GABARITO DA LISTA 1

Definição Vamos deixar enumerados os axiomas de um espaço vetorial.

Espaço Vetorial

Vamos deixar enumerados os axiomas de um espaço vetorial.

Um espaço vetorial real é uma tripla $(V, +, \cdot)$ tal que V é um conjunto, $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, com as seguintes propriedades:

(I) **Comutatividade da adição:** $v + w = w + v$, para todo $v, w \in V$.

(II) **Elemento neutro da adição:** Existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$, $\forall v \in V$.

(III) **Inverso da adição:** Para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.

(IV) **Associatividade:** $v + (w + u) = (v + w) + u$.

(V) Para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, vale $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$.

(VI) $1 \cdot v = v$.

(VII) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.

(VIII) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Exercício 1.

Em um espaço vetorial, se λ for um escalar e v um vetor, $\lambda v = \overline{0} \iff \lambda = 0$ ou $v = \overline{0}$.

Solução.

$(\Rightarrow)$ Suponha $\lambda v = \overline{0}$:

1. $\lambda = 0$: ok!
2. $\lambda \neq 0$: como λ é um escalar não nulo, existe $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$. Como $1 = \lambda^{-1} \cdot \lambda$, por (V) temos

$$1 \cdot v = (\lambda^{-1} \cdot \lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda\overline{0} = \overline{0}$$

   Logo, $1 \cdot v = \overline{0}$. Por (VI), $v = 1 \cdot v = \overline{0}$, ok!

$(\Leftarrow)$ Suponha $v = \overline{0}$ ou $\lambda = 0$:

1. $v = \overline{0}$:

$$\begin{aligned} v &= \overline{0} \\ \Rightarrow \lambda v &= \lambda(v + v) \\ &= \lambda v + \lambda v \\ \Rightarrow \lambda v + (-\lambda v) &= \lambda v + [\lambda v + (-\lambda v)] \\ \Rightarrow \overline{0} &= \lambda v \end{aligned}$$

2. $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda &= 1 + (-1) \\ \Rightarrow \lambda v &= v + (-v) = \overline{0} \end{aligned}$$

Exercício 2.

Seja ℓ_0 o conjunto das sequências reais:

$$\ell_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R},\, n \geq 1\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Verifique que ℓ_0 é um espaço vetorial se definirmos

$$\begin{cases} (x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}, \\ \lambda \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

Solução.

Vamos verificar se cada uma das propriedades vale:

(I) A comutatividade da adição é uma propriedade dos reais

(II) O $\overline{0}$ de l_0 é $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$; pois $(x_n) + (a_n) = (x_n)$.

(III) $-(x_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, onde $a_n = -x_n$.

(IV) **Associatividade:** herda dos reais

(V) Para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_0$, tome $x_n \in \mathbb{R}$, então $\lambda(\mu \cdot x_n) = \lambda \cdot \mu(x_n) \in \mathbb{R}$, logo vale $\lambda(\mu \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty}) = \lambda\mu \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty}$

(VI) $1 \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ pois $1 \cdot x_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(VII) $\alpha \cdot ((x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \alpha \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} + \alpha \cdot (y_n)_{n=1}^{\infty}$ pois $\alpha \cdot (x_n + y_n) = \alpha \cdot x_n + \alpha \cdot y_n$

(VIII) $(\alpha + \beta) \cdot (x_n) = \alpha \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} + \beta \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty}$: distributividade dos reais

Exercício 3.

Seja ℓ_2 o espaço das sequências reais de quadrado somável,

$$\ell_2 = \left\{ x \in \ell_0 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}.$$

Verifique que ℓ_2 é um subespaço de ℓ_0.

Solução.

Como $(0_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, precisamos mostrar apenas que se $\mathbf{x}$ **e** $\mathbf{y} \in l^2$ e $a, b \in \mathbf{R}$, então $\mathbf{z} := a\mathbf{z} + b\mathbf{y} \in l^2$,ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in l_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = M_x < \infty \\ \text{e } \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 = M_y < \infty \end{aligned}$$

Defina $\mathbf{w} = \max\{x_n^2, y_n^2\}_n$, note que $\sum_{i=1}^{\infty} w_i = \sum_{i=1}^{\infty} \max\{x_i^2, y_i^2\} =: M_w \leq ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 = M_x + M_y < \infty$.
Observe também que

$$\begin{aligned} z_n^2 &= (ax_n + by_n)^2 = a^2x_n^2 + 2a \cdot b \cdot x_n \cdot y_n + b^2y_n^2 \\ &\leq a^2x_n^2 + 2a \cdot b \cdot w_n + b^2y_n^2 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(a^2x_i^2 + 2a \cdot b \cdot w_i + b^2y_i^2\right) \\ &= a^2M_x + 2a \cdot bM_w + b^2M_y < \infty \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{z} \in l^2$.

Exercício 4.

Seja $0 < p < \infty$ e

$$\ell_p = \left\{ x \in \ell_0 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Então ℓ_p é um subespaço de ℓ_0.

Solução.

1. $\sum_{i=1}^{\infty} 0^p = 0 \Rightarrow (0_n)_n \in l_p$

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in l^p$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |ax_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |a|^p |x_i|^p \\ &= |a|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \end{aligned}$$

   logo, $\mathbf{z} := a\mathbf{x} \in l^p$

3. Tome $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^p$, então $\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^p + |y_i|^p) < \infty$.
   Usarei o seguinte resultado: para todo $p \in (0, \infty)$, existe um $C_p \in \mathbb{R}$ tal que $|a+b|^p \leq C_p \cdot (|a|^p + |b|^p), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

   Assim, seja $\mathbf{z} := \mathbf{x} + \mathbf{y}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \\ &\leq C_p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^p + |y_i|^p) \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

   Logo, $\mathbf{z} \in l^p$.

Obs:

$$
\begin{aligned}
& |x+y| \leq |x| + |y| \leq 2\max\{|x|, |y|\} \\
\Rightarrow \quad & |x+y|^p \leq (2\max\{|x|, |y|\})^p \\
& \qquad\quad = 2^p(\max\{|x|, |y|\})^p \\
& \qquad\quad \leq 2^p(|x|^p + |y|^p)
\end{aligned}
$$

Obs: A redistribuição dos somatórios acima só é garantida porque a última série converge absolutamente.

Exercício 5.

Qual a dimensão de $\mathbb{C}$ como espaço vetorial real?

Solução.

Por definição, $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$. Vamos mostrar que $B = \{1, i\}$ é uma base para $\mathbb{C}$ e portante concluir que $\dim(\mathbb{C}) = 2$. Para isto, é preciso mostrar que todo número complexo é gerado por B e os elementos de B são linearmente independentes (além de $B \subset \mathbb{C}$).

1. Por definição, para todo $x \in \mathbb{C}$, existem $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tais que $x = a_x + b_x \cdot i$.

2. $B = \{1, i\}$ é LI: Suponha que $a + bi = 0$ mas $b \neq 0$, então $a \notin \mathbb{R}$, contradição com $a \in \mathbb{R}$. Analogamente, suponha $a + bi = 0$ e $a \neq 0$, então $a = -bi$, absurdo pois $a \in \mathbb{R}$ e $-bi \notin \mathbb{R}$. Logo, $a + bi = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$, e portanto B é LI.

Exercício 6.

Seja um conjunto K munido de uma adição $+ : K \times K \to K$ e uma multiplicação $\cdot : K \times K \to K$. Notação: $a + b := +(a, b)$ e $ab = a \cdot b := \cdot(a, b)$. Dizemos que K é um corpo (comutativo) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

α) $a + b = b + a$, para todos $a, b \in K$ (comutatividade da adição);

β) $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todos $a, b, c \in K$ (associatividade da adição);

γ) Existe $0 \in K$ tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in K$ (elemento neutro da adição);

δ) Para todo $a \in K$, existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$ (elemento inverso aditivo);

ε) $ab = ba$, para todos $a, b \in K$ (comutatividade da multiplicação);

ζ) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatividade do produto);

η) Existe $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in K$ (elemento neutro da multiplicação);

ϑ) Para todo $a \in K$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ (elemento inverso da multiplicação);

ι) $a(b + c) = ab + ac$ (distributividade da multiplicação com respeito à adição);

κ) $1 \neq 0$.

Apresente três exemplos de corpos infinitos.

Demonstre que:

(a) Os elementos neutros da adição e da multiplicação do corpo K são únicos.

(b) Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

(c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ e que $a \cdot 0 = 0$.

(d) $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ com $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ e $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ é um corpo com dois elementos.

(e) Se $a + b = a$ para algum $a \in K$, então $b = 0$.

(f) Se $a + b = 0$, então $b = -a$.

(g) Qual o valor de $-(-a)$?

Solução.

Alguns exemplos de corpos infinitos são $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}$.
A seguir, indicarei qual axioma está sendo usado em cada passo do item (a), e para os demais deixarei implícito.

(a) Tome $a, b, c \in K$ e suponha que $a + b = a + c$. Então

$$\begin{array}{rl} & a + b = a + c \Rightarrow -a + (a + b) = -a + (a + c) \\ \text{por } \beta) & (-a + a) + b = (-a + a) + c) \\ \text{por } \alpha) & (a + (-a)) + b = (a + (-a)) + c \\ \text{por } \delta) & 0 + b = 0 + c \\ \text{por } \gamma) & b = c \end{array}$$

Analogamente, tome $b \in K$ e suponha que $a \cdot b = a, \forall a \in K$. Veja que $b \neq 0$, caso contrário $1 \cdot b = 0 = 1$, contradição com κ).
Portanto, para $a \neq 0$ temos

$$\begin{array}{rl} & a \cdot b = a \Rightarrow a \cdot (b \cdot b^{-1}) = a \cdot b^{-1} \\ \text{por } \theta) & a \cdot 1 = a \cdot b^{-1} \\ \Rightarrow & (a^{-1} \cdot a) = (a^{-1} \cdot a) \cdot b^{-1} \\ & \Rightarrow 1 = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1} \\ & b \cdot 1 = b = b^{-1} \cdot b = 1 \end{array}$$

(b) A negação de $a = 0$ ou $b = 0$ é $a, b \neq 0$, portanto, suponha por contradição $a, b \neq 0$.

$$\begin{aligned} & a, b \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \text{ e } b^{-1} \\ & \Rightarrow \exists c := b^{-1} \cdot a^{-1} \\ & a \cdot b = 0 \Rightarrow c \cdot (a \cdot b) = (b^{-1} a^{-1}) \cdot (ab) \\ & \quad = b^{-1} \cdot 1 \cdot b = 1 = c \cdot 0 = 0 \\ & \Rightarrow 1 = 0 \end{aligned}$$

contradição com κ.

(c) Primeiro vamos provar que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b + a \cdot b &= ((-a) + a) \cdot b \\ &= 0 \cdot b = 0 = a \cdot b + (-a) \cdot b \end{aligned}$$

Pelo item (a), o elemento neutro da adição é único, logo $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Assim,

$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b) &= -(a\cdot(-b))\\ &= -((-b)\cdot a) = -(-b\cdot a) = -(-a\cdot b)\\ &= a\cdot b\end{aligned}$$

onde a última igualdade será provada no item (g).
Para mostrar que $a\cdot 0 = 0$, note que $a\cdot 0 + a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = a\cdot 0$. Assim

$$\begin{aligned}(-(a\cdot 0) + a\cdot 0) + a\cdot 0 &= -(a\cdot 0) + a\cdot 0\\ &\Rightarrow a\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(d) Precisamos mostrar que valem todas as propriedades de corpo para $\mathbb{Z}_2$ se estabelecermos $\overline{1}$ como o elemento neutro da multiplicação e $\overline{0}$ como o elemento neutro da adição. Aqui, vou assumir que $\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$, $\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$, $\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$ e $\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$.

α) $\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}+\overline{1}$.

β) Satisfaz caso a caso para todas as possíveis configurações a, b, c atribuindo a eles $\overline{0}$ ou $\overline{1}$.

γ) $\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$ e $\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$, logo, $\overline{0}$ é neutro na adição

δ) $\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}\Rightarrow -\overline{1}=\overline{1}$.
$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}\Rightarrow -\overline{0}=\overline{0}$.

ε) $\overline{0}\cdot\overline{1}=(\overline{1}+\overline{1})\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{1}+\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}=\overline{1}\cdot\overline{0}$

ζ) Todos os possíveis casos são satisfeitos.

η) $\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$ e $\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{0}$, logo, $\overline{1}$ satisfaz elemento neutro da multiplicação

ϑ) Se $a\in K$ e $a\neq\overline{0}$, então $a=\overline{1}$. Assim, $a\cdot\overline{1}=a=\overline{1}\Rightarrow a^{-1}=\overline{1}$.

ι) Satisfaz caso a caso para todas as possíveis configurações a, b, c atribuindo a eles $\overline{0}$ ou $\overline{1}$.

κ) $\overline{1}\neq\overline{0}$ por definição.

(e) Se $a+b=a$, então $-a+(a+b)=((-a)+a)+b=-a+a=0$.
Mas $(-a)+a=a+(-a)=0$, logo

$$0=((-a)+a)+b=0+b=b+0=b$$

Logo, $b=0$.

(f) Se $a + b = 0$, então $-a + (a + b) = ((-a) + a) + b = -a + 0 = -a$.
Mas $(-a) + a = a + (-a) = 0$, logo

$$-a = ((-a) + a) + b = 0 + b = b + 0 = b$$

Logo, $b = -a$.

(g) Por α) e δ) $-a + a = 0$. Pelo item (f)

$$-a + a = 0 \Rightarrow a = -(-a)$$

Exercício 7.

Verifique que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.

Solução.

Comutatividade, associatividade tanto da multiplicação quanto da adição são herdados dos reais. Denote por $(a, b) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ referente ao elemento $x = a + b\sqrt{3}$. O elemento neutro da adição é $\overline{0} = (0, 0)$ e o elemento neutro da multiplicação é $\overline{1} = (1, 0)$.
Seja $x = (a, b)$, então o inverso aditivo é dado por $-x = (-a, -b)$, uma vez que se $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Q}$.

Vamos agora checar os axiomas restantes

- **Inverso multiplicativo:** dado $x = (a, b) = a + b\sqrt{3}$ queremos saber se sempre existem $a', b' \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\begin{aligned} x \cdot x' &= (a + b\sqrt{3}) \cdot (a' + b'\sqrt{3}) = 1 \\ &= aa' + ab'\sqrt{3} + a'b\sqrt{3} + 3bb' \\ &= aa' + \sqrt{3}(ab' + a'b) + 3bb' \end{aligned}$$

  Como $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ é preciso que $ab' + a'b = 0$. Resolvendo para a', b' encontramos

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a}{a^2 - 3b^2} \\ b' &= \frac{-b}{a^2 - 3b^2} \end{aligned}$$

  Obs: O denominador nunca é nulo (por quê).

- A distributividade da multiplicação com respeito à adição segue dos reais

- $\overline{1} = (1, 0) \neq (0, 0) = \overline{0}$.

Exercício 8.

Sejam V e W espaços vetoriais. Então o produto cartesiano $V \times W = \{(x, y) : x \in V,\ y \in W\}$ também é um espaço vetorial se definirmos

$$\begin{cases} (v, w) + (v', w') = (v + v',\, w + w') \quad \text{e} \\ \quad \lambda(v, w) = (\lambda v,\, \lambda w). \end{cases}$$

Verifique essa afirmação e calcule a dimensão de $V \times W$ para V e W de dimensão finita.

Solução.

Vamos checar os axiomas: veja que se $v, v' \in V, w, w' \in W$ segue que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos $v + v' \in V,\ w + w' \in W,\ \lambda v \in V$. Além disso, vale associatividade, comutatividade e distributividade:

$$\begin{gathered} v + v' = v' + v \\ v + (v' + v'') = (v + v') + v'' \\ \lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v' \end{gathered}$$

Assim, seja $\mathbf{z} = (v, w) \in Z := V \times W$, vale

(I) $\mathbf{z} + \mathbf{z}' = (v + v', w + w') = (v' + v, w' + w) = \mathbf{z}' + \mathbf{z}$

(II) $0_Z = (0_V, 0_W)$

(III) $-\mathbf{z} = (-v, -w)$

(IV)

$$\begin{aligned} \mathbf{z} + (\mathbf{z}' + \mathbf{z}'') &= (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) \\ &= ((v + v') + v'', (w + w') + w'') \\ &= (\mathbf{z} + \mathbf{z}') + \mathbf{z}'' \end{aligned}$$

(V) Para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos $\lambda(\mu \cdot \mathbf{z}) = (\lambda(\mu \cdot v), \lambda(\mu \cdot w)) = ((\lambda \cdot \mu)v, (\lambda \cdot \mu)w) = (\lambda \cdot \mu)\mathbf{z}$

(VI) $1 \cdot \mathbf{z} = (1 \cdot v, 1 \cdot w) = (v, w) = \mathbf{z}$

(VII) $a(\mathbf{z} + \mathbf{z}') = (a(v + v'), a(w + w')) = (av + av', aw + aw') = a\mathbf{z} + a\mathbf{z}'$

(VIII) $(a + b) \cdot \mathbf{z} = ((a + b)v, (a + b)w) = (av + bv, aw + bw) = a \cdot \mathbf{z} + b \cdot \mathbf{z}$

Por fim, sejam $m = \dim V$ e $n = \dim W$, veja que $B = \{(v_1, 0), \cdots, (v_m, 0), (0, w_1), \cdots, (0, w_n)\}$ é uma base para $V \times W$.
Assim, $\dim(V \times W) + \dim V + \dim W = m + n$.

Exercício 9.

Sejam U_1 e U_2 dois subespaços do espaço vetorial V. Suponha que $U_1 \cup U_2$ é um subespaço. Então $U_1 \subset U_2$ ou $U_2 \subset U_1$.

Solução.

$U := U_1 \cup U_2$. Suponha que $U_1 \not\subset U_2 \Rightarrow \exists u_1 \in U_1 | u_1 \notin U_2$.
Tome $u_2 \in U_2$, $u = u_1 + u_2 \in U$. No entanto $u_1 \notin U_2$ e portanto u não pode estar em U_2, o que implica em $u = u_1 + u_2 \in U_1$.
Assim, $u_2 = u + (-u_1) \in U_1$ e portanto $U_2 \subset U_1$.

Exercício 10.

Seja $f \in V' \setminus \{0\}$. Demonstre que $f(V) = \mathbb{R}$.

Solução.

Como $f \in V' \setminus \{0\}$, existe $v^* \in V$ tal que $f(v^*) \neq 0$.
Defina $\lambda = f(v^*)$. Dado $x \in \mathbb{R}$, tome $\alpha_x = \frac{x}{\lambda}$, então

$$\begin{aligned} f(\alpha_x \cdot v^*) &= \alpha_x \cdot f(v^*) \\ &= \alpha_x \cdot \lambda \\ &= \left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot \lambda \\ &= x \end{aligned}$$

logo, $x \in Im(f)$.
Como x foi tomado arbitrariamente em $\mathbb{R}$, vale que $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exercício 11.

Encontre um espaço vetorial V e uma transformação linear injetiva $T : V \to V$ que não é invertível.

Solução.

Veja que se T é injetiva e V tem dimensão finita, então $\dim(\ker(T)) = 0 \Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(V)$, ou seja, T é sobrejetiva.
Portanto, qualquer transformação linear injetiva em espaços finitos será também sobrejetiva e portanto invertível. Por isso, devemos procurar nos espaços de dimensões infinitas por transformações injetivas, mas não sobrejetivas.
O exemplo mais comum é tomar $T : l_0 \to l_0$ tal que $T(\mathbf{x}) = (0, x_1, x_2, \cdots)$, onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots)$.
Veja que T é injetiva mas não é sobrejetiva: $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, \cdots) \in l_0$ por exemplo não é imagem de nenhum $\mathbf{y} \in l_0$.

Provas abaixo:

- **Linearidade:**

$$\begin{aligned} T(a\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= (0, ax_1 + y_1, ax_2 + y_2, \cdots) \\ &= a(0, x_1, x_2, \cdots) + (0, y_1, y_2, \cdots) \\ &= aT(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

- **Injetividade:** Seja $\mathbf{x} \in l_0$ tal que $T(\mathbf{x}) = (0, 0, \cdots)$, então $x_{i-1} = 0, i = 2, 3, \cdots \Rightarrow \mathbf{x} = \overline{0}$. Assim, $\ker(T) = \{\overline{0}\}$ e portanto T é injetiva.

Exercício 12.

Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Mostre que um subconjunto W de V é um subespaço se e somente se existe uma transformação linear $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\ker T = W.$$

Solução.

Vamos começar pela volta que é mais direta.

($\Leftarrow$) **Seja** $T : V \to \mathbb{R}^n$ **tal que** $\ker T = W$**.**

- $T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0_n$. Logo $0_n \in \ker T = W$.
- Tome $w, w' \in \ker T$, veja que $T(w + w') = T(w) + T(w') = 0_n + 0_n = 0_n$. Logo, $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$.
- Tome $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in W$. Temos $T(\alpha \cdot w) = \alpha \cdot T(w) = \alpha \cdot 0_n = 0_n \Rightarrow \alpha \cdot w \in \ker T = W$.

Pelos 3 itens acima, W é subespaço de V, como queríamos mostrar.

($\Rightarrow$) **Seja** W **subespaço de** V**.**
A ideia é tomar uma transformação linear que anule os vetores da base canônica que geram W. Vamos entender melhor como isso é feito: Seja $m \leq n$ a dimensão de W que por hipótese é finita, construa a seguinte base para V:

$$B = \{w_1, \cdots, w_m, v_1, \cdots, v_p\}$$

onde $p = n - m \geq 0$.
Assim, para qualquer $v \in V$, podemos escrever

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_j$$

Por fim, defina $T : V \to \mathbb{R}^n$ por $T(w_i) = 0_n$ e $T(v_i) = e_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Além disso, defina

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(w_i) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j T(v_j) = (\beta_1, \cdots, \beta_p, 0, 0, \cdots, 0), \ \forall v \in V$$

.
Vamos provar que T é linear e que $\ker T = W$:

- **Linearidade:** Sejam $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Escreva

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,u} w_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j,u} v_j$$
$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,v} w_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j,v} v_j$$

  Temos

$$\begin{aligned} T(\lambda u + v) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda(\alpha_{i,u} + \alpha_{i,v}) T(w_i) + \sum_{j=1}^{p} \lambda(\beta_{j,u} + \beta_{j,v}) T(v_j) \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,u} T(w_i) + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j,u} T(v_j) \right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,v} T(w_i) + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j,v} T(v_j) \right) \\ &= \lambda T(u) + T(v) \end{aligned}$$

- $\ker T = W$: Veja que se $T(v) = 0_n$, então $\beta_1, \cdots, \beta_p = 0$, o que significa que v é uma combinação linear de W, logo, $v \in W$ pois W é subespaço.
  Portanto, $\ker T \subseteq W$.
  Além disso, para todo $w \in W$, $T(w) = 0_n \Rightarrow w \in \ker T$ e portanto $W \subseteq \ker T$.

  Assim, conclui-se que $\ker T = W$.