

Analise II

Lista 3

Professor: Paulo Klinger

Monitor: André Lelis

1. Para ver o enunciado, consulte a lista.

Solução É suficiente mostrar que se $B(x, 1)$ com metrica d também é aberto com a métrica d' e d'' e também que aberto com a métrica d' e d'' define aberto com metrica d .

Se $z \in B(x, 1)$, então $d'(x, z) = \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)} < \frac{1}{2}$. Então, $z \in B(x, 1/2) \subset B(x, 1)$ com a métrica d' .

Se $z \in (X, d')$ e $z \in B(x, \frac{1}{2})$ com norma d' . $d'(x, z) = \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)}$, então $\frac{1}{2} > \frac{d(x, z)}{1+d(x, z)}$. Logo, $1 > d(x, z)$. Logo, $z \in B(x, 1)$ com métrica d

Agora, fazendo a mesma coisa para d'' .

Seja $z \in B_d(x, 1)$, então $d''(z, x) = \min\{1, d(z, x)\} \leq 1$. Mas como $z \in B_d(x, 1)$, então $d(z, x) < 1$. Portanto, $d''(z, x) = \min\{1, d(z, x)\} = d(z, x) < 1$. Ou seja, $z \in B_{d''}(x, 1)$.

Agora, seja $B_{d''}(x, 1)$. Temos que $d''(z, x) = \min\{1, d(z, x)\} = d(z, x)$, pois $d''(z, x) < 1$. Segue que $z \in B_d(x, 1)$ Portanto, $B_d(x, 1) = B_{d''}(x, 1)$

Obs.: Nesse caso é suficiente para bolas, pois se colocar $B(x, r)$ em qualquer raio r , as contas vão dar a mesma só com r no lugar do 1 e qualquer aberto $U = \cup_{x \in U} B(x, r_U)$. Como qualquer aberto é união de bolas, então as bolas formam uma base topologica da topologia. Então, podemos somente pensar nas bolas.

2. Para ver o enunciado, consulte a lista.

Solução Como os abertos fundamentais de um espaço metrico são da forma $B(x, r)$ para todo x e r , já que qualquer aberto $U = \cup_{x \in U} B(x, r_x)$. Então para verificar que $\tau_{d_Y} = \{U \cap Y | U \in \tau_d\}$ basta verificar nas bolas.

Agora seja $z \in B_Y(x, r)$, então $d(x, z) < r$ e $z \in Y$. Logo, $z \in B(x, r) \cap Y$.

Se $y \in B(x, r) \cap Y$, então $d(x, y) = d_Y(x, y) < r$. Logo, $y \in B_Y(x, r)$.

3. Seja ℓ^∞ o conjunto das seqüências limitadas reais. Para $x, y \in \ell^\infty$ definimos

$$\|x - y\|_\infty = \sup\{|x_n - y_n| : n \geq 1\}.$$

Verifique que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado.

Solução $\ell^\infty \subset \ell^0$

Seja $x, y \in \ell^\infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. $x + \lambda y = (x_n + \lambda y_n) = (x_n) + \lambda(y_n)$. Note que como $x, y \in \ell^\infty$, existe M tal que $\sup x_n < M$ e $\lambda \sup y_n < \lambda M$.

Logo, $x + \lambda y \in \ell^\infty$, concluindo que é subespaço.

Agora temos que provar que é norma:

- $\|x\| = 0 \iff x = \bar{0}$: Seja $x \in \ell^\infty$ tal que $\|x\| = 0$, logo $\sup\{|x_n| : n \geq 1\} = 0$. Portanto, $|x_n| \leq 0 \forall n$. Mas $|x_n| \geq 0 \forall n$. Daí, $x_n = 0 \forall n$.

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$: Temos que $\|\alpha x\| = \sup\{|\alpha x_n|\} = |\alpha| \sup\{|x_n|\} = |\alpha| \|x\|$

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$: $\|x + y\| = \sup\{|x_n + y_n| : n \geq 1\}$. Sabemos que $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \|x\| + \|y\|$. Portanto, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4. Demonstre que ℓ^∞ não é separável. **Sugestão:** Considere $S = \{0, 1\}^\mathbb{N} \subset \ell^\infty$ e note que se $x \neq x'$ estão em S , $\|x - x'\|_\infty = 1$.

Solução Relembre que X é separável \iff existe $Y \subset X$ enumerável tal que $\bar{Y} = X$.

$\bar{Y} = X$ significa que Y é denso em X , ou seja, dado $x \in X$ para toda $B(x, r)$, existe algum $y \in Y$ tal que $y \in B(x, r)$.

Vamos usar a sugestão para resolver o exercício. O primeiro ponto é entender o que S . S é o conjunto das seqüências que os elementos são somente 0 ou 1.

O segundo ponto é notar que S é não-enumerável:

Suponha que S seja enumerável, então podemos escrever $S = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ para alguma enumeração. Considere o elemento $x = (a_1, \dots, a_n, \dots) \in S$ tal que $a_1 \neq x_1[1]$ e de modo geral $a_n \neq x_n[n]$ onde $x_n[n]$ é o n -ésimo elemento da seqüência x_n . É claro que $x \notin \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Portanto, S não é enumerável. (Note que esse argumento é exatamente o argumento da diagonal de Cantor! Não estamos usando nenhum "truque" novo).

Agora que S é não-enumerável, vemos que S não pode ser nosso candidato a Y . Então qual utilidade de S ?

Ora, sabemos que se $f : S \rightarrow A$ é injetiva, então A é não-enumerável.

Então, nossa estratégia vai ser construir tal f para qualquer candidato a Y .

Suponhamos que Y é denso em ℓ^∞ . Dado $s \in S$, então pela definição de ser denso para toda bola aberta centrada em s existe um elemento de $y \in Y$ que também pertence a essa bola. Como $|s - s'|_\infty = 1$ para todo $s' \neq s \in S$, então basta tomar $r < 1$, por exemplo, $r = \frac{1}{2}$ e teremos que $B(s, 1/2) \cap S = \{s\}$ e existe $y_s \in Y \cap B(s, \frac{1}{2})$.

Vamos construir a $f : S \rightarrow Y$ injetiva que queremos. Como vimos que existe y_s ele é o candidato obvio para $f(s)$. Então agora temos que mostrar que $y_s \neq y_{s'}$ para $s \neq s'$.

Isso é o mesmo que mostrar que $B(s, 1/2) \cap B(s', 1/2) = \emptyset$

Suponhamos então que $y_s \in B(s, 1/2) \cap B(s', 1/2)$, daí $\|s - s'\| \leq \|s - y_s\| + \|y_s - s'\| < 1/2 + 1/2 = 1$.

Absurdo, pois vimos que $\|s - s'\| = 1$.

Logo, $f : S \rightarrow Y$ com $f(s) = y_s$ é injetiva, portanto Y é não-enumerável.

5. Seja $Y = \{x \in \ell^\infty : \exists n \geq 1, \forall m \geq n, x_m = 0\}$. Então Y é um subespaço separável de ℓ^∞ .

Solução Y é formado por sequencias dessa forma $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots)$. Ou seja, existe n que a partir dele todos os elementos da sequência são 0.

Queremos achar X enumerável e denso.

Sempre que estamos em \mathbb{R}^n , \mathbb{Q}^n é denso. Então, sempre o primeiro candidato natural que pensamos é \mathbb{Q}^n em \mathbb{R}^n .

As sequencias $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots)$ dessa forma lembram \mathbb{R}^n . Mais do que isso note que podemos definir $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots) \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Definimos então, $Y_n = \{(x_i) | x_k = 0 \forall k \geq n\}$

$f_n : Y_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como acima é injetiva. Então, o candidato para ser denso nesse conjunto X_n é $X_n = Y_n \cap \mathbb{Q}^n \times 0^\infty$.

X_n é denso em Y_n e X_n é enumerável por ser injetiva em um conjunto enumerável \mathbb{Q}^n . Para ver que X_n é denso em Y_n basta notar que se $y \in Y_n$, então $y = y_1, \dots, y_n, 0, \dots$. Daí, dado $\epsilon > 0$, existe para cada m existe x_m em X_n tal que $|y_m - x_m| < \epsilon/2$, pois $y_m \in \mathbb{R}$ e $x_m \in \mathbb{Q}$ que é denso em \mathbb{R} . Tomando $x = (x_m)$, temos que $|x - y| = \sup |x_m - y_m| < \epsilon$.

Definimos $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Daí, X é enumerável e denso em Y , pois união de enumerável de enumerável é enumerável e dado $y \in Y$, então $y \in Y_n$ para algum

n , então para todo ϵ existe algum $x_{n\epsilon} \in X_n$ tal que $x_{n\epsilon} \in B(y, \epsilon)$, concluindo que é denso.

6. Seja X um conjunto não-vazio e $F = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é limitada}\}$. Então

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é uma norma (denominada de norma do sup ou norma da convergência uniforme)

Solução - $\|f\| = 0 \iff f = 0$: Suponha $f \neq 0$, então existe y tal que $f(y) = z \neq 0$. Daí, $|f(y)| > 0$. Portanto, $\sup f > 0$.

- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| : \|\alpha f\| = \sup |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup |f(x)| = |\alpha| \|f\|.$

- $\|g + \alpha f\| \leq \|g\| + |\alpha| \|f\|$: Por definição, $\|g + \alpha f\| = \sup |g(x) + \alpha f(x)|$, mas $|g(x) + \alpha f(x)| \leq |g(x)| + |\alpha| |f(x)| \leq \|g\| + |\alpha| \|f\|.$

7. Seja $\ell^2 = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$. Então verifique que

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty x_n^2}$$

é uma norma obtida a partir do produto interno, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$.

Solução

Que $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ é evidente.

Agora, vamos mostrar que satisfaz as propriedades de norma:

$$\|x\| = 0 \iff \sum_{n=1}^\infty x_n^2 = 0 \iff x_n = 0 \forall n.$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|: \text{ Temos } \sum_{n=1}^N (x_n + y_n)^2 = \sum_{n=1}^N x_n^2 + 2 \sum_{n=1}^N x_n y_n + \sum_{n=1}^N y_n^2 \leq \sum_{n=1}^N x_n^2 + 2\sqrt{(\sum_{n=1}^N x_n^2)}\sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2} + \sum_{n=1}^N y_n^2 = (\sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2})^2$$

Onde $2 \sum_{n=1}^N x_n y_n \leq \sqrt{(\sum_{n=1}^N x_n^2)}\sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2}$ por conta de Cauchy-Schwarz.

Levando N para o infinito, então vai valer a desigualdade que queríamos.

Por ultimo, temos que conferir $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, mas essa sai direto da definição.

8. Seja $\ell^1 = \{(x_n)_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$. A função

$$|x|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$$

é uma norma em ℓ^1 .

Solução

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ Suponha que $x \neq 0$, então existe $m > 0$ tal que $|x_m| \neq 0$. Logo, $0 < |x_m| \leq \sum |x_m| = \|x\|_1$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|_1$: $\sum |\alpha x_n| = |\alpha| \sum |x_n|$.
- $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$: $\|x + y\|_1 = \sum |x_n + y_n| \leq \sum |x_n| + \sum |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

9. Demonstre que ℓ^1 e ℓ^2 são separáveis.

Solução Nos espaços de sequências de limitadas ℓ^∞ , nós aprendemos no exercício 3 um conjunto separável. E vimos uma "inspiração para fazer isso".

Vamos tentar usar a mesma ideia aqui...

Defina $X_n = \{x \in \ell^p | x_m \in \mathbb{Q}, x_m = 0 \forall m > n\}$

Seja $y \in \ell^p$, como converge, dado $\epsilon > 0$, existe N_ϵ tal que $\sum_{n=N_\epsilon+1}^\infty |y|^p < \epsilon^p/2$

Como \mathbb{Q} é denso, posso escolher $x_i, i = 1, \dots, N_\epsilon$ tal que $|x_i - y_i| < (\frac{\epsilon^p}{2^{i+1}})^{\frac{1}{p}}$

Definindo $x = (x_1, \dots, x_{N_\epsilon}, 0, \dots, 0, \dots)$, $x \in X_{N_\epsilon}$, e temos $|x - y|^p = \sum_{i=1}^{N_\epsilon} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=N_\epsilon+1}^\infty |y_i|^p < (\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \frac{\epsilon^p}{2^{i+1}})^{\frac{1}{p}} + \epsilon^p/2 < \epsilon^p$.

Portanto, $\cup X_n$ é denso e enumerável em ℓ^p .

10. Verifique que $[0, 1]$ é fechado mas não é aberto em \mathbb{R} .

Solução

- $[0, 1]$ é fechado. Vamos mostrar que o complementar é aberto. Seja $x \in [0, 1]^C = Y$. Então, $x < 0$ ou $x > 1$. Se $x < 0$, tome $\epsilon = \frac{|x|}{2}$, Então, considere $B_\epsilon(x)$.

Se $y \in B_\epsilon(x)$, então $y < x + \epsilon < 0$, logo $y \in Y$.

Se $x > 1$, então $x - 1 = \epsilon$. Considere $B_{\epsilon/2}(x)$ e $y \in B_{\epsilon/2}(x)$. Segue que $y > 1$. Logo, $y \in Y$.

Portanto, Y é aberto.

- $[0, 1]$ não é aberto. Para todo $\epsilon > 0$, temos que $-\epsilon/2 \in B_\epsilon(0)$. Logo, $B_\epsilon(0) \not\subset [0, 1]$ para ϵ . Portanto, não pode ser aberto.

- 11.
1. O conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ não é fechado nos reais. Entretanto, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ é fechado em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Justifique.
 2. Para U aberto não-vazio de \mathbb{R} , defina para $x, y \in U$, $x \sim y$ se existir $(a, b) \subset U$ tal que $x, y \in (a, b)$. Demonstre que \sim é uma relação de equivalência e use isto para demonstrar que U é uma união enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

Solução

1. Uma das caracterizações de fechado é que contém todos os seus pontos limites. Defina $x_n = \frac{1}{n}$. Segue $(x_n) \rightarrow 0$ e x_n pertence ao conjunto para todo n , mas 0 não pertence a este conjunto, logo não pode ser fechado.

Note-se que (x_n) é uma sequência convergente no conjunto, então x_n é constante ou converge para 0 . Como 0 não pertence a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, segue que em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o conjunto é fechado.

2. Para mostrar que é uma relação de equivalência, tenho que mostrar
 - (a) Reflexiva: $(y \sim y)$: Se $y \in U$, como U é aberto então existe (a, b) tal que $y \in (a, b) \subset U$. Logo, reflexivo.
 - (b) Simétrico: $y \sim z$, então $z \sim y$.: Trivial, basta usar o mesmo intervalo de $y \sim z$
 - (c) Transitivo: $y \sim z$ e $z \sim w$, então $y \sim w$: Como $y \sim z$ e $z \sim w$, existem a, b, c, d tais que $y, z \in (a, b)$ e $z, w \in (c, d)$
 $z \in (a, b) \cap (c, d) = (e, f)$. Se $y, w \in (e, f)$, ok. Se não, então como $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$, então $(a, b) \cup (c, d) = (a, d)$, logo $y, w \in (a, d) \subset U$. Logo, $y \sim w$.

Como U é aberto e U / \sim forma uma partição, então cada elemento U está associado a um único intervalo aberto e a união desses intervalos dão U . Observe que esses intervalos são disjuntos por \sim ser

uma relação de equivalência. Para ver que é enumerável, basta associar cada intervalo a racional pertencente a ele, como os racionais são enumeráveis, segue que os intervalos são enumeráveis.

12. Demonstre que em um espaço métrico todo conjunto fechado é uma interseção enumerável de conjuntos abertos. E que todo conjunto aberto é uma união enumerável de fechados.

Solução - F conjunto fechado. Seja $x \in F$ e temos $B(x, \frac{1}{n})$. É claro que $F \subset \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$. Por outro lado, $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, \frac{1}{n})$.

Vamos então provar que $F = \bigcap B_n$, onde $B_n = \bigcup_{x \in F} B(x, 1/n)$.

$F \subset \bigcap B_n$ já sabemos, pois $F \subset B_n$.

$\bigcap B_n \subset F$: Seja $y \in \bigcap B_n$, então $y \in B_n \forall n$. Então para cada n , existe z_n tal que $y \in B(z_n, 1/n)$. Logo $(z_n) \rightarrow y$. Mas $z_n \in F$ para todo n e F , logo $\lim z_n \in F$, concluindo que $y \in F$.

- B conjunto aberto: Como B é aberto, então B^c é fechado. Mas acabamos de ver que $B^c = \bigcap X_n$ abertos. Tomando o complementar novamente, $B = (\bigcap X_n)^c = \bigcup X_n^c$ e cada X_n^c é fechado.

13. Verifique que para espaços normados, $B(x, r) = x + rB(0, 1)$ sempre que $r > 0$.

Solução Vamos mostrar que um conjunto está contido no outro.

$B(x, r) \subset x + rB(0, 1)$: Seja $y \in B(x, r)$, então $\|y - x\| < r$. Podemos dividir por r dos ambos lados, $\|\frac{y-x}{r}\| < 1$. Ora, observe que $\|(\frac{y-x}{r}) - 0\| < 1$. Defina $z = \frac{y-x}{r}$, logo $rz = y - x$, concluindo que $y = rz + x$ e $\|rz\| = \|r(\frac{y-x}{r})\| = |r| \|\frac{y-x}{r}\| < r \cdot 1$.

$(x + rB(0, 1) \subset B(x, r)$. Seja $z \in x + rB(0, 1)$, então $z = x + ry$ com $y \in B(0, 1)$. Segue que $\|z - x\| = \|ry\| = r\|y\| < r$. Logo $z \in B(x, r)$.

14. Seja $(B, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Demonstre que $+: B \times B \rightarrow B$, $+(x, y) = x + y$, e $\cdot: \mathbb{R} \times B \rightarrow B$, $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$, são funções contínuas.

Solução

- $+$: é contínua: Vamos usar que a função é contínua se e somente $x_n \rightarrow x$, então $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

No caso, sejam $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Temos que $\| (x_n + y_n) - (x + y) \| \leq \| x_n - x \| + \| y_n - y \|$.

Como $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, então existe N tal que se $n > N$, então $\| x_n - x \| + \| y_n - y \| < \epsilon/2 + \epsilon/2$. O que conclui a demonstração.

- Análogo ao anterior. Seja $\lambda_n \rightarrow \lambda$ e $x_n \rightarrow x$. Então vale que $\| \lambda_n x_n - \lambda x \| = \| \lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x \| \leq \| \lambda_n x_n - \lambda x_n \| + \| \lambda x_n - \lambda x \| = |\lambda_n - \lambda| \| x_n \| + |\lambda| \| x_n - x \|$

Mas como $x_n \rightarrow x$, logo necessita ser limitado. Existe $M > 0$ tal que $\| x_n \| < M$ para todo n .

E existe N tal que se $n > N$, então $|\lambda_n - \lambda| < \frac{\epsilon}{2M}$ e $\| x_n - x \| < \frac{\epsilon}{2|\lambda|}$.

Daí, $\| \lambda_n x_n - \lambda x \| < |\lambda_n - \lambda| \| x_n \| + |\lambda| \| x_n - x \| < \epsilon \frac{M}{2M} + |\lambda| \frac{\epsilon}{2|\lambda|}$.

15. Se M é um subconjunto limitado do espaço normado B e $\lambda_n \rightarrow 0$, então para toda sequência $m_n \in M$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n m_n = 0$.

Solução Como M é limitado, então $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitado. Então existe $L > 0$ tal que $|m_n| \leq L$ para todo n .

Logo, $0 \leq |\lambda_n m_n| \leq \lambda_n L$. Daí, tomando o limite, temos que $|\lambda m_n| \rightarrow 0$. Logo, $\lambda m_n \rightarrow 0$, pois $|\cdot|$ é norma.

16. Seja $Z = X \times Y$ sendo X e Y espaços métricos. Se $U \subset Z$ é aberto e $z = (x, y) \in U$, demonstre que existem $V \subset X$ e $W \subset Y$ abertos tais que $(x, y) \in V \times W \subset U$.

Solução Como $z \in U$ e U é aberto. Então existe $r > 0$ tal que $B(z, r) \subset U$.

$z = (x, y)$. Então defina, $B(x, \frac{r}{2}) \subset X$ e $B(y, \frac{r}{2}) \subset Y$. (Aqui usamos a definição da página 20 das notas de aula de métrica no produto cartesiano finito).

Vamos mostrar que $B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2}) \subset U$

Seja $w \in B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2})$. Logo, $w = (x_w, y_w)$.

Temos $d(z, w) = d_x(x, x_w) + d_y(y, y_w) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Logo, $w \in B(z, r) \subset U$. Concluindo que $w \in U$.

17. Seja $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, sendo (X_n, d_n) métricos, $n \geq 1$. Seja $U \subset X$ aberto da métrica produto e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in U$. Demonstre que existe natural N e bolas abertas, $B(x_n, r_n) \subset X_n$ para $1 \leq n \leq N$, tais que

$$x \in \{z \in X : z_n \in B(x_n, r_n), 1 \leq n \leq N\} \subset U.$$

Solução Queremos demonstrar que se $x \in U$, então existe N tal que $B(x_1, r_1) \times \dots \times B(x_N, r_N) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \dots \subset U$

Como U é aberto, então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

Na métrica do produto (lema 9, página 20 das notas), temos que existe N tal que $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} < \frac{r}{2}$

Agora, então para tod $y \in B(x_1, \frac{r}{2}) \times \dots \times X_{N+1} \dots$

Logo, $d(x, y) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} = \sum^N \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)} \leq \sum \frac{\epsilon}{2^n} + \frac{r}{2} < r$.

Logo, $y \in B(x, r) \subset U$.

18. Sejam $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ normas equivalentes em V . Demonstre que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $v \in V$, $\epsilon\|v\| \leq \|v\|' \leq \frac{1}{\epsilon}\|v\|$.

Solução Primeiro vamos que se converge em $\|\cdot\|$, então converge em $\|\cdot\|'$.

Suponhamos que x_n converge para x em $\|\cdot\|$. Então dado um aberto qualquer U que contenha x , então existe N tal que se $n > N$, logo $x_n \in U$. Mas U é aberto $\|\cdot\|'$, pois as normas são equivalentes e se x_n ainda vai pertencer a U para todo $n > N$.

Para ver que isso é suficiente para convergencia, veja que dado $\epsilon > 0$ e defina $B(x, \epsilon) = \{y \mid \|y - x\|' < \epsilon\}$, mas como as normas são equivalentes $B(x, \epsilon)$ também é aberto em $\|\cdot\|$, logo existe N tal que $n > N$, $x_n \in B(x, \epsilon)$ em $\|\cdot\|$, mas se pertence com essa norma em também vai pertence com $\|\cdot\|'$. Logo, x_n converge em ambas as normas.

Vamos agora provar o exercicio do enunciado por absurdo. Ou seja, suponhamos que para todo $k > 0$ exista $v_k \in V$ tal que $\|v_k\|' > k\|v_k\|$.

Se é para todo k , em particular posso tomar $k = n$. E construo uma sequencia $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ tal que $\|v_n\|' > n\|v_n\|$ para todo n .

Defina então $u_n = \frac{v_n}{n\|v_n\|_1}$. Isso implica $\|u_n\|_1 = \frac{1}{n}$ e $\|u_n\|_2 > \frac{1}{n} \frac{n\|v_n\|_1}{\|v_1\|_1} = 1$.

Logo, em $(V, \|\cdot\|_1)$ temos que $u_n \rightarrow 0$ e em $(V, \|\cdot\|_2)$ temos $u_n \not\rightarrow 0$. Portanto, não podem ser equivalentes.

19. Demonstre que $\overset{\circ}{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$

Solução Observe que o queremos provar é : $\text{int}(A) = \overline{(A^c)}^c$.

Seja $a \in \text{int}(A)$, então $a \subset A$, logo $a \not\subset \overline{A^c}$, logo $A \subset \overline{(A^c)}^c$,

Agora, seja $a \in \overline{(A^c)}^c$, então $a \notin \overline{(A^c)}$. Ou seja, $a \subset A$ e a é aberto. $a \in \text{int}(A)$.

20. Um espaço métrico (X, ρ) é dito ultramétrico se para todos $x, y, z \in X$,

$$\rho(x, z) = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$$

Demonstre que num espaço ultramétrico todo ponto da bola $B(x, r)$ é centro dela.

Solução Seja $y \in B(x, r)$. Queremos mostrar que dado $w \in B(x, r)$, então $\rho(y, w) < r$. Por definição, posso escrever $\rho(y, w) = \max\{\rho(y, x), \rho(w, x)\}$ e esse máximo é menor que r , pois os pontos estão na bola.

Agora seja $z \in B(y, r)$. Então, $\rho(y, z) = \max\{\rho(y, x), \rho(z, x)\}$. Logo, $\rho(z, x) < r$ e $z \in B(x, r)$.

21. Seja $f : X \rightarrow Z$ contínua e sobrejetora. Se X for separável, Z também é

Solução Como X é separável, então existe $X' = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ denso e enumerável tal que $\overline{X'} = X$.

O candidato para ser o conjunto denso e enumerável em Z é $f(X')$. É claro que $f(X')$ é enumerável. Temos que provar que é denso.

Provar que é denso é o mesmo que provar $\overline{f(X')} = Z$.

Vamos provar que $\overline{f(X')} \subset Z$. $f(X') \subset Z$, logo $\overline{f(X')} \subset \overline{Z} = Z$.

Agora vamos provar que $Z \subset \overline{f(X')}$:

Seja $z \in Z$. Como f é sobrejetora, existe x tal que $f(x) = z$. Como f é contínua, então existe $\delta > 0$ tal que se $d_X(x, y) < \delta$, então $d_Z(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Como X' é denso, então existe $x_n \in X$ tal que $d_X(x, x_n) < \delta$. Logo, temos $d_Z(f(x), f(x_n)) < \epsilon$.

Mas observe que posso tomar $\epsilon \rightarrow 0$ e para cada um vamos achar $x_n \rightarrow x$ como feito acima, logo $z \in \overline{f(X')}$.

Solução Alternativa: Seja $z \in Z$ e X' o conjunto denso enumerável em X . Uma vez que f é sobrejetora, existe x tal que $f(x) = z$. Como f é contínua, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Mas X' é denso em X , logo existe x' tal que $|x - x'| < \delta$, portanto $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Concluindo que $f(X')$ é denso uma vez que vale para qualquer ϵ e $z \in Z$.

22. Sejam (X_n, d_n) espaços métricos, $X = \prod X_n$ o produto cartesiano com a métrica usual do produto, $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n(1+d_n(x_n, y_n))}$. Demonstre que
- (a) Se cada X_n for separável, X é.
 - (b) A projeção $f : X \rightarrow \prod_{i=1}^N X_i$ é continua.
 - (c) Se $f^k \in X$ para $k \geq 1$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(n) = f(n) \in X_n, n \geq 1$. Então, $\lim f^k = (f(n))_{n=1}^{\infty}$ na métrica de X .

Solução

- (a) Como X_n é separável, existe $Y_n \subset X_n$ enumerável e denso. Vamos construir a partir desses conjuntos um conjunto enumerável e denso em X .

Mas primeiro vamos observar que $\prod_{n=1}^{\infty} Z_n$ com Z_n enumerável não é necessariamente enumerável, então temos que pensar uma maneira mais inteligente de construir nosso enumerável. (Para ver que não é necessariamente enumerável pense $\prod_{n=1}^{\infty} Z_n$, onde $Z_n = \{0, 1\}$.)

Agora, vamos pensar uma maneira de construir um conjunto enumerável:

Sabemos que união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Então vamos construir para cada n um conjunto enumerável.

Defina $E_n = Y_1 \times \dots \times Y_n \times \{y_{n+1}\} \times \{y_{n+2}\} \times \dots \times y_k \times \dots$ com $y_k \in Y_k$.

Afirmção: E_n é enumerável.

Prova da afirmação: Defina $f : Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow E_n$ definida por $f(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, y_{n+1}, \dots)$.

f é sobrejetiva, logo E_n é enumerável, pois $Y_1 \times \dots \times Y_n$ é enumerável.

Agora definimos $E = \cup E_n$. Como E é união enumerável de enumeráveis, segue que E é enumerável.

Conseguimos construir um enumerável em X . Agora precisamos provar que esse enumerável é denso.

Ora, mas pelo exercício 17, $B = \prod_{n=1}^m V_n \times \prod_{n \geq m} X_n$, onde V_n são abertos, formam uma base de abertos. E $B \cap E_m \neq \emptyset$. Portanto, E é denso em X .

- (b) Vamos usar que f é contínua $\iff f^{-1}(U)$ é aberto para todo aberto U em $X_1 \times \dots \times X_N$.

Seja U em aberto $X_1 \times \dots \times X_N$ e $x \in f^{-1}(U)$. Se eu conseguir $B(x, r) \subset f^{-1}(U)$, então $f^{-1}(U)$ é aberto.

$f(x) = (x_1, \dots, x_N)$. Pelo exercício 16, existem U_1, \dots, U_N abertos tais que $(x_1, \dots, x_N) \in U_1 \times \dots \times U_N$.

Logo, $x \in f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_N) = U_1 \times \dots \times U_N \times \dots$ que é aberto e está contido em $f^{-1}(U)$. Logo, existe r tal que $B(x, r) \subset f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_N) \subset f^{-1}(U)$.

- (c) Tome $f_n \in X$, onde $f_n = (f_n[1], \dots, f_n[m], \dots)$. Suponham que $f_n[m]$ converge para $f[m] \in X_n$.

Tome $\epsilon > 0$. Então, existe N_ϵ tal que $\sum_{k \geq N_\epsilon} \frac{1}{2^k} < \epsilon/2$ e $d(f[m], f_n[m]) < \frac{\epsilon}{2}$ se $n > N_\epsilon$.

Daí, $d(f, f_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \frac{d_m(f[m], f_n[m])}{1 + d_m(f[m], f_n[m])} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d_m(f[m], f_n[m])}{1 + d_m(f[m], f_n[m])} < \epsilon/2 + \epsilon/2$.

Portanto, $f_n \rightarrow f$.

23. Sejam V e W espaços normados e $T : V \rightarrow W$ linear. Então

- (a) T é contínua se, e somente se, for contínua na origem.
 (b) T é contínua na origem se, e somente se, $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$. E nesse caso $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

Solução

- (a) (\implies) Se é contínua, em particular é contínua na origem.

(\impliedby) Seja $v \in V$. Seja (v_n) uma sequência qualquer tal que $(v_n) \rightarrow v$. Pela continuidade na origem, $\|T(v_n - v)\| \rightarrow 0$. Logo, $T(v_n) \rightarrow T(v)$.

- (b) (\implies) Como T é contínua na origem, então pelo item anterior T é contínua.

$\|x\| \leq 1$ é compacto. Logo, como T é contínua, T possui um máximo nesse conjunto. Portanto, $\|T\| < \infty$.

Agora veja que vale $\|T(x)\| = \|T(\frac{x}{\|x\|})\| \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$

(\impliedby) Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que se $\|z\| < \delta$, então $\|T(z)\| < \epsilon$.

Mas por hipótese existe $\|T\| \leq M$ e $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

Então basta tomar $\|x\| < \epsilon/M = \delta$ e temos o resultado.