Prova 2 - Soluções - Análise Matemática II - 2023

Professor: Paulo Klinger

1. Seja $F = \text{epi } f$ sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Para cada $P = (x, x^2)$, $x > 0$, determine o conjunto dos pontos $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $B < A^2$, tais que P seja o ponto de F à mínima distância de (A, B). Qual a função $A = t(B, x)$?

Solução. O conjunto $F = \text{epi } f = \{(x, y) : y \geq x^2\}$ é convexo fechado (pois f é uma função convexa). Então para cada ponto $(A, B) \notin F$ (isto é, $B < A^2$), existe um único ponto $P \in F$ tal que P é o ponto de F à mínima distância de (A, B). É fácil de ver que $P = (x, x^2)$ para algum $x \in P$. Além disso, nós sabemos que existe um hiperplano que passa por P e é suporte do conjunto F: para $\beta = [(A, B) - P] \cdot P$, nós temos $F \subset \{z \in \mathbb{R}^2 : [(A, B) - P] \cdot z \leq \beta\}$, ou ainda $F \subset \{z \in \mathbb{R}^2 : [(A, B) - P] \cdot [z - P] \leq 0\}$.

Portanto, o hiperplano suporte de F que passa por P, dado pela reta

$$L = P + \{t\,(1, 2x) : t \in (-\infty, \infty)\,, \}$$

tangente à f em P, é o conjunto de pontos z tal que $[(A, B) - P] \cdot [z - P] = 0$. Isto nos diz que, fixado $P = (x, x^2)$, os pontos $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ tais que P seja o ponto de F à mínima distância de (A, B) são tais que vetor $(A, B) - P$ é ortogonal à L: se $z \in L \backslash \{P\}$ e, consequentemente, $z = P + t(1, 2x)$ para algum $t \neq 0$, então

$$0 = [(A, B) - P] \cdot [z - P] = [(A, B) - (x, x^2)] \cdot [t \cdot (1, 2x)],$$

o que implica

$$\begin{aligned} A - x + \left(B - x^2\right) 2x &= 0 \\ \implies A - x &= \left(x^2 - B\right) 2x. \end{aligned}$$

Se $0 \leq A \leq x$ temos $B \geq x^2 \geq A^2$. Contradição com a condição $B < A^2$. Se $A > x$ então $B < x^2 < A^2$. Se $A \leq 0$, o ponto à mínima distância tem $x < 0$ (faça uma figura). Portanto

$$S = \left\{(A, B) \in \mathbb{R}^2 : A > x,\ A - x = 2x\left(x^2 - B\right)\right\}$$

é o conjunto desejado. E $t\,(B, x) = x + 2x\left(x^2 - B\right)$.

2. Verifique quais funções são convexas ou côncavas:

(a) $f(x, y) = \log\left(e^x + e^y\right)$;

(b) $f(x) = x \log x$ definida para $x > 0$;

(c) $f(x,y) = (x^\rho + y^\rho)^{1/\rho}$, $x > 0$, $y > 0$, $1 > \rho > 0$.

Solução.

(a) Temos $f_x = \frac{e^x}{e^x+e^y} = 1 - \frac{e^y}{e^x+e^y}$, logo $f_{xx} = \frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}$. Analogamente $f_{yy} = \frac{e^y e^x}{(e^y+e^x)^2} = f_{xx}$. Finalmente $f_{xy} = -\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}$. Temos $f_{xx} = f_{yy} > 0$ e

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{e^{2x}e^{2y}}{(e^x+e^y)^4} - \left(-\frac{e^x e^y}{(e^x+e^y)^2}\right)^2 = 0.$$

Portanto f é convexa.

(b) $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ então f é convexa.

(c)

$$f_x = \frac{1}{\rho}\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}\rho x^{\rho-1} = x^{\rho-1}\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}.$$

Então

$$f_{xy} = \left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2}\rho y^{\rho-1}x^{\rho-1} = (1-\rho)\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2} y^{\rho-1}x^{\rho-1}.$$

E

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2}\rho x^{\rho-1}x^{\rho-1} + \left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}(\rho-1)\,x^{\rho-2} \\
&= (1-\rho)\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2}\left[x^{2\rho-2} - \left(x^\rho + y^\rho\right)x^{\rho-2}\right] \\
&= -(1-\rho)\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2} y^\rho x^{\rho-2} \\
f_{yy} &= -(1-\rho)\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2} x^\rho y^{\rho-2}
\end{aligned}$$

E então $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$ e

$$\begin{aligned}
&f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2 = \\
&(1-\rho)^2\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{2}{\rho}-4} x^{2\rho-2}y^{2\rho-2} - (1-\rho)^2\left(x^\rho + y^\rho\right)^{\frac{2}{\rho}-4} x^{2\rho-2}y^{2\rho-2} = 0.
\end{aligned}$$

Logo f é côncava.

3. Enuncie o lema de Farkas.

Solução. Seja A matriz $m \times n$ e b vetor $m \times 1$. Somente uma das alternativas a seguir é verdadeira:

1. Existe x $n \times 1$, $x \geq 0$, tal que $Ax = b$;

2. Existe μ vetor $m \times 1$, $\mu^t A \geq 0$ e $\mu^t b < 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa. Então se $x < y$, $x' < y'$, $x \leq x'$, $y \leq y'$ então

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y') - f(x')}{y' - x'}.$$

Solução. Suponha primeiro que $x' = x < y \leq y'$. Nós queremos demostrar que $\frac{f(y)-f(x')}{y-x'} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$; isto é, que $\frac{f(y)-f(x')}{y-x'}$ é crescente em $y > x = x'$. Defina $\mu = y - x' > 0$ e $\lambda = y' - x' \in (0, \mu]$, de modo que $\frac{f(y)-f(x')}{y-x'} = \frac{f(x'+\mu)-f(x')}{\mu} =: g(\mu)$ e $\frac{f(y')-f(x')}{y'-x'} = \frac{f(x'+\lambda)-f(x')}{\lambda} =: g(\lambda)$. Nós demonstramos em aula que $g(\mu) \leq g(\lambda)$ (com $h = 1$ na notação das notas de aula, página 58), logo $\frac{f(y)-f(x')}{y-x'}$ é crescente em $y > x = x'$.

Suponha agora que $x \leq x' < y' = y$, como sugerido. Nós queremos demonstrar que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(x')}{y-x'}$, ou ainda $\frac{f(x')-f(y)}{y-x'} \leq \frac{f(x)-f(y)}{y-x}$; isto é, que $\frac{f(x)-f(y)}{y-x}$ é decrescente em $x < y$. Defina $\mu = y - x' > 0$ e $\lambda = y - x' \in (0, \mu]$, de modo que $\frac{f(x')-f(y)}{y-x'} = \frac{f(y-\mu)-f(y)}{\mu} =:$ $g_0(\mu)$ e $\frac{f(x)-f(y)}{y-x} = \frac{f(y-\lambda)-f(y)}{\lambda} =: g_0(\lambda)$. Nós demonstramos em aula que $g_0(\mu) \leq g_0(\lambda)$ (com $h = -1$ na notação das notas de aula, página 58), logo $\frac{f(x)-f(y)}{y-x}$ é decrescente em $x < y$.

Finalmente, nós podemos mostrar que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$ caso $x < y$, $x' < y'$, $x \leq x'$ e $y \leq y'$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(x')}{y - x'} \leq \frac{f(y') - f(x')}{y' - x'}.$$

5. Kuhn-Tucker:

(a) Verifique que $U(x, y, z) = \min\{x, y\} + \min\{y, z\}$ é côncava.

(b) Seja $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ a solução do problema de maximização:

$$\begin{aligned} &\max U(x, y, z) \\ &(x, y, z) \geq 0 \\ &px + qy + rz - I \leq 0, \end{aligned}$$

sendo $(p, q, r) \gg 0$ e $I > 0$.

i. Demonstre que se $p > q + r$ então $\overline{x} = 0$ e $\overline{y} = \overline{z} = \frac{I}{q+r}$.

ii. Quais as condições em (p, q, r) para $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z}$?

Solução.

(a) Basta verificar que cada parcela é côncava. Então U será côncava por ser soma de duas côncavas. As funções $h(x,y,z) = x$ e $k(x,y,z) = y$ são côncavas e portanto

$$\min\{x,y\} = \min\{h(x,y,z), k(x,y,z)\}$$

é côncava por ser mínimo de duas côncavas. *Verificação direta*: Sejam (x,y,z) e (x',y',z') dados e $0 < r < 1$. Então

$$\begin{aligned}
&rx + (1-r)x' \geq r\min\{x,y\} + (1-r)\min\{x',y'\}\\
&ry + (1-r)y' \geq r\min\{x,y\} + (1-r)\min\{x',y'\} \implies\\
&\min\{rx + (1-r)x', ry + (1-r)y'\} \geq r\min\{x,y\} + (1-r)\min\{x',y'\}. \qquad (*)\\
&ry + (1-r)y' \geq r\min\{y,z\} + (1-r)\min\{y',z'\}\\
&rz + (1-r)z' \geq r\min\{y,z\} + (1-r)\min\{y',z'\} \implies\\
&\min\{ry + (1-r)y', rz + (1-r)z'\} \qquad (**)\\
&\geq r\min\{y,z\} + (1-r)\min\{y',z'\}
\end{aligned}$$

Somando (*) e (**),

$$\begin{aligned}
&U\left(r(x,y,z) + (1-r)(x',y',z')\right) =\\
&\min\{rx + (1-r)x', ry + (1-r)y'\} + \min\{ry + (1-r)y', rz + (1-r)z'\}\\
&\geq r\min\{x,y\} + (1-r)\min\{x',y'\} + r\min\{y,z\} + (1-r)\min\{y',z'\}\\
&= r(\min\{x,y\} + \min\{y,z\}) + (1-r)\left(\min\{x',y'\} + \min\{y',z'\}\right)\\
&= rU(x,y,z) + (1-r)U(x',y',z').
\end{aligned}$$

(b) i. Se λ é multiplicador de KT. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\lambda(p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z} - I) &= 0,\\
(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Devemos maximizar

$$\begin{aligned}
&\min\{x,y\} + \min\{y,z\} - \lambda(px + qy + rz - I) \qquad (\$)\\
&(x,y,z) \geq 0.
\end{aligned}$$

Se $x = 0$, a maximização de

$$\min\{y,z\} - \lambda(qy + rz - I)$$

implica $y = z$ pois se $y < z$ diminuindo z para y reduzimos a despesa sem reduzir a utilidade $\min\{y,z\} = y$. E caso $y > z$ passamos a diminuir y. Agora para maximizar ($) quando $x = 0$ e $y = z$ devemos

$$\begin{aligned}
&\max y[1 - \lambda(q+r)]\\
&y \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo não pode $1 > \lambda(q+r)$ pois não existiria o máximo ($y \to \infty \implies y[1-\lambda(q+r)] \to \infty$). E $1 < \lambda(q+r)$ o máximo seria $y = 0$, contradição. Logo

$$1 = \lambda(q+r) \implies \lambda = \frac{1}{q+r}.$$

Seja então $\lambda = \frac{1}{q+r}$. Agora considerando

$$\max \min\{x,y\} + \min\{y,z\} - \frac{px+qy+rz-I}{q+r}$$

vemos que,

$$0 < x \leq y \implies x - \lambda px = x\left(1 - \frac{p}{q+r}\right) = x\frac{q+r-p}{q+r} < 0,$$
$$x = 0 \implies x - \lambda px = 0.$$

Então $x = 0$ é o melhor x. E então $y = z$. Agora

$$\lambda(qy + ry - I) = 0$$

implica $y = \frac{I}{q+r}$. Portanto $\bar{y} = \bar{z} = \frac{I}{q+r}$ vem da restrição orçamentária $p\bar{x} + q\bar{y} + r\bar{z} - I = 0$.

ii. Da primeira parte, (i) temos que

$$\bar{x} \neq 0 \implies p \leq q + r.$$

Analogamente,

$$\bar{z} \neq 0 \implies r \leq p + q.$$

Agora se maximizarmos ($) com a restrição $x = y = z$:

$$\max 2x - \lambda(p+q+r)x = x[2 - \lambda(p+q+r)]$$
$$x \geq 0.$$

Então para o máximo existir $2 - \lambda(p+q+r) \leq 0$. E para não ser nulo, $2 - \lambda(p+q+r) \geq 0$. Logo $\lambda = \frac{2}{p+q+r}$. Seja então $\lambda = \frac{2}{p+q+r}$. Agora notemos que em geral se $0 \leq x < y$,

$$\min\{x,y\} + \min\{y,z\} - \lambda(px+qy+rz-I)$$
$$= x - \lambda px + \min\{y,z\} - \lambda(qy+rz-I).$$

Logo $x - \lambda px = x\left(1 - \frac{2p}{p+q+r}\right) = x\frac{q+r-p}{p+q+r} \geq 0$. Portanto no ótimo $x \geq y$. Mas $x > y$ nunca é ótimo. Logo $x = y$. Se $z < y$,

$$\min\{x,y\} + \min\{y,z\} - \lambda(px+qy+rz-I)$$
$$= z - \lambda rz + \min\{x,y\} - \lambda(qy+px-I).$$

Agora $z - \lambda r z = z\left(1 - \frac{2r}{p+q+r}\right) = z\frac{p+q-r}{p+q+r} \geq 0$. Portanto $z = y$ no ótimo. Portanto

$$\begin{aligned}&\max_{(x,y,z)\geq 0} \min\{x, y\} + \min\{y, z\} - \lambda\,(px + qy + rz - I)\\ &\equiv \max_{y\geq 0} 2y - \lambda[(p+q+r)\,y - I] = \lambda I = \frac{2I}{p+q+r}.\end{aligned}$$

As condições em (p, q, r) são:

$$\begin{cases} p \leq q + r \\ r \leq p + q \end{cases} \iff p - q \leq r \leq p + q.$$