

Lista 1

1. Num espaço vetorial, se λ for um escalar e v um vetor, $\lambda v = 0 \iff \lambda = 0$ ou $v = 0$.
2. Seja l^0 o conjunto das seqüências reais:

$$l^0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Verifique que l^0 é um espaço vetorial se definirmos

$$\begin{cases} (x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \\ \lambda \cdot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}. \end{cases}$$

3. Seja l^2 o espaço das seqüências reais de quadrado somável,

$$l^2 = \left\{ x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}.$$

Verifique que l^2 é um subespaço vetorial de l^0 .

4. Seja $0 < p < \infty$ e $l^p = \{x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$. Então l^p é um subespaço vetorial de l^0 .
5. Qual a dimensão de \mathbb{C} como espaço vetorial real?
6. Seja um conjunto K munido de uma adição $+ : K \times K \rightarrow K$ e uma multiplicação $\cdot : K \times K \rightarrow K$. Notação: $a + b := + (a, b)$ e $ab = a \cdot b := \cdot (a, b)$. Dizemos que K é um corpo (comutativo) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:
 - $\alpha)$ $a + b = b + a$ para todos a, b em K (comutatividade da adição)
 - $\beta)$ $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos a, b, c em K (associatividade da adição)
 - $\gamma)$ Existe $0 \in K$ tal que $a + 0 = a$ para todo a em K (elemento neutro da adição)
 - $\delta)$ Para todo $a \in K$ existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$. (elemento inverso aditivo)
 - $\epsilon)$ $ab = ba$ para todos a, b em K (comutatividade da multiplicação)

- $\zeta)$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatividade do produto)
- $\eta)$ Existe $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$ (elemento neutro da multiplicação)
- $\theta)$ Para todo $a \in K$, $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. (elemento inverso da multiplicação)
- $\kappa)$ $a(b + c) = ab + ac$ (distributividade da multiplicação com respeito à adição)
- $\lambda)$ $1 \neq 0$.

Apresente três exemplos de corpos infinitos.

Demonstre que:

- (a) Os elementos neutros da adição e da multiplicação do corpo K são únicos.
 - (b) Se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.
 - (c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ e que $a \cdot 0 = 0$.
 - (d) $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ com $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ e $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ é um corpo com dois elementos.
 - (e) Se $a + b = a$ para algum $a \in K$ então $b = 0$.
 - (f) Se $a + b = 0$ então $b = -a$.
 - (g) Qual o valor de $-(-a)$?
7. Verifique que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um corpo.
8. Sejam V e W espaços vetoriais. Então o produto cartesiano, $V \times W = \{(x, y) : x \in V, y \in W\}$ também é um espaço vetorial se definirmos

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w'); \\ \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$

Verifique essa afirmação e calcule a dimensão de $V \times W$ para V e W de dimensão finita.

9. Sejam U_1 e U_2 dois subespaços do espaço vetorial V . Suponha que $U_1 \cup U_2$ é um subespaço vetorial. Então $U_1 \subset U_2$ ou $U_2 \subset U_1$.

10. Seja $f \in V' \setminus \{0\}$. Demonstre que $f(V) = \mathbb{R}$.
11. Encontre um espaço vetorial V e uma transformação linear injetiva $T : V \rightarrow V$ que não é invertível.
12. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$. Mostre que um subconjunto W de V é um subespaço se e somente se existe uma transformação linear $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\ker T = W$.