1. Tome $x \in U$. Defina $A := \{ y \in U \mid \forall i \ |y_i - x_i| = 1 \}$.

Logo, $A$ é os vértices do hipercubo de aresta de tamanho 1 ao redor de $x$. Portanto, $A$ é finito.

Escreva $A = \{y_1, \dots, y_m\}$. Pela desigualdade de Jensen, temos $f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(y_i) \leq \max_{i=1,\dots,m} f(y_i) \leq M$. Portanto, para todo $z \in \mathrm{Con}\, A$, temos $f(z) \leq M$. Logo, $f$ é limitada em $\mathrm{Con}\, A$. Vou provar que $f$ é contínua em $x$.

Agora, note que se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno, temos que $\|y - x\| < \delta$ implica em $y \in \mathrm{Con}\, A$.

Defina $\beta := \|y - x\|$ e $\alpha := \frac{\beta}{1+\beta}$. Definindo $z := x + \frac{1}{\beta}(y - x)$, temos $y = \beta z + (1-\beta)x$. Logo, por convexidade, temos $f(y) \leq \beta f(z) + (1-\beta) f(x)$. Rearranjando, vem

$$f(y) - f(x) \leq \beta\left(f(z) - f(x)\right) \leq \beta\left(M - f(x)\right)^{*},$$

pois $z \in \mathrm{Con}\, A$.

Definindo $w := x - \frac{1}{\beta}(y - x)$, temos $x = \alpha w + (1-\alpha) y$. Logo, temos

$$f(x) \leq \alpha f(w) + (1-\alpha) f(y) = \frac{\beta}{1+\beta} f(w) + \frac{1}{1+\beta} f(y).$$

Rearranjando, temos que

$$f(y) - f(x) \geq \beta\left(f(x) - f(w)\right) \overset{w \in \mathrm{Con}\, A}{\geq} \beta\left(f(x) - M\right) = -\beta\left(M - f(x)\right)^{**}.$$

Juntando $*$ e $**$, temos $|f(x) - f(y)| \leq \beta\left(f(x) - M\right)$. Como $\beta = \|y - x\|$, tomando $\delta := \frac{\varepsilon}{f(x) - M}$, teremos

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|\left(f(x) - M\right) < \varepsilon,$$

como queríamos. $\square$

② DEFINA $\alpha := \inf\{\|y-k\| : k \in K\}$ E TOME $(k_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq K$ TAL QUE $\|y-k_m\| \to \alpha$. COMO É CONVERGENTE, É LIMITADA. LOGO, TEMOS $\|k_m\| \leq \|k_m - y\| + \|y\| \leq M$. PORTANTO, $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ É LIMITADA E ESTÁ NO FECHADO $K$. LOGO, $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ ESTÁ NUM COMPACTO. LOGO, ELA TERÁ SUBSEQUÊNCIA CONVERGENTE, ISTO É, $k_{m_p} \to \breve{k} \in K$. PELA CONTINUIDADE DA NORMA, $\|y - k_{m_p}\| \to \|y - \breve{k}\|$. COMO $\|y - k_{m_p}\| \to \alpha$, PELA UNICIDADE DO LIMITE, $\|y - \breve{k}\| = \alpha$. LOGO, $\breve{k}$ ATINGE O ÍNFIMO, COMO QUERÍAMOS.

PARA MOSTRAR QUE NÃO É ÚNICO GERALMENTE, TOME $K := [0,1] \cup [3,4]$ E $y := 2$. LOGO, $\inf\{|2-k| : k \in K\} = 1$, ATINGIDO POR $k' = 1$ E $k'' = 3$. ◻

(3) TOME $k_1, k_2$ TAIS QUE $\|y-k_1\| = \|y-k_2\| = \inf_{k \in K} \|y-k\| =: \alpha$

DADO $\lambda \in (0,1)$, TEMOS $\|y - (\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2)\| = \|\lambda (y-k_1) + (1-\lambda)(y-k_2)\|$

$\overset{*}{\leq} \lambda \|y-k_1\| + (1-\lambda)\|y-k_2\| = \alpha$. COMO $(\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2) \in K$

E ESTÁ A UMA DISTÂNCIA MENOR QUE $\alpha$ DE $y$,

ELE TAMBÉM DEVE ATINGIR O ÍNFIMO. LOGO,

A DESIGUALDADE * É UMA IGUALDADE. POR CAUCHY-SCHWARZ,

SABEMOS QUE ISSO IMPLICA QUE ELES SÃO COLINEARES.

LOGO, EXISTE $\mu > 0$ TAL QUE $\lambda (y-k_1) = \mu (1-\lambda)(y-k_2)$.

PARA $\lambda = \frac{1}{2}$, ISSO NOS DÁ $y-k_1 = \mu(y-k_2)$. TOMANDO

A NORMA, TEMOS $\|y-k_1\| = \mu \|y-k_2\|$, OU $\alpha = \mu \cdot \alpha$,

LOGO, $\mu = 1$. ISSO IMPLICA $y-k_1 = y-k_2$, OU $k_1 = k_2$. $\blacksquare$

4) PRIMEIRO, VAMOS PEGAR O HIPERPLANO DE APOIO NO PONTO $\bar{c}$. ELE É DADO POR $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle = \beta\}$, ONDE $\beta := \langle \bar{c}, b\rangle$. PRIMEIRO, NOTE QUE TEMOS $\|b\| > 0$, POIS $b \neq 0$. LOGO, $0 < \|b\|^2 = \langle b, b\rangle = \langle y - \bar{c}, b\rangle$. REARRANJANDO, TEMOS $\beta = \langle \bar{c}, b\rangle < \langle y, b\rangle$.

AGORA, VOU PROVAR $\beta \geq \langle x, b\rangle$ PARA TODO $x \in C$. TOME $\alpha \in (0,1)$ E $z := \alpha\bar{c} + (1-\alpha)x$. TEMOS QUE $\langle y - z, y - z\rangle \geq \langle y - \bar{c}, y - \bar{c}\rangle$, PELA DEFINIÇÃO DE $\bar{c}$. ABRINDO O LADO ESQUERDO, TEMOS $\langle y - z, y - z\rangle = \langle y - \bar{c} - (1-\alpha)(x - \bar{c}), y - \bar{c} - (1-\alpha)(x - \bar{c})\rangle$
$= \langle y - \bar{c}, y - \bar{c}\rangle - 2(1-\alpha)\langle y - \bar{c}, x - \bar{c}\rangle + (1-\alpha)^2\langle x - \bar{c}, x - \bar{c}\rangle$. PORTANTO, JUNTANDO TUDO, TEMOS $(1-\alpha)^{\cancel{2}}\langle x - \bar{c}, x - \bar{c}\rangle \geq 2\cancel{(1-\alpha)}\langle y - \bar{c}, x - \bar{c}\rangle$. TOMANDO $\alpha \to 1$, TEMOS $0 \geq \langle y - \bar{c}, x - \bar{c}\rangle$. ISTO É, $\beta = \langle b, \bar{c}\rangle \geq \langle b, x\rangle$, COMO QUERÍAMOS.

AGORA, SE DEFINIRMOS $\beta' := \langle y, b\rangle$ E TOMARMOS $\gamma \in (\beta, \beta')$, TEREMOS O HIPERPLANO $H_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b\rangle = \gamma\}$ SEPARANDO ESTRITAMENTE, POIS $\langle y, b\rangle = \beta' > \gamma > \beta \geq \langle x, b\rangle$ PARA $x \in C$.

5) PELO TEOREMA 16, TODO CONVEXO FECHADO $K$ É TAL QUE $K = \bigcap_{\substack{F \supseteq K \\ F \text{ SEMI-ESPAÇO} \\ F = \overline{F}}} F$. LOGO, TEMOS

$$\overline{\text{CON } S} = \bigcap_{\substack{F \supseteq \overline{\text{CON } S} \\ F \text{ SEMI-ESPAÇO} \\ F = \overline{F}}} F.$$

PORTANTO, BASTA PROVAR QUE

$$\bigcap_{\substack{F \supseteq \overline{\text{CON } S} \\ F \text{ SEMI-ESPAÇO} \\ F = \overline{F}}} F = \bigcap_{\substack{F \supseteq S \\ F \text{ SEMI-ESPAÇO} \\ F = \overline{F}}} F.$$

MAS ISSO É VÁLIDO, POIS DADO SEMI-ESPAÇO FECHADO $F$ TEMOS QUE $F \supseteq \overline{\text{CON } S}$ SE, E SOMENTE SE $F \supseteq S$. PARA VER ISSO, NOTE QUE SE $F \supseteq \overline{\text{CON } S}$, ENTÃO $F \supseteq \overline{\text{CON } S} \supseteq S$. SE $F \supseteq S$, ENTÃO $F = \overline{\text{CON } F} \supseteq \overline{\text{CON } S}$. LOGO,

$$\bigcap_{\substack{F \supseteq \overline{\text{CON } S} \\ F \text{ SEMI-ESPAÇO} \\ F = \overline{F}}} F = \bigcap_{\substack{F \supseteq S \\ F \text{ SEMI-ESPAÇO} \\ F = \overline{F}}} F,$$

COMO QUERÍAMOS. Q

(6) PELO EXERCÍCIO 4, TEMOS O HIPERPLANO

$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle = \beta \}$, ONDE $b = y - \bar{c}$, $\|y - \bar{c}\| = \inf \{ \|y - c\| : c \in C \}$

E $\beta = \langle \bar{c}, b \rangle$. COM $\beta \geq \langle x, b \rangle$ PARA TODO

$x \in C$. LOGO, A FUNÇÃO $l(x) := \langle x, b \rangle$ É

LINEAR, NÃO-CONSTANTE (POIS $b \neq 0$) E TEMOS

$l(\bar{c}) = \beta \geq \langle x, b \rangle = l(x)$. LOGO, O MÁXIMO É ATINGIDO

EM $C$. $\square$

7 TOME $x, y \in V$, $\alpha \in [0,1]$. LOGO, TEMOS

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha) y\| = \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\|.$$

ESCREVENDO $f(z) := \|z\|$, O QUE ACABEI DE MOSTRAR É $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$,

DEFINIÇÃO DE CONVEXIDADE.

8) SUPONHA $f$ NÃO CONSTANTE. VOU PROVAR QUE É ILIMITADA.

TOME $x, y \in \mathbb{R}$ COM $f(x) < f(y)$. SUPONHA $x < y$. LOGO, TOMANDO $z > y$, PODEMOS ESCREVER $y = \alpha z + (1-\alpha)x$, POIS BASTA TOMAR $\alpha := \frac{y-x}{z-x}$.

PELA CONVEXIDADE, TEMOS $f(y) \leq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(x)$

REARRANJANDO, VALE QUE $f(y) \leq \alpha \left( f(z) - f(x) \right) + f(x)$, OU

$\frac{f(y) - f(x)}{\alpha} + f(x) \leq f(z)$, OU $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \cdot (z-x) + f(x) \leq f(z)$.

COMO $f(y) > f(x)$ E $y > x$, MANDANDO $z \to \infty$, VAMOS TER $f(z) \to \infty$, POIS O LADO ESQUERDO EXPLODE. LOGO, $f$ NÃO É LIMITADA.

O CASO $x > y$ É ANÁLOGO. $\blacksquare$

9

$\Rightarrow]$ SUPONHA $f$ CONVEXA. TEMOS

$$\frac{1}{2} f(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y).$$

LOGO, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

$\Leftarrow]$ TOME $x, y \in \mathbb{R}^n$ E $\alpha \in [0,1]$. LOGO, TEMOS

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(\alpha x) + f(1-\alpha)y = \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

10 VAMOS PROVAR POR INDUÇÃO.

$n=1$ $f(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 f(x_1)$ POR HOMOGENEIDADE POSITIVA

$n \Rightarrow n+1$ SUPONHA $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

PELO EXERCÍCIO ANTERIOR, TEMOS

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + f(\lambda_{n+1} x_{n+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),$$ COMO QUERÍAMOS.

LOGO, A INDUÇÃO ESTÁ COMPLETA. $\square$

11) Se $f$ é convexa, então dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0,1]$ temos $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

$$\leq \max\{\alpha f(x) + (1-\alpha) f(x), \alpha f(y) + (1-\alpha) f(y)\} = \max\{f(x), f(y)\}.$$

---

Defina $A := \{x : f(x) < \alpha\}$ e $B := \{x : f(x) \leq \alpha\}$.

Se $\gamma \in [0,1]$ e $x, y \in A$, temos que

$f(\gamma x + (1-\gamma) y) \leq \max\{f(x), f(y)\} < \alpha$. Se $x, y \in B$, temos

$f(\gamma x + (1-\gamma) y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha$. Logo, $A$ e $B$ são convexos.

a