04/03

Convexidade

A referência para essa parte é "Convex Analysis" do T. Rockafellar.

Variedade afim

No que se segue, V, será sempre um espaço vetorial real de dimensão finita.

Definição 1 *Se x e y são vetores distintos de V, a reta que passa por x e y é $L = \{rx + (1-r)\,y : r \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 2 *O conjunto $M \subset V$ é variedade afim se $(1-r)\,x + ry \in M$ sempre que $x, y \in M, r \in \mathbb{R}$.*

Em outras palavras M é variedade afim se contém toda reta que passa por cada par de pontos distintos de M.

Lema 1 *Se M é afim então se $x_i \in M, 1 \leq i \leq n$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M$.*

Demonstração: Para $n = 2$ a conclusão vale pela definição de variedade afim. Suponhamos agora que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ e $x_i \in M, i \leq n+1$. Sem perda de generalidade, $\lambda_{n+1} \neq 1$. Então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0$ e $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_i \in M$ pela hipótese de indução. Então

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in M.$$

Comentário 1 *O conjunto vazio e o espaço vetorial V são variedades afins. Se $M = \{m\}$ então M é afim.*

Exemplo 1 *Todo subespaço vetorial de V é uma variedade afim de V.*

Teorema 1 *Toda variedade afim é a translação de um subespaço vetorial.*

Demonstração: Seja F subespaço vetorial de V. Então $a + F$ é variedade afim: se $x, y \in a + F$ e r é real, temos $(1-r)\,x + ry = (1-r)\,(a+f) + r\,(a+g) = a + (1-r)\,f + rg \in a + F$. Recíprocamente, suponhamos M variedade afim de V. Seja $a \in M$ e definamos $F = M - a$. Vamos verificar que F é um subespaço vetorial. Sejam $x, y \in F$.

Então $\lambda x + a = \lambda\,(x+a) + (1-\lambda)\,a \in M$ implica $\lambda x \in F$ para todo real λ. Agora $\frac{1}{2}\,(x+a) + \frac{1}{2}\,(y+a) = \frac{x+y}{2} + a \in M$ e então $\frac{x+y}{2} \in F$ e então $x + y = 2\frac{x+y}{2} \in F$. Portanto F é subespaço vetorial.

Comentário 2 *O espaço vetorial associado à variedade afim M é $M - M$.*

Para verificar isso note que $a+F = M$. Então $F = F-F = (a+F)-(a+F) = M - M$.

Comentário 3 *A intersercção de variedades afins é uma variedade afim. Assim para $S \subset V$ exist* $\operatorname{aff} S$ *a menor variedade afim que contém S.*

Lema 2 $\operatorname{aff} S = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \geq 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in S\}$.

Demonstração: Seja $M = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \geq 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in S\}$. Então $M \supset S$. Sejam $x, y \in M$, r real. Então

$$rx+(1-r)\,y = r\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right)+(1-r)\left(\sum_{k=1}^{p} \mu_k x'_k\right), \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 = \sum_{k=1}^{p} \mu_k, x_i, x'_i \in S.$$

Logo $rx+(1-r)\,y = \sum_i r\lambda_i x_i + \sum_k (1-r)\,\mu_k x'_k \in M$ pois a soma dos coeficientes é 1. Com isso obtemos $M \supset \operatorname{aff} S$. Por outro lado $\operatorname{aff} S \supset M$ terminando a demonstração.

Definição 3 *A dimensão de uma variedade afim M é a dimensão do subespaço vetorial associado, $L(M) = M - M$.*

Definição 4 *Os vetores $b_0, \ldots, b_m$ são afim independentes se $b_1 - b_0, \ldots, b_m - b_0$ são linearmente independentes.*

Nesse caso $\operatorname{con}\{b_0, \ldots, b_m\}$ *é, por definição, um simplexo de dimensão m. E cada b_i é vértice do simplexo. O ponto $\frac{1}{m+1}(b_0 + b_1 + \ldots + b_m)$ é o baricentro do simplexo.*

Definição 5 *Um hiperplano no $\mathbb{R}^n$ é uma variedade afim de dimensão $n-1$.*

Teorema 2 *Para β real e $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle = \beta\}$ é um hiperplano. Além disso todo hiperplano do $\mathbb{R}^n$ possui uma tal representação com b, β únicos a menos de um múltiplo em comum.*

Demonstração: Seja H um hiperplano no $\mathbb{R}^n$. Seja $F = H - H$ o subespaço vetorial associado. Se $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ é uma base ortogonal de F e completando temos $\{b_1, \ldots, b_n\}$ base ortogonal do $\mathbb{R}^n$. É claro que $F = \{x : \langle x, b_n \rangle = 0\}$. Agora se $H = a + F$ e $\beta = \langle a, b_n \rangle$ temos se $b := b_n$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle = \beta\}. \qquad (*)$$

Recíprocamente se H está definido por (*), $b \neq 0$ seja $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle a, b \rangle = \beta$. Então se $\langle x, b \rangle = \beta = \langle a, b \rangle$ temos $x - a \perp b$. O subespaço $F = b^{\perp}$ tem dimensão $n-1$. Suponhamos $H = \{x : \langle x, b' \rangle = \beta'\}$ outra representação do hiperplano H. Mas então com F é ortogonal à b' temos $b' \in [b]$ ou seja $b' = \mu b$, $\mu \neq 0$. E $\langle x, b' \rangle = \mu \langle x, b \rangle = \mu\beta = \beta'$.

Comentário 4 *b é uma normal ao hiperplano H.*

Teorema 3 *Seja B matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = b\}$ é variedade afim. Além disso toda variedade afim é dessa forma.*

Demonstração: Sejam $x, y \in M$, r real. $B(rx + (1-r)y) = rBx + (1-r)By = rb + (1-r)b = b$. Por outro lado se M é afim própria seja $L = M - M$. Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ base de $L^\perp$. Então

$$L = \left(L^\perp\right)^\perp = \{x : x \perp b_i, i \leq m\} = \{x : \langle x, b_i \rangle = 0, i \leq m\} = \{x : Bx = 0\}.$$

Sendo B matriz $m \times n$ com linhas $b_1, \ldots, b_m$. Se $M = L + a = \{x : B(x-a) = 0\} = \{x : Bx = b\}$ sendo $b = Ba$.

Corolário 1 *Toda variedade afim de V é a intersecção de uma família finita de hiperplanos.*

Definição 6 *O conjunto $C \subset V$ é convexo se para todos c', c'' em C e $0 < r < 1$, $rc' + (1-r)c'' \in C$.*

Todo subespaço vetorial é convexo e toda variedade afim é convexa. Se $f \in V^* \setminus \{0\}$ então

$$\begin{aligned}
&\{x \in V : f(x) = \gamma\}, \text{ hiperplano} \\
&\{x \in V : f(x) < \gamma\}, \text{ semi–espaço aberto} \\
&\{x \in V : f(x) > \gamma\}, \text{ semi–espaço aberto} \\
&\{x \in V : f(x) \leq \gamma\} \text{ semi–espaço fechado} \\
&\{x \in V : f(x) \geq \gamma\}, \text{ semi–espaço fechado}
\end{aligned}$$

são convexos.

Comentário 5 *Note que as noções acima de aberto, fechado se referem ao aspecto geométrico e ao topológico pois f é um funcional linear contínuo.*

Lema 3 *A intersecção de convexos é um convexo.*

Demonstração: Seja $C = \cap_{i \in I} C_i$, cada C_i convexo de V. Se $x, y \in C$ e $r \in (0,1)$, de $x, y \in C_i$ vem $rx + (1-r)y \in C_i$ para todo i e logo $rx + (1-r)y \in C$.

Comentário 6 *O conjunto de soluções de um sistema de igualdades/desigualdades lineares é um conjunto convexo.*

Definição 7 *Um convexo poliédrico é a intersecção finita de semi–espaços fechados do espaço V.*

Definição 8 *Um politopo é a envoltória convexa de um conjunto finito de pontos.*

Definição 9 *A dimensão de um conjunto convexo C é a dimensão da variedade afim gerada por C.*

Se $x_1, \ldots, x_p$ são vetores e $r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} r_i = 1$ então $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i$ é uma combinação convexa de $x_1, \ldots, x_p$. Os conjuntos convexos, por definição, são fechados por combinações convexas de dois elementos ($p = 2$).

Lema 4 *Suponha C convexo e $x_1, \ldots, x_p \in C$. Então a combinação convexa $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i \in C$.*

Demonstração: Seja C convexo. Para $p = 2$ o resultado acima vale por definição. Se valer para $p \geq 2$. Suponhamos $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \in C$ e $r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p+1} r_i = 1$. Seja $x = \sum_{i=1}^{p+1} r_i x_i$ uma combinação convexa com $p+1$ termos. Note que pela hipótese de indução, $y = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} r_i} \sum_{i=1}^{p} r_i x_i \in C$. Mas então

$$x = \left(\sum_{i=1}^{p} r_i \right) y + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} r_i \right) x_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} r_i x_i \in C.$$

Portanto o resultado vale para $p + 1$ terminando a indução e a demonstração.

Definição 10 *Se $S \subset V$, a envoltória convexa de S, $\operatorname{con} S$, é a intersecção dos subconjuntos convexos de V que contém S.*

Comentário 7 *Temos*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{p} r_i s_i : p \geq 1, r_i \geq 0, s_i \in S, \sum_{i=1}^{p} r_i = 1 \right\}.$$

Exemplo 2 *Suponhamos $S := \{b_1, \ldots, b_p\} \subset V$. Então*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Com efeito as combinações com mais de p elementos facilmente se reduz a uma combinação com p elementos: basta somar os coeficientes de cada b_i repetido.

Teorema 4 (Carathéodory) *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Então*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} r_i s_i : s_i \in S, r_i \geq 0, \sum_i r_i = 1 \right\}.$$

Demonstração: Seja $x = \sum_{i=1}^{m} r_i s_i$ sendo $m > n+1$, uma combinação convexa, $s_i \in S$. Temos $s_2 - s_1, \ldots, s_m - s_1$ linearmente dependentes pois $m-1 > n$. Então

$$\lambda_1 (s_1 - s_m) + \ldots + \lambda_{m-1} (s_{m-1} - s_m) = 0, \exists i \leq m-1, \lambda_i \neq 0.$$

Seja $\lambda_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j$. Então $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_{m-1} s_{m-1} + \lambda_m s_m = 0$ e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_m = 0$. Note que pelo menos algum $\lambda_i > 0$. Seja $t \geq 0$ e note que

$$x = \sum_{i=1}^{m} r_i s_i - t \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i - t\lambda_i) s_i.$$

Agora t deve ser tal que $r_i - t\lambda_i \geq 0$ para todo i. Seja $t = \min\left\{ \frac{r_i}{\lambda_i} : \lambda_i > 0 \right\}$. Temos que $\sum_{i=1}^{m} (r_i - t\lambda_i) = \sum_i r_i - t \sum_i \lambda_i = 1$. Finalmente para i tal que $t = \frac{r_i}{\lambda_i}$ temos $r_i - t\lambda_i = 0$.

Logo escrevemos x como uma combinação linear de no máximo $m-1$ termos. Esse processo pode ser repetido até m alcançar $n+1$ e termina aí.

Corolário 2 *Se $K \subset V$ for compacto e $\dim V < \infty$ então $\operatorname{con} K$ é compacto.*

Demonstração: Seja $n = \dim V$. Seja $\Delta = \left\{ \lambda \in [0,1]^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$. A função $f : \Delta \times K^{n+1} \to V$,

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, k_1, \ldots, k_{n+1}) \to \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i k_i$$

é contínua. Portanto tem imagem compacta. Pelo teorema de Carathéodory $f(\Delta \times K^{n+1}) = \operatorname{con} K$. Logo $\operatorname{con} K$ é compacto.

06/03

Teorema 5 *O fecho de um conjunto convexo é convexo.*

Demonstração: Seja $S \subset V$ convexo no espaço normado V. Sejam $x, y \in \overline{S}$ e $0 < r < 1$. Existem seqüências $x_n \in S$, $y_n \in S$ e $\lim_n x_n = x, \lim_n y_n = y$. Então $rx_n + (1-r)\,y_n \in S$ e converge para $rx + (1-r)\,y$. Portanto $rx + (1-r)\,y \in \overline{S}$.

Teorema 6 *A soma vetorial de convexos é convexa.*

Demonstração: Se C_1 e C_2 são convexos, $C_1 + C_2$ é convexo pois $x = c_1 + c_2$ e $y = c_1' + c_2'$ então

$$rx + (1-r)\,y = rc_1 + (1-r)\,c_1' + rc_2 + (1-r)\,c_2' \in C_1 + C_2.$$

Lema 5 *Se C for convexo e $r_1, r_2 \geq 0$ então $(r_1 + r_2)\,C = r_1C + r_2C$.*

Demonstração: É imediato que $(r_1 + r_2)\,C \subset r_1C + r_2C$. Seja agora $y = r_1c_1 + r_2c_2$, $c_1, c_2 \in C$, Então $\frac{y}{r_1+r_2} = \frac{r_1}{r_1+r_2}c_1 + \frac{r_2}{r_1+r_2}c_2 \in C$. Logo $y \in (r_1 + r_2)\,C$.

Definição 11 *Para C convexo,*

i) $L = \cup_{n=1}^{\infty} n\,(C - C) = \cup_{r \geq 0} r\,(C - C)$ *é um espaço vetorial..*

ii) $\operatorname{aff} C = x_0 + L$ *para* $x^0 \in C$.

Demonstração: (i) Seja $z = r\,(c - c')$, $r > 0, c, c'$ em C. Para $n > r$,

$$\frac{r}{n}\,(c - c') = \left(\frac{r}{n}c + \left(1 - \frac{r}{n}\right)c\right) - \left(\frac{r}{n}c' + \left(1 - \frac{r}{n}\right)c\right) \in C - C \implies z \in n\,(C - C)\,.$$

Portanto $\cup_{r \geq 0} r\,(C - C) = \cup_{n=1}^{\infty} n\,(C - C)$. Seja $x \in L$. Então $-x \in L$ pela simetria de $C - C$. Portanto para verificarmos que L é fechado por produto por escalar λ podemos supor $\lambda > 0$. Mas então $\lambda x \in \cup_{r \geq 0} \lambda r\,(C - C) = \cup_{r \geq 0} r\,(C - C) = L$. Sejam $x, y \in L$ e r real. Temos $x = n\,(c - c')$, $y = m\,(c'' - c''')$ sendo $c, c', c'', c''' \in C$. Então

$$x + y = nc + mc'' - (nc' + mc''') = (n + m)\,(c'''' - c''''') \in L.$$

(ii) Se $c \in C$ temos $c = x^0 + (c - x^0) \in x^0 + L$. Portanto $C \subset x^0 + L$ e então $\operatorname{aff} C \subset x^0 + L$. Seja $H + x^0 = \operatorname{aff} C$. Agora se $c, c' \in C$, $c - c' \in H$ e logo $L \subset H$. Portanto $L = H$.

Interior relativo de um convexo[1]

Um intervalo na reta tem interior não–vazio mas no plano o interior é vazio. Uma propriedade importante dos convexos de dimensão finita, é que sempre tem interior relativo não–vazio. Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

Definição 12 *O interior relativo do convexo C, denotado* $\operatorname{ri} C$*, é o interior de C como subespaço topológico de* $\operatorname{aff} C$*: $z \in \operatorname{ri} C$ se existir $r > 0$ tal que $(z + rB) \cap \operatorname{aff} C \subset C$.*

Definição 13 *A fronteira relativa de C é $\overline{C} \setminus \operatorname{ri} C$.*

Exemplo 3 *Seja $S = \{(x, y) \geq 0 : x + y \leq 1\}$. Então se $L = [0, 1] \times \{0\}$ temos* $\operatorname{ri} L = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$*. E $L(S) =$ "o plano" e $\operatorname{ri} S = \{(x, y) >> 0, x + y < 1\}$.*

Lema 6 *Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Então $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\begin{aligned} T(z) &= (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \\ z &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

é contínua e tem inversa contínua.

Demonstração: Seja $\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Note que $\phi(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$. É imediato que $\phi = T^{-1}$ e é contínua. Seja

$$\begin{aligned} \delta &= \min\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right| : |\lambda|_1 = 1 \right\}, \\ |\lambda|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \end{aligned}$$

Pela compacidade de $\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sum_i |\lambda_i| = 1\}$ o mínimo existe e $\delta > 0$. Portanto se $\lambda \neq 0$, $\left| \frac{\lambda}{|\lambda|_1} \right|_1 = 1$ e

$$\left| \phi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|_1} \right) \right| \geq \delta \implies |\phi(\lambda)| \geq \delta |\lambda|_1.$$

Seja $z \in V$ e $\lambda = T(z)$. Então $|z| = |\phi(\lambda)| \geq \delta |\lambda|_1 = \delta |T(z)|$. Demonstrando a continuidade de T.

Teorema 7 *Seja $S = \operatorname{con}\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ um simplexo de dimensão n. Então $\operatorname{ri} S \neq \emptyset$.*

[1] Ou tudo que você sempre quis saber sobre o interior relativo e não teve coragem de perguntar.

Demonstração: Seja $L = L(S) = [b_1 - b_0, \ldots, b_n - b_0]$. Definamos $v_i = b_i - b_0$ e $b^* = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} b_i$ o baricentro do simplexo. Para $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$,

$$b^* + z = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - b_0) = \left(\frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) b_0 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n+1} + \lambda_i) b_i.$$

se

$$\frac{1}{n+1} + \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n; \qquad (*)$$
$$\frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0,$$

temos $b^* + z \in S$ pois $\frac{n}{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. O conjunto

$$\Delta = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n_{++} : \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0\right\}$$

é aberto e então $b^* \in \operatorname{ri} S$ pois $T^{-1}(\Delta)$ é aberto tal que $(b^* + T^{-1}(\Delta)) \cap \operatorname{aff} S \subset S$.

Teorema 8 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo não–vazio. Então* $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$.

Demonstração: Seja $S = \operatorname{con}\{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$ um simplexo de C com a dimensão m maior possível. Pelo teorema anterior $\operatorname{ri} S \neq \emptyset$. Se $C \setminus \operatorname{aff} S$ for não vazio então existe $b_{m+1} \in C$ com $b_{m+1} - b_0 \notin L(S)$. Contradição com a escolha de m. Logo $\operatorname{aff} C \subset \operatorname{aff} S$ e então vale a igualdade. Mas então $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$ pois $S \subset C$ e $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} C$.

Teorema 9 *Seja C convexo no $\mathbb{R}^n$. Se $x \in \operatorname{ri} C$ e $y \in \overline{C}$ então se $0 \leq r < 1$, $(1-r)x + ry \in \operatorname{ri} C \subset C$.*

Demonstração: Vou fazer somente o caso $L(C) = \mathbb{R}^n$. Nesse caso temos $x \in \operatorname{int} C$. Seja $0 < r < 1$. Para $\epsilon > 0$,

$$(1-r)x + ry + \epsilon B \subset (1-r)x + r(C + \epsilon B) =$$
$$(1-r)\left[x + \epsilon(1+r)(1-r)^{-1}B\right] + rC \subset (1-r)C + rC = C$$

se ϵ for suficientemente pequeno.

Corolário 3 $\operatorname{ri} C$ *é convexo.*

Corolário 4 *1. O fecho de* $\operatorname{ri} C$ *é* $\overline{C}$.

2. O interior relativo de $\overline{C}$ é ri C*.*

Demonstração: (1) É imediato do teorema 9. (2) Seja $z \in \mathrm{ri}\,\overline{C}$. E $x \in \mathrm{ri}\ C$. Para $\mu > 1$, suficientemente próximo de 1, $y = (1-\mu)\,x + \mu z = z - (\mu - 1)\,(x - z)$ ainda pertence a $\mathrm{ri}\,\overline{C} \subset \overline{C}$. Então se $\lambda = \mu^{-1}$,

$$z = \frac{1}{\mu}y - \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)x = \lambda y + (1-\lambda)\,x \in \mathrm{ri}\,C,$$

pelo teorema 9.

Corolário 5 *Sejam C_1 e C_2 convexos do $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\overline{C_1} = \overline{C_2} \iff \mathrm{ri}\,C_1 = \mathrm{ri}\,C_2.$$

Equivalentemente, $\mathrm{ri}\,C_1 \subset C_2 \subset \overline{C_1}$*.*

Demonstração: Suponhamos $\overline{C_1} = \overline{C_2}$. Pelo corolário anterior, $\mathrm{ri}\,C_1 = \mathrm{ri}\,\overline{C_1} = \mathrm{ri}\,\overline{C_2} = \mathrm{ri}\,C_2$.

Corolário 6 *Se C é convexo, todo aberto que intersecta $\overline{C}$ intersecta* ri C*.*

Demonstração: Fixe $x^0 \in \mathrm{ri}\ C$. Seja U aberto tal que $U \cap \overline{C} \neq \emptyset$. Existe então $c \in U \cap C$. Então para $r \in (0,1)$ suficientemente próximo de 1, $(1-r)\,x^0 + rc \in U$. Mas $(1-r)\,x^0 + rc \in \mathrm{ri}\ C$ terminando a demonstração.

Corolário 7 *Suponhamos que C_1 não–vazio é um subconjunto convexo da fronteira relativa de C_2. Ou seja $C_1 \subset \overline{C_2} \setminus \mathrm{ri}\,C_2$. Então* $\dim C_1 < \dim C_2$*.*

Demonstração: Se $\dim C_1 = \dim C_2$ então de $\mathrm{aff}\,C_1 \subset \mathrm{aff}\,C_2$ vem $\mathrm{aff}\,C_1 = \mathrm{aff}\,C_2$. Então se $x \in C_1$ é tal que $(x+U) \cap \mathrm{aff}\,C_1 \subset C_1$ vem

$$(x+U) \cap \mathrm{aff}\,C_2 \subset \overline{C_2} \implies x \in \mathrm{ri}\,C_2$$

em contradição com a hipótese.

Comentário 8 *O próximo teorema simplifica a verificação de que um ponto está no interior relativo.*

Teorema 10 *Seja C convexo. Então $z \in \mathrm{ri}\ C$ se e somente se para todo $x \in C$ existe $\mu > 1$ tal que $(1-\mu)\,x + \mu z \in C$.*

Demonstração: Caso $z \in \text{ri } C$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $(z + \epsilon B) \cap \text{aff } C \subset C$. Então $z - t(x - z) \in C$ se $0 < t < \frac{\epsilon}{|x-z|}$. Logo se $\mu = 1 + t$ temos $y := \mu z + (1 - \mu)x = z - t(x - z) \in C$. Recíproca: Seja x no interior relativo de C e $\mu > 1$ tal que $y = (1 - \mu)x + \mu z \in C$. Então definindo $\lambda = \frac{1}{\mu} \in (0, 1)$, $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Logo pelo teorema 9, $z \in \text{ri } C$.

Corolário 8 *Para C convexo. Então $z \in \mathring{C}$ se e somente se para todo vetor y existe $\epsilon > 0$, $z + \epsilon y \in C$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior obtemos que $z \in \text{ri } C$. Mas pela hipótese, $L(C) \supset \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e logo $\text{aff } C = \mathbb{R}^n$.

08/03

Teorema 11 *Seja C_i convexo, $i \in I$. Suponhamos que $\cap_{i\in I} \operatorname{ri} C_i \neq \emptyset$. Então:*

1. *O fecho de $\cap_{i\in I} C_i$ é igual a $\cap_{i\in I}\overline{C_i}$;*

2. *Se I for finito, o interior relativo de $\cap_i C_{i\in I}$ é $\cap_{i\in i} \operatorname{ri} C_i$.*

Demonstração: Fixemos $a \in \cap_{i\in I} \operatorname{ri} C_i$. Se $y \in \cap_{i\in I}\overline{C_i}$, $(1-r)\,a + ry \in \operatorname{ri} C_i$ para todo i se $r \in (0,1)$. E se r tende a 1 o limite é y. Portanto

$$\cap_{i\in I}\overline{C_i} \subset \overline{\cap_{i\in i} \operatorname{ri} C_i} \subset \overline{\cap_{i\in i} C_i} \subset \cap_{i\in I}\overline{C_i}.$$

Então vale (1). E $\cap_{i\in I} \operatorname{ri} C_i$ e $\cap_{i\in I} C_i$ tem o mesmo fecho. Eles tem então o mesmo interior relativo:

$$\operatorname{ri} \cap_{i\in i} C_i \subset \cap_{i\in I} \operatorname{ri} C_i.$$

Seja $z \in \cap_{i\in I} \operatorname{ri} C_i$. Cada segmento de reta em $\cap_{i\in I} C_i$ com um extremo z pode ser prolongado. A intersecção finita desses prolongamentos ainda é um prolongamento. Portanto $z \in \operatorname{ri} \cap_{i\in i} C_i$.

Corolário 9 *Seja C convexo e M variedade afim tal que $M \cap \operatorname{ri} C \neq \emptyset$. Então*

$$\operatorname{ri}(M \cap C) = M \cap \operatorname{ri} C,$$
$$\overline{M \cap C} = M \cap \overline{C}.$$

Demonstração: $\operatorname{ri}(M) = M$ e M é fechada.

Corolário 10 *Seja C_1 convexo. E $C_2 \subset \overline{C_1}$ convexo que não está contido na fronteira relativa de C_1. Então $\operatorname{ri}(C_2) \subset \operatorname{ri}(C_1)$.*

Demonstração: Se $\operatorname{ri}(C_2) \cap \operatorname{ri}(C_1) = \emptyset$, $\operatorname{ri}(C_2) \subset \overline{C_1} \setminus \operatorname{ri}(C_1)$. E C_2 estaria contido na fronteira relativa. Então $\operatorname{ri}(C_2) \cap \operatorname{ri}(C_1) \neq \emptyset$,

$$\operatorname{ri}(C_2) \cap \operatorname{ri}(C_1) = \operatorname{ri}(C_2) \cap \operatorname{ri}(\overline{C_1}) = \operatorname{ri}(C_2 \cap \overline{C_1})) = \operatorname{ri}(C_2)$$
$$\implies \operatorname{ri}(C_2) \subset \operatorname{ri}(C_1).$$

Proposição 1 $\operatorname{ri}(C_1 + C_2) = \operatorname{ri}(C_1) + \operatorname{ri}(C_2)$.

Demonstração: Seja $a_i \in \operatorname{ri}(C_i)$, $i = 1,2$. Para $z = c_1 + c_2 \in C_1 + C_2$, seja $\mu_i > 1$ tal que $(1-\mu_i)\,c_i + \mu_i a_i \in C_i, i = 1,2$. Seja $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. Então

$$(1-\mu)\,c_i + \mu a_i \in C_i, i = 1,2 \implies (1-\mu)\,z + \mu\,(a_1 + a_2) \in C_1 + C_2 \implies a_1 + a_2 \in \operatorname{ri}(C_1 + C_2).$$

Ou seja vale $\supset$. Para a inclusão reversa,

$$\overline{\operatorname{ri}(C_1) + \operatorname{ri}(C_2)} \supset \overline{\operatorname{ri}(C_1)} + \overline{\operatorname{ri}(C_2)} = \overline{C_1} + \overline{C_2} \supset C_1 + C_2 \supset \operatorname{ri}(C_1) + \operatorname{ri}(C_2)$$

e então $C_1 + C_2$ e $\operatorname{ri}(C_1) + \operatorname{ri}(C_2)$ tem o mesmo fecho e portanto o mesmo interior relativo. Logo $\operatorname{ri}(C_1 + C_2) = \operatorname{ri}(\operatorname{ri}(C_1) + \operatorname{ri}(C_2)) \subset \operatorname{ri}(C_1) + \operatorname{ri}(C_2)$.

Separação de convexos

Definição 14 *Sejam C_1 e C_2 convexos não–vazios.*

a) *O hiperplano H separa C_1 e C_2 se C_1 está num semi–espaço fechado de H e C_2 no outro.*

b) *H separa propriamente se $C_1 \cup C_2 \setminus H \neq \emptyset$.*

c) *Separa C_1 e C_2 fortemente se existe $\epsilon > 0$ tal que $C_1 + \epsilon B$ está num semi–espaço aberto de H e $C_2 + \epsilon B$ está contido no outro.*

d) *A separação é estrita se C_1 e C_2 estão em semi–espaços abertos distintos.*

Em termos analíticos, existe um funcional linear não–nulo $f(z) = \langle z, b\rangle$ e um escalar β tais que

$$\begin{aligned} C_1 &\subset \{x : f(x) \leq \beta\}, \\ C_2 &\subset \{x : f(x) \geq \beta\}. \end{aligned}$$

Note que trocando f por $-f$ trocamos o lado de separação.

Teorema 12 *Sejam C_1 e C_2 não–vazios do $\mathbb{R}^n$.*

separação própria *Existe um hiperplano separando–os propriamente se existir vetor b tal que*

$$\begin{aligned} \inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} &\geq \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}; \\ \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} &> \inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}. \end{aligned}$$

separação forte

$$\inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} > \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}.$$

Demonstração: Para a separação própria: Seja β entre $\sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}$ e $\inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\}$. Então β é finito, $b \neq 0$ e $H = \{x : \langle x, b\rangle = \beta\}$ é o hiperplano que separa propriamente. Para a separação forte sejam β e $\delta > 0$ tais que

$$\inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} - \delta > \beta > \delta + \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\}.$$

Seja $0 < \epsilon < \frac{\delta}{|b|}$. Para $x \in C_1 + \epsilon B$ e $y \in B$ temos

$$\langle x, b\rangle = \langle c_1 + \epsilon y, b\rangle \geq \inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} - \epsilon |b| > \inf\{\langle x, b\rangle : x \in C_1\} - \delta > \beta.$$

Analogamente,

$$\beta > \delta + \sup\{\langle x, b\rangle : x \in C_2\} \geq \langle x, C_2 + \epsilon B\rangle.$$

Lema 7 *Seja $H = \{x : \langle x, b\rangle = \beta\}$ um hiperplano. E C convexo tal que*

$$C \cap \{x : \langle x, b\rangle < \beta\} \neq \emptyset \text{ e}$$
$$C \cap \{x : \langle x, b\rangle > \beta\} \neq \emptyset.$$

Então $C \cap H \neq \emptyset$.

Demonstração: Sejam $x, y \in C$ tais que $\langle x, b\rangle < \beta < \langle y, b\rangle$. Então para $t = \frac{\beta - \langle x,b\rangle}{\langle y-x,b\rangle} \in (0, 1)$, $\langle (1-t)\,x + ty, b\rangle = \beta$.

Teorema 13 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo não–vazio e relativamente aberto: $C = \operatorname{ri} C$. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade afim disjunta de C. Existe então um hiperplano $H \supset M$ e tal que C está contido num dos semi–espaços abertos de H.*

Demonstração: Se M for um hiperplano então pelo lema anterior, C está contido num dos semi–espaços abertos de M. Se M não for hiperplano. Vamos obter uma variedade afim M' com dimensão maior do que a de M e ainda disjunta de C. Por meio de uma translação (de M e C) podemos supor $0 \in M$. Então $C - M \supset C$ e $0 \notin C - M$. Temos $\dim M^{\perp} \geq 2$ pois M não é hiperplano. Seja P subespaço vetorial de $M^{\perp}$, $\dim P = 2$. Seja $C' = P \cap (C - M)$. Se $C' \neq \emptyset$, C' é aberto em P pois de $\operatorname{ri}(C - M) = \operatorname{ri} C - \operatorname{ri} M = C - M$ vem $P \cap \operatorname{ri}(C - M) \neq \emptyset$ e pelo cor. 9,

$$\operatorname{ri} C' = P \cap \operatorname{ri}(C - M) = P \cap (C - M) = C'.$$

E temos $0 \notin C'$. Queremos encontrar um subespaço uni–dimensional $L \subset P$, $L \cap C' = \emptyset$. Nesse caso $M' = M + L$ é um subespaço com dimensão maior do que a de M e que não intersecta C. Se C' for vazio ou um ponto existe reta L que não intersecta C'. Se $\operatorname{aff} C'$ for uma reta que não passa pela origem escolhemos L paralela a $\operatorname{aff} C'$ passando pela origem. Se $\operatorname{aff} C'$ for uma reta passando pela origem, tomamos L perpendicular a ela e passando pela origem. Se $\dim \operatorname{aff} C' = 2$. Então C' é aberto topológico. Seja $K = \cup_{r>0} rC'$ o cone gerado por C'. Temos K aberto convexo. E $0 \notin K$. A intersecção de K com $S^1 = \{x \in P : |x| = 1\}$ é um "intervalo" de comprimento menor do que π (identificando P com $\mathbb{R}^2$) pois caso contrário conteria um par de antípodas e então a origem. Agora é só passar um reta pela origem que não passe por $S^1 \cap K$.

Teorema 14 *Sejam C_1 e C_2 convexos. Existe um hiperplano que separa C_1 e C_2 própriamente se e somente se os interiores relativos de C_1 e C_2 são disjuntos.*

Demonstração: $C = C_1 - C_2$ é convexo, Pela proposição 1, $\operatorname{ri} C = \operatorname{ri} C_1 - \operatorname{ri} C_2$ e então $0 \notin \operatorname{ri} C$. Existe um hiperplano contendo $M = \{0\}$ tal que $\operatorname{ri} C$ está contido num dos seus semi–espaços abertos. Logo C está contido num semi–espaço fechado. Resumindo: existe $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que

$$0 \leq \inf_{x \in C} \langle x, b\rangle = \inf_{x_1 \in C_1} \langle x_1, b\rangle - \sup_{x_2 \in C_2} \langle x_2, b\rangle$$
$$0 < \sup_{x \in C} \langle x, b\rangle = \sup_{x_1 \in C_1} \langle x_1, b\rangle - \inf_{x_2 \in C_2} \langle x_2, b\rangle .$$

Então o teorema 12 implica a separação própria. Por outro lado essas condições implicam $0 \notin \operatorname{ri} C$ pois $D = \{x : \langle x, b\rangle \geq 0\} \supset C$ e $\operatorname{ri} D = \{x : \langle x, b\rangle > 0\}$ intersecta C e portanto (cor. 10) $\operatorname{ri} C \subset \operatorname{ri} D$.

Teorema 15 *Sejam C_1 e C_2 convexos não–vazios. Para existir um hiperplano separando–os fortemente, é necessário e suficiente que*

$$d(C_1, C_2) := \inf\{|x_1 - x_2| : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\} > 0.$$

Em outras palavras, $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$.

Demonstração: Se um hiperplano separa fortemente C_1 e C_2 existe $\epsilon > 0$ tal que $(C_1 + \epsilon B) \cap (C_2 + \epsilon B) = \emptyset$. Mas então $d(C_1, C_2) \geq \epsilon$. Em particular $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$. Suponhamos agora $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$. Então $\epsilon B \cap (C_1 - C_2) = \emptyset$ para algum $\epsilon > 0$. Nesse caso $C_1 + \frac{\epsilon}{2} B$ e $C_2 + \frac{\epsilon}{2} B$ podem ser propriamente separados. E C_1 e C_2 são fortemente separados.

Lema 8 *Seja X fechado e K compacto em $\mathbb{R}^n$. Então $X - K$ é fechado.*

Demonstração: Seja $z_n = x_n - k_n \to z$. Passando para uma subseqüência se necessário podemos supor $k_n \to k \in K$. Mas então $x_n = z_n + k_n \to z + k \in X$. Logo $z \in X - K$.

Corolário 11 *Sejam C_1, C_2 convexos não–vazios, disjuntos e fechados, um deles limitado. Então existe um hiperplano separando–os fortemente.*

Demonstração: Com efeito, pelo lema anterior, $0 \notin \overline{C_1 - C_2} = C_1 - C_2$.

Corolário 12 *Se C_1, C_2 convexos, não–vazios com fechos disjuntos. Se um deles for limitado, existe um hiperplano que os separa fortemente.*