19/02

Espaços Métricos

Um par (X, d) é um espaço métrico se a função, $d : X \times X \to \mathbb{R}$, tem para todos $x, y, z \in X$, as propriedades:

1. $d(x, y) \geqq 0$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
4. $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

Comentário 1 *d é a função distância. Os axiomas (1,2,3) são portanto bem naturais: A distância entre pontos distintos é positiva. A distância entre x e y é igual à distância entre y e x. E finalmente o axioma (4)–a desigualdade triangular–reflete a propriedade de que para os triângulos no plano, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Exemplo 1 *Um espaço com produto interno é um espaço métrico se $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.*

Exemplo 2 (métrica discreta) *Seja $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. d é a métrica discreta.*

Exemplo 3 *Se $Y \subset X$ e $d'(x, y) = d(x, y)$ para $(x, y) \in Y \times Y$ então (Y, d') é um espaço métrico.*

Exemplo 4 *No $\mathbb{R}^n$ temos a distância euclidiana, a distância do máximo e a distância da soma:*

$$d(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} & \textit{euclidiana} \\ \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} & \textit{max} \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| & \textit{soma.} \end{cases}$$

Comentário 2 *Essas 3 distâncias são exemplos de distâncias definidas a partir de uma norma: a norma euclidiana, a norma do máximo e a norma da soma.*

Definição 1 (espaço normado) *Um par (V, N) sendo V um espaço vetorial (sobre o corpo dos reais) e $N : V \to [0, \infty)$ é um espaço normado se para todos $v, w \in V$ e λ real,*

i) $N(v) = 0 \iff v = 0$

ii) $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

iii) $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.

Comentário 3 *Por simplicidade usamos* $\|v\| := N(v)$.

Comentário 4 *A métrica associada à norma* N *é* $d(v, w) = N(v - w)$.

Definição 2 *Seja* (X, d) *um espaço métrico.*

i) *A bola aberta de centro* $x \in X$ *e raio* $r > 0$ *é* $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$;

ii) *A bola fechada,* $B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$;

iii) *A esfera:* $S(x, r) = \{y \in X : d(y, x) = r\}$.

Comentário 5 *No caso de um espaço normado,* $B[0, 1] = \{y \in V : \|y\| \leq 1\}$ *é a bola unitária. Note que* $B(x, r) = x + rB(0, 1)$ *nesse caso. E a métrica é invariante por translações,* $d(x, y) = d(x + z, y + z)$.

A topologia dos espaços métricos

Definição 3 *O par* (X, τ) *sendo* $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ *é um espaço topológico e* τ *uma topologia se*

i) $\{\emptyset, X\} \subset \tau$;

ii) *Se* $A, B \in \tau$ *então* $A \cap B \in \tau$;

iii) *Se* $A_i \in \tau$ *para todo* $i \in I$ *então* $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Comentário 6 *Os elementos de* τ *são ditos abertos. Assim o conjunto vazio e* X *são abertos. E a topologia é fechada por intersecções finitas e por uniões arbitrárias de seus elementos.*

Definição 4 *Seja* (X, d) *um espaço métrico. O conjunto* $U \subset X$ *é aberto se para todo* $x \in U$ *existir* $r > 0$ *tal que* $B(x, r) \subset U$.

É imediato que o conjunto vazio e o espaço X são abertos. Seja $\tau = \tau_d = \{U \subset X : U \text{ é aberto}\}$ a família dos subconjuntos abertos de (X, d). Verifiquemos que τ é uma topologia.
Demonstração: (a) Sejam U e V abertos. Seja $z \in U \cap V$. Seja $r' > 0$ tal que $B(z, r') \subset U$. Seja $r'' > 0$ tal que $B(z, r'') \subset V$. Então se $r = \min\{r', r''\} > 0$, $B(z, r) \subset U \cap V$. (b) Verifiquemos que se $U_i \in \tau$ para $i \in I$ então $W = \cup_{i \in I} U_i \in \tau$. Seja $x \in W$. Existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_i$. Então $B(x, \epsilon) \subset W$. Terminando a demonstração.

Lema 1 *A bola aberta é aberta.*

Demonstração: Para $z \in B(x, r)$ temos $d(x, z) < r$ e então $\delta = r - d(x, z) > 0$. Para $y \in B(z, \delta)$ temos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \delta = r$$

e portanto $B(z, \delta) \subset B(x, r)$.

Definição 5 *$F \subset X$ é fechado se o complementar $F^c = X \setminus F$ for aberto.*

É imediato que $\emptyset$ e X são fechados. A união finita de fechados é fechada. E a intersercção de uma família de fechados é fechada.

Exemplo 5 *Na métrica discreta todo subconjunto de X é aberto e é fechado.*

Exemplo 6 *Em $\mathbb{R}$ os intervalos abertos são abertos e os intervalos fechados são fechados. O intervalo $(0, 1]$ não é aberto nem fechado. Os racionais não são nem abertos nem fechados em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 7 *Se $X = [0, 1]$ então $(0, 1]$ é aberto em X.*

Definição 6 *Duas métricas em X, d e d' são equivalentes se definem a mesma topologia: $\tau_d = \tau_{d'}$. Isto se $U \subset X$ é aberto em (X, d) se e somente se for aberto em (X, d').*

Exemplo 8 *Se d é uma métrica em X então $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ e $d''(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ são métricas equivalentes à d.*

Primeiramente verifiquemos que d' e d'' são métricas.

d'') Se $d''(x,y)=0$ então $d(x,y)=0$ e logo $x=y$. Suponhamos, para obter uma contradição, que não vale a desigualdade triangular: existem x,y,z tais que:

$$1 \geq d''(x,y) > d''(x,z) + d''(z,y).$$

Portanto $d''(x,z) = \min\{1, d(x,z)\} = d(x,z)$ e $d''(z,y) = d(z,y)$. Logo

$$d(x,y) \geq d''(x,y) > d(x,z) + d(z,y) \geq d(x,y)$$

contradição.

d') Sejam $a = d(x,z), b = d(x,y)$ e $c = d(y,z)$. Sabemos que $a \leq b+c$. Então

$$\begin{aligned}
&d'(x,y) + d'(y,z) - d'(x,z) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{a}{1+a} = \\
&\frac{b(1+c)(1+a) + c(1+b)(1+a) - a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \\
&\frac{b(1+a+c+ac) + c(1+a+b+ab) - a(1+c+b+bc)}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \\
&\frac{b+ba+bc+bac+c+ca+cb+cab-(a+ac+ab+abc)}{(1+a)(1+b)(1+c)} = \\
&\frac{b+c-a+bc+cb+cab}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Verifiquemos por exemplo que d e d'' são equivalentes. Seja $B(x,r)$ a bola de centro x e raio r na métrica d e $B''(x,r)$ a bola correspondente na métrica d''. Se $r>1$, $B''(x,r) = X \in \tau_d$. Para $r<1$, $B(x,r) = B''(x,r)$. Seja $U \in \tau_d$. Seja $x \in U$ e $0<\epsilon<1$ tal que $B(x,\epsilon) \subset U$. Então $B''(x,\epsilon) = B(x,\epsilon) \subset U$. Portanto $U \in \tau_{d''}$. Recíprocamente se $B''(x,\epsilon) \subset U$. Se $\epsilon > 1$, $U = X \in \tau_d$. Se $\epsilon \leq 1$, $B(x,\epsilon) = B''(x,\epsilon) \subset U$. Para verificar que d e d' são equivalentes, note que se $r<1$,

$$B'(x,r) = \left\{ y \in X : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < r \right\} = \left\{ y \in X : d(x,y) < \frac{r}{1-r} \right\} = B\left(x, \frac{r}{1-r}\right).$$

Se $r \geq 1$, $B'(x,r) = X$. Portanto

$$\begin{aligned}
\cup_i B'(x_i, r_i) &= \cup_i B\left(x_i, \frac{r_i}{1-r_i}\right); \\
\cup_i B(x_i, r_i) &= \cup_i B'\left(x_i, \frac{r_i}{1+r_i}\right).
\end{aligned}$$

Teorema 1 *Seja (X, d) espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço. Então $U \subset Y$ é aberto de Y se e somente se existir $W \subset X$ aberto tal que $U = W \cap Y$.*

Demonstração: Notemos inicialmente que

$$B_Y(x, r) = \{y \in Y : d(x, y) < r\} = Y \cap B(x, r).$$

Seja $\tau(Y)$ a família dos subconjuntos abertos em Y. E τ os abertos de X. Então se $U \in \tau(Y)$, para todo $u \in U$ existe $\epsilon(u) > 0$ tal que $B_Y(u, \epsilon(u)) = Y \cap B(u, \epsilon(u)) \subset U$. Mas então $W = \cup_{u \in U} B(u, \epsilon(u)) \in \tau$ e $W \cap Y = U$. Suponhamos agora $W \in \tau$. Cada $w \in W$ existe $B(w, r(w)) \subset W$. Então

$$U = \cup_{w \in W} Y \cap B(w, r(w)) = \cup_{w \in W} B_Y(w, r(w)) \in \tau(Y) \text{ e } U = W \cap Y.$$

Corolário 1 *Nas mesmas condições do teorema anterior, $F \subset Y$ é fechado de Y se e somente se existir H fechado em X tal que $H \cap Y$.*

Corolário 2 *Se Y for fechado de X então F é fechado em Y se e somente se for fechado em X.*

Produto cartesiano de espaços métricos

Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser metrizado de uma forma natural. Definamos para $z = (x, y) \in X \times Y$ e $z' = (x', y') \in X \times Y$,

$$\overline{d}((x, y), (x', y')) = d(x, x') + \rho(y, y').$$

Então verificamos de imediato que $\overline{d}$ é uma métrica em $X \times Y$. Outras métricas são possíveis: $\max\{d(x, x'), \rho(y, y')\}$ ou $\sqrt{d(x, x')^2 + \rho(y, y')^2}$. Podemos verificar com pouca dificuldade que essas métricas são equivalentes

21/02

Produto finito de espaços métricos

Sejam $(X_i, d_i), i \leq N$ espaços métricos. Podemos metrizar $X = \Pi_{i=1}^N X_i$ de forma natural: se $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i).$$

Outras possibilididades seriam

$$d'(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} d_i^2(x_i, y_i)};$$
$$d''(x, y) = \max_{i \leq N} d_i(x_i, y_i).$$

Se tivermos espaços normados, $(V_i, |\cdot|_i)_{i \leq N}$ definimos

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{N} |x_i|_i.$$

A verificação de que $\|\cdot\|$ é uma norma é um exercício rotineiro.

Produto infinito enumerável de espaços métricos

Sejam $(X_n, d_n)_{n \geq 1}$ espaços métricos e $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$. Uma métrica natural, análoga à do caso de um produto finito é

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}. \tag{1}$$

Comentário 7 *Note que usamos* $\frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} \leq 1$ *e multiplicamos por* 2^{-n} *para garantir a convergência da série. O produto enumerável infinito de espaços normados é um espaço métrico mas não é um espaço normado.*

Um subconjunto, M, de um espaço métrico é limitado se existirem $x \in X$ e $r > 0$ tais que $M \subset B(x, r)$. Isto é, M é limitado se estiver contido em alguma bola aberta. Propriedades elementares:

i) um subconjunto de um conjunto limitado é limitado;

ii) a união de uma família finita de conjuntos limitados é limitada.

Se $M_1 \subset B(x,r)$ e $M_2 \subset B(y,s)$ temos

$$M_1 \cup M_2 \subset B(x, \max\{r, s + d(x,y)\}).$$

Definição 7 *Se $A \subset X$ é limitado e não–vazio, o diâmetro de A é $\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.*

Por exemplo, o diâmetro de $B(x,r)$ é no máximo $2r$. Pois se $y, y' \in B(x,r)$, $d(y,y') \leq d(y,x) + d(x,y') < 2r$. E logo $\delta(B(x,r)) \leq 2r$. Na métrica discreta, $\delta(X) = 1$ se $\#X > 1$.

Continuidade

Sejam (X,d) e (Y,ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x^0 \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(x^0) > 0$ tal que

$$d\left(x, x^0\right) < \delta \implies \rho\left(f(x), f\left(x^0\right)\right) < \epsilon.$$

Em outras palavras: Para todo bola $B_\rho(f(x^0), \epsilon)$ existe uma bola $B_d(x^0, \delta)$ tal que $f(B_d(x^0, \delta)) \subset B_\rho(f(x^0), \epsilon)$.

Lema 2 *f é contínua em x^0 se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto tal que $f(x^0) \in U$ existe $W \ni x^0$ aberto de X tal que $f(W) \subset U$.*

Definição 8 *$f : X \to Y$ é contínua em X se para todo $x \in X$, f for contínua em x.*

Definição 9 *E f é uniformemente contínua em X se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, \forall x', d(x,x') < \delta \implies \rho(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Lema 3 *$f : X \to Y$ é contínua em X se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto, $f^{-1}(U) \subset X$ é aberto.*

Proposição 1 *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são contínuas, $g \circ f : X \to Z$ é contínua.*

Demonstração: Seja $W \subset Z$ aberto. Então $g^{-1}(W)$ é aberto de Y e $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto.

Exemplo 9 *Consideremos $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o produto cartesiano enumerável de $\mathbb{R}$. Seja*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

A projeção $\pi_m : X \to \mathbb{R}$, $\pi_m(x) = x_m$ é contínua (uniformemente). Seja $\epsilon > 0$. Seja $\delta = \frac{1}{2^m}\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Portanto se $d(x,y) < \delta$ temos $\frac{1}{2^m}\frac{|x_m - y_m|}{1+|x_m-y_m|} \leq d(x,y) < \delta = \frac{1}{2^m}\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ e então $|\pi_m(x) - \pi_m(y)| = |x_m - y_m| < \epsilon$.

Comentário 8 *De maneira análogo podemos demonstrar que $f(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ é contínua.*

Seqüências e limites

Uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ no espaço métrico X converge para $x \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $n' \geq 1$ tal que $n > n'$ implica $d(x, x_n) < \epsilon$.

Notação 1 *Escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ quando existir o limite de $(x_n)_n$ e for x.*

Proposição 2 *O limite quando existe é único*

Demonstração: Sejam $x \neq y$ limites de $(x_n)_n$. E $\epsilon > 0$. Então existem n' e n'' tais que

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n > n' \\ d(x_n, y) &< \frac{\epsilon}{2} \text{ para } n > n'' \end{aligned}$$

Então se $n > \max\{n', n''\}$, $d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon$. Então $d(x,y) = 0$ e $x = y$.

Teorema 2 *Seja $f : X \to Y$. Então f é contínua em $a \in X$ se e somente se para todo seqüência $x_n \in X$ com limite a, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Demonstração: Suponhamos f contínua em a. Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta \implies \rho(f(x), f(a)) < \epsilon$. Pela definição de limite existe n' tal que $n > n'$ implica $d(x_n, a) < \delta$. Portanto $n > n'$, temos $\rho(f(x_n), f(a)) < \epsilon$. E portanto $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que f fosse descontínua em a. Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ existe $x_n \in X$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$.

Comentário 9 *Uma vantagem dos espaços métricos é podermos usar seqüências. Nos espaços topológicos, em geral, teoremas como o anterior não são válidos.*

Fecho

Seja (X,d) métrico. Para $A \subset X$ definimos $\mathscr{F} = \{F : A \subset F \subset X,\ F \text{ fechado}\}$. Então $\overline{A} := \cap \{F : F \in \mathscr{F}\}$ é fechado e é o menor subconjunto fechado que contém A. Dizemos que $\overline{A}$ é o fecho de A. As seguintes propriedades são imediatas:

1. Se $A \subset B \subset X$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. A é fechado se e somente se $A = \overline{A}$.

Por exemplo $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado por ser união de dois fechados. Agora $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$ e portanto $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. E de $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ vem $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Também $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ e por fim $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ demonstrando a igualdade.

Definição 10 *Seja $A \subset X$ não–vazio. Para $x \in X$ definimos a distância de x a A por*

$$d(x,A) = \inf \{d(x,a) : a \in A\}.$$

Lema 4 *$d(x,A) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}$.*

Demonstração: Se $x \in X \setminus \overline{A}$ então existe $r > 0$, $B(x,r) \subset X \setminus \overline{A}$ e portanto $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Logo $d(x,A) \geq r > 0$. Suponhamos $d(x,A) > 0$. Se $0 < r < d(x,A)$ temos $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Logo $F = X \setminus B(x,r) \supset A$, é fechado e $x \notin F \supset \overline{A}$. Portanto $x \notin \overline{A}$.

Proposição 3 *A função distância é uniformemente contínua. Na verdade vale um pouco mais: $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.*

Demonstração: Para $a \in A$, $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. Logo $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$ e tomando o ínfimo novamente, $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$. Portanto $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. Trocando os papéis de x e y obtemos $d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y)$ e $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

23/02

Proposição 4 *$x \in \overline{A}$ se e somente se existe uma seqüência $(x_n)_n$ com $x_n \in A$ e $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Demonstração: Se $x \in \overline{A}$ temos $d(x, A) = 0$. Portanto para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in A$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Temos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Suponhamos agora que $x_n \in A$ tem limite x. Portanto

$$d(x, A) \leq d(x, x_n) < \frac{1}{n} \implies d(x, A) = 0 \implies x \in \overline{A}.$$

Definição 11 *O ponto $x \in A$ é um ponto isolado de A em X se existir um aberto $U \subset X$ tal que $U \cap A = \{x\}$.*

É imediato da definição que x é ponto isolado de A se existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Exemplo 10 *Todo ponto de $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ é isolado. Nenhum ponto de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é isolado.*

Exemplo 11 *O conjunto $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ tem ponto isolados, $\frac{1}{n}, n \neq 0$. Mas $0 \in A$ não é ponto isolado pois $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.*

Definição 12

1. *O conjunto $P \subset X$ é perfeito se for fechado sem pontos isolados.*
2. *O conjunto $S \subset X$ é denso se o fecho de S for X.*
3. *O espaço métrico X é separável se existe $A \subset X$ enumerável e denso: $\overline{A} = X$.*
4. *O espaço métrico X tem base enumerável se existir uma família enumerável de abertos, $\mathfrak{B} = \{B_n : n \geq 1\}$ tal que todo aberto de X seja uma união de elementos de $\mathfrak{B}$.*

Exemplo 12 *$\mathbb{R}^n$ é separável pois $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e denso. O conjunto funções contínuas reais de $[a, b]$ na métrica do sup é separável (mas não é imediato de se demonstrar). l^∞ não é separável mas l^1 e l^2 são separáveis.*

Teorema 3 *O espaço métrico X é separável se e somente se tem base enumerável.*

Demonstração: Suponhamos $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em X. Então a família de bolas de centro x_n e raio racional, $\{B(x_n, r) : n \geq 1, r \in \mathbb{Q}_{++}\}$, é enumerável. Seja $\{B_n : n \geq 1\}$ uma enumeração dessa família. Seja $U \subset X$ aberto e $x \in U$. Existe $B(x, r) \subset U$. Sem perda de generalidade r é racional. Seja n' tal que $d(x, x_{n'}) < r/2$. Então $B\left(x_{n'}, \frac{r}{2}\right) \subset B(x, r) \subset U$. Então se m é tal que $B_m = B\left(x_{n'}, \frac{r}{2}\right)$ temos $x \in B_m \subset U$. Recíprocamente suponhamos que $\{B_n : n \geq 1\}$ seja base enumerável de abertos. Sem perda de generalidade, B_n é não–vazio. Para cada B_m seja $x_m \in B_m$. Então $\{x_m : m \geq 1\}$ é denso em X.

Teorema 4 *Se (X, d) é separável e $\{U_i : i \in I\}$ é uma família de abertos não–vazios dois a dois disjuntos, então I é enumerável.*

Demonstração: Seja $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em X. Para cada $i \in I$ existe n tal que $x_n \in U_i$. Definimos então $f : I \to \mathbb{N}$,

$$f(i) = \min\{n : x_n \in U_i\}.$$

Note que se $i \neq j$ então $f(i) \neq f(j)$. Mas então I é enumerável.

Espaço métrico completo

Uma seqüência $(x_n)_n$ no espaço métrico (X, d), é de Cauchy, se para todo $\epsilon > 0$ existir natural n^0 tal que $n, m \geq n^0$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Lema 5 *Toda seq. de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em X. Existe p natural tal que $n, m \geq p$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Em particular $d(x_n, x_p) \leq 1$ para $n \geq p$. Seja $M = \max\{1, d(x_1, x_p), \ldots, d(x_{p-1}, x_p)\}$. Portanto $\{x_n : n \geq 1\} \subset B[x_p, M]$.

Proposição 5 *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Suponhamos $\lim_n x_n = x$. Seja n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Então se $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Definição 13 *A seqüência $(y_n)_n$ é uma subseqüência de $(x_n)_n$ se existir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_n = x_{k(n)}$ para todo $n \geq 1$.*

Lema 6 *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é, ela mesma, convergente.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy e $\left(x_{k(n)}\right)_n$ subseqüência com limite x. Seja $\epsilon > 0$. Existe n' tal que $n \geq n' \implies d\left(x_{k(n)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja n'' tal que $n, m \geq n'' \implies d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Então para $n \geq n'''$, $p \geq \max\{k^{-1}(n''), n'\}$,

$$d(x_n, x) \leq d\left(x_n, x_{k(p)}\right) + d\left(x_{k(p)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Exemplo 13 *No subespaço $Y = (0,1]$ de $X = [0,1]$ a seq. $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite em X é $0 \notin Y$.)*

Exemplo 14 *Para $X = \mathbb{Q}$, a seqüência $x_n = \frac{[n\sqrt{2}]}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite existe nos reais e é $\sqrt{2}$)*

Definição 14 *Um espaço métrico é completo se toda seqüência de Cauchy for convergente.*

Exemplo 15 *X com a métrica discreta é completo: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Existe n^0 tal que $n, m \geq n^0$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Portanto $x_n = x_{n^0}$ se $n \geq n^0, m = n^0$.*

Teorema 5 *Seja (X, d) espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço completo. Então Y é fechado.*

Demonstração: Seja $y \in \overline{Y}$ e seja $(y_n)_n \subset Y$ uma seqüência com limite y. Mas (y_n) é de Cauchy em X e pela mesma razão de Cauchy em Y. Mas Y sendo completo (y_n) converge para $x \in Y$. Mas então pela unicidade do limite $x = y \in Y$. Portanto $\overline{Y} = Y$ é fechado.

Teorema 6 *$\mathbb{R}$ é completo na métrica usual.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$, $x_n \in \mathbb{R}$ de Cauchy. A seq. é portanto limitada. Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$ para todo n. Seja $\alpha_n = \inf\{x_m : m \geq n\}$. A seq. $(\alpha_n)_n$ é crescente e limitada superiormente por M. Seja $x = \sup\{\alpha_n : n \geq 1\}$. É claro que $\lim_n \alpha_n = x$. Para cada N existe $k(N) \geq N$, $\alpha_N \leq x_{k(N)} < \alpha_N + \frac{1}{N}$. Então $\lim_N x_{k(N)} = \lim_N \alpha_N = x$. Logo $(x_n)_n$ converge pois é de Cauchy e possui uma subseqüência convergente.

Comentário 10 *Em princípio pode acontecer que $k(N) = k(N+1) = \ldots = k(N+p)$. Entretanto isso ocorre somente um número finito de vezez pois $k(N) \geq N$. O conjunto $Z = \{k(N) : N \geq 1\}$ sendo infinito podemos obter uma seq. estritamente crescente: $l^1 = \min Z$, $l^2 = \min\{Z \setminus \{l^1\}\}$ etc. Uma outra possibilidade é notar que $\left\{m : \alpha_N \leq x_m < x + \frac{1}{N}\right\}$ é infinito e incluir a condição $k(N) > k(N-1)$ para definir $k(N)$.*

Teorema 7 *$\mathbb{R}^n$ é completo.*

Demonstração: Basta notar que $((x_p(1), \ldots, x_p(n)))_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ é de Cauchy se e somente se cada $(x_p(i))_p$, $i = 1, \ldots, n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $y_i = \lim_p x_p(i)$. Então $\lim_p x_p = y = (y_1, \ldots, y_n)$.