# 02/02

# Análise II

Monitor: Marcelo Gelati

Programa:

- Álgebra linear;
- Teoria dos espaços métricos;
- Otimização
- Análise convexa.

# Álgebra linear

## Corpo comutativo

Seja um conjunto $K$ munido de uma adição $+ : K \times K \to K$ e uma multiplicação $\cdot : K \times K \to K$. É muito conveniente usar a seguinte notação: $a + b = +(a, b)$ e $ab = \cdot\,(a, b)$. Às vezes por ênfase escrevemos $a \cdot b$ no lugar de $ab$. Então $K$ é um corpo (comutativo) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

**I.** $a + b = b + a$ para todos $a, b$ em $K$ (comutatividade da adição)

**II.** $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c$ em $K$ (associatividade da adição)

**III.** Existe $0 \in K$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a$ em $K$ (elemento neutro da adição)

**IV.** Para todo $a \in K$ existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$. (elemento inverso aditivo)

**V.** $ab = ba$ para todos $a, b$ em $K$ (comutatividade da multiplicação[1])

**VI.** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatividade do produto)

**VII.** Existe $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$ (elemento neutro da multiplicação)

**VIII.** Para todo $a \in K$, $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. (elemento inverso da multiplicação)

[1] Essa propriedade do produto é que define um corpo comutativo.

**IX.** $a\,(b+c) = ab + ac$ (distributividade da multiplicação com respeito à adição)

**X.** $1 \neq 0$.

**Exemplo 1** *$K = \mathbb{R}$ é o exemplo mais importante. Depois temos $K = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{Q}$.*

**Exemplo 2 (corpo finito)** *$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ com $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ e $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ é um corpo com dois elementos.*

**Comentário 1** *Para todo primo $p$ existe um corpo com $p$ elementos. O número de elementos de um corpo finito é primo.*

**Proposição 1** *Os elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.*

Por exemplo se $O'$ também for elemento neutro da adição: $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$.

**Proposição 2** *Para todo $a \in K$, $a \cdot 0 = 0$.*

**Demonstração:** Seja $b = a \cdot 0$. Então

$$b + b = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 = b.$$

Portanto somando $-b$ :

$$0 = b + -b = (b + b) + -b = b + (b + -b) = b + 0 = b.$$

## Espaço vetorial

Um espaço vetorial sob o corpo $K$ é uma tripla, $(V, +, \cdot)$ tal que: $V$ é um conjunto, $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : K \times\ V \to V$ com as seguintes propriedades:

**I.** Comutatividade da adição: $v + w = w + v$ para todo $v, w$ elementos de $V$;

**II.** Elemento neutro da adição: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \forall v \in V$;

**III.** Inverso da adição: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;

**IV.** Associatividade: $v + (w + u) = (v + w) + u$;

**V.** para $\lambda, \mu \in K$ e $v \in V$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$;

**VI.** $1 \cdot v = v$;

**VII.** $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$;

**VIII.** $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

**Notação 1** *Frequentemente vamos omitir o ponto. Assim* $\lambda v = \lambda \cdot v$. *E vamos passar a escrever os escalares preferencialmente com letras gregas.*

O corpo associado a um espaço vetorial é denominado de corpo de escalares.

**Exemplo 3** *O espaço vetorial mais simples é* $V = \{0\}$. *Se* $K$ *é um corpo,* $V = K$ *é um espaço vetorial se* $\lambda \cdot v = \lambda v$ *(a multiplicação em* $K$*).*

**Exemplo 4** $K^n$ *é um espaço vetorial: Se* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n, \lambda \in K$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n); \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n); \\ 0 &= (0, \ldots, 0), -x = (-x_1, \ldots, -x_n). \end{aligned}$$

*sendo* $x_i + y_i$ *a soma dos escalares* $x_i$ *e* $y_i$ *e* $\lambda x_i$ *o produto dos escalares* $\lambda$ *e* $x_i$. *Assim* $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{C}^n$ *são espaços vetorias sobre, respectivamente,* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

**Exemplo 5** *O espaço das funções contínuas de* $[a, b]$ *em* $\mathbb{R}$, *denotado* $\mathscr{C}$ *é um espaço vetorial sob* $K = \mathbb{R}$. *A soma de* $f, g \in \mathscr{C}$ *é* $(f + g)(t) = f(t) + g(t), a \leq t \leq b$. *E* $(\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t)$.

## Dependência linear

**Definição 1** *Seja* $V$ *um espaço vetorial sob o corpo* $K$. *Os vetores,* $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *são linearmente dependentes se existirem escalares,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *nem todos nulos tais que* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$.

**Exemplo 6** *Toda família finita,* $v_1, v_2, \ldots, v_m$, *que contém a origem é linearmente dependente. Pois se, digamos,* $v_1 = 0$ *então*

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m &= 0, \\ (1, 0, \ldots, 0) &\neq 0. \end{aligned}$$

**Comentário 2** *Naturalmente se os vetores não forem linearmente dependentes dizemos que são linearmente independentes. Assim*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m.$$

**Definição 2** *Um vetor $x$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ se existirem escalares $(\lambda_i)_{i=1}^m$ tais que $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$.*

**Lema 1** *Suponhamos $y$ uma combinação linear de $x_1, \ldots, x_p$ e que por sua vez cada $x_i$ seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$. Então $y$ é combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$.*

A demonstração é imediata. Se $y = \sum_{j=1}^p \mu_j x_j$ e $x_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{ji} v_i$ temos para $\gamma_i = \sum_{j=1}^p \mu_j \lambda_{ij}$

$$y = \sum_{j=1}^p \mu_j \left( \sum_{i=1}^m \lambda_{ji} v_i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^p \mu_j \lambda_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^m \gamma_i v_i.$$

**Teorema 1** *Suponhamos que $v_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Existe então $k \geq 2$ tal que $v_k$ seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$.*

**Demonstração:** Seja $k \leq n$ o primeiro natural tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes. Então $k \neq 1$ pois $v_1 \neq 0$ é linearmente independente. Portanto $k \geq 2$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

nem todos $\alpha_i$ nulos. Mas então $\alpha_k \neq 0$ pela escolha de $k$. Portanto

$$v_k = (-\alpha_1)\, \alpha_k^{-1} v_1 + \ldots + (-\alpha_{k-1})\, \alpha_k^{-1} v_{k-1}.$$

**Comentário 3** *É claro que se $v_k$ for combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$ então $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ e $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Pois se $v_k = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{k-1} v_{k-1}$ escolhemos $\mu_k = -1, \mu_j = 0$ para $j > k$ e obtemos $\sum_i \mu_i v_i = 0$.*

**Definição 3** *Um conjunto $\mathcal{G} \subset V$ é gerador se todo vetor de $V$ for uma combinação linear de elementos de $\mathcal{G}$.*

## Bases

**Definição 4 (base)** *Uma base do espaço vetorial $V$ é um conjunto $\mathfrak{X} \subset V$ gerador e linearmente independente.*

**Definição 5** *O espaço vetorial tem dimensão finita se existir uma base finita.*

**Exemplo 7** *$K^n$ tem dimensão $n$. Se $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\mathfrak{X} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

*é uma base: para $x \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) =$$
$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

*E se $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = 0$ então $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Rightarrow x_i \equiv 0$.*

**Teorema 2** *Todo espaço vetorial possui uma base.*

**Comentário 4** *A demonstração será omitida pois envolve o lema de Zorn que não temos tempo para estudar.*

**Exemplo 8** *Uma base de $\mathbb{R}$ considerado como espaço vetorial sob $K = \mathbb{Q}$ é denominada base de Hamel. Toda base de Hamel é infinita. Pois se $b_1, b_2, \ldots, b_p$ são reais, o conjunto das combinações lineares*

$$r_1 b_1 + r_2 b_2 + \ldots + r_p b_p, r_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq p$$

*é enumerável e portanto $\neq \mathbb{R}$.*

**Teorema 3** *Duas bases finitas de $V$ tem o mesmo número de elementos.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{G} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ gerador e $\mathfrak{X} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ linearmente independente. Então

$$y_m, x_1, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente. Pelo teorema 1 existe $x_i$ combinação linear de $y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}$. Podemos então eliminar $x_i$ da lista. Então

$$y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

é gerador. Se $m = 1$ então $n \geq 1$. Se $m > 1$ repetimos o processo:

$$y_{m-1}, y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente. Portanto podemos remover um $x_j, j \neq i$. Se $m > n$ o conjunto dos "$xs$" vai acabar antes dos "ys", uma contradição com a independencia linear dos ys. Então $m \leq n$. Sejam agora $\mathcal{G}$ e $\mathfrak{X}$ bases. Revertendo os papéis podemos considerar $\mathfrak{X}$ gerador e $\mathcal{G}$ linearmente independente. Então $m \geq n$ e finalmente $m = n$.

**Corolário 1** *Se $V$ tem um conjunto gerador finito então $V$ tem dimensão finita.*

**Corolário 2** *Se $V$ tem dimensão $n$ então $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.*

**Definição 6** *Um subconjunto não–vazio de $V$, $W$, é um subespaço vetorial se*

$$W + W \subset W,$$
$$K \cdot W \subset W.$$

**Comentário 5** *Todo subespaço contém a origem de $V$. E $W$ também é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar restritas à $W$.*