Analise II
Lista 4

Professor: Paulo Klinger
Monitor: André Lelis

---

1. (Espaço de Baire) Seja $B = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências reais. Para $x, y \in B$, se $x \neq y$, seja $m(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$. Então, defina

$$d(x,x) = 0 \quad \text{e, para } x \neq y, \quad d(x,y) = \frac{1}{m(x,y)}.$$

Verifique que d é uma ultramétrica.

Solução Lembre-se que (B, d) é ultramétrico se é um espaço metrico e para quaisquer x, y, z vale $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$ Observe que essa desigualdade implica na desigualdade triangular, sendo então suficiente verificar ela para verificar a desigualdade triangular.

Vamos verificar as propriedades para ser ultramétrica.

- $d(x, y) = d(y, x)$, pois $m(x, y) = m(y, x)$.

- Seja $x \neq y$, então existe $n > 0$ tal que $x_n \neq y_n$. Logo, $m(x, y) \neq 0 \Rightarrow d(x, y) \neq 0$.

- $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$: Observe que se $m(x, z) = k$, então $x_k \neq z_k$ e $x_n = z_n$ para todo $n < k$.

Se $m(x, z) < k$, então $m(y, z) < k$, pois existe $n' < k$ tal que $x_{n'} \neq z_{n'}$, mas $x_{n'} = y_{n'}$ pelo pagrafro anterior, logo $z_{n'} \neq y_{n'}$. Logo, $d(y, z) > 1/k = d(x, y)$. E $d(x, z) > \frac{1}{k}$ pela hipotese que $m(x, z) < k$.

Se $m(x, z) \geq k$, então $x_k = y_k$ e $m(z, y) = k$, então pois $z_n = x_n = y_n$ para $n < k$, logo $\max\{d(z, y), d(z, y)\} \geq d(x, y)$.

2. Demonstre que o espaço de Baire é completo.

Solução Mostrar que é completo é o mesmo que mostrar que toda sequencia de Cauchy converge.

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequencia de Cauchy. Então, dado $\epsilon > 0$, existe M_ϵ tal que se $m, n > M$ então $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Observe que com a metrica dada no exercício anterior, então para quaisquer z, w no espaço de Baire $d(z, w) = \frac{1}{k}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Por conta disso, vai ser mais fácil usar algo como $\frac{1}{k}$.

Então, dado $\epsilon > 0$, existe M_K tal que se $m, n \geq M_k$ então $d(x_m, x_n) < \frac{1}{K} < \epsilon$.

Mas isso significa que se $m, n \geq M_K$, então $x_m[i] = x_n[i]$ para todo $i \leq K$. Em particular, para todo $n > M_k$, $x_n[k] = x_{M_k}[k]$

Então para cada $K \in \mathbb{N}$, existe esse M_K. A única coisa que vou exigir é que vou escolher $M_{K+1} > M_K$ sempre.

Então crio a sequencia $x = (x_{M_1}[1], x_{M_2}[2], \ldots, x_{M_n}[n], \ldots)$.

Agora vou provar que esse x é o limite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

Dado $\epsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $0 < \frac{1}{K} < \epsilon$.

Afirmação: se $n > M_k$, então $d(x, x_n) < \frac{1}{K} < \epsilon$.

Prova: $d(x, x_n) \leq \max\{d(x, x_{M_k}) d(x_n, x_{M_k})\}$ pelo exercício anterior.

$d(x, x_{M_k}) < \frac{1}{K}$ pela construção de x: Veja pela construção $x_{M_{k-1}}$ e x_{M_k} são iguais em $x_{M_{K-j}}[K - j] = x_{M_k}[K - j]$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq K - 1$.

E $d(x_n, x_{M_k}) < \frac{1}{K}$, pois $n > M_k$ e construímos M_k para satisfazer essa propriedade de $d(x_n, x_{M_k}) < \frac{1}{K}$.

3. (Teorema de Baire) Seja (X, d) completo e F_n fechado com interior vazio. Então $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ tem interior vazio.

   Sugestão: Obtenha uma sequência de bolas $B[x_n, r_n] \setminus F_n \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$ tais que $r_n \downarrow 0$.

Solução Vamos novamente usar a sugestão. Observe que a sugestão fala para pegar bolas fechadas no complementar de F_n. Então, vamos primeiro entender o que é o complementar.

F_n é fechado, logo F_n^c é aberto. Além disso, $(\cup_{n=1}^{\infty} F_n)^c = \cap_{i=1}^{\infty} F_n^c$.

Agora, a pergunta é o que significa F_n ter interior vazio. Seja $a \in F_n$, então toda bola que contém a também contem um elemento de F_n^c. Note que isso implica que F_n^c é denso, pois se $x \in F_n^c$ ok, pois já está em F_n^c, a outra alternativa é $x \in F_n$ que acabamos de ver, o que implica que F_n^c é denso.

Por outro lado, se Z é denso, então Z^c tem interior vazio.

Logo, um conjunto qualquer A é denso se, e somente se, A^c tem interior vazio.

Portanto, o problema em questão agora é mostrar que $\cap_{i=1}^{\infty} F_n^c$ é denso.

Seja W um aberto qualquer. Então $W \cap F_1^c \neq \emptyset$, pois F_1^c é denso. Intersecção de dois abertos é aberto. Então existe $x_1 \in W \cap F_1^c$ e $r_1 > 0$ tal que $B(x_1, r_1) \subset W \cap F_1^c$. Observe que posso pegar de tal forma que $B[x_1, r_1] \subset W \cap F_1^c$. Mas pelo que vimos F_2^c é denso e repetimos o raciocinio anterior.

Agora observe que podemos escolher $r_n \to 0$ e $\cap B[x_n, r_n] \neq \emptyset$ pelo teorema 29 das Notas de Aula. Portanto, $W \cap (\cap F_n^c) \neq \emptyset$.

4. Seja $\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n : K$ fechado, limitado, não-vazio$\}$. Para $A, B \in \mathcal{K}$, definimos

$$e(A,B) = \sup\{d(x,B) : x \in A\}, \quad h(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

Demonstre que, para $C \in \mathcal{K}$, $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$ e que h é uma métrica (métrica de Hausdorff) em K.

Solução

$h(A,B) \geq 0$: Por definição, a distancia de um ponto a um conjunto é dada por $d(x,B) = \inf\{d(x,y) | y \in B\}$. Em particular, podemos tomar $x \in A$ e temos $d(x,B) \geq 0$.

Portanto, $h(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\} \geq e(A,B) \geq d(x,B) \geq 0$.

$h(A,A) = 0$: Note que $d(x,A) = 0$ para todo $x \in A$. Além disso, A é fechado, logo portanto $d(x,A) = 0 \iff x \in A$.

h é simétrica.

$h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$

Para provar isso, temos que provar que $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$ que é a primeira parte do enunciado:

Temos que $d(a,C) \leq d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ para quaisquer $c \in C$ e $b \in B$ Como vale para qualque b e c, então $d(a,C) \leq d(a,b) + d(b,C)$. Mas $d(b,C) \leq e(B,C)$, logo $d(a,C) - e(B,C) \leq d(a,b)$ para todo b, então $d(a,C) - e(B,C) \leq inf(\{d(a,b) | b \in B\}) = d(a,B) \leq e(A,B)$.

$d(a,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.

Como é para todo $a \in A$, então $\sup d(a,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$, logo $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$.

Vamos agora usar isso para provar $h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$.

Ora $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$, dai $e(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$ e $e(C,A) \leq e(C,B) + e(B,A) \leq h(C,B) + h(B,A) = h(A,B) + h(B,C)$ pela simetria. Portanto, vale o resultado.

Como B é fechado, existe $y \in B$ tal que $e(A,B) = d(x,y)$ para algum $x \in A$

5. Sejam (X_i, d_i) métricos, $i \geq 1$. Demonstre que $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ é métrico completo se e somente se cada X_i for completo.

Solução Para provar que é completo temos que provar que toda sequência de Cauchy converge.

$(\Rightarrow)$ Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ uma sequencia de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, existe n_ϵ tal que se $n, m > n_\epsilon$, então $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^k}\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$.

Usando a definição da métrica, temos $\frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_n[k],x_m[k])}{1+d_k(x_n[k],x_m[k])} < \frac{1}{2^k}\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ implicando que $d_k(x_n[k], x_m[k]) < \epsilon$

Logo, $(x_n[k])$ é Cauchy para todo k. E cada X_k é completo, logo $(x_n[k])$ converge, digamos que converge para $x[k]$.

Como $d(x_n, x) = \sum \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_n[k],x[k])}{1+d_k(x_n[k],x_m[k])}$. Para dado $\epsilon > 0$, escolhemos $N > 0$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ e existe n_k tal que $d_k(x_n[k[, x_m[k]) < \frac{\epsilon}{2}$ se $n > n_k$.

Tomando $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k, N\}$ temos que $n \geq n_k$ vale $d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_n[k],x_m[k])}{1+d_k(x_n[k],x_m[k])} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_n[k],x_m[k])}{1+d_k(x_n[k],x_m[k])} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_n[k],x_m[k])}{1+d_k(x_n[k],x_m[k])} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge e X é completo.

$(\Leftarrow)$ Agora vamos provar o outro sentido. Para isso, seja $(x_n[k]) \subset X_k$ uma sequencia de Cauchy em X_k.

Defina $x_n = (X_1, \ldots, x_n[k], \ldots)$. Isto é, (x_n) será uma sequencia que será constante em cada X_i com exceção de X_k, onde será $(x_n[k])$.

Logo, $d(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_n[i],x_m[i])}{1+d_i(x_m[i],x_n[i])} = \frac{1}{2^k}\frac{d_k(x_n[k],x_m[k])}{1+d_k(x_n[k],x_m[k])} < d_k(x_n[k], x_m[k])$.

Como $(x_n[k])$ é Cauchy, para todo ϵ existe N tal que se $n, m > N$, então $d_k(x_n[k], x_m[k]) < \epsilon$. Mas isso implica que $d(x_n, x_m) < d_k(x_n[k], x_m[k]) < \epsilon$. Logo, (x_n) é Cauchy em X

Como X é completo, (x_n) converge. Logo, $(x_n[k])$ converge. Concluindo que X_k é completo.

6. Seja (X, d) métrico completo e $U \subset X$ aberto não-vazio. Definamos em U,

$$d_1(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right|.$$

Verifique que d_1 é uma métrica equivalente à métrica d, e que na métrica d_1, U é completo.

Solução Vamos iniciar verficando que d_1 é uma métrica:

$d_1(x,y) \geq 0$, pois é soma de numeros positivos.

$d_1(x,x) = d(x,x) = 0$ e $d(x,y) \neq 0$ se $x \neq y$

$d_1(x,y) = d_1(y,x)$, pois modulo é simetrico.

$d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(y,z)$:

$d_1(x,y) = d(x,y) + |\frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)}| = d(x,y) + |\frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)} + \frac{1}{d(z,U^c} - \frac{1}{d(y,U^c}| \leq d(x,z) + |\frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(z,U^c)}| + d(y,z) + |\frac{1}{d(y,U^c)} + \frac{1}{d(z,U^c)}|$

Seja A aberto em (X,d). Se $a \in A$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a,\epsilon) \subset A$. Seja $b \in B_1(a,\epsilon)$, logo $d_1(a,b) < \epsilon$, mas $d(a,b) < d_1(a,b)$, portanto $d(a,b) < \epsilon$. Concluímos que $b \in B(a,\epsilon) \subset A$. Ou seja, $B_1(a,\epsilon) \subset A$. Logo, A é aberto em (X,d_1).

Agora, seja C aberto em (X,d_1) e $c \in C$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_1(c,\epsilon) \subset C$. Quero mostrar que existe $\epsilon' > 0$ tal que $B_d(c,\epsilon') \subset B_1(c,\epsilon)$.

Note que se $a \in B_1(c,\epsilon)$, logo $a \in B(c,\epsilon)$, pois $d(a,c) \leq d_1(a,c) < \epsilon$. Mas não posso garatir que se $b \in B(c,\epsilon)$ então $b \in B_1(c,\epsilon)$. Por isso que tenho que criar um ϵ'.

Note que se $x,y \in U$, sem perda de generalidade, podemos supor que temos

$$|\frac{1}{d(x,U^c} - \frac{1}{d(y,U^c)}| = \frac{1}{d(x,U^c} - \frac{1}{d(y,U^c)}$$

E também temos que $d(y,U^c) \leq d(x,y) + d(x,U^C)$, daí

$$|\frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)}| = \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)}$$

$$\leq \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(x,y) + d(x,U^C)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{d(x,U^c)(d(x,y) + d(x,U^C))} \leq \frac{d(x,y)}{d(x,U^c)^2}$$

Então

$$d_1(x,y) \leq d(x,y) + |\frac{1}{d(x,U^c)} + \frac{1}{d(y,U^C)} \leq d(x,y) + \frac{d(x,y)}{d(x,U^c)^2}$$

$$\leq (1 + \frac{1}{d(x,U^c)})d(x,y)$$

Então basta definir $\epsilon' = (1 + \frac{1}{d(c,U^c)})\epsilon$ que temos o resultado.

Agora vamos mostrar que U é completo com d_1:

Seja (x_n) uma sequencia de Cauchy em U com métrica d_1. Pela equivalencia, (x_n) é Cauchy em U com métrica d.

$U \subset X$ que é completo com a métrica d. Portanto, $(x_n) \to x$ na métrica d, mas pela equivalência, então $(x_n) \to x$ na métrica d_1.

Mas U é aberto, logo x pode pertencer ou não a U. Se $x \in U$, então estamos feito.

Se $x \notin U$, então $x \in U^c$. Logo, $d(x, U^c) = 0$ e $d(x_n, U^c) \to 0$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, como (x_n) é Cauchy com metrica d_1, então existe N tal que se $n, m > 0$, temos

$$d_1(x_m, x_n) = d(x_n, x_m) + |\frac{1}{d(x_n, U^c)} - \frac{1}{d(x_m, U^c)}| < \epsilon$$

Mas isso é um absurdo, pois fixado qualquer m posso tomar n de forma que $\frac{1}{d(x_n,U^c)}$ é suficientemente grande para $d_1(x_m, x_n) > \epsilon$, pois $d(x_n, U^c) \to 0$, o que implica $\frac{1}{d(x_n,U^c)} \to \infty$.

Portanto, $x \in U$.

7. Verifique que $f(x) = \cos(\cos x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, é uma contração.

Solução Queremos mostrar que $|cos(cos(y)) - cos(cos(x))| \leq \alpha|y - x|$ com $\alpha \in (0, 1)$.

Pelo teorema do valor médio, temos que $|cos(cos(y)) - cos(cos(x))| = f'(c)|x - y|$ usando que $f'(x) = sen(cos(x)) \cdot sen(x)$, mas então $|f'(x)| = |sen(cos(x))sen(x)| < 1$. Pois,se $sen(x) = 1$, então $cos(x) = 0$, o que implica $sen(0) = 0$ e se $sen(cos(x)) = 1$, então $sen(x) < 1$.

Logo, $|f(y) - f(x)| < |x - y|$. Mas isso não é suficiente, pois α é uma constante e uma constante que independente de x, y.

Mas nosso argumento é suficiente para ver que $sen(cos(x))sen(x) \leq sen(cos(x)) \leq \max_{y\in[-1,1]} sen(y) = sen(1) < 1$. Logo, nosso $\alpha = sen(1)$.

Portanto, uma contração.

8. Seja K métrico compacto e $f : K \to K$ tal que, para $x \neq y$, $x, y \in K$, tem-se

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Demonstre que f tem um único ponto fixo $a \in K$ e que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$ para todo $x \in K$.

Solução

Vamos começar mostrando que se existe ponto fixo, então ele é único. Suponhamos que x e y são pontos fixos. Logo, $d(f(x), f(y)) = d(x, y) < d(x, y)$ (Contradição).

Agora, vamos mostrar que existe ponto fixo.

A função $g(x) = d(x, f(x))$ é contínua e K é compacto, logo g possui minimo em K por K ser compacto. Seja y o ponto de minimo e suponhamos $y \neq f(y)$.

Então $g(f(y)) = d(f(y), f(f(y))) < d(y, f(y)) = g(y)$. Contrariando a minimalidade de $g(y)$. Logo, $y = f(y)$ e o ponto fixo existe.

Agora vamos mostrar que a sequencia $(f^n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge para todo x e que $lim f^n(x) = a$ para todo x.

Primeiro, notemos que $d(f^n(x), a) = d(f^n(x), f(a)) < d(f^{n-1}(x), a)$.

Portanto, $d(f^n(x), a)$ forma uma sequencia decrescente em $\mathbb{R}$. Tal sequencia é limitada inferiormente por 0. Sequencia monotona e limitada em $\mathbb{R}$, então é convergente.

Então digamos que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), a) = b$.

Agora, por K ser compacto, existe subsequencia $f^{n_k}(x)$ convergente, digamos que $f^{n_k}(x)$ converge para c.

Então vale que $\lim_{n_k\to\infty} d(f(f^{n_k}(x)), a) = d(f(c), a)$, mas também vale que

$$\lim_{n_k\to\infty} d(f(f^{n_k}(x)), a) = d(c, a)$$

.

Como o ponto fixo é unico, então $k = a$.

Se $(f^n(x))_{n=1}^{\infty}$ não convergir para $k = a$. Então, existe uma subsequencia que converge para $k' \neq a$, o que é impossivel.