Gabarito da Lista 2

Exercício 1.

Quais das seguintes funções $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são transformações lineares?

a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$

b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

c) $T(x_1, x_2) = (0, x_2)$

d) $T(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2)$

e) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$

Solução.

Lembre-se que por definição, T é linear se for aditiva e homogênea:

- $$T(a + b) = T(a) + T(b), a, b \in V$$

- $$T(\lambda a) = \lambda T(a), \lambda \in K, a \in V$$

Assim, para este exercício considere $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Não é linear.
Contra exemplo: $\mathbf{x} = (x_1, x_2) := (0, 0) \Rightarrow T(\mathbf{x}) = (1, 0)$.
Mas $(0, 0) = 0 \cdot (0, 0) \Rightarrow T(0, 0) = T(0 \cdot (0, 0)) = 0 \cdot T(0, 0) = 0 \cdot (1, 0) = (0, 0) \neq (1, 0)$.
Logo, $T(0 \cdot \mathbf{x}) \neq 0 \cdot T(\mathbf{x})$ e portanto T não é homogênea.

b) (i) **Aditividade:**

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (x_2 + y_2, x_1 + y_1) \\ &= (x_2, x_1) + (y_2, y_1) \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(ii) **Homogeneidade:**

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot \mathbf{x}) &= T(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \\ &= (\lambda \cdot x_2, \lambda \cdot x_1) \\ &= \lambda \cdot (x_2, x_1) \\ &= \lambda \cdot T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Assim, como valem (i) e (ii) T é linear.

c) (i) **Aditividade:**

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (0, x_2 + y_2) \\ &= (0, x_2) + (0, y_2) \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(ii) **Homogeneidade:**

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot \mathbf{x}) &= T(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \\ &= (\lambda \cdot 0, \lambda \cdot x_2) \\ &= \lambda \cdot (0, x_2) \\ &= \lambda \cdot T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

d) Não é linear.
Contraexemplo: tome $\mathbf{x} = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Veja que $\mathbf{x} = \frac{\pi}{2} \cdot (1, 0)$, mas $T(\mathbf{x}) = (1, 0)$ enquanto $\frac{\pi}{2} \cdot T(1, 0) = \frac{\pi}{2} \cdot (\sin(1), 0) = (\frac{\pi}{2} \cdot \sin(1), 0) \neq (1, 0)$.

e) (i) **Aditividade:**

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= ((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), 0) \\ &= (x_1 - x_2, 0) + (y_1 - y_2, 0) \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(ii) **Homogeneidade:**

$$
\begin{aligned}
T(\lambda \cdot \mathbf{x}) &= T(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - x_2), 0) \\
&= \lambda \cdot (x_1 - x_2) \\
&= \lambda \cdot T(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Exercício 2.

Seja $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2)$. Determine a imagem de T e o kernel.

Solução.

- **Imagem:** Veja que $\text{Im}(T)$ pode ser gerada por $B := \{(1,1,0), (1,-1,1)\}$. Além disso, $(1,1,0)$ e $(1,-1,1)$ são LI, logo B é uma base para $\text{Im}(T)$.
  Portanto, $\text{Im}(T) = \text{span}\{(1,1,0), (1,-1,1)\}$.

  Outra forma de representar $\text{Im}(T)$ aqui é pelo plano

  $$\pi : x - y - 2z = 0$$

- **Núcleo:** Se $(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_2) = 0$, então $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Ou seja, se $\mathbf{x} \in \ker(T)$, então $\mathbf{x} = (0,0)$,
  Assim, $\ker(T) = \{(0,0)\}$.

Obs.: Veja que satisfazemos o teorema do núcleo e da imagem aqui pois

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = 2 + 0 = 2$$

Exercício 3.

Verifique que l^2 e o espaço das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $(C[0,1])$ são espaços vetoriais de dimensão infinita.

Solução.

- l^2: Veja que o conjunto $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \cdots\}$ (onde $\mathbf{e_i} = (0, \cdots, 1, \cdots)$ é o i-ésimo vetor canônico) gera l^2 e é linearmente independe. Logo, B é uma base para l^2 com infinitos elementos e portanto $\dim(l^2) = \infty$.

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$: Veja que o conjunto dos polinômios $P = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ é linearmente independente e possui infinitos elementos.
  Assim qualquer conjunto finito de funções não gera P. Logo, não pode haver base finita para $C[0,1]$.

Exercício 4.

Para $x, y \in \mathbb{Z}$, definamos $x \equiv y \pmod 2$ se $x - y$ for par (isto é, $x - y \in 2\mathbb{Z}$).
Então $\equiv \pmod 2$ é uma relação de equivalência e

$$\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

Solução.

Para provar que a relação é uma equivalência precisamos mostrar que é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.

- **Reflexiva:** $x - x = 0 \in 2 \cdot \mathbb{Z}$, logo $x \equiv x \bmod(2)$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.
- **Simétrica:** Se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $x \equiv y \bmod(2)$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 2k$.
  Assim
  $$x - y = 2k \Leftrightarrow y - x = -2k$$
  Como $-k \in \mathbb{Z}$, temos que $y \equiv x \bmod(2)$.
- **Transitiva:** Tome $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $x \equiv y \bmod(2)$ e $y \equiv z \bmod(2)$.
  Então existem $k_x, k_y \in \mathbb{Z}$ tais que $x - y = 2k_x$ e $y - z = 2k_y$.
  Assim,
  $$\begin{aligned} x - z &= x + (y - y) - z \\ &= (x - y) + (y - z) \\ &= 2k_x - 2k_y \\ &= 2(k_x + k_y) \\ &=: 2k \end{aligned}$$
  Como $k = k_x + k_y \in \mathbb{Z}$, vale que $x \equiv z \bmod(2)$.

Por fim, para mostrar que $\mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, vamos analisar os casos onde $x \not\equiv 0 \bmod(2)$. Neste caso, x é ímpar o que implica que $x - 1$ é par e portanto $x - 1 \equiv 0 \bmod(2) \Rightarrow x \equiv 1 \bmod(2)$. Portanto, para todo $x \in \mathbb{Z}$ vale que $x \equiv 0 \bmod(2)$ ou $x \equiv 1 \bmod(2)$. Desta forma, as classes de equivalência de $\mathbb{Z}_2$ são $\bar{0}$ e $\bar{1}$ e portanto

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

Exercício 5.

Seja $m \geq 2$ um número natural. Dizemos que m divide $x \in \mathbb{Z}$ se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot m = x$. Para $x, y \in \mathbb{Z}$, definimos

$$x \equiv y \pmod{m}.$$

se m dividir $x - y$. Verifique que $\equiv$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ e que $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv$ tem m elementos.

Solução.

- **Reflexiva:** Veja que qualquer inteiro divide 0 (basta tomar $k = 0$). Portanto, $x \equiv x \bmod(m)$ pois m divide $x - x = 0$.
- **Simétrica:** Se existe k inteiro tal que $x - y = k \cdot m$, então $y - x = (-k) \cdot m$. Como, $-k$ é inteiro, $y \equiv x \bmod(m)$.
- **Transitiva:** Se existem inteiros k_x, k_y tais que $x - y = k_x \cdot m$ e $y - z = k_y \cdot m$, então

$$\begin{aligned} x - z &= x + (y - y) - z \\ &= (x - y) + (y - z) \\ &= m \cdot (k_x + k_y) \end{aligned}$$

  mas $k := k_x + k_y \in \mathbb{Z}$, logo m divide $x - z$ e portanto $x \equiv x \bmod(m)$.

Veja que sempre que m dividir um inteiro, há m possíveis restos: $r = 1, 2, \cdots m - 1$. Logo, todo inteiro x se enquadra em exatamente uma das m categorias (classes de equivalência), denotadas por $\bar{r} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$.

Obs.: um teorema garante que para quaisquer inteiros x e m, existem (unicamente) inteiros q e r, com $0 \leq r < |m|$ tais que

$$x = m \cdot q + r$$

.

Exercício 6.

Seja $V = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \; ; \; f \text{ contínua}\}$ com produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Sejam $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; f_n(t) = \cos(n\pi t), \; n \geq 1$. Verifique se a família $\{f_n(\cdot) : n \geq 0\}$ é ortonormal.

Solução.

Precisamos checar se $f_n(t)$ é unitário para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e se $\langle f_n(t), f_m(t)\rangle = 0$.

- **Unidade:** Primeiro, note que $\langle f_0(t), f_0(t)\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 dt = 1$.
  Para $n > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle f_n(t), f_n(t)\rangle &= \int_{-1}^{1} \cos^2(n\pi t) dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1 + \cos(2\pi n t)}{2} dt \\
&= 1 + \cancel{\frac{\sin(2n\pi) - \sin(-2\pi n)}{4n\pi}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- **Ortogonalidade:** Primeiro, temos que

$$\begin{aligned}
\langle f_0(t), f_m(t)\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\pi t)}{\sqrt{2}} dt = \\
\text{(fazendo } u = n\pi t\text{)} \qquad &= \frac{1}{\sqrt{2}n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos(u) du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}n\pi} \cdot (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Para $m, n > 0$, vamos usar a identidade $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$:

$$\begin{aligned}
\langle f_n(t), f_m(t) \rangle &= \int_{-1}^{1} \cos(n\pi t) \cdot \cos(m\pi t) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{1} \cos(\pi t(m+n)) + \int_{-1}^{1} \cos(\pi t(m-n)) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi t(m+n)}^{\pi t(m+n)} \frac{\cos(u)}{\pi(m+n)} du + \int_{-\pi t(m-n)}^{\pi t(m-n)} \frac{\cos(v)}{\pi(m-n)} dv \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\pi(m+n)) - \sin(\pi(m+n))}{\pi(m+n)} - \frac{\sin(\pi(m-n)) - \sin(\pi(m-n))}{\pi(m-n)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{0-0}{\pi(m+n)} - \frac{0-0}{\pi(m-n)} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\{f_n(\cdot) : n \geq 0\}$ é uma família ortonormal.

Exercício 7.

Seja V um espaço vetorial, e $\mathcal{L}(V,V)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares $S : V \to V$. Fixe um vetor não nulo $u \in V$ e seja $\mathcal{L}_u = \{\, S \in \mathcal{L}(V,V) \ ; \ u \text{ é um autovetor de } S \,\}$. Mostre que $\mathcal{L}_u$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}(V,V)$.

Solução.

Precisamos se checar (i) se o operador nulo está em $\mathcal{L}_u$, (ii) se o conjunto é fechado por soma e (iii) se é fechado por multiplicação por escalar. Os últimos dois passos podem ser feitos juntos.

(1) Seja $0_V : V \to V$ definido por $0_V(v) = 0$. Então $0_V \in \mathcal{L}$ pois $0_V(u) = 0 = 0 \cdot u$.

(2) Sejam $\alpha \in K$; $x, y \in \mathcal{L}_u$, e λ_x, λ_y autovalores relativos a x e y respectivamente, temos

$$\begin{aligned}(x + \alpha y)(u) &= x(u) + \alpha y(u) \\ &= \lambda_x \cdot u + \alpha\lambda_y \cdot u \\ &= (\lambda_x + \alpha\lambda_y) \cdot u\end{aligned}$$

Logo, u é autovetor de $z := x + \alpha y$, com autovalor associado $\lambda_x + \alpha\lambda_y$ e portanto $z \in \mathcal{L}_u$.

Exercício 8.

Seja $T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 3v_2), v \in \mathbb{R}^2$. Calcule os autovalores de T .

Solução.

Relembrando o método para calcular autovalores/autovetores

Dada uma matriz A, queremos saber quais pares (λ, v) satisfazem $Av = \lambda v$, além do caso trivial $(v = 0)$.
Veja que se $Av = \lambda v$ então $Av - \lambda v = (A - \lambda I)v = 0, v \neq 0$. Isto é equivalente a $\det(A - \lambda I) = 0$ (sistema indeterminado).
Assim, basta calcular os valores para λ que satisfazem essa igualdade.

No nosso caso,

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ é o equivalente a A.
Assim, os valores de λ que satisfazem

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

são $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$.
Portanto, os autovalores de T são $\begin{cases} \lambda_1 = 2 + \sqrt{5} \\ \lambda_2 = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Exercício 9.

Verifique que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$$

para o produto interno $\langle x, y \rangle$.

Solução.

Basta expandir o termo $|x+y|^2$, lembrando que $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle x+y, x+y \rangle &= |x+y|^2 \\
&= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= |x|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + |y|^2
\end{aligned}$$

Isolando $\langle x, y \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$$

Exercício 10.

Seja X um espaço vetorial com produto interno e seja S um conjunto ortogonal de vetores não nulos (isto é, se $x, y \in S$ e $x \neq y$, então $\langle x, y \rangle = 0$). Demonstre que S é linearmente independente.

Solução.

Suponha por contradição que S não é LI, então existe um conjunto finito $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de elementos de S que não são LI. Portanto, é possível encontrar $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

com algum $\lambda_j \neq 0, j \in \{1, \cdots, n\}$.
Assim,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_j v_j = -\sum_{i \neq j} \lambda_i v_i\end{aligned}$$

Aplicando o produto interno nos dois lados temos

$$\begin{aligned}\lambda_j \langle v_j, v_j \rangle &= \langle -\sum_{i \neq j} \lambda_i v_i, v_j \rangle \\ &= -\sum_{i \neq j} \lambda_i \cancel{\langle v_i, v_j \rangle} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que $\langle v_j, v_j \rangle = 0$, contradição com $v_j \in S$ e S não possuir vetores nulos.

Exercício 11.

Seja$V = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \; ; \; f \text{ contínua}\}$ com produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Seja W o espaço vetorial gerado por $\{f_1, f_2, f_3\}$, sendo $f_i(t) = t^i$.
Obtenha uma base ortonormal para W.

Solução.

Vamos usar Gram-Schmidt: queremos achar b_1, b_2, b_3 ortogonais e unitários.

- Tome $b_1^* = t$, então $|b_i^*| = \int_{-1}^{1}(t \cdot t)dt = \frac{2}{3}$.
  Assim, podemos fazer $b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}t$
-
$$\begin{aligned} b_2^* &= t^2 - \text{proj}_{b_1} t^2 \\ &= t^2 - \frac{\langle b_1, t^2\rangle}{|b_1|} b_1 \\ &= t^2 - \left(\frac{3}{2}t\right) \frac{\cancel{\langle t, t^2\rangle}}{1} \\ &= t^2 \end{aligned}$$

  Como $|b_2^*| = \frac{2}{5}$, fazemos $b_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}t^2$.
-
$$\begin{aligned} b_3^* &= t^3 - \text{proj}_{b_1} t^3 - \text{proj}_{b_2} t^3 \\ &= t^3 - \left(\frac{3}{2}t\right) \frac{\langle t, t^3\rangle}{1} - \left(\frac{5}{2}t^2\right) \frac{\cancel{\langle t^2, t^3\rangle}}{1} \\ &= t^3 - \left(\frac{3}{2}t\right) \cdot \frac{5}{2} \\ &= t^3 - \frac{3}{5}t \end{aligned}$$

  Assim, fazemos $b_3 = \frac{b_3^*}{|b_3^*|} = \frac{t^3 - \frac{3}{5}t}{\sqrt{\frac{8}{175}}}$.

Exercício 12.

Seja $\{x_1, x_2, x_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. A transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem a propriedade de que

$$Ax_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

$$Ax_2 = x_2 + x_3,$$

$$Ax_3 = x_1 + x_3.$$

Escreva A^*x_1, A^*x_2, A^*x_3 em termos da base $\{x_1, x_2, x_3\}$, onde A^* é a transformação adjunta de A.

Solução.

Escreva

$$A^*x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3$$
$$A^*x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3$$
$$A^*x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3$$

Note que pelo fato dos vetores $x_i, x_j, j \neq i$ serem ortogonais temos $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Portanto

$$\langle Ax_i, x_j \rangle = \langle x_i, A^*x_j \rangle = \langle x_i, \sum_{k=1}^{3} \alpha_{jk}x_k \rangle = \alpha_{ji}$$

A equação acima nos dá um método para calcular cada termo α_{ji} e portanto a matriz adjunta A^*.
Assim,

$$\alpha_{11} = \langle Ax_1, x_1 \rangle = 1$$
$$\alpha_{12} = \langle Ax_2, x_1 \rangle = 0$$
$$\alpha_{13} = \langle Ax_3, x_1 \rangle = 1$$
$$\alpha_{21} = \langle Ax_1, x_2 \rangle = 2$$
$$\alpha_{12} = \langle Ax_2, x_2 \rangle = 1$$
$$\alpha_{13} = \langle Ax_3, x_2 \rangle = 0$$
$$\alpha_{31} = \langle Ax_1, x_3 \rangle = 3$$
$$\alpha_{32} = \langle Ax_2, x_3 \rangle = 1$$
$$\alpha_{33} = \langle Ax_3, x_3 \rangle = 1$$

Assim, temos

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs.: Note que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou seja, neste caso $A^* = A'$.

Exercício 13.

Se $e_1, e_2, \ldots, e_m$ é uma família ortogonal e $e_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$, então $e_1, e_2, \ldots, e_m$ é linearmente independente.

Solução.

Análogo ao exercício (10), onde $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$.

Exercício 14.

Seja E um espaço Euclidiano, e seja $M \subset E$. Defina $M^{\perp} := \{\, y \in E \;;\; \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } x \in M \,\}$, o subconjunto de todos os vetores ortogonais a todos os vetores de M. Mostre que $M^{\perp}$ é um subespaço vetorial de E.

Solução.

Precisamos mostrar que (i) $\bar{0} \in M^{\perp}$, (ii) se $x, y \in M^{\perp}$ então $x + y \in M^{\perp}$ e (iii) se $x \in M^{\perp}$ e $\lambda \in K$, então $\lambda x \in M^{\perp}$.

(i) Tome $m \in M$, $\langle m, \bar{0}\rangle = 0$

(ii) Tome $x, y \in M^{\perp}$ e defina $z = x + y$. Tome $m \in M^{\perp}$, temos

$$\langle m, x + y\rangle = \cancel{\langle m, x\rangle} + \cancel{\langle m, y\rangle} = 0 + 0 = 0$$

. Logo, $z = x + y \in M^{\perp}$

(iii) Tome $x \in M^{\perp}$, $\lambda \in K$ e $m \in M$. Assim,

$$\langle \lambda x, m\rangle = \lambda\langle x, m\rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

Logo, $\lambda x \in M^{\perp}$.

Por (i), (ii), e (iii) temos que $M^{\perp}$ é um subespaço vetorial de E.

Exercício 15.

Seja E um espaço Euclidiano e seja M um subespaço vetorial de E. Verifique que $E = M \oplus M^{\perp}$.

Solução.

Queremos mostrar (i) $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ e (ii) $M + M^{\perp} = E$

i) $M \cap M^{\perp} = \{0\}$: Tome $x \in M \cap M^{\perp}$. Neste caso, $\langle x, x \rangle = 0$. Pela definição de produto interno, $x = 0$. Portanto, $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

ii) $M + M^{\perp} = E$: Tome uma base ortonormal $B = \{m_1, \cdots, m_k\}$ para M e extenda esta base para $E : B' = \{m_1, \cdots, m_k, m_{k+1}, \cdots, m_n\}$. Tome $x \in E$, temos

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j m_j$$

Como $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, vale que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i m_i \in M$ e $\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j m_j \in M^{\perp}$, logo $x \in M + M^{\perp}$ o que implica que $E \subseteq M + M^{\perp}$.
Por outro lado, E é um espaço vetorial e portanto $M + M^{\perp} \subseteq E$.

Pela dupla inclusão, $E = M + M^{\perp}$.

Exercício 16.

Seja S um subconjunto de X, um espaço com produto interno. Mostre que $S^\perp = [S]^\perp$.

Solução.

Lembre-se que para mostrar que dois conjuntos A e B são iguais devemos mostrar que (i) $A \subseteq B$ e (ii) $B \subseteq A$.

(i) $S^\perp \subseteq [S]^\perp$: Tome $\bar{s} \in S^\perp$ e $s' \in [S]$. Então existem $\{\lambda_i\}_i$ e $\{s_i\}_i \in S, i = 1, \cdots, n$ tais que $s' = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$.
Note que $\langle \bar{s}, s_i \rangle = 0$, uma vez que $s_i \in S$ e $\bar{s} \in S^\perp$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.
Temos portanto que $\langle \bar{s}, s' \rangle = \langle \bar{s}, \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \rangle = 0$.
Como s' foi tomado arbitrariamente em $[S]$, $\langle \bar{s}, s' \rangle = 0$ vale para todo $s' \in [S]$ e portanto $\bar{s} \in [S]$.
Assim, $S^\perp \subseteq [S]^\perp$.

(ii) $[S]^\perp \subseteq S^\perp$: Note que $S^\perp \subseteq [S]^\perp$. Desta forma, se $\langle y, s' \rangle = 0$ para todo $s' \in [S]$, então $\langle y, s \rangle = 0$ para todo $s \in S$.
Em outras palavras, $y \in [S]^\perp \Rightarrow y \in S^\perp$. Portanto, $[S]^\perp \subseteq S^\perp$.

De (i) e (ii) concluímos que $S^\perp = [S]^\perp$.

Exercício 17.

Seja S um subconjunto de X, um espaço com produto interno. Seja $S^{\perp\perp} = (S^{\perp})^{\perp}$. Mostre que $[S] \subset S^{\perp\perp}$.
Se X tem dimensão finita, demonstre que $[S] = S^{\perp\perp}$.

Solução.

- Tome $s' \in [S]$, $s' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$, com $s_i \in S$. Tome $y \in S^{\perp}$, veja que $\langle s', y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle s_i, y\rangle = 0$.
Logo, $s' \in (S^{\perp})^{\perp} = S^{\perp\perp}$ e concluímos que $[S] \subset S^{\perp\perp}$.

- Com a hipótese de dimensão finita podemos usar o exercício (10) e escrever
$X = S^{\perp} \oplus (S^{\perp})^{\perp}$ e também $X = S \oplus S^{\perp}$. Assim,

$$\dim(X) = \dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(S^{\perp}) + \dim(S^{\perp\perp}) \Rightarrow \dim(S) = \dim(S^{\perp\perp})$$

De $S \subset [S]$ temos $\dim(S) \leq \dim([S])$.
De $[S] \subset S^{\perp\perp}$ temos $\dim([S]) \leq \dim(S^{\perp\perp}) = \dim(S)$.

Assim, por $\dim([S]) \leq \dim(S^{\perp\perp}) \leq \dim([S])$ concluímos que $\dim([S]) = \dim(S^{\perp\perp})$.
Como ambos $[S]$ e $S^{\perp\perp}$ são subespaços com mesma dimensão e $[S] \subset S^{\perp\perp}$ concluímos que $[S] = S^{\perp\perp}$.

Exercício 18.

Seja X um espaço com produto interno e seja $A : X \to X$ uma transformação linear sobrejetiva com a propriedade de que $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$ para todos $x, y \in X$. Demonstre que $A(U^\perp) = A(U)^\perp$ para todo subconjunto $U \subset X$.

Solução.

i) Vamos mostrar que $A(U^\perp) \subset A(U)^\perp$. Para isso, dado $x \in U^\perp$ e $y \in A(U)$ precisamos que $\langle Ax, y\rangle = 0$.
Seja $w \in U$ tal que $A(w) = y$, então

$$\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle &= \langle Ax, Aw\rangle \\ &= \langle x, w\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois $x \in U^\perp$ e $w \in U$.
Desta forma, todo elemento de $A(U^\perp)$ é ortogonal a todo elemento de $A(U)$, ou seja, $A(U^\perp) \subset A(U)^\perp$.

ii) Agora precisamos mostrar que $A(U)^\perp \subset A(U^\perp)$.
Para isso, basta mostrar que para todo $x \in A(U)^\perp$, existe $w \in U^\perp$ tal que $x = Aw$.
Como A é sobrejetiva, existe $w \in X$ tal que $Aw = x$. Tome $u \in U$, temos

$$\begin{aligned} \langle w, u\rangle &= \langle Aw, Au\rangle \\ &= \langle x, Au\rangle = 0 \end{aligned}$$

logo, $w \in U^\perp$ pois u foi tomado arbitrariamente em U.
Assim, $w \in U^\perp$ o que significa que $x = Aw \in A(U^\perp)$, como queríamos.

Exercício 19.

Seja M um subespaço vetorial do espaço Euclidiano E, invariante sob a transformação linear $T : E \to E$; isto é, $T(M) \subset M$. Mostre que $M^\perp$ é invariante sob a adjunta T^*.

Solução.

Tome $m' \in M^\perp$. Queremos mostrar que $T(m') \in M^\perp$. Para isso, tomando $m \in M$, note que

$$\langle m, T^*(m') \rangle = \langle T(m), m' \rangle = 0$$

pois $T(m) \in T(M) \subset M$ e $m' \in M^\perp$.
Logo, $T^*(m') \in M^\perp$ e se conclui que $T^*(M^\perp) \subset M^\perp$.

Exercício 20.

Seja E um espaço Euclidiano, e seja $A : E \to E$ uma transformação linear. Mostre que $\operatorname{ran}(A)^{\perp} = \ker(A^*)$, sendo $\operatorname{ran}(A) := \{Ax \ ; \ x \in E\}$ a imagem de A, e $\ker(A^*) := \{x \in E \ ; \ A^*x = 0\}$ o núcleo de A^*.

Solução.

- Primeiro vamos provar que $\operatorname{ran}(A)^{\perp} \subset \ker(A^*)$: Tome $x \in \operatorname{ran}(A)^{\perp}$, então para todo $y \in \operatorname{ran}(A)$, vale que $\langle x, y \rangle = 0$.
  Note que $z = A^*x \in E$, logo $y = Az \in \operatorname{ran}(A)$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, y \rangle = \langle x, Az \rangle \\ &= \langle A^*x, z \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle \\ \Rightarrow \quad & \langle A^*x, A^*x \rangle = 0 \end{aligned}$$

  Logo, $A^*x = 0$ e portanto $x \in \ker(A^*)$, o que implica em $\operatorname{ran}(A)^{\perp} \subset \ker(A^*)$.

- Agora é preciso mostrar que $\ker(A^*) \subset \operatorname{ran}(A)^{\perp}$: Tome $x \in \ker(A^*)$, então temos $A^*x = 0$. Tome $y \in \operatorname{ran}(A)$, e $z \in E$ tal que $Az = y$, note que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, z \rangle \\ &= \langle A^*x, z \rangle \\ &= \langle x, Az \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

  ou seja, para todo $y \in \operatorname{ran}(A)$ vale que $\langle x, y \rangle = 0$, o que implica em $x \in \operatorname{ran}(A)^{\perp}$.
  Portanto, $\ker(A^*) \subset \operatorname{ran}(A)^{\perp}$.