Analise II
Lista 5

Professor: Paulo Klinger
Monitor: André Lelis

---

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ convexa. Então f é contínua em $U = \text{int}(\text{dom}\, f)$. Sugestão: Obtenha um simplexo n dimensional contido em U. Nesse simplexo f é uniformemente limitada superiormente.

Solução Seja $\delta > 0$ tal que $B(b_0, 2\delta) \subset dom f$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ a base canonica de $\mathbb{R}^n$. Definimos, $b_i = b_0 + \delta e_i \in B(b_0, \delta) \subset int(dom(f))$

Seja $S = con\{b_0, \dots, b_n\}$

Para todo $y \in S$, logo $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i$ com $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

Como f convexa, vale que $f(y) \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i f(b_i) \leq \max\{f(b_i) | 0 \leq i \leq n\} = M$

Portanto, f é limitada em S.

Agora aplicamos proposição 7 pagina 54 das notas de aula.

Da demonstração da proposição, basta tomar $|x_2 - x_1|$ como necessário, ou seja, $|x_2 - x_1| < \frac{\delta\epsilon}{2N}$.

2. Seja $\ell_+^2 = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \geq 0, \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$. Determine $\text{aff}(\ell_+^2)$. Demonstre que $\text{ri}\, \ell_+^2 = \emptyset$.

Solução Primeiro note que ℓ_+^2 é convexo, pois se $x, z \in \ell_+^2$ temos que rx é tal que $r \sum x_n^2 < \infty$ e $(1-r) \sum y_n < \infty$ e a soma de ambos será finita.

Como $0 \in \ell_+^2$, então o espaço afim é o espaço vetorial gerado por ℓ_+^2 que é ℓ^2, pois a variedade afim é sempre a translação de um espaço vetorial, como ℓ_+^2 contém o 0, então será o espaço vetorial gerado por ℓ_+^2, já que é o menor espaço contendo ℓ_+^2

Suponha que $x \in ri\ \ell_+^2$. Então existe $r > 0$ tal que $C = B(x, r) \cap \ell^2 \subset \ell_+^2$.

Vou mostrar que sempre existe $y \in B(x, r) \cap \ell^2$, mas $y \notin \ell_+^2$.

Se $\|x - y\| < r$, então $\sum_{n=1}^\infty (|x_n - y_n|)^2 < r$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe N_ϵ tal que $x_n < \epsilon$ para todo $n > N_\epsilon$. Posso escolher a sequencia $y_n = x_n$ para todo n

com exceção de um elemento tal que $x_n - r/2 < 0$ e $|x_n - x_n + r/2|^2 = r^2/4 < r$, onde definiremos $y_n = x_n - r/2 < 0$

De modo, $y \notin \ell^2_+$ e $y \in B(x, r) \cap \ell^2$

3. Seja $1 \leq p < \infty$. Determine $\operatorname{aff}(\ell^p_+)$ e demonstre que $\operatorname{ri} \ell^p_+ = \emptyset$.

Solução Mesmo raciocinio anterior funciona aqui.

4. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Então $\overline{\operatorname{con} S}$ é a intersecção dos semi-espaços fechados que contêm S.

Solução Para resolver este exercício, vamos usar o teorema 45 da Notas de Aula.

Pelo teorema todo conjunto convexo fechado é interseção de semi-espaços fechados que o contém, isso é $C = \bigcap_{C \subset F} F$, onde F são semi-espaços fechados.

$\overline{con\ S}$ é fechado e convexo. Logo, pelo teorema é a intersecção de semi-espaços fechados que contém $conS$. Ou seja, $\overline{con\ S} = \cap F$.

Mas $S \subset \overline{con\ S}$, logo $S \subset \overline{conS} = \cap F$.

Então, $S \subset F$ para cada semi-espaço fechado F que contém $\overline{con\ S}$. Logo, $\cap_{F'} F' \subset \cap_F F$, onde F' são semi-espaços fechados que contém S.

Agora temos que mostrar que $\cap_F F \subset \cap_{F'} F'$ Como $S \subset F'$ e $F' = \overline{con\ F'} \supseteq \overline{con\ S}$.

Logo, as interseções são iguais.

5. Verifique que a norma de um espaço vetorial é uma função convexa.

Solução Seja X o espaço normado em questão e $a, b \in X$. Queremos mostrar que $\|(ra + (1-r)b\| \leq r\|a\| + (1-r)\|b\|$ para todo $r \in (0, 1)$.

Ora, mas essa expressão vale, pois vale a desigualdade triangular, uma vez que é norma e $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo λ escalar.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável convexa e limitada. Então f é constante.

Solução Suponha que f não é constante. Tome x, y tais que $f(x) < f(y)$. Vamos supor que $y > x$.

Seja $z > y$. Podemos escrever $y = \alpha z + (1-\alpha)x$ com $\alpha = \frac{y-x}{z-x} \in (0,1)$.

Pela convexidade, $f(y) \leq \alpha f(z) + (1-\alpha)f(x)$. Rearranjando, temos

$$\frac{f(y) - f(x)}{\alpha} + f(x) \leq f(z)$$

que é o mesmo que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) + f(x) \leq f(z)$$

Com x, y fixo e fazendo $z \to \infty$, temos que f é não limitada. Absurdo! Pois a hipotese do enunciado é que f é limitada.

7. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ seja positivamente homogênea, $f(rx) = rf(x)$ se $r > 0$. Demonstre que f é convexa se e somente se $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Solução ($\Rightarrow$) Se f é convexa, então $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$, tomando $r = \frac{1}{2}$ temos o $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Mas f é homogenea, logo $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}f(x+y)$. O que completa a demonstração.

($\Leftarrow$) Vale que $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo x, y. Logo, vale rx e $(1-r)y$, portanto $f(rx + (1-r)y) \leq f(rx) + f((1-r)y) = rf(x) + (1-r)f(y)$ por f ser homogenea.

8. Demonstre que se f for positivamente homogênea convexa própria, $f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_m f(x_m)$, $\lambda_i > 0$, $i \leq m$.

Solução Só fazer indução em m.

9. A função $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ é quase-convexa se $f(rx + (1-r)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$. Verifique que f convexa é quase-convexa. E que se f é quase-convexa, então $\{x : f(x) < \alpha\}$ e $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ são convexos.

Solução Verificação que convexa é quase-convexa:

Seja $x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in (0,1)$. Daí, $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$ por f ser convexa. Agora, suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x) \geq f(y)$. Logo, $rf(x) + (1-r)f(y) \leq r(f) + (1-r)f(x) = f(x) = \max\{f(x), f(y)\}$.

Portanto, se f é convexa, então é quase-convexa.

Vamos mostrar que se f é quase-convexa, então $X = \{x | f(x) < \alpha\}$ é convexo:

Sejam $y, z \in X$. Queremos mostrar que $ry + (1-r)z \in X$ para todo $r \in (0,1)$. Ou seja, temos que mostrar que $f(ry + (1-r)z) < \alpha$.

Por hipotese, $f(ry + (1-r)z) \leq \max\{f(y), f(z)\}$, mas como $y, z \in X$, então $f(x) < \alpha, f(y) < \alpha$. Logo, $\max\{f(y), f(z)\} < \alpha$.

Portanto, $f(ry + (1-r)z) < \alpha$, concluindo que $ry + (1-r)z \in X$.

A demonstração para $\{x | f(x) \leq \alpha\}$ é analoga.

10. Verifique que são convexas:

1. $f(x) = e^{\alpha x}$, $-\infty < \alpha < \infty$;
2. $f(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \\ x^p & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ sendo $1 \leq p$;
3. $f(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \\ -x^p & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ para $0 \leq p \leq 1$;
4. $f(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \leq 0 \\ -x^p & \text{se } x > 0 \end{cases}$ para $p \leq 0$;
5. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} & \text{se } |x| < \alpha \\ \infty & \text{se } |x| \geq \alpha \end{cases}$;
6. $f(x) = -\log x$ se $x > 0$ e $f(x) = \infty$ se $x \leq 0$.

Solução

1. $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ e $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x} > 0$. Logo, f é convexa.
2. Se $x > 0$, então $f'(x) = px^{p-1}$ e $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$. Logo, f é convexa quando $x > 0$. E será em 0 pela continuidade de f a direita.

   Se $x < 0$, temos que $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y) = \infty$.

   Portanto, f é convexa.

3. Analogo ao anterior.

4. Se $x > 0$, então $f'(x) = -px^{p-1}$ e $f''(x) = -p(p-1)x^{p-2}$ será menor que 0, logo não pode ser convexa.

5. Se $|x| < \alpha$, temos que $f'(x) = -\frac{(-2x)}{2\sqrt[3]{(\alpha^2 - x^2}}$ e $f''(x) = \frac{3x^2}{(\alpha^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2 - x^2}}$

   $|x| \geq \alpha$, então $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y) = \infty$.

6. $f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$. Logo, é convexa.

   Se $x \geq 0$, fazemos como os casos anteriores.

11. Demonstre que $f(x) = d(x, C)$ sendo C convexo é uma função convexa.

Solução Queremos mostrar que para qualquer x, y e $r \in (0,1)$ vale que $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$.

$f(rx + (1-r)y) = d(rx + (1-r)y, C) \leq d(rx + (1-r)y, z)(*)$ para todo $z \in C$, uma vez que $d(a, C) = \inf_z \{d(a, z) | z \in C\}$.

Nesse exercicio, estamos em $\mathbb{R}^n$, então $d(x, y) = \|x - y\|$.

Como $(*)$ vale para todo z, vamos supor que $z = rw + (1-r)u$ com $u, w \in C$ (Observe que como C é convexo, isso é possivel de ser feito).

Logo, $d(rx + (1-r)y, C) \leq d(rx + (1-r)y, z) = \|rx + (1-r)y - rw - (1-r)u\|$

$\leq r\|x - w\| + (1-r)\|y - u\|$

Mas w e u são quaisquer. Logo, se tomar uma sequencia indo w_n e u_n para os infimos $d(x, C)$ e $d(y, C)$ temos o resultado.

12. Seja f convexa no $\mathbb{R}^n$ e duas vezes continuamente diferenciável no aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Então para todo $x \in U$, a matriz hessiana, $Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{ij}$ é positiva semi-definida: $\langle y, Qy \rangle \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Solução Uma vez que falou em matriz Hessiana e duas vezes diferenciável, minha intuição diz que precisamos conseguir alguma maneira de aplicar a expansão de Taylor.

A expansão de Taylor de segunda ordem é:

$f(y + \lambda h) = f(y) + \langle f'(y), \lambda h \rangle + \frac{1}{2}\langle f''(y)\lambda h, \lambda h \rangle + r(\lambda)$ tal que $\lim_{\lambda \to 0} \frac{r(\lambda)}{\lambda^2} = 0$.

Então meu objetivo vai ser mostrar que $\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(y+\lambda h)-f(y)}{\lambda} - \langle f'(y), h\rangle \geq 0$ para todo h.

Mas $\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(y+\lambda h)-f(y)}{\lambda}$ é a derivada direcional na direção h.

Além disso, f é convexa, logo $f(rx+(1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$.

Mas podemos escrever a ultima expressão como $f(y+r(x-y)) \leq r(f(x)-f(y)) + f(y)$ que é o mesmo que

$$\frac{f(y+r(x-y))-f(y)}{r} \leq f(x) - f(y)$$

Mas isso vale para qualquer x e y, e $r \in (0,1)$. Tomando limite com $r \to 0$,temos então que

$$\langle f'(y), x-y\rangle + f(y) \leq f(x)$$

E isso vale para qualquer x, y, logo tomando $x = y + \lambda h$ e voltando a expansão de Taylor, nós chegamos a

$\frac{1}{2}\langle f''(y)h, h\rangle \geq 0$ como queriamos.

13. (continuação) Se Q for positiva definida ($\langle y, Qy\rangle > 0$ se $y \neq 0$), f é estritamente convexa.

Solução Pela formula de Taylor, existe z tal que

$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(z)h, h\rangle$

Como $\frac{1}{2}\langle f''(z)h, h\rangle > 0$, segue que

$$f(x+h) > f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle$$

Tome $w, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$ e $d = w - z$.

Então vale que

$$f(w) > f(z+\lambda d) + \langle f'(z+\alpha d), w-(z+\lambda d)\rangle$$

e

$$f(z) > f(z+\lambda d) + \langle f(z+\alpha d), z-(z+\lambda d)\rangle$$

Multiplicando a primeira desigualdade por λ e a segunda por $1 - \lambda$.

Daí, somando se obtem

$$\alpha f(w) + (1 - \alpha) f(z) > f(z + \lambda d) = f(\lambda w + (1 - \lambda) z)$$

.

Portanto, f é estritamente convexo.

14. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ matriz simétrica 2×2. Demonstre que A é positiva semi-definida se e somente se $a \geq 0$ e $ad - b^2 \geq 0$. Como ficam essas condições se $-A$ for positiva semi-definida? Quais as condições para A ser positiva definida?

Solução Primeiro temos que para qualquer vetor (x, y):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

Agora, usando a definição temos que

$\langle((x, y), (ax + by, bx + dy)\rangle \geq 0$

Daí, $ax^2 + bxy + bxy + dy^2 \geq 0$. Essa desigualdade deve valer para qualquer x, y.

Se $y = 0$, então a equação se transforma em $ax^2 \geq 0$, mas isso ocorre para todo x se e somente se $a \geq 0$.

Agora vamos supor que $y \neq 0$.

Então podemos reescrever a desigualdade como:

$y^2(a(\frac{x}{y})^2 + 2b\frac{x}{y} + d) \geq 0$

Como $y \neq 0$, então o problema se tornar em achar a, b, d tais que

$a(\frac{x}{y})^2 + 2b\frac{x}{y} + d \geq 0$

Como posso interpretar a equação acima como uma equação de segundo grau em $\frac{x}{y} = z$ e quero que seja sempre maior que 0.

Se o lado esquerdo tiver minimo da desigualde tiver minimo e esse minimo for não-negativo, então a desigualdade é satisfeita.

$f(z) = az^2 + 2bz + d$, logo $f'(z) = 2az + 2b$ e $f''(z) = 2a$. Se $a \geq 0$, então possui ponto de minimo, o ponto é unico e é dado por $f'(z) = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{a}$ se $a \neq 0$.

Então que queremos que $f(-\frac{b}{a}) \geq 0$. Logo, queremos que

$$a(\frac{-b}{a})^2 + 2b(\frac{-b}{a} + d \geq 0$$

$$\frac{b^2}{a} - 2\frac{b^2}{a} + d = -\frac{b^2}{a} + d \geq 0$$

Ou seja, queremos que $ad \geq b^2$, ou seja, $ad - b^2 \geq 0$.

Para positiva-definida, podemos repetir o racionio, mas com a desigualdade sendo estritas.

Para $-A$ semi-definida, o mesmo raciocinio vai implicar em $a \leq 0, d \leq 0$ e $ad - b^2 \geq 0$.

15. Se $f_-(x_0) \leq m \leq f_+(x_0)$ então $f(x) \geq m(x - x_0) + f(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Solução Aqui creio que houve um erro de digitação no enunciado. Eram f^- e f^+ para manter consistencia com a anotação das notas de aula. Consultem a página 50 das notas de aula.

Agpra note que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq f^+(x_0) \geq m \geq f^-(x_0) \geq \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

De onde tiramos que

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0) + mh$$

E

$$f(x_0 - h) \geq f(x_0) + m(-h)$$

Se $x > x_0$, defina $h = x - x_0$ e se $x \leq x_0$ defina $h = x_0 - x$.

16. Seja $U_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ contínua e côncava, $i = 1, \ldots, I$. Seja $\omega \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $X = \{(x_1, \ldots, x_I) \in (\mathbb{R}^n_+)^I : \sum_{i=1}^I x_i \leq \omega\}$. Definamos o conjunto de possibilidades de utilidade

$$U = \{u \in \mathbb{R}^I : \exists x \in X, u_i \leq U_i(x_i), 1 \leq i \leq I\}$$

. Demonstre que U é fechado, convexo.

Solução Para mostrar que U é fechado vamos mostrar que qualquer sequencia convergente em U tem limite em U.

Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequencia em U convergindo para um u.

Para u_i na sequencia, existe $x_i \in X$ tal que $u_i[m] \leq U_i(x_i[m])$

Montamos a sequencia dos $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. Como X é compacto, então $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente (x_{ik}), digamos que converge para x.

Observe que pela continuidade de U_i temos que $u[i] \leq U_i(x[i])$. Portanto, $u \in U$. Logo, U é fechado.

Sejam $u, u' \in U$ e $\alpha \in (0,1)$. Como $u \in U$, então existe x tal que $u_i \leq U_i(x_i)$. Analogamente para u' existe x' tal que $u'_i \leq U_i(x'_i)$.

Temos que $\alpha u_i + (1-\alpha)u'_i \leq \alpha U_i(x_i) + (1-\alpha)U_i(x'_i)$

Como U é concava, então $\alpha U_i(x_i) + (1-\alpha)U_i(x'_i) \leq U_i(\alpha x_i + (1-\alpha)x'_i)$

Mas X é convexo, então $\alpha x + (1-\alpha)x' \in X$. Logo, $\alpha u + (1-\alpha)u' \in U$, concluindo que U é convexo.

17. (continuação) A fronteira de Pareto, U^P, é definida pelos vetores $u \in U$ tais que não existe $u' \in U$, $u' \geq u$ e $u' \neq u$. Demonstre que para $\bar{u} \in U^P$ existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^I \setminus \{0\}$ tal que $\lambda \cdot \bar{u} = \max\{\lambda \cdot u : u \in U\}$.

Solução

Afirmação: se $\overline{u} \in UP$, então $\overline{u} \in U \setminus int(U)$.

Prova da afirmação: U é convexo, então Se $\overline{u} \in int(U)$, então existe $r > 0$ tal que $B(r, \overline{u}) \subset U$. Tome por exemplo $\overline{u} + \frac{r}{2}(1, \ldots, 1) \in U$ Agora note que $\overline{u} + \frac{r}{2}(1, \ldots, 1) >> \overline{u}$. Contradição com a maximilidade de $\overline{u}$.

Afirmação 2: UP é convexo.

Prova da afirmação 2: Seja u e u' em UP. Então, $u \geq u'', u' \geq u''$ para todo u'' em U. Logo, $ru \geq ru''$ e $(1-r)u' \geq (1-r)u''$.

Somando as desigualdade, $ru + (1-r)u' \geq u''$ para $r \in (0,1)$ e $u'' \in U$.

Além disso, $ru + (1-r)u' \in U$, pois U é convexo pelo ultimo exercicio.

Agora, portanto, podemos aplicar o corolário 16 (pagina 45) das notas para afirmar que $\lambda \in \mathbb{R}^I \setminus \{0\}$ tal que $\langle \overline{u}, \lambda \rangle \geq \langle u, \lambda \rangle$.

O que falta provar agora é $\lambda >> 0$.

Ora, mas como a desigualdade vale para todo u, podemos tomar $u = \overline{u} - \epsilon e_i$ com $\epsilon > 0$ suficiente para $u \in U$.

Daí, $\langle \overline{u} - u, \lambda \rangle \geq 0$, mas $\langle \overline{u} - u, \lambda \rangle = \epsilon \lambda_i \geq 0$.

18. Encontre os hiperplanos suporte do triângulo com vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$.

Solução Em $\mathbb{R}^2$ qualquer hiperplano é uma reta. Além disso, para ser hiperplano suporte ele tem que intersectar o triangulo, mas não pode intersectar seu interior relativo.

Portanto, os hiperplanos suportes intersectam somente os vertices ou são retas geradas pelas arestas.

1. Pelo vertice $(0,0)$ passam retas da forma $\{(x, ax)|x \in \mathbb{R}\}$ ou $\{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$.

   A segunda reta é gerada pela aresta $\overline{(0,0),(0,2)}$.

   A primeira reta é suporte se $a \in (-\infty, 0]$.

2. Pelo vertice $(0,2)$ são da forma $\{(x, ax+2)|x \in \mathbb{R}\}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Os valores para ser suporte são $a \in [-2, \infty)$.

3. Pelo vertice $(1,0)$ são da forma $\{x, a(x-1)|x \in \mathbb{R}\}$. ou $\{(1,y)|y \in \mathbb{R}\}$.

   E $a \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty]$.

19. Verifique usando o lema de Farkas que o sistema não tem solução: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(x,y,z) \geq 0$.

Solução O Lema de Farkas é o exemplo 34 das Notas de Aula e se encontra na página 46 das notas.

Nosso objetivo aqui é um vetor $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $X^t A \leq 0$ e $\langle b, \mu \rangle > 0$.

$X^t A = \begin{pmatrix} 2x + y & y & -x + 2y \end{pmatrix}$ e $\langle b, \mu \rangle = x$

Da segunda condição, basta escolher $x > 0$ e da primeira condição basta escolher $y < 0$. Então escolha, por exemplo, $x = 1$ e $y = -2$.

20. Seja $p_1 > 0$, $p_2 > 0$. Usando multiplicadores de Kuhn-Tucker resolva

$$\begin{aligned} &\max \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \\ &\text{s.a. } \langle p, (x,y) \rangle \leq 2 \\ &\quad x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Solução

Vamos montar o Lagrangeano:

$\mathcal{L} : \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \lambda(px + qy - 2) + \mu_1 x + \mu_2 y$

Condições de KKT:

$[x] : \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \lambda p + \mu_1$

$[y] : \frac{1}{2\sqrt{y+1}} - \lambda q + \mu_2$

$\lambda \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

$\lambda(2 - px - qy) = 0$

$\mu_1 x = 0$

$\mu_2 y = 0.$

E a restrição é $\langle p, (x,y) \rangle \leq 2$

Agora note que $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ e $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}}$. Logo, o problema será concavo.

Vamos quebrar em casos para facilitar a solução:

1. Se $x > 0$ e $y > 0$, então $\mu_1 = \mu_2 = 0$.
   Das condições, tiramos que $\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{p}{q}$.
   Daí, $\frac{q^2}{p^2}(y+1) - 1 = x$.
   Substituindo na restrição, temos $p(\frac{q^2}{p^2}(y+1) - 1) + qy = 2$
   Logo, $y = \frac{2p+p^2-q^2}{pq+q^2}$ e $x = \frac{2q+q^2-p^2}{pq+p^2}$
   Observe que $x > 0$ e $y > 0$ necessitam que $2p + p^2 - q^2 > 0$ e $2q + q^2 > p^2$.
2. $x > 0$ e $y = 0$
   Nesse caso, $\mu_1 = 0$ e $px = 2$. Logo, $x = \frac{2}{p}$ e $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2p+p^2}}$
   Vamos estudar o μ_2.
   $\mu_2 = \lambda q - \frac{1}{2}$. Como $\mu_2 \geq 0$, então $\lambda \geq \frac{1}{2q}$
   Logo, $\frac{1}{2\sqrt{2p+p^2}} \geq \frac{1}{2q}$. Seguindo que $q \geq \sqrt{2p+p^2}$.

3. Se $x = 0$ e $y > 0$, então é o simétrico do caso anterior.
4. Se $x = y = 0$. Então não tem solução, pois não satisfaz a restrição que deve valer na igualdade.

21. Determine os subgradientes de $f(x) = |x|$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Solução Como f é diferencial em $x > 0$ e $x < 0$, então nesses conjuntos os subgradientes coincidem com a derivada. Portanto, se $x > 0, \partial f = 1$ e se $x < 0, \partial f = -1$.

Daí, falta estudar $x = 0$.

Queremos então achar x^* tal que

$$f(z) - f(x) \geq x^*(z - x)$$

Se x por hipotese é 0, então o problema se transforma em x^* tal que $|z| > x^* z$.

Se $z > 0$, então $1 \geq x^*$. Se $z < 0$, então $x^* \geq -1$.

22. Seja $f(x, y) = x^a y^b$, $(x, y) \geq 0$. Sendo $a > 0$, $b > 0$. Determine os valores de (a, b) para os quais f é côncava. Verifique quais os $(a, b) >> 0$ tais que f é estritamente côncava para $(x, y) >> 0$.

Solução Pelos exercícios 12 e 13, temos que a função será concava se e somente se a matriz Hessiana for negativa semi-definida e estritamente concava se for negativa definida.

Então, teriamos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2})^2 > 0$

Então temos que as condições são

$$a(a-1)x_1^{a-2}x_2^b < 0 \ (*)$$

$$(a(a-1)x_1^{a-2}x_2^b)(b(b-1)x_1^a x_2^{b-2}) > (ab x_1^{a-1} x_2^{b-1})^2$$

A segunda equação pode ser reescrita como

$$((a-1)(b-1) - ab)x_1^{2(a-1)} x_2^{2(b-1)} > 0 \ (**)$$

Então, tiramos de $(*)$ que $0 < a < 1$,

De $(**)$, nós tiramos que $((a-1)(b-1) - ab) > 0$

$(a-1)(b-1) - ab = -a - b + 1 > 0$, logo $a + b < 1$. Portanto, $b < 1 - a$ para ser estrimamente concava. Para concava, as desigualdades não são estritas.

Por outro lado, ainda temos que verificar se é estrito ou não na igualdade $a+b = 1$.

Mas $f(\frac{1}{2}(x,x) + \frac{1}{2}(y,y)) = \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}f(x,x) + \frac{1}{2}f(y,y)$. Logo, não é estrito.