sem sua região interna (por exemplo, o círculo do item anterior), se tomarmos dois pontos distintos do contorno, o segmento de reta que os une passa por dentro da curva, que não pertence ao conjunto. Assim, o conjunto não é convexo.

(c) Seja B_1 e B_2 bolas tais que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Pegue $x \in B_1$, $y \in B_2$. O segmento entre x e y passa por pontos fora das bolas, ou seja, fora de $B_1 \cup B_2$. Logo, esse conjunto não é convexo.

□

Exercício 4.3.

Seja C_i, $i \in \mathbb{N}$, uma família de conjuntos convexos.

(a) Mostre que o conjunto interseção $C = \bigcap_{i=1} C_i$ também é convexo.

(b) Dê o exemplo de um conjunto união $C = \bigcup_{i=1} C_i$ que não é convexo.

Solução.

(a) Seja $x, y \in C$. Então, por definição da interseção, temos:

$$x \in C_i \quad \text{e} \quad y \in C_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como cada C_i é convexo, para todo $t \in [0, 1]$ vale:

$$tx + (1-t)y \in C_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Logo:

$$tx + (1-t)y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = C.$$

Portanto, C é convexo.

(b) Considere:

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in [0, 1]\}$$

e

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1, x \in [0, 1]\}.$$

Ambos C_1 e C_2 são conjuntos convexos (segmentos de reta).

No entanto, a união

$$C = C_1 \cup C_2$$

não é convexa: por exemplo, $(0, 0) \in C_1$ e $(0, 1) \in C_2$, mas o ponto médio

$$\frac{(0, 0) + (0, 1)}{2} = (0, 0.5)$$

não pertence nem a C_1 nem a C_2, logo C não é convexo.

□

Exercício 4.4.

Mostre que as seguintes funções são convexas.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = \max\{x, y\}$

Solução.

(a) Seja $(x, y) = \theta(x_1, y_1) + (1-\theta)(x_2, y_2) = (\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\ \theta y_1 + (1-\theta)y_2)$.
Então, $f(x, y) = |\theta x_1 + (1-\theta)x_2| + |\theta y_1 + (1-\theta)y_2|$.

Aplicando a desigualdade triangular em $\mathbb{R}$ (isto é, $|\alpha u+\beta v| \le |\alpha|\,|u|+|\beta|\,|v|$), temos:

$$|\theta x_1 + (1-\theta)x_2| \le \theta|x_1| + (1-\theta)|x_2|,$$

$$|\theta y_1 + (1-\theta)y_2| \le \theta|y_1| + (1-\theta)|y_2|.$$

Somando essas duas desigualdades,

$$f(x,y) \le \theta(|x_1|+|y_1|) + (1-\theta)(|x_2|+|y_2|).$$

Isto é,

$$f\big(\theta(x_1,y_1)+(1-\theta)(x_2,y_2)\big) \le \theta f(x_1,y_1) + (1-\theta) f(x_2,y_2).$$

Logo, $f(x,y) = |x|+|y|$ é convexa em $\mathbb{R}^2$.

(b) Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Note que $f(x,y) = \|(x,y)\|_2$, ou seja, a norma euclidiana no $\mathbb{R}^2$. Toda norma é convexa, pois satisfaz a desigualdade triangular: para quaisquer $u,v \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\theta u + (1-\theta)v\|_2 \le \theta\|u\|_2 + (1-\theta)\|v\|_2, \quad \forall \theta \in [0,1].$$

Logo, $f(x,y)$ é convexa.

(c) Seja $(x,y) = \theta(x_1,y_1)+(1-\theta)(x_2,y_2) = (\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\, \theta y_1 + (1-\theta)y_2)$. Então, $f(x,y) = \max\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\, \theta y_1 + (1-\theta)y_2\}$.

Como $\max\{a,b\} \le \theta \max\{x_1,y_1\} + (1-\theta)\max\{x_2,y_2\}$ para quaisquer números $a = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$ e $b = \theta y_1 + (1-\theta)y_2$, obtemos:

$$f(x,y) \le \theta f(x_1,y_1) + (1-\theta) f(x_2,y_2).$$

Portanto, pela definição, $f(x,y) = \max\{x,y\}$ é convexa.

□

Exercício 4.5.

Mostre que se f é convexa, então $-f$ é côncava, e vice-versa.

Solução.

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, com $\lambda \in [0,1]$. Suponha que $f : C \to \mathbb{R}$ seja convexa. Então, pela definição de convexidade:

$$f\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2).$$

Multiplicando ambos os lados por -1, obtemos:

$$-f\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \geq \lambda(-f(\mathbf{x}_1)) + (1-\lambda)(-f(\mathbf{x}_2)).$$

Portanto, a função $-f$ satisfaz a desigualdade da definição de função côncava.
O recíproco é análogo: se f é côncava, então $-f$ é convexa. □

Exercício 4.6.

Sejam u_A e u_B duas funções utilidade. Abaixo, estão representadas as curvas de nível (curvas de indiferença) e o conjunto de pontos (bens) que geram uma utilidade maior que um determinado nível de utilidade k (conjunto de cestas fracamente preferidas):

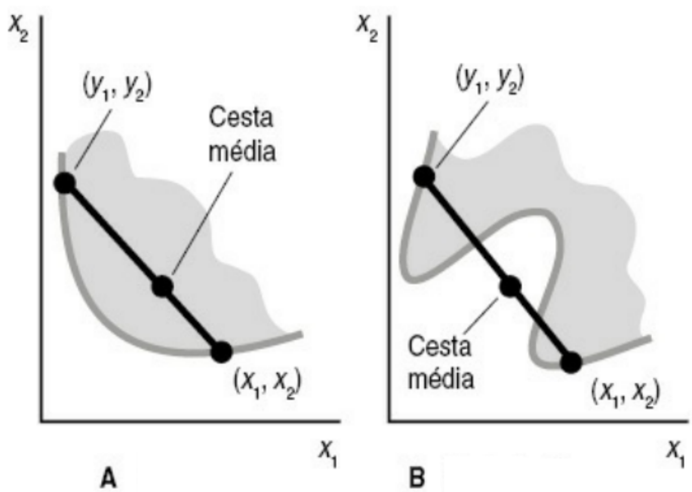

Figura 4.1

(a) Diga se as funções utilidades são convexas.

(b) Diga se os conjuntos de cestas fracamente preferidas são convexas.

Solução.

(a) Para ambas as funções utilidade, podemos encontrar pontos em que a cesta formada pela média ponderada das cestas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) gera uma utilidade estritamente maior que a soma ponderada das utilidade das cestas originais. Logo, as funções utilidade u_A e u_B não são convexas (u_A é côncava).

(b) O conjunto de cestas fracamente preferidas gerado pela função utilidade u_A é convexo, mas o conjunto de cestas fracamente preferidas gerado pela função utilidade u_B não é convexo.

□