

# Analise II

## Lista 2

Professor: Paulo Klinger

Monitor: André Lelis

---

1. Para  $x, y$  inteiros, definamos  $x \equiv y \pmod{2}$  se  $x - y$  for par (i.e.  $x - y \in 2\mathbb{Z}$ ). Então  $\equiv \pmod{2}$  é uma relação de equivalência e

$$\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/\equiv = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

**Solução** Para mostrar que é uma relação de equivalência, nós temos que mostrar que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $x \equiv x$ , ou seja, a relação é reflexiva.
2.  $x \equiv y$ , então  $y \equiv x$ , ou seja, a relação é simétrica.
3. Se  $x \equiv y$  e  $y \equiv z$ , então  $x \equiv z$ , ou seja, a relação é transitiva.

No caso, nossa relação  $\equiv$  aqui é  $x \equiv y$  se  $x - y \in 2\mathbb{Z} = \{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ . Isso é o mesmo que dizer que 2 divide  $x - y$ .

Então vamos provar que satisfaz essas 3 propriedades:

1. Seja  $x \in \mathbb{Z}$ , então  $x - x = 0 = 2 \cdot 0$ . Logo,  $x - x \in 2\mathbb{Z}$ . Portanto,  $x \equiv x$ .
2. Se  $x \equiv y$ , então  $x - y = 2w$ , logo  $y - x = 2(-w) \in 2\mathbb{Z}$ . Portanto,  $y \equiv x$ .
3. Seja  $x \equiv y$  e  $y \equiv z$ . Temos que  $x - z = x - y + (y - z) = (x - y) + (y - z)$ . Como  $x \equiv y$  e  $y \equiv z$ , então  $x - y = 2w$  para algum  $w \in \mathbb{Z}$  e  $y - z = 2w'$  para algum  $w' \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $x - z = 2w + 2w' = 2(w + w') \in 2\mathbb{Z}$ . Portanto,  $x \equiv z$ .

Agora precisamos provar que só existe 2 classes de equivalência:  $\bar{0}$  e  $\bar{1}$ . O que temos que mostrar é que se  $x \in \mathbb{Z}$ , então  $x \equiv 0$  ou  $x \equiv 1$ .

Observe que se  $x \in 2\mathbb{Z}$ , então  $x - 0 \in 2\mathbb{Z}$ , logo  $x \equiv 0$ .

Se  $x \in \mathbb{Z}$ , então  $x = 2k + 1$ , pois a divisão por 2 deixa resto 0 ou 1. Logo  $x - 1 = 2k$ , portanto  $x \equiv 1$ .

2. Seja  $m \geq 2$  um natural. Dizemos que  $m$  divide  $x \in \mathbb{Z}$  se existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $k \cdot m = x$ . Para  $x, y$  inteiros definimos

$$x \equiv y \pmod{m}$$

se  $m$  dividir  $x - y$ . Verifique que  $\equiv$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{Z}$  e que  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/\equiv$  tem  $m$  elementos.

**Solução** Para provar que  $\equiv$  é uma relação de equivalência, a mesma demonstração do item anterior funcionar para  $m$  no lugar de 2.

Para provar que  $m$  classes de equivalência, eu vou provar que existe a divisão euclidiana. Isto é, dado  $x \in \mathbb{Z}$  e  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ , então existem  $q \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < m$ ,  $r \in \mathbb{N}$  tais que  $x = mq + r$ .

Demonstração: Por indução: se  $x = 0$ , então basta tomar que  $q = 0$  e  $r = 0$ .

Suponhamos que seja verdade para  $x = n$ , vamos provar para  $x = n + 1$ .

Por hipótese,  $n = qm + r$ , com  $r < m$ . Então  $r = m - 1$  ou  $r < m - 1$ .

Se  $r = m - 1$ , então  $n = qm + m - 1$ . Logo,  $n + 1 = (q + 1)m$ . E tá provado.

Se  $r < m - 1$ , então  $r + 1 < m$ . Como  $n = qm + r$ , então  $n + 1 = qm + (r + 1)$ , como  $r + 1 < m$ , então chame isso de  $r'$  e temos o resultado.

Observe que a demonstração acima também mostra que cada resto  $r$  entre 0 e  $m - 1$  é atingido. Como existem  $m$  restos, segue que tem  $m$  classes, pois se  $n$  deixa resto  $r$ , então  $n \equiv r \pmod{m}$ , pois  $n = qm + r$ , logo  $n - r = mq$ .

3. Seja  $V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}\}$  com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Sejam  $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $f_n(t) = \cos(n\pi t)$ ,  $n \geq 1$ . Verifique se a família  $\{f_n(\cdot) \mid n \geq 0\}$  é ortonormal.

**Solução** Temos que mostrar duas coisas nesse exercício:

1.  $\langle f_n, f_n \rangle = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$
2.  $\langle f_n, f_m \rangle = 0$  quando  $n \neq m$ .

Vamos mostrar:

$$1. \langle f_0, f_0 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

$$\langle f_n, f_n \rangle = \int_{-1}^1 \cos(n\pi t) \cos(n\pi t) = \int_{-1}^1 \cos^2(n\pi t) dt$$

Vamos usar que  $\cos^2(a) = \frac{1+\cos 2a}{2}$  (Isso foi dado quando caiu em prova).

$$\text{Portanto, } \int_{-1}^1 \cos^2(n\pi t) dt = \int_{-1}^1 \frac{1+\cos(2n\pi t)}{2} dt = 1 + \frac{\sin(2n\pi t)}{4n\pi} = 1.$$

$$2. \langle f_n, f_m \rangle = \int_{-1}^1 \cos(n\pi t) \cos(m\pi t) = \int_{-1}^1 \frac{\cos((n+m)\pi t) + \cos((n-m)\pi t)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(n+m)\pi t}{(n+m)\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n-m)\pi t}{(n-m)\pi} = 0.$$

$$\text{Também temos } \int_{-1}^1 f_0 f_m = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi m t) dt = 0.$$

4. Seja  $V$  um espaço vetorial, e  $L(V, V)$  o espaço vetorial de todas as transformações lineares  $S : V \rightarrow V$ . Fixe um vetor não nulo  $u \in V$  e seja

$$L_u = \{S \in L(V, V) \mid u \text{ é um autovetor de } S\}.$$

Mostre que  $L_u$  é um subespaço linear de  $L(V, V)$ .

**Solução** Sejam  $x, y \in L_u$ , e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Como  $x, y \in L_u$ , então  $x(u) = \mu u$  e  $y(u) = \alpha u$ . Então  $(x + \lambda y)(u) = x(u) + \lambda y(u) = \mu u + \lambda \alpha u = (\mu + \lambda \alpha)u$ . Logo  $x + \lambda y \in L_u$ .

5. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 3v_2).$$

Calcule os autovalores de  $T$ .

**Solução** Relembre:  $z$  é um auto-vetor e  $\lambda$  um auto-valor correspondendo a  $v$  se e somente se  $T(z) = \lambda z$  e  $z \neq 0$ .

Logo,  $(T - \lambda Id)z = 0$ . Observe que  $z = 0$  sempre satisfaz, mas queremos justamente  $z \neq 0$ , ou seja, o "sistema"  $T - \lambda Id$  tem mais de uma solução. Isto é equivalente ao sistema ser indeterminado.

Como estamos em dimensão finita e  $T$  pode ser representada por uma matriz quadrada, isso é equivalente ao determinante ser igual a 0.

Vamos primeiro então montar a matriz que representa a transformação  $T$

$T(1, 0) = (1, 2)$  e  $T(0, 1) = (2, 3)$ . Portanto, na forma matricial temos

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Portanto, temos que calcular  $\det(T - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$

Então temos  $(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ .  
Portanto,  $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$ .

Outro jeito de pensar essa questão é usar as definições mesmo:

Teríamos que satisfazer  $T(v_1, v_2) = \lambda(v_1, v_2)$ . Então,  $v_1 + 2v_2 = \lambda v_1$  e  $2v_1 + 3v_2 = \lambda v_2$ .

E isso é o sistema

$$(1 - \lambda)v_1 + 2v_2 = 0$$

$$2v_1 + 3\lambda v_2 = 0$$

Agora, esse sistema vai ser indefinido, se o determinante for zero, e segue as mesmas contas de antes.

6. Verifique que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$$

para o produto interno  $\langle x, y \rangle$

**Solução**  $\langle x, x \rangle = |x|^2$  a norma induzida pelo produto interno.

Normalmente, quando temos um problema como esse, a estratégia é sair do lado complicado para chegar no lado fácil. Ou seja, vamos tentar sair do lado direito para o lado esquerdo.

Do produto interno,  $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$ . Vamos aplicar as propriedades do produto interno.

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Isolando  $\langle x, y \rangle$  temos o resultado.

7. Seja  $X$  um espaço vetorial com produto interno e seja  $S$  um conjunto ortogonal de vetores não nulos (isto é, se  $x, y \in S$ , então  $\langle x, y \rangle = 0$ ). Mostre que  $S$  é um conjunto linearmente independente.

**Solução** Suponhamos que  $S$  não é linearmente independente. Então existem  $x, x_1, \dots, x_n \in S$  tais que  $x = \sum \lambda_i x_i$ , com  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i$ .

Por outro lado, sabemos que  $\langle x, x \rangle > 0$ .

Usando a expressão anterior para  $x$ , temos  $\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \rangle = \sum \lambda_i \langle x, x_i \rangle$ .

Mas, por hipótese,  $\langle x, x_i \rangle = 0$ , já que pertencem a  $S$ . Segue, então que

$$\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \rangle = \sum \lambda_i \langle x, x_i \rangle = 0 = \langle x, x \rangle$$

8. Seja  $V = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}\}$  com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt.$$

Seja  $W$  o espaço vetorial gerado por  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , onde  $f_i(t) = t^i$ . Obtenha uma base ortonormal para  $W$ .

**Solução** Se vamos construir uma base ortonormal, então vamos usar *Gram – Schmidt*.

Sabemos que  $\{t, t^2, t^3\}$  formam uma base. Vamos construir uma base  $\{b_1, b_2, b_3\}$  ortogonal.

Seguindo Gram-Schmidt que está na notas de aula: Então vamos primeiro normalizar  $t$ , isto é, vamos ver como fazer " $t$ " participar da nossa base ortonormal.  $\|t\|^2 = \langle t, t \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ . Logo, o primeiro elemento da nossa base vai ser  $\frac{\sqrt{6}}{2}t$

Agora por Gram-Schmidt, o segundo elemento vai ser  $b_2 = t^2 + \lambda b_1$  com  $\lambda = -\frac{\langle b_1, t^2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$ .

$$\langle b_1, t^2 \rangle = \int_{-1}^1 t \cdot t^2 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

$$\|t^2\|^2 = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}. \text{ Então } \frac{t^2}{\|t^2\|} = \sqrt{\frac{5}{2}}t^2 = \frac{\sqrt{10}}{2}t^2$$

Terceiro membro da base é  $b_3 = t^3 + \mu b_2 + \alpha b_1$  com  $\mu = -\frac{\langle b_2, t^3 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}$ ,  $\alpha = -\frac{\langle b_1, t^3 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$

$$\text{Logo, } \langle b_2, t^3 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 t^3 dt = \int_{-1}^1 t^5 dt = \frac{t^6}{6} \Big|_{-1}^1 = 0. \text{ Portanto, } \mu = 0.$$

$$\text{Temos também } \langle b_1, t^3 \rangle = \int_{-1}^1 t \cdot t^3 dt = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}, \text{ Mas } \langle b_1, b_1 \rangle = \frac{2}{3}. \text{ Logo, } \alpha = \frac{3}{5}.$$

Agora precisamos calcular  $\|b_3\|^2 = \int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx = \frac{8}{175}$

Portanto, uma base ortonormal seria  $B = \{\frac{t\sqrt{6}}{2}, t^2\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{x^3 - \frac{3}{5}x\sqrt{1400}}{8}\}$

9. Seja  $\{x_1, x_2, x_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . A transformação linear  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem a propriedade de que

$$Ax_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

$$Ax_2 = x_2 + x_3,$$

$$Ax_3 = x_1 + x_3.$$

Escreva  $A^*x_1, A^*x_2, A^*x_3$  em termos da base  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , onde  $A^*$  é a transformação adjunta de  $A$ .

### Solução

Primeiro relembre que  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$  por definição.

Além disso, note que  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$  pelo fato da base  $\{x_1, x_2, x_3\}$  ser ortonormal.

Queremos escrever  $A^*x_1 = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3$ .

$$A^*x_2 = \omega_1x_1 + \omega_2x_2 + \omega_3x_3.$$

$$A^*x_3 = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3.$$

Nosso objetivo é achar os  $\lambda, \omega$  e  $\alpha$ .

Note que  $\langle Ax_i, x_j \rangle = \langle x_i, A^*x_j \rangle = \langle x_i, \sum \lambda_j x_j \rangle = \lambda_i$ . Ou seja, se eu quiser descobrir o coeficiente de  $x_i$  que aparece em  $A^*x_j$ , eu tenho que fazer  $\langle Ax_i, x_j \rangle$ .

Portanto,  $\langle Ax_1, x_1 \rangle = 1, \langle Ax_1, x_2 \rangle = 2, \langle Ax_1, x_3 \rangle = 3$ .

$$\langle Ax_2, x_1 \rangle = 0, \langle Ax_2, x_2 \rangle = 1, \langle Ax_2, x_3 \rangle = 1.$$

$$\text{E } \langle Ax_3, x_1 \rangle = 1, \langle Ax_3, x_2 \rangle = 0 \text{ e } \langle Ax_3, x_3 \rangle = 1.$$

$$\langle Ax_i, x_i \rangle = \langle x_i, A^*x_i \rangle.$$

Concluimos,  $A^*x_1 = x_1 + x_3, A^*x_2 = 2x_1 + x_3$  e  $A^*x_3 = 3x_1 + x_2 + x_3$ .

Outra solução para essa questão é montar a matriz  $A$  é transpor, pois  $A^* = A^t$ .

10. Se  $e_1, e_2, \dots, e_m$  é ortogonal e  $e_i \neq 0$  para  $1 \leq i \leq m$ , então  $e_1, e_2, \dots, e_m$  é linearmente independente.

**Solução** Solução igual a da 7.

11. Seja  $E$  um espaço Euclidiano, e seja  $M \subset E$ . Defina

$$M^\perp := \{y \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\},$$

o subconjunto de todos os vetores ortogonais a todos os vetores de  $M$ . Mostre que  $M^\perp$  é um subespaço vetorial de  $E$ .

**Solução** Sejam  $y, z \in M^\perp$  e  $\lambda \in K$ .  $\langle y + \lambda z, x \rangle = \langle y, x \rangle + \lambda \langle z, x \rangle = 0 + \lambda 0 = 0$ . Logo,  $y + \lambda z \in M^\perp$ .

12. Seja  $E$  um espaço Euclidiano e seja  $M$  um subespaço vetorial de  $E$ . Verifique que  $E = M \oplus M^\perp$ .

**Solução** Relembre que  $X = Y \oplus Z \iff Y \cap Z = \{0\}$  e  $Y + Z = X$ .

Se  $m \in M \cap M^\perp$ , então  $\langle m, m \rangle = 0$ , logo  $m = 0$ .

Agora seja  $B = \{m_1, \dots, m_k\}$  uma base ortonormal de  $M$ . Agora seja  $B' = \{m_1, \dots, m_n\}$  uma base ortonormal de  $E$  contendo  $B$ .

Seja  $x \in X$ , logo  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i m_i + \sum_{j=k+1}^n \lambda_j w_j$ . Segue que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i \in M$  e  $\sum_{j=k+1}^n \lambda_j w_j \in M^\perp$ , pois  $\langle m_i, m_j \rangle = 0$  pelo fato da base ser ortonormal.

Portanto,  $E = M + M^\perp$ . Concluindo o resultado que queríamos.

13. Seja  $S$  um subconjunto de  $X$ , um espaço com produto interno. Mostre que  $S^\perp = [S]^\perp$ .

**Solução** Quando queremos mostrar que dois conjuntos são iguais, nossa estratégia vai ser mostrar que um está contido no outro.

( $S^\perp \subset [S]^\perp$ ) Seja  $x \in S^\perp$ , então  $\langle x, y \rangle = 0$  para todo  $y \in S$ . Seja  $z \in [S]$ , então  $z = \sum \lambda_i y_i$  com  $y_i \in S$  e  $\lambda_i \in K$  para todo  $i$ .

Daí,  $\langle x, z \rangle = \sum \lambda_i \langle x, y_i \rangle$ . Mas por definição de  $S^\perp$ ,  $\langle x, y_i \rangle = 0$  para todo  $i$ .

Portanto,  $x \in [S]^\perp$ .

( $[S]^\perp \subset S^\perp$ ) Agora, tome  $x \in [S]^\perp$  e  $y \in S$ , logo  $y \in [S]$  o que implica que  $\langle x, y \rangle = 0$ , portanto  $x \in S^\perp$ .

14. Seja  $S$  um subconjunto de  $X$ , um espaço com produto interno. Defina

$$S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp.$$

Mostre que  $[S] \subset S^{\perp\perp}$ . Se  $X$  tem dimensão finita, demonstre que  $[S] = S^{\perp\perp}$ .

**Solução** Seja  $s \in [S]$  e  $s' \in S^\perp$ . Como  $s \in [S]$ , então  $s = \sum \lambda_i s_i$  com  $s_i \in S$  para todo  $i$  e  $\lambda_i \in K$ . Então,  $\langle s, s' \rangle = \langle \sum_i \lambda_i s_i, s' \rangle = \sum \lambda_i \langle s_i, s' \rangle = 0$ , pois  $\langle s_i, s' \rangle = 0$  por definição de  $s_i$  e  $s'$ . Mas isso implica também que se  $s \in (S^\perp)^\perp$ , pois  $s'$  é um elemento qualquer de  $S^\perp$ .

Se tem dimensão finita então  $X = S \oplus S^\perp = (S^\perp)^\perp \oplus S^\perp$ . Mas então  $\dim S = \dim(S^\perp)^\perp$ ,  $S \subset (S^\perp)^\perp$ . Daí, eles tem que ser iguais.

15. Seja  $X$  um espaço com produto interno e seja  $A : X \rightarrow X$  uma transformação linear sobrejetiva com a propriedade de que  $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$  para todos  $x, y \in X$ . Demonstre que

$$A(U^\perp) = A(U)^\perp$$

para todo subconjunto  $U \subset X$ .

**Solução** ( $A(U^\perp) \subset A(U)^\perp$ ) Seja  $x \in A(U^\perp)$ , então existe  $z \in U^\perp$  tal que  $A(z) = x$ . Seja  $y \in A(U)$ , então  $y = A(w)$  para algum  $w \in U$ .  $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle = 0$  pela definição de  $z$ . Logo,  $x \in A(U)^\perp$ .

( $A(U)^\perp \subset A(U^\perp)$ ) Sejam  $x \in A(U)^\perp$  e  $y \in A(U)$ . Logo, existe  $w \in U$  tal que  $A(w) = y$ . Por outro lado,  $A$  é sobrejetiva, então existe  $z$  tal que  $z \in U$  e  $A(z) = x$ . Temos que  $0 = \langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$ . Portanto,  $z \in U^\perp$  e  $x \in A(U^\perp)$ .

16. Seja  $M$  um subespaço vetorial do espaço Euclidiano  $X$ , invariante sob a transformação linear  $T : X \rightarrow X$ , isto é,  $T(M) \subset M$ . Mostre que  $M^\perp$  é invariante sob a adjunta  $T^*$ .

**Solução**  $\langle Tm, y \rangle = \langle m, T^*y \rangle$

Se  $y \in M^\perp$ , então  $0 = \langle Tm, y \rangle = \langle m, T^*y \rangle$ . Logo  $T^*y \in M^\perp$ .

17. Seja  $X$  um espaço Euclidiano, e seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação linear. Mostre que  $\text{ran}(A)^\perp = \ker(A^*)$ .

**Solução**  $(\text{ran}(A)^\perp \subset \ker(A^*))$  Seja  $x \in \text{ran}(A)^\perp$ , então  $\langle x, y \rangle = 0$  para todo  $y \in \text{ran}(A)$ . Mas  $y \in \text{ran}(A)$ , existe  $z \in X$  tal que  $A(z) = y$ . Logo,  $\langle x, A(z) \rangle = 0$ . Portanto,  $\langle A^*x, z \rangle = 0$ . Mas note que isso vale para todo  $y \in \text{ran}(A)$ , em particular vale para  $y = A(A^*(x))$ , o que implica em  $z = A^*(x)$  na expressão anterior. Logo,  $\langle A^*(x), A^*(x) \rangle = 0$ , o que só ocorre  $A^*(x) = 0$ , o que é o mesmo que  $x \in \ker A^*$ .

$(\ker(A^*) \subset \text{ran}(A)^\perp)$  Seja  $x \in \ker(A^*)$ , logo  $A^*(x) = 0$ . Seja  $y \in A$ , temos que  $\langle x, A(y) \rangle = \langle A^*(x), y \rangle = 0$ . Logo,  $x \in \text{ran}(A)^\perp$ .