10/02/2025

Análise II

Monitor: André Lelis

Programa

- Álgebra linear: espaços vetoriais, bases, operadores lineares, espaço quociente, adjunto, produto interno, ortogonalização de Gram–Schmidt.
- Espaços métricos: topologia dos espaços métricos, continuidade, espaços completos. Completamento. Compacidade. Espaços normados, teorema do ponto fixo de Banach.
- Análise convexa: Variedade afim. Ponto interno. Separação de convexos. Funções convexas, subgradiente.
- Otimização: Multiplicadores de Kuhn-Tucker, programa convexo, ponto de sela e Lagrangeano

Para espaço vetorias recomendo "Finite Dimensional Vector Spaces" do P. R. Halmos. Para espaços métricos o livro do Elon Lages "Espaços métricos". O livro do T. Rockafellar "Convex Analysis" tem muito mais do que necessitamos.

Álgebra linear

Espaço vetorial

Um espaço vetorial real é uma tripla, $(V, +, \cdot)$ tal que: V é um conjunto, $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ com as seguintes propriedades:

I. Comutatividade da adição: $v + w = w + v$ para todo v, w elementos de V;

II. Elemento neutro da adição: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \forall v \in V$;

III. Inverso da adição: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;

IV. Associatividade: $v + (w + u) = (v + w) + u$;

V. para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$;

VI. $1 \cdot v = v$;

VII. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$;

VIII. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Notação 1 *Frequentemente vamos omitir o ponto. Assim $\lambda v = \lambda \cdot v$. Os elementos de V são denominados* vetores. *E os números reais são os escalares.*

Exemplo 1 *O espaço vetorial mais simples é $V = \{0\}$. $V = \mathbb{R}$ é um espaço vetorial se $\lambda \cdot v = \lambda v$ (a multiplicação em $\mathbb{R}$).*

Exemplo 2 *$\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial: Se $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n); \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n); \\ 0 &= (0, \ldots, 0), -x = (-x_1, \ldots, -x_n). \end{aligned}$$

sendo $x_i + y_i$ a soma dos escalares x_i e y_i e λx_i o produto dos escalares λ e x_i.

Exemplo 3 *O espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, denotado $\mathscr{C}$ é um espaço vetorial real. A soma de $f, g \in \mathscr{C}$ é $(f + g)(t) = f(t) + g(t), a \leq t \leq b$. E $(\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t)$.*

Dependência linear

Definição 1 *Seja V um espaço vetorial real. Os vetores, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são linearmente dependentes se existirem escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nem todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$.*

Exemplo 4 *Toda família finita, $v_1, v_2, \ldots, v_m$, que contém a origem é linearmente dependente. Pois se, digamos, $v_1 = 0$ então*

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m &= 0, \\ (1, 0, \ldots, 0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Comentário 1 *Naturalmente se os vetores não forem linearmente dependentes dizemos que são linearmente independentes. Assim*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m.$$

Definição 2 *Um vetor x é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ se existirem escalares $(\lambda_i)_{i=1}^{m}$ tais que $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$.*

Lema 1 *Suponhamos y uma combinação linear de $x_1, \ldots, x_p$ e que por sua vez cada x_i seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$. Então y é combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$.*

A demonstração é imediata. Se $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j$ e $x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} v_i$ temos para $\gamma_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \lambda_{ij}$

$$y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} v_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j \lambda_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i.$$

Teorema 1 *Suponhamos que $v_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Existe então $k \geq 2$ tal que v_k seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$.*

Demonstração: Seja $k \leq n$ o primeiro natural tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes. Então $k \neq 1$ pois $v_1 \neq 0$ é linearmente independente. Portanto $k \geq 2$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

nem todos α_i nulos. Mas então $\alpha_k \neq 0$ pela escolha de k. Portanto

$$v_k = (-\alpha_1)\, \alpha_k^{-1} v_1 + \ldots + (-\alpha_{k-1})\, \alpha_k^{-1} v_{k-1}.$$

Comentário 2 *É claro que se v_k for combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$ então $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ e $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Pois se $v_k = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{k-1} v_{k-1}$ escolhemos $\mu_k = -1, \mu_j = 0$ para $j > k$ e obtemos $\sum_i \mu_i v_i = 0$.*

Definição 3 *Um conjunto $\mathcal{G} \subset V$ é gerador se todo vetor de V for uma combinação linear de elementos de $\mathcal{G}$.*

Bases

Definição 4 (base) *Uma base do espaço vetorial V é um conjunto $\mathfrak{X} \subset V$ gerador e linearmente independente.*

Definição 5 *O espaço vetorial tem dimensão finita se possuir uma base finita.*

Exemplo 5 *K^n tem dimensão n. Se $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{X} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base: para $x \in \mathbb{R}^n$ temos*

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

E se $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = 0$ então $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Rightarrow x_i \equiv 0$.

Teorema 2 *Todo espaço vetorial possui uma base.*

Comentário 3 *A demonstração será omitida pois envolve o lema de Zorn que não temos tempo para estudar.*

Teorema 3 *Duas bases finitas de V tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ gerador e $\mathfrak{X} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ linearmente independente. Então

$$y_m, x_1, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente pois y_m é combinação linear de $x_1, \ldots, x_n$. Pelo teorema 1 existe x_i combinação linear de $y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}$. Podemos então eliminar x_i da lista. Então

$$y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

é gerador. Se $m = 1$ então $n \geq 1$. Se $m > 1$ repetimos o processo:

$$y_{m-1}, y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente. Portanto podemos remover um $x_j, j \neq i$. Se $m > n$ o conjunto dos "xs"vai acabar antes dos "ys", uma contradição com a independencia linear dos ys. Então $m \leq n$. Sejam agora $\mathcal{G}$ e $\mathfrak{X}$ bases. Revertendo os papéis podemos considerar $\mathfrak{X}$ gerador e $\mathcal{G}$ linearmente independente. Então $m \geq n$ e finalmente $m = n$.

Corolário 1 *Se V tem um conjunto gerador finito então V tem dimensão finita.*

Corolário 2 *Se V tem dimensão n então $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.*

12/02

Subespaços

Se A e B são subconjuntos de V, definimos $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Definição 6 *Um subconjunto W do espaço vetorial V é um subespaço de V se for um espaço vetorial com a soma e multiplicação herdadas de V. Ou seja: $0 \in W$ e*

$$v, w \in W \implies v + w \in W;$$
$$\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \implies \lambda w \in W.$$

Por exemplo $-w = (-1) \cdot w \in W$. Em geral W não–vazio é um subespaço se e somente se para todo $x, y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + y \in W$. Os subespaços $\{0\}$ e V são subespaços triviais.

Lema 2 *Se W_i é subespaço de V para cada $i \in I$ então $\cap_{i \in I} W_i$ também é um subespaço de V.*

A verificação é imediata: se $x, y \in \cap_{i\in I} W_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então para todo $i \in I$, $x, y \in W_i \implies \lambda x + y \in W_i$ e logo $\lambda x + y \in \cap_{i \in I} W_i$.

Definição 7 *Seja $S \subset V$. Definimos o espaço vetorial gerado por S:*

$$[S] = \cap \{W \subset V : W \text{ é subespaço e contém } S\}.$$

Lema 3 *$[S]$ coincide com o conjunto de combinações lineares $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ com $n \geq 1, \lambda_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in S$, $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: Seja $A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S, 1 \leq i \leq n, n \geq 1.\}$. É imediato que $S \subset A \subset [S]$. Sejam agora $w_1, w_2 \in A$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Para cada $i = 1, 2$ existem $v_{ij} \in S, \theta_{ij} \in \mathbb{R}$ e $n_i \geq 1$ tais que $w_i = \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij}$. Então

$$\sum_i \mu_i w_i = \sum_i \mu_i \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij} = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i \theta_{ij} v_{ij} \in A.$$

Portanto A sendo espaço vetorial, $A \supset [S]$ e logo $A = [S]$.

Exemplo 6 *Se U e W são subespaços de V, $U + W$ é um subespaço. E $[U \cup W] = U + W$.*

Para verificarmos notemos que $x, y \in U + W$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} & x = u + w, y = u' + w', \alpha x + \beta y = \\ & \quad \alpha (u + w) + \beta (u' + w') = (\alpha u + \beta u') + (\alpha w + \beta w') \in U + W. \end{aligned}$$

Portanto $U + W$ é um subespaço e contém $[U \cup W]$. E $[U \cup W] \supset U + W$

Definição 8 *U e W são subespaços complementares de V se*

$$U + W = V \text{ e } U \cap W = \{0\}.$$

Notação 2 *$V = U \oplus W$. Nesse caso dizemos que V é soma direta de U e W.*

Exemplo 7 *Seja $V = \mathbb{R}^2$. E $U = [(1,1)]$, $W = [(1,-1)]$. Então $U \oplus W = \mathbb{R}^2$.*

Lema 4 *Se $v_1, \ldots, v_p$ são linearmente independentes do espaço de dimensão finita V, existem $v_{p+1}, \ldots, v_n$ em V tais que $v_1, \ldots, v_n$ é uma base de V.*

Demonstração: Se $v_1, \ldots, v_p$ for gerador já temos uma base e não temos nada a fazer. Se não for gerador existe $v_{p+1} \in V \setminus [v_1, \ldots, v_p]$. Então $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}$ é linearmente independente. Se a familia for geradora terminamos. Caso não seja existe $v_{p+2} \in V$ que não é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{p+1}$. E portanto $v_1, \ldots, v_{p+1}, v_{p+2}$ é l.i. Prosseguindo indutivamente obtemos uma seqüência $v_1, \ldots, v_{p+k}$ l.i. sempre que $v_1, \ldots, v_{p+k-1}$ não for gerador. Esse processo termina quando $p + k = \dim V$. E então obtemos uma base de V.

Teorema 4 *Todo subespaço de V possui um subespaço complementar.*

Demonstração: Seja W subespaço de V. Seja $w_1, \ldots, w_k$ base de W. Prolonguemos essa base a uma base de V: $w_1, \ldots, w_n$. Seja $H = [w_{k+1}, \ldots, w_n]$. Então $W + H = V$ e $W \cap H = \{0\}$. Pois se $x \in V$ temos $x = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + (\lambda_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \lambda_n w_n) \in W + H$. Se $z \in W \cap H$ então

$$z = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k = \lambda_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \lambda_n w_n$$
$$\lambda_{k+1} w_{k+1} + \ldots + \lambda_n w_n - \lambda_1 w_1 - \ldots - \lambda_k w_k = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i.$$

Teorema 5 $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ base de $U \cap W$. Podemos, aplicando o teorema 2, completar $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ para obter uma base de U: existem $u_1, \ldots, u_k \in U$ tais que

$$v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k$$

seja uma base de U. Aplicando o teorema 2 novamente existem $w_1, \ldots, w_t$ tais que

$$v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_t$$

é uma base de W. Note que $p + k = \dim U$ e $p + t = \dim W$. Verifiquemos que

$$v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t$$

é base de $U + W$:

gerador) Seja $x \in U + W$. Então $x = u + w$ sendo $u \in U$ e $w \in W$. Existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_k$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j.$$

Existem $\lambda_1', \ldots, \lambda_p'$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$ escalares tais que

$$w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' v_i + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j$$

e então

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' v_i + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i + \lambda_i'\right) v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j. \end{aligned}$$

l.i.) Suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = 0.$$

Então $\sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j \in U \cap W$. Existe então $\gamma_i, i \leq p$ tais que

$$\sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i \implies \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i + \sum_{j=1}^{t} \left(-\theta_j\right) w_j = 0.$$

Pela independência linear de $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_t$ obtemos $\theta_j = 0, 1 \leq j \leq t$. Considerando agora

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j = 0$$

vem $\lambda_i = 0$ e $\mu_j = 0$ pela independência linear de $v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k$. Finalmente temos

$$\dim\left(U + W\right) + \dim\left(U \cap W\right) = p + k + t + p = \dim U + \dim W.$$

Transformações lineares

Se V e W são espaços vetoriais sob o corpo K. Uma função $T : V \to W$ é linear se for aditiva e homogênea:

$$\begin{aligned} T\left(a + b\right) &= T\left(a\right) + T\left(b\right), a, b \in V \\ T\left(\lambda a\right) &= \lambda T\left(a\right), \lambda \in K, a \in V. \end{aligned}$$

Note que $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$. E $T(-v) = (-1)T(v) = -T(v)$. Podemos juntar as condições numa só:

$$T(\lambda a + b) = \lambda T(a) + T(b), \lambda \in K \text{ ou ainda}$$
$$T(\lambda a + \mu b) = \lambda T(a) + \mu T(b), \lambda, \mu \in K.$$

Notação 3 *O conjunto dos zeros de T é o núcleo (ou o kernel) de T. É denotado* $\ker T$. *A imagem de T é $T(V)$:*

$$\ker T = \{v \in V : T(v) = 0\};$$
$$T(V) = \operatorname{ran} T = \{T(v) : v \in V\}.$$

Ambos são subespaços vetoriais.

Lema 5 *$T : V \to W$ linear é injetiva se e somente se $T(v) = 0$ implica $v = 0$.*

Demonstração: Se T for injetiva, $T(v) = 0 = T(0)$ e então $v = 0$. Reciprocamente suponhamos $\ker T = \{0\}$. Se $T(v) = T(w)$ então $T(v - w) = T(v) - T(w) = 0$ e então $v - w = 0 \implies v = w$.

Lema 6 *Se T é injetiva e $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.i. então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ é l.i.*

Demonstração: Pois se $\sum_i \lambda_i T(v_i) = 0$ pela linearidade $T\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = 0 \implies \sum_i \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i$.

A família das transformações lineares entre V e W, $\mathscr{L}(V, W)$, é um espaço[1] vetorial. Se $S, T \in \mathscr{L}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$,

$$(S + T)(v) := S(v) + T(v);$$
$$(\lambda S)(v) = \lambda S(v).$$

Definição 9 *Os funcionais lineares de V são as transformações lineares entre V e $\mathbb{R}$.*

Escrevemos V' ou às vezes V^* para denotar $\mathscr{L}(V, \mathbb{R})$. Dizemos que V' é o espaço dual de V. O espaço V'', bi–dual.

Teorema 6 *Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial V. Sejam $\alpha_i, 1 \le i \le n$ escalares. Existe um e único $y' \in V'$ tal que $\langle v_i, y' \rangle := y'(v_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Demonstração: Existência. Para $x = \sum_i \lambda_i v_i$ seja $y'(x) = y'\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. Temos y' bem definida pois λ_i é unívocamente determinado por x (lema 2) Vamos verificar a linearidade: Se $y = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ e $r \in K$ temos $rx + y = \sum_i (r\lambda_i + \mu_i) v_i$. Logo

$$y'(rx + y) = \sum_i (r\lambda_i + \mu_i) \alpha_i = r \sum_i \lambda_i \alpha_i + \sum_i \mu_i \alpha_i = ry'(x) + y'(y)$$

É imediato que $y'(v_i) = \sum_{j \ne i} 0\alpha_j + 1\alpha_i = \alpha_i$. Unicidade: óbvio.

[1] Verificação: exercício.

14/02

Seja $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. (delta de Kronecker)

Teorema 7 *Se* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *é uma base de* V *existe* $\{y^1, \ldots, y^n\}$ *base*[2] *de* V' *tal que* $\langle v_j, y^i \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq n$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, existe para $j \leq n$, $y^j \in V'$ tal que $\langle v_i, y^j \rangle = \delta_{ij}$. Verifiquemos que $\{y^1, \ldots, y^n\}$ é base de V'. Seja $y' \in V'$. Seja $\alpha_i = y'(v_i)$. Então $y' = \sum_j \alpha_j y^j$ pois

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y' \right\rangle = \sum_i \lambda_i \langle v_i, y' \rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i.$$

Agora

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j \right\rangle = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \alpha_j y^j \right\rangle = \sum_j \alpha_j \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j \right\rangle = \sum_j \alpha_j \lambda_j = \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y' \right\rangle.$$

Falta a independência linear: Se $\sum_j \alpha_j y^j = 0$ então $\sum_j \alpha_j y^j (v_i) = \alpha_i = 0$.

Corolário 3 $\dim V' = \dim V$.

Reflexividade do bidual

Dado $x \in V$ podemos definir um funcional $\Phi_x : V' \to K$ do bidual V'' da seguinte maneira:

$$\Phi_x(y') := \langle x, y' \rangle := y'(x).$$

É imediato de se verificar que Φ_x é linear.

Teorema 8 (reflexividade) *Para todo* $z'' \in V''$ *existe um único* $x \in V$ *tal que*

$$\langle z'', y' \rangle = \Phi_x(y') = \langle x, y' \rangle, \forall y' \in V'.$$

[2] chamada de base dual

Demonstração: Seja $\Theta : V \to V''$, $\Theta(x) = \Phi_x$ para $x \in V$. Verifiquemos que Θ é linear: para $v, w \in V$ e r real, para todo $y' \in V'$,

$$\Theta(rv + w)(y') = y'(rv + w) = ry'(v) + y'(w) = r\Theta(v)(y') + \Theta(w)(y') =$$
$$(r\Theta(v) + \Theta(w))(y').$$

Portanto $\Theta(rv + w) = r\Theta(v) + \Theta(w)$. Injetividade: Se $\Theta(v) = 0$ então $y'(v) = 0$ para todo $y' \in V'$. Se $v \neq 0$ seja $v = v_1, v_2, \ldots, v_n$ base de V. Então pelo teorema 6, para $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ existe $y' \in V'$ tal que $y'(v) = y'(v_1) = 1 \neq 0$. Logo $v = 0$. Agora $\dim V = \dim V''$ e Θ sendo linear injetiva, temos Θ sobrejetora.

Isomorfismo entre espaços vetoriais

Definição 10 *Os espaços V e W sob o corpo K são isomorfos se existir $T : V \to W$ linear, injetiva e sobrejetora.*

Comentário 4 *É imediato de se verificar que $T^{-1} : W \to V$ é linear, injetiva e sobrejetora.*

É imediato que espaços isomorfos tem a mesma dimensão. O próximo resultado é mais preciso.

Teorema 9 *Se V tem dimensão n sob o corpo K então V é isomorfo a K^n.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V. Para cada $x \in V$ existem únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Então

$$T(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

está bem definida. É imediato que $T(x) = 0 \iff x = 0$. Sejam $x, y \in V$ e $\lambda \in K$. Então se $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ e $y = \sum_i \mu_i x_i$ temos $x + y = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) x_i$ e então $T(x + y) = (\lambda_i + \mu_i)_{i=1}^{n} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n) = T(x) + T(y)$. E de $\theta x = \sum_i \theta \lambda_i x_i$ vem $T(\theta x) = \theta T(x)$.

Comentário 5 *Esse isomorfismo depende da escolha de uma base e isso limita (um pouco) a sua utilidade.*

Espaço quociente

Definição 11 *Uma relação de equivalência no conjunto X é uma relação binária, $\sim$, tal que para todos $x, y, z \in X$:*

1. $x \sim x$;

2. $x \sim y \implies y \sim x$*;*

3. $x \sim y$ *e* $y \sim z$ *então* $x \sim z$*.*

Para $x \in X$ seja $\bar{x} = \{y \in X : y \sim x\}$. É imediato de se verificar que se $\bar{x} \neq \bar{y}$ então $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Definimos $X/\sim = \{\bar{x} : x \in X\}$.

Definição 12 *Seja* W *um subespaço de* V*. Para* $x, y \in V$ *defina*[3] $x \sim y$ *se* $x - y \in W$*. Temos que* $\sim$ *é uma relação de equivalência em* V*:*

1. $x \sim x$ *pois* $x - x = 0 \in W$

2. $x \sim y \implies y \sim x$ *pois se* $x - y \in W$ *então* $y - x = -(x - y) = (-1) \cdot (x - y) \in W$

3. $x \sim y$ *e* $y \sim z \implies x \sim z$ *pois* $x - z = (x - y) + (y - z) \in W + W = W$*.*

Os elementos equivalentes a x,

$$\bar{x} = \{y \in V : y - x \in W\} = \{y : y \in x + W\} = x + W.$$

Para $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e $\lambda \in K$ definimos

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$
$$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}.$$

Fica como exercício verificar que o quociente V/W com essa soma e produto por escalar é um espaço vetorial. É o espaço quociente de V por W. (corresponde a L no exemplo acima) Casos extremos: V/V é isomorfo à $\{0\}$ e $V/\{0\}$ é isomorfo à V.

Teorema 10 *Sejam* W *e* U *espaços complementares de* V*. Então* V/W *é isomorfo a* U*.*

Demonstração: Seja $T : U \to V/W$, $T(u) = u + W$. Notemos que T é linear pois

$$T(\alpha u + \beta u') = (\alpha u + \beta u') + W = \alpha (u + W) + \beta (u' + W) = \alpha T(u) + \beta T(u').$$

Se $T(u) = \bar{0} = W$ temos que $u + W = W$ e logo $u \in W \cap U = \{0\} \implies u = 0$. T é sobrejetora pois se $x \in V$ temos $x = u + w$ e $x + W = u + W$ portanto $T(u) = x + W$.

[3] x é equivalente a y

Corolário 4 *Se V tem dimensão finita e W é subespaço de V,* $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Teorema 11 *Seja $T : V \to W$ linear. Então $V/\ker T$ é isomorfo a $T(V)$.*

Demonstração: Seja $S : V/\ker T \to T(V)$ definida por

$$S(x + \ker T) = T(x).$$

S está bem definida pois se $x' + \ker T = x + \ker T$ então $x' - x \in \ker T$ e $Tx' - Tx = T(x' - x) = 0$. S é claramente sobrejetora. E se $S(x + \ker T) = 0$ então $T(x) = 0$ e $x \in \ker T$ e $x + \ker T = \bar{0}$.

Corolário 5 *Se $T : V \to W$ linear. Então* $\dim V = \dim \ker T + \dim T(V)$.

17/02

Espaços com produto interno

Definição 13 *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *linearidade na primeira variável: $\langle rx + y, z \rangle = r\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;*
2. *Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$*
3. *Positiva definida: $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ somente se $x = 0$.*

Definição 14 *Um espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno é um espaço Euclidiano.*

Definição 15 *A função $|x| = \sqrt{(x, x)}$ é a norma Euclidiana. Os vetores de norma 1 são vetores unitários.*

Exemplo 8 *Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos o produto interno usual: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*

Exemplo 9 *Se f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds$ é um produto interno.*

Suponha que $f \neq 0$. Então existe $x^0 \in [a, b]$ tal que $f(x^0) \neq 0$ e logo $f^2(x^0) > 0$. Seja $\epsilon = \frac{f^2(x^0)}{2}$. Existe $\delta > 0$ tal que $|x - x^0| < \delta, x \in [a, b]$, $f^2(x) > f^2(x^0) - \epsilon = \epsilon > 0$. Logo

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(s)\, ds \geq \int_{x-\delta}^{x+\delta} f^2(s)\, ds > \epsilon \cdot 2\delta > 0.$$

Exemplo 10 *Para $x, y \in l^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ é um produto interno em l^2.*

Definição 16 *Os vetores x, y são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$.*

O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. E é o único vetor que é ortogonal a si mesmo.

Teorema 12 (Cauchy-Schwarz) *Para x, y no espaço euclidiano E,*

$$|\langle x, y \rangle| \leqq |x|\,|y| \tag{*}$$

E vale a igualdade se e somente se x, y são linearmente dependentes.

Demonstração: Seja $f(\lambda) = |x + \lambda y|^2 =< x + \lambda y, x + \lambda y >$. É imediato que $f(\lambda) \geq 0$. Expandindo o produto interno,

$$f(\lambda) = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle .$$

Esse polinômio do segundo grau se tiver duas raízes distintas assumirá também valores negativos, uma impossibilidade. Portanto o discriminante

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqq 0.$$

E obtemos (*). Suponhamos que vale a igualdade $\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = 0$. Se $y = 0$ temos igualdade e x, y são linearmente dependentes. Se $y \neq 0$. Então $\lambda_0 = -\frac{2\langle x,y \rangle}{2\langle y,y \rangle} = -\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$ é tal que $f(\lambda_0) = 0$. Mas então $|x + \lambda_0 y|^2 = 0$ e $x = -\lambda_0 y$.

Corolário 6 (desigualdade triangular)

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) *com igualdade se $y = 0$ ou se $y \neq 0$, $x = \lambda y$ e $\lambda \geq 0$.*

Demonstração: Temos elevando ao quadrado e usando $f(1)$:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq |x|^2 + 2 |x| |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\ \iff (x, y) \leq |x| |y| . \end{aligned}$$

No caso de igualdade obtemos $\langle x, y \rangle = |x| |y|$ e se $y \neq 0$ vem de $x = \lambda y$ vem $\lambda \langle y, y \rangle = |\lambda| |y| |y|$ o que implica $\lambda \geq 0$.

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Uma base do espaço euclidiano E, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é ortonormal se os vetores forem ortogonais entre si e cada um unitário. Ou seja $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. Dada uma base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ podemos pelo método de Gram–Schmidt transformá-la numa base ortonormal de uma forma natural. Primeiramente notemos que se $\{b_1, \ldots, b_n\}$ é ortogonal então $\left\{\frac{b_i}{|b_i|} : i \leq n\right\}$ é uma base ortonormal. Basta então obter uma base ortogonal. Seja $b_1 = a_1 \neq 0$. Para $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ vamos escolher λ para $(b_2, b_1) = 0$:

$$\langle a_2 + \lambda b_1, b_1 \rangle = \langle a_2 + \lambda b_1, a_1 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle + \lambda \langle a_1, a_1 \rangle = 0 \iff \lambda = -\frac{\langle a_2, a_1 \rangle}{|a_1|^2}.$$

Temos $b_2 \neq 0$ e ortogonal a b_1. Agora seja $b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$. Agora

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle b_3, b_1 \rangle = 0 \\ \langle b_3, b_2 \rangle = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_1 \rangle = 0 \\ \langle a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_2 \rangle = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle a_3, b_1 \rangle + \mu \langle b_1, b_1 \rangle = 0 \\ \langle a_3, b_2 \rangle + \nu \langle b_2, b_2 \rangle = 0 \end{array} \right.$$

Ou seja $\mu = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)}$ e $\nu = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)}$. Prosseguindo indutivamente obtemos a base procurada.

Dualidade para espaços euclidianos

A dualidade nos espaços euclidianos é mais simples. Temos $E' = E$.

Teorema 13 (Riesz) *Seja E espaço euclidiano de dimensão n. Seja E' o espaço dos funcionais lineares. Para cada $f \in E'$ existe um e único $x \in E$ tal que $f(z) = (x, z), z \in E$.*

Demonstração: Para $x \in E$ seja $f_x(y) = \langle x, y \rangle, y \in E$. Temos que f_x é linear. Se $f_x = 0$ temos $f_x(x) = \langle x, x \rangle = 0$ e logo $x = 0$. Portanto $\Theta(x) = f_x$ é linear, injetiva. Portanto $\Theta(E) = E'$ pois $\dim E = \dim E'$.

Adjunto

Sejam E e F espaços euclidianos. E $T : E \to F$ linear. A adjunta de T é $T^* : F \to E$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

E $T^{**} = T$!

Existência: Seja $y \in F$. Seja $S = S_y \in E'$ tal que $S(z) = \langle T(z), y \rangle$, $z \in E$. Pelo teorema de Riesz, existe $T^* y \in E$ tal que $S(z) = \langle z, T^* y \rangle$. Portanto

$$\langle T(z), y \rangle = \langle z, T^*(y) \rangle.$$

Vefiquemos que $y \to T^* y$ é linear:

$$\langle x, rT^* y + T^* \tilde{y} \rangle = \langle x, rT^*(y) \rangle + \langle x, T^* \tilde{y} \rangle = r \langle x, T^*(y) \rangle + \langle x, T^* \tilde{y} \rangle =$$
$$\langle Tx, ry \rangle + \langle Tx, \tilde{y} \rangle = \langle Tx, ry + \tilde{y} \rangle = \langle x, T^*(ry + \tilde{y}) \rangle .$$

19/02

Seja $T : V \to V$ linear e $e_1, e_2, \ldots, e_n$ uma base de V. Para cada $i \le n$ existem $(a_{ij})_{j \le n}$ reais tais que

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j.$$

Seja $A = (a_{ij})_{i,j \le n}$ matriz $n \times n$. Dizemos a A representa T na base $e_1, \ldots, e_n$. Para $x = \sum_i x_i e_i$,

$$T(x) = \sum_i x_i T(e_i) = \sum_i x_i \sum_j a_{ji} e_j = \sum_j \left(\sum_i x_i a_{ji} \right) e_j.$$

Exemplo 11 *Definamos $T : V \to V$ linear tal que*

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j.$$

Então

$$\langle T(e_i), e_k \rangle = a_{ki}.$$

Agora se T for auto–adjunto,

$$\langle e_i, T(e_k) \rangle = \left\langle e_i, \sum_j a_{jk} e_j \right\rangle = a_{ik}.$$

Então $a_{ik} = a_{ki}$.

Comentário 6 *Em geral podemos obter o adjunto de T transpondo a matriz A. $T^*(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j$.*

Definição 17 *Um autovalor de T é um escalar λ tal que existe um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. (o vetor é então um autovetor)*

Definição 18 *Um subespaço vetorial M é invariante por T se $T(M) \subset M$.*

Comentário 7 *No caso o espaço $[v]$ é invariante: $T([v]) \subseteqq [v]$. É possível dois autovetores terem o mesmo autovalor associado.*

Teorema 14 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autoadjunto. Então T tem n autovetores, mutualmente ortogonais.*

Demonstração: Seja $F(x) = \frac{\langle x, T(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} = \left\langle \frac{x}{|x|}, T\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\rangle, x \neq 0$. Temos que F é contínua para $x \neq 0$. O conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ é compacto e portanto existe $\min F(S)$. Seja e_1 um vetor unitário que alcança o mínimo: $F(e_1) = \min F(S) = \inf \{F(x) : |x| = 1\} = \inf \{F(x) : x \neq 0\}$. Vou demonstrar que e_1 é um autovetor. Para $x = |x| \, e$,

$$F(x) = F(e) \geq F(e_1).$$

Seja $y \in \mathbb{R}^n$. Então $f(t) = F(e_1 + ty)$ e $f'(0) = 0$. Mas

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\langle e_1 + ty, Te_1 + tTy \rangle}{(e_1 + ty, e_1 + ty)}, \\ f'(0) &= \langle e_1, Ty \rangle + \langle y, Te_1 \rangle - 2 \langle e_1, Te_1 \rangle \langle e_1, y \rangle \\ f'(0) &= 2 \langle Te_1, y \rangle - 2 \langle e_1, Te_1 \rangle \langle e_1, y \rangle = 0 \\ &\implies Te_1 = \langle e_1, Te_1 \rangle \, e_1. \end{aligned}$$

Continuando para obter uma representação na forma diagonal.

Lema 7 *Seja T auto–adjunto. Se $J \subset E$ é invariante, $J^\perp$ é invariante.*

Demonstração: Seja y ortogonal a J. Então $(Ty, x) = (y, Tx) = 0$ se $x \in J$. Logo $T\left(J^\perp\right) \subset J^\perp$. Prosseguimos indutivamente e pronto.

Agora considere $F| \, [e_1]^\perp : [e_1]^\perp \to [e_1]^\perp$ e existe auto–vetor $e_2 \in [e_1]^\perp$ que minimiza F em $[e_1]^\perp \cap S$. Etc..

Espaços Métricos

Um par (X, d) é um espaço métrico se a função, $d : X \times X \to \mathbb{R}$, tem para todos $x, y, z \in X$, as propriedades:

1. $d(x, y) \geqq 0$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

4. $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$.

Comentário 8 *d é a função distância. Os axiomas (1,2,3) são portanto bem naturais: A distância entre pontos distintos é positiva. A distância entre x e y é igual à distância entre y e x. E finalmente o axioma (4)–a desigualdade triangular– reflete a propriedade de que para os triângulos no plano, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Comentário 9 *Se no lugar de (3) exigirmos somente (3)' $d(x,x) = 0$, temos um espaço pseudo–métrico.*

Exemplo 12 *Um espaço com produto interno é um espaço métrico se $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x-y, x-y)}$.*

Exemplo 13 (métrica discreta) *Seja $d(x,x) = 0$ e $d(x,y) = 1$ se $x \neq y$. d é a métrica discreta.*

Exemplo 14 *Se $Y \subset X$ e $d'(x,y) = d(x,y)$ para $(x,y) \in Y \times Y$ então (Y, d') é um espaço métrico.*

Exemplo 15 *No $\mathbb{R}^n$ temos a distância euclidiana, a distância do máximo e a distância da soma:*

$$d(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} & \textit{euclidiana} \\ \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} & \textit{max} \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| & \textit{soma.} \end{cases}$$

Comentário 10 *Essas 3 distâncias são exemplos de distâncias definidas a partir de uma norma: a norma euclidiana, a norma do máximo e a norma da soma.*

Definição 19 (espaço normado) *Um par (V, N) sendo V um espaço vetorial (sobre o corpo dos reais) e $N : V \to [0, \infty)$ é um espaço normado se para todos $v, w \in V$ e λ real,*

i) $N(v) = 0 \iff v = 0$

ii) $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

iii) $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.

Comentário 11 *Por simplicidade usamos $|v| := N(v)$.*

Comentário 12 *A métrica associada à norma N é $d(v,w) = N(v - w)$.*

Definição 20 *Seja (X, d) um espaço métrico.*

i) *A bola aberta de centro $x \in X$ e raio $r > 0$ é $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$;*

ii) *A bola fechada, $B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$;*

iii) *A esfera: $S(x, r) = \{y \in X : d(y, x) = r\}$.*

Comentário 13 *No caso de um espaço normado, $B[0, 1] = \{y \in V : |y| \leq 1\}$ é a bola unitária. Note que $B(x, r) = x + rB(0, 1)$ nesse caso. E a métrica é invariante por translações, $d(x, y) = d(x + z, y + z)$.*

A topologia dos espaços métricos

Definição 21 *O par (X, τ) sendo $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ é um espaço topológico e τ uma topologia se*

i) $\{\emptyset, X\} \subset \tau$;

ii) *Se $A, B \in \tau$ então $A \cap B \in \tau$;*

iii) *Se $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$ então $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.*

Comentário 14 *Os elementos de τ são ditos abertos. Assim o conjunto vazio e X são abertos. E a topologia é fechada por intersecções finitas e por uniões arbitrárias de seus elementos.*

Definição 22 *Seja (X, d) um espaço métrico. O conjunto $U \subset X$ é aberto se para todo $x \in U$ existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.*

É imediato que o conjunto vazio e o espaço X são abertos. Seja $\tau = \tau_d = \{U \subset X : U \text{ é aberto}\}$ a família dos subconjuntos abertos de (X, d). Verifiquemos que τ é uma topologia.
Demonstração: (a) Sejam U e V abertos. Seja $z \in U \cap V$. Seja $r' > 0$ tal que $B(z, r') \subset U$. Seja $r'' > 0$ tal que $B(z, r'') \subset V$. Então se $r = \min\{r', r''\} > 0$, $B(z, r) \subset U \cap V$. (b) Verifiquemos que se $U_i \in \tau$ para $i \in I$ então $W = \cup_{i \in I} U_i \in \tau$. Seja $x \in W$. Existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_i$. Então $B(x, \epsilon) \subset W$. Terminando a demonstração.

Lema 8 *A bola aberta é aberta.*

Demonstração: Para $z \in B(x,r)$ temos $d(x,z) < r$ e então $\delta = r - d(x,z) > 0$. Para $y \in B(z,\delta)$ temos

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + \delta = r$$

e portanto $B(z,\delta) \subset B(x,r)$.

Definição 23 *$F \subset X$ é fechado se o complementar $F^c = X \setminus F$ for aberto.*

É imediato que $\emptyset$ e X são fechados. A união finita de fechados é fechada. E a intersercção de uma família de fechados é fechada.

Exemplo 16 *Na métrica discreta todo subconjunto de X é aberto e é fechado.*

Exemplo 17 *Em $\mathbb{R}$ os intervalos abertos são abertos e os intervalos fechados são fechados. O intervalo $(0,1]$ não é aberto nem fechado. Os racionais não são nem abertos nem fechados em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 18 *Se $X = [0,1]$ então $(0,1]$ é aberto em X.*

21/02

Teorema 15 *Seja (X,ρ) espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço. Então $U \subset Y$ é aberto de Y se e somente se existir $W \subset X$ aberto tal que $U = W \cap Y$.*

Demonstração: Notemos inicialmente que

$$B_Y(x,r) = \{y \in Y : d(x,y) < r\} = Y \cap B(x,r).$$

Seja $\tau(Y)$ a família dos subconjuntos abertos em Y. E τ os abertos de X. Então se $U \in \tau(Y)$, para todo $u \in U$ existe $\epsilon(u) > 0$ tal que $B_Y(u,\epsilon(u)) = Y \cap B(u,\epsilon(u)) \subset U$. Mas então $W = \cup_{u \in U} B(u,\epsilon(u)) \in \tau$ e $W \cap Y = U$. Suponhamos agora $W \in \tau$. Cada $w \in W$ existe $B(w,r(w)) \subset W$. Então

$$U = \cup_{w \in W} Y \cap B(w,r(w)) = \cup_{w \in W} B_Y(w,r(w)) \in \tau(Y) \text{ e } U = W \cap Y.$$

Corolário 7 *Nas mesmas condições do teorema anterior, $F \subset Y$ é fechado de Y se e somente se existir H fechado em X tal que $H \cap Y$.*

Corolário 8 *Se Y for fechado de X então F é fechado em Y se e somente se for fechado em X.*

Produto cartesiano de espaços métricos

Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser metrizado de uma forma natural. Definamos para $z = (x, y) \in X \times Y$ e $z' = (x', y') \in X \times Y$,

$$\overline{d}\left((x, y), (x', y')\right) = d(x, x') + \rho(y, y').$$

Então verificamos de imediato que $\overline{d}$ é uma métrica em $X \times Y$. Outras métricas são possíveis: $\max\{d(x, x'), \rho(y, y')\}$ ou $\sqrt{d(x, x')^2 + \rho(y, y')^2}$. Podemos verificar com pouca dificuldade que essas métricas são equivalentes.

Lema 9 *Sejam (X_n, d_n) espaço métrico, $n \geq 1$ natural. Então $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ pode ser metrizado:*

$$d\left((x_n)_n, (y_n)_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}. \tag{1}$$

Comentário 15 *O produto cartesiano finito de espaços normados também é um espaço normado. Entretanto o produto enumerável infinito de espaços normados não é um espaço normado.*

Um subconjunto M do espaço normado V é limitado se existir $m > 0$ tal que $|x| \leq m$ para todo $x \in M$. Analogamente M um subconjunto de um espaço métrico é limitado se existir $r > 0$ tal que $M \subset B(x, r)$ para algum $x \in X$. Isto é, M é limitado se estiver contido em alguma bola aberta (ou fechada o que dá no mesmo).

Definição 24 *Se $A \subset X$ é limitado e não–vazio, o diâmetro de A é $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.*

Por exemplo, o diâmetro de $B(x, r)$ é no máximo $2r$. Pois se $y, y' \in B(x, r)$, $d(y, y') \leq d(y, x) + d(x, y') < 2r$. E logo $\delta(B(x, r)) \leq 2r$. Na métrica discreta, $\delta(X) = 1$ se $\#X > 1$.

Continuidade

Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x^0 \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(x^0) > 0$ tal que

$$d\left(x, x^0\right) < \delta \implies \rho\left(f(x), f\left(x^0\right)\right) < \epsilon.$$

Em outras palavras: Para todo bola $B_\rho(f(x^0), \epsilon)$ existe uma bola $B_d(x^0, \delta)$ tal que $f(B_d(x^0, \delta)) \subset B_\rho(f(x^0), \epsilon)$.

Lema 10 *f é contínua em x^0 se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto tal que $f(x^0) \in U$ existe $W \ni x^0$ aberto de X tal que $f(W) \subset U$.*

Definição 25 *$f : X \to Y$ é contínua em X se para todo $x \in X$, f for contínua em x.*

Definição 26 *E f é uniformemente contínua em X se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, \forall x', d(x, x') < \delta \implies \rho(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Lema 11 *$f : X \to Y$ é contínua em X se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto, $f^{-1}(U) \subset X$ é aberto.*

Seqüências e limites

Uma seqüência $(x_n)_{n \geq 1}$ no espaço métrico X converge para $x \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $n' \geq 1$ tal que $n > n'$ implica $d(x, x_n) < \epsilon$.

Notação 4 *Escrevemos $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ quando existir o limite de $(x_n)_n$ e for x.*

Proposição 1 *O limite quando existe é único*

Demonstração: Sejam $x \neq y$ limites de $(x_n)_n$. E $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Então existem n' e n'' tais que

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \epsilon \text{ para } n > n' \\ d(x_n, y) &< \epsilon \text{ para } n > n'' \end{aligned}$$

Então se $n > \max\{n', n''\}$, $2\epsilon = d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\epsilon$ uma contradição.

Teorema 16 *Seja $f : X \to Y$. Então f é contínua em $a \in X$ se e somente se para todo seqüência $x_n \in X$ com limite a, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Demonstração: Suponhamos f contínua em a. Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \implies \rho(f(x), f(a)) < \epsilon$. Pela definição de limite existe n' tal que $n > n'$ implica $d(x_n, a) < \delta$. Portanto $n > n'$, temos $\rho(f(x_n), f(a)) < \epsilon$. E portanto $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que f fosse descontínua em a. Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ existe $x_n \in X$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$.

Comentário 16 *Uma vantagem dos espaços métricos é podermos usar seqüências. Nos espaços topológicos, em geral, teoremas como o anterior não são válidos.*

Fecho e interior

Seja (X, d) métrico. Para $A \subset X$ definimos $\mathscr{F} = \{F : A \subset F \subset X,\ F \text{ fechado}\}$. Então $B = \cap\{F : F \in \mathscr{F}\}$ é fechado e é o menor subconjunto fechado de X que contém A. Dizemos que B é o fecho de A e denotamos $\overline{A} := B$. As seguintes propriedades são imediatas:

1. Se $A \subset B \subset X$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. A é fechado se e somente se $A = \overline{A}$.

Por exemplo $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado por ser união de dois fechados. Agora $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$ e portanto $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ e vale (3) acima.

Lema 12 *$x \in \overline{A}$ se e somente se para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Então $F = X \setminus B(x, r) \supset A$ é fechado e $x \notin F$. Logo $x \notin \overline{A}$ pois $F \supset \overline{A}$. Recíprocamente, se $x \notin \overline{A}$. Então existe fechado $F \supset A$ tal que $x \notin F$. Mas então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap F = \emptyset$ e a fortiori $B(x, r) \cap A = \emptyset$.

Definição 27 *O interior de A é $\cup\{U \subset A : U$ é aberto$\}$.*

Notação 5 $\operatorname{int} A = \mathring{A} = \cup\{U \subset A : U$ *é aberto*$\}$.

As seguintes propriedades são imediatas:

1. Se $A \subset B \subset X$ então $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$
2. $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$
3. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

24/02

Definição 28 *Um subconjunto $M \subset X$ é limitado se estiver contido em uma bola, $B(x,r)$, de X.*

Se M_1e M_2 são limitados, $M_1 \cup M_2$ é limitado: Se $M_i \subset B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2$ então se $z \in M_1$ temos $d(z, x_1) < r_1$. Se $z \in M_2$, $d(z, x_1) \leq d(z, x_2) + d(x_2, x_1) < r_2 + d(x_1, x_2)$. Portanto se $r_3 = \max\{r_1, r_2 + d(x_1, x_2)\}$, $M_1 \cup M_2 \subset B(x_1, r_3)$.

Definição 29 *Seja $A \subset X$ não–vazio. Para $x \in X$ definimos a distância de x a A por*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Lema 13 $d(x, A) = 0$ *se e somente se* $x \in \overline{A}$.

Demonstração: Notemos que se $B(x,r) \cap A = \emptyset$ então $d(x, A) \geq r$. Portanto se $x \in X \setminus \overline{A}$, $d(x, A) > 0$. É óbvio que $d(x, A) = 0$ para todo $x \in A$. Suponhamos agora $x \in \overline{A}$. Então pelo lema acima, $d(x, A) < r$ sempre que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ e então $d(x, A) = 0$.

Proposição 2 *A função distância é uniformemente contínua. Na verdade vale um pouco mais: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.*

Demonstração: Para $a \in A$, $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Logo $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ e tomando o ínfimo novamente, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. Portanto $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Trocando os papéis de x e y obtemos $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$ e $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Proposição 3 $x \in \overline{A}$ *se e somente se existe uma seqüência* $(x_n)_n$ *com* $x_n \in A$ *e* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Demonstração: Se x está no fecho de A para todo $n \geq 1$, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$. Seja $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Então $\lim_n x_n = x$. E se $x \notin \overline{A}$ existe $r > 0$, $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Então nenhuma seq. $(x_n)_n$ em A converge para x pois $d(x, x_n) \geq r > 0$.

Definição 30 *O ponto $x \in A$ é um ponto isolado de A em X se existir um aberto $U \subset X$ tal que $U \cap A = \{x\}$.*

É imediato da definição que x é ponto isolado de A se existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Exemplo 19 *Todo ponto de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ é isolado. Nenhum ponto de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é isolado.*

Exemplo 20 *O conjunto* $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\backslash \{0\}\right\}$ *tem ponto isolados,* $\frac{1}{n}, n \neq 0$*. Mas* $0 \in A$ *não é ponto isolado pois* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$*.*

Exemplo 21 *Na métrica discreta em* X *todo ponto é isolado.*

Definição 31

1. *O conjunto* $S \subset X$ *é denso se o fecho de* S *for* X*.*

2. *O espaço métrico* X *é separável se existe* $A \subset X$ *enumerável e denso:* $\overline{A} = X$*.*

Exemplo 22 $\mathbb{R}^n$ *é separável pois* $\mathbb{Q}^n$ *é enumerável e denso. O conjunto funções contínuas reais de* $[a, b]$ *na métrica do sup é separável (mas não é imediato de se demonstrar).* l^∞ *não é separável mas* l^1 *e* l^2 *são separáveis.*

Teorema 17 *Se* (X, d) *é separável e* $\{U_i : i \in I\}$ *é uma família de abertos não–vazios dois a dois disjuntos, então* I *é enumerável.*

Demonstração: Seja $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em X. Para cada $i \in I$ existe n tal que $x_n \in U_i$. Definimos então $f : I \to \mathbb{N}$,

$$f(i) = \min\{n : x_n \in U_i\}.$$

Note que se $i \neq j$ então $f(i) \neq f(j)$. Mas então I é enumerável.

Espaço métrico completo

Uma seqüência $(x_n)_n$ no espaço métrico (X, d), é de Cauchy, se para todo $\epsilon > 0$ existir natural n^0 tal que $n, m \geq n^0$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Lema 14 *Toda seq. de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em X. Existe p natural tal que $n, m \geq p$ implica $d(x_n, x_m) \leq 1$. Em particular $d(x_n, x_p) \leq 1$ para $n \geq p$. Seja $M = \max\{1, d(x_1, x_p), \ldots, d(x_{p-1}, x_p)\}$. Portanto $\{x_n : n \geq 1\} \subset B[x_p, M]$.

Proposição 4 *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Suponhamos $\lim_n x_n = x$. Seja n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Então se $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Definição 32 *A seqüência* $(y_n)_n$ *é uma subseqüência de* $(x_n)_n$ *se existir* $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estritamente crescente tal que* $y_n = x_{k(n)}$ *para todo* $n \geq 1$*.*

Lema 15 *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é, ela mesma, convergente.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy e $\left(x_{k(n)}\right)_n$ subseqüência com limite x. Seja $\epsilon > 0$. Existe n' tal que $n \geq n' \implies d\left(x_{k(n)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja n'' tal que $n, m \geq n'' \implies d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Então para $n \geq n'''$, $p \geq \max\left\{k^{-1}(n''), n'\right\}$,

$$d(x_n, x) \leq d\left(x_n, x_{k(p)}\right) + d\left(x_{k(p)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Exemplo 23 *No subespaço $Y = (0,1]$ de $X = [0,1]$ a seq. $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite em X é $0 \notin Y$.)*

Exemplo 24 *Para $X = \mathbb{Q}$, a seqüência $x_n = \frac{\left[n\sqrt{2}\right]}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite existe nos reais e é $\sqrt{2}$)*

Definição 33 *Um espaço métrico é completo se toda seqüência de Cauchy for convergente.*

Exemplo 25 *X com a métrica discreta é completo: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Existe n^0 tal que $n, m \geq n^0$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Portanto $x_n = x_{n^0}$ se $n \geq n^0, m = n^0$.*

Teorema 18 *Seja (X, d) espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço completo. Então Y é fechado.*

Demonstração: Seja $y \in \overline{Y}$ e seja $(y_n)_n \subset Y$ uma seqüência com limite y. Mas (y_n) é de Cauchy em X e pela mesma razão de Cauchy em Y. Mas Y sendo completo (y_n) converge para $x \in Y$. Mas então pela unicidade do limite $x = y \in Y$. Portanto $\overline{Y} = Y$ é fechado.

Teorema 19 *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo.*

Demonstração: Seja $F \subset X$ fechado, X completo. Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em F. A fortiori, $(x_n)_n$ é de Cauchy em X. Seja $x = \lim_n x_n$. Mas então $x \in \overline{F} = F$.

Teorema 20 *$\mathbb{R}$ é completo na métrica usual.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$, $x_n \in \mathbb{R}$ de Cauchy. A seq. é limitada. Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$ para todo n. Seja $\alpha_n = \inf\{x_m : m \geq n\}$. A seq. $(\alpha_n)_n$ é crescente e limitada superiormente por M. Seja $x = \sup\{\alpha_n : n \geq 1\}$. Então $\lim_n x_n = x$: Para cada N existe $\alpha_N \leq x_{k(N)} < \alpha_N + \frac{1}{N}$. Então $\lim_N x_{k(N)} = \lim_N \alpha_N = x$. Logo $(x_n)_n$ converge pois é de Cauchy e possui uma subseqüência convergente.

Teorema 21 $\mathbb{R}^n$ *é completo.*

Demonstração: Basta notar que $((x_p(1), \ldots, x_p(n)))_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ é de Cauchy se e somente se cada $(x_p(i))_p$, $i = 1, \ldots, n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $y_i = \lim_p x_p(i)$. Então $\lim_p x_p = y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Teorema 22 *Todo subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *é fechado (e completo)*

Demonstração: Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Vou demonstrar que F é fechado. Seja $\{v_1, \ldots, v_p\}$ uma base ortogonal de F e a completemos a uma base ortogonal $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Então

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v_{p+i} \rangle = 0, i = 1, \ldots, n-p\} = \cap_{i=1}^{n-p} \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v_{p+i} \rangle = 0\}.$$

A função $f(y) = \langle y, v_{p+i} \rangle$ é contínua pois $|f(y) - f(z)| = |(y - z, v_{p+i})| \leq |y - z| |v_{p+i}|$ e $f^{-1}(\{0\}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v_{p+i} \rangle = 0\}$.

Para (X, d) e (M, ρ) espaços métricos:

Definição 34 *Uma função* $f : X \to M$ *é limitada se* $f(X)$ *for limitado. O conjunto,* $\mathscr{B}(X, M)$*, das funções limitadas de* X *em* M *possui uma métrica natural.. Seja para* $f, g \in \mathscr{B}(X, M)$,

$$d(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\} < \infty.$$

Teorema 23 *Nas condições acima,*

a) $\mathscr{B}(X, M)$ *é métrico.*

b) $\mathscr{B}(X, M)$ *é completo se* M *for completo.*

Demonstração: (a) Se $f(x) \neq g(x)$ vem $d(f, g) \geq \rho(f(x), g(x)) > 0$. É imediato que $d(f, g) = d(g, f)$. Desigualdade triangular: se $f, g, h \in \mathscr{B}(X, M)$. Então

$$\begin{aligned} \rho(f(x), h(x)) &\leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), h(x)) \leq d(f, g) + d(g, h) \\ &\implies d(f, h) = \sup_x \rho(f(x), h(x)) \leq d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

(b) Seja $(f^p)_p \subset \mathscr{B}(X, M)$ de Cauchy. Então para cada $x \in X$, $(f^p(x))_{p \geq 1}$ de Cauchy em M. Seja $f(x) = \lim_{p \to \infty} f^p(x)$. Seja $p(1)$ tal que $d(f^p, f^{p+q}) < 1$ se $p \geq p(1)$, $q \geq 1$. Então

$$\rho\left(f^{p(1)}(x), f^p(x)\right) \leq 1, \forall x \in X.$$

No limite $p \to \infty$, $\rho\left(f^{p(1)}(x), f(x)\right) \leq 1$ e então $f(\cdot)$ é limitada pois $f^{p(1)}$ é limitada. Finalmente se $\epsilon > 0$ seja N tal que $p, q \geq N$,

$$\rho(f^p(x), f^q(x)) \leq d(f^p, f^q) < \epsilon.$$

No limite q tende ao infinito: para todo $x \in X$,

$$\rho(f^p(x), f(x)) \leq \epsilon$$

e portanto $d(f^p, f) \leq \epsilon$. Por fim é fácil de se ver que f é limitada.

26/02

Definição 35 *Seja* $\mathscr{C}_b(X, M) = \{f \in \mathscr{B}(X, M) : f$ *é contínua*$\}$.

Corolário 9 $\mathscr{C}_b(X, M)$ *é completo se* M *for completo.*

Demonstração: Basta demonstrar que $\mathscr{C}_b(X, M)$ é subespaço fechado do espaço completo $\mathscr{B}(X, M)$. Seja então $f^p : X \to M$ limitada contínua e $f \in \mathscr{B}(X, M)$ limite de f^p. Seja $x^0 \in X$ dado. Dado $\epsilon > 0$ existe $p(\epsilon)$ tal que para todo $x \in X$, $p \geq p(\epsilon)$

$$\rho\left(f^p(x), f^{p(\epsilon)}(x)\right) \leq \frac{\epsilon}{3},$$
$$\rho\left(f^p\left(x^0\right), f^{p(\epsilon)}\left(x^0\right)\right) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x^0) < \delta$, $\rho\left(f^{p(\epsilon)}(x), f^{p(\epsilon)}(x^0)\right) < \frac{\epsilon}{3}$. Logo para $p \geq p(\epsilon)$,

$$\rho\left(f^p(x), f^p\left(x^0\right)\right) \leq$$
$$\rho\left(f^p(x), f^{p(\epsilon)}(x)\right) + \rho\left(f^{p(\epsilon)}(x), f^{p(\epsilon)}\left(x^0\right)\right) + \rho\left(f^{p(\epsilon)}\left(x^0\right), f^p\left(x^0\right)\right) \leq \epsilon.$$

No limite, $\rho(f(x), f(x^0)) \leq \epsilon$.

Completamento de espaços métricos

Lema 16 *Seja* (X, d) *métrico. Então* $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$.

Demonstração: Basta considerar $A = \{a\}$ na proposição 2.

Definição 36 *Sejam* (X, d) *e* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *espaços métricos.*

1. *Uma função* $f : X \to \widetilde{X}$ *é uma imersão isométrica se*

$$d(x, y) = \widetilde{d}(f(x), f(y)), x, y \in X.$$

Se $f(x) = f(y)$ *então* $d(x, y) = 0$ *e* $x = y$. *Toda imersão isométrica é injetiva e uniformemente contínua.*

2. *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.*

Definição 37 $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *é completamento de* (X, d) *se* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *for completo e existir imersão isométrica* $f : X \to \widetilde{X}$ *com imagem densa em* $\widetilde{X}$.

Teorema 24 *Todo espaço métrico possui um completamento.*

Demonstração: Seja (M, ρ) métrico. Vou demonstrar que é isométrico a um subespaço de $\mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$.

Seja $a \in M$ fixo. E definamos para $x \in M$, $f_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a)$. Então $|f_x(z)| \leq \rho(x, a)$ e então f_x é limitada. Temos

$$d(f_x, f_y) = \rho(x, y).$$

Para checar[4] isso,

$$\begin{aligned}\sup_m |f_x(m) - f_y(m)| &= \sup_m |\rho(x, m) - \rho(m, a) - (\rho(y, m) - \rho(m, a))| \\ &= \sup_m |\rho(x, m) - \rho(y, m)| = \rho(x, y).\end{aligned}$$

Portanto $\Theta : X \to \mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$ definida por $\Theta(x) = f_x$ é uma imersão isométrica. Seja $\widetilde{M} = \overline{\Theta(M)} \subset \mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$. Então $\widetilde{M}$ é o completamento de M pois é fechado e $\mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$ é completo.

Comentário 17 *Os espaços métricos podem possuir vários completamentos mas todos são isométricos entre si.*

Teorema 25 *Sejam* $\left(\widetilde{M}, \widetilde{d}\right)$ *e* $\left(\widehat{M}, \widehat{d}\right)$ *completamentos de* (M, d). *Então* $\widetilde{M}$ *e* $\widehat{M}$ *são isométricos.*

Demonstração: Seja $\phi : M \to \widetilde{M}$ imersão isométrica com image densa em $\widetilde{M}$ e seja $\psi : M \to \widehat{M}$ imersão isométrica com imagem densa em $\widehat{M}$. Definamos

[4] O supremo é alcançado para $m = y$.

$f : \phi(M) \to \psi(M)$ por $f(\phi(x)) = \psi(x)$, $x \in M$. Temos que f é isometria entre $\phi(M)$ e $\psi(M)$:

$$\hat{d}(f(\phi(x)), f(\phi(y))) = \hat{d}(\psi(x), \psi(y)) = d(x, y) = \tilde{d}(\phi(x), \phi(y)).$$

Podemos extender f a $\widetilde{M}$: Se $z \in \widetilde{M}$ existe $\phi(x_n) \to z$. Logo $(\phi(x_n))_n$ é de Cauchy e então $(\psi(x_n))_n$ é de Cauchy. Seja $\bar{f}(z) = \lim_n \psi(x_n)$. Este limite não depende da seqüência escolhida. Se $\phi(y_n) \to z$ definimos $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n+1} = y_n$. Então $\phi(z_n)$ também converge para z. E sendo de Cauchy, $(\psi(z_n))$ é de Cauchy e logo converge em $\widehat{M}$. Portanto

$$\lim_n \psi(z_n) = \lim_n \psi(z_{2n}) = \lim_n \psi(z_{2n+1}) \implies \lim_n \psi(x_n) = \lim_n \psi(y_n).$$

Assim $\bar{f}$ está bem definida. E ela é sobrejetor (exercício) Logo $\widetilde{M}$ e $\widehat{M}$ são isométricos.

Completamento de espaços normados

Definição 38 *Um espaço normado completo é um espaço de Banach.*

Definição 39 *Um espaço vetorial com produto interno completo é um espaço de Hilbert.*

Teorema 26 *O completamento de um espaço normado é um espaço de Banach. E o completamento de um espaço com produto interno é um espaço de Hilbert.*

Comentário 18 *Não vou demonstrar.*

Método das aproximações sucessivas

Definição 40 *Um ponto fixo de $f : M \to M$ é $a \in M$ tal que $f(a) = a$.*

Definição 41 *Uma função $f : M \to M$ é uma contração (ou λ contração) se existir $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y), x, y \in M.$$

Uma contração tem no máximo um ponto fixo: se $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então

$$\begin{aligned} d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y) &\implies (1 - \lambda) d(x, y) \le 0 \\ \implies d(x, y) = 0 &\implies x = y. \end{aligned}$$

Teorema 27 (ponto fixo de Banach) *Seja* (M, d) *completo e* $f : M \to M$ *uma* λ *contração. Então* f *tem um único ponto fixo. Além disso a seqüência* $x_{n+1} = f(x_n)$ *com* $x_0 \in M$ *converge para o ponto fixo.*

Demonstração: Vou demonstrar que $(x_n)_n$ é de Cauchy. Temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1).$$

E para $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + \lambda^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+p-1}\right) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ e N tal que $\frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon$. Então se $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon$. Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Então a é um ponto fixo:

$$a = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right) = f(a).$$

Comentário 19 *Vemos pela demonstração que* $d(a, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$*. A taxa de convergência é geométrica.*

Teorema 28 (condição de Blackwell para uma contração) *Para* $X \subset \mathbb{R}^n$ *seja* $B(X) = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$*. Seja* $T : B(X) \to B(X)$ *tal que*

a) *se* $f, g \in B(X)$ *e* $f \leq g$ *temos* $Tf \leq Tg$

b) *Existe* $\beta \in (0, 1)$ *tal que* $T(f + a) \leq Tf + \beta a$ *se* $a \geq 0$.

Então T *é uma contração.*

Demonstração: Para $f, g \in B(X)$, $f(x) \leq g(x) + |f(x) - g(x)| \leq g(x) + |f - g|_\infty$. Logo $f \leq g + |f - g|_\infty$.

Por (a),

$$Tf \leq T(g + |f - g|_\infty) \leq Tg + \beta |f - g|_\infty.$$

Trocando f com g: $Tg \leq Tf + \beta |f - g|_\infty$. Portanto $|Tg - Tf|_\infty \leq \beta |f - g|_\infty$.

Exemplo 26 (crescimento ótimo, um setor) *O seguinte problema resume o aspecto matemático do problema:*

$$Tv(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U(f(k) - y) + \beta v(y)\}.$$

Se $v \leq w$, $Tv \leq Tw$ e vale (a). E

$$\begin{aligned} T(v+a)(k) &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U(f(k)-y) + \beta v(y) + \beta a\} \\ &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U(f(k)-y) + \beta v(y)\} + \beta a \\ &= T(v)(k) + \beta a. \end{aligned}$$

Outros exemplos em Stokey–Lucas.

28/02

Definição 42 *O diâmetro de $A \subset X$ é $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.*

Teorema 29 *Seja (X,d) completo. E $F_n \supset F_{n+1}$ uma família de conjuntos fechados não–vazios de X com $\delta(F_n) \to 0$. Então $\cap_n F_n \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $x_n \in F_n$. Então $(x_n)_n$ é de Cauchy pois dado $\epsilon > 0$ e p natural é tal que $\delta(F_k) < \epsilon$ sempre que $k \geq p$ então se $n, m \geq p$, $\{x_n, x_m\} \subset F_p$ e logo $d(x_n, x_m) \leq \delta(F_p) < \epsilon$. Agora (x_n) sendo de Cauchy tem $x = \lim_n x_n$. Mas $x_m \in F_n$ se $m \geq n$ logo $x \in F_n$ para todo n e $x \in \cap_n F_n$.

Teorema 30 *Suponhamos que (X,d) seja tal que toda família de fechados decrescente com diâmetro convergindo para 0 tem intersecção não vazia. Então X é completo.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Para $\epsilon = \frac{1}{N}$ existe $k(N)$ tal que $n, m \geq k(N) \implies d(x_n, x_m) < \frac{1}{N}$. Sem perda de generalidade $k(N)$ é estritamente crescente. Logo se $F_N = \overline{\{x_n : n \geq k(N)\}}$ temos $\delta(F_N) \leq \frac{1}{N}$ e $F_{N+1} \subset F_N$. Seja $x \in \cap_N F_N$. Então $\lim_n x_n = x$.

Compacidade em espaços métricos

Definição 43 *Seja (X,d) espaço métrico. E $A \subset X$.*

1. *A família de abertos de X, $\{U_i\}_{i \in I}$, é uma cobertura de A se $\cup_{i \in I} U_i \supset A$.*

2. *Se $J \subset I$ for tal que .$\cup_{i \in J} U_i \supset A$ dizemos que $(U_i)_{i \in J}$ é uma subcobertura de A. Se J for finito a subcobertura é finita.*

Definição 44 (X,d) *é compacto se toda cobertura aberta de X tem uma subcobertura finita.*

Exemplo 27 *Todo conjunto finito é compacto.*

Exemplo 28 $A = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$ *não é compacto pois* $U_n = \left(\frac{1}{n+1}, 2\right) \supset \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \geq 1$ *é uma cobertura de* A *que não possui subcobertura finita.*

Lema 17 *Se* $K \subset X$ *é compacto então* K *é fechado.*

Demonstração: Seja $x \in X \setminus K$. Para cada $k \in K$, $B(x, r)$ e $B(k, r)$ são bolas abertas disjuntas de $2r \leq d(x, k)$. A cobertura de K, $\cup_{k \in K} B(k, r(k))$ possui subcobertura finita $B(k_1, r_1), B(k_2, r_2), \ldots, B(k_p, r_p)$. Seja $0 < r < \min_{i \leq p} r_i$. Então

$$B(x, r) \cap B(k_i, r_i) \subset B(x, r_i) \cap B(k_i, r_i) = \emptyset, i \leq p \implies B(x, r) \cap K = \emptyset.$$

Portanto K^c é aberto.

Lema 18 *Se* X *for compacto e* $F \subset X$ *fechado então* F *é compacto.*

Demonstração: Seja $\{U_i : i \in I\}$ cobertura aberta de F. Seja $U_0 = F^c$. Então $\cup_{i \in I \cup \{0\}} U_i = X$. Seja $U_0, U_1, \ldots, U_n$ subcobertura finita:

$$U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n = X \implies U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \supset F.$$

Corolário 10 *Todo compacto é completo.*

Demonstração: Seja $\widehat{K}$ completamento do compacto K. Mas K é subconjunto compacto portanto é fechado. Logo $K = \overline{K} = \widehat{K}$.

Teorema 31 *Seja* $f : M \to N$ *contínua. Se* $K \subset M$ *é compacto,* $f(K) \subset N$ *é compacto.*

Demonstração: Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ cobertura aberta de $f(K)$. Então de

$$K \subset \cup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

vem que $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$é uma cobertura aberta de K. Seja $\{f^{-1}(U_i) : i \in J\}$ subcobertura finita de K. Então

$$f(K) \subset f\left(\cup_{i \in J} f^{-1}(U_i)\right) \subset \cup_{i \in J} U_i.$$

Corolário 11 *Se* $f : M \to \mathbb{R}$ *for contínua e* M *compacto então* $f(M)$ *é fechado limitado. Em particular* f *tem máximo pois* $\sup f(M) \in f(M)$ *e mínimo pois* $\inf f(M) \in f(M)$.

Definição 45 *A família de conjuntos $\{C_i : i \in I\}$ tem a propriedade da intersecção finita se $\cap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$ para todo J finito.*

Teorema 32 *O espaço métrico M é compacto se e somente se toda família de fechados de M, $\{F_i : i \in I\}$ com a propriedade da intersecção finita tem intersecção não–vazia: $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos M compacto. E $\{F_i : i \in I\}$ família de fechado com a propriedade da intersecção finita. Então se $U_i = F_i^c$ temos para J finito,

$$(\cup_{i\in J} U_i)^c = \cap_{i\in J} U_i^c \neq \emptyset \implies \cup_{i\in J} U_i \neq M.$$

Portanto $\cup_{i\in I} U_i \neq M$ e logo $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Recíprocamente, seja $\cup_{i\in I} U_i = M$ cobertura aberta. Então $\cap_{i\in I} U_i^c = \emptyset$. Logo $\{U_i^c : i \in I\}$ não tem a propriedade de intersecção finita: existe J finito, $\cap_{i\in J} U_i^c = \emptyset$ e logo $\cup_{i\in J} U_i = M$.

Exemplo 29 (teorema de Dini) *Seja M compacto e $f_n : M \to \mathbb{R}$ contínua. Suponhamos $f_n \leq f_{n+1}$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ contínua. Então f_n converge para f uniformemente.*

Para ver isto seja para $\epsilon > 0$ dado,

$$F_n = \{x \in M : f(x) - \epsilon \geq f_n(x)\}.$$

Então F_n é fechado pela continuidade de f_n e f. E $F_{n+1} \subset F_n$. De $\cap_n F_n = \emptyset$ vem que $\{F_n : n \geq 1\}$ não tem a propriedade de intersecção finita. Logo existe n_0 tal que $F_{n_0} = \emptyset$.

Definição 46 *Seja $A \subset X$. O ponto $x \in X$ é ponto de acumulação de A se para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Ou seja toda vizinhança de x contém pontos de A distintos de x. O conjunto dos pontos de acumulação de A é denotado A'. É imediato que para todo $x \in A'$, toda vizinhança de x é tem um número infinito de pontos de A.

Lema 19 $\overline{A} = A \cup A'$

Demonstração: Seja $x \in \overline{A} \setminus A$. Existe então $x_n \in A$ com limite x. Mas então a seqüência tem um número infinito de termos e portanto $x \in A'$. Suponhamo agora que $x \in A'$. Para todo n existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (A \setminus \{x\})$. Portanto $\lim x_n = x$ e $x \in \overline{A}$.

Teorema 33 *São equivalentes:*

a) *X é compacto;*

b) *Todo subconjunto infinito de X tem ponto de acumulação;*

c) *toda seqüência em X possui subseqüência convergente.*

Demonstração: (a) $\Longrightarrow$ (b). Suponhamos que $A \subset X$ não tem ponto de acumulação. Portanto A é fechado e então compacto pois X é compacto. Para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $A \cap B(a, r_a) = \{a\}$. Pela compacidade a cobertura $\{B(a, r_a), a \in A\}$ possui subcobertura finita $\{B(a_i, r_i) : i \le N\}$e logo $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ é finito. (b) $\Longrightarrow$ (c) Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Seja $A = \{x_n : n \ge 1\}$. Se A for finito então existe $a \in A$ tal que $\{n : x_n = a\}$ é infinito e com isto temos uma subseqüência de $(x_n)_n$ que converge(para a.) Se A for infinito. Seja $x \in A'$. Então para todo n existe $k(n)$ tal que $x_{k(n)} \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \setminus \{x\}$ e $\lim_n x_{k(n)} = x$. (c) $\Longrightarrow$ (a)

Lema 20 *Se $X = \cup_{i \in I} U_i$, U_i aberto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe $i = i(x) \in I$ tal que $B(x, \delta) \subset U_i$.*

Demonstração: Se não fosse verdade, para todo $n \ge 1$, existe $x_n \in X$, $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap U_i^c \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Seja $x_{k(n)} \to \bar{x}$ subseqüência convergente. Então $\bar{x} \in \cap U_i^c = (\cup_i U_i)^c = X^c = \emptyset$ contradição.

Para terminar a demonstração de (c) $\Longrightarrow$ (a) seja $x_1 \in X$. Se $B(x_1, \delta) \neq X$ existe $x_2 \in X \setminus B(x_1, \delta)$. Portanto $d(x_2, x_1) \ge \delta$.Novamente se $B(x_1, \delta) \cup B(x_2, \delta) \neq X$ seja $x_3 \in X$ tal que $d(x_3, x_2) \ge \delta, d(x_3, x_1) \ge \delta$. E assim por diante. Se $\cup_{j=1}^{n} B(x_j, \delta) \neq X$ existe $x_{n+1} \in X$, $d(x_{n+1}, x_j) \ge \delta, j \le n$. Assim a seq. $(x_n)_n$ não possui subseqüência convergente pois $n \neq m \implies d(x_n, x_m) \ge \delta$. Agora existe então n tal que $(B(x_i, \delta))_{i \le n}$ cobre X. E então $\left(U_{i(j)}\right)_{j \le n}$ cobre X sendo $B(x_i, \delta) \subset U_{i(j)}$.

10/03

Convexidade

A referência para essa parte é “Convex Analysis” do T. Rockafellar.

Variedade afim

Seja V espaço vetorial.

Definição 47 *Se x e y são vetores distintos de V, a reta que passa por x e y é $L = \{rx + (1-r)\,y : r \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 48 *O subconjunto $M \subset V$ é variedade afim se $(1-r)\,x + ry \in M$ sempre que $x, y \in M, r \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 30 *O conjunto vazio, V são variedades afins. Um ponto $\{m\}$ também é.*

Lema 21 *Se M é afim então se $x_i \in M, \lambda_i$ real, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M$.*

Demonstração: Vamos demonstrar por indução. Para $n = 2$ é por definição. Suponhamos que vale para n. Então se $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in M$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Sem perda de genaralidade $\lambda_{n+1} \neq 1$. Seja $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i \in M$. logo

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1})\,y + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in M.$$

Teorema 34 *Toda variedade afim é a translação de um subespaço vetorial.*

Demonstração: Seja F subespaço vetorial de V. Então $a+F$ é variedade afim: se $x, y \in a+F$ e $r \in (-\infty, \infty)$ temos $x-a, y-a \in F$ e $r\,(x-a)+(1-r)\,(y-a) \in F$. Portanto $rx + (1-r)\,y \in a + F$. Recíprocamente suponhamos M variedade afim de V. Seja $a \in M$ e definamos $F = M - a$. Vamos verificar que F é um subespaço vetorial. Sejam $x, y \in F$.

Então $\lambda x + a = \lambda\,(x+a) + (1-\lambda)\,a \in M$ implica $\lambda x \in F$ para todo escalar λ. Agora $\frac{1}{2}\,(x+a) + \frac{1}{2}\,(y+a) = \frac{x+y}{2} + a \in M$ e então $\frac{x+y}{2} \in F$ e então $x + y = 2\frac{x+y}{2} \in F$. Portanto F é subespaço vetorial.

Comentário 20 *O espaço vetorial associado à variedade afim M é $M - M$.*

Para verificar isso note que $a+F = M$. Então $F = F-F = (a+F)-(a+F) = M - M$.

Comentário 21 *A intersercção de variedades afins é uma variedade afim. Assim para $S \subset V$ exist* aff *S a menor variedade afim que contém S.*

Lema 22 aff $S = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \geq 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in S\}$.

Demonstração: Seja M o lado direito da igualdade acima. Então $M \supset S$. Sejam $x, y \in M$, r real. Então

$$rx+(1-r)\,y = r\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right)+(1-r)\left(\sum_{k=1}^{p} \mu_k x_k'\right), \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 = \sum_{k=1}^{p} \mu_k, x_i, x_i' \in S.$$

Logo $rx+(1-r)\,y = \sum_i r\lambda_i x_i + \sum_k (1-r)\,\mu_k x_k' \in M$ pois a soma dos coeficientes é 1. Por outro lado pelo lema 21, aff $S \supset M$ terminando a demonstração.

Definição 49 *A dimensão de uma variedade afim M é a dimensão do subespaço vetorial associado, $L(M) = M - M$.*

Definição 50 *Um hiperplano no espaço vetorial V de dimensão n é uma variedade afim de dimensão $n-1$.*

Teorema 35 *Para β real e $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) = \beta\}$ é um hiperplano. Além disso todo hiperplano do $\mathbb{R}^n$ possui uma tal representação com b, β únicos a menos de um múltiplo comum.*

Demonstração: Seja H um hiperplano no $\mathbb{R}^n$. Seja $F = H - H$ o subespaço vetorial associado. Se $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ é uma base ortogonal de F e completando (teorema de ortogonalização de Gram–Schmidt) temos $\{b_1, \ldots, b_n\}$ base ortogonal do $\mathbb{R}^n$. É claro que $F = \{x : (x, b_n) = 0\}$. Agora se $H = a + F$ e $\beta = (a, b_n)$ temos se $b := b_n$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) = \beta\}. \tag{*}$$

Recíprocamente se H está definido por (*), $b \neq 0$ seja $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $(a, b) = \beta$. Então se $(x, b) = \beta = (a, b)$ temos $x - a \perp b$. O subespaço $F = b^{\perp}$ tem dimensão $n - 1$. Suponhamos $H = \{x : (x, b') = \beta'\}$ outra representação do hiperplano H. Mas então com F é ortogonal à b' temos $b' \in [b]$ ou seja $b' = \mu b$, $\mu \neq 0$. E $(x, b') = \mu\,(x, b) = \mu\beta = \beta'$.

Comentário 22 *b é uma normal ao hiperplano H.*

Teorema 36 *Seja B matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = b\}$ é afim. Além disso toda variedade afim é dessa forma.*

Demonstração: Sejam $x, y \in M$, r real. $B\,(rx + (1-r)\,y) = rBx + (1-r)\,By = rb + (1-r)\,b = b$. Por outro lado se M é afim própria seja $L = M - M$. Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ base de $L^{\perp}$. Então

$$L = \left(L^{\perp}\right)^{\perp} = \{x : x \perp b_i, i \leq m\} = \{x : (x, b_i) = 0, i \leq m\} = \{x : Bx = 0\}.$$

Sendo B matriz $m \times n$ com linhas $b_1, \ldots, b_m$. Se $M = L + a = \{x : B\,(x - a) = 0\} = \{x : Bx = b\}$ sendo $b = Ba$.

Corolário 12 *Toda variedade afim num espaço de dimensão finita é a intersecção de uma família finita de hiperplanos.*

Definição 51 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo*[5] *dos reais. O conjunto $C \subset V$ é convexo se para todos c', c'' em C e $0 < r < 1$, $rc' + (1-r)\,c'' \in C$.*

Todo subespaço vetorial é convexo e toda variedade afim é convexa. Se $f \in V^* \setminus \{0\}$ então

$$\begin{aligned}
&\{x \in V : f(x) = \gamma\}, \text{ hiperplano}\\
&\{x \in V : f(x) < \gamma\}, \text{ semi–espaço aberto}\\
&\{x \in V : f(x) > \gamma\}, \text{ semi–espaço aberto}\\
&\{x \in V : f(x) \leq \gamma\} \text{ semi–espaço fechado}\\
&\{x \in V : f(x) \geq \gamma\}, \text{ semi–espaço fechado}
\end{aligned}$$

são convexos.

Comentário 23 *Note que as noções acima de aberto, fechado se referem somente aos aspecto geométrico. Se f for um funcional linear contínuo os semi–espaços abertos são conjuntos abertos e os semi–espaços fechados são conjuntos fechados. No caso de V ter dimensão finita todo funcional linear é contínuo não havendo margem para confusão.*

12/03

Lema 23 *A intersecção de convexos é um convexo.*

Demonstração: Seja $C = \cap_{i\in I} C_i$ cada C_i convexo de V. Se $x, y \in C$ e $r \in (0,1)$, de $x, y \in C_i$ vem $rx + (1-r)\,y \in C_i$ para todo i e logo $rx + (1-r)\,y \in C$.

Comentário 24 *O conjunto de soluções de um sistema de igualdades/desigualdades lineares é um conjunto convexo.*

Definição 52 *A dimensão de um conjunto convexo C é a dimensão da variedade afim gerada por C.*

Se $x_1, \ldots, x_p$ são vetores e $r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} r_i = 1$ então $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i$ é uma combinação convexa de $x_1, \ldots, x_p$. Os conjuntos convexos, por definição, são fechados por combinações convexas de dois elementos ($p = 2$).

[5] A mesma definição vale se o corpo for o dos complexos.

Lema 24 *Suponha C convexo e $x_1, \ldots, x_p \in C$. Então a combinação convexa $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i \in C$.*

Demonstração: Seja C convexo. E defina

$$A = \{p \geq 2 : C \text{ é fechado para combinações convexas com } p \text{ elementos }\}.$$

É claro que $2 \in A$. Suponhamos que $p \in A$. E seja $x = \sum_{i=1}^{p+1} r_i x_i$ uma combinação convexa com $p+1$ termos. Note que $y = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} r_i} \sum_{i=1}^{p} r_i x_i \in C$. Mas então

$$x = \left(\sum_{i=1}^{p} r_i \right) y + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} r_i \right) x_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} r_i x_i \in C.$$

Portanto $p+1 \in C$ e pela propriedade de indução, $A = \mathbb{N}$, terminando a demonstração.

Definição 53 *Se $S \subset V$, a intersecção dos subconjuntos convexos de V que contém S é um conjunto convexo, o menor convexo que contém S, denominado a envoltória convexa de S:* $\operatorname{con} S$.

Proposição 5 *A envoltória convexa de S é igual a*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i s_i : n \geq 1, r_i \geq 0, \sum_{i} r_i = 1, s_i \in S \right\}.$$

Exemplo 31 *Suponhamos $S := \{b_1, \ldots, b_p\} \subset V$. Então*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Com efeito as combinações com mais de p elementos facilmente se reduz a uma combinação com p elementos: basta somar os coeficientes de cada b_i repetido.

Teorema 37 (Carathéodory) *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Então*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} r_i s_i : s_i \in S, r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} r_i = 1 \right\}.$$

Demonstração: Seja $x = \sum_{i=1}^{m} r_i s_i$ sendo $m > n+1$, uma combinação convexa, $s_i \in S, r_i > 0$. Temos $s_2 - s_1, \ldots, s_m - s_1$ são linearmente dependentes pois $m - 1 > n$. Então

$$\lambda_1 (s_1 - s_m) + \ldots + \lambda_{m-1} (s_{m-1} - s_m) = 0, \exists i \leq m-1, \lambda_i \neq 0.$$

Seja $\lambda_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j$. Então $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_{m-1} s_{m-1} + \lambda_m s_m = 0$ e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_m = 0$. Note que pelo menos algum $\lambda_i > 0$. Seja $t \geq 0$ e note que

$$x = \sum_{i=1}^{m} r_i s_i - t \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i - t\lambda_i) s_i.$$

Agora t deve ser tal que $r_i - t\lambda_i \geq 0$ para todo i. Seja $t = \min \left\{ \frac{r_i}{\lambda_i} : \lambda_i > 0 \right\}$. Temos que $\sum_{i=1}^{m} (r_i - t\lambda_i) = \sum_i r_i - t \sum_i \lambda_i = 1$. Finalmente para i tal que $t = \frac{r_i}{\lambda_i}$ temos $r_i - t\lambda_i = 0$.

Logo escrevemos x como uma combinação linear de no máximo $m - 1$ termos. Esse processo pode ser repetido até m alcançar $n + 1$ e termina aí.

Corolário 13 *Se $K \subset V$ for compacto e $\dim V < \infty$ então $\operatorname{con} K$ é compacto.*

Demonstração: Seja $n = \dim V$. Seja $\Delta = \left\{ \lambda \in [0,1]^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$. A função $f : \Delta \times K^{n+1} \to V$,

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, k_1, \ldots, k_{n+1}) \to \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i k_i$$

é contínua. Portanto tem imagem compacta. Pelo teorema de Carathéodory $f(\Delta \times K^{n+1}) = \operatorname{con} K$. Logo $\operatorname{con} K$ é compacto.

Teorema 38 *O fecho de um conjunto convexo é convexo.*

Demonstração: Seja $S \subset V$ convexo no espaço normado V. Sejam $x, y \in \overline{S}$ e $0 < r < 1$. Existem seqüências $x_n \in S$, $y_n \in S$ e $\lim_n x_n = x, \lim_n y_n = y$. Então $rx_n + (1 - r) y_n \in S$ e converge para $rx + (1 - r) y$. Portanto $rx + (1 - r) y \in \overline{S}$.

Teorema 39 *A soma vetorial de convexos é convexa.*

Demonstração: Se C_1 e C_2 são convexos, $C_1 + C_2$ é convexo pois $x = c_1 + c_2$ e $y = c_1' + c_2'$ então

$$rx + (1 - r) y = rc_1 + (1 - r) c_1' + rc_2 + (1 - r) c_2' \in C_1 + C_2.$$

Lema 25 *Se C for convexo e $r_1, r_2 \geq 0$ então $(r_1 + r_2) C = r_1 C + r_2 C$.*

Demonstração: É imediato que $(r_1 + r_2) C \subset r_1 C + r_2 C$. Seja agora $y = r_1 c_1 + r_2 c_2$, $c_1, c_2 \in C$, Então $\frac{y}{r_1 + r_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} c_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} c_2 \in C$. Logo $y \in (r_1 + r_2) C$.

Definição 54 *Para C convexo,*

i) $L(C) = \cup_{n=1}^{\infty} n(C - C)$ *é um espaço vetorial..*

ii) $\operatorname{aff} C = x_0 + L(C)$ *para* $x^0 \in C$.

Demonstração: (i) Sejam $x, y \in L(C)$ e r real. Temos $x = n(c - c')$, $y = m(c'' - c''')$ sendo $c, c', c'', c''' \in C$. Então

$$x + y = nc + mc'' - (nc' + mc''') = (n + m)(c'''' - c''''') \in L(C).$$

Sem perda de generalidade $r > 0$. Seja $m > r$. Para $c^0 \in C$, $\frac{r}{m}c + \left(1 - \frac{r}{m}c^0\right) \in C$ e $\frac{r}{m}c' + \left(1 - \frac{r}{m}\right)c^0 \in C$ logo $\frac{r}{m}(c - c') \in C - C$ e $\frac{r}{nm}x \in C - C'$.
$rx = nm(c - c')$. (ii) Seja $a + F \supset C$ sendo F subespaço. Então

$$\begin{aligned} F = (a + F) - (a + F) &\supset C - C \\ \implies F &\supset L(C). \end{aligned}$$

E $c^0 + L(C)$ é uma variedade afim que contém C e é a menor possível.

Interior relativo de um convexo

Um intervalo na reta tem interior não–vazio mas no plano o interior é vazio. Uma propriedade importante dos convexos de dimensão finita, é que tem interior relativo não–vazio sempre.

Definição 55 *O interior relativo do convexo* C *denotado* $\operatorname{ri} C$*, é o interior de* C *como subespaço topológico de* $\operatorname{aff} C$.

Definição 56 *A fronteira relativa de* C *é* $\overline{C} \setminus \operatorname{ri} C$.

Assim $x^0 \in \operatorname{ri} C$ se existir $r > 0$ tal que $B(x^0, r) \cap \operatorname{aff} C \subset C$.

Exemplo 32 *Seja* $S = \{(x, y) \geq 0 : x + y \leq 1\}$. *Então se* $L = [0, 1] \times \{0\}$ *temos* $\operatorname{ri} L = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$. *E* $L(S) =$ *"o plano"* e $\operatorname{ri} S = \{(x, y) >> 0, x + y < 1\}$.

Lema 26 *Seja* V *espaço vetorial e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *base de* V. *Então* $T : V \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\begin{aligned} T(z) &= (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \\ z &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

é contínua e tem inversa contínua.

Demonstração: Seja $\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Note que $\phi(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$. É imediato que $\phi = T^{-1}$ e é contínua. Seja

$$\delta = \min \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right| : |\lambda|_1 = 1 \right\},$$

$$|\lambda|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

Pela compacidade de $\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sum_i |\lambda_i| = 1\}$ o mínimo existe e $\delta > 0$. Portanto se $\lambda \neq 0$, $\left| \frac{\lambda}{|\lambda|_1} \right|_1 = 1$ e

$$\left| \phi \left(\frac{\lambda}{|\lambda|_1} \right) \right| \geq \delta \implies |\phi(\lambda)| \geq \delta |\lambda|_1.$$

Seja $z \in V$ e $\lambda = T(z)$. Então $|z| = |\phi(\lambda)| \geq \delta |\lambda|_1 = \delta |T(z)|$. Demonstrando a continuidade de T.

Teorema 40 *Seja $S = \operatorname{con}\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ um simplexo de dimensão n. Então $\operatorname{ri} S \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $L = L(S) = [b_1 - b_0, \ldots, b_n - b_0]$. Definamos $v_i = b_i - b_0$ e $b^* = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} b_i$ o baricentro do simplexo. Para $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$,

$$b^* + z = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - b_0) = \left(\frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) b_0 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n+1} + \lambda_i) b_i.$$

se

$$\frac{1}{n+1} + \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n; \qquad (*)$$

$$\frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0,$$

temos $b^* + z \in S$ pois $\frac{n}{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. O conjunto

$$\Delta = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n_{++} : \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0 \right\}$$

é aberto e então $b^* \in \operatorname{ri} S$ pois $T^{-1}(\Delta)$ é aberto tal que $(b^* + T^{-1}(\Delta)) \cap \operatorname{aff} S \subset S$.

Teorema 41 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo não–vazio. Então $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja S um simplexo de C com a dimensão de $L(C)$. Pelo teorema anterior $\mathrm{ri}\, S \neq \emptyset$. Mas então $\mathrm{ri}\ C \neq \emptyset$ pois $S \subset C$ e $\mathrm{aff}\, S = \mathrm{aff}\, C$.

Teorema 42 *Seja C convexo no $\mathbb{R}^n$. Se $x \in \mathrm{ri}\ C$ e $y \in \overline{C}$ então se $0 \leq r < 1$, $(1-r)\,x + ry \in \mathrm{ri}\ C \subset C$.*

Demonstração: Vou fazer somente o caso $L(C) = \mathbb{R}^n$. Nesse caso temos $x \in \mathrm{int}\, C$. Seja $0 < r < 1$. Para $\epsilon > 0$, $B = B(0,1)$, note que $y \in C + \epsilon B$,

$$(1-r)\,x + ry + \epsilon B \subset (1-r)\,x + r\,(C + \epsilon B) + \epsilon B =$$
$$(1-r)\left[x + \epsilon\,(1+r)\,(1-r)^{-1} B\right] + rC \subset (1-r)\,C + rC = C$$

se ϵ for suficientemente pequeno.

Corolário 14 $\mathrm{ri}\ C$ *é convexo.*

14/03

Corolário 15

1. *O fecho de* $\mathrm{ri}\ C$ *é* $\overline{C}$.
2. $\mathrm{ri}\ \left(\overline{C}\right) = \mathrm{ri}\ C$.

Demonstração: (1) Seja $y \in \overline{C}$. Dado $x^0 \in \mathrm{ri}\ C$ temos $\frac{1}{n}x^0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) y \in \mathrm{ri}\ C$. Logo $y = \lim_n \frac{1}{n}x^0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) y \in \overline{\mathrm{ri}\, C} \subset \overline{C}$. (2) Seja $z \in \mathrm{ri}\,\overline{C}$. E $x \in \mathrm{ri}\ C$. Para $\mu > 1$, suficientemente próximo de 1, $y = (1-\mu)\,x + \mu z = z - (\mu - 1)\,(x - z)$ ainda pertence a $\mathrm{ri}\,\overline{C} \subset \overline{C}$. Então se $\lambda = \mu^{-1}$,

$$z = \frac{1}{\mu}y - \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) x = \lambda y + (1-\lambda)\,x \in \mathrm{ri}\, C,$$

pelo teorema 42.

Separação de convexos

Definição 57 *Sejam C_1 e C_2 convexos não–vazios e H um hiperplano.*

a) *O hiperplano H separa C_1 e C_2 se C_1 está num semi–espaço fechado de H e C_2 no outro.*

b) *H separa propriamente se $(C_1 \cup C_2) \setminus H \neq \emptyset$.*

c) *Separa C_1 e C_2 fortemente se existe $\epsilon > 0$ tal que $C_1 + \epsilon B$ está contido num semi–espaço aberto de H e $C_2 + \epsilon B$ está contido no outro.*

d) *A separação é estrita se C_1e C_2 estão em semi–espaços abertos distintos.*

Em termos analíticos, existe vetor $b \neq 0$ e um escalar β tais que

$$C_1 \subset \{x : \langle x.b\rangle \leq \beta\},$$
$$C_2 \subset \{x : \langle x, b\rangle \geq \beta\}.$$

Teorema 43 *Sejam C_1 e C_2 convexos não–vazios do $\mathbb{R}^n$.*

separação própria *Existe um hiperplano separando–os propriamente se existir vetor b tal que*

$$\inf\{< x, b >: x \in C_1\} \geq \sup\{< x, b >: x \in C_2\};$$
$$\sup\{< x, b >: x \in C_1\} > \inf\{< x, b >: x \in C_2\}.$$

separação forte

$$\inf\{< x, b >: x \in C_1\} > \sup\{< x, b >: x \in C_2\}.$$

Demonstração: Para a separação própria: Seja β entre $\sup\{x \cdot b : x \in C_2\}$ e $\inf\{x \cdot b : x \in C_1\}$. Então β é finito, $b \neq 0$ e $H = \{x : x \cdot b = \beta\}$ é o hiperplano que separa propriamente. Para a separação forte sejam β e $\delta > 0$ tais que

$$\inf\{< x, b >: x \in C_1\} - \delta > \beta > \delta + \sup\{< x, b >: x \in C_2\}.$$

Seja $0 < \epsilon < \frac{\delta}{|b|}$. Para $x \in C_1 + \epsilon B$ e $y \in B$ temos

$$< x, b >=< (c_1 + \epsilon y), b >\geq \inf\{< x, b >: x \in C_1\} - \epsilon|b| > \inf\{< x, b >: x \in C_1\} - \delta > \beta.$$

Analogamente,

$$\beta > \delta + \sup\{< x, b >: x \in C_2\} \geq < x, (C_2 + \epsilon B) > .$$

Lema 27 *Seja $H = \{x :< x, b >= \beta\}$ um hiperplano. E C convexo tal que*

$$C \cap \{x :< x, b >< \beta\} \neq \emptyset \text{ e}$$
$$C \cap \{x :< x, b >> \beta\} \neq \emptyset.$$

Então $C \cap H \neq \emptyset$.

Demonstração: Sejam $x, y \in C$ tais que $< x, b >< \beta << y, b >$. Então para $t = \frac{\beta - <x,b>}{<y,b> - <x,b>} \in (0,1)$

$$< ((1-t)\,x + ty)\,, b >= \beta.$$

Teorema 44 (separação de convexos) *Sejam C_1, C_2 convexos não–vazios.*

(a) *C_1 e C_2 podem ser separados se e somente se $0 \notin \operatorname{int}(C_1 - C_2)$. Além disso, se $\operatorname{int}(C_1 - C_2) \neq \emptyset$ a separação é própria.*

(b) *C_1 e C_2 podem ser fortemente separados se $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$.*

Lema 28 *Seja C um subconjunto convexo, fechado e não–vazio do $\mathbb{R}^n$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe um e único ponto $P \in C$ tal que*

$$|x - P| = d\,(x, C) = \inf\{|x - c| : c \in C\}\,.$$

Além disso para todo $c \in C$,

$$\langle x - P, P\rangle \geq \langle x - P, c\rangle\,.$$

Demonstração: (unicidade) Se $x \in C$ então $P = x$. Se $x \notin C$. Sejam $P, Q \in C$ tais que

$$|x - P| = |x - Q| = d\,(x, C)\,.$$

Então $\frac{1}{2}(P + Q) \in C$ e

$$d\,(x, C) \leq \left|x - \frac{P+Q}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - P + x - Q| \leq \frac{|x - P| + |x - Q|}{2} = d\,(x, C)\,.$$

Portanto a desigualdade triangular vale com igualdade:

$$|x - P + x - Q| = |x - P| + |x - Q|\,.$$

Portanto pelo cor. 6 (b), $x - P = \lambda\,(x - Q) \neq 0$ e $\lambda \geq 0$. De $|x - P| = |x - Q| \neq 0$ vem $\lambda = 1$ e $x - P = x - Q \implies P = Q$. (existência) Seja $x_n \in C$ tal que $|x - x_n| < d\,(x, C) + \frac{1}{n}$. Portanto $(x_n)_n$ é limitada ($|x_n| \leq |x| + d\,(x, C) + 1$). Seja $x_{k(n)} \to P \in C$. Então $|x - P| = d\,(x, C)$. Agora para $c \in C$ temos

$$|x - (1-t)\,P - tc|^2 \geq |x - P|^2\,, t \in (0,1)\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\langle x - P, x - P\rangle + 2t\,\langle P - c, x - P\rangle + t^2\,|P - c|^2 \geq \langle x - P, x - P\rangle \\
&\implies 2t\,\langle P - c, x - P\rangle + t^2\,|P - c|^2 \geq 0 \\
&\implies 2\,\langle P - c, x - P\rangle + t\,|P - c|^2 \geq 0 \implies \langle P - c, x - P\rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Demonstração: (do teorema). Supomos $0 \notin \operatorname{int}(C_1 - C_2)$. Seja $C = \overline{C_1 - C_2}$. Temos que $\operatorname{int} C = \operatorname{int}(C_1 - C_2)$ (Cor. 15 (2)) Caso $0 \notin C$. Seja $P \in C$ ponto à mínima distância de C à origem. Então temos $x = 0$ no lema anterior e se $b = -P$, $b \neq 0$ e

$$0 \geq \langle P, -P \rangle \geq \langle c, P \rangle \implies \langle c, b \rangle \geq 0.$$

Em particular $\langle c_1 - c_2, b \rangle \geq 0$. Caso $0 \in C \setminus \operatorname{int} C$. Seja $x_n \notin C$, $x_n \to 0$ (existe pois $0 \notin \operatorname{int} C$). Seja $P_n \in C$ ponto à mínima distância de x_n. Logo $x_n - P_n \neq 0$ e para todo $c \in C$,

$$\langle P_n - c, x_n - P_n \rangle \geq 0.$$

Então $y_n = \frac{x_n - P_n}{|x_n - P_n|}$ possui subseqüência $y_{k(n)} \to y \neq 0$. Logo

$$\lim_n \left\langle P_{k(n)} - c, y_{k(n)} \right\rangle = \langle -c, y \rangle \geq 0.$$

Em particular se $b = y$, $\langle b, c_1 - c_2 \rangle \leq 0$. Resta demonstrar que a separação é própria se $\operatorname{int}(C_1 - C_2) \neq \emptyset$. Suponhamos que a separação não fosse própria. Então $\langle c_1 - c_2, b \rangle = 0$ para todo c_1, c_2. Mas um hiperplano tem interior vazio. Contradição.

Definição 58 *Um hiperplano H é um hiperplano suporte do convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, se $H \cap C \neq \emptyset$ e C está contido num dos semi–espaços fechados de H. O hiperplano é não–trivial se $C \setminus H$ for não–vazio.*

21/03

Corolário 16 *Sejam C_1, C_2 convexos não–vazios do $\mathbb{R}^n$. Se $\operatorname{int} C_1 \neq \emptyset$ e $C_2 \cap \operatorname{int} C_1 = \emptyset$ então podemos separa C_1 e C_2 propriamente.*

Demonstração: Note que

$$\operatorname{int} C_1 - C_2 \subset C_1 - C_2 \subset \overline{\operatorname{int} C_1 - C_2}$$

e portanto pelo corolário 15 (2): $\operatorname{int} C_1 - C_2 = \operatorname{int}(C_1 - C_2)$ e de $0 \notin \operatorname{int}(C_1 - C_2)$ podemos aplicar o teorema de separação e a separação é própria.

Corolário 17 *Se C_1 for fechado e C_2 compacto, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ podemos separar fortemente.*

Demonstração: Basta notar que $0 \notin C_1 - C_2$ e que $C_1 - C_2$ é fechado: se $c_{1n} - c_{2n} \to x$ podemos sem perda de generalidade (passando a uma subseqüência se necessário) supor $c_{2n} \to c_2 \in C_2$. Então $c_{1n} = (c_{1n} - c_{2n}) + c_{2n} \to x + c_2 \in C_1$ e portanto $x \in C_1 - C_2$.

Teorema 45 *Um conjunto convexo fechado próprio é a intersercção dos semi–espaços fechados que o contém.*

Demonstração: Seja C convexo fechado não–vazio e $\neq \mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ temos $C \cap \{x\} = \emptyset$. Portanto existe um hiperplano H_x que contém C no semi–espaço aberto à esquerda, H_x^- e x do outro lado. A intersecção desses semi–espaços, $\cap_{x \in C^c} H_x^- = C$.

Notação 6 *Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escrevemos $x < 0$ se $x_i \leq 0$ para todo i e $x \neq 0$. E $x << 0$ se $x_i < 0$ para todo $i \leq n$.*

Comentário 25 *Na linguagem matricial (usada no exemplo abaixo) os vetores são coluna. O produto interno de x, b vetores $m \times 1$ é $x^t b$.*

Exemplo 33 (Gordan) *Seja A matriz $m \times n$. Então somente uma das alternativas a seguir é verdadeira:*

i) *Existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax << 0$;*

ii) *Existe $b \in \mathbb{R}_+^m$ e $b \neq 0$ tal que $A^t b = 0$.*

Suponhamos (i) e (ii) válidas. Então $x^t A^t b = 0 \implies (Ax)^t b = 0$ uma impossibilidade pois $Ax << 0$. Sejam $C_1 = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ e $C_2 = \{y \in \mathbb{R}^m : y << 0\}$. Se (i) for falso, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Então existe um hiperplano que separa propriamente: $H = \{x \in \mathbb{R}^m : x^t b = \beta\}$ e $C_1 \subset \{x : x^t b \geq \beta\}$ e $C_2 \subset \{x : x^t b \leq \beta\}$. Então $0 \in C_1$ implica $\beta \leq 0$. E $\left(-\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\right) \in C_2$ implica $0 \leq \beta$ e então $\beta = 0$. E necessariamente $b \geq 0$. Finalmente sendo C_1 um subespaço vetorial, $y^t b = 0$ se $y \in C_1$ e logo vale $(Ax)^t b = 0$ para todo $x \implies A^t b = 0$.

Exemplo 34 (lema de Farkas) *Seja A matriz $m \times n$ e b vetor $m \times 1$. Somente uma das alternativas a seguir é verdadeira:*

1. *Existe x $n \times 1$, $x \geq 0$, tal que $Ax = b$;*

2. *Existe μ vetor $m \times 1$, $\mu^t A \geq 0$ e $\mu^t b < 0$.*

Comentário 26 *Trocando o sinal de μ (2) equivale a (2)' $\mu^t A \leq 0$ e $\mu^t b > 0$.*

Demonstração: Primeiramente notemos que (1) e (2) não são válidas simultaneamente. Se

$$Ax = b, x \geqq 0,$$
$$\mu^t A \geqq 0, \mu^t b < 0.$$

Então $\mu^t Ax \geq 0$ pois $x \geq 0$. Logo $\mu^t b \geq 0$ em contradição com $\mu^t b < 0$. Seja $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ a j–ésima coluna da matriz A. Então $Ax = b$ se e somente se

$$b \in \text{cone}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Suponhamos então que (1) não vale. Então $b \notin K := \text{cone}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Existe então μ, $m \times 1$ tal que

$$\mu^t b < 0 \leq \mu^t v_i, 1 \leq i \leq n.$$

E portanto vale (2).

Comentário 27 *A separação estrita acima depende de K ser fechado. Os lemas a seguir visam demonstrar isso.*

Lema 29 *Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ for l.i. então K é fechado.*

Demonstração: Seja $x^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t v_i, \lambda_i^t \geq 0$, com limite x. Se $\lambda^t = (\lambda_i^t)_{i=1}^n$ possui subseqüência convergente, $\lambda^{k(t)}$, então $x = \sum_{i=1}^n \lim_t \lambda_i^{k(t)} v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in K$ pois $\lambda_i = \lim_k \lambda_i^{k(t)} \geq 0$. Se (λ^t) não possui subseqüência convergente[6], $|\lambda^t| \to \infty$ e então, passando a uma subseqüência se necessário, $\frac{\lambda^t}{|\lambda^t|_S} \to \mu \geq 0, |\mu| = 1$. Mas então

$$\sum_i \mu_i v_i = \lim_t \frac{x^t}{|\lambda^t|} = 0.$$

Contradição com a independência linear.

Lema 30 *Para todo $x \in K$ existe $S \subset \{1, \ldots, n\}$ tal que $\{v_i : i \in S\}$ é l.i. e $x \in \text{cone}\{v_i : i \in S\}$.*

Demonstração: Para $x \in K$, seja a representação $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, $\lambda_i \geq 0$ e tal que $S = \{i : \lambda_i > 0\}$ seja tal que $\#S$ é o menor possível. Se $\{v_i : i \in S\}$ não for l.i existe θ_i, $i \in S$ nem todos nulos tal que $\sum_{i \in S} \theta_i v_i = 0$. Sem perda de generalidade pelo menos um $\theta_j > 0$. Seja $t = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\theta_i} : \theta_i > 0 \right\}$. Então $\lambda_i - t\theta_i \geq 0$ para todo i e

$$x = \sum_{i \in S} (\lambda_i - t\theta_i)\, v_i$$

é uma representação com menos de $\#S$ elementos positivos. Contradição.

Teorema 46 *Seja $K = \text{cone}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então K é fechado.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{S} = \{S \subset \{1, \ldots, n\} : \{v_i : i \in S\}$ é l.i.$\}$. Note que $K = \cup_{S \in \mathfrak{S}} \text{cone}\{v_i : i \in S\}$ e cada $\text{cone}\{v_i : i \in S\}$ é fechado.

[6] usando a norma da soma

Funções convexas

No estudo das funções convexas é conveniente permitir que as funções assumam valores em $[-\infty, \infty]$. O símbolo $\dot{+}$ é ocasionalmente necessário:

$$\begin{aligned} x \dot{+} y &= x + y \text{ se } \{x, y\} \neq \{-\infty, \infty\} \\ -\infty \dot{+} \infty &= \infty \dot{+} -\infty = \infty. \end{aligned}$$

Definição 59 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa se $f(rc + (1-r)c') \leq rf(c) + (1-r)f(c')$,$\forall c, c' \in C$.*

Comentário 28 *A definição é a usual mas na análise convexa a próxima definição é vantajosa pois deixa C implicíto.*

Definição 60 *$f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ é convexa se para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $0 < r < 1$,*

$$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) \dot{+} (1-r)f(y). \tag{*}$$

Definição 61 *O domínio efetivo de f, $\operatorname{dom} f = \{x : f(x) < \infty\}$.*

Definição 62 *O epígrafo de f é o conjunto $\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$.*

Definição 63 *f é própria se não assume o valor $-\infty$ e $\operatorname{dom} f$ é não–vazio.*

Comentário 29 *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa pela definição 59 então definindo para $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, $f(x) = \infty$ temos que f é convexa pela definição (*).*

Lema 31 *f é convexa se e somente se $\operatorname{epi} f$ for convexo.*

Demonstração: Suponhamos f convexa. E $(x, r), (x', r') \in \operatorname{epi} f$ e $0 < \lambda < 1$. Então como $f(x), f(y) < \infty$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)x') &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)r' \\ &\implies \lambda(x, r) + (1-\lambda)(x', r') \in \operatorname{epi} f. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que o epígrafo de f é convexo. A desigualdade (*) vale sempre que $f(x) = \infty$ ou $f(y) = \infty$. Suponhamos agora que $f(x) < \infty$ e $f(y) < \infty$. Então se $r > f(x)$ e $s > f(y)$ temos $(x, r), (y, s) \in \operatorname{epi} f$ e então

$$(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda r + (1-\lambda)s) \in \operatorname{epi} f.$$

Logo

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda r + (1-\lambda)s.$$

Fazendo $r \downarrow f(x)$ e $s \downarrow f(y)$ vem $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) \dot{+} (1-r)f(y)$.

Teorema 47 (des. Jensen) *Seja f convexa própria. Então*

$$f\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\lambda_j f(x_j),$$
$$\lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m}\lambda_j = 1.$$

Comentário 30 *Podemos dizer que essa é a desigualdade de Jensen no caso discreto.*

Demonstração: Para $m = 2$ vale por definição. Suponhamos que vale para m e demonstremos que vale para $m+1$. Sejam $x_j \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_j \geq 0$, $1 \leq j \leq m+1, \sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j = 1$. Sem perda de generalidade $\lambda_{m+1} \neq 1$. Então se $y = \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{m+1}}x_j$,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j x_j\right) &= f\left(\left(1-\lambda_{m+1}\right)y + \lambda_{m+1}x_{m+1}\right) \leq \left(1-\lambda_{m+1}\right)f(y) + \lambda_{m+1}f(x_{m+1}) \\
&\leq \left(1-\lambda_{m+1}\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{m+1}}f(x_j) + \lambda_{m+1}f(x_{m+1}) = \sum_{j=1}^{m+1}\lambda_j f(x_j).
\end{aligned}$$

Critérios para convexidade em uma variável real

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ convexa. Sejam $a < x < y < y'$. Para t tal que $(1-t)x + ty' = y$ temos $t = \frac{y-x}{y'-x}$ e

$$\begin{aligned}
&f(y) = f\left((1-t)x + ty'\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y') \implies f(y) - f(x) \leq t\left(f(y') - f(x)\right) \\
&\quad\implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x)}{y'-x}.
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ cresce com y. Agora subtraindo $f(y')$ no lugar de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
&f(y) - f(y') \leq (1-t)\left(f(x) - f(y')\right) = \frac{y'-y}{y'-x}\left(f(x) - f(y')\right) \implies \\
&f(y') - f(y) \geq \frac{y'-y}{y'-x}\left(f(y') - f(x)\right) \implies \frac{f(y')-f(y)}{y'-y} \geq \frac{f(y')-f(x)}{y'-x}.
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ cresce com x.

Lema 32 *Se* $x \leq x', y \leq y'$, $x < y, x' < y'$ *então* $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$.

Demonstração: Usando os resultados acima, aumentamos primeiro y para y' e então x para x':

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x)}{y'-x} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

24/03

Definição 64 *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *uma função. A derivada à direita de* f *em* $x^0 \in (a,b)$ *é*

$$f^+\left(x^0\right) = \lim_{y \downarrow x^0} \frac{f(y)-f(x^0)}{y-x^0} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h}$$

quando existir. A derivada à esquerda é

$$f^-\left(x^0\right) = \lim_{y \uparrow x^0} \frac{f(y)-f(x^0)}{y-x^0} = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h}.$$

Exemplo 35 *Se* $f(x) = |x|$*. Então lembrando que para* $h < 0, |h| = -h$, $f^-(0) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{-h}{h} = -1$*. E* $f^+(0) = 1$.

Teorema 48 *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *convexa.*

1. *Para todo* $a < x < y < b$,

   $$x \to \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, y \to \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

   são crescentes em x *e em* y.

2. *Se* $x < y, x' < y', x \leq x', y \leq y'$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$;

3. f *é contínua em* (a,b);

4. f *tem derivada à direita e à esquerda em todo ponto de* (a,b);

5. *a derivada à esquerda e a derivada à direita são crescentes. Além disso, se* $x < y$, $f^+(x) \leq f^-(y) \leq f^+(y)$.

Demonstração: (1) e (2) está feito acima. (3) Seja $x \in (a,b)$. Sejam x', y' tais que $x < x' < y' < b$. E $M := \left|\frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}\right|$. Então para $y \in (x, x')$,

$$f(y) - f(x) \leq M(y-x) = M|y-x|.$$

Agora se $a < y < x$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq M$ e portanto $f(y) - f(x) \geq M(y-x) = -M|y-x|$. Então

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|.$$

Finalmente dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \frac{\epsilon}{M}$: $|y-x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq M\delta = \epsilon$.
(4) Seja $x \in (a,b)$. Para $y > x$ sabemos pelo item (1) que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$

é crescente em y. Portanto $f^+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \inf\left\{\frac{f(y)-f(x)}{y-x} : y > x\right\}$ existe. Agora Para $x \uparrow y$,

$$f^-(y) = \lim_{x \uparrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \lim_{x \uparrow y} \frac{f(y) - f(x)}{y-x} = \sup\left\{\frac{f(y) - f(x)}{y-x} : x < y\right\}.$$

(5) Usando (2) para $x < x'$,

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y') - f(x')}{y'-x'} \implies \\ f^+(x) &\leq \lim_{y' \downarrow x'} \frac{f(y') - f(x')}{y'-x'} = f^+(x'). \end{aligned}$$

Suponhamos agora $y < x' < y'$:

$$\begin{aligned} f^-(y) &= \lim_{x \uparrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \lim_{x \uparrow y} \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y') - f(x')}{y'-x'} \implies \\ f^-(y) &\leq \lim_{x' \uparrow y'} \frac{f(y') - f(x')}{y'-x'} = f^-(y'). \end{aligned}$$

Seja $h > 0$. Então $\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} \geq f(x)$ e então $f(x+h) - f(x) \geq f(x-h) - f(x)$. Logo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}.$$

Se $h \downarrow 0$ então $-h \uparrow 0$. Logo $f^+(x) \geq f^-(x)$.

Lema 33 (Froda) *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ é monótona, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.*

Demonstração: Sem perda de generalidade suponho f crescente. Seja $f(x+) = \lim_{y\downarrow x} f(y) = \inf\{f(y) : y > x\}$ e $f(x-) = \lim_{y\uparrow x} f(y) = \sup\{f(y) : y < x\}$. Se f for descontínua em x então $f(x-) < f(x+)$. Agora se f for descontínua em x e em $y > x$ temos $(f(x-), f(x+)) \cap (f(y-), f(y+)) = \emptyset$. Seja $N > \frac{b-a}{2}$. Então, $I(N) := \left[a + \frac{1}{N}, b - \frac{1}{N}\right] \subset (a,b)$. Portanto $\left\{x \in I(N) : f(x+) - f(x-) > \frac{1}{m}\right\}$ é finito pois se tem k elementos $k \cdot \frac{1}{m} \leq f\left(b - \frac{1}{N}\right) - f\left(a + \frac{1}{N}\right)$. Logo

$$\{x \in I(N) : f(x+) - f(x-) > 0\}$$

é enumerável e também

$$\{x \in (a,b) : f(x+) - f(x-) > 0\} = \cup_N \{x \in I(N) : f(x+) - f(x-) > 0\}.$$

Teorema 49 *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ for convexa, f é contínua em (a,b) e diferenciável exceto num conjunto enumerável de pontos.*

Demonstração: A continuidade já vimos acima. Pela monotonicidade de f^+ temos que f^+ é contínua exceto num conjunto enumerável de pontos. Seja x ponto de continuidade de f^+. Para $x - h < y < x < z < x + h$ obtemos $f^+(x-h) \leq f^-(y) \leq f^+(x) \leq f^-(z) \leq f^+(x+h)$. Portanto

$$f^+(x-h) \leq f^-(x-) \leq f^+(x) \leq f^-(x+) \leq f^+(x+h).$$

Passando ao limite $h \to 0$ obtemos $f^+(x) = f^-(x-) = f^-(x+)$ e portanto $f^+(x) = f^-(x) = f'(x)$.

Teorema 50 *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ for diferenciável, então f é convexa se e somente se $f'(x)$ for crescente.*

Demonstração:

Exemplo 36 (desigualdade aritmética–geométrica) *Se $x_i > 0$ para $i \leq n$ então*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

A função $f(x) = -\log x$ é convexa pois $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Pela desigualdade de Jensen, $f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}$ ou

$$-\log \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{-\log(x_i)}{n} = -\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Exemplo 37 (função indicadora) *Para $C \subset \mathbb{R}^n$ a função indicadora de C é $\delta(\cdot|C)$,*

$$\delta(x|C) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in C, \\ \infty & se \quad x \notin C. \end{cases}$$

O epígrafo da indicadora é $C \times [0, \infty)$. Portanto C é convexo se e somente se a função indicadora for convexa.

Definição 65 *A função suporte do conjunto convexo C é*

$$\delta^*(x|C) = \sup \{< x, y >: y \in C\}.$$

Definição 66 *O gabarito $\gamma(\cdot|C)$ para C não–vazio:*

$$\gamma(x|C) = \inf \{r \geq 0 : x \in rC\}.$$

Definição 67 *A função distância: $d(x, C) = \inf \{|x - y| : y \in C\}$.*

Todas essas funções são convexas.

Teorema 51 *Seja f convexa e $\alpha \in [-\infty, \infty]$. Então são convexos:*

$$\{x : f(x) < \alpha\} \ \ e \ \ \{x : f(x) \leq \alpha\}.$$

Demonstração: Se $f(x) \leq \alpha$ e $f(y) \leq \alpha$ então $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y) \leq r\alpha + (1-r)\alpha = \alpha$. Analogamente para a desigualdade estrita.

Teorema 52 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ convexa e $\phi : (-\infty, \infty] \to (-\infty, \infty]$ convexa e não–decrescente. Então $\phi \circ f$ é convexa.*

Demonstração: De $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$ obtemos aplicando ϕ:

$$\phi(f(rx + (1-r)y)) \leq \phi(rf(x) + (1-r)f(y)) \leq r\phi(f(x)) + (1-r)\phi(f(y)).$$

Exemplo 38

1. *Se f convexa própria, então $e^{f(x)}$ é convexa própria.*
2. *Se f for convexa não–negativa e $p > 1$, $(f(x))^p$ é convexa.*

Proposição 6 *A soma de convexas próprias é convexa. A soma é própria se uma das funções for finita sempre.*

A demonstração é imediata.

Proposição 7 *Seja $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ convexo não–vazio. A seguinte função é convexa:*

$$f(x) = \inf\{\mu : (x,\mu) \in F\}.$$

Demonstração: Note que $\inf \emptyset = \infty$. Então se $rf(x) + (1-r) f(y) < \infty$ existe $(x,\mu) \in F$ e $(y,\nu) \in F$. Portanto $(rx + (1-r) y, r\mu + (1-r)\nu) \in F$ e logo $f(rx + (1-r) y) \leq r\mu + (1-r)\nu$.

Proposição 8 (convolução) *Sejam $f_1, \ldots, f_m$ convexas próprias. E seja*

$$f(x) = \inf\{f_1(x_1) + \ldots + f_m(x_m) : x_1 + \ldots + x_m = x\}.$$

Então f é convexa.

Demonstração: Seja $F_i = \operatorname{epi} f_i$, $1 \leq i \leq m$ e $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$ é convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então $(x,\mu) \in F$ se existirem $(x_i, \mu_i) \in F_i$, $\mu = \sum_i \mu_i$, $x = \sum_i x_i$, $f_i(x_i) \leq \mu_i$. Portanto f é convexa.

Teorema 53 *O supremo de uma família de funções convexas é uma função convexa.*

Demonstração: Seja $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$. Então $f_i(rx + (1-r) y) \leq rf_i(x) \dotplus (1-r) f_i(y) \leq rf(x) \dotplus (1-r) f(y)$. Outra demonstração:

$$\operatorname{epi} f = \cap_{i \in I} \operatorname{epi} f_i.$$

Continuidade

Definição 68 *Uma função entre espaços métricos, $f : X \to Y$ é Lipschitz se existir $k > 0$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y), x, y \in X.$$

Comentário 31 *Se quisermos especificar a constante dizemos que f é k-lipschitz.*

Definição 69

1. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é lipschitz numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$ se exister $\epsilon > 0$ e $K > 0$ tais que*

$$|f(y) - f(z)| \leq K|y - z|, y, z \in B(x, \epsilon).$$

2. *E f é localmente lipschitz no aberto U se para todo $x \in U$, f é lipschitz numa vizinhança de x contida em U.*

Comentário 32 *Note que essa condição implica a continuidade de f em U.*

Proposição 9 *Seja f convexa própria. Seja $U = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Suponha que existe bola aberta, $x_0 + \epsilon B \subset U$ e $M < \infty$ tais que $f(x) \leq M$ para todo $x \in x_0 + \epsilon B$. Então para todo $x \in U$, f é localmente lipschitz numa vizinhança de x.*

Demonstração: Sem perda de generalidade[7], $x_0 = 0$. Assim $f(u) \leq M$ se $|u| < \epsilon$. Seja $x \in U$. Vou demonstrar que f é limitada numa vizinhança de x. Seja $\rho > 1$ tal que $y := \rho x \in U$.

Seja $\lambda = \frac{1}{\rho}$. Então V a seguir é uma vizinhança de x:

$$V = \{v : v = (1-\lambda)\, x' + \lambda y, |x'| < \epsilon\} = x + (1-\lambda)\, \epsilon B.$$

Por convexidade, $f(v) \leq (1-\lambda) f(x') + \lambda f(y) \leq M + \lambda f(y)$. Então f é limitada superiormente numa vizinhança de x. Se $z \in V$ existe $z' \in V$, $x = \frac{z+z'}{2}$. Então

$$f(x) \leq \frac{f(z) + f(z')}{2} \implies f(z) \geq 2f(x) - f(z') \geq 2f(x) - M - \lambda f(y).$$

Assim f é limitada numa vizinhança de x. Seja N uma cota superior para $|f|$ em $x + 2\delta B, \delta > 0$. Para $x_1 \neq x_2$ em $x + \delta B$, seja $x_3 = x_2 + \frac{\delta}{\alpha}(x_2 - x_1)$ sendo $\alpha = |x_2 - x_1|$. Note que $x_3 \in x + 2\delta B$. Resolvendo para x_2:

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{\delta}{\alpha+\delta} x_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\delta} x_3 &\implies f(x_2) \leq \frac{\delta}{\alpha+\delta} f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha+\delta} f(x_3) \\ &\implies f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\delta}\left[f(x_3) - f(x_1)\right] \leq \frac{\alpha}{\delta} 2N = \frac{2N}{\delta}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Trocando x_2 com x_1 obtemos $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2N}{\delta}|x_2 - x_1|$.

Derivada direcional

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa, $h \in \mathbb{R}^n$. Seja $g(\lambda) = \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}, \lambda > 0$. Suponhamos $\lambda > \mu > 0$. Seja $r = \mu/\lambda$. Então

$$\begin{aligned} f(x+\mu h) = f(x + r\lambda h) = f(r(x+\lambda h) + (1-r)\, x) &\leq r f(x+\lambda h) + (1-r) f(x) \\ \implies f(x+\mu h) - f(x) &\leq r\left(f(x+\lambda h) - f(x)\right) \\ \implies g(\mu) &\leq g(\lambda). \end{aligned}$$

Então $f'(x,h) = \lim_{\lambda \downarrow 0} g(\lambda) = \inf_{\lambda > 0} g(\lambda)$ existe. Note que $f'(x,0) = 0$. E $f'(x, rh) = r f'(x,h)$ se $r > 0$.

[7] Basta considerar $g(x) = f(x_0 + x)$.

Lema 34 $-f'(x,-h) \leq f'(x,h)$.

Demonstração: Note que $\frac{f(x+rh)+f(x-rh)}{2} \geq f(x)$ e então

$$\frac{f(x+rh)-f(x)}{r} \geq -\frac{f(x-rh)-f(x)}{r} \implies f'(x,h) \geq -f'(x,-h).$$

26/03

Subgradiente

Seja f convexa. O vector x^* é um subgradiente de f em x se

$$f(z) \geq f(x) + < x^*, z-x >, z \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto dos subgradientes em x é denotado $\partial f(x)$. É imediato da definição que $\partial f(x)$ é convexo e fechado.

Exemplo 39 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexa. Então* $\partial f(x) = [f^-(x), f^+(x)]$. *Para verificar isso seja* $m \in [f^-(x), f^+(x)]$. *Se* $y > x$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f^+(x) \geq m$ *e portanto* $f(y) \geq f(x) + m(y-x)$. *Se* $y < x$,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f^-(x) \leq m \implies f(x)-f(y) \leq m(x-y)$$
$$\implies f(y) \geq f(x) + m(y-x).$$

Portanto $f(y) \geq f(x) + m(y-x)$ *para todo* y *e então* $m \in \partial f(x)$. *Por outro lado se* $m \in \partial f(x)$ *temos*

$$f^+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq m.$$

E

$$f^-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq m.$$

Exemplo 40 (subgradiente da indicadora) *Seja* $C \neq \emptyset$ *convexo. Se* $x \notin C$, $\partial \delta(x, C) = \emptyset$. *Seja* $x \in C$, *Então* $x^* \in \partial \delta(x|C)$ *se e somente se*

$$\delta(y|C) \geq \delta(x|C) + \langle x^*, y-x \rangle \iff 0 \geq \langle x^*, y-x \rangle, \forall y \in C.$$

Comentário 33 *Nesse caso dizemos que* x^**é normal a* C *em* x.

Notação 7 $N_C(x) = \partial\delta(x|C) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, y - x\rangle \leq 0, y \in C\}$.

Proposição 10 *Seja f convexa própria. Então o subgradiente de f é não–vazio para todo $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.*

Demonstração: Seja $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Então $(x, \mu) \in \operatorname{int}\operatorname{epi} f$ se $f(x) < \mu < \infty$. E $(x, f(x)) \notin \operatorname{int}\operatorname{epi} f$. Seja $C = \operatorname{int}\operatorname{epi} f$. Existe então um hiperplano não–trivial, $H = \{(y, \mu) : \langle z^*, y\rangle + \lambda\mu = \beta\}$ e

$$< z^*, x > +\lambda f(x) \geq \beta \geq < z^*, y > +\lambda\mu, y \in \mathbb{R}^n, (y, \mu) \in C.$$

Mas note que $\operatorname{epi} f \subset \overline{C}$. Portanto $\beta \geq < z^*, x > +\lambda f(x)$ e logo $\beta = < z^*, x > +\lambda f(x)$. Se $\lambda = 0$ temos $\langle z^*, x\rangle \geq < z^*, y >$ para todo y numa vizinhança de x pois $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Logo $z^* = 0$ contradição com $(z^*, \lambda) \neq 0$. Para $\lambda \neq 0$, fazendo $\mu \to \infty$ podemos concluir que $\lambda < 0$. Dividindo por $|\lambda|$ podemos supor sem perda de generalidade $\lambda = -1$:

$$< z^*, x > -f(x) \geq < z^*, y > -\mu, f(y) \leq \mu.$$

Para $\mu = f(y)$ vem $f(y) - f(x) \geq \langle z^*, y - x\rangle$. Assim $z^* \in \partial f(x)$.

Proposição 11 *O subgradiente é monótono:* $\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y\rangle \geq 0$.

Demonstração: Sejam $x, y \in \operatorname{dom} f$ e $x^* \in \partial f(x)$, $y^* \in \partial f(y)$. Então

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\geq < x^*, y - x > \\ f(x) - f(y) &\geq < y^*, x - y > . \end{aligned}$$

Somando, $0 \geq < x^* - y^*, y - x > \Longrightarrow < x^* - y^*, y - x > \geq 0$.

Teorema 54 *Sejam $f_1, \ldots, f_m$ convexas próprias. Seja $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$. Então*

$$\partial f(x) \supset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Além disso se $\cap_{i=1}^m \operatorname{int}\operatorname{dom} f_i \neq \emptyset$,

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Demonstração: Seja $z_i^* \in \partial f_i(x), 1 \leq i \leq m$. Então

$$f_i(y) \geq f_i(x) + \langle z_i^*, y - x\rangle, i \leq m.$$

Somando em i: $f(y) \geq f(x) + \langle \sum_{i=1}^m z_i^*, y - x\rangle$ e portanto $\sum_{i=1}^m z_i^* \in \partial f(x)$. Para demonstrar a igualdade basta considerar $m = 2$ e prosseguir por indução. Vamos fazer um resultado um pouco mais geral:

Lema 35 *Seja f e g convexas próprias. Suponhamos que existe $\bar{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ tal que f é contínua em $\bar{x}$. Então*

$$\partial (f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x), \forall x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g.$$

Demonstração: Seja $\zeta \in \partial (f+g)(x)$. Considerando $f_1(y) = f(x+y) - f(x)$ e $g_1(y) = g(x+y) - g(x)$ podemos supor sem perda de generalidade que $x = 0, f(0) = 0 = g(0)$. Sejam

$$\begin{aligned} C &= \operatorname{int} \operatorname{epi} f, \\ \text{e } D &= \{(w,t) \in \operatorname{dom} g \times \mathbb{R} : \langle \zeta, w \rangle - g(w) \geq t\}. \end{aligned}$$

C é não vazio pois $(\bar{x}, \mu) \in C$ se $f(\bar{x}) < \mu$. E $(0,0) \in D$. E C, D são convexos e disjuntos: se $(w,t) \in C \cap D$ vem

$$f(w) + g(w) \geq \langle \zeta, w \rangle \geq g(w) + t \implies f(w) \geq t.$$

Porém $(w,t) \in C$ implica que $t > f(w)$ contradição. Seja $(x^*, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que

$$\langle x^*, w \rangle + \lambda t < \langle x^*, u \rangle + \lambda s, (w,t) \in D, (u,s) \in C.$$

Se $\lambda = 0$ escolhemos $w = u = \bar{x}, t = \langle \zeta, \bar{x} \rangle - g(\bar{x})$ e $s > f(\bar{x})$. Então $\langle x^*, \bar{x} \rangle < \langle x^*, \bar{x} \rangle$ contradição. Sendo $\lambda \neq 0$ necessariamente $\lambda > 0$. Sem perda de generalidade, $\lambda = 1$. Então usando que $\operatorname{epi} f \subset \overline{C}$,

$$\langle x^*, w \rangle + t \leq \langle x^*, u \rangle + f(u), u \in \operatorname{dom} f.$$

Para $(w,t) = 0$ vem $0 \leq \langle x^*, u \rangle + f(u)$ e então $-x^* \in \partial f(0)$. Para $(u,s) = (0,0)$ e $t = \langle \zeta, w \rangle - g(w)$ vem

$$\langle x^*, w \rangle + \langle \zeta, w \rangle - g(w) \leq 0 \implies x^* + \zeta \in \partial g(0) \implies \zeta \in -x^* + \partial g(0) \subset \partial f(0) + \partial g(0).$$

Proposição 12 $0 \in \partial f(x) \iff x$ *é ponto de mínimo de f convexa própria.*

Proposição 13 *x é ponto de mínimo de f se e somente se $f'(x,h) \geq 0$ para todo h.*

Teorema 55 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa e $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $x \in A$. São equivalentes:*

1. $f(x) = \min f(A)$;
2. $(-\partial f(x)) \cap N_A(x) \neq \emptyset$.

Demonstração: Se $f(x) = \min f(A)$ então $\min f(y) + \delta(y|A) = f(x)$. Portanto $0 \in \partial (f + \delta(\cdot|A))(x) = \partial f(x) + N_A(x)$. Existe então $\zeta \in \partial f(x)$ e $\eta \in N_A(x)$ tais que $0 = \zeta + \eta$ e vale (2). Recíprocamente se $z^* \in (-\partial f(x)) \cap N_A(x)$ então $-z^* \in \partial f(x), z^* \in N_A(x)$ logo $0 \in \partial f(x) + N_A(x) = \partial (f + \delta(\cdot|A))(x)$ e x é ponto de mínimo de $f|A$.

28/03

Multiplicadores de Kuhn Tucker

Teorema 56 *Seja C convexo. Sejam $f_1, \ldots, f_m$ convexas próprias com* $\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{int} C$, $1 \leq i \leq m$. *Então somente uma das alternativas a seguir é válida:*

a) *Existe $x \in C$, $(f_1(x), \ldots, f_m(x)) << 0$;*

b) *Existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \geq 0$, $\lambda \neq 0$,*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0, \forall x \in C.$$

Demonstração: Seja $g(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. É imediato que se $f_i(x) < 0$ então $\lambda_i f_i(x) \leq 0$ e pelo menos para um $i \leq m$, é < 0. Logo (b) não vale. Suponhamos que (a) seja falso. Devemos demonstrar que vale (b). Seja

$$C_1 = \{z \in \mathbb{R}^m : \exists x \in C, g(x) << z\}.$$

Então $C_1 \cap \left(-\mathbb{R}_+^m\right) = \emptyset$. Podemos então, pelo teorema 44, separar C_1 e $-\mathbb{R}_+^m$ propriamente. Existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$, e α real,

$$\begin{aligned} &\alpha \leq \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m, z \in C_1; \\ &\alpha \geq <\lambda, w>, w \in -\mathbb{R}_+^m. \end{aligned}$$

Escolhendo $w = 0$ obtems $\alpha \geq 0$. Também vale $\lambda \geq 0$. Portanto $0 \leq <\lambda, z>, z \in C_1$. Então para $x \in D = C \cap \cap_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{int} C$,

$$\begin{aligned} &0 \leq \lambda_1 (f_1(x) + \epsilon) + \ldots + \lambda_m (f_m(x) + \epsilon), \\ &\epsilon \downarrow 0 \implies 0 \leq \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x), x \in D. \end{aligned}$$

Então a desigualdade vale para $x \in \overline{D}$ e então vale para $x \in C$ pois $C \subset \overline{\operatorname{int} C} \subset \overline{D}$.

Exemplo 41 *A hipótese* $\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{int} C$ *é necessária. Por exemplo seja*

$$f_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & se \quad x \geq 0 \\ \infty & se \quad x < 0. \end{cases}$$

E $f_2(x) = x$ para $x \in C := \mathbb{R}$. Então (a) acima não vale. Mas $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \geq 0$ implica para $x > 0$,

$$-\lambda_1 \sqrt{x} + \lambda_2 x \geq 0 \implies -\lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{x} \geq 0 \implies -\lambda_1 \geq 0 \implies \lambda_1 = 0 \implies \lambda_2 = 0.$$

Programa convexo

Um programa convexo[8], (P), é definido pela $m+2$ upla $(C, f_0, \ldots, f_m)$ sendo

1. C convexo não–vazio;

2. f_i convexa, finita em C, $0 \leq i \leq r$;

E queremos minimizar $f_0(x)$, $x \in C$ com as restrições:

$$f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m. \tag{*}$$

Definição 70 *O vetor x é factível se $x \in C$ e (*).*

Seja $C_0 = C \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m$ sendo $C_i = [f_i \leq 0]$, $i = 1, \ldots, r$ e $C_i = [f_i = 0]$, $i = r+1, \ldots, m$. A função objetivo é

$$f(x) = f_0(x) + \delta(x|C_0) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se} \quad x \in C_0 \\ \infty & \text{se} \quad x \notin C_0. \end{cases}$$

O ínfimo de f é o valor ótimo do problema (P). E os pontos nos quais o ínfimo é alcançado são soluções ótimas de (P).

Definição 71 *Um multiplicador de Kuhn–Tucker (KT) do problema (P) é um vetor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ tal que $\lambda_i \geq 0$ se $i \leq r$ e o ínfimo de*

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m$$

é finito e igual ao valor ótimo de (P).

Teorema 57 *Seja (P) um programa convexo. E λ multiplicador de KT de (P). E $h = f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m$. Seja $D = \{x : h(x) = \inf h(\mathbb{R}^n)\}$. Seja $I = \{i \leq r : \lambda_i = 0\}$, $J = \{1, \ldots, m\} \setminus J$. Seja D_0 os pontos $\bar{x} \in D$ tais que*

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) &= 0, i \in J \\ f_i(\bar{x}) &\leq 0, i \in I. \end{aligned}$$

Então D_0 é o conjunto das soluções ótimas de (P).

[8]Chamado "programa convexo ordinário" no Rockafellar.

Demonstração: Por hipótese, $\inf h(\mathbb{R}^n) = \inf f\ (\mathbb{R}^n)$ é finito. Se $x \in C_0$, $\lambda_i f_i(x) \le 0$, $1 \le i \le m$. E portanto

$$f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x) \le f_0(x) = f(x).$$

Então $h(x) \le f(x)$ para todo x com igualdade se e somente se x é factível e $\lambda_i f_i(x) = 0, i \le m$. Assim se $i \in J$, $i \le r$ temos $\lambda_i > 0$ o que implica $f_i(\bar{x}) = 0$. Se $i \in J$, $i > r$, $f_i(\bar{x}) = 0$ por hipótese. Então o mínimo de f está contido no mínimo de h e é D_0.

Teorema 58 *Seja (P) programa convexo. Suponhamos que o valor ótimo de (P) é finito e existe $x^0 \in \operatorname{int} C$, factível, que satisfaz as restrições com desigualdade estrita*[9] *para cada i. Então pelo menos um multiplicador de Kuhn-Tucker existe para (P).*

Demonstração: Seja α o valor ótimo de (P). Existe uma solução, $x^0 \in \operatorname{int} C$, de

$$f_i(x) < 0, 1 \le i \le m.$$

Pela definição de α, o sistema

$$f_0(x) - \alpha < 0, f_1(x) < 0, \ldots, f_m(x) < 0, \tag{*}$$

não tem solução em C. Existem então $\lambda_i \ge 0, 0 \le i \le m$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \ne 0$, tais que

$$\lambda_0(f_0(x) - \alpha) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x) \ge 0, x \in C.$$

Necessariamente, $\lambda_0 > 0$ (pois (*) e$(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \ne 0$) e então sem perda de generalidade, $\lambda_0 = 1$. Portanto

$$h = f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m \ge \alpha.$$

Mas $h \le f_0$ nos pontos factíveis, e portanto $\inf h = \alpha$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são multiplicadores de KT.

Exemplo 42 *Seja $u(x,y) = 2x + y$ definida para $(x,y) \ge 0$. Sejam $p > 0, q > 0$. O problema (do consumidor) é*

$$\begin{aligned} \max u(x,y), (x,y) &\ge 0, \\ px + qy &\le 1. \end{aligned} \tag{\$}$$

Para colocar o problema do consumidor no contexto do programa convexo devemos escolher C. Temos $f_0(x,y) = -2x - y + \delta((x,y)|C)$, $f_1(x,y) = px + qy - 1$, $\operatorname{dom} f_1 = \mathbb{R}^2$. *Se $C = \mathbb{R}^2$ temos ainda $f_2(x,y) = -x$ e $f_3(x,y) = -y$. Mas se $C = \mathbb{R}^2_+$ não precisamos de f_2 e f_3. Note para uso posterior que $\partial f_2(x,y) = (-1,0)$ e $\partial f_3(x,y) = (0,-1)$.*

[9] Condição de Slater

1. *Primeiro ataque:* $C = \mathbb{R}^2$. *Nesse caso temos três restrições de desigualdade e o problema é*

$$\begin{aligned} \min -2x - y \\ -x \leq 0 \\ -y \leq 0 \\ px + qy - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

O problema pode ser reescrito da forma usual:

$$\begin{aligned} \max 2x + y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ px + qy - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Os multiplicadores de KT do problema $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geq 0$, *são tais que se* $(\bar{x}, \bar{y})$ *é solução do problema ótimo,*

$$\min -2x - y + \lambda_1 (-x) + \lambda_2 (-y) + \lambda_3 (px + qy - 1)$$

tem solução $(\bar{x}, \bar{y})$ *tal que (a,b,c) acima:*

$$\begin{aligned} & f_i (\bar{x}, \bar{y}) \leq 0 \text{ e } \lambda_i f_i (\bar{x}, \bar{y}) = 0, i = 1, 2, 3 \\ & 0 \in \partial f_0 (\bar{x}, \bar{y}) + \lambda_1 \partial f_1 (\bar{x}, \bar{y}) + \ldots + \lambda_3 \partial f_3 (\bar{x}, \bar{y}) . \end{aligned}$$

Escrevendo como um problema de maximização:

$$\max 2x + y + \lambda_1 x + \lambda_2 y - \lambda_3 (px + qy - 1) .$$

E

$$\begin{aligned} & 0 = (-2, -1) + \lambda_1 (-1, 0) + \lambda_2 (0, -1) + \lambda_3 (p, q) \implies \\ & 0 = -2 - \lambda_1 + \lambda_3 p \\ & 0 = -1 - \lambda_2 + \lambda_3 q. \end{aligned}$$

E $\lambda_1 \bar{x} = 0$, $\lambda_2 \bar{y} = 0$, $\lambda_3 (p\bar{x} + q\bar{y} - 1) = 0$. *É imediato que* $\lambda \neq 0$ *pois senão o ínfimo de* f_0 *seria* $-\infty$. *É necessário considerar casos.*

   (a) $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$. *Então* $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ *e* $\lambda_3 p = 2 = 2\lambda_3 q \implies p = 2q$ *e* $\lambda_3 = \frac{1}{q}$.

   (b) $\bar{x} > 0$ *e* $\bar{y} = 0$. *Então* $\lambda_1 = 0$. *Logo* $\lambda_3 = \frac{2}{p}$ *e* $\lambda_2 = -1 + \frac{2q}{p} \geq 0 \implies 2q \geq p$.

(c) $\bar{x} = 0$ *e* $\bar{y} > 0$. *Então* $\lambda_2 = 0$ *e* $\lambda_3 = \frac{1}{q}$, $\lambda_1 = -2 + \frac{p}{q} \geq 0 \implies p \geq 2q$.

2. *Segundo ataque: Seja* $C = \mathbb{R}^2_+$. $f_0(x,y) = -2x - y$. *E* $f_1(x,y) = px + qy - 1$ *se* $(x,y) \geq 0$. *Temos* $f_1(0,0) = -1 < 0$. *Existe então* $\lambda > 0$ *tal que*

$$\min_{(x,y)\geq 0} -2x - y + \lambda(px + qy - 1)$$

é o ótimo do programa convexo associado. Escrevendo em termos de maximização, se $(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ *é solução de ($):*

$$\begin{aligned} &\max 2x + y - \lambda(px + qy - 1) \\ &(x,y) \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\bar{x} \geq 0, \bar{y} \geq 0, \\ &p\bar{x} + q\bar{y} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Note que $2x + y - \lambda(px + qy - 1) = x(2 - \lambda p) + y(1 - \lambda q)$. *Portanto para ter um ótimo é necessário que* $2 \leq \lambda p$ *e* $1 \leq \lambda q$. *Logo* $\max\left\{\frac{2}{p}, \frac{1}{q}\right\} \leq \lambda$. *Mas se tivermos a desigualdade estrita,* $\bar{x} = \bar{y} = 0$ *que não é ótimo. Assim* $\lambda = \max\left\{\frac{2}{p}, \frac{1}{q}\right\}$. *Se* $\frac{2}{p} > \frac{1}{q}$ *então* $\bar{y} = 0$ *e* $\bar{x} = \frac{1}{p}$. *Caso* $\frac{1}{q} > \frac{2}{p}$ *vem* $\bar{x} = 0$ *e* $\bar{y} = \frac{1}{q}$. *Se* $\frac{2}{p} = \frac{1}{q}$ *qualquer combinação* $(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ *com* $p\bar{x} + q\bar{y} = 1$ *é um ótimo. Para escrever em termos de (c) acima devemos calcular o subgradiente de* f_0 *nos pontos* (x,y) *com* $xy = 0$. *(exerc.)*

Para usar o item (c) acima precisamos de calcular o subgradiente de f_0 *nos pontos* (x,y) *com* $xy = 0$. *Por exemplo* $z^* \in \partial f_0(0,\bar{y})$ *se e somente se*

$$-2x - y \geq -\bar{y} + z_1^* x + z_2^*(y - \bar{y}), (x,y) \geq 0 \iff z_2^* = -1 \text{ e } z_1^* \leq -2.$$

Então (c) diz caso $\bar{x} = 0$, $\bar{y} > 0$ *(implica* $\lambda_2 = 0$*).*

$$\begin{aligned} 0 &= (z_1^*, -1) + \lambda_1(-1,0) + \lambda_2(0,-1) + \lambda_3(p,q), z_1^* \leq -2 \\ -z_1^* + \lambda_1 &= \lambda_3 p \\ 1 &= 1 + \lambda_2 = \lambda_3 q \implies \lambda_1 = z_1^* + \frac{p}{q} \implies p \geq 2q. \end{aligned}$$

Fim!