Lista 2

1. Quais das seguintes funções $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são transformações lineares?

   a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$
   b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
   c) $T(x_1, x_2) = (0, x_2)$
   d) $T(x_1, x_2) = (\operatorname{sen} x_1, x_2)$
   e) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$

2. Seja $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2)$. Determine a imagem de T e o kernel.

3. Verifique que l^2 e o espaço das funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ são espaços vetoriais de dimensão infinita.

4. Para x, y inteiros, definamos $x \equiv y \bmod(2)$ se $x - y$ for par (i.e. $x - y \in 2 \cdot \mathbb{Z}$). Então $\equiv \bmod(2)$ é uma relação de equivalência e

$$\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}_{\equiv} = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

5. Seja $m \geq 2$ um natural. Dizemos que m divide $x \in \mathbb{Z}$ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot m = x$. Para x, y inteiros definimos

$$x \equiv y \bmod(m)$$

   se m dividir $x - y$. Verifique que $\equiv$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ e que $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv$ tem m elementos.

6. Seja $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ contínua}\}$ com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

   Sejam $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_n(t) = \cos(n\pi t)$, $n \geq 1$. Verifique se a família $\{f_n(\cdot) : n \geq 0\}$ é ortonormal.

7. Seja V um espaço vetorial, e $\mathcal{L}(V, V)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares $S : V \to V$. Fixe um vetor não nulo $u \in V$ e seja $\mathcal{L}_u = \{S \in \mathcal{L}(V, V) : u \text{ é um autovetor de } S\}$. Mostre que $\mathcal{L}_u$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}$.

8. Seja $T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 3v_2)$, $v \in \mathbb{R}^2$. Calcule os autovalores de T.

9. Verifique que
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$$
para o produto interno $\langle x, y \rangle$.

10. Seja X um espaço vetorial com produto interno e seja S um conjunto ortogonal de vetores não nulos (isto é, se $x, y \in S$, e $x \neq y$ então $\langle x, y \rangle = 0$). Demonstre que S é linearmente independente.

11. Seja $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ contínua}\}$ com produto interno
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$
Seja W o espaço vetorial gerado for $\{f_1, f_2, f_3\}$ sendo $f_i(t) = t^i$. Obtenha uma base ortonormal para W.

12. Seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. A transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem a propriedade de que
$$\begin{aligned} Ax_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ Ax_2 &= x_2 + x_3, \\ Ax_3 &= x_1 + x_3. \end{aligned}$$
Escreva A^*x_1, A^*x_2, A^*x_3 em termos da base $\{x_1, x_2, x_3\}$, onde A^* é a transformação adjunta de A.

13. Se $e_1, e_2, \ldots, e_m$ é uma família ortogonal e $e_i \neq 0, 1 \leq i \leq m$ então $e_1, e_2, \ldots, e_m$ é linearmente independente.

14. Seja E um espaço Euclidiano, e seja $M \subset E$. Defina $M^\perp := \{y \in E :< x, y >= 0 \text{ para todo } x \in M\}$, o subconjunto de todos os vetores ortogonais a todos os vetores de M. Mostre que $M^\perp$ é um subespaço vetorial de E.

15. Seja E um espaço Euclidiano e seja M um subespaço vetorial de E. Verifique que $E = M \oplus M^\perp$.

16. Seja S um subconjunto de X, um espaço com produto interno. Mostre que $S^{\perp} = [S]^{\perp}$.

17. Seja S um subconjunto de X, um espaço com produto interno. Seja $S^{\perp\perp} = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$. Mostre que $[S] \subset S^{\perp\perp}$. Se X tem dimensão finita, demonstre que $[S] = S^{\perp\perp}$.

18. Seja X um espaço com produto interno e seja $A : X \to X$ uma transformação linear sobrejetiva com a propriedade de que $\langle x, y \rangle =< Ax, Ay >$ para todos $x, y \in X$. Demonstre que $A\left(U^{\perp}\right) = A(U)^{\perp}$ para todo subconjunto $U \subset X$.

19. Seja M um subespaço vetorial do espaço Euclidiano E, invariante sob a transformação linear $T : E \to E$; isto é, $T(M) \subset M$. Mostre que $M^{\perp}$ é invariante sob a adjunta T^*.

20. Seja E um espaço Euclidiano, e seja $T : E \to E$ uma transformação linear. Mostre que $\mathrm{ran}(A)^{\perp} = \ker(A^*)$, sendo $\mathrm{ran}(A) := \{Ax : x \in E\}$ a imagem de A e $\ker(A^*) := \{x : A^*x = 0\}$ é o núcleo de A^*.