

Analise II

Lista 2

Professor: Paulo Klinger
Monitor: André Lelis

1. Para x, y inteiros, definamos $x \equiv y \pmod{2}$ se $x - y$ for par (i.e. $x - y \in 2\mathbb{Z}$). Então $\equiv \pmod{2}$ é uma relação de equivalência e

$$\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

Solução Para mostrar que é uma relação de equivalência, nós temos que mostrar que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x \equiv x$, ou seja, a relação é reflexiva.
2. $x \equiv y$, então $y \equiv x$, ou seja, a relação é simétrica.
3. Se $x \equiv y$ e $y \equiv z$, então $x \equiv z$, ou seja, a relação é transitiva.

No caso, nossa relação \equiv aqui é $x \equiv y$ se $x - y \in 2\mathbb{Z} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$. Isso é o mesmo que dizer que 2 divide $x - y$.

Então vamos provar que satisfaz essas 3 propriedades:

1. Seja $x \in \mathbb{Z}$, então $x - x = 0 = 2 \cdot 0$. Logo, $x - x \in 2\mathbb{Z}$. Portanto, $x \equiv x$.
2. Se $x \equiv y$, então $x - y = 2w$, logo $y - w = 2(-w) \in 2\mathbb{Z}$. Portanto, $y \equiv w$.
3. Seja $x \equiv y$ e $y \equiv z$. Temos que $x - z = x - z + (y - y) = (x - y) + (y - z)$. Como $x \equiv y$ e $y \equiv z$, então $x - y = 2w$ para algum $w \in \mathbb{Z}$ e $y - z = 2w'$ para algum $w' \in \mathbb{Z}$. Logo, $x - z = 2w + 2w' = 2(w + w') \in 2\mathbb{Z}$. Portanto, $x \equiv z$

Agora precisamos provar que só existe 2 classes de equivalência: $\bar{0}$ e $\bar{1}$. O que temos que mostrar é que se $x \in \mathbb{Z}$, então $x \equiv 0$ ou $x \equiv 1$.

Observe que se $x \in 2\mathbb{Z}$, então $x - 0 \in 2\mathbb{Z}$, logo $x \equiv 0$.

Se $x \in 2\mathbb{Z}$, então $x = 2k + 1$, pois a divisão por 2 deixa resto 0 ou 1. Logo $x - 1 = 2k$, por tanto $x \equiv 1$.

2. Seja $m \geq 2$ um natural. Dizemos que m divide $x \in \mathbb{Z}$ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot m = x$. Para x, y inteiros definimos

$$x \equiv y \pmod{m}$$

se m dividir $x - y$. Verifique que \equiv é uma relação de equivalência em \mathbb{Z} e que $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv$ tem m elementos.

Solução Para provar que é uma relação de equivalência, a mesma demonstração do item anterior funcionar para m no lugar de 2.

Para provar que m classes de equivalência, eu vou provar que existe a divisão euclidiana. Isto é, dado $x \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, então existem $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < m$, $r \in \mathbb{N}$ tais que $x = mq + r$.

Demonstração: Por indução: se $x = 0$, então basta tomar que $q = 0$ e $r = 0$.

Suponhamos que seja verdade para $x = n$, vamos provar para $x = n + 1$.

Por hipótese, $n = qm + r$, com $r < m$. Então $r = m - 1$ ou $r < m - 1$.

Se $r = m - 1$, então $n = qm + m - 1$. Logo, $n + 1 = (q + 1)m$. E tá provado.

Se $r < m - 1$, então $r + 1 < m$. Como $n = qm + r$, então $n + 1 = qm + (r + 1)$, como $r + 1 < m$, então chame isso de r' e temos o resultado.

Observe que a demonstração acima também mostra que cada resto r entre 0 e $m - 1$ é atingido. Como existem m restos, segue que tem m classes, pois se a n deixa resto r , então $n \equiv r \pmod{m}$, pois $n = qm + r$, logo $n - r = mq$.

3. Seja $V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}\}$ com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Sejam $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_n(t) = \cos(n\pi t)$, $n \geq 1$. Verifique se a família $\{f_n(\cdot) \mid n \geq 0\}$ é ortonormal.

Solução Temos que mostrar duas coisas nesse exercício:

1. $\langle f_n, f_n \rangle = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$
2. $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ quando $n \neq m$.

Vamos mostrar:

$$1. \langle f_0, f_0 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

$$\langle f_n, f_n \rangle = \int_{-1}^1 \cos(n\pi t) \cos(n\pi t) = \int_{-1}^1 \cos^2(n\pi t) dt$$

Vamos usar que $\cos^2(a) = \frac{1+\cos 2a}{2}$ (Isso foi dado quando caiu em prova).

$$\text{Portanto, } \int_{-1}^1 \cos^2(n\pi t) dt = \int_{-1}^1 \frac{1+\cos(2n\pi t)}{2} dt = 1 + \frac{\sin(2n\pi t)}{4n\pi} = 1.$$

$$2. \langle f_n, f_m \rangle = \int_{-1}^1 \cos(n\pi t) \cos(m\pi t) = \int_{-1}^1 \frac{\cos((n+m)\pi t) + \cos((n-m)\pi t)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(n+m)\pi t}{(n+m)\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n-m)\pi t}{(n-m)\pi} = 0.$$

$$\text{Também temos } \int_{-1}^1 f_0 f_m = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi m t) dt = 0.$$

4. Seja V um espaço vetorial, e $L(V, V)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares $S : V \rightarrow V$. Fixe um vetor não nulo $u \in V$ e seja

$$L_u = \{S \in L(V, V) \mid u \text{ é um autovetor de } S\}.$$

Mostre que L_u é um subespaço linear de $L(V, V)$.

Solução Sejam $x, y \in L_u$, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $x, y \in L_u$, então $x(u) = \mu u$ e $y(u) = \alpha u$. Então $(x + \lambda y)(u) = x(u) + \lambda y(u) = \mu u + \lambda \alpha u = (\mu + \lambda \alpha)u$. Logo $x + \lambda y \in L_u$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 3v_2).$$

Calcule os autovalores de T .

Solução Relembre: z é um auto-vetor e λ um auto-valo correspondendo a v se e somente se $T(z) = \lambda z$ e $z \neq 0$.

Logo, $(T - \lambda Id)z = 0$. Observe que $z = 0$ sempre satisfaz, mas queremos justamente $z \neq 0$, ou seja, o "sistema" $T - \lambda Id$ tem mais de uma solução. Isto é equivalente ao sistema ser indeterminado.

Como estamos em dimensão finita e T pode ser representada por uma matriz quadrada, isso é equivalente ao determinante ser igual a 0.

Vamos primeiro então montar a matriz que representa a transformação T

$T(1, 0) = (1, 2)$ e $T(0, 1) = (2, 3)$. Portanto, na forma matricial temos

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Portanto, temos que calcular $\det(T - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$

Então temos $(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$. Portanto, $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$.

Outro jeito de pensar essa questão é usar as definições mesmo:

Teríamos que satisfazer $T(v_1, v_2) = \lambda(v_1, v_2)$. Então, $v_1 + 2v_2 = \lambda v_1$ e $2v_1 + 3v_2 = \lambda v_2$.

E isso é o sistema

$$(1 - \lambda)v_1 + 2v_2 = 0$$

$$2v_1 + 3\lambda v_2 = 0$$

Agora, esse sistema vai ser indefinido, se o determinante for zero, e segue as mesmas contas de antes.

6. Verifique que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$$

para o produto interno $\langle x, y \rangle$

Solução $\langle x, x \rangle = |x|^2$ a norma induzida pelo produto interno.

Normalmente, quando temos um problema como esse, a estratégia é sair do lado complicado para chegar no lado fácil. Ou seja, vamos tentar sair do lado direito para o lado esquerdo.

Do produto interno, $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$. Vamos aplicar as propriedades do produto interno.

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Isolando $\langle x, y \rangle$ temos o resultado.

7. Seja X um espaço vetorial com produto interno e seja S um conjunto ortogonal de vetores não nulos (isto é, se $x, y \in S$, então $\langle x, y \rangle = 0$). Mostre que S é um conjunto linearmente independente.

Solução Suponhamos que S não é linearmente independente. Então existem $x, x_1, \dots, x_n \in S$ tais que $x = \sum \lambda_i x_i$, com $\lambda_i \neq 0$ para todo i .

Por outro lado, sabemos que $\langle x, x \rangle > 0$.

Usando a expressão anterior para x , temos $\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \rangle = \sum \lambda_i \langle x, x_i \rangle$.

Mas, por hipótese, $\langle x, x_i \rangle = 0$, já que pertencem a S . Segue, então que

$$\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \rangle = \sum \lambda_i \langle x, x_i \rangle = 0 = \langle x, x \rangle$$

8. Seja $V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}\}$ com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Seja W o espaço vetorial gerado por $\{f_1, f_2, f_3\}$, onde $f_i(t) = t^i$. Obtenha uma base ortonormal para W .

Solução Se vamos construir uma base ortonormal, então vamos usar *Gram – Schmidt*.

Sabemos que $\{t, t^2, t^3\}$ formam uma base. Vamos construir uma base $\{b_1, b_2, b_3\}$ ortogonal.

Seguindo Gram-Schmidt que está na notas de aula: Então vamos primeiro normalizar t , isto é, vamos ver como fazer " t " participar da nossa base ortonormal. $\|t\|^2 = \langle t, t \rangle = \frac{t^3}{3}|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$. Logo, o primeiro elemento da nossa base vai ser $\frac{\sqrt{6}}{2}t$

Agora por Gram-Schmidt, o segundo elemento vai ser $b_2 = t^2 + \lambda b_1$ com $\lambda = -\frac{\langle b_1, t^2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$.

$$\langle b_1, t^2 \rangle = \int_{-1}^1 t \cdot t^2 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}|_{-1}^1 = 0.$$

$$\text{E } \|t^2\|^2 = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5}|_{-1}^1 = \frac{2}{5}. \text{ Então } \frac{t^2}{\|t^2\|} = \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 = \frac{\sqrt{10}}{2}t^2$$

Terceiro membros da base é $b_3 = t^3 + \mu b_2 + \alpha b_1$ com $\mu = -\frac{\langle b_2, t^3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}$, $\alpha = -\frac{\langle b_1, t^3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$

$$\text{Logo, } \langle b_2, t^3 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 t^3 dt = \int_{-1}^1 t^5 dt = \frac{t^6}{6}|_{-1}^1 = 0. \text{ Portanto, } \mu = 0.$$

$$\text{Temos também } \langle b_1, t^3 \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5}|_{-1}^1 = \frac{2}{5}, \text{ Mas } \langle b_1, b_1 \rangle = \frac{2}{3}. \text{ Logo, } \alpha = \frac{3}{5}.$$

Agora precisamos calcular $\|b_3\|^2 = \int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx = \frac{8}{175}$

Portanto, uma base ortonormal seria $B = \left\{ \frac{t\sqrt{6}}{2}, t^2 \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{x^3 - \frac{3}{5}x\sqrt{1400}}{8} \right\}$

9. Seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . A transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem a propriedade de que

$$Ax_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

$$Ax_2 = x_2 + x_3,$$

$$Ax_3 = x_1 + x_3.$$

Escreva A^*x_1, A^*x_2, A^*x_3 em termos da base $\{x_1, x_2, x_3\}$, onde A^* é a transformação adjunta de A .

Solução

Primeiro relembrre que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ por definição.

Além disso, note que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ pelo fato da base $\{x_1, x_2, x_3\}$ ser ortonormal.

Queremos escrever $A^*x_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$.

$$A^*x_2 = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3.$$

$$A^*x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3.$$

Nosso, objetivo é achar os λ, ω e α .

Note que $\langle Ax_i, x_j \rangle = \langle x_i, A^*x_j \rangle = \langle x_i, \sum \lambda_j x_j \rangle = \lambda_i$. Ou seja, se eu quiser descobrir o coeficiente de x_i que aparece em A^*x_j , eu tenho que fazer $\langle Ax_i, x_j \rangle$.

Portanto, $\langle Ax_1, x_1 \rangle = 1$, $\langle Ax_1, x_2 \rangle = 2$, $\langle Ax_1, x_3 \rangle = 3$.

$$\langle Ax_2, x_1 \rangle = 0, \langle Ax_2, x_2 \rangle = 1, \langle Ax_2, x_3 \rangle = 1.$$

$$\text{E } \langle Ax_3, x_1 \rangle = 1, \langle Ax_3, x_2 \rangle = 0 \text{ e } \langle Ax_3, x_3 \rangle = 1.$$

$$\langle Ax_i, x_i \rangle = \langle x_i, A^*x_i \rangle.$$

Concluímos, $A^*x_1 = x_1 + x_3$, $A^*x_2 = 2x_1 + x_3$ e $A^*x_3 = 3x_1 + x_2 + x_3$.

Outra solução para essa questão é montar a matriz A é transpor, pois $A^* = A^t$.

10. Se e_1, e_2, \dots, e_m é ortogonal e $e_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq m$, então e_1, e_2, \dots, e_m é linearmente independente.

Solução Solução igual a da 7.

11. Seja E um espaço Euclidiano, e seja $M \subset E$. Defina

$$M^\perp := \{y \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\},$$

o subconjunto de todos os vetores ortogonais a todos os vetores de M . Mostre que M^\perp é um subespaço vetorial de E .

Solução Sejam $y, z \in M^\perp$ e $\lambda \in K$. $\langle y + \lambda z, x \rangle = \langle y, x \rangle + \lambda \langle z, x \rangle = 0 + \lambda 0 = 0$. Logo, $y + \lambda z \in M^\perp$.

12. Seja E um espaço Euclidiano e seja M um subespaço vetorial de E . Verifique que $E = M \oplus M^\perp$.

Solução Relembre que $X = Y \oplus Z \iff Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z = X$.

Se $m \in M \cap M^\perp$, então $\langle m, m \rangle = 0$, logo $m = 0$.

Agora seja $B = \{m_1, \dots, m_k\}$ uma base ortonormal de M . Agora seja $B' = \{m_1, \dots, m_n\}$ uma base ortonormal de E contendo B .

Seja $x \in X$, logo $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i m_i + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j w_j$. Segue que $\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i \in M$ e $\sum_{j=k+1}^n \lambda_j w_j \in M^\perp$, pois $\langle m_i, m_j \rangle = 0$ pelo fato da base ser ortonormal.

Portanto, $E = M + M^\perp$. Concluindo o resultado que queríamos.

13. Seja S um subconjunto de X , um espaço com produto interno. Mostre que $S^\perp = [S]^\perp$.

Solução Quando queremos mostrar que dois conjuntos são iguais, nossa estratégia vai ser mostrar que um está contido no outro.

($S^\perp \subset [S]^\perp$) Seja $x \in S^\perp$, então $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in S$. Seja $z \in [S]$, então $z = \sum \lambda_i y_i$ com $y_i \in S$ e $\lambda_i \in K$ para todo i .

Daí, $\langle x, z \rangle = \sum \lambda_i \langle x, y_i \rangle$. Mas por definição de S^\perp , $\langle x, y_i \rangle = 0$ para todo i .

Portanto, $x \in [S]^\perp$.

($[S]^\perp \subset S^\perp$) Agora, tome $x \in [S]^\perp$ e $y \in S$, logo $y \in [S]$ o que implica que $\langle x, y \rangle = 0$, portanto $x \in S^\perp$.

14. Seja S um subconjunto de X , um espaço com produto interno. Defina

$$S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp.$$

Mostre que $[S] \subset S^{\perp\perp}$. Se X tem dimensão finita, demonstre que $[S] = S^{\perp\perp}$.

Solução Seja $s \in [S]$ e $s' \in S^\perp$. Como $s \in [S]$, então $s = \sum \lambda_i s_i$ com $s_i \in S$ para todo i e $\lambda_i \in K$. Então, $\langle s, s' \rangle = \langle \sum_i \lambda_i s_i, s' \rangle = \sum \lambda_i \langle s_i, s' \rangle = 0$, pois $\langle s_i, s' \rangle = 0$ por definição de s_i e s' . Mas isso implica também que se $s \in (S^\perp)^\perp$, pois s' é um elemento qualquer de S^\perp .

Se tem dimensão finita então $X = S \oplus S^\perp = (S^\perp)^\perp \oplus S^\perp$. Mas então $\dim S = \dim(S^\perp)^\perp$, $S \subset (S^\perp)^\perp$. Daí, eles tem que ser iguais.

15. Seja X um espaço com produto interno e seja $A : X \rightarrow X$ uma transformação linear sobrejetiva com a propriedade de que $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$ para todos $x, y \in X$. Demonstre que

$$A(U^\perp) = A(U)^\perp$$

para todo subconjunto $U \subset X$.

Solução ($A(U^\perp) \subset A(U)^\perp$) Seja $x \in A(U^\perp)$, então existe $z \in U^\perp$ tal que $A(z) = x$. Seja $y \in A(U)$, então $y = A(w)$ para algum $w \in U$. $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle = 0$ pela definição de z . Logo, $x \in A(U)^\perp$.

($A(U)^\perp \subset A(U^\perp)$) Sejam $x \in A(U)^\perp$ e $y \in A(U)$. Logo, existe $w \in U$ tal que $A(w) = y$. Por outro lado, A é sobrejetiva, então existe z tal que $z \in U$ e $A(z) = x$. Temos que $0 = \langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$. Portanto, $z \in U^\perp$ e $x \in A(U^\perp)$.

16. Seja M um subespaço vetorial do espaço Euclidiano X , invariante sob a transformação linear $T : X \rightarrow X$, isto é, $T(M) \subset M$. Mostre que M^\perp é invariante sob a adjunta T^* .

Solução $\langle Tm, y \rangle = \langle m, T^*y \rangle$

Se $y \in M^\perp$, então $0 = \langle Tm, y \rangle = \langle m, T^*y \rangle$. Logo $T^*y \in M^\perp$.

17. Seja X um espaço Euclidiano, e seja $T : X \rightarrow X$ uma transformação linear. Mostre que $\text{ran}(A)^\perp = \ker(A^*)$.

Solução ($\text{ran}(A)^\perp \subset \ker(A^*)$) Seja $x \in \text{ran}(A)^\perp$, então $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in \text{ran}(A)$. Mas $y \in \text{ran}(A)$, existe $z \in X$ tal que $A(z) = y$. Logo, $\langle x, A(z) \rangle = 0$.

Portanto, $\langle A^*x, z \rangle = 0$. Mas note que isso vale para todo $y \in \text{ran}(A)$, em particular vale para $y = A(A^*(x))$, o que implica em $z = A^*(x)$ na expressão anterior. Logo, $\langle A^*(x), A^*(x) \rangle = 0$, o que só ocorre $A^*(x) = 0$, o que é o mesmo que $x \in \ker A^*$.

($\ker(A^*) \subset \text{ran}(A)^\perp$) Seja $x \in \ker(A^*)$, logo $A^*(x) = 0$. Seja $y \in A$, temos que $\langle x, A(y) \rangle = \langle A^*(x), y \rangle = 0$. Logo, $x \in \text{ran}(A)^\perp$