(1) Tome $x \in U$. Defina $A := \{ y \in U \mid \forall i \ |y_i - x_i| = 1 \}$.

Logo, A é os vértices do hipercubo de aresta de tamanho 1 ao redor de x. Portanto, A é finito.

Escreva $A = \{ y_1, \dots, y_m \}$. Pela desigualdade de Jensen, temos $f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(y_i) \leq \max_{i=1,\dots,m} f(y_i) \leq M$. Portanto, para todo $z \in \operatorname{Con} A$, temos $f(z) \leq M$. Logo, f é limitada em $\operatorname{Con} A$. Vou provar que f é contínua em x.

Agora, note que se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno, temos que $\|y - x\| < \delta$ implica em $y \in \operatorname{Con} A$. Defina $\beta := \|y - x\|$ e $\alpha := \frac{\beta}{1+\beta}$. Definindo $z := x + \frac{1}{\beta}(y - x)$, temos $y = \beta z + (1-\beta)x$. Logo, por convexidade, temos $f(y) \leq \beta f(z) + (1-\beta) f(x)$. Rearranjando, vem

$$f(y) - f(x) \leq \beta (f(z) - f(x)) \leq \beta (M - f(x))^{*},$$ pois $z \in \operatorname{Con} A$.

Definindo $w := x - \frac{1}{\beta}(y - x)$, temos $x = \alpha w + (1-\alpha) y$. Logo, temos $f(x) \leq \alpha f(w) + (1-\alpha) f(y) = \frac{\beta}{1+\beta} f(w) + \frac{1}{1+\beta} f(y)$. Rearranjando, temos que

$$f(y) - f(x) \geq \beta (f(x) - f(w)) \overset{w \in \operatorname{Con} A}{\geq} \beta (f(x) - M) = -\beta (M - f(x))^{\star}.$$

Juntando $*$ e $\star$, temos $|f(x) - f(y)| \leq \beta (f(x) - M)$. Como $\beta = \|y - x\|$, tomando $\delta := \frac{\varepsilon}{f(x) - M}$, teremos

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\| (f(x) - M) < \varepsilon,$$ como queríamos. $\square$

2) DEFINA $\alpha := \inf\{\|y-k\| : k \in K\}$ E TOME $(k_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq K$ TAL QUE $\|y-k_m\| \to \alpha$. COMO É CONVERGENTE, É LIMITADA. LOGO, TEMOS $\|k_m\| \leq \|k_m - y\| + \|y\| \leq M$. PORTANTO, $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ É LIMITADA E ESTÁ NO FECHADO K. LOGO, $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ ESTÁ NUM COMPACTO. LOGO, ELA TERÁ SUBSEQUÊNCIA CONVERGENTE, ISTO É, $k_{m_p} \to \bar{k} \in K$. PELA CONTINUIDADE DA NORMA, $\|y - k_{m_p}\| \to \|y - \bar{k}\|$. COMO $\|y - k_{m_p}\| \to \alpha$, PELA UNICIDADE DO LIMITE, $\|y - \bar{k}\| = \alpha$. LOGO, $\bar{k}$ ATINGE O ÍNFIMO, COMO QUERÍAMOS.

PARA MOSTRAR QUE NÃO É ÚNICO GERALMENTE, TOME $K := [0,1] \cup [3,4]$ E $y := 2$. LOGO, $\inf\{|2-k| : k \in K\} = 1$, ATINGIDO POR $k' = 1$ E $k'' = 3$.

3 Tome k_1, k_2 tais que $\|y-k_1\| = \|y-k_2\| = \inf_{k\in K} \|y-k\| =: \alpha$

Dado $\lambda \in (0,1)$, temos $\|y - (\lambda k_1 + (1-\lambda) k_2)\| = \|\lambda(y-k_1) + (1-\lambda)(y-k_2)\|$

$\overset{*}{\leq} \lambda\|y-k_1\| + (1-\lambda)\|y-k_2\| = \alpha$. Como $(\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2) \in K$

e está a uma distância menor que α de y,

ele também deve atingir o ínfimo. Logo,

a desigualdade * é uma igualdade. Por Cauchy-Schwarz,

sabemos que isso implica que eles são colineares.

Logo, existe $\mu > 0$ tal que $\lambda(y-k_1) = \mu(1-\lambda)(y-k_2)$.

Para $\lambda = \frac{1}{2}$, isso nos dá $y-k_1 = \mu(y-k_2)$. Tomando

a norma, temos $\|y-k_1\| = |\mu|\,\|y-k_2\|$, ou $\alpha = |\mu|\cdot\alpha$.

Logo, $|\mu|=1$. μ não pode ser -1, pois aí teríamos

$y-k_1 = k_2-y$, ou $y = \frac{k_1+k_2}{2}$. Isso implica $y\in K$ (pois

K é convexo), um absurdo. Logo, $\mu=1$. Mas

aí $y-k_1 = y-k_2$, o que dá $k_1=k_2$.

4 PRIMEIRO, VAMOS PEGAR O HIPERPLANO DE APOIO NO PONTO $\bar{c}$. ELE É DADO POR $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle = \beta\}$, ONDE $\beta := \langle \bar{c}, b \rangle$. PRIMEIRO, NOTE QUE TEMOS $\|b\| > 0$, POIS $b \neq 0$. LOGO, $0 < \|b\|^2 = \langle b, b \rangle = \langle y - \bar{c}, b \rangle$. REARRANJANDO, TEMOS $\beta = \langle \bar{c}, b \rangle < \langle y, b \rangle$.

AGORA, VOU PROVAR $\beta \geq \langle x, b \rangle$ PARA TODO $x \in C$. TOME $\alpha \in (0,1)$ E $z := \alpha \bar{c} + (1-\alpha) x$. TEMOS QUE $\langle y - z, y - z \rangle \geq \langle y - \bar{c}, y - \bar{c} \rangle$, PELA DEFINIÇÃO DE $\bar{c}$. ABRINDO O LADO ESQUERDO, TEMOS $\langle y - z, y - z \rangle = \langle y - \bar{c} - (1-\alpha)(x - \bar{c}), y - \bar{c} - (1-\alpha)(x - \bar{c}) \rangle$ $= \langle y - \bar{c}, y - \bar{c} \rangle - 2(1-\alpha)\langle y - \bar{c}, x - \bar{c} \rangle + (1-\alpha)^2 \langle x - \bar{c}, x - \bar{c} \rangle$. PORTANTO, JUNTANDO TUDO, TEMOS $(1-\alpha)^{\cancel{2}} \langle x - \bar{c}, x - \bar{c} \rangle \geq 2\cancel{(1-\alpha)} \langle y - \bar{c}, x - \bar{c} \rangle$. TOMANDO $\alpha \to 1$, TEMOS $0 \geq \langle y - \bar{c}, x - \bar{c} \rangle$. ISTO É, $\beta = \langle b, \bar{c} \rangle \geq \langle b, x \rangle$, COMO QUERÍAMOS.

AGORA, SE DEFINIRMOS $\beta' := \langle y, b \rangle$ E TOMARMOS $\gamma \in (\beta, \beta')$, TEREMOS O HIPERPLANO $H_\gamma := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle = \gamma\}$ SEPARANDO ESTRITAMENTE, POIS $\langle y, b \rangle = \beta' > \gamma > \beta \geq \langle x, b \rangle$ PARA $x \in C$.

5. Pelo Teorema 16, todo convexo fechado K é tal que $K = \bigcap_{\substack{F \supseteq K \\ F \text{ semi-espaço} \\ F = \overline{F}}} F$. Logo, temos

$$\overline{\operatorname{Con} S} = \bigcap_{\substack{F \supseteq \overline{\operatorname{Con} S} \\ F \text{ semi-espaço} \\ F = \overline{F}}} F .$$

Portanto, basta provar que

$$\bigcap_{\substack{F \supseteq \overline{\operatorname{Con} S} \\ F \text{ semi-espaço} \\ F = \overline{F}}} F = \bigcap_{\substack{F \supseteq S \\ F \text{ semi-espaço} \\ F = \overline{F}}} F .$$

Mas isso é válido, pois dado semi-espaço fechado F temos que $F \supseteq \overline{\operatorname{Con} S}$ se, e somente se $F \supseteq S$. Para ver isso, note que se $F \supseteq \overline{\operatorname{Con} S}$, então $F \supseteq \overline{\operatorname{Con} S} \supseteq S$. Se $F \supseteq S$, então $F = \overline{\operatorname{Con} F} \supseteq \overline{\operatorname{Con} S}$. Logo,

$$\bigcap_{\substack{F \supseteq \overline{\operatorname{Con} S} \\ F \text{ semi-espaço} \\ F = \overline{F}}} F = \bigcap_{\substack{F \supseteq S \\ F \text{ semi-espaço} \\ F = \overline{F}}} F ,$$

como queríamos. ◻

6 PELO EXERCÍCIO 4, TEMOS O HIPERPLANO

$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, b \rangle = \beta \}$, ONDE $b = y - \bar{c}$, $\|y - \bar{c}\| = \inf \{ \|y - c\| : c \in C \}$

E $\beta = \langle \bar{c}, b \rangle$. COM $\beta \geq \langle x, b \rangle$ PARA TODO $x \in C$. LOGO, A FUNÇÃO $\ell(x) := \langle x, b \rangle$ É LINEAR, NÃO-CONSTANTE (POIS $b \neq 0$) E TEMOS $\ell(\bar{c}) = \beta \geq \langle x, b \rangle = \ell(x)$. LOGO, O MÁXIMO É ATINGIDO EM C.

1

7 TOME $x, y \in V$, $\alpha \in [0,1]$. LOGO, TEMOS

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha) y\| = \alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\|.$$

ESCREVENDO $f(z) := \|z\|$, O QUE ACABEI DE MOSTRAR É $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$, DEFINIÇÃO DE CONVEXIDADE.

G

8) SUPONHA f NÃO CONSTANTE. VOU PROVAR QUE É ILIMITADA.

TOME $x, y \in \mathbb{R}$ COM $f(x) < f(y)$. SUPONHA $x < y$. LOGO, TOMANDO $z > y$, PODEMOS ESCREVER $y = \alpha z + (1-\alpha)x$, POIS BASTA TOMAR $\alpha := \frac{y-x}{z-x}$.

PELA CONVEXIDADE, TEMOS $f(y) \leq \alpha f(z) + (1-\alpha) f(x)$

REARRANJANDO, VALE QUE $f(y) \leq \alpha\left(f(z) - f(x)\right) + f(x)$, OU $\frac{f(y)-f(x)}{\alpha} + f(x) \leq f(z)$, OU $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \cdot (z-x) + f(x) \leq f(z)$.

COMO $f(y) > f(x)$ E $y > x$, MANDANDO $z \to \infty$, VAMOS TER $f(z) \to \infty$, POIS O LADO ESQUERDO EXPLODE. LOGO, f NÃO É LIMITADA.

O CASO $x > y$ É ANÁLOGO. ∎

9 $\Rightarrow$ Suponha f convexa. Temos

$$\frac{1}{2}f(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Logo, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

$\Leftarrow$ Tome $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0,1]$. Logo, temos

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(\alpha x) + f((1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

$\square$

10 VAMOS PROVAR POR INDUÇÃO.

$m=1$ $f(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 f(x_1)$ POR HOMOGENEIDADE POSITIVA

$m \Rightarrow m+1$ SUPONHA $f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$.

PELO EXERCÍCIO ANTERIOR, TEMOS

$$f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1}) \leq f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) + f(\lambda_{m+1} x_{m+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}),$$ COMO QUERÍAMOS.

LOGO, A INDUÇÃO ESTÁ COMPLETA. $\square$

11 Se f é convexa, então dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0,1]$ temos $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

$\leq \max\{\alpha f(x) + (1-\alpha) f(x), \alpha f(y) + (1-\alpha) f(y)\} = \max\{f(x), f(y)\}$.

Defina $A := \{x : f(x) < \alpha\}$ e $B := \{x : f(x) \leq \alpha\}$.

Se $\gamma \in [0,1]$ e $x, y \in A$, temos que

$f(\gamma x + (1-\gamma) y) \leq \max\{f(x), f(y)\} < \alpha$. Se $x, y \in B$, temos

$f(\gamma x + (1-\gamma) y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha$. Logo, A e

B são convexos.

12

13 Tome $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0,1]$. Tome $z, w \in C$.

Logo, $\alpha z+(1-w) \in C$, pela convexidade de C.

Temos $d(\alpha x + (1-\alpha)y, C) \leq \|\alpha x + (1-\alpha)y - (\alpha z + (1-\alpha)w)\|$

$= \|\alpha(x-z) + (1-\alpha)(y-w)\| \leq \alpha\|x-z\| + (1-\alpha)\|y-w\|$

$= \alpha d(x,z) + (1-\alpha)d(y,w)$. Tomando o ínfimo primeiro em z e depois em w, teremos que

$d(\alpha x + (1-\alpha)y, C) \leq \alpha d(x,C) + (1-\alpha)d(y,C)$, como queríamos.

14 TOME f CONVEXA, $x, y \in \mathbb{R}^n$ E $\alpha \in (0,1)$.

LOGO, $f(y + \alpha(x-y)) = f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.

REARRANJANDO, $\dfrac{f(y + \alpha(x-y)) - f(y)}{\alpha} \leq f(x) - f(y)$.

TOMANDO $\alpha \to 0$, TEMOS A DERIVADA DIRECIONAL E

$\langle f'(y), x - y \rangle + f(y) \leq f(x)$.

TOMANDO $x = y + \lambda h$ PARA $\lambda > 0$, $h \in \mathbb{R}^n$ E REARRANJANDO

ACIMA, TEMOS $f(y+\lambda h) - f(y) - \langle f'(y), \lambda h \rangle \overset{*}{\geq} 0$.

PELA EXPANSÃO DE TAYLOR DE SEGUNDA ORDEM, TEMOS

$f(y+\lambda h) = f(y) + \langle f'(y), \lambda h \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(y) \lambda h, \lambda h \rangle + r(\lambda)$, ONDE

$\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{r(\lambda)}{\lambda^2} = 0$. LOGO, JOGANDO ISSO EM $*$, TEMOS

$\frac{\lambda^2}{2} \langle f''(y) h, h \rangle + r(\lambda) \geq 0$. DIVIDINDO POR λ^2, TEMOS

$\frac{1}{2} \langle f''(y) h, h \rangle + \dfrac{r(\lambda)}{\lambda^2} \geq 0$. TOMANDO $\lambda \to 0$, VALE

$\langle f''(y) h, h \rangle \geq 0$. LOGO, A HESSIANA $f''(y)$ É POSITIVA

SEMIDEFINIDA, COMO QUERÍAMOS. $\blacksquare$

15 SUPONHA $\langle f''(y)d, d\rangle > 0$ PARA TODO $y \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. TOMANDO $d = x - y$ E USANDO O TEOREMA DO VALOR MÉDIO, EXISTE $z \in \mathbb{R}$ TAL QUE

$$f(x) - f(y) - \langle f'(y), x-y \rangle = \frac{1}{2} \langle f''(z)(x-y), x-y \rangle > 0.$$

LOGO, $f(x) > f(y) + \langle f'(y), x-y \rangle$.

TOME $w, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0,1]$ E $d := w - z$. A DESIGUALDADE ACIMA NOS DÁ $f(w) > f(z + \alpha d) + \langle f'(z+\alpha d), w - (z+\alpha d)\rangle$ E $f(z) > f(z+\alpha d) + \langle f'(z+\alpha d), z - (z+\alpha d)\rangle$. MULTIPLICANDO A PRIMEIRA DESIGUALDADE POR α, A SEGUNDA POR $(1-\alpha)$ E SOMANDO, VAMOS TER $\alpha f(w) + (1-\alpha) f(z) >$

$$f(z+\alpha d) + (1-\alpha)\alpha \cancel{\langle f'(z+\alpha d), w-z\rangle} - \alpha(1-\alpha)\cancel{\langle f'(z+\alpha d), w-z\rangle}$$

$$= f(z+\alpha d) = f(z + \alpha(w-z)) = f(\alpha w + (1-\alpha) z).$$ PORTANTO,

f É ESTRITAMENTE CONVEXA. $\square$

(16) Tome $x \in \mathbb{R}^2$. Temos $Ax = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$.

Logo, $\langle Ax, x \rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$.

$\Rightarrow$ Tome A positiva semi-definida, para todo x, $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \geq 0$. Tomando $x = (1,0)$, temos $a \geq 0$. Se $x = (0,1)$, ganhamos $d \geq 0$.

Se $a = 0$, temos $2bx_1x_2 + dx_2^2 \geq 0$. Isso só é verdade para todo x se $b = 0$, pois se $b \neq 0$, basta tomar $x_2 = 1$ e x_1 tal que $2bx_1 + d < 0$. Logo, $b = 0$ e $a \cdot d - b^2 = 0 \cdot d - 0^2 = 0 \leq 0$.

Se $a > 0$, podemos completar o quadrado de $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$ por $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + \frac{b^2}{a}x_2^2 + dx_2^2 - \frac{b^2}{a}x_2^2$

$= \left(\sqrt{a}\,x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}x_2\right)^2 + x_2^2\left(\frac{ad - b^2}{a}\right)$. Tomando $x_1 = \frac{-b}{a}x_2$,

temos $0^2 + x_2^2\left(\frac{ad - b^2}{a}\right)$. Como isso é positivo, então $ad - b^2 \geq 0$, pois $a > 0$ e $x_2^2 \geq 0$.

$\Leftarrow$ QUERO PROVAR QUE $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \geq 0$

DADO $x \in \mathbb{R}^2$, SUPONDO $a \geq 0$, $ad - b^2 \geq 0$ E $d \geq 0$.

SE $a = 0$, ENTÃO $-b^2 \geq 0$. LOGO, $b = 0$, O

QUE IMPLICA $\langle Ax, x \rangle = dx_2^2 \geq 0$, COMO QUERÍAMOS.

SE $a > 0$, ENTÃO COMO ANTES TEMOS

$$\left(\sqrt{a}\,x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}}x_2\right)^2 + x_2^2\left(\frac{ad - b^2}{a}\right).$$

COMO TUDO AÍ É POSITIVO, TEREMOS $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

SE TIVERMOS $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -d \end{pmatrix}$ POSITIVA SEMIDEFINIDA,

ENTÃO $-a \geq 0$, $-d \geq 0$ E $ad - b^2 \geq 0$, ISTO É

$a \leq 0$, $d \leq 0$ E $ad - b^2 \geq 0$. ALÉM DISSO,

$\langle -Ax, x \rangle \geq 0$, OU $-\langle Ax, x \rangle \geq 0$, OU $\langle Ax, x \rangle \leq 0$.

PORTANTO, SE $a \leq 0$, $d \leq 0$ E $ad - b^2 \geq 0$, ENTÃO

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ É NEGATIVA SEMIDEFINIDA.

A SERÁ POSITIVA DEFINIDA SE, E SOMENTE SE,

$a > 0$ E $ad - b^2 > 0$.

$\Rightarrow$ TOMANDO $x = (1,0)$, $\langle Ax, x\rangle = a > 0$. ESCREVENDO

$$\langle Ax, x\rangle = \left(\sqrt{a}\, x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}} x_2\right)^2 + x_2^2 \frac{(ad - b^2)}{a}$$

E TOMANDO $x_1 = \frac{-b}{a} x_2$,

TEMOS $0 < x_2^2 \frac{(ad - b^2)}{a}$. COMO $x_2 \neq 0$, ISSO DÁ

$ad - b^2 > 0$.

$\Leftarrow$ NOVAMENTE, $\langle Ax, x\rangle = \left(\sqrt{a}\, x_1 + \frac{b}{\sqrt{a}} x_2\right)^2 + x_2^2 \frac{(ad - b^2)}{a}$.

COMO TUDO É ESTRITAMENTE POSITIVO (POIS $ad - b^2 > 0$

E $a > 0$), VEM $\langle Ax, x\rangle$, COMO QUERÍAMOS.

17) a) Tome $x<y$, $x'<y'$, $x \leq x'$ e $y \leq y'$.

Suponha primeiro que $x=x'$. Então, valerá

$$f(\alpha y'+(1-\alpha)x) \leq \alpha f(y')+(1-\alpha)f(x) = f(x)+\alpha(f(y')-f(x)).$$

Isso implica $f(x+\alpha d)-f(x) \leq \alpha(f(y')-f(x))$. Tome

α tal que $\alpha y'+(1-\alpha)x = y$ $\left(\text{Basta definir } \alpha := \frac{y-x}{y'-x} \in (0,1]\right)$

Isso nos dará $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y')-f(x)}{y'-x}$, como queríamos.

Se $y=y'$, então $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$,

o que implica $f(\alpha x+(1-\alpha)y)-f(y) \leq \alpha(f(x)-f(y))$.

Defina α tal que $\alpha x+(1-\alpha)y = x'$ $\left(\text{isto é, } \alpha = \frac{x'-y}{x-y} \in [0,1]\right)$.

Logo, $\frac{f(x')-f(y)}{x'-y} \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, como queríamos.

Por fim, vale $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(x')}{y-x'} \leq \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}$

Pelos dois casos que provamos acima. —— 4 —— // ——

b) TOME $x \in \mathbb{R}$. DEFININDO A FUNÇÃO

$g(y) := \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ VEMOS QUE ELA É CRESCENTE EM

$y \in (x, \infty)$ PELO ITEM a). TOMANDO $y' < x$,

TEMOS $g(y) \geq \dfrac{f(y') - f(x)}{y' - x}$. LOGO, g É

LIMITADA INFERIORMENTE. PORTANTO, TOMANDO $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq (x, \infty)$

COM $y_n \downarrow x$, GANHAMOS $\left(\dfrac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x}\right)_{n=1}^{\infty}$ SEQUÊNCIA

DECRESCENTE E LIMITADA INFERIORMENTE. LOGO, O LIMITE

EXISTE, ISTO É $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} = f^{+}(x)$, POR DEFINIÇÃO.

O CASO PARA f^{-} É ANÁLOGO.

c) TOME $x < x'$. NOVAMENTE POR a), TEMOS

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(x'+h)-f(x')}{h}.$$

TOMANDO O LIMITE EM $h \downarrow 0$, TEMOS $f^+(x) \leq f^+(x')$, COMO QUERÍAMOS.

O CASO PARA f^- É ANÁLOGO.

—— // —— // ——

d) DADO $x_0 \in \mathbb{R}$ E f^+ CONTÍNUA EM x_0 E $h > \delta > 0$.

DEFINA $y' := x_0 + h + \delta$, $x' := x_0 + h$, $y := x_0$, $x := x_0 - h$.

LOGO, POR a), TEMOS

$$\frac{f(x_0+h+\delta)-f(x_0+h)}{\delta} \geq \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$\geq \frac{f(x_0-h+\delta)-f(x_0-h)}{\delta}.$$

TOMANDO $\delta \downarrow 0$, TEMOS

$$f^+(x_0+h) \geq \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \geq f^+(x_0-h).$$

TOMANDO $h \downarrow 0$,

PELA CONTINUIDADE DE f^+ VEM $f^+(x_0) \geq f^-(x_0) \geq f^+(x_0)$.

LOGO, $f^-(x_0) = f^+(x_0)$. COMO AS DERIVADAS LATERAIS SÃO IGUAIS, $f^-(x_0) = f^+(x_0) = f'(x_0)$, COMO QUERÍAMOS.

—— // —— // ——

e) TOME $h>0$ E NOTE QUE

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{*}{\geq} f^{+}(x_0) \geq m \geq f^{-}(x_0) \overset{**}{\geq} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}.$$

REARRANJANDO $*$, TEMOS $f(x_0+h) \geq f(x_0) + mh$.

REARRANJANDO $**$, TEMOS $f(x_0-h) \geq f(x_0) + m(-h)$.

PORTANTO, SE $x > x_0$, USAMOS $*$ E DEFINIMOS $h := x - x_0$, NOS DANDO $f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0)$.

SE $x < x_0$, USAMOS $**$ E DEFINIMOS $h := x_0 - x$, GANHANDO $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$.

(18) TOME $(u_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq U$ COM $u_m \to u$.

COMO $u_m \in U$, EXISTE $x_m \in X$ TAL QUE $u_m[i] \leq U_i(x_m[i])$ PARA TODO i. COMO X É COMPACTO, EXISTE SUBSEQUÊNCIA $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ CONVERGENTE TAL QUE $x_{m_k} \xrightarrow{k} x \in X$. LOGO, TEMOS $u_{m_k}[i] \leq U_i(x_{m_k}[i])$ PARA TODO i, k. FAZENDO $k \to \infty$, PELA CONTINUIDADE DE U_i TEMOS $u[i] \leq U_i(x[i])$. LOGO, $u \in U$, MOSTRANDO QUE U É FECHADO.

TOME u, $u' \in U$, $\alpha \in [0,1]$. COMO $u, u' \in U$, EXISTEM $x, x' \in X$ TAIS QUE $u[i] \leq U_i(x[i])$ E $u'[i] \leq U_i(x'[i])$. MULTIPLICANDO A PRIMEIRA DESIGUALDADE POR α, A SEGUNDA POR $(1-\alpha)$, SOMANDO AS DUAS E USANDO A CONCAVIDADE DE U_i, TEMOS

$$\alpha u[i] + (1-\alpha) u'[i] \leq \alpha U_i(x[i]) + (1-\alpha) U_i(x'[i]) \leq$$

$$\leq U_i(\alpha x[i] + (1-\alpha) x'[i]).$$ COMO X É CONVEXO, $\alpha x + (1-\alpha) x' \in X$.

LOGO, $\alpha u + (1-\alpha) u' \in U$ E U É CONVEXO.

$\square$

19 NOTE QUE SE $\bar{u} \in UP$, ENTÃO

$\bar{u} \in U \setminus RI\, U$. PELO TEOREMA DO HIPERPLANO DE

SUPORTE, EXISTEM $\lambda \neq 0$ TAL QUE $\langle \lambda, \bar{u} \rangle = \max_{u \in U} \langle \lambda, u \rangle$,

ISTO É, $\langle \lambda, \bar{u} \rangle \geq \langle \lambda, u \rangle$ PARA TODO $u \in U$. COMO $\bar{u} \in U$, ENTÃO

EXISTE $x \in X$ COM $\bar{u}_i \leq U_i(x_i)$ PARA TODO i. TOME $\varepsilon > 0$.

DEFINA $u := (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i - \varepsilon, \bar{u}_{i+1}, \ldots, \bar{u}_I)$.

NOTE QUE $u \in U$. LOGO, TEMOS QUE

$\langle \lambda, \bar{u} \rangle \geq \langle \lambda, u \rangle$, O QUE IMPLICA $\langle \lambda, \bar{u} - u \rangle \geq 0$, OU

$\lambda_i \varepsilon \geq 0$. LOGO, $\lambda_i \geq 0$. PORTANTO, $\lambda \in \mathbb{R}^I_+ \setminus \{0\}$,

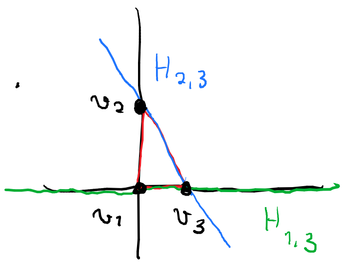
COMO QUERÍAMOS. $\triangle$

20 PRIMEIRO, ALGUMAS PRELIMINARES. NO $\mathbb{R}^2$, TODO HIPERPLANO É DESCRITO PELO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO $f(x) = ax + b$ OU POR RETAS VERTICAIS $R_c := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (c, x_2),\ x_2 \in \mathbb{R} \}$.

NOTE QUE DA FUNÇÃO GANHAMOS $x_2 = ax_1 + b$, QUE REARRANJANDO É $b = -ax_1 + 1 \cdot x_2 = \langle x, (-a, 1) \rangle$.

SEGUNDO, SE DIZEMOS QUE $f(x) = ax + b$ É MAIS INCLINADA QUE $g(x) = a'x + b$ SE $|a| > |a'|$.

PORTANTO, VAMOS FAZER O SEGUINTE. PEGUE O TRIÂNGULO $T := \text{CON}\{(0,0), (0,2), (1,0)\}$ E FIXE UM VÉRTICE, DIGAMOS $v_3 := (1,0)$. A RETA QUE PASSA POR $v_2 := (0,2)$ E v_3 É UM HIPERPLANO.



QUEREMOS GIRAR O HIPERPLANO $H_{2,3}$ SOBRE v_3 PARA DIREITA ATÉ CHEGAR NO HIPERPLANO $H_{1,3}$, QUE É A RETA QUE PASSA SOBRE v_1 E v_3.

COMO VIMOS ACIMA, OS HIPERPLANOS SÃO DADOS PELOS $x \in \mathbb{R}^2$ TAIS QUE $\langle x, (-a, 1) \rangle = b$. COMO QUEREMOS GIRAR SOBRE v_3, PRECISAMOS QUE OS HIPERPLANOS PASSEM POR v_3. LOGO, $b = \langle v_3, (-a, 1) \rangle = -a$. PORTANTO, OS HIPERPLANOS EM v_3

VÃO SER DO FORMATO $H_a^3 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (-a,1) \rangle = -a \}$.

AGORA, BASTA ACHAR AS RESTRIÇÕES EM a PARA QUE ELES SEJAM HIPERPLANOS DE SUPORTE.

O HIPERPLANO $H_{0,3}$ É DADO PELA RETA $f(x) = -2x + 2$.

COMO QUEREMOS QUE ELE GIRE PARA A DIREITA, PRECISAMOS DE RETAS MAIS INCLINADAS. LOGO, $a \leq -2$. A RETA VERTICAL EM v_3 É $V_3 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid (1, x_2), x_2 \in \mathbb{R} \}$.

POR FIM, COMO ESTAMOS GIRANDO DA RETA VERTICAL EM v_3 ATÉ O HIPERPLANO $H_{1,3}$, TEREMOS $a \geq 0$.

PORTANTO OS HIPERPLANOS DE SUPORTE EM v_3 SERÃO

$\{ \{ H_a^3 \mid a \leq -2 \text{ ou } a \geq 0 \}, V_3 \}$.

O PROCEDIMENTO SERÁ ANÁLOGO PARA v_1 E v_2.

OS HIPERPLANOS SOBRE v_1 SATISFAZEM $\langle (0,0), (-a,1) \rangle = b = 0$.

LOGO, $H_a^1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (-a,1) \rangle = 0 \}$. COMO COMEÇAMOS EM $H_{1,3}$ E ESTAMOS GIRANDO PARA DIREITA, TEREMOS $a \leq 0$.

SENDO $V_1 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid (0, x_2), x_2 \in \mathbb{R} \}$ A RETA VERTICAL SOBRE v_2, TEMOS OS HIPERPLANOS DE SUPORTE EM v_2 $\{ \{ H_a^1 \mid a \leq 0 \}, V_1 \}$.

PARA v_2, TEMOS $\langle (0,2), (-a,1) \rangle = b = 2$, $H_a^2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (-a,1) \rangle = 2 \}$.

TEREMOS $a \geq 0$ E $a \geq -2$. LOGO, OS HIPERPLANOS DE SUPORTE EM v_2 SERÃO $\{ \{ H_a^2 \mid a \geq -2 \} \}$.

(21) NOTE QUE O SISTEMA DADO ESTÁ NO FORMATO $A^T y = b$ E $y := (y_1, y_2, y_3) \geq 0$, ONDE

$$A^T := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{E} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

LOGO, PARA ISSO NÃO TER SOLUÇÃO PELO LEMA DE FARKAS, PRECISAMOS QUE $Ax \leq 0$ E $\langle b, x \rangle > 0$ PARA ALGUM $x \in \mathbb{R}^2$.

VAMOS MOSTRAR ISSO.

TEMOS $Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$ E

$\langle b, x \rangle = \langle (1,0), (x_1, x_2) \rangle = x_1$. LOGO, PRECISAMOS DE $x_1 > 0$

E $\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix} \leq 0$, O QUE IMPLICA $x_2 \leq 0$. TOMANDO

$x_1 = 1$ E $x_2 = -2$, TEMOS $x_1 > 0$, $2x_1 + x_2 = 2 - 2 = 0 \leq 0$,

$x_2 = -2 \leq 0$ E $2x_2 - x_1 = -4 - 1 = -5 \leq 0$, COMO QUERÍAMOS.

PELO LEMA DE FARKAS, O SISTEMA DADO NO EXERCÍCIO NÃO TERÁ SOLUÇÃO. $\square$

(22) MONTANDO O LAGRANGEANO, TEMOS

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) := \sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_2+1} + \lambda\left(2 - p_1x_1 - p_2x_2\right) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2.$$

AS CONDIÇÕES DE KKT SÃO

$$[x_1]: \frac{1}{2}(x_1+1)^{-1/2} - \lambda p_1 + \mu_1 = 0, \quad [x_2]: \frac{1}{2}(x_2+1)^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 + \mu_2 = 0$$

$$\lambda \geq 0, \ \mu_1 \geq 0, \ \mu_2 \geq 0, \quad \lambda(2 - p_1x_1 - p_2x_2) = 0, \quad \mu_1 x_1 = 0, \quad \mu_2 x_2 = 0.$$

COMO O PROBLEMA É CÔNCAVO, SE ACHARMOS PONTO (x_1, x_2) E MULTIPLICADORES SATISFAZENDO ACIMA, O PONTO SERÁ ÓTIMO.

CASO 1: $x_1 > 0, x_2 > 0$. ISSO IMPLICA $\mu_1 = 0$ E $\mu_2 = 0$. PELA MONOTONICIDADE DA FUNÇÃO OBJETIVO, $p_1x_1 + p_2x_2 = 2$. DIVIDINDO AS DUAS CPO, TEMOS

$$\frac{(x_2+1)^{1/2}}{(x_1+1)^{1/2}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot (x_2+1) - 1 = x_1.$$

JOGANDO NA RESTRIÇÃO, TEMOS

$$p_1\left(\frac{p_2^2}{p_1^2}(x_2+1) - 1\right) + p_2 x_2 = 2.$$

REARRANJANDO, VEM

$$x_2 = \frac{2p_1 + p_1^2 - p_2^2}{p_1p_2 + p_2^2}.$$

POR SIMETRIA,

$$x_1 = \frac{2p_2 + p_2^2 - p_1^2}{p_1p_2 + p_1^2}.$$

NOTE QUE $\lambda \geq 0$, POIS $\lambda = \frac{1}{2p_1}(x_1+1)^{-1/2}$. PARA $x_1, x_2 > 0$, PRECISAMOS

$$x_2 = \frac{2p_1 + p_1^2 - p_2^2}{p_1 p_2 + p_2^2} > 0 \quad \text{E} \quad x_1 = \frac{2p_2 + p_2^2 - p_1^2}{p_1 p_2 + p_1^2} > 0.$$

LOGO, $\sqrt{2p_1 + p_1^2} > p_2$ E $\sqrt{2p_2 + p_2^2} > p_1$.

CASO 2: $x_1 > 0,\ x_2 = 0$. NESTE CASO, $\mu_1 = 0$,

$p_1 x_1 = 2$, O QUE IMPLICA $x_1 = \frac{2}{p_1}$ E

$$\frac{1}{2p_1}(x_1 + 1)^{-1/2} = \lambda = \frac{1}{2p_1}\left(\frac{2}{p_1} + 1\right)^{-1/2}, \quad \text{OU} \quad \lambda = \frac{1}{2\sqrt{2p_1 + p_1^2}}.$$

AQUI, TEREMOS $\mu_2 \geq 0$ SE $0 \leq \mu_2 = \lambda p_2 - \frac{1}{2}(0+1)^{-1/2} = \lambda p_2 - \frac{1}{2}$

LOGO, $\lambda \geq \frac{1}{2p_2}$. ISSO IMPLICA $\frac{1}{2\sqrt{2p_1 + p_1^2}} \geq \frac{1}{2p_2}$.

REARRANJANDO, $p_2 \geq \sqrt{2p_1 + p_1^2}$.

CASO 3: $x_1 = 0,\ x_2 > 0$. POR SIMETRIA DO CASO 2, $\mu_2 = 0$, $x_2 = \frac{2}{p_2}$, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2p_2 + p_2^2}}$, $\mu_1 \geq 0$ COM $p_1 \geq \sqrt{2p_2 + p_2^2}$.

CASO 4: $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. NÃO PODE SER ÓTIMO, POIS A RESTRIÇÃO $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq 2$ TEM QUE VALER COM IGUALDADE. $\blacksquare$

23) A função $|x|$ é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, o subgradiente será igual à derivada.

Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Portanto, o subgradiente é -1. Se $x > 0$, então $|x| = x$. Portanto, o subgradiente é 1.

E se $x = 0$? Bom, pelo exercício 17 e), vimos que se $f^-(x_0) \leq m \leq f^+(x_0)$, então m é subgradiente em x_0. Definindo $f(x) := |x|$, tomando $h > 0$ e $x_0 := 0$, temos $f^-(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{-h} = -1$ e

$f^+(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{h} = 1$. Logo, todo ponto m tal que $-1 \leq m \leq 1$ é subgradiente de f em 0.

A recíproca é verdadeira? Isto é, se m é subgradiente, então $m \in [-1, 1]$? Vou provar a contrapositiva. Tome $m > 1$. Tome $z = 1$. Logo, valerá que $f(z) < \langle m, z - x_0 \rangle + f(x_0)$, pois isso é igual a $|z| < m(z - 0) + |0|$, ou $1 < m$. O caso para $m < -1$ é análogo. Logo, o conjunto dos subgradientes de f em 0 é $[-1, 1]$. △

(24) PRIMEIRO, VAMOS CHECAR CONCAVIDADE ESTRITA,

f VAI SER ESTRITAMENTE CÔNCAVA EM $x \gg 0$ SE

$\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} < 0$ E $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 > 0$ (PELOS EXERCÍCIOS 15 E 16).

ISSO É O MESMO QUE $a(a-1)\, x_1^{a-2}\, x_2^{b} < 0$ E

$\left(a(a-1)\, x_1^{a-2}\, x_2^{b}\right)\left(b(b-1)\, x_1^{a}\, x_2^{b-2}\right) > \left(ab\, x_1^{a-1}\, x_2^{b-1}\right)^2$. DO

PRIMEIRO, TIRAMOS $a-1<0$ (POIS TODOS OUTROS TERMOS SÃO POSITIVOS).

DO SEGUNDO, TIRAMOS $\left((a-1)\, x_1^{a-2}\, x_2^{b}\right)\left((b-1)\, x_1^{a}\, x_2^{b-2}\right) > ab\, x_1^{2(a-1)}\, x_2^{2(b-1)}$,

OU $\left((a-1)(b-1) - ab\right) x_1^{2(a-1)}\, x_2^{2(b-1)} > 0$. ISSO É POSITIVO

SE $(a-1)(b-1) - ab = \cancel{a}b - a - b + 1 - \cancel{a}b > 0$, OU $1 > a+b$.

LOGO, SE $a+b<1$ E $a<1$, ENTÃO f É ESTRITAMENTE CÔNCAVA.

PARA CONCAVIDADE NORMAL, AS CONTAS SERÃO AS MESMAS COM DESIGUALDADE FRACA, ALÉM DE $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \leq 0$.

LOGO, f É CÔNCAVA SE, E SÓ SE, $a+b \leq 1$, $a \leq 1$ E $b \leq 1$

ISSO SÓ GARANTE CONCAVIDADE EM $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, MAS PELA CONTINUIDADE DE f EM TODO DOMÍNIO, f SERÁ CÔNCAVA EM TODO DOMÍNIO.

SABEMOS QUE SE $a+b \leq 1$, ENTÃO f É CÔNCAVA.

PORTANTO, FALTA VER SE $a+b=1$ PODE DAR f ESTRITAMENTE CÔNCAVA. MAS ISSO É FALSO, POIS $f\left(\frac{1}{2}(x,x) + \frac{1}{2}(y,y)\right) =$

$$= \left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^{a} \left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^{1-a} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x^{a}x^{1-a} + \frac{1}{2}y^{a}y^{1-a}$$

$$= \frac{1}{2}f(x,x) + \frac{1}{2}f(y,y).$$