Prova de Análise II
19/03/2025

1. Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x,y,z) = (x+2y+z, 2x+y, \mathbf{a}x+z).$$
   i) Determine $\mathbf{a}$ para que o operador T seja auto–adjunto;
   ii) Sendo T auto–adjunto, determine os autovalores e uma base de auto–vetores.

Sol: (i) Para T auto–adjunto,
$$\langle T(x,y,z), (t,u,v)\rangle = \langle (x,y,z), T(t,u,v)\rangle$$
para todos x,y,z,t,u,v reais. Sejam $(x,y,z) = (1,0,0), (t,u,v) = (0,0,1)$vem
$$\langle (1,2,\mathbf{a}), (0,0,1)\rangle = \langle (1,0,0), (1,0,1)\rangle$$
$$\mathbf{a}=1.$$

(ii) Sendo T auto–adjunto $\mathbf{a} = 1$. Seja $(x,y,z) \neq 0$ e λ real tal que $T(x,y,z) = \lambda(x,y,z)$. Então
$$\begin{aligned} x+2y+z &= \lambda x \\ 2x+y &= \lambda y \\ x+z &= \lambda z. \end{aligned}$$
Então $x = (\lambda-1)z$, $2(\lambda-1)z = (\lambda-1)y$. Verifiquemos se $\lambda = 1$ é autovalor: temos então $x = 0$ e $2y+z = 0$. Para $y = 1, z = -2$ e
$$T(0,1,-2) = (0,1,-2) = 1 \cdot (0,1,-2).$$
Portanto $\lambda = 1$ é autovalor e $v_1 = (0,1,-2)$ um autovetor correspondente. Suponhamo agora $\lambda \neq 1$. Então
$$\begin{aligned} x &= (\lambda-1)z, \\ y &= 2z, \\ (\lambda-1)z + 4z + z &= \lambda(\lambda-1)z \end{aligned}$$
com $z \neq 0$. Escolhendo $z = 1$,
$$\lambda - 1 + 4 + 1 = \lambda^2 - \lambda \implies \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$
$$\implies \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}.$$
Para $\lambda = 1+\sqrt{5}$, $z = 1, x = \sqrt{5}, y = 2$ logo $v_2 = \left(\sqrt{5}, 2, 1\right)$. Para $\lambda = 1-\sqrt{5}, x = -\sqrt{5}, y = 2, z = 1$, $v_3 = \left(-\sqrt{5}, 2, 1\right)$.

2. Seja $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ contínua}\}$ com produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt.$$

Seja W o espaço vetorial gerado for $\{f_i(\cdot) : i = 0, 1, 2\}$ sendo $f_i(t) = (1+t)^i$. Obtenha uma base ortonormal para W.

Sol: Vou utilizar o método de Gram–Schmidt. Seja $b_1 = f_0(t) \equiv 1$. Seja $b_2 = (1+t) + \lambda b_1 = 1 + t + \lambda$. Então

$$0 = \int_0^1 1 \cdot (1+t+\lambda)\, dt = \int_0^1 (1+t+\lambda)\, dt = 1 + \frac{1}{2} + \lambda \implies \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Portanto $b_2 = 1 + t - \frac{3}{2} = t - \frac{1}{2}$. Agora seja $b_3 = \mu + \nu\left(t - \frac{1}{2}\right) + (1+t)^2$. Então

$$0 = \int_0^1 1 \cdot \left[\mu + \nu\left(t - \frac{1}{2}\right) + (1+t)^2\right] dt =$$

$$\mu + \frac{(1+t)^3}{3}|_0^1 = \mu + \frac{8-1}{3} = \mu + \frac{7}{3}$$

$$\implies \mu = -\frac{7}{3}.$$

E

$$0 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \nu\left(t - \frac{1}{2}\right) + (1+t)^2\right) dt =$$

$$\int_0^1 \nu\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(1+t)^2\, dt.$$

Agora

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 |_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{-1}{8}\right) = \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)(1+t)^2\, dt = \int \left[t\left(1 + 2t + t^2\right) - \frac{(1+t)^2}{2}\right] dt =$$

$$\int \left(t + 2t^2 + t^3 - \frac{(1+t)^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{6} = \frac{6+8+3-14}{12} = \frac{1}{4}.$$

Logo $0 = \nu \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \implies \nu = -3$. Então $b_3 = -\frac{7}{3} - 3\left(t - \frac{1}{2}\right) + (1+t)^2$. A norma de $b_1 = 1$ é $\int_0^1 1dt = 1$. A norma de b_2 :

$$\begin{aligned} \|b_2\|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 |_0^1 = \frac{1}{12} \\ \implies \frac{b_2}{\|b_2\|} &= \frac{t - 1/2}{\sqrt{1/12}} = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2t-1) \end{aligned}$$

A norma de b_3:

$$\begin{aligned} \|b_3\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180} \\ \Rightarrow \frac{b_3}{\|b_3\|} &= \sqrt{180}(t^2 - t + \frac{1}{6}) \end{aligned}$$

3. Para um espaço métrico (X, d):

   (a) Defina conjunto limitado.

   Sol: O subconjunto $A \subset X$ é limitado se existir $x \in X$ e $r > 0$ tais que $A \subset B(x, r)$.

   (b) No caso de um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ verifique que $M \subset E$ é limitado se e somente se existir $m > 0$ tal que para todo $x \in M$, $\|x\| \leq m$.

   Sol: Seja $A \subset E$ limitado. Então

   $$M \subset B(x, r) = \{y \in E : \|y - x\| < r\}$$

   . Para $y \in M$
   vale

   $$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| < r + \|x\| =: m.$$

   Portanto $\|y\| \leq m$ para $y \in M$. Por outro lado se $\|x\| \leq m$ para todo $x \in M$ temos $M \subset B[0, m] \subset B(0, 2m)$.

   (c) Defina seqüência de Cauchy.

   Sol: A seqüência $(x_n)_n$ no espaço métrico (X, d) é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existe N natural tal que $n, m \geq N \implies d(x_n, x_m) < \epsilon$.

4. Seja $U = (0,1) \subset (-\infty, \infty)$. Definamos em U,

$$d_1(x,y) = |x-y| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(y,\{0,1\})} \right|.$$

Verifique:

(a) que d_1 é uma métrica em U;

Sol: $d_1(x,y) \geq 0$ é trivial e $d_1(x,y) = 0 \iff x = y$ também.

$$d_1(y,x) = |y-x| + \left| \frac{1}{d(y,\{0,1\})} - \frac{1}{d(x,\{0,1\})} \right| =$$
$$|x-y| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(y,\{0,1\})} \right| = d_1(x,y).$$

Desigualdade triangular:

$$d_1(x,y) + d_1(y,z) =$$
$$|x-y| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(y,\{0,1\})} \right| + |y-z| + \left| \frac{1}{d(y,\{0,1\})} - \frac{1}{d(z,\{0,1\})} \right|$$
$$\geq |x-z| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(y,\{0,1\})} + \frac{1}{d(y,\{0,1\})} - \frac{1}{d(z,\{0,1\})} \right|$$
$$= |x-z| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(z,\{0,1\})} \right| = d_1(x,z).$$

(b) que é equivalente à métrica usual, $d_u(x,y) = |x-y|$;

Sol: Se $z \in B_1(x,r)$ temos $|x-z| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(z,\{0,1\})} \right| < r$ e então $|x-z| < r$ e portanto $z \in B_u(x,r)$. Logo $B_1(x,r) \subset B_u(x,r)$. Seja agora $z \in B_u(x,r)$. Então $|z-x| < r$. A função $f(z) = |x-z| + \left| \frac{1}{d(x,\{0,1\})} - \frac{1}{d(z,\{0,1\})} \right|$ é contínua pois $z \to d(z,\{0,1\})$ é contínua. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_u(x,\delta) \subset \{z : f(z) < r\} = B_1(x,r)$.

(c) E que (U, d_1) é completo.

Sol: Seja $(x_n)_n \subset U$ de Cauchy na métrica d_1. Logo é de Cauchy na métrica d_u. Notemos que $(x_n)_n$ é limitada na métrica d_1. Seja $\bar{x} = \lim_n x_n \in [0,1]$. Seja $k > 0$ tal que $d_1(x_n, x_1) \leq k$. Então x_n não pode se aproximar na métrica d_1 de 0 nem de 1 pois $\frac{1}{d(x_n,\{0,1\})} \to \infty$ se $d(x_n,\{0,1\}) \to 0$. Portanto $\bar{x} \in U$ e (U, d_1) é completo.