

09/02/2026

Análise II

Monitor: Marcos Antonio Alves

Programa

- Álgebra linear: espaços vetoriais, bases, operadores lineares, espaço quociente, adjunto, produto interno, ortogonalização de Gram–Schmidt.
- Espaços métricos: topologia dos espaços métricos, continuidade, espaços completos. Completamento. Compacidade. Espaços normados, teorema do ponto fixo de Banach.
- Análise convexa: Variedade afim. Ponto interno. Separação de convexos. Funções convexas, subgradiente.
- Otimização: Multiplicadores de Kuhn-Tucker, programa convexo, ponto de sela e Lagrangeano

Para espaço vetoriais recomendo “Finite Dimensional Vector Spaces” do P. R. Halmos. Para espaços métricos o livro do Elon Lages “Espaços métricos”. O livro do T. Rockafellar “Convex Analysis” tem muito mais do que necessitamos.

Álgebra linear

Espaço vetorial

Um espaço vetorial (real) é uma tripla, $(V, +, \cdot)$ tal que: V é um conjunto, $+ : V \times V \rightarrow V$ e $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ com as seguintes propriedades:

- I.** Comutatividade da adição: $v + w = w + v$ para todo v, w elementos de V ;
- II.** Elemento neutro da adição: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \forall v \in V$;
- III.** Inverso da adição: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;
- IV.** Associatividade: $v + (w + u) = (v + w) + u$;
- V.** para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$;
- VI.** $1 \cdot v = v$;

VII. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w;$

VIII. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v.$

Notação 1 Frequentemente vamos omitir o ponto. Assim $\lambda v = \lambda \cdot v$. Os elementos de V são denominados vetores. E os números reais são os escalares.

Exemplo 1 O espaço vetorial mais simples é $V = \{0\}$. $V = \mathbb{R}$ é um espaço vetorial se $\lambda \cdot v = \lambda v$ (a multiplicação em \mathbb{R}).

Exemplo 2 \mathbb{R}^n é um espaço vetorial: Se $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n); \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n); \\ 0 &= (0, \dots, 0), -x = (-x_1, \dots, -x_n). \end{aligned}$$

sendo $x_i + y_i$ a soma dos escalares x_i e y_i e λx_i o produto dos escalares λ e x_i .

Exemplo 3 O espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{R} , denotado \mathcal{C} é um espaço vetorial real. A soma de $f, g \in \mathcal{C}$ é $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $a \leq t \leq b$. E $(\lambda f)(t) = \lambda \cdot f(t)$.

Dependência linear

Definição 1 Seja V um espaço vetorial real. Os vetores, v_1, v_2, \dots, v_m são linearmente dependentes se existirem escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ nem todos nulos tais que $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0$.

Exemplo 4 Toda família finita, v_1, v_2, \dots, v_m , que contém a origem é linearmente dependente. Pois se, digamos, $v_1 = 0$ então

$$\begin{aligned} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m &= 0, \\ (1, 0, \dots, 0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Comentário 1 Naturalmente se os vetores não forem linearmente dependentes dizemos que são linearmente independentes. Assim

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m.$$

Definição 2 Um vetor x é uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_m se existirem escalares $(\lambda_i)_{i=1}^m$ tais que $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$.

Lema 1 Suponhamos y uma combinação linear de x_1, \dots, x_p e que por sua vez cada x_i seja combinação linear de v_1, \dots, v_m . Então y é combinação linear de v_1, \dots, v_m .

A demonstração é imediata. Se $y = \sum_{j=1}^p \mu_j x_j$ e $x_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{ji} v_i$ temos para $\gamma_i = \sum_{j=1}^p \mu_j \lambda_{ij}$

$$y = \sum_{j=1}^p \mu_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_{ji} v_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^p \mu_j \lambda_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^m \gamma_i v_i.$$

Teorema 1 Suponhamos que $v_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ e v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente dependentes. Existe então $k \geq 2$ tal que v_k seja combinação linear de v_1, \dots, v_{k-1} .

Demonstração: Seja $k \leq n$ o primeiro natural tal que v_1, v_2, \dots, v_k são linearmente dependentes. Então $k \neq 1$ pois $v_1 \neq 0$ é linearmente independente. Portanto $k \geq 2$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

nem todos α_i nulos. Mas então $\alpha_k \neq 0$ pela escolha de k . Portanto

$$v_k = (-\alpha_1) \alpha_k^{-1} v_1 + \dots + (-\alpha_{k-1}) \alpha_k^{-1} v_{k-1}.$$

Comentário 2 É claro que se v_k for combinação linear de v_1, \dots, v_{k-1} então v_1, \dots, v_{k-1}, v_k e v_1, \dots, v_n são linearmente dependentes. Pois se $v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}$ escolhemos $\mu_k = -1, \mu_j = 0$ para $j > k$ e obtemos $\sum_i \mu_i v_i = 0$.

Definição 3 Um conjunto $\mathcal{G} \subset V$ é gerador se todo vetor de V for uma combinação linear de elementos de \mathcal{G} .

Bases

Definição 4 (base) Uma base do espaço vetorial V é um conjunto $\mathfrak{X} \subset V$ gerador e linearmente independente.

Definição 5 O espaço vetorial tem dimensão finita se possuir uma base finita.

Exemplo 5 \mathbb{R}^n tem dimensão n . Se $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, $\mathfrak{X} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base: para $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) = \\ &x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \end{aligned}$$

E se $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = 0$ então $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_i \equiv 0$.

Teorema 2 *Todo espaço vetorial possui uma base.*

Comentário 3 A demonstração será omitida pois envolve o lema de Zorn que não temos tempo para estudar.

Teorema 3 *Duas bases finitas de V tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Seja $\mathcal{G} = \{x_1, \dots, x_n\}$ gerador e $\mathfrak{X} = \{y_1, \dots, y_m\}$ linearmente independente. Então

$$y_m, x_1, \dots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente pois y_m é combinação linear de x_1, \dots, x_n . Pelo teorema 1 existe x_i combinação linear de y_m, x_1, \dots, x_{i-1} . Podemos então eliminar x_i da lista. Então

$$y_m, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

é gerador. Se $m = 1$ então $n \geq 1$. Se $m > 1$ repetimos o processo:

$$y_{m-1}, y_m, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente. Portanto podemos remover um $x_j, j \neq i$. Se $m > n$ o conjunto dos “xs” vai acabar antes dos “ys”, uma contradição com a independencia linear dos ys. Então $m \leq n$. Sejam agora \mathcal{G} e \mathfrak{X} bases. Revertendo os papéis podemos considerar \mathfrak{X} gerador e \mathcal{G} linearmente independente. Então $m \geq n$ e finalmente $m = n$.

Corolário 1 *Se V tem um conjunto gerador finito então V tem dimensão finita.*

Corolário 2 *Se V tem dimensão n então v_1, \dots, v_n, v_{n+1} são linearmente dependentes.*

Subespaços

Se A e B são subconjuntos de V , definimos $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Definição 6 Um subconjunto W do espaço vetorial V é um subespaço de V se for um espaço vetorial com a soma e multiplicação herdadas de V . Ou seja: $0 \in W$ e

$$\begin{aligned} v, w \in W &\implies v + w \in W; \\ \lambda \in \mathbb{R}, w \in W &\implies \lambda w \in W. \end{aligned}$$

Por exemplo $-w = (-1) \cdot w \in W$. Em geral W não-vazio é um subespaço se e somente se para todo $x, y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + y \in W$. Os subespaços $\{0\}$ e V são subespaços triviais.

Lema 2 Se W_i é subespaço de V para cada $i \in I$ então $\cap_{i \in I} W_i$ também é um subespaço de V .

A verificação é imediata: se $x, y \in \cap_{i \in I} W_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então para todo $i \in I$, $x, y \in W_i \implies \lambda x + y \in W_i$ e logo $\lambda x + y \in \cap_{i \in I} W_i$.

Definição 7 Seja $S \subset V$. Definimos o espaço vetorial gerado por S :

$$[S] = \cap \{W \subset V : W \text{ é subespaço e contém } S\}.$$

Lema 3 $[S]$ coincide com o conjunto de combinações lineares $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ com $n \geq 1$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in S$, $1 \leq i \leq n$.

Demonstração: Seja $A = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$. É imediato que $S \subset A \subset [S]$. Sejam agora $w_1, w_2 \in A$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Para cada $i = 1, 2$ existem $v_{ij} \in S, \theta_{ij} \in \mathbb{R}$ e $n_i \geq 1$ tais que $w_i = \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij}$. Então

$$\sum_i \mu_i w_i = \sum_i \mu_i \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij} = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i \theta_{ij} v_{ij} \in A.$$

Portanto A sendo espaço vetorial, $A \supset [S]$ e logo $A = [S]$.

Exemplo 6 Se U e W são subespaços de V , $U+W$ é um subespaço. E $[U \cup W] = U+W$.

Para verificarmos notemos que $x, y \in U+W$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} x &= u+w, y = u'+w', \alpha x + \beta y = \\ \alpha(u+w) + \beta(u'+w') &= (\alpha u + \beta u') + (\alpha w + \beta w') \in U+W. \end{aligned}$$

Portanto $U+W$ é um subespaço e contém $[U \cup W]$. E $[U \cup W] \supset U+W$

Definição 8 U e W são subespaços complementares de V se

$$U+W = V \text{ e } U \cap W = \{0\}.$$

Notação 2 $V = U \oplus W$. Nesse caso dizemos que V é soma direta de U e W .

Exemplo 7 Seja $V = \mathbb{R}^2$. E $U = [(1, 1)]$, $W = [(1, -1)]$. Então $U \oplus W = \mathbb{R}^2$.

11/02

Lema 4 Seja V espaço vetorial de dimensão finita. Se v_1, \dots, v_p são linearmente independentes, existem v_{p+1}, \dots, v_n em V tais que v_1, \dots, v_n é uma base de V .

Demonstração: Se v_1, \dots, v_p for gerador já temos uma base e não temos nada a fazer. Se não for gerador existe $v_{p+1} \in V \setminus [v_1, \dots, v_p]$. Então v_1, \dots, v_p, v_{p+1} é linearmente independente. Se a família for geradora terminamos. Caso não seja existe $v_{p+2} \in V$ que não é combinação linear de v_1, \dots, v_{p+1} . E portanto $v_1, \dots, v_{p+1}, v_{p+2}$ é l.i. Prosseguindo indutivamente obtemos uma seqüência v_1, \dots, v_{p+k} l.i. sempre que v_1, \dots, v_{p+k-1} não for gerador. Esse processo termina quando $p+k = \dim V$. E então obtemos uma base de V .

Teorema 4 Todo subespaço vetorial de V possui um subespaço complementar.

Demonstração: Seja W subespaço próprio de V . Seja w_1, \dots, w_k base de W . Pelo lema anterior prolonguemos essa base de W a uma base de V : w_1, \dots, w_n . Seja $H = [w_{k+1}, \dots, w_n]$. Então $W + H = V$ e $W \cap H = \{0\}$. Pois se $x \in V$ temos $x = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + (\lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_n w_n) \in W + H$. Se $z \in W \cap H$ então

$$\begin{aligned} z &= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k = \lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_n w_n \\ \lambda_{k+1} w_{k+1} + \dots + \lambda_n w_n - \lambda_1 w_1 - \dots - \lambda_k w_k &= 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i. \end{aligned}$$

Teorema 5 $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ base de $U \cap W$. Podemos, aplicando o lemma 4, existem $u_1, \dots, u_k \in U$ tais que

$$v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, \dots, u_k$$

seja uma base de U . Aplicando o lemma 4 novamente existem w_1, \dots, w_t tais que

$$v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_t$$

é uma base de W . Note que $p+k = \dim U$ e $p+t = \dim W$. Verifiquemos que

$$v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_t$$

é base de $U + W$:

gerador) Seja $x \in U + W$. Então $x = u + w$ sendo $u \in U$ e $w \in W$. Existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_k$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j u_j.$$

Existem $\lambda'_1, \dots, \lambda'_p, \theta_1, \dots, \theta_t$ escalares tais que

$$w = \sum_{i=1}^p \lambda'_i v_i + \sum_{j=1}^t \theta_j w_j$$

e então

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j u_j + \sum_{i=1}^p \lambda'_i v_i + \sum_{j=1}^t \theta_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \lambda'_i) v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j u_j + \sum_{j=1}^t \theta_j w_j. \end{aligned}$$

l.i.) Suponhamos que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j u_j + \sum_{j=1}^t \theta_j w_j = 0.$$

Então $\sum_{j=1}^t \theta_j w_j = -\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^k \mu_j u_j \in U \cap W$. Existe então $\gamma_i, i \leq p$ tais que

$$\sum_{j=1}^t \theta_j w_j = \sum_{i=1}^p \gamma_i v_i \implies \sum_{i=1}^p \gamma_i v_i + \sum_{j=1}^t (-\theta_j) w_j = 0.$$

Pela independência linear de $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_t$ obtemos $\theta_j = 0, 1 \leq j \leq t$. Considerando agora

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^k \mu_j u_j = 0$$

vem $\lambda_i = 0$ e $\mu_j = 0$ pela independência linear de $v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, \dots, u_k$. Finalmente temos

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = p + k + t + p = \dim U + \dim W.$$

Transformações lineares

Se V e W são espaços vetoriais. Uma função $T : V \rightarrow W$ é linear se for aditiva e homogênea:

$$\begin{aligned} T(a + b) &= T(a) + T(b), a, b \in V \\ T(\lambda a) &= \lambda T(a), \lambda \in K, a \in V. \end{aligned}$$

Note que $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$. E $T(-v) = (-1)T(v) = -T(v)$. Podemos juntar as condições numa só:

$$T(\lambda a + b) = \lambda T(a) + T(b), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notação 3 O conjunto dos zeros de T é o núcleo (ou o kernel) de T . É denotado $\ker T$. A imagem de T é $T(V)$:

$$\begin{aligned}\ker T &= \{v \in V : T(v) = 0\}; \\ T(V) &= \text{ran } T = \{T(v) : v \in V\}.\end{aligned}$$

Ambos são subespaços vetoriais: Sejam $x, y \in \ker T$ e λ real. Então $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$ e então $\lambda x + y \in \ker T$. Se $u, w \in \text{ran } T$ existem $x, y \in V$ tais que $T(x) = u, T(y) = w$. Logo $T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y) = \lambda u + w \in \text{ran } T$.

Lema 5 $T : V \rightarrow W$ linear é injetiva se e somente se $T(v) = 0$ implica $v = 0$.

Demonstração: Se T for injetiva, $T(v) = 0 = T(0)$ e então $v = 0$. Recíprocamente suponhamos $\ker T = \{0\}$. Se $T(v) = T(w)$ então $T(v - w) = T(v) - T(w) = 0$ e então $v - w = 0 \implies v = w$.

Lema 6 Se T é injetiva e $\{v_1, \dots, v_n\}$ é l.i. então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ é l.i.

Demonstração: Pois se $\sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = 0$ pela linearidade $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i$.

A família das transformações lineares entre V e W , $\mathcal{L}(V, W)$, é um espaço vetorial: Se $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$,

$$\begin{aligned}(S + T)(v) &:= S(v) + T(v); \\ (\lambda S)(v) &= \lambda S(v).\end{aligned}$$

Definição 9 Os funcionais lineares de V são as transformações lineares entre V e \mathbb{R} .

Notação 4 $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$.

Dizemos que V' é o espaço dual de V . O espaço V'' , bi-dual.

Notação 5 Se $y' \in V'$ e $v \in V$ definimos $\langle v, y' \rangle = y'(v)$.

Seja v_1, \dots, v_n base de V . Então se $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ dizemos que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ são as coordenadas baricêtricas de x . Se

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

então $\lambda_i = \mu_i$, $1 \leq i \leq n$.

Teorema 6 Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial V . Sejam α_i , $1 \leq i \leq n$ escalares. Existe um e único $y' \in V'$ tal que $\langle v_i, y' \rangle = y'(v_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração: Existência. Para $x = \sum_i \lambda_i v_i$ seja $y'(x) = y'(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. Temos y' bem definida pois λ_i , $1 \leq i \leq n$ são univocamente determinados por x . Vamos verificar a linearidade: Se $y = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ e $r \in \mathbb{R}$ temos $rx + y = \sum_i (r\lambda_i + \mu_i) v_i$. Logo

$$y'(rx + y) = \sum_i (r\lambda_i + \mu_i) \alpha_i = r \sum_i \lambda_i \alpha_i + \sum_i \mu_i \alpha_i = ry'(x) + y'(y)$$

É imediato que $y'(v_i) = \sum_{j \neq i} 0\alpha_j + 1\alpha_i = \alpha_i$. Unicidade: óbvio.

Seja $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. (delta de Kronecker)

Teorema 7 Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V existe $\{y^1, \dots, y^n\}$ base¹ de V' tal que $\langle v_j, y^i \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq n$.

Demonstração: Pelo teorema anterior, existe para $j \leq n$, $y^j \in V'$ tal que $\langle v_i, y^j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i \leq n$. Verifiquemos que $\{y^1, \dots, y^n\}$ é base de V' . Seja $y' \in V'$. Seja $\alpha_i = y'(v_i)$. Então $y' = \sum_j \alpha_j y^j$ pois

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y' \right\rangle = \sum_i \lambda_i \langle v_i, y' \rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i.$$

Agora

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j \right\rangle &= \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \\ \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \alpha_j y^j \right\rangle &= \sum_j \alpha_j \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j \right\rangle = \sum_j \alpha_j \lambda_j = \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y' \right\rangle. \end{aligned}$$

Falta a independência linear: Se $\sum_j \alpha_j y^j = 0$ então $\sum_j \alpha_j y^j(v_i) = \alpha_i = 0$.

Corolário 3 $\dim V' = \dim V$.

¹chamada de base dual

Reflexividade do bidual

Dado $x \in V$ podemos definir um funcional $\Phi_x : V' \rightarrow K$ do bidual V'' da seguinte maneira:

$$\Phi_x(y') := \langle x, y' \rangle := y'(x).$$

É imediato de se verificar que Φ_x é linear.

Teorema 8 (reflexividade) *Para todo $z'' \in V''$ existe um único $x \in V$ tal que*

$$\langle y', z'' \rangle = \Phi_x(y') = \langle x, y' \rangle, \forall y' \in V'.$$

Demonstração: Seja $\Theta : V \rightarrow V''$, $\Theta(x) = \Phi_x$ para $x \in V$. Verifiquemos que Θ é linear: para $v, w \in V$ e r real, para todo $y' \in V'$,

$$\begin{aligned} \Theta(rv + w)(y') &= y'(rv + w) = ry'(v) + y'(w) = r\Theta(v)(y') + \Theta(w)(y') = \\ &= (r\Theta(v) + \Theta(w))(y'). \end{aligned}$$

Portanto $\Theta(rv + w) = r\Theta(v) + \Theta(w)$. Injetividade: Se $\Theta(v) = 0$ então $y'(v) = 0$ para todo $y' \in V'$. Se $v \neq 0$ seja $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ base de V . Então pelo teorema 6, para $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ existe $y' \in V'$ tal que $y'(v) = y'(v_1) = 1 \neq 0$. Logo $v = 0$. Agora $\dim V = \dim V''$ e Θ sendo linear injetiva, temos Θ sobrejetora.

Isomorfismo entre espaços vetoriais

Definição 10 *Os espaços vetoriais V e W são isomorfos se existir $T : V \rightarrow W$ linear, injetiva e sobrejetora.*

Comentário 4 *É imediato de se verificar que $T^{-1} : W \rightarrow V$ é linear, injetiva e sobrejetora.*

É imediato que espaços isomorfos tem a mesma dimensão. O próximo resultado é mais preciso.

Teorema 9 *Se V tem dimensão n então V é isomorfo a \mathbb{R}^n .*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ base de V . Para cada $x \in V$ existem únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Então

$$T(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

está bem definida. É imediato que $T(x) = 0 \iff x = 0$. Sejam $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então se $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ e $y = \sum_i \mu_i x_i$ temos $x + y = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) x_i$ e então $T(x + y) = (\lambda_i + \mu_i)_{i=1}^n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_n) = T(x) + T(y)$. E de $\theta x = \sum_i \theta \lambda_i x_i$ vem $T(\theta x) = \theta T(x)$.

Comentário 5 *Esse isomorfismo depende da escolha de uma base e isso limita a sua utilidade.*

13/02

Espaço quociente

Definição 11 Uma relação de equivalência no conjunto X é uma relação binária, \sim , tal que para todos $x, y, z \in X$:

1. $x \sim x$;
2. $x \sim y \implies y \sim x$;
3. $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$.

Para $x \in X$ seja $\bar{x} = \{y \in X : y \sim x\}$. É imediato de se verificar que se $\bar{x} \neq \bar{y}$ então $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Definimos $X/\sim = \{\bar{x} : x \in X\}$.

Definição 12 Seja W um subespaço de V . Para $x, y \in V$ defina² $x \sim y$ se $x - y \in W$. Temos que \sim é uma relação de equivalência em V :

1. $x \sim x$ pois $x - x = 0 \in W$
2. $x \sim y \implies y \sim x$ pois se $x - y \in W$ então $y - x = -(x - y) = (-1) \cdot (x - y) \in W$
3. $x \sim y$ e $y \sim z \implies x \sim z$ pois $x - z = (x - y) + (y - z) \in W + W = W$.

Os elementos equivalentes a x ,

$$\bar{x} = \{y \in V : y - x \in W\} = \{y : y \in x + W\} = x + W.$$

Para \bar{x} e \bar{y} e $\lambda \in K$ definimos

$$\begin{aligned}\bar{x} + \bar{y} &= \overline{x + y} \\ \lambda \bar{x} &= \overline{\lambda x}.\end{aligned}$$

Fica como exercício verificar que o quociente V/W com essa soma e produto por escalar é um espaço vetorial. É o espaço quociente de V por W . (corresponde a L no exemplo acima) Casos extremos: V/V é isomorfo à $\{0\}$ e $V/\{0\}$ é isomorfo à V .

Teorema 10 Sejam W e U espaços complementares de V . Então V/W é isomorfo a U .

² x é equivalente a y

Demonstração: Seja $T : U \rightarrow V/W$, $T(u) = u + W$. Notemos que T é linear pois

$$T(\alpha u + \beta u') = (\alpha u + \beta u') + W = \alpha(u + W) + \beta(u' + W) = \alpha T(u) + \beta T(u').$$

Se $T(u) = \bar{0} = W$ temos que $u + W = W$ e logo $u \in W \cap U = \{0\} \implies u = 0$. T é sobrejetora pois se $x \in V$ temos $x = u + w$ e $x + W = u + W$ portanto $T(u) = x + W$.

Corolário 4 Se V tem dimensão finita e W é subespaço de V , $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Teorema 11 Seja $T : V \rightarrow W$ linear. Então $V/\ker T$ é isomorfo a $T(V)$.

Demonstração: Seja $S : V/\ker T \rightarrow T(V)$ definida por

$$S(x + \ker T) = T(x).$$

S está bem definida pois se $x' + \ker T = x + \ker T$ então $x' - x \in \ker T$ e $Tx' - Tx = T(x' - x) = 0$. S é claramente sobrejetora. E se $S(x + \ker T) = 0$ então $T(x) = 0$ e $x \in \ker T$ e $x + \ker T = \bar{0}$.

Corolário 5 Se $T : V \rightarrow W$ linear. Então $\dim V = \dim \ker T + \dim T(V)$.

Espaços com produto interno

Definição 13 Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. linearidade na primeira variável: $\langle rx + y, z \rangle = r \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
2. Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. Positiva definida: $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ somente se $x = 0$.

Definição 14 Um espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno é um espaço Euclidiano.

Definição 15 A função $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é a norma Euclidiana. Os vetores de norma 1 são vetores unitários.

Exemplo 8 Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos o produto interno usual: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Exemplo 9 Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(s)g(s)ds$ é um produto interno.

Suponha que $f \neq 0$. Então existe $x^0 \in [a, b]$ tal que $f(x^0) \neq 0$ e logo $f^2(x^0) > 0$. Seja $\epsilon = \frac{f^2(x^0)}{2}$. Existe $\delta > 0$ tal que $|x - x^0| < \delta$, $x \in [a, b]$, $f^2(x) > f^2(x^0) - \epsilon = \epsilon > 0$. Logo

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(s)ds \geq \int_{x-\delta}^{x+\delta} f^2(s)ds > \epsilon \cdot 2\delta > 0.$$

Exemplo 10 Para $x, y \in l^2$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ é um produto interno em l^2 .

Definição 16 Os vetores x, y são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$.

O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. E é o único vetor que é ortogonal a si mesmo.

Teorema 12 (Cauchy-Schwarz) Para x, y no espaço euclidiano E ,

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y| \quad (*)$$

E vale a igualdade se e somente se x, y são linearmente dependentes.

Demonstração: Seja $f(\lambda) = |x + \lambda y|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle$. É imediato que $f(\lambda) \geq 0$. Expandindo o produto interno,

$$f(\lambda) = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Esse polinômio do segundo grau se tiver duas raízes distintas assumirá também valores negativos, uma impossibilidade. Portanto o discriminante

$$4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0.$$

E obtemos (*). Suponhamos que vale a igualdade $\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = 0$. Se $y = 0$ temos igualdade e x, y são linearmente dependentes. Se $y \neq 0$. Então $\lambda_0 = -\frac{2\langle x, y \rangle}{2\langle y, y \rangle} = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ é tal que $f(\lambda_0) = 0$. Mas então $|x + \lambda_0 y|^2 = 0$ e $x = -\lambda_0 y$.

Corolário 6 (desigualdade triangular)

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) com igualdade se $y = 0$ ou se $y \neq 0$, $x = \lambda y$ e $\lambda \geq 0$.

Demonstração: Temos elevando ao quadrado e usando $f(1)$:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\ &\iff (x, y) \leq |x||y|. \end{aligned}$$

No caso de igualdade obtemos $\langle x, y \rangle = |x||y|$ e se $y \neq 0$ vem de $x = \lambda y$ vem $\lambda \langle y, y \rangle = |\lambda||y||y|$ o que implica $\lambda \geq 0$.

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Uma base do espaço euclidiano E , $\{x_1, \dots, x_n\}$ é ortonormal se os vetores forem ortogonais entre si e cada um unitário. Ou seja $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. Dada uma base $\{a_1, \dots, a_n\}$ podemos pelo método de Gram–Schmidt transformá-la numa base ortonormal de uma forma natural. Primeiramente notemos que se $\{b_1, \dots, b_n\}$ é ortogonal então $\left\{ \frac{b_i}{|b_i|} : i \leq n \right\}$ é uma base ortonormal. Basta então obter uma base ortogonal. Seja $b_1 = a_1 \neq 0$. Para $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ vamos escolher λ para $(b_2, b_1) = 0$:

$$\langle a_2 + \lambda b_1, b_1 \rangle = \langle a_2 + \lambda b_1, a_1 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle + \lambda \langle a_1, a_1 \rangle = 0 \iff \lambda = -\frac{\langle a_2, a_1 \rangle}{|a_1|^2}.$$

Temos $b_2 \neq 0$ e ortogonal a b_1 . Agora seja $b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$. Agora

$$\begin{cases} \langle b_3, b_1 \rangle = 0 \\ \langle b_3, b_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_1 \rangle = 0 \\ \langle a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle a_3, b_1 \rangle + \mu \langle b_1, b_1 \rangle = 0 \\ \langle a_3, b_2 \rangle + \nu \langle b_2, b_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Ou seja $\mu = -\frac{\langle a_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle}$ e $\nu = -\frac{\langle a_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle}$. Prosseguindo indutivamente obtemos a base procurada.