Analise II
Lista 1

Professor: Paulo Klinger
Monitor: André Lelis

---

1. Em um espaço vetorial, $\lambda v = \overline{0} \iff \lambda = 0$ ou $v = \overline{0}$.

> **Solução** Suponhamos $\lambda v = \overline{0}$. Se $\lambda \neq 0$, então existe λ^{-1}, pois $\lambda \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo. Segue, multiplicando ambos os lados da equação por λ^{-1} que $v = \overline{0}$.
>
> Se $\lambda = 0$, então $0v = (0+0)v = 0v + 0v$. Somando $-0v$ de ambos os lados, sai que $0v = \overline{0}$.
>
> Por outro lado, $v = 0$, então $\lambda\overline{0} = \lambda(\overline{0} + \overline{0}) = \lambda\overline{0} + \lambda\overline{0}$. Logo, $\lambda\overline{0} = \overline{0}$.

2. Verifique que $\ell^0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$ é um espaço vetorial.

> **Solução**
>
> Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^0$. Segue que $\alpha x = (\alpha x_n)_{n=1}^{\infty}$. Como cada $\alpha x_n \in \mathbb{R}$, segue que $\alpha x \in \ell^0$. Em particular, se $\alpha = 1$, então $\alpha x = x$ e se $\alpha = \beta + \gamma$, então $\alpha x = (\beta + \gamma)x = ((\beta + \gamma)x_n) = \beta x + \gamma x$.
> $\overline{0} = (0)_n^{\infty}$ a sequencia de 0 pertence a ℓ^0. De onde temos que $x + \overline{0} = (x_n + 0) = (x_n) = x$ e $x - x = (x_n + (-x_n))_n^{\infty} = \overline{0}$. Além disso, $x + y = (x_n + y_n)_n^{\infty} = (y_n + x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^0$. E $(x+y)+z = x+(y+z)$, pois somamos coordenada a coordenada e as coordenadas são reais, portanto associativas.
>
> Portanto, ℓ^0 é espaço vetorial.

3. Verifique que $\ell^2 := \{x \in \ell^0 | \sum x_n^2 < \infty\}$ é um subespaço vetorial de ℓ^0

> **Solução** Por definição, $\ell^2 \subset \ell^0$. Note que $(0_n)_{n=1}$ está em ℓ^2.
>
> Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \ell^2$. Temos que $\sum x_n^2 < \infty$, logo $\sum(\alpha x_n)^2 = \alpha^2 \sum x_n^2 < \infty$. Portanto, pertence a ℓ^2. Isso também mostra que $-x \in \ell^2$.
>
> Agora vamos mostrar que é fechado para soma: Seja $x, y \in \ell^2$. Queremos estudar $x + y$.

Temos que $\sum(x_n + y_n)^2 = \sum(x_n)^2 + 2\sum x_n y_n + \sum(y_n)^2$. Como $x, y \in \ell^2$, então sabemos que só falta mostrar que $\sum x_n y_n$ é convergente.

Note que $x_n y_n \leq |x_n||y_n| \leq \max\{x_n^2, y_n^2\} \leq x_n^2 + y_n^2$. Portanto, $\sum x_n y_n < \sum x_n^2 + \sum y_n^2 < \infty$.

Concluímos então que é fechado por soma.

4. Seja $0 < p < \infty$ e $\ell^p = \{x \in \ell^0 | \sum |x_n|^p < \infty\}$. Então, ℓ^p é um subespaço vetorial de ℓ^0.

Solução Mesmo raciocinio da questão anterior mostra associatividade e que podemos multiplicar por escalar. O que temos que mostrar é somente que é fechado pela soma, isto é, que a soma de dois elementos do conjunto pertence ao conjunto.

Na questão anterior, nós simplesmente fizemos uma expansão do binomial e vimos que teríamos que limitar $\sum x_n y_n$. Entretanto, nesta questão, tal procedimento ia dar um expressão muito maior, muito mais complicada para entendermos o que deveriamos limitar. Portanto, vamos pensar em outra estratégia.

Para cota superior, uma boa tentativa é sempre usar desigualdade triangular. Lembre que se $x, y \in \ell^p$, então queremos mostrar que $\sum(x_n + y_n)^p < \infty$ sabendo que $\sum |x_n|^p < \infty$. Segue da desigualdade triangular que $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$. Eu quero poder elevar os dois lados a p, mas como comentei anteriormente, isso implicaria em aparecer varios termos na expansão, então quero sumir com a soma no lado direito. Mas eu sei que $|x_n| + |y_n| \leq 2\max\{|x_n|, |y_n|\}$.

Portanto, $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq 2\max\{|x_n|, |y_n|\}$. Elevando a p, temos $|x_n + y_n|^p \leq 2^p \max\{|x_n|, |y_n|\}^p \leq 2^p|x_n|^p + 2^p|y_n|^p$.

Logo, $\sum(|x_n + y_n|)^p \leq 2^p \sum |x_n|^p + 2^p \sum |y_n|^p < \infty$.

5. Demonstre que:
   (a) Os elementos neutros da adição e multiplicação são únicos.
   (b) Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
   (c) Verifique que $(-a)(-b) = ab$ e $a.0 = 0$
   (d) $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ com $\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$ e $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$ é um corpo com dois elementos.
   (e) Se $a + b = a$ para algum $a \in K$, então $b = 0$
   (f) Se $a + b = 0$, então $b = -a$

(g) Qual o valor de $-(-a)$?

()

Solução

(a) Suponha que existam 0 e $0'$. Então, $x + 0 = x = x + 0'$ (1), mas existe $(-x)$ tal que $x + (-x) = 0$, logo subtraimos somamos $(-x)$ de ambos os lados em (1) e obtemos $0 = 0'$. Suponhamos 1 e $1'$ elementos neutros da multiplicação. Logo, $1 \cdot a = 1' \cdot a$ para $a \neq 0$ por definição. Como $a \neq 0$, ele tem inverso multiplicativo, multiplicamos pelo inverso multiplicativo de ambos, temos $1 = 1'$.

(b) Suponhamos que $a \neq 0$, então existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. Portanto, se $a \cdot b = 0$, então multiplicamos ambos os lados por a^{-1}, de onde concluímos que $b = 0$.

(c) Vamos provar primeiro que $-(ab) = (-a)b$. Note que $ab + (-a)b = (a + (-a)b = 0b$ Mas $0b+0b = b(0+0) = 0b$, logo $0b = 0$. Portanto, $-ab = (-a)b$.

Mesmo raciocinio mostra que $-ab = a(-b)$.

Pelo item f, $ab = -(-ab)$. Mas $-ab = (-a)b$, e segue que $ab = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-b)(-a) = (-a)(-b)$.

(d) Vamos verificar as propriedades que o professor enunciou:

- $\overline{1} + \overline{0} = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{0} + \overline{1}$. Para $\overline{0} + \overline{0}$ e $\overline{1} + \overline{1}$ trivial.
- Vou provar primeiro que $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$.
  Suponha que não seja, então $\overline{0} + \overline{1} = \overline{0}$, pois só há dois elementos. Então $\overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{1}$. Isso implicaria $\overline{0} = \overline{1}$. Logo, não é o caso.
- Agora a gente tem dois casos só: $(1+0)+1 = 1+1 = 0 = 1+(0+1) = 1+1$. $(0+1)+1 = 1+1 = 0 = 0+(1+1) = 0+0 = 0$. (Isso prova que $(a+b)+c = a+(b+c)$, como só tem $\overline{1}$ e $\overline{0}$, então só essas possibilidades de a,b,c tirando as triviais).
- $1 + 1 = 0$ e $0 + 0 = 0$. (Todo elemento tem inverso aditivo)
- $1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$.
- $1(1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 0$ e $0(1 + 0) = 0.1 = 0 = 0.1 + 0$ (Distributividade).

(e) Como K é corpo, então existe $-a$ tal que $a+(-a) = 0$. Na equação $a+b = a$ somamos $-a$ de ambos os lados e obtemos $b = 0$.

(f) Novamente, somamos $-a$ de ambos os lados da equação e obtemos $b = -a$

(g) Sabemos que $a+(-a) = 0$. Aplicando o item anterior, temos que $a = -(-a)$

6. Qual a dimensão de $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sob os reais?

> **Solução** Por definição, $\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$. Assim, o palpite mais obvio é que $\{1, i\}$ formam uma base de $\mathbb{C}$ sob $\mathbb{R}$.
>
> É claro que $\{1, i\}$ forma um conjunto gerador, pois dado $a + ib$, esse numero é escrito como a combinação $1 \cdot a$ e $b \cdot i$.
>
> Suponha que não seja linearmente independente, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a + ib = 0$, logo $i = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Absurdo!.

7. Verifique que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

> **Solução** Sejam $a + b\sqrt{3}$ e $c + d\sqrt{3}$ elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. É obvio que 0 e 1 também são elementos do conjunto.
>
> $a + b\sqrt{3} + c + d\sqrt{3} = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}$. Logo, a soma pertence. Além disso, a soma é comutativa e associativa, pois todos os elementos pertencem aos reais que são comutativos e associativos. Da mesma forma, $(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e vale comutatividade e associatividade, pois todos os elementos são reais.
>
> Para ver que tem inverso aditivo em $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, basta definir $c = -a$ e $d = -b$.
>
> Para ver que qualquer elemento diferente de 0 tem inverso multiplicativo:
>
> Se $a + 0\sqrt{3}$, então o inverso é a^{-1}. Se $b\sqrt{3}$, então o inverso é $b^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$
>
> Dado $a + b\sqrt{3}$ com $a, b \in \mathbb{Q}^*$, vimos que $(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Queremos que achar c e d tais que $ad + bc = 0$ e $ac + 3bd = 1$
>
> Dá primeira equação, tiramos que $d = -\frac{bc}{a}$. Substituindo na segunda, temos que $c = \frac{a}{a^2 - 3b^2}$. Logo, $d = \frac{-b}{a^2 - 3b^2}$.
>
> Portanto, sempre há inverso multiplicativo.
>
> Agora é só verificar a distributividade em relação a soma.

8. Sejam V e W espaços vetoriais. Então o produto cartesiano, $V \times W = \{(x, y) : x \in V, w \in W\}$ também é espaço vetorial se definirmos

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$$

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$$

Verifique essa afirmação e calcule a dimensão de $V \times W$ para V e W de dimensão finita.

Solução

Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W.

Afirmação: Seja $B = \{(v_1, 0), \ldots, (v_n, 0)\}$ e $B' = \{(0, w_1), \ldots, (0, w_m)\}$. $B \cup B'$ é base $V \times W$:

- Gerador: Seja $(x, y) \in V \times W$. Segue que $x \in V$, $y \in W$, logo $x = \sum \lambda_i v_i$ para alguns λ_i e $y = \sum \omega_i w_i$. Logo, $(x, 0) = \sum \lambda_i (v_i, 0)$, $(0, y) = \sum \omega_i (0, w_i)$.

Então $(x, y) = \sum \lambda_i (v_i, 0) + \sum \omega_i (0, w_i)$.

- Linearmente independente: $(0, 0) \in V \times W$. Mesmo raciocino anterior implica que $0 = \sum \lambda_i v_i$, mas v_i formam base, logo $\lambda_i = 0$. Analogo para $0 \in W$.

Portanto, temos que é base. E o numero de elementos da base é $\dim V + \dim W$.

9. Sejam U_1, U_2 dois subespaços do espaço vetorial V. Mostre que $U_1 \cup U_2$ é subespaço se, e somente se $U_1 \subset U_2$ ou $U_2 \subset U_1$.

Solução ($\Rightarrow$) Vamos mostrar que $U_1 \subset U_2$ ou $U_2 \subset U_1$. Seja $u \in U_1$ e $u_2 \in U_2$

$u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$, pois $U_1 \cup U_2$ é subespaço Logo, $u_1 + u_2 = u \in U_1 \cup U_2$. Portanto, $u \in U_1$ ou $u \in U_2$. Se $u \in U_2$, então, $u_1 = u - u_2$. Mas U_2 é subespaço, logo $u - u_2 \in U_2$, concluindo que $u_1 \in U_2$ Portanto, $U_1 \subset U_2$.

($\Leftarrow$) Se $U_1 \subset U_2$, entõo $U_1 \cup U_2 = U_2$ que é subespeaço por hipotese.

10. Seja $f \in V' \setminus \{0\}$. Demonstre que $f(V) = K$.

Solução Seja $x \in Im(f)$, $x \neq 0$. Então existe $y \in V$ tal que $f(y) = x$. Agora, seja $a \in K$, como K é um corpo, então existe $p \in K$ tal que $xp = a$ (só tomar $p = \frac{a}{x}$). Logo, $pf(y) = px = a$, mas $pf(y) = f(py)$. Portanto, todo $a \in K$ está na imagem de f.

11. Encontre um espaço vetorial V e uma transformação linear injetiva $T : V \to V$ que não é invertivel.

Solução Primeiro, note que se T é injetiva e não invertivel, então ela não pode ser sobrejetiva, pois transformações bijetivas são invertiveis.

Além disso, pelo toerema do Nucleo e Imagem, se $T : V \to V$ é injetiva e V tem dimensão finita, então é sobrejetiva. Logo, nós queremos que V tenha dimensão infinita.

Nesta lista, vimos o espaço ℓ^0 que é um espaço de dimensão infinita. Então vamos tentar criar um exemplo nesse espaço.

Seja $T : \ell^0 \to \ell^0$. Então $T(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1^*, \ldots, x_m^*, \ldots)$. Queremos que só $T(0) = 0$. Observe que $x_1 \in \mathbb{R}$, então se fizermos um shift $T(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, \ldots, x_m, \ldots)$ temos uma transformação injetiva e mais do que isso não é sobrejetiva, pois ℓ^0 contém sequencias que o primeiro elemento não é 0, mas tais sequencias não estão na imagem de T.

Resta conferir se realmente é linear, isto é, $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$.

12. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Mostre que um subconjunto W de V é um subespaço se e somente se existe uma transformação linear $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $\ker T = W$.

Solução Uma observação inicial interessante para esse exercício é que dada uma transformação linear qualquer $T : X \to X$ e $B = \{x_1, \ldots, x_n \ldots ...\}$ uma base de X, então uma vez definida os valores de T na base, isto é, $T(x_n)$ está definido, então toda a T está definida, pois $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, logo $T(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(x_i)$, ou seja, só dependeu dos valores na base. Isso significa que se eu conseguir uma base para W e mandar ela para 0, eu basicamente tenho o exercício feito. Vamos ver isso com detalhes agora.

($\Rightarrow$)Afirmáção: Um conjunto linearmente independente de W pode ser extendida para uma base de V. Ou seja, seja podemos tomar uma base $B = \{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots w_n\}$, onde $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é uma base de W.

Prova que posso fazer isso: Seja B' um conjunto linearmente independente em W. Se esse conjunto é o maior conjunto linearmente independente possível, eu mantenho ele. Caso contrário, eu adiciono o elemento de W linearmente independente em relação a esse conjunto que não pertence a conjunto. Observe que esse processo é finito, pois B' tem que gerar um espaço de dimensão finita.

Então supondo que B' é um conjunto linearmente indepedente e com a cardinalidade maior possível, então se B' gera V, então B' é uma base de V. Se não gera, então existe $v_1 \in V$ tal que $B' \cup v_1$ é linearmente independente, se é uma base de V, fim. Caso contrário, tomo v_2 que não pertence ao gerado por $B' \cup v_1$

e repito o processo. V tem dimensão finita, esse processo é finito. Logo, extendi um conjunto gerador linearmente de W para uma base B de V. Escrevemos $B = \{w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k, \ldots, v_n\}$

Definimos a transformação linear $T(v) = T(\sum \lambda_i w_i) = (0, \ldots, 0, \lambda_k, ..., \lambda_n)$

$\ker T = \{x | T(x) = 0\}$ Se $x \in W$, então $T(x) = 0$ pela definição de T. Se $T(x) = 0$, então $x = \sum \lambda_i w_i$ com $\lambda_i = 0$ para $i \geq k$, logo $x \in W$.

($\Leftarrow$) Para a volta basta mostrar que $\ker(T)$ é subespaço. Seja $a, b \in \ker$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. $T(a + \alpha b) = T(a) + \alpha T(b) = 0$, logo $a + \alpha b \in \ker$. Portanto, é subespaço.