03/02

Análise II

Monitor: Marcos Campos

Programa: Álgebra linear; Teoria dos espaços métricos; Otimização e análise convexa.

Álgebra linear

Corpo comutativo

Seja um conjunto K munido de uma adição $+ : K \times K \to K$ e uma multiplicação $\cdot : K \times K \to K$. É muito conveniente usar a seguinte notação: $a + b = +(a, b)$ e $ab = \cdot\,(a, b)$. Às vezes por ênfase escrevemos $a \cdot b$ no lugar de ab. Então K é um corpo (comutativo) se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

I. $a + b = b + a$ para todos a, b em K (comutatividade da adição)

II. $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos a, b, c em K (associatividade da adição)

III. Existe $0 \in K$ tal que $a + 0 = a$ para todo a em K (elemento neutro da adição)

IV. Para todo $a \in K$ existe $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$. (elemento inverso aditivo ou o simétrico)

V. $ab = ba$ para todos a, b em K (comutatividade da multiplicação[1])

VI. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatividade do produto)

VII. Existe $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$ (elemento neutro da multiplicação)

VIII. Para todo $a \in K$, $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$. (elemento inverso da multiplicação)

IX. $a\,(b + c) = ab + ac$ (distributividade da multiplicação com respeito à adição)

X. $1 \neq 0$.

Exemplo 1 *$K = \mathbb{R}$ é o exemplo mais importante. Depois temos $K = \mathbb{C}$ e $K = \mathbb{Q}$.*

Exemplo 2 (corpo finito) *$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ com $\bar{1} + \bar{1} = 0$ e $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ é um corpo com dois elementos.*

[1] Essa propriedade do produto é que origina o nome de corpo comutativo.

Espaço vetorial

O corpo K associado a um espaço vetorial é denominado de corpo de escalares. Na maior parte do curso os escalares serão os números reais. Um espaço vetorial sobre o corpo K é um conjunto V munido de uma adição $+ : V \times V \to V$ e uma multiplicação por escalares, $\cdot : K \times V \to V$ com as propriedades:

I. Comutatividade da adição: $v + w = w + v$;

II. Elemento neutro da adição: existe $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$;

III. Inverso da adição: para todo v existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$;

IV. Associatividade: $v + (w + u) = (v + w) + u$;

V. para $\lambda, \mu \in K$ e $v \in V$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$;

VI. $1 \cdot v = v$;

VII. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$;

VIII. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Notação 1 *Frequentemente vamos omitir o ponto. Assim $\lambda v = \lambda \cdot v$. E vamos passar a escrever os escalares preferencialmente com letras gregas.*

Exemplo 3 *O espaço vetorial mais simples é $V = \{0\}$. Se K é um corpo, $V = K$ é um espaço vetorial se $\lambda \cdot v = \lambda v$ (a multiplicação em K).*

Exemplo 4 *K^n é um espaço vetorial: Se $x, y \in K^n, \lambda \in K$,*

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,; \\
\lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,; \\
0 &= (0, \ldots, 0)\,, -x = (-x_1, \ldots, -x_n)\,.
\end{aligned}
$$

sendo $x_i + y_i$ a soma dos escalares x_i e y_i e λx_i o produto dos escalares λ e x_i. Assim $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são espaços vetorias sobre, respectivamente, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Exemplo 5 *Facilmente verificamos que o espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sob $K = \mathbb{R}$.*

Exemplo 6 *$K[X] = \{a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n : n \geq 0, a_i \in K, 0 \leq i \leq n\}$ o espaço dos polinômios em uma variável com coeficientes no corpo K é um espaço vetorial.*

Definição 1 *Seja K um corpo e $K' \subset K$. Então K' é um subcorpo de K se for um corpo com a mesma soma e multiplicação de K. Assim K' é subcorpo se e somente se para todos $x, y \in K'$,*

$$\begin{aligned} & x - y \in K'; \\ & \text{se } y \neq 0, xy^{-1} \in K'; \\ & 1 \in K'. \end{aligned}$$

Comentário 1 *Se V é um espaço vetorial sob K, então V também é espaço vetorial sob K'.*

Dependência linear

Definição 2 *Seja V um espaço vetorial sob K. Os vetores, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são linearmente dependentes se existirem escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nem todos nulos tais que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$.*

Comentário 2 *Se um dos vetores for nulo eles são linearmente dependentes. Basta escolher $\lambda_i = 1$ se $v_i = 0$ e os outros escalares nulos. Naturalmente se os vetores não forem linearmente dependentes dizemos que são linearmente independentes. Assim*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m.$$

Um vetor x é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se existirem escalares $(\lambda_i)_{i=1}^{n}$ tais que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Lema 1 *Suponhamos y uma combinação linear de $x_1, \ldots, x_p$ e que por sua vez cada x_i seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$. Então y é combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$.*

A demonstração é imediata. Se $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j$ e $x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} v_i$ temos para $\gamma_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \lambda_{ij}$

$$y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} v_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j \lambda_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i.$$

Teorema 1 *Suponhamos que $v_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Existe então $k \geq 2$ tal que v_k seja combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$.*

Demonstração: Seja $k \leq n$ o primeiro natural tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes. Então $k \neq 1$ pois v_1 é linearmente independente. Portanto $k \geq 2$. Então

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

nem todos α_i nulos. Mas então $\alpha_k \neq 0$ pela escolha de k. Portanto[4]

$$v_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} v_1 + \ldots + \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1}.$$

Comentário 3 *É claro que se v_k for combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$ então $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ e $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes. Pois se $v_k = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{k-1} v_{k-1}$ escolhemos $\mu_k = -1, \mu_j = 0$ para $j > k$ e obtemos $\sum_i \mu_i v_i = 0$.*

Definição 3 *Um conjunto $\mathcal{G} \subset V$ é gerador se todo vetor de V for uma combinação linear de elementos de $\mathcal{G}$.*

Bases

Definição 4 (base) *Uma base do espaço vetorial V é um conjunto $\mathfrak{X} \subset V$ gerador e linearmente independente.*

Definição 5 *O espaço vetorial tem dimensão finita se existir uma base finita.*

Exemplo 7 *K^n tem dimensão n. Se $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\mathfrak{X} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

é uma base: para $x \in \mathbb{R}^n$ temos $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$. E se $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = 0$ então $x_i \equiv 0$.

Lema 2 *Se $v_1, \ldots, v_p$ é uma base de V e $\sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j$ então $\mu_i = \lambda_i$ para todo i.*

Demonstração: Temos $\sum_{i=1}^{p} (\mu_i - \lambda_i) v_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0$. A independência linear de $v_1, \ldots, v_p$ implica $\mu_i - \lambda_i = 0$ para todo i.

Teorema 2 *Seja V espaço vetorial de dimensão finita e $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \subset V$ l.i.. Se $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ não for uma base podemos encontrar $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$ tais que $y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$ seja uma base de V.*

[4] $\frac{1}{\alpha_k}$ é o mesmo que α_k^{-1}. Não há ambiguidade pela comutatividade da multiplicação.

Demonstração: Seja $x_1, \ldots, x_n$ uma base de V. A família

$$S = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n\}$$

é geradora e é linearmente dependente pois cada y_i é combinação linear dos x_i. Pelo teorema 1 existe $z \in S$ que é combinação linear dos anteriores. Não pode ser $z = y_i$ pela independência linear dos $y's$. Então $z = x_k$ é combinação linear de $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Repetimos o argumento para a nova família geradora

$$y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n.$$

O processo para, em no máximo n etapas, com uma família geradora e linearmente independente–uma base.

Corolário 1 *Se V tem um conjunto gerador finito então V tem dimensão finita.*

Comentário 4 *A demonstração do próximo teorema depende do lema de Zorn que não será utilizado nesse curso. Por isso a demonstração será omitida.*

Teorema 3 *Todo espaço vetorial possui uma base.*

Exemplo 8 *Uma base de $\mathbb{R}$ como espaço vetorial sob $\mathbb{Q}$ é dita base de Hamel. Toda base de Hamel é não enumerável.*

Dimensão

A dimensão de um espaço vetorial é o número de elementos de uma base (quando for finita.)[2]

Teorema 4 *Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases do espaço vetorial de dimensão finita V então $\#\mathcal{B} = \#\mathcal{B}'$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$e $\mathfrak{X} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ sendo $\mathcal{G}$ gerador e $\mathfrak{X}$ linearmente independente. Vou aplicar o teorema 1 várias vezes. O conjunto

$$y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

é gerador e linearmente dependente. Pelo teorema 1 existe x_i, $i \geq 1$ que é combinação linear dos anteriores. Podemos então eliminar x_i da lista:

$$y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n.$$

[2]Quando uma base é infinita falamos da cardinalidade da base. Esse assunto não trataremos nesse curso.

Essa lista continua geradora e tem um termo a menos. Agora consideremos,

$$y_{m-1}, y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n.$$

Aplicando o teorema 1 novamente eliminamos mais um dos x's. Os $x's$ não acabam antes dos $y's$ pois os y restantes seriam combinação linear dos $y's$ na lista, uma impossibilidade pela independência linear. Logo $n \geq m$. Finalmente se $\mathcal{G}$ e $\mathfrak{X}$ são uma base podemos começar com $\mathfrak{X}$ e obtemos $m \geq n$ e finalmente $n = m$.

Corolário 2 *Se V tem dimensão n então $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.*

06/02

Transformações lineares

Se V e W são espaços vetoriais sob o corpo K. Uma função $T : V \to W$ é linear se for aditiva e homogênea:

$$\begin{aligned} T(a+b) &= T(a) + T(b), a, b \in V \\ T(\lambda a) &= \lambda T(a), \lambda \in K, a \in V. \end{aligned}$$

Note que $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$. E $T(-v) = (-1) T(v) = -T(v)$. Podemos juntar as condições numa só:

$$\begin{aligned} T(\lambda a + b) &= \lambda T(a) + T(b), \lambda \in K \text{ ou ainda} \\ T(\lambda a + \mu b) &= \lambda T(a) + \mu T(b), \lambda, \mu \in K. \end{aligned}$$

Notação 2 *O conjunto dos zeros de T é o núcleo (ou o kernel) de T. É denotado $\ker T$. A imagem de T é $T(V) = \{T(v) : v \in V\}$. Ambos são subespaços vetoriais.*

Lema 3 *$T : V \to W$ linear é injetiva se e somente se $T(v) = 0$ implica $v = 0$.*

Demonstração: Se T for injetiva, $T(v) = 0 = T(0)$ e então $v = 0$. Reciprocamente suponhamos $\ker T = \{0\}$. Se $T(v) = T(w)$ então $T(v - w) = T(v) - T(w) = 0$ e então $v - w = 0 \implies v = w$.

Lema 4 *Se T é injetiva e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é l.i então $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ é linearmente independente.*

Demonstração: Pois se $\sum_i \lambda_i T(v_i) = 0$ pela linearidade $T(\sum_i \lambda_i v_i) = 0 \implies \sum_i \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i$.

A família das transformações lineares entre V e W, $\mathscr{L}(V, W)$, é um espaço[3] vetorial. Se $S, T \in \mathscr{L}(V, W)$ e $\lambda \in K$, $v \in V$,

$$\begin{aligned} (S+T)(v) &:= S(v) + T(v); \\ (\lambda S)(v) &= \lambda S(v). \end{aligned}$$

Definição 6 *Os funcionais lineares de V são as transformações lineares entre V e K.*

Escrevemos V' ou às vezes V^* para denotar $\mathscr{L}(V, K)$. Dizemos que V' é o espaço dual de V. O espaço V'', bi–dual.

Teorema 5 *Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial V. Sejam $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$ escalares. Existe um e único $y' \in V'$ tal que $\langle v_i, y' \rangle := y'(v_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demonstração: Existência. Para $x = \sum_i \lambda_i v_i$ seja $y'(x) = y'(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. Temos y' bem definida pois λ_i é unívocamente determinado por x (lema 2) Vamos verificar a linearidade: Se $y = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ e $r \in K$ temos $rx + y = \sum_i (r\lambda_i + \mu_i) v_i$. Logo

$$y'(rx + y) = \sum_i (r\lambda_i + \mu_i) \alpha_i = r \sum_i \lambda_i \alpha_i + \sum_i \mu_i \alpha_i = ry'(x) + y'(y)$$

É imediato que $y'(v_i) = \sum_{j \neq i} 0\alpha_j + 1\alpha_i = \alpha_i$. Unicidade: óbvio.

Seja[4] $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Teorema 6 *Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V existe $\{y^1, \ldots, y^n\}$ base[5] de V' tal que $\langle v_j, y^i \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \leq n$.*

Demonstração: Seja para $j \leq n$, $y^j \in V'$ tal que $\langle v_i, y^j \rangle = \delta_{ij}$. Verifiquemos que $\{y^1, \ldots, y^n\}$ é base de V'. Seja $y' \in V'$. Seja $\alpha_i = y'(v_i)$. Então $y' = \sum_j \alpha_j y^j$ pois

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y' \right\rangle = \sum_i \lambda_i \langle v_i, y' \rangle = \sum_i \lambda_i \alpha_i.$$

[3] Verificação: exercício.

[4] "Delta de Kronecker"

[5] chamada de base dual

Agora

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j \right\rangle = \sum_i \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

$$\left\langle \sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \alpha_j y^j \right\rangle = \sum_j \alpha_j \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y^j \right\rangle = \sum_j \alpha_j \lambda_j = \left\langle \sum_i \lambda_i v_i, y' \right\rangle .$$

Falta a independência linear: Se $\sum_j \alpha_j y^j = 0$ então $\sum_j \alpha_j y^j (v_i) = \alpha_i = 0$.

Corolário 3 $\dim V' = \dim V$.

Reflexividade do bidual

Sabemos que $\dim V'' = \dim V' = \dim V$ são todos isomorfos. Mais interessante é o seguinte:

Teorema 7 (reflexividade) *Para todo $z'' \in V''$ existe um único $x \in V$ tal que $\langle x, y' \rangle = \langle y', z'' \rangle$ para todo $y' \in V'$.*

Demonstração: Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V. Para cada $i \leq n$, $\Phi_i (y') = \langle x_i, y' \rangle , y' \in V'$ é linear, i.e. $\Phi_i \in V''$. Note que $\{\Phi_i : 1 \leq i \leq n\}$ é linearmente independente: $\sum_i \mu_i \Phi_i = 0$ então se $y' = y^j$,

$$0 = \left\langle y^j, \sum_i \mu_i \Phi_i \right\rangle = \sum_i \mu_i \left\langle y^j, \Phi_i \right\rangle = \sum_i \mu_i \left\langle x_i, y^j \right\rangle = \sum_i \mu_i \delta_{ij} = \mu_j .$$

Mas então $\{\Phi_i : 1 \leq i \leq n\}$ é base de V''. Se $z = \sum_i \mu_i \Phi_i$ temos

$$z (y) = \sum_i \mu_i \Phi_i (y) = \sum_i \mu_i \langle x_i, y \rangle = \left\langle \sum_i \mu_i x_i, y \right\rangle .$$

Terminando a demonstração.

Isomorfismo entre espaços vetoriais

Definição 7 *Os espaços V e W sob o corpo K são isomorfos se existir $T : V \to W$ linear, injetiva e sobrejetora.*

Comentário 5 *É imediato de se verificar que $T^{-1} : W \to V$ é linear, injetiva e sobrejetora.*

É imediato que espaços isomorfos tem a mesma dimensão. O próximo resultado é mais preciso.

Teorema 8 *Se V tem dimensão n sob o corpo K então V é isomorfo a K^n.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ base de V. Para cada $x \in V$ existem únicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Então

$$T(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

está bem definida. É imediato que $T(x) = 0 \iff x = 0$. Sejam $x, y \in V$ e $\lambda \in K$. Então se $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ e $y = \sum_i \mu_i x_i$ temos $x + y = \sum_i (\lambda_i + \mu_i) x_i$ e então $T(x+y) = (\lambda_i + \mu_i)_{i=1}^n = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n) = T(x) + T(y)$. E de $\theta x = \sum_i \theta \lambda_i x_i$ vem $T(\theta x) = \theta T(x)$.

Comentário 6 *Esse isomorfismo depende da escolha de uma base e isso limita a sua utilidade.*

Subespaços

Definição 8 *Um subconjunto W do espaço vetorial V é um subespaço de V se for um espaço vetorial com a soma e multiplicação herdadas de V. Ou seja: $0 \in W$ e*

$$v, w \in W \implies v + w \in W;$$
$$\lambda \in K, w \in W \implies \lambda w \in W.$$

Por exemplo $-w = (-1) \cdot w \in W$. Em geral W não–vazio é um subespaço se e somente se para todo $x, y \in W$ e $\lambda \in K$, $\lambda x + y \in W$. Os subespaços $\{0\}$ e V são subespaços triviais. O núcleo e a imagem de uma transformação linear são subespaços.

Lema 5 *Se W_i é subespaço de V para cada $i \in I$ então $\cap_{i \in I} W_i$ também é um subespaço de V.*

A verificação é imediata: se $x, y \in \cap_{i\in I} W_i$ e $\lambda \in K$ então para todo $i \in I$, $x, y \in W_i \implies \lambda x + y \in W_i$ e logo $\lambda x + y \in \cap_{i \in I} W_i$.

Definição 9 *Seja $S \subset V$. Definimos o espaço vetorial gerado por S:*

$$[S] = \cap \{W \subset V : W \text{ é subespaço e contém } S\}.$$

Lema 6 *$[S]$ coincide com o conjunto de combinações lineares $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ com $n \geq 1, \lambda_i \in K$ e $v_i \in S$, $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: Seja $W = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : n \geq 1, \lambda_i \in K, v_i \in S, 1 \leq i \leq n.\}$. É imediato que $S \subset W \subset [S]$ pois $[S]$ é espaço vetorial se $s \in S$, $s = 1 \cdot s, n = 1$. Sejam agora $w_1, w_2 \in W$ e $\mu \in K$. Para cada $i = 1, 2$ existem $v_{ij} \in S, \theta_{ij} \in K$ e $n_i \geq 1$ tais que $w_i = \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij}$. Então

$$\sum_i \mu_i w_i = \sum_i \mu_i \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{ij} v_{ij} = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i \theta_{ij} v_{ij} \in W.$$

Portanto W sendo espaço vetorial, $W \supset [S]$ e logo $W = [S]$.

08/02

Exemplo 9 *Se U e W são subespaços de V, $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ é um subespaço. E $[U \cup W] = U + W$.*

Para verificarmos notemos que $x, y \in U + W$ $\alpha, \beta \in K$, então

$$\begin{aligned} &x = u + w, y = u' + w', \alpha x + \beta y = \\ &\alpha (u + w) + \beta (u' + w') = (\alpha u + \beta u') + (\alpha w + \beta w') \in U + W. \end{aligned}$$

Portanto $U + W$ é um subespaço e contém $[U \cup W]$. E $[U \cup W] \supset U + W$.

Vamos calcular a dimensão de $U + W$.

Teorema 9 $\dim (U + W) + \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ base de $U \cap W$. Podemos, aplicando o teorema 2, completar $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ para obter uma base de U: existem $u_1, \ldots, u_k \in U$ tais que

$$v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k$$

seja uma base de U. Aplicando o teorema 2 novamente existem $w_1, \ldots, w_t$ tais que

$$v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_t$$

é uma base de W. Note que $p + k = \dim U$ e $p + t = \dim W$. Verifiquemos que

$$v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t$$

é base de $U + W$:

gerador Seja $x \in U + W$. Então $x = u + w$ sendo $u \in U$ e $w \in W$. Existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_k$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j.$$

Existem $\lambda_1', \ldots, \lambda_p'$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$ escalares tais que

$$w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' v_i + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j$$

e então

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' v_i + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i + \lambda_i'\right) v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j. \end{aligned}$$

l.i. Suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j + \sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = 0.$$

Então $\sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j \in U \cap W$. Existe então $\gamma_i, i \leq p$ tais que

$$\sum_{j=1}^{t} \theta_j w_j = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i \implies \sum_{i=1}^{p} \gamma_i v_i + \sum_{j=1}^{t} \left(-\theta_j\right) w_j = 0.$$

Pela independência linear de $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_t$ obtemos $\theta_j = 0, 1 \leq j \leq t$. Considerando agora

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j = 0$$

vem $\lambda_i = 0$ e $\mu_j = 0$ pela independência linear de $v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_k$. Finalmente temos

$$\dim\left(U + W\right) + \dim\left(U \cap W\right) = p + k + t + p = \dim U + \dim W.$$

Definição 10 *Sejam U e W subespaços de V. Dizemos que, U e W são complementares e escrevemos $V = U \oplus W$ se*

$$\begin{aligned} U + W &= V, \\ U \cap W &= \{0\}. \end{aligned}$$

Nesse caso dizemos que V é a soma direta de U e W. É claro que $\dim U + \dim W = \dim V$.

Espaço quociente

Seja $V = \mathbb{R}^2$ o plano e $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ o eixo dos "x". Qualquer reta de V passando pela origem e distinta de W é um subespaço complementar de W. Por exemplo $L = [(1, 1)]$. Temos $(z_1, z_2) \in W \cap L$ se e somente se $z_1 = z_2$ e $z_2 = 0$. Logo $z = 0$. E podemos sempre escrever

$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y) \in W + L.$$

Cada reta paralela ao eixo das abscissas intersecta L em um único ponto.

Definição 11 *Seja W um subespaço de V. Para $x, y \in V$ defina*[6] *$x \sim y$ se $x - y \in W$. Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência em V:*

1. *$x \sim x$ pois $x - x = 0 \in W$*
2. *$x \sim y \implies y \sim x$ pois se $x - y \in W$ então $y - x = -(x - y) = (-1) \cdot (x - y) \in W$*
3. *$x \sim y$ e $y \sim z \implies x \sim z$ pois $x - z = (x - y) + (y - z) \in W + W \subset W$.*

Os elementos equivalentes a x,

$$\bar{x} = \{y \in V : y - x \in W\} = \{y : y \in x + W\} = x + W.$$

A família das classes de equivalência, $V/W = \{\bar{x} : x \in V\}$ é uma partição de V. Com efeito se $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ então

$$\begin{aligned} z + W &= \bar{x} \\ z + W &= \bar{y} \implies \bar{x} = \bar{y}. \end{aligned}$$

[6] x é equivalente a y

Com efeito pois $z - x \in W$ implica $z + W \subset x + W + W = x + W$ e analogamente $x + W \subset z + W$ pois $x \sim z$. Para $\bar{x}$ e $\bar{y}$ e $\lambda \in K$ definimos

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$
$$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}.$$

Fica como exercício verificar que o quociente V/W com essa soma e produto por escalar é um espaço vetorial. É o espaço quociente de V por W. (corresponde a L no exemplo acima) Casos extremos: V/V é isomorfo à $\{0\}$ e $V/\{0\}$ é isomorfo à V.

Teorema 10 *Sejam W e U espaços complementares de V. Então V/W é isomorfo a U.*

Demonstração: Seja $T : U \to V/W$, $T(u) = u + W$. Notemos que T é linear pois

$$T(\alpha u + \beta u') = (\alpha u + \beta u') + W = \alpha (u + W) + \beta (u' + W) = \alpha T(u) + \beta T(u').$$

Se $T(u) = \bar{0} = W$ temos que $u + W = W$ e logo $u \in W \cap U = \{0\} \implies u = 0$. T é sobrejetora pois se $x \in V$ temos $x = u + w$ e $x + W = u + W$ portanto $T(u) = x + W$.

Corolário 4 *Se V tem dimensão finita e W é subespaço de V,* $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Corolário 5 *Se $T : V \to W$ é linear então $V/\ker T$ é isomorfo a $T(V)$. Em particular* $\dim V = \dim T(V) + \dim \ker T$.

Demonstração: Seja $\phi : V/\ker T \to T(V)$, $\phi(x + \ker T) = T(x)$. Então ϕ está bem definida pois se $x + \ker T = x' + \ker T$ então $T(x - x') = 0$ e logo $T(x) = T(x')$. A imagem de ϕ é $T(V)$ e ϕ é injetiva pois $Tx = 0$ implica $x \in \ker T$ e $x + \ker T = \bar{0}$.

Anulador

Seja $S \subset V$. O anulador de S, denotado S^0, é o conjuntos dos funcionais lineares $y' \in V'$ tais que $y'(s) = 0$ para todo $s \in S$. É imediato que se $y'(S) = \{0\}$ então $y'(x) = 0$ para $x \in [S]$.

Teorema 11 *Seja $\mathcal{M}$ subespaço m dimensional de V. Então* $\dim \mathcal{M}^0 = n - m$.

Demonstração: É fácil de se verificar que o anulador de $\mathcal{M}$ é um subespaço vetorial de V'. Seja $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n\}$ sendo $\{x_1, \ldots, x_m\}$ base de $\mathcal{M}$. Seja $\mathfrak{X}' = \{y^1, \ldots, y^n\}$ base dual. Seja $\mathfrak{N}$ o subsespaço gerado por $\{y_{m+1}, \ldots, y_n\}$. Temos $\dim \mathfrak{N} = n - m$. Quero demonstrar que $\mathcal{M}^0 = \mathfrak{N}$. Para $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$,

$$\left\langle x, y^j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \left\langle x_i, y^j \right\rangle = 0.$$

Logo $\mathfrak{N} \subset \mathcal{M}^0$. Seja agora $y' \in \mathcal{M}^0$. Existem $\mu_j, j \leq n$, $y' = \sum_{l=1}^{n} \mu_l y^l$. Mas se $i \leq m$,

$$0 = \langle x_i, y' \rangle = \left\langle x_i, \sum_{l=1}^{n} \mu_l y^l \right\rangle = \sum_l \mu_l \left\langle x_i, y^l \right\rangle = \mu_i$$

Assim $y' \in \mathfrak{N}$ e $\mathcal{M}^0 \subset \mathfrak{N}$ demonstrando a igualdade.

Comentário 7 *O anulador do anulador, $\mathcal{M}^{00}$, é formalmente um subconjunto de V''. Mas a reflexividade do bidual permite considerá–lo em V. No próximo teorema uso a identificação de V'' com V na definição do anulador de $\mathcal{M}^0$.*

Teorema 12 *Se V tem dimensão finita $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{00} := \left(\mathcal{M}^0\right)^0 = \mathcal{M}$.*

Demonstração: Seja $m \in \mathcal{M}$. Seja $z^m \in V''$ elemento correspondente dado pelo teorema da reflexividade (teorema 7):

$$\langle m, y' \rangle = \langle y', z^m \rangle, \forall y' \in V'.$$

. Então para $y' \in \mathcal{M}^0$,

$$0 = \langle m, y' \rangle = \langle y', z^m \rangle \implies m \in \mathcal{M}^{00}.$$

Assim $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{00}$. Mas $\dim \mathcal{M}^{00} = n - \dim \mathcal{M}^0 = n - (n - m) = m$. Portanto $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{00}$.
Dem. alternativa. Seja $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n\}$ base de V sendo $\{x_1, \ldots, x_m\}$ base de $\mathcal{M}$. Seja $\mathfrak{X}' = \{y^1, \ldots, y^n\}$ base dual. Para $m \in \mathcal{M}$ temos $\langle m, y' \rangle = 0$ para todo $y' \in \mathcal{M}^0$. Logo $m \in \mathcal{M}^{00}$. Agora se $x \in V \setminus \mathcal{M}$. Então $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ e $(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ pois $x \notin \mathcal{M}$. Seja $j \geq m + 1$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Então $y^j \in \mathcal{M}^0$ e $\langle x, y^j \rangle = \lambda_j \neq 0$. Logo $x \notin \mathcal{M}^{00}$.

10/02

Espaços com produto interno

(A partir de agora $K = \mathbb{R}$.)

Definição 12 *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função bilinear $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *Simétrica: $(x, y) = (y, x)$*
2. *Positiva definida: $(x, x) \geq 0$ e $(x, x) = 0$ somente se $x = 0$.*

Definição 13 *V de dimensão finita com um produto interno é um espaço euclidiano.*

Definição 14 *A função $|x| = \sqrt{(x, x)}$ é a norma euclidiana. Os vetores de norma 1 são vetores unitários.*

Comentário 8 *Todo subespaço de um espaço euclidiano também é um espaço euclidiano.*

Exemplo 10 *O produto interno no $\mathbb{R}^n$ é um produto interno como acima.*

Exemplo 11 *Se $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, $(f, g) = \int_a^b f(s)\, g(s)\, ds$ é um produto interno.*

Exemplo 12 *Para $x, y \in l^2$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ é um produto interno em l^2.*

Definição 15 *Os vetores x, y são ortogonais se $(x, y) = 0$.*

O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. E é o único vetor que é ortogonal a si mesmo.

Teorema 13 *Para x, y no espaço euclidiano E,*

$$|(x, y)| \leqq |x|\, |y|$$

E se valer a igualdade, x, y são linearmente dependentes.

Demonstração: Seja $f(\lambda) = |x + \lambda y|^2 = (x + \lambda y, x + \lambda y)$. É imediato que $f(\lambda) \geq 0$. Expandindo o produto interno,

$$f(\lambda) = (x, x) + 2\lambda (x, y) + \lambda^2 (y, y)\,.$$

Esse polinômio do segundo grau se tiver duas raízes distintas assumirá também valores negativos, uma impossibilidade. Portanto o discriminante

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leqq 0.$$

Suponhamos que vale a igualdade $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) = 0$. E sem perda de generalidade, $y \neq 0$. Então $\lambda_0 = -\frac{2(x,y)}{2(y,y)} = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$ é tal que $f(\lambda_0) = 0$. Mas então $|x + \lambda_0 y|^2 = 0$ e $x = -\lambda_0 y$.

Corolário 6 (desigualdade triangular) a) $|x+y| \leq |x| + |y|$

b) *com igualdade se* $y = 0$ *ou se* $y \neq 0$, $x = \lambda y$ *e* $\lambda \geq 0$.

Demonstração: Temos elevando ao quadrado e usando $f\,(1)$:

$$(x,x) + 2\,(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + 2\,|x|\,|y| + (y,y) \iff (x,y) \leq |x|\,|y|\,.$$

No caso de igualdade obtemos $(x,y) = |x|\,|y|$ e de $x = \lambda y$ vem $\lambda\,(y,y) = |\lambda|\,|y|\,|y|$ o que implica $\lambda \geq 0$.

Ortogonalização de Gram–Schmidt

Uma base do espaço euclidiano E, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ é ortonormal se os vetores forem ortogonais entre si e cada um unitário. Ou seja $(x_i,x_j) = \delta_{ij}$. Dada uma base $\{a_1,\ldots,a_n\}$ podemos pelo método de Gram–Schmidt transformala numa base ortonormal de uma forma natural. Primeiramente notemos que se $\{b_1,\ldots,b_n\}$ é ortogonal então $\left\{\frac{b_i}{|b_i|} : i \leq n\right\}$ é uma base ortonormal. Basta então obter uma base ortogonal. Seja $b_1 = a_1 \neq 0$. Para $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ vamos escolher λ para $(b_2,b_1) = 0$:

$$(a_2 + \lambda b_1, b_1) = (a_2 + \lambda b_1, a_1) = (a_2,a_1) + \lambda\,(a_1,a_1) = 0 \iff \lambda = -\frac{(a_2,a_1)}{|a_1|^2}.$$

Temos $b_2 \neq 0$ e ortogonal a b_1. Agora seja $b_3 = a_3 + \mu b_1 + \nu b_2$. Agora

$$\left\{\begin{array}{l}(b_3,b_1) = 0\\(b_3,b_2) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}(a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_1) = 0\\(a_3 + \mu b_1 + \nu b_2, b_2) = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}(a_3,b_1) + \mu\,(b_1,b_1) = 0\\(a_3,b_2) + \nu\,(b_2,b_2) = 0\end{array}\right.$$

Ou seja $\mu = -\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}$ e $\nu = -\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}$. Prosseguindo indutivamente obtemos a base procurada.

Dualidade para espaços euclidianos

A dualidade nos espaços euclidianos é mais simples. Temos $E' = E$.

Teorema 14 (Riesz) *Seja* E *espaço euclidiano de dimensão* n. *Seja* E' *o espaço dos funcionais lineares. Para cada* $f \in E'$ *existe um e único* $x \in E$ *tal que* $f\,(z) = (x,z)\,, z \in E$.

Demonstração: Para $x \in E$ seja $f_x\,(y) = (x,y)\,, y \in E$. Temos que f_x é linear. Se $f_x = 0$ temos $f_x\,(x) = (x,x) = 0$ e logo $x = 0$. Portanto $\Theta\,(x) = f_x$ é linear, injetiva. Portanto $\Theta\,(E) = E'$ pois $\dim E = \dim E'$.

Adjunto

Sejam E e F espaços euclidianos. E $T : E \to F$ linear. A adjunta de T é $T^* : F \to E$ tal que

$$(Tx, y) = (x, T^* y).$$

E $T^{**} = T$! Vamos particularizar para $E = F$. Então $T : E \to E$ é auto–adjunta[7] se $T^* = T$: $(Tx, y) = (x, Ty), \forall x, y \in E$.

Exemplo 13 *Definamos $T : V \to V$ linear tal que*

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j.$$

Então

$$(T(e_i), e_k) = a_{ki}.$$

Agora

$$(e_i, T(e_k)) = \left(e_i, \sum_j a_{jk} e_j\right) = a_{ik}.$$

Se os dois são iguais então $a_{ik} = a_{ki}$.

Definição 16 *Um autovalor de T é um escalar λ tal que existe um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. (o vetor é então um autovetor)*

Comentário 9 *No caso o espaço $[v]$ é invariante: $T([v]) \subsetneqq [v]$. É possível dois autovetores terem o mesmo autovalor associado.*

Teorema 15 *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autoadjunto. Então T tem n autovetores, mutualmente ortogonais.*

Demonstração: Seja $F(x) = \frac{(x, T(x))}{(x,x)}, x \neq 0$. Temos que F é contínua para $x \neq 0$. Note que $F(rx) = \frac{(rx, T(rx))}{(rx,rx)} = F(x)$ sempre que $r \neq 0$. O conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ é compacto e portanto existe $\min F(S)$. Seja e_1 um vetor unitário que alcança o mínimo: $F(e_1) = \min F(S) = \inf \{F(x) : |x| = 1\} = \inf \{F(x) : x \neq 0\}$. Vou demonstrar que e_1 é um autovetor. Para $x = |x| e$,

$$F(x) = F(e) \geq F(e_1).$$

[7] Se analisarmos a representação matricial, a matriz será simétrica.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$. Então $f(t) = F(e_1 + ty)$ e $f'(0) = 0$. Mas

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{(e_1 + ty, Te_1 + tTy)}{(e_1 + ty, e_1 + ty)}, \\
f'(0) &= (e_1, Ty) + (y, Te_1) - 2(e_1, Te_1)(e_1, y) \\
f'(0) &= 2(Te_1, y) - 2(e_1, Te_1)(e_1, y) = 0 \\
&\implies Te_1 = (e_1, Te_1) e_1.
\end{aligned}$$

Continuando para obter uma representação na forma diagonal.

Lema 7 *Seja T auto–adjunto. Se $J \subset E$ é invariante, $J^{\perp}$ é invariante.*

Demonstração: Seja y ortogonal a J. Então $(Ty, x) = (y, Tx) = 0$ se $x \in J$. Logo $T\left(J^{\perp}\right) \subset J^{\perp}$. Prosseguimos indutivamente e pronto.

13/02

Espaços Métricos

Um par (X, d) é um espaço métrico se a função, $d : X \times X \to \mathbb{R}$, tem para todos $x, y, z \in X$, as propriedades:

1. $d(x, y) \geqq 0$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
4. $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

Comentário 10 *d é a função distância. Os axiomas (1,2,3) são portanto bem naturais: A distância entre pontos distintos é positiva. A distância entre x e y é igual à distância entre y e x. E finalmente o axioma (4)–a desigualdade triangular–reflete a propriedade de que para os triângulos no plano, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Comentário 11 *Se no lugar de (3) exigirmos somente (3)' $d(x, x) = 0$, temos um espaço pseudo–métrico.*

Exemplo 14 *Um espaço com produto interno é um espaço métrico se $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)}$.*

Exemplo 15 (métrica discreta) *Seja* $d(x,x) = 0$ *e* $d(x,y) = 1$ *se* $x \neq y$. d *é a métrica discreta.*

Exemplo 16 *Se* $Y \subset X$ *e* $d'(x,y) = d(x,y)$ *para* $(x,y) \in Y \times Y$ *então* (Y, d') *é um espaço métrico.*

Exemplo 17 *No* $\mathbb{R}^n$ *temos a distância euclidiana, a distância do máximo e a distância da soma:*

$$d(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} & \textit{euclidiana} \\ \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} & \textit{max} \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| & \textit{soma.} \end{cases}$$

Comentário 12 *Essas 3 distâncias são exemplos de distâncias definidas a partir de uma norma: a norma euclidiana, a norma do máximo e a norma da soma.*

Definição 17 (espaço normado) *Um par* (V, N) *sendo* V *um espaço vetorial (sobre o corpo dos reais) e* $N : V \to [0, \infty)$ *é um espaço normado se para todos* $v, w \in V$ *e* λ *real,*

i) $N(v) = 0 \iff v = 0$

ii) $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

iii) $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.

Comentário 13 *Por simplicidade usamos* $|v| := N(v)$.

Comentário 14 *A métrica associada à norma* N *é* $d(v,w) = N(v - w)$.

Definição 18 *Seja* (X, d) *um espaço métrico.*

i) *A bola aberta de centro* $x \in X$ *e raio* $r > 0$ *é* $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$;

ii) *A bola fechada,* $B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$;

iii) *A esfera:* $S(x,r) = \{y \in X : d(y,x) = r\}$.

Comentário 15 *No caso de um espaço normado,* $B[0,1] = \{y \in V : |y| \leq 1\}$ *é a bola unitária. Note que* $B(x,r) = x + rB(0,1)$ *nesse caso. E a métrica é invariante por translações,* $d(x,y) = d(x+z, y+z)$.

A topologia dos espaços métricos

Definição 19 *O par (X, τ) sendo $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ é um espaço topológico e τ uma topologia se*

i) $\{\emptyset, X\} \subset \tau$;

ii) *Se $A, B \in \tau$ então $A \cap B \in \tau$;*

iii) *Se $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$ então $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.*

Comentário 16 *Os elementos de τ são ditos abertos. Assim o conjunto vazio e X são abertos. E a topologia é fechada por intersecções finitas e por uniões arbitrárias de seus elementos.*

Definição 20 *Seja (X, d) um espaço métrico. O conjunto $U \subset X$ é aberto se para todo $x \in U$ existir $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.*

É imediato que o conjunto vazio e o espaço X são abertos. Seja $\tau = \tau_d = \{U \subset X : U \text{ é aberto}\}$ a família dos subconjuntos abertos de (X, d). Verifiquemos que τ é uma topologia.
Demonstração: (a) Sejam U e V abertos. Seja $z \in U \cap V$. Seja $r' > 0$ tal que $B(z, r') \subset U$. Seja $r'' > 0$ tal que $B(z, r'') \subset V$. Então se $r = \min\{r', r''\} > 0$, $B(z, r) \subset U \cap V$. (b) Verifiquemos que se $U_i \in \tau$ para $i \in I$ então $W = \cup_{i \in I} U_i \in \tau$. Seja $x \in W$. Existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_i$. Então $B(x, \epsilon) \subset W$. Terminando a demonstração.

Lema 8 *A bola aberta é aberta.*

Demonstração: Para $z \in B(x, r)$ temos $d(x, z) < r$ e então $\delta = r - d(x, z) > 0$. Para $y \in B(z, \delta)$ temos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, z) + \delta = r$$

e portanto $B(z, \delta) \subset B(x, r)$.

Definição 21 *$F \subset X$ é fechado se o complementar $F^c = X \setminus F$ for aberto.*

É imediato que $\emptyset$ e X são fechados. A união finita de fechados é fechada. E a intersercção de uma família de fechados é fechada.

Exemplo 18 *Na métrica discreta todo subconjunto de X é aberto e é fechado.*

Exemplo 19 *Em $\mathbb{R}$ os intervalos abertos são abertos e os intervalos fechados são fechados. O intervalo $(0,1]$ não é aberto nem fechado. Os racionais não são nem abertos nem fechados em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 20 *Se $X = [0,1]$ então $(0,1]$ é aberto em X.*

Definição 22 *Duas métricas em X, d e d' são equivalentes se definem a mesma topologia: $\tau_d = \tau_{d'}$. Isto se $U \subset X$ é aberto em (X,d) se e somente se for aberto em (X,d').*

Exemplo 21 *Se d é uma métrica em X então $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ e $d''(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ são métricas equivalentes à d.*

Verifiquemos por exemplo que d e d'' são equivalentes. Seja $B(x,r)$ a bola de centro x e raio r na métrica d e $B''(x,r)$ a bola correspondente na métrica d''. Seja $U \in \tau_d$. Seja $x \in U$ e $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \subset U$. Sem perda de generalidade, $\epsilon \leq 1$. Então $B''(x,\epsilon) = B(x,\epsilon) \subset U$. Portanto $U \in \tau_{d''}$. Recíprocamente se $B''(x,\epsilon) \subset U$. Se $\epsilon > 1$, $U = X \in \tau_d$. Se $\epsilon \leq 1$, $B(x,\epsilon) = B''(x,\epsilon) \subset U$.

15/02

Teorema 16 *Seja (X,ρ) espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço. Então $U \subset Y$ é aberto de Y se e somente se existir $W \subset X$ aberto tal que $U = W \cap Y$.*

Demonstração: Notemos inicialmente que

$$B_Y(x,r) = \{y \in Y : d(x,y) < r\} = Y \cap B(x,r).$$

Seja $\tau(Y)$ a família dos subconjuntos abertos em Y. E τ os abertos de X. Então se $U \in \tau(Y)$, para todo $u \in U$ existe $\epsilon(u) > 0$ tal que $B_Y(u,\epsilon(u)) = Y \cap B(u,\epsilon(u)) \subset U$. Mas então $W = \cup_{u\in U} B(u,\epsilon(u)) \in \tau$ e $W \cap Y = U$. Suponhamos agora $W \in \tau$. Cada $w \in W$ existe $B(w,r(w)) \subset W$. Então

$$U = \cup_{w\in W} Y \cap B(w,r(w)) = \cup_{w\in W} B_Y(w,r(w)) \in \tau(Y) \text{ e } U = W \cap Y.$$

Corolário 7 *Nas mesmas condições do teorema anterior, $F \subset Y$ é fechado de Y se e somente se existir H fechado em X tal que $H \cap Y$.*

Corolário 8 *Se Y for fechado de X então F é fechado em Y se e somente se for fechado em X.*

Produto cartesiano de espaços métricos

Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. O produto cartesiano $X \times Y$ pode ser metrizado de uma forma natural. Definamos para $z = (x, y) \in X \times Y$ e $z' = (x', y') \in X \times Y$,

$$\overline{d}\left((x, y), (x', y')\right) = d\left(x, x'\right) + \rho\left(y, y'\right).$$

Então verificamos de imediato que $\overline{d}$ é uma métrica em $X \times Y$. Outras métricas são possíveis: $\max\left\{d\left(x, x'\right), \rho\left(y, y'\right)\right\}$ ou $\sqrt{d\left(x, x'\right)^2 + \rho(y, y')^2}$. Podemos verificar com pouca dificuldade que essas métricas são equivalentes.

Lema 9 *Sejam (X_n, d_n) espaço métrico, $n \geq 1$ natural. Então $X = \Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ pode ser metrizado:*

$$d\left((x_n)_n, (y_n)_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n\left(x_n, y_n\right)}{1 + d_n\left(x_n, y_n\right)}. \tag{1}$$

Comentário 17 *O produto cartesiano finito de espaços normados também é um espaço normado. Entretanto o produto enumerável infinito de espaços normados não é um espaço normado.*

Um subconjunto M do espaço normado V é limitado se existir $m > 0$ tal que $|x| \leq m$ para todo $x \in M$. Analogamente M um subconjunto de um espaço métrico é limitado se existir $r > 0$ tal que $M \subset B(x, r)$ para algum $x \in X$. Isto é, M é limitado se estiver contido em alguma bola aberta (ou fechada o que dá no mesmo).

Definição 23 *Se $A \subset X$ é limitado e não–vazio, o diâmetro de A é $\delta(A) = \sup\left\{d(x, y) : x, y \in A\right\}$.*

Por exemplo, o diâmetro de $B(x, r)$ é no máximo $2r$. Pois se $y, y' \in B(x, r)$, $d(y, y') \leq d(y, x) + d(x, y') < 2r$. E logo $\delta(B(x, r)) \leq 2r$. Na métrica discreta, $\delta(X) = 1$ se $\#X > 1$.

Continuidade

Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x^0 \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(x^0) > 0$ tal que

$$d\left(x, x^0\right) < \delta \implies \rho\left(f(x), f\left(x^0\right)\right) < \epsilon.$$

Em outras palavras: Para todo bola $B_\rho\left(f\left(x^0\right), \epsilon\right)$ existe uma bola $B_d\left(x^0, \delta\right)$ tal que $f\left(B_d\left(x^0, \delta\right)\right) \subset B_\rho\left(f\left(x^0\right), \epsilon\right)$.

Lema 10 *f é contínua em x^0 se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto tal que $f(x^0) \in U$ existe $W \ni x^0$ aberto de X tal que $f(W) \subset U$.*

Definição 24 *$f : X \to Y$ é contínua em X se para todo $x \in X$, f for contínua em x.*

Definição 25 *E f é uniformemente contínua em X se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, \forall x', d(x, x') < \delta \implies \rho(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Lema 11 *$f : X \to Y$ é contínua em X se e somente se para todo $U \subset Y$ aberto, $f^{-1}(U) \subset X$ é aberto.*

Seqüências e limites

Uma seqüência $(x_n)_{n \geq 1}$ no espaço métrico X converge para $x \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $n' \geq 1$ tal que $n > n'$ implica $d(x, x_n) < \epsilon$.

Notação 3 *Escrevemos $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ quando existir o limite de $(x_n)_n$ e for x.*

Proposição 1 *O limite quando existe é único*

Demonstração: Sejam $x \neq y$ limites de $(x_n)_n$. E $\epsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Então existem n' e n'' tais que

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &< \epsilon \text{ para } n > n' \\ d(x_n, y) &< \epsilon \text{ para } n > n'' \end{aligned}$$

Então se $n > \max\{n', n''\}$, $2\epsilon = d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\epsilon$ uma contradição.

Teorema 17 *Seja $f : X \to Y$. Então f é contínua em $a \in X$ se e somente se para todo seqüência $x_n \in X$ com limite a, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Demonstração: Suponhamos f contínua em a. Seja $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \implies \rho(f(x), f(a)) < \epsilon$. Pela definição de limite existe n' tal que $n > n'$ implica $d(x_n, a) < \delta$. Portanto $n > n'$, temos $\rho(f(x_n), f(a)) < \epsilon$. E portanto $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que f fosse descontínua em a. Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ existe $x_n \in X$, $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e $\rho(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$.

Comentário 18 *Uma vantagem dos espaços métricos é podermos usar seqüências. Nos espaços topológicos, em geral, teoremas como o anterior não são válidos.*

17/02

Fecho e interior

Seja (X, d) métrico. Para $A \subset X$ definimos $\mathscr{F} = \{F : A \subset F \subset X,\ F \text{ fechado}\}$. Então $B = \cap \{F : F \in \mathscr{F}\}$ é fechado e é o menor subconjunto fechado de X que contém A. Dizemos que B é o fecho de A e denotamos $\overline{A} := B$. As seguintes propriedades são imediatas:

1. Se $A \subset B \subset X$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$;
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. A é fechado se e somente se $A = \overline{A}$.

Por exemplo $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado por ser união de dois fechados. Agora $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$ e portanto $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ e vale (3) acima.

Lema 12 *$x \in \overline{A}$ se e somente se para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Então $F = X \setminus B(x, r) \supset A$ é fechado e $x \notin F$. Logo $x \notin \overline{A}$ pois $F \supset \overline{A}$. Recíprocamente, se $x \notin \overline{A}$. Então existe fechado $F \supset A$ tal que $x \notin F$. Mas então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap F = \emptyset$ e a fortiori $B(x, r) \cap A = \emptyset$.

Definição 26 *O interior de A é $\cup \{U \subset A : U$ é aberto$\}$.*

Notação 4 $\operatorname{int} A = \mathring{A} = \cup \{U \subset A : U$ *é aberto*$\}$.

As seguintes propriedades são imediatas:

1. Se $A \subset B \subset X$ então $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$
2. $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$
3. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

Definição 27 *Seja $A \subset X$ não–vazio. Para $x \in X$ definimos a distância de x a A por*

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Lema 13 *$d(x, A) = 0$ se e somente se $x \in \overline{A}$.*

Demonstração: Notemos que se $B(x,r) \cap A = \emptyset$ então $d(x,A) \geq r$. Portanto se $x \in X \setminus \overline{A}$, $d(x,A) > 0$. É óbvio que $d(x,A) = 0$ para todo $x \in A$. Suponhamos agora $x \in \overline{A}$. Então pelo lema acima, $d(x,A) < r$ sempre que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ e então $d(x,A) = 0$.

Proposição 2 *A função distância é uniformemente contínua. Na verdade vale um pouco mais:* $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

Demonstração: Para $a \in A$, $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. Logo $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$ e tomando o ínfimo novamente, $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$. Portanto $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. Trocando os papéis de x e y obtemos $d(y,A) - d(x,A) \leq d(y,x) = d(x,y)$ e $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

Seja $f(x) = d(x,F)$ sendo F fechado. Assim $f(x) = 0$ se e somente se $x \in F$. O conjunto $\left\{x \in X : f(x) < \frac{1}{n}\right\}$ é aberto e $\cap_{n=1}^{\infty} \left[f < \frac{1}{n}\right] = [f = 0] = F$. Portanto todo fechado de um espaço métrico é uma intersercção enumerável de abertos. Se U for aberto, $F_n = \left\{x \in X : d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\right\}$ é fechado contido em U. E $\cup_n F_n = \{x : d(x, U^c) > 0\} = U^{cc} = U$.

Proposição 3 $x \in \overline{A}$ *se e somente se existe uma seqüência* $(x_n)_n$ *com* $x_n \in A$ *e* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Demonstração: Se x está no fecho de A para todo $n \geq 1$, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$. Seja $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Então $\lim_n x_n = x$. E se $x \notin \overline{A}$ existe $r > 0$, $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Então nenhuma seq. $(x_n)_n$ em A converge para x pois $d(x, x_n) \geq r > 0$.

Definição 28 *O ponto* $x \in A$ *é um ponto isolado de* A *em* X *se existir um aberto* $U \subset X$ *tal que* $U \cap A = \{x\}$.

É imediato da definição que x é ponto isolado de A se existir $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Exemplo 22 *Todo ponto de* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *é isolado. Nenhum ponto de* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *é isolado.*

Exemplo 23 *O conjunto* $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ *tem ponto isolados,* $\frac{1}{n}, n \neq 0$. *Mas* $0 \in A$ *não é ponto isolado pois* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Exemplo 24 *Na métrica discreta em* X *todo ponto é isolado.*

Definição 29 *O conjunto* $P \subset X$ *é perfeito se for fechado sem pontos isolados.*

1. *O conjunto* $S \subset X$ *é denso se o fecho de* S *for* X.

2. *O espaço métrico X é separável se existe $A \subset X$ enumerável e denso: $\overline{A} = X$.*

3. *O espaço métrico X tem base enumerável se existir uma família enumerável de abertos, $\mathfrak{B} = \{B_n : n \geq 1\}$ tal que todo aberto de X seja uma união de elementos de $\mathfrak{B}$.*

Exemplo 25 *$\mathbb{R}^n$ é separável pois $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e denso. O conjunto funções contínuas reais de $[a,b]$ na métrica do sup é separável (mas não é imediato de se demonstrar). l^∞ não é separável mas l^1 e l^2 são separáveis.*

Teorema 18 *O espaço métrico X é separável se e somente se tem base enumerável.*

Demonstração: Suponhamos $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em X. Então a família de bolas de centro x_n e raio racional, $\{B(x_n, r) : n \geq 1, r \in \mathbb{Q}_{++}\}$, é enumerável. Seja $\{B_n : n \geq 1\}$ uma enumeração dessa família. Seja $U \subset X$ aberto e $x \in U$. Existe $B(x,r) \subset U$. Sem perda de generalidade r é racional. Seja n' tal que $d(x, x_{n'}) < r/2$. Então $B\left(x_{n'}, \frac{r}{2}\right) \subset B(x,r) \subset U$. Então se m é tal que $B_m = B\left(x_{n'}, \frac{r}{2}\right)$ temos $x \in B_m \subset U$. Recíprocamente suponhamos que $\{B_n : n \geq 1\}$ seja base enumerável de abertos. Sem perda de generalidade, B_n é não–vazio. Para cada B_m seja $x_m \in B_m$. Então $\{x_m : m \geq 1\}$ é denso em X.

Teorema 19 *Se (X,d) é separável e $\{U_i : i \in I\}$ é uma família de abertos não–vazios dois a dois disjuntos, então I é enumerável.*

Demonstração: Seja $\{x_n : n \geq 1\}$ denso em X. Para cada $i \in I$ existe n tal que $x_n \in U_i$. Definimos então $f : I \to \mathbb{N}$,

$$f(i) = \min\{n : x_n \in U_i\}.$$

Note que se $i \neq j$ então $f(i) \neq f(j)$. Mas então I é enumerável.

27/02

Espaço métrico completo

Uma seqüência $(x_n)_n$ no espaço métrico (X,d), é de Cauchy, se para todo $\epsilon > 0$ existir natural n^0 tal que $n, m \geq n^0$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Lema 14 *Toda seq. de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em X. Existe p natural tal que $n, m \geq p$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Em particular $d(x_n, x_p) \leq 1$ para $n \geq p$. Seja $M = \max\{1, d(x_1, x_p), \ldots, d(x_{p-1}, x_p)\}$. Portanto $\{x_n : n \geq 1\} \subset B[x_p, M]$.

Proposição 4 *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Suponhamos $\lim_n x_n = x$. Seja n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Então se $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Definição 30 *A seqüência $(y_n)_n$ é uma subseqüência de $(x_n)_n$ se existir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $y_n = x_{k(n)}$ para todo $n \geq 1$.*

Lema 15 *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é, ela mesma, convergente.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy e $\left(x_{k(n)}\right)_n$ subseqüência com limite x. Seja $\epsilon > 0$. Existe n' tal que $n \geq n' \implies d\left(x_{k(n)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja n'' tal que $n, m \geq n'' \implies d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Então para $n \geq n'''$, $p \geq \max\{k^{-1}(n''), n'\}$,

$$d(x_n, x) \leq d\left(x_n, x_{k(p)}\right) + d\left(x_{k(p)}, x\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Exemplo 26 *No subespaço $Y = (0, 1]$ de $X = [0, 1]$ a seq. $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite em X é $0 \notin Y$.)*

Exemplo 27 *Para $X = \mathbb{Q}$, a seqüência $x_n = \frac{[n\sqrt{2}]}{n}$ é de Cauchy mas não converge (o limite existe nos reais e é $\sqrt{2}$)*

Definição 31 *Um espaço métrico é completo se toda seqüência de Cauchy dele for convergente.*

Exemplo 28 *X com a métrica discreta é completo: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Existe n^0 tal que $n, m \geq n^0$ implica $d(x_n, x_m) < 1$. Portanto $x_n = x_{n^0}$ se $n \geq n^0, m = n^0$.*

Teorema 20 *Seja (X, d) espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço completo. Então Y é fechado.*

Demonstração: Seja $y \in \overline{Y}$ e seja $(y_n)_n \subset Y$ uma seqüência com limite y. Mas (y_n) é de Cauchy em X e pela mesma razão de Cauchy em Y. Mas Y sendo completo (y_n) converge para $x \in Y$. Mas então pela unicidade do limite $x = y \in Y$. Portanto $\overline{Y} = Y$ é fechado.

Teorema 21 *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo.*

Demonstração: Seja $F \subset X$ fechado, X completo. Seja $(x_n)_n$ de Cauchy em F. A fortiori, $(x_n)_n$ é de Cauchy em X. Seja $x = \lim_n x_n$. Mas então $x \in \overline{F} = F$.

Teorema 22 *$\mathbb{R}$ é completo na métrica usual.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$, $x_n \in \mathbb{R}$ de Cauchy. A seq. é limitada. Seja $M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$ para todo n. Seja $\alpha_n = \inf \{x_m : m \geq n\}$. A seq. $(\alpha_n)_n$ é crescente e limitada superiormente por M. Seja $x = \sup \{\alpha_n : n \geq 1\}$. Então $\lim_n x_n = x$: Para cada N existe $\alpha_N \leq x_{k(N)} < \alpha_N + \frac{1}{N}$. Então $\lim_N x_{k(N)} = \lim_N \alpha_N = x$. Logo $(x_n)_n$ converge pois é de Cauchy e possui uma subseqüência convergente.

Teorema 23 *$\mathbb{R}^n$ é completo.*

Demonstração: Basta notar que $((x_p(1), \ldots, x_p(n)))_{p=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ é de Cauchy se e somente se cada $(x_p(i))_p$, $i = 1, \ldots, n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $y_i = \lim_p x_p(i)$. Então $\lim_p x_p = y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Teorema 24 *Todo subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ é fechado (e completo)*

Demonstração: Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Vou demonstrar que F é fechado. Seja $\{v_1, \ldots, v_p\}$ uma base ortogonal de F e a completemos a uma base ortogonal $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Então

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n : (y, v_{p+i}) = 0, i = 1, \ldots, n-p\} = \cap_{i=1}^{n-p} \{y \in \mathbb{R}^n : (y, v_{p+i}) = 0\}.$$

A função $f(y) = (y, v_{p+i})$ é contínua pois $|f(y) - f(z)| = |(y - z, v_{p+i})| \leq |y - z| |v_{p+i}|$ e $f^{-1}(\{0\}) = \{y \in \mathbb{R}^n : (y, v_{p+i}) = 0\}$.

Para (X, d) e (M, ρ) espaços métricos:

Definição 32 *Uma função $f : X \to M$ é limitada se existir uma bola aberta $B \subset M$ tal que $f(X) \subset B$. O conjunto, $\mathscr{B}(X, M)$, das funções limitadas de X em M possui uma métrica natural.. Seja para $f, g \in \mathscr{B}(X, M)$,*

$$d(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\} < \infty.$$

Teorema 25 *Nas condições acima,*

a) *$\mathscr{B}(X, M)$ é métrico.*

b) *$\mathscr{B}(X, M)$ é completo se M for completo.*

Demonstração: (a) Se $f(x) \neq g(x)$ vem $d(f,g) \geq \rho(f(x), g(x)) > 0$. É imediato que $d(f,g) = d(g,f)$. Desigualdade triangular: se $f, g, h \in \mathscr{B}(X, M)$. Então

$$\begin{aligned}\rho(f(x), h(x)) &\leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), h(x)) \leq d(f,g) + d(g,h) \\ &\implies d(f,h) = \sup_x \rho(f(x), h(x)) \leq d(f,g) + d(g,h).\end{aligned}$$

(b) Seja $(f^p)_p \subset \mathscr{B}(X, M)$ de Cauchy. Então para cada $x \in X$, $(f^p(x))_{p \geq 1}$ de Cauchy em M. Seja $f(x) = \lim_{p \to \infty} f^p(x)$. Seja $p(1)$ tal que $d(f^p, f^{p+q}) < 1$ se $p \geq p(1)$, $q \geq 1$. Então

$$\rho\left(f^{p(1)}(x), f^p(x)\right) \leq 1, \forall x \in X.$$

No limite $p \to \infty$, $\rho\left(f^{p(1)}(x), f(x)\right) \leq 1$ e então $f(\cdot)$ é limitada pois $f^{p(1)}$ é limitada. Finalmente se $\epsilon > 0$ seja N tal que $p, q \geq N$,

$$\rho(f^p(x), f^q(x)) \leq d(f^p, f^q) < \epsilon.$$

No limite q tende ao infinito: para todo $x \in X$,

$$\rho(f^p(x), f(x)) \leq \epsilon$$

e portanto $d(f^p, f) \leq \epsilon$.

Definição 33 *Seja* $\mathscr{C}_b(X, M) = \{f \in \mathscr{B}(X, M) : f$ *é contínua*$\}$.

Corolário 9 $\mathscr{C}_b(X, M)$ *é completo se* M *for completo.*

Demonstração: Basta demonstrar que $\mathscr{C}_b(X, M)$ é fechado em $\mathscr{B}(X, M)$. Seja então $f^p : X \to M$ limitada contínua e $f \in \mathscr{B}(X, M)$ limite de f^p. Seja $x^0 \in X$ dado e $x \in X$ qualquer. Seja $\epsilon > 0$ e $p(\epsilon)$ tal que para todo $x \in X$, $p \geq p(\epsilon)$

$$\begin{aligned}\rho\left(f^p(x), f^{p(\epsilon)}(x)\right) &\leq \frac{\epsilon}{3}, \\ \rho\left(f^p\left(x^0\right), f^{p(\epsilon)}\left(x^0\right)\right) &\leq \frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x^0) < \delta$, $\rho\left(f^{p(\epsilon)}(x), f^{p(\epsilon)}(x^0)\right) < \frac{\epsilon}{3}$. Logo para $p \geq p(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}&\rho\left(f^p(x), f^p\left(x^0\right)\right) \leq \\ \rho\left(f^p(x), f^{p(\epsilon)}(x)\right) + \rho\left(f^{p(\epsilon)}(x), f^{p(\epsilon)}\left(x^0\right)\right) &+ \rho\left(f^{p(\epsilon)}\left(x^0\right), f^p\left(x^0\right)\right) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

No limite, $\rho(f(x), f(x^0)) \leq \epsilon$.

Comentário 19 *Vimos acima que as seqüências de Cauchy de racionais convergem em* $\mathbb{R}$. *Podemos dizer que os reais completam os racionais. Este é um fenomeno bem geral. Todo espaço métrico possui um completamento.*

01/03

Completamento de espaços métricos

Lema 16 *Seja* (X, d) *métrico. Então* $|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$.

Demonstração: Para $x, y, a \in X$,

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \implies d(x,a) - d(y,a) \leq d(x,y).$$

Trocando os papéis de x, y;

$$d(y,a) - d(x,a) \leq d(y,x) = d(x,y).$$

Portanto

$$|d(x,a) - d(y,a)| = \max\{d(x,a) - d(y,a), d(y,a) - d(x,a)\} \leq d(x,y).$$

Definição 34 *Sejam* (X, d) *e* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *espaços métricos.*

1. *Uma função* $f : X \to \widetilde{X}$ *é uma imersão isométrica se*

$$d(x,y) = \widetilde{d}(f(x), f(y)), x, y \in X.$$

   Se $f(x) = f(y)$ *então* $d(x,y) = 0$ *e* $x = y$. *Toda imersão isométrica é injetiva e uniformemente contínua.*

2. *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.*

Definição 35 $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *é completamento de* (X, d) *se* $\left(\widetilde{X}, \widetilde{d}\right)$ *for completo e existir imersão isométrica* $f : X \to \widetilde{X}$ *com imagem densa em* $\widetilde{X}$.

Teorema 26 *Todo espaço métrico possui um completamento.*

Demonstração: Seja (M, ρ) métrico. Vou demonstrar que é isométrico a um subespaço de $\mathscr{C}_b(M, \mathbb{R})$.

Seja $a \in M$ fixo. E definamos para $x \in M$, $f_x(z) = \rho(z,x) - \rho(z,a)$. Então $|f_x(z)| \leq \rho(x,a)$ e então f_x é limitada. Temos

$$d(f_x, f_y) = \rho(x,y).$$

Para checar[8] isso,

$$\begin{aligned}\sup_m |f_x(m) - f_y(m)| &= \sup_m |\rho(x,m) - \rho(m,a) - (\rho(y,m) - \rho(m,a))| \\ &= \sup_m |\rho(x,m) - \rho(y,m)| = \rho(x,y).\end{aligned}$$

Portanto $\Theta : X \to \mathscr{C}_b(M,\mathbb{R})$ definida por $\Theta(x) = f_x$ é uma imersão isométrica. Seja $\widetilde{M} = \overline{\Theta(M)} \subset \mathscr{C}_b(M,\mathbb{R})$. Então $\widetilde{M}$ é o completamento de M pois é fechado e $\mathscr{C}_b(M,\mathbb{R})$ é completo.

Comentário 20 *Os espaços métricos podem possuir vários completamentos mas todos são isométricos entre si.*

Teorema 27 *Sejam* $\left(\widetilde{M}, \widetilde{d}\right)$ *e* $\left(\widehat{M}, \widehat{d}\right)$ *completamentos de* (M,d)*. Então* $\widetilde{M}$ *e* $\widehat{M}$ *são isométricos.*

Demonstração: Seja $\phi : M \to \widetilde{M}$ imersão isométrica com image densa em $\widetilde{M}$ e seja $\psi : M \to \widehat{M}$ imersão isométrica com imagem densa em $\widehat{M}$. Definamos $f : \phi(M) \to \psi(M)$ por $f(\phi(x)) = \psi(x)$, $x \in M$. Temos

$$\hat{d}(\psi(x), \psi(y)) = \hat{d}(f(\phi(x)), f(\phi(y))) = \tilde{d}(\phi(x), \phi(y)).$$

Podemos extender f: Se $z \in \widetilde{M}$ existe $\phi(x_n) \to z$. Logo $(\phi(x_n))_n$ é de Cauchy e então $(\psi(x_n))_n$ é de Cauchy. Seja $f(z) = \lim_n \psi(x_n)$. Esta é a isometria procurada.

Teorema 28 *Seja* (X,d) *completo. E* $F_n \supset F_{n+1}$ *uma família de conjuntos fechados não–vazios de* X *com* $\delta(F_n) \to 0$*. Então* $\cap_n F_n \neq \emptyset$*.*

Demonstração: Seja $x_n \in F_n$. Então $(x_n)_n$ é de Cauchy pois dado $\epsilon > 0$ e p natural é tal que $\delta(F_k) < \epsilon$ sempre que $k \geq p$ então se $n, m \geq p$, $\{x_n, x_m\} \subset F_p$ e logo $d(x_n, x_m) \leq \delta(F_p) < \epsilon$. Agora (x_n) sendo de Cauchy tem $x = \lim_n x_n$. Mas $x_m \in F_n$ se $m \geq n$ logo $x \in F_n$ para todo n e $x \in \cap_n F_n$.

Teorema 29 *Suponhamos que* (X,d) *seja tal que toda família de fechados decrescente com diâmetro convergindo para* 0 *tem intersecção não vazia. Então* X *é completo.*

Demonstração: Seja $(x_n)_n$ de Cauchy. Para $\epsilon = \frac{1}{N}$ existe $k(N)$ tal que $n, m \geq k(N) \implies d(x_n, x_m) < \frac{1}{N}$. Sem perda de generalidade $k(N)$ é estritamente crescente. Logo se $F_N = \overline{\{x_n : n \geq k(N)\}}$ temos $\delta(F_N) \leq \frac{1}{N}$ e $F_{N+1} \subset F_N$. Seja $x \in \cap_N F_N$. Então $\lim_n x_n = x$.

[8] O supremo é alcançado para $m = y$.

Completamento de espaços normados

Definição 36 *Um espaço normado completo é um espaço de Banach.*

Definição 37 *Um espaço euclidiano completo é um espaço de Hilbert.*

Teorema 30 *O completamento de um espaço normado é um espaço de Banach. E o completamento de um espaço euclidiano é um espaço de Hilbert.*

Comentário 21 *Não vou demonstrar.*

O teorema mais importante sobre espaços métricos completos é o teorema de Baire.

Definição 38 *Seja (X, d) métrico. O conjunto $A \subset X$ é de primeira categoria (ou magro) se existirem $F_n \subset X$ fechados de interior vazio tais que $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. A é de segunda categoria se não for de primeira categoria.*

Teorema 31 (Baire) *Seja (X, d) métrico completo. Então todo conjunto de primeira categoria em X tem interior vazio.*

Comentário 22 *E conseqüentemente, uma intersecção enumerávels de abertos densos é densa.*

Demonstração: Seja $F = \cup_n F_n$ sendo F_n fechado em X com interior vazio. Seja V_0 aberto não–vazio de X. Então $V_0 \backslash F_1$ é não–vazio pois F_1 tem interior vazio. Seja $B_1 = B(x_1, r_1) \subset B[x_1, r_1] \subset V_0 \setminus F_1$ e $2r_1 < 1$. Agora $B_1 \setminus F_2$ não é vazio. Existe então aberto B_2 de diâmetro menor do que $1/2$ e tal que $\bar{B}_2 \subset B_1 \backslash F_2$. Continuando indutivamente obtemos uma seqüência de bolas abertas B_n com diâmetro menor do que $\frac{1}{n}$ e $\bar{B}_n \subset B_{n-1} \setminus F_n$. Seja $x \in \cap_n B_n$. Então $x \notin \cup_n F_n$.

Corolário 10 *Todo conjunto perfeito não–vazio de um espaço métrico completo é não enumerável.*

03/03

Exemplo 29 *Para $1 \leq p \leq \infty$, l^p é um espaço de Banach.*

Por exemplo se $1 \leq p < \infty$. Se $(x^n)_n$ é de Cauchy em l^p. Então para cada $i \geq 1$, $(x^n(i))_n$ é de Cauchy na reta e portanto existe $x(i) = \lim_n x^n(i)$. Dado $\epsilon > 0$ seja N tal que $n, m \geq N$, $|x^n - x^m|_p = \sum_{i=1}^{\infty} |x^n(i) - x^m(i)|^p \leq \epsilon^p$. Então se m tende ao infinito,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^n(i) - x(i)|^p \leq \epsilon^p.$$

Método das aproximações sucessivas

Definição 39 *Um ponto fixo de* $f : M \to M$ *é* $a \in M$ *tal que* $f(a) = a$*.*

Definição 40 *Uma função* $f : M \to M$ *é uma contração (ou* λ *contração) se existir* $0 < \lambda < 1$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), x, y \in M.$$

Uma contração tem no máximo um ponto fixo: se $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então

$$\begin{aligned} d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) &\implies (1 - \lambda) d(x, y) \leq 0 \\ \implies d(x, y) = 0 \implies x = y. \end{aligned}$$

Teorema 32 (ponto fixo de Banach) *Seja* (M, d) *completo e* $f : M \to M$ *uma* λ *contração. Então* f *tem um único ponto fixo. Além disso a seqüência* $x_{n+1} = f(x_n)$ *com* $x_0 \in M$ *converge para o ponto fixo.*

Demonstração: Vou demonstrar que $(x_n)_n$ é de Cauchy. Temos

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1).$$

E para $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + \lambda^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{n+p-1}\right) d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ e N tal que $\frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon$. Então se $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(x_0, x_1) < \epsilon$. Seja $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Então a é um ponto fixo:

$$a = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right) = f(a).$$

Comentário 23 *Vemos pela demonstração que* $d(a, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$*. A taxa de convergência é geométrica.*

Teorema 33 (condição de Blackwell para uma contração) *Para* $X \subset \mathbb{R}^n$ *seja* $B(X) = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$*. Seja* $T : B(X) \to B(X)$ *tal que*

a) *se* $f, g \in B(X)$ *e* $f \leq g$ *temos* $Tf \leq Tg$

b) *Existe* $\beta \in (0, 1)$ *tal que* $T(f + a) \leq Tf + \beta a$ *se* $a \geq 0$*.*

Então T é uma contração.

Demonstração: Para $f, g \in B(X)$, $f(x) \leq g(x) + |f(x) - g(x)| \leq g(x) + |f-g|_\infty$. Logo $f \leq g + |f-g|_\infty$.

Por (a),

$$Tf \leq T(g + |f-g|_\infty) \leq Tg + \beta |f-g|_\infty .$$

Trocando f com g: $Tg \leq Tf + \beta |f-g|_\infty$. Portanto $|Tg - Tf|_\infty \leq \beta |f-g|_\infty$.

Exemplo 30 (crescimento ótimo, um setor) *O seguinte problema resume o aspecto matemático do problema:*

$$Tv(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U(f(k) - y) + \beta v(y)\} .$$

Se $v \leq w$, $Tv \leq Tw$ e vale (a). E

$$\begin{aligned} T(v+a)(k) &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U(f(k) - y) + \beta v(y) + \beta a\} \\ &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U(f(k) - y) + \beta v(y)\} + \beta a \\ &= T(v)(k) + \beta a. \end{aligned}$$

Outros exemplos em Stokey–Lucas.

Compacidade em espaços métricos

Definição 41 *Seja (X, d) espaço métrico.*

1. *$\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de X se $\cup_{i \in I} U_i = X$.*
2. *A cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta se cada U_i for aberto.*

Comentário 24 *A mesma definição vale para subespaços $A \subset X$ considerados com a métrica relativa. Nesse caso como os abertos de A são da forma $A \cap U_i$ podemos escrever $\cup_i U_i \supset A$ no lugar de $\cup_{i \in I} U_i \cap A = A$.*

Definição 42 *Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de X, se $J \subset I$ for tal que $\cup_{i \in J} U_i = X$ dizemos que $\{U_i : i \in J\}$ é uma subcobertura. A subcobertura é finita se J for finito.*

Definição 43 *(X, d) é compacto se toda cobertura aberta de X tem uma subcobertura finita.*

Exemplo 31 *Todo conjunto finito é compacto.*

Exemplo 32 $A = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$ *não é compacto pois* $U_n = \left(\frac{1}{n+1}, 2\right) \supset \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \geq 1$ *é uma cobertura de* A *que não possui subcobertura finita.*

Se K_1e K_2 são compactos de X, $K_1 \cup K_2$ é compacto: Se $\cup_{i\in I} U_i \supset K_1 \cup K_2$ é cobertura aberta então existem J_1 e J_2 finitos tais que

$$\begin{aligned} &\cup_{i\in J_1} U_i \supset K_1, \\ &\cup_{i\in J_2} U_i \supset K_2 \end{aligned}$$

e portanto $\cup_{i\in J_1 \cup J_2} U_i \supset K_1 \cup K_2$.

Lema 17 *Se* $K \subset X$ *é compacto então* K *é fechado.*

Demonstração: Seja $x \in X \setminus K$. Para cada $k \in K$, $B(x, r)$ e $B(k, r)$ são bolas abertas disjuntas de $2r \leq d(x, k)$. A cobertura de K, $\cup_{k\in K} B(k, r(k))$ possui subcobertura finita $B(k_1, r_1), B(k_2, r_2), \ldots, B(k_p, r_p)$. Seja $0 < r < \min_{i\leq p} r_i$. Então

$$B(x, r) \cap B(k_i, r_i) \subset B(x, r_i) \cap B(k_i, r_i) = \emptyset, i \leq p \implies B(x, r) \cap K = \emptyset.$$

Portanto K^c é aberto.

Lema 18 *Se* X *for compacto e* $F \subset X$ *fechado então* F *é compacto.*

Demonstração: Seja $\{U_i : i \in I\}$ cobertura aberta de F. Seja $U_0 = F^c$. Então $\cup_{i\in I\cup\{0\}} U_i = X$. Seja $U_0, U_1, \ldots, U_n$ subcobertura finita:

$$U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n = X \implies U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \supset F.$$

Corolário 11 *Todo compacto é completo.*

Demonstração: Seja $\widehat{K}$ completamento do compacto K. Mas K é subconjunto compacto portanto é fechado. Logo $K = \overline{K} = \widehat{K}$.

Teorema 34 *Seja* $f : M \to N$ *contínua. Se* $K \subset M$ *é compacto,* $f(K) \subset N$ *é compacto.*

Demonstração: Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ cobertura aberta de $f(K)$. Então de

$$K \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$$

vem que $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$é uma cobertura aberta de K. Seja $\{f^{-1}(U_i) : i \in J\}$ subcobertura finita de K. Então

$$f(K) \subset f\left(\cup_{i\in J} f^{-1}(U_i)\right) \subset \cup_{i\in J} U_i.$$

Corolário 12 *Se $f : M \to N$ é contínua e bijetiva. Então se M for compacto, f é homeomorfismo.*

Demonstração: Devemos demonstrar que $f^{-1} : N \to M$ é contínua. Seja $F \subset M$ fechado. Então

$$F \text{ é compacto} \implies \left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F) \text{ é compacto} \implies f(F) \text{ é fechado.}$$

Corolário 13 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ for contínua e M compacto então $f(M)$ é fechado limitado. Em particular f tem máximo pois $\sup f(M) \in f(M)$ e mínimo pois $\inf f(M) \in f(M)$.*

06/03

Definição 44 *A família de conjuntos $\{C_i : i \in I\}$ tem a propriedade da intersecção finita se $\cap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$ para todo J finito.*

Teorema 35 *O espaço métrico M é compacto se e somente se toda família de fechados de M, $\{F_i : i \in I\}$ com a propriedade da intersecção finita tem intersecção não–vazia: $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos M compacto. E $\{F_i : i \in I\}$ família de fechado com a propriedade da intersecção finita. Então se $U_i = F_i^c$ temos para J finito,

$$(\cup_{i\in J} U_i)^c = \cap_{i\in J} U_i^c \neq \emptyset \implies \cup_{i\in J} U_i \neq M.$$

Portanto $\cup_{i\in I} U_i \neq M$ e logo $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Recíprocamente, seja $\cup_{i\in I} U_i = M$ cobertura aberta. Então $\cap_{i\in I} U_i^c = \emptyset$. Logo $\{U_i^c : i \in I\}$ não tem a propriedade de intersecção finita: existe J finito, $\cap_{i\in J} U_i^c = \emptyset$ e logo $\cup_{i\in J} U_i = M$.

Exemplo 33 (teorema de Dini) *Seja M compacto e $f_n : M \to \mathbb{R}$ contínua. Suponhamos $f_n \leq f_{n+1}$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ contínua. Então f_n converge para f uniformemente.*

Para ver isto seja para $\epsilon > 0$ dado,

$$F_n = \{x \in M : f(x) - \epsilon \geq f_n(x)\}.$$

Então F_n é fechado pela continuidade de f_n e f. E $F_{n+1} \subset F_n$. De $\cap_n F_n = \emptyset$ vem que $\{F_n : n \geq 1\}$ não tem a propriedade de intersecção finita. Logo existe n_0 tal que $F_{n_0} = \emptyset$.

Definição 45 *O subespaço Y do espaço métrico X é totalmente limitado se para todo $\epsilon > 0$ existem $W_1, W_2, \ldots, W_n$ com $\delta(W_i) < \epsilon$ e $\cup_{i=1}^n W_i \supset Y$. Alternativamente $Y \subset B(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon)$. E sem perda de generalidade $x_i \in Y$.*

É imediato que totalmente limitado é limitado.

Definição 46 *Seja $A \subset X$. O ponto $x \in X$ é ponto de acumulação de A se para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

Ou seja toda vizinhança de x contém pontos de A distintos de x. O conjunto dos pontos de acumulação de A é denotado A'. É imediato que para todo $x \in A'$, toda vizinhança de x é tem um número infinito de pontos de A.

Lema 19 $\overline{A} = A \cup A'$

Demonstração: Seja $x \in \overline{A} \setminus A$. Existe então $x_n \in A$ com limite x. Mas então a seqüência tem um número infinito de termos e portanto $x \in A'$. Suponhamo agora que $x \in A'$. Para todo n existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (A \setminus \{x\})$. Portanto $\lim x_n = x$ e $x \in \overline{A}$.

Teorema 36 *São equivalentes:*

a) *X é compacto;*

b) *Todo subconjunto infinito de X tem ponto de acumulação;*

c) *toda seqüência em X possui subseqüência convergente;*

d) *X é completo e totalmente limitado.*

Demonstração: (a) $\Longrightarrow$ (b). Suponhamos que $A \subset X$ não tem ponto de acumulação. Portanto A é fechado e então compacto pois X é compacto. Para cada $a \in A$ existe $r_a > 0$ tal que $A \cap B(a, r_a) = \{a\}$. Pela compacidade a cobertura $\{B(a, r_a), a \in A\}$ possui subcobertura finita $\{B(a_i, r_i) : i \leq N\}$e logo $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ é finito. (b) $\Longrightarrow$ (c) Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em X. Seja $A = \{x_n : n \geq 1\}$. Se A for finito então existe $a \in A$ tal que $\{n : x_n = a\}$ é infinito e com isto temos uma subseqüência de $(x_n)_n$ que converge(para a.) Se A for infinito. Seja $x \in A'$. Então para todo n existe $k(n)$ tal que $x_{k(n)} \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \setminus \{x\}$ e $\lim_n x_{k(n)} = x$. (c) implica (d) Se $(x_n)_n$ for de Cauchy, a existência de uma subseqüência convergente por hipótese implica que (x_n) converge. Logo X é completo. Digamos para obter uma contradição que X não seja totalmente limitado. Existe então $\epsilon > 0$ tal que X não pode ser coberto por uma família finita de conjuntos com diâmetro inferior a ϵ. Para $x_0 \in X$, $B(x_0, \epsilon) \neq X$. Seja $x_1 \in X \setminus B(x_0, \epsilon)$. Então existe $x_2 \in X \setminus (B(x_0, \epsilon) \cup B(x_1, \epsilon))$. Prosseguindo indutivamente dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ existe $x_{n+1} \in X \setminus \{B(x_0, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \epsilon)\}$. Se $\left(x_{k(n)}\right)_n$ for uma subseqüência convergente temos para algum n que $d\left(x_{k(n+1)}, x_{k(n)}\right) < \epsilon$ contradição com $x_{k(n+1)} \in X \setminus \cup_{j=1}^{k(n+1)-1} B(x_j, \epsilon)$. (d) $\Longrightarrow$ (a) Seja $\{U_i : i \in I\}$

cobertura aberta de X sem subcobertura finita. Sem perda de generalidade U_i não–vazio. Sejam $V_1^N \cup V_2^N \cup \ldots \cup V_{k(N)}^N = X$ com $\delta\left(V_i^N\right) < \frac{1}{N}$. Sem perda de generalidade V_i^N é fechado. Para $N = 1$ existe $j(1) \leq k(1)$ tal que $V_{j(1)}^1$ não tem subcobertura finita de $\{U_i\}_{i \in I}$. Então definido o processo para N prosseguimos para $N+1$: $V_{j(N)}^N = V_1^{N+1} \cup \ldots V_{k(N+1)}^{N+1}$ cada um com diâmetro $<\frac{1}{N+1}$. Existe um $j(N+1) \leq k(N=1)$ para o qual a cobertura $\cup_{i \in I} U_i \supset V_{j(N+1)}^{N+1}$ não possui subcobertura finita. Seja $\{x^0\} = \cap_{N=1}^{\infty} V_{k(N)}^N$ que existe pois o espaço é completo. Seja $i^0 \in I$ tal que $x^0 \in U_{i^0}$. Para N tal que $\frac{1}{N} < \delta(U_{i^0})$ temos que $V_{k(N)}^N \subset U_{i^0}$. Contradição.

08/03

Convexidade

A referência para essa parte é “Convex Analysis” do T. Rockafellar.

Variedade afim

Definição 47 *Se x e y são vetores distintos, a reta que passa por x e y é $L = \{rx + (1-r)y : r \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 48 *Se V é um espaço vetorial, $M \subset V$ é afim se $(1-r)x + ry \in M$ sempre que $x, y \in M, r \in \mathbb{R}$.*

Em outras palavras M é afim se contém toda reta que passa por cada par de pontos distintos de M.

Lema 20 *Se M é afim então se $x_i \in M$ e $\sum_i \lambda_i = 1$, $\sum_i \lambda_i x_i \in M$.*

Demonstração: $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ e $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Sem perda de generalidade $\lambda_{n+1} \neq 1$. Então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0$ e $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M$ e logo

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1}) \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in M.$$

Comentário 25 *O conjunto vazio e o espaço vetorial V são afins. Se $M = \{m\}$ então M é afim.*

Exemplo 34 *Todo subespaço vetorial é uma variedade afim.*

Teorema 37 *Toda variedade afim é a translação de um subespaço vetorial.*

Demonstração: Seja F subespaço vetorial de V. Então $a+F$ é variedade afim: se $x, y \in a+F$ e $r \in (-\infty, \infty)$ temos $x-a, y-a \in F$ e $r(x-a)+(1-r)(y-a) \in F$. Portanto $rx + (1-r)y \in a + F$. Recíprocamente suponhamos M variedade afim de V. Seja $a \in M$ e definamos $F = M - a$. Vamos verificar que F é um subespaço vetorial. Sejam $x, y \in F$.

Então $\lambda x + a = \lambda(x+a) + (1-\lambda)a \in M$ implica $\lambda x \in F$ para todo escalar λ. Agora $\frac{1}{2}(x+a) + \frac{1}{2}(y+a) = \frac{x+y}{2} + a \in M$ e então $\frac{x+y}{2} \in F$ e então $x + y = 2\frac{x+y}{2} \in F$. Portanto F é subespaço vetorial.

Comentário 26 *O espaço vetorial associado à variedade afim M é $M - M$.*

Para verificar isso note que $a+F = M$. Então $F = F-F = (a+F)-(a+F) = M - M$.

Comentário 27 *A intersercção de variedades afins é uma variedade afim. Assim para $S \subset V$ exist* aff S *a menor variedade afim que contém S.*

Lema 21 aff $S = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \geq 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, x_i \in S\}$.

Demonstração: Seja M o lado direito da igualdade acima. Então $M \supset S$. Sejam $x, y \in M$, r real. Então

$$rx+(1-r)y = r\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right)+(1-r)\left(\sum_{k=1}^{p} \mu_k x'_k\right), \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 = \sum_{k=1}^{p} \mu_k, x_i, x'_i \in S.$$

Logo $rx+(1-r)y = \sum_i r\lambda_i x_i + \sum_k (1-r)\mu_k x'_k \in M$ pois a soma dos coeficientes é 1. Por outro lado aff $S \supset M$ terminando a demonstração.

Definição 49 *A dimensão de uma variedade afim M é a dimensão do subespaço vetorial associado, $L(M) = M - M$.*

Definição 50 *O conjunto $b_0, \ldots, b_m$ é afim independente se $b_1 - b_0, \ldots, b_m - b_0$ são linearmente independentes.*

Nesse caso con $\{b_0, \ldots, b_m\}$ *é, por definição, um simplexo de dimensão m. E cada b_i é vértice do simplexo. O ponto $\frac{1}{m+1}(b_0 + b_1 + \ldots + b_m)$ é o baricentro do simplexo.*

Definição 51 *Um hiperplano no $\mathbb{R}^n$ é uma variedade afim de dimensão $n - 1$.*

Teorema 38 *Para β real e $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) = \beta\}$ é um hiperplano. Além disso todo hiperplano do $\mathbb{R}^n$ possui uma tal representação com b, β únicos a menos de um múltiplo comum.*

Demonstração: Seja H um hiperplano no $\mathbb{R}^n$. Seja $F = H - H$ o subespaço vetorial associado. Se $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ é uma base ortogonal de F e completando (teorema de ortogonalização de Gram–Schmidt) temos $\{b_1, \ldots, b_n\}$ base ortogonal do $\mathbb{R}^n$. É claro que $F = \{x : (x, b_n) = 0\}$. Agora se $H = a + F$ e $\beta = (a, b_n)$ temos se $b := b_n$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, b) = \beta\}. \tag{*}$$

Recíprocamente se H está definido por (*), $b \neq 0$ seja $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $(a, b) = \beta$. Então se $(x, b) = \beta = (a, b)$ temos $x - a \perp b$. O subespaço $F = b^{\perp}$ tem dimensão $n - 1$. Suponhamos $H = \{x : (x, b') = \beta'\}$ outra representação do hiperplano H. Mas então com F é ortogonal à b' temos $b' \in [b]$ ou seja $b' = \mu b$, $\mu \neq 0$. E $(x, b') = \mu\,(x, b) = \mu\beta = \beta'$.

Comentário 28 *b é uma normal ao hiperplano H.*

Teorema 39 *Seja B matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = b\}$ é afim. Além disso toda variedade afim é dessa forma.*

Demonstração: Sejam $x, y \in M$, r real. $B\,(rx + (1 - r)\,y) = rBx + (1 - r)\,By = rb + (1 - r)\,b = b$. Por outro lado se M é afim própria seja $L = M - M$. Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ base de $L^{\perp}$. Então

$$L = \left(L^{\perp}\right)^{\perp} = \{x : x \perp b_i, i \leq m\} = \{x : (x, b_i) = 0, i \leq m\} = \{x : Bx = 0\}.$$

Sendo B matriz $m \times n$ com linhas $b_1, \ldots, b_m$. Se $M = L + a = \{x : B\,(x - a) = 0\} = \{x : Bx = b\}$ sendo $b = Ba$.

Corolário 14 *Toda variedade afim num espaço de dimensão finita é a intersecção de uma família finita de hiperplanos.*

Definição 52 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo*[9] *dos reais. O conjunto $C \subset V$ é convexo se para todos c', c'' em C e $0 < r < 1$, $rc' + (1 - r)\,c'' \in C$.*

Todo subespaço vetorial é convexo e toda variedade afim é convexa. Se $f \in V^* \setminus \{0\}$ então

$$\begin{aligned}
&\{x \in V : f\,(x) = \gamma\}, \text{ hiperplano}\\
&\{x \in V : f\,(x) < \gamma\}, \text{ semi–espaço aberto}\\
&\{x \in V : f\,(x) > \gamma\}, \text{ semi–espaço aberto}\\
&\{x \in V : f\,(x) \leq \gamma\} \text{ semi–espaço fechado}\\
&\{x \in V : f\,(x) \geq \gamma\}, \text{ semi–espaço fechado}
\end{aligned}$$

são convexos.

[9] A mesma definição vale se o corpo for o dos complexos.

Comentário 29 *Note que as noções acima de aberto, fechado se referem somente aos aspecto geométrico. Se f for um funcional linear contínuo os semi–espaços abertos são conjuntos abertos e os semi–espaços fechados são conjuntos fechados. No caso de V ter dimensão finita todo funcional linear é contínuo não havendo margem para confusão.*

Lema 22 *A intersecção de convexos é um convexo.*

Demonstração: Seja $C = \cap_{i \in I} C_i$ cada C_i convexo de V. Se $x, y \in C$ e $r \in (0,1)$, de $x, y \in C_i$ vem $rx + (1-r)\,y \in C_i$ para todo i e logo $rx + (1-r)\,y \in C$.

Comentário 30 *O conjunto de soluções de um sistema de igualdades/desigualdades lineares é um conjunto convexo.*

Definição 53 *Um conjunto que é a intersecção finita de semi–espaços fechados no espaço V de dimensão finita é um convexo poliédrico.*

Definição 54 *Um conjunto que é a envoltória convexa de um conjunto finito de pontos é um politopo.*

Definição 55 *A dimensão de um conjunto convexo C é a dimensão da variedade afim gerada por C.*

Se $x_1, \ldots, x_p$ são vetores e $r_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} r_i = 1$ então $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i$ é uma combinação convexa de $x_1, \ldots, x_p$. Os conjuntos convexos, por definição, são fechados por combinações convexas de dois elementos ($p = 2$).

Lema 23 *Suponha C convexo e $x_1, \ldots, x_p \in C$. Então a combinação convexa $\sum_{i=1}^{p} r_i x_i \in C$.*

Demonstração: Seja C convexo. E defina

$$A = \{p \geq 2 : C \text{ é fechado para combinações convexas com } p \text{ elementos } \}.$$

É claro que $2 \in A$. Suponhamos que $p \in A$. E seja $x = \sum_{i=1}^{p+1} r_i x_i$ uma combinação convexa com $p+1$ termos. Note que $y = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} r_i} \sum_{i=1}^{p} r_i x_i \in C$. Mas então

$$x = \left(\sum_{i=1}^{p} r_i \right) y + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} r_i \right) x_{p+1} = \sum_{i=1}^{p+1} r_i x_i \in C.$$

Portanto $p + 1 \in C$ e pela propriedade de indução, $A = \mathbb{N}$, terminando a demonstração.

Definição 56 *Se $S \subset V$, a intersecção dos subconjuntos convexos de V que contém S é um conjunto convexo, o menor convexo que contém S, denominado a envoltória convexa de S:* $\operatorname{con} S$.

Comentário 31 *Deve estar claro que* $\operatorname{con} S$ *é o conjunto das combinações convexas de elementos de S.*

Exemplo 35 *Suponhamos $S := \{b_1, \ldots, b_p\} \subset V$. Então*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Com efeito as combinações com mais de p elementos facilmente se reduz a uma combinação com p elementos: basta somar os coeficientes de cada b_i repetido.

10/03

Teorema 40 (Carathéodory) *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Então*

$$\operatorname{con} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} r_i s_i : s_i \in S, r_i \geq 0, \sum_{i} r_i = 1 \right\}.$$

Demonstração: Seja $x = \sum_{i=1}^{m} r_i s_i$ sendo $m > n+1$, uma combinação convexa, $s_i \in S$. Temos $s_2 - s_1, \ldots, s_m - s_1$ são linearmente dependentes pois $m - 1 > n$. Então

$$\lambda_1 (s_1 - s_m) + \ldots + \lambda_{m-1} (s_{m-1} - s_m) = 0, \exists i \leq m-1, \lambda_i \neq 0.$$

Seja $\lambda_m = -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j$. Então $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_{m-1} s_{m-1} + \lambda_m s_m = 0$ e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_m = 0$. Note que pelo menos algum $\lambda_i > 0$. Seja $t \geq 0$ e note que

$$x = \sum_{i=1}^{m} r_i s_i - t \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i - t\lambda_i) s_i.$$

Agora t deve ser tal que $r_i - t\lambda_i \geq 0$ para todo i. Seja $t = \min \left\{ \frac{r_i}{\lambda_i} : \lambda_i > 0 \right\}$. Temos que $\sum_{i=1}^{m} (r_i - t\lambda_i) = \sum_i r_i - t \sum_i \lambda_i = 1$. Finalmente para i tal que $t = \frac{r_i}{\lambda_i}$ temos $r_i - t\lambda_i = 0$.

Logo escrevemos x como uma combinação linear de no máximo $m-1$ termos. Esse processo pode ser repetido até m alcançar $n+1$ e termina aí.

Corolário 15 *Se $K \subset V$ for compacto e* $\dim V < \infty$ *então* $\operatorname{con} K$ *é compacto.*

Demonstração: Seja $n = \dim V$. Seja $\Delta = \left\{\lambda \in [0,1]^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}$. A função $f : \Delta \times K^{n+1} \to V$,

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, k_1, \ldots, k_{n+1}) \to \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i k_i$$

é contínua. Portanto tem imagem compacta. Pelo teorema de Carathéodory $f\left(\Delta \times K^{n+1}\right) = \operatorname{con} K$. Logo $\operatorname{con} K$ é compacto.

Teorema 41 *O fecho de um conjunto convexo é convexo.*

Demonstração: Seja $S \subset V$ convexo no espaço normado V. Sejam $x, y \in \overline{S}$ e $0 < r < 1$. Existem seqüências $x_n \in S$, $y_n \in S$ e $\lim_n x_n = x, \lim_n y_n = y$. Então $rx_n + (1-r)\, y_n \in S$ e converge para $rx + (1-r)\, y$. Portanto $rx + (1-r)\, y \in \overline{S}$.

Teorema 42 *A soma vetorial de convexos é convexa.*

Demonstração: Se C_1 e C_2 são convexos, $C_1 + C_2$ é convexo pois $x = c_1 + c_2$ e $y = c_1' + c_2'$ então

$$rx + (1-r)\, y = rc_1 + (1-r)\, c_1' + rc_2 + (1-r)\, c_2' \in C_1 + C_2.$$

Lema 24 *Se C for convexo e $r_1, r_2 \geq 0$ então $(r_1 + r_2)\, C = r_1 C + r_2 C$.*

Demonstração: É imediato que $(r_1 + r_2)\, C \subset r_1 C + r_2 C$. Seja agora $y = r_1 c_1 + r_2 c_2$, $c_1, c_2 \in C$, Então $\frac{y}{r_1+r_2} = \frac{r_1}{r_1+r_2} c_1 + \frac{r_2}{r_1+r_2} c_2 \in C$. Logo $y \in (r_1 + r_2)\, C$.

Definição 57 *Para C convexo,*

i) *$L(C) = \cup_{n=1}^{\infty} n\,(C - C)$ é um espaço vetorial..*

ii) *$\operatorname{aff} C = x_0 + L(C)$ para $x^0 \in C$.*

Demonstração: (i) Sejam $x, y \in L(C)$ e r real. Temos $x = n\,(c - c')$, $y = m\,(c'' - c''')$ sendo $c, c', c'', c''' \in C$. Então

$$x + y = nc + mc'' - (nc' + mc''') = (n+m)\,(c'''' - c''''') \in L(C)\,.$$

Sem perda de generalidade $r > 0$. Seja $m > r$. Para $c^0 \in C$, $\frac{r}{m}c + \left(1 - \frac{r}{m}c^0\right) \in C$ e $\frac{r}{m}c' + \left(1 - \frac{r}{m}\right) c^0 \in C$ logo $\frac{r}{m}\,(c - c') \in C - C$ e $\frac{r}{nm}x \in C - C'$.

$rx = nm\,(c - c')$. (ii) Seja $a + F \supset C$ sendo F subespaço. Então

$$\begin{aligned} F &= (a + F) - (a + F) \supset C - C \\ &\implies F \supset L(C)\,. \end{aligned}$$

E $c^0 + L(C)$ é uma variedade afim que contém C e é a menor possível.

Interior relativo de um convexo

Um intervalo na reta tem interior não–vazio mas no plano o interior é vazio. Uma propriedade importante dos convexos de dimensão finita, é que tem interior relativo não–vazio sempre.

Definição 58 *O interior relativo do convexo C denotado* $\mathrm{ri}\, C$*, é o interior de C como subespaço topológico de* $\mathrm{aff}\, C$*.*

Definição 59 *A fronteira relativa de C é $\overline{C} \setminus \mathrm{ri}\, C$.*

Assim $x^0 \in \mathrm{ri}\, C$ se existir $r > 0$ tal que $B(x^0, r) \cap \mathrm{aff}\, C \subset C$.

Exemplo 36 *Seja $S = \{(x, y) \geq 0 : x + y \leq 1\}$. Então se $L = [0, 1] \times \{0\}$ temos* $\mathrm{ri}\, L = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$ *e $L(L) =$ "eixo das abscissas". E $L(S) =$ "o plano" e* $\mathrm{ri}\, S = \{(x, y) >> 0, x + y < 1\}$*.*

Lema 25 *Seja V espaço vetorial e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Então $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\begin{aligned} T(z) &= (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \\ z &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

é contínua e tem inversa contínua.

Demonstração: Seja $\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Note que $\phi(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$. É imediato que $\phi = T^{-1}$ e é contínua. Seja

$$\begin{aligned} \delta &= \min \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right| : |\lambda|_1 = 1 \right\}, \\ |\lambda|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|. \end{aligned}$$

Pela compacidade de $\{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sum_i |\lambda_i| = 1\}$ o mínimo existe e $\delta > 0$. Portanto se $\lambda \neq 0$, $\left| \frac{\lambda}{|\lambda|_1} \right|_1 = 1$ e

$$\left| \phi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|_1} \right) \right| \geq \delta \implies |\phi(\lambda)| \geq \delta |\lambda|_1.$$

Seja $z \in V$ e $\lambda = T(z)$. Então $|z| = |\phi(\lambda)| \geq \delta |\lambda|_1 = \delta |T(z)|$. Demonstrando a continuidade de T.

Teorema 43 *Seja* $S = \operatorname{con}\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ *um simplexo de dimensão* n*. Então* $\operatorname{ri} S \neq \emptyset$*.*

Demonstração: Seja $L = L(S) = [b_1 - b_0, \ldots, b_n - b_0]$. Definamos $v_i = b_i - b_0$ e $b^* = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n b_i$ o baricentro do simplexo. Para $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$,

$$b^* + z = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n b_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i (b_i - b_0) = \left(\frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) b_0 + \sum_{i=1}^n (\frac{1}{n+1} + \lambda_i) b_i.$$

se

$$\frac{1}{n+1} + \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n; \qquad (*)$$

$$\frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0,$$

temos $b^* + z \in S$ pois $\frac{n}{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i + \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. O conjunto

$$\Delta = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n_{++} : \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0\right\}$$

é aberto e então $b^* \in \operatorname{ri} S$ pois $T^{-1}(\Delta)$ é aberto tal que $(b^* + T^{-1}(\Delta)) \cap \operatorname{aff} S \subset S$.

Teorema 44 *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convexo não–vazio. Então* $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$*.*

Demonstração: Seja S um simplexo de C com a dimensão de $L(C)$. Pelo teorema anterior $\operatorname{ri} S \neq \emptyset$. Mas então $\operatorname{ri} C \neq \emptyset$ pois $S \subset C$ e $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} C$.

Teorema 45 *Seja* C *convexo no* $\mathbb{R}^n$*. Se* $x \in \operatorname{ri} C$ *e* $y \in \overline{C}$ *então se* $0 \leq r < 1$, $(1-r)x + ry \in \operatorname{ri} C \subset C$*.*

Demonstração: Vou fazer somente o caso $L(C) = \mathbb{R}^n$. Nesse caso temos $x \in \operatorname{int} C$. Seja $0 < r < 1$. Para $\epsilon > 0$, $B = B(0,1)$,

$$(1-r)x + ry + \epsilon B \subset (1-r)x + r(C + \epsilon B) =$$
$$(1-r)\left[x + \epsilon(1+r)(1-r)^{-1}B\right] + rC \subset (1-r)C + rC = C$$

se ϵ for suficientemente pequeno.

Corolário 16 $\operatorname{ri} C$ *é convexo.*

15/03

Interior relativo (continuação)

Para simplificar os enunciados, todo convexo está contido no $\mathbb{R}^n$. E $B = B(0,1)$.

Corolário 17

1. *O fecho de* ri C *é* $\overline{C}$.
2. *O interior relativo de* $\overline{C}$ *é* ri C.

Demonstração: (1) É imediato do teorema 45. (2) Seja $z \in \operatorname{ri}\overline{C}$. E $x \in$ ri C. Para $\mu > 1$, suficientemente próximo de 1, $y = (1-\mu)\,x + \mu z = z - (\mu - 1)(x - z)$ ainda pertence a $\operatorname{ri}\overline{C} \subset \overline{C}$. Então se $\lambda = \mu^{-1}$,

$$z = \frac{1}{\mu}y - \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)x = \lambda y + (1-\lambda)\,x \in \operatorname{ri} C,$$

pelo teorema 45.

Corolário 18 *Sejam* C_1 *e* C_2 *são convexos do* $\mathbb{R}^n$*. Então*

$$\overline{C_1} = \overline{C_2} \iff \operatorname{ri} C_1 = \operatorname{ri} C_2.$$

Equivalentemente, $\operatorname{ri} C_1 \subset C_2 \subset \overline{C_1}$.

Demonstração: Suponhamos $\overline{C_1} = \overline{C_2}$. Pelo corolário anterior, $\operatorname{ri} C_1 = \operatorname{ri}\overline{C_1} = \operatorname{ri}\overline{C_2} = \operatorname{ri} C_2$.

Corolário 19 *Se* C *é convexo, todo aberto que intersecta* $\overline{C}$ *intersecta* ri C.

Demonstração: Fixe $x^0 \in$ ri C. Seja U aberto tal que $U \cap \overline{C} \neq \emptyset$. Existe então $c \in U \cap C$. Então para $r \in (0,1)$ suficientemente próximo de 1, $(1-r)\,x^0 + rc \in U$. Mas $(1-r)\,x^0 + rc \in$ ri C terminando a demonstração.

Corolário 20 *Suponhamos que* C_1 *não–vazio é um subconjunto convexo da fronteira relativa de* C_2*. Ou seja* $C_1 \subset \overline{C_2} \setminus \operatorname{ri} C_2$*. Então* $\dim C_1 < \dim C_2$.

Demonstração: Se $\dim C_1 = \dim C_2$ então de $\operatorname{aff} C_1 \subset \operatorname{aff} C_2$ vem $\operatorname{aff} C_1 = \operatorname{aff} C_2$. Então se $x \in C_1$ é tal que $(x+U) \cap \operatorname{aff} C_1 \subset C_1$ vem

$$(x+U) \cap \operatorname{aff} C_2 \subset \overline{C_2} \implies x \in \operatorname{ri} C_2$$

em contradição com a hipótese.

Comentário 32 *O próximo teorema simplifica a verificação de que um ponto está no interior relativo.*

Teorema 46 *Seja C convexo. Então $z \in \text{ri } C$ se e somente se para todo $x \in C$ existe $\mu > 1$ tal que $(1-\mu)\,x + \mu z \in C$.*

Demonstração: Caso $z \in \text{ri } C$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $(z + \epsilon B) \cap \text{aff}\, C \subset C$. Então $z - t\,(x - z) \in C$ se $0 < t < \frac{\epsilon}{|x-z|}$. Logo se $\mu = 1 + t$ temos $y := \mu z + (1-\mu)\,x = z - t\,(x-z) \in C$. Recíproca: Seja x no interior relativo de C e $\mu > 1$ tal que $y = (1-\mu)\,x + \mu z \in C$. Então definindo $\lambda = \frac{1}{\mu} \in (0,1)$, $z = (1-\lambda)\,x + \lambda y$. Logo pelo teorema 45, $z \in \text{ri } C$.

Corolário 21 *Para C convexo. Então $z \in \mathring{C}$ se e somente se para todo vetor y existe $\epsilon > 0$, $z + \epsilon y \in C$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior obtemos que $z \in \text{ri } C$. Mas pela hipótese, $L\,(C) \supset \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e logo $\text{aff}\, C = \mathbb{R}^n$.

Teorema 47 *Seja C_i convexo, $i \in I$. Suponhamos que $\cap_{i\in I} \text{ri } C_i \neq \emptyset$. Então:*

1. *O fecho de $\cap_{i\in I} C_i$ é igual a $\cap_{i\in I} \overline{C_i}$;*

2. *Se I for finito, o interior relativo de $\cap_i C_{i\in I}$ é $\cap_{i\in i} \text{ri } C_i$.*

Demonstração: Fixemos $a \in \cap_{i\in I} \text{ri } C_i$. Se $y \in \cap_{i\in I} \overline{C_i}$, $(1-r)\,a + ry \in \text{ri } C_i$ para todo i se $r \in (0,1)$. E se r tende a 1 o limite é y. Portanto

$$\cap_{i\in I} \overline{C_i} \subset \overline{\cap_{i\in i} \text{ri}\, C_i} \subset \overline{\cap_{i\in i} C_i} \subset \cap_{i\in I} \overline{C_i}.$$

Então vale (1). E $\cap_{i\in I} \text{ri } C_i$ e $\cap_{i\in I} C_i$ tem o mesmo fecho. Eles tem então o mesmo interior relativo:

$$\text{ri} \cap_{i\in i} C_i \subset \cap_{i\in I} \text{ri}\, C_i.$$

Seja $z \in \cap_{i\in I} \text{ri}\, C_i$. Cada segmento de reta em $\cap_{i\in I} C_i$ com um extremo z pode ser prolongado. A intersecção finita desses prolongamentos ainda é um prolongamento. Portanto $z \in \text{ri} \cap_{i\in i} C_i$.

Corolário 22 *Seja C convexo e M variedade afim tal que $M \cap \text{ri } C \neq \emptyset$. Então*

$$\text{ri}(M \cap C) = M \cap \text{ri}\, C,$$
$$\overline{M \cap C} = M \cap \overline{C}.$$

Demonstração: $\text{ri}(M) = M$ e M é fechada.

Corolário 23 *Seja C_1 convexo. E $C_2 \subset \overline{C_1}$ convexo que não está contido na fronteira relativa de C_1. Então* $\mathrm{ri}(C_2) \subset \mathrm{ri}(C_1)$.

Demonstração: Se $\mathrm{ri}(C_2) \cap \mathrm{ri}(C_1) = \emptyset$, $\mathrm{ri}(C_2) \subset \overline{C_1} \setminus \mathrm{ri}(C_1)$. E C_2 estaria contido na fronteira relativa. Então $\mathrm{ri}(C_2) \cap \mathrm{ri}(C_1) \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ri}(C_2) \cap \mathrm{ri}(C_1) &= \mathrm{ri}(C_2) \cap \mathrm{ri}(\overline{C_1}) = \mathrm{ri}(C_2 \cap \overline{C_1})) = \mathrm{ri}(C_2) \\ &\implies \mathrm{ri}(C_2) \subset \mathrm{ri}(C_1). \end{aligned}$$

Proposição 5 $\mathrm{ri}(C_1 + C_2) = \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)$.

Demonstração: Seja $a_i \in \mathrm{ri}(C_i)$, $i = 1, 2$. Para $z = c_1 + c_2 \in C_1 + C_2$, seja $\mu_i > 1$ tal que $(1 - \mu_i)\, c_i + \mu_i a_i \in C_i, i = 1, 2$. Seja $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. Então

$$(1-\mu)\, c_i + \mu a_i \in C_i, i = 1, 2 \implies (1-\mu)\, z + \mu\,(a_1 + a_2) \in C_1 + C_2 \implies a_1 + a_2 \in \mathrm{ri}(C_1 + C_2).$$

Ou seja vale $\supset$. Para a inclusão reversa,

$$\overline{\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)} \supset \overline{\mathrm{ri}(C_1)} + \overline{\mathrm{ri}(C_2)} = \overline{C_1} + \overline{C_2} \supset C_1 + C_2 \supset \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)$$

e então $C_1 + C_2$ e $\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)$ tem o mesmo fecho e portanto o mesmo interior relativo. Logo $\mathrm{ri}(C_1 + C_2) = \mathrm{ri}(\mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)) \subset \mathrm{ri}(C_1) + \mathrm{ri}(C_2)$.

Separação de convexos

Definição 60 *Sejam C_1 e C_2 convexos não–vazios.*

a) *O hiperplano H separa C_1 e C_2 se C_1 está num semi–espaço fechado de H e C_2 no outro.*

b) *H separa propriamente se $C_1 \cup C_2 \setminus H \neq \emptyset$.*

c) *Separa C_1 e C_2 fortemente se existe $\epsilon > 0$ tal que $C_1 + \epsilon B$ está num semi–espaço aberto de H e $C_2 + \epsilon B$ está contido no outro.*

d) *A separação é estrita se C_1 e C_2 estão em semi–espaços abertos distintos.*

Em termos analíticos, existe um funcional linear não–nulo $f(z) = z \cdot b$ e um escalar β tais que

$$\begin{aligned} C_1 &\subset \{x : f(x) \leq \beta\}, \\ C_2 &\subset \{x : f(x) \geq \beta\}. \end{aligned}$$

Note que trocando f por $-f$ trocamos o lado de separação.

Teorema 48 *Sejam C_1 e C_2 não–vazios do $\mathbb{R}^n$.*

separação própria *Existe um hiperplano separando–os propriamente se existir vetor b tal que*

$$\inf\{x \cdot b : x \in C_1\} \geq \sup\{x \cdot b : x \in C_2\};$$
$$\sup\{x \cdot b : x \in C_1\} > \inf\{x \cdot b : x \in C_2\}.$$

separação forte

$$\inf\{x \cdot b : x \in C_1\} > \sup\{x \cdot b : x \in C_2\}.$$

Demonstração: Para a separação própria: Seja β entre $\sup\{x \cdot b : x \in C_2\}$ e $\inf\{x \cdot b : x \in C_1\}$. Então β é finito, $b \neq 0$ e $H = \{x : x \cdot b = \beta\}$ é o hiperplano que separa propriamente. Para a separação forte sejam β e $\delta > 0$ tais que

$$\inf\{x \cdot b : x \in C_1\} - \delta > \beta > \delta + \sup\{x \cdot b : x \in C_2\}.$$

Seja $0 < \epsilon < \frac{\delta}{|b|}$. Para $x \in C_1 + \epsilon B$ e $y \in B$ temos

$$x \cdot b = (c_1 + \epsilon y) \cdot b \geq \inf\{x \cdot b : x \in C_1\} - \epsilon\,|b| > \inf\{x \cdot b : x \in C_1\} - \delta > \beta.$$

Analogamente,

$$\beta > \delta + \sup\{x \cdot b : x \in C_2\} \geq x \cdot (C_2 + \epsilon B).$$

17/03

Lema 26 *Seja $H = \{x : x \cdot b = \beta\}$ um hiperplano. E C convexo tal que*

$$C \cap \{x : x \cdot b < \beta\} \neq \emptyset \text{ e}$$
$$C \cap \{x : x \cdot b > \beta\} \neq \emptyset.$$

Então $C \cap H \neq \emptyset$.

Demonstração: Sejam $x, y \in C$ tais que $x \cdot b < \beta < y \cdot b$. Então para $t = \frac{\beta - x \cdot b}{y \cdot b - x \cdot b} \in (0,1)$

$$((1-t)\,x + ty) \cdot b = \beta.$$

Teorema 49 *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo não–vazio e relativamente aberto: $C = \operatorname{ri} C$. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ variedade afim disjunta de C. Existe então um hiperplano $H \supset M$ e tal que C está contido num dos semi–espaços abertos de H.*

Demonstração: Se M for um hiperplano então pelo lema anterior, C está contido num dos semi–espaços abertos de M. Se M não é for hiperplano. Vamos obter uma variedade afim M' com dimensão maior do que a de M e ainda disjunta de C. Por meio de uma translação podemos supor $0 \in M$. Então $C - M \supset C$ e $0 \notin C - M$. Temos $\dim M^{\perp} \geq 2$ pois M não é hiperplano. Seja P subespaço vetorial de $M^{\perp}$, $\dim P = 2$. Seja $C' = P \cap (C - M)$. C' é aberto em P pois[10]

$$\operatorname{ri} C' = M \cap \operatorname{ri}(C - M) = M \cap (C - M) .$$

E $0 \notin C'$. Queremos encontrar um subespaço uni–dimensional $L \subset P$, $L \cap C' = \emptyset$. Nesse caso $M' = M + L$ é um subespaço com dimensão maior do que a de M e não intersecta C. Se C' for vazio ou um ponto existe reta L que não intersecta C'. Se $\operatorname{aff} C'$ for uma reta que não passa pela origem escolhemos L paralela a $\operatorname{aff} C'$ passando pela origem. Se $\operatorname{aff} C'$ for uma reta passando pela origem, tomamos L perpendicular a ela passando pela origem. Se $\dim \operatorname{aff} C' = 2$. Então C' é aberto topológico. Seja $K = \cup_{r>0} rC'$ o cone gerado por C'. Temos K aberto convexo. E $0 \notin K$. A intersecção de K com $S^1 = \{x \in P : |x| = 1\}$ é um intervalo de comprimento menor do que π (identificando P com $\mathbb{R}^2$) pois caso contrário conteria um par de antípodas e então a origem. Agora é só passar um reta pela origem que não passe por $S^1 \cap K$.

Teorema 50 *Sejam C_1 e C_2 convexos. Existe um hiperplano que separa C_1 e C_2 própriamente se e somente se os interiores relativos de C_1 e C_2 são disjuntos.*

Demonstração: $C = C_1 - C_2$ é convexo, Pela proposição 1, $\operatorname{ri} C = \operatorname{ri} C_1 - \operatorname{ri} C_2$ e então $0 \notin \operatorname{ri} C$. Existe um hiperplano contendo $M = \{0\}$ tal que $\operatorname{ri} C$ está contido num dos seus semi–espaços abertos. Logo C está contido num semi–espaço fechado. Resumindo: existe $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que

$$0 \leq \inf_{x \in C} x \cdot b = \inf_{x_1 \in C_1} x_1 \cdot b - \sup_{x_2 \in C_2} x_2 \cdot b$$
$$0 < \sup_{x \in C} x \cdot b = \sup_{x_1 \in C_1} x_1 \cdot b - \inf_{x_2 \in C_2} x_2 \cdot b.$$

Então o teorema 48 implica a separação própria. Por outro lado essas condições implicam $0 \notin \operatorname{ri} C$ pois $D = \{x : x \cdot b \geq 0\} \supset C$ e $\operatorname{ri} D = \{x : x \cdot b > 0\}$ intersecta C e portanto (cor. 23) $\operatorname{ri} C \subset \operatorname{ri} D$.

Teorema 51 *Sejam C_1 e C_2 convexos não–vazios. Para existir um hiperplano separando–os fortemente, é necessário e suficiente que*

$$d(C_1, C_2) := \inf \{|x_1 - x_2| : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\} > 0.$$

Em outras palavras, $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$.

[10] A primeira igualdade é pelo cor. 9. A segunda igualdade pela prop. 1.

Demonstração: Se um hiperplano separa fortemente C_1 e C_2 existe $\epsilon > 0$ tal que $(C_1 + \epsilon B) \cap (C_2 + \epsilon B) = \emptyset$. Mas então $d(C_1, C_2) \geq \epsilon$. Em particular $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$. Suponhamos agora $0 \notin \overline{C_1 - C_2}$. Então $\epsilon B \cap (C_1 - C_2) = \emptyset$ para algum $\epsilon > 0$. Nesse caso $C_1 + \frac{\epsilon}{2}B$ e $C_2 + \frac{\epsilon}{2}B$ podem ser propriamente separados. E C_1 e C_2 são fortemente separados.

Lema 27 *Seja X fechado e K compacto em $\mathbb{R}^n$. Então $X - K$ é fechado.*

Demonstração: Seja $z_n = x_n - k_n \to z$. Passando para uma subseqüência se necessário podemos supor $k_n \to k \in K$. Mas então $x_n = z_n + k_n \to z + k \in X$. Logo $z \in X - K$.

Corolário 24 *Sejam C_1, C_2 convexos não–vazios, disjuntos e fechados, um deles limitado. Então existe um hiperplano separando–os fortemente.*

Demonstração: Com efeito, pelo lema anterior, $0 \notin \overline{C_1 - C_2} = C_1 - C_2$.

Corolário 25 *Se C_1, C_2 convexos, não–vazios com fechos disjuntos. Se um deles for limitado, existe um hiperplano que os separa fortemente.*

Teorema 52 *Um conjunto convexo fechado é a intersercção dos semi–espaços fechados que o contém.*

Demonstração: Seja C convexo fechado. Sem perda de generalidade, C é não–vazio e $\neq \mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ temos $C \cap \{x\} = \emptyset$. Portanto existe um hiperplano H_x que contém C no semi–espaço aberto à esquerda, H_x^- e x do outro lado. A intersecção desses semi–espaços, $\cap_{x \in C^c} H_x^- = C$.

Definição 61 *Um hiperplano H é um hiperplano suporte do convexo C se $H \cap C \neq \emptyset$ e C está contido num dos semi–espaços fechados de H. O hiperplano é não–trivial se $C \setminus H$ for não–vazio.*

Teorema 53 *Seja C convexo e $D \neq \emptyset$ convexo contido em C. Existe um hiperplano não trivial suportando C e que contém D se e somente se $D \cap \operatorname{ri} C = \emptyset$.*

Demonstração: Um hiperplano não–trivial que contém $D \subset C$ e suporta C é um hiperplano que separa D e C própriamente. Pelo teorema 50 existe o hiperplano se e somente se $\operatorname{ri} C$ disjunto de $\operatorname{ri} D$. Mas isso é equivalente a D ser disjunto de $\operatorname{ri} C$ (cor. 23)

Notação 5 *Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escrevemos $x < 0$ se $x_i \leq 0$ para todo i e $x \neq 0$. E $x << 0$ se $x_i < 0$ para todo $i \leq n$.*

Comentário 33 *Na linguagem matricial (usada no exemplo abaixo) os vetores são coluna. O produto interno de x, b vetores $m \times 1$ é $x^t b$.*

Exemplo 37 (Gordan) *Seja A matriz $m \times n$. Então somente uma das alternativas a seguir é verdadeira:*

i) *Existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax << 0$;*

ii) *Existe $b \in \mathbb{R}^m_+$ e $b \neq 0$ tal que $A^t b = 0$.*

Suponhamos (i) e (ii) válidas. Então $x^t A^t b = 0 \implies (Ax)^t b = 0$ uma impossibilidade pois $Ax << 0$. Sejam $C_1 = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ e $C_2 = \{y \in \mathbb{R}^m : y << 0\}$. Se (i) for falso, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Então existe um hiperplano que separa propriamente: $H = \{x \in \mathbb{R}^m : x^t b = \beta\}$ e $C_1 \subset \{x : x^t b \geq \beta\}$ e $C_2 \subset \{x : x^t b \leq \beta\}$. Então $0 \in C_1$ implica $\beta \leq 0$. E $\left(-\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\right) \in C_2$ implica $0 \leq \beta$ e então $\beta = 0$. E necessariamente $b \geq 0$. Finalmente sendo C_1 um subespaço vetorial, $y^t b = 0$ se $y \in C_1$ e logo vale $(Ax)^t b = 0$ para todo $x \implies A^t b = 0$.

20/03

Exemplo 38 (lema de Farkas) *Seja A matriz $m \times n$ e b vetor $m \times 1$. Somente uma das alternativas a seguir é verdadeira:*

1. *Existe x $n \times 1$, $x \geq 0$, tal que $Ax = b$;*
2. *Existe μ vetor $m \times 1$, $\mu^t A \geq 0$ e $\mu^t b < 0$.*

Comentário 34 *Trocando o sinal de μ (2) equivale a (2)' $\mu^t A \leq 0$ e $\mu^t b > 0$.*

Demonstração: Primeiramente notemos que (1) e (2) não são válidas simultaneamente. Se

$$Ax = b, x \geqq 0,$$
$$\mu^t A \geqq 0, \mu^t b < 0.$$

Então $\mu^t Ax \geq 0$ pois $x \geq 0$. Logo $\mu^t b \geq 0$ em contradição com $\mu^t b < 0$. Seja $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ a j–ésima coluna da matriz A. Então $Ax = b$ se e somente se

$$b \in \text{cone}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Suponhamos então que (1) não vale. Então $b \notin K := \text{cone}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Existe então μ, $m \times 1$ tal que

$$\mu^t b < 0 \leq \mu^t v_i, 1 \leq i \leq n.$$

E portanto vale (2).

Comentário 35 *A separação estrita acima depende de K ser fechado. Os lemas a seguir visam demonstrar isso.*

Lema 28 *Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ for l.i. então K é fechado.*

Demonstração: Seja $x^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t v_i, \lambda_i^t \geq 0$, com limite x. Se $\lambda^t = (\lambda_i^t)_{i=1}^n$ possui subseqüência convergente, $\lambda^{k(t)}$, então $x = \sum_{i=1}^n \lim_t \lambda_i^{k(t)} v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in K$ pois $\lambda_i = \lim_k \lambda_i^{k(t)} \geq 0$. Se (λ^t) não possui subseqüência convergente[11], $|\lambda^t| \to \infty$ e então, passando a uma subseqüência se necessário, $\frac{\lambda^t}{|\lambda^t|_S} \to \mu \geq 0, |\mu| = 1$. Mas então

$$\sum_i \mu_i v_i = \lim_t \frac{x^t}{|\lambda^t|} = 0.$$

Contradição com a independência linear.

Lema 29 *Para todo $x \in K$ existe $S \subset \{1, \ldots, n\}$ tal que $\{v_i : i \in S\}$ é l.i. e $x \in \operatorname{cone}\{v_i : i \in S\}$.*

Demonstração: Para $x \in K$, seja a representação $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, $\lambda_i \geq 0$ e tal que $S = \{i : \lambda_i > 0\}$ seja tal que $\#S$ é o menor possível. Se $\{v_i : i \in S\}$ não for l.i existe θ_i, $i \in S$ nem todos nulos tal que $\sum_{i \in S} \theta_i v_i = 0$. Sem perda de generalidade pelo menos um $\theta_j > 0$. Seja $t = \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\theta_i} : \theta_i > 0 \right\}$. Então $\lambda_i - t\theta_i \geq 0$ para todo i e

$$x = \sum_{i \in S} (\lambda_i - t\theta_i) v_i$$

é uma representação com menos de $\#S$ elementos positivos. Contradição.

Teorema 54 *Seja $K = \operatorname{cone}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então K é fechado.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{S} = \{S \subset \{1, \ldots, n\} : \{v_i : i \in S\}$ é l.i.$\}$. Note que $K = \cup_{S \in \mathfrak{S}} \operatorname{cone}\{v_i : i \in S\}$ e cada $\operatorname{cone}\{v_i : i \in S\}$ é fechado.

Funções convexas

No estudo das funções convexas é conveniente permitir que as funções assumam valores em $[-\infty, \infty]$. O símbolo $\dot{+}$ é ocasionalmente necessário:

$$\begin{aligned} x \dot{+} y &= x + y \text{ se } \{x, y\} \neq \{-\infty, \infty\} \\ -\infty \dot{+} \infty &= \infty \dot{+} -\infty = \infty. \end{aligned}$$

[11] usando a norma da soma

Definição 62 *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convexo.* $f : C \to \mathbb{R}$ *é convexa se* $f(rc + (1-r)c') \leq rf(c) + (1-r)f(c')$*,*$\forall c, c' \in C$*.*

Comentário 36 *A definição é a usual mas na análise convexa a próxima definição é vantajosa pois deixa C implicíto.*

Definição 63 $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ *é convexa se para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $0 < r < 1$*,*

$$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) \dot{+} (1-r)f(y). \tag{*}$$

Definição 64 *O domínio efetivo de f,* $\operatorname{dom} f = \{x : f(x) < \infty\}$*.*

Definição 65 *O epígrafo de f é o conjunto* $\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$*.*

Definição 66 *f é própria se não assume o valor $-\infty$ e* $\operatorname{dom} f$ *é não–vazio.*

Comentário 37 *Se $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa pela definição 62 então definindo para $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, $f(x) = \infty$ temos que f é convexa pela definição (*).*

Lema 30 *f é convexa se e somente se* $\operatorname{epi} f$ *for convexo.*

Demonstração: Suponhamos f convexa. E $(x, r), (x', r') \in \operatorname{epi} f$ e $0 < \lambda < 1$. Então como $f(x), f(y) < \infty$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda r + (1-\lambda)r' \\ \implies \lambda(x, r) + (1-\lambda)(x', r') \in \operatorname{epi} f. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que o epígrafo de f é convexo. A desigualdade (*) vale sempre que $f(x) = \infty$ ou $f(y) = \infty$. Suponhamos agora que $f(x) < \infty$ e $f(y) < \infty$. Então se $r > f(x)$ e $s > f(y)$ temos $(x, r), (y, s) \in \operatorname{epi} f$ e então

$$(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda r + (1-\lambda)s) \in \operatorname{epi} f.$$

Logo

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda r + (1-\lambda)s.$$

Fazendo $r \downarrow f(x)$ e $s \downarrow f(y)$ vem $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) \dot{+} (1-r)f(y)$.

Teorema 55 (des. Jensen) *Seja f convexa própria. Então*

$$\begin{aligned} & f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(x_j), \\ & \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1. \end{aligned}$$

Comentário 38 *Podemos dizer que essa é a des. de Jensen no caso discreto.*

Teorema 56 *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *duas vezes diferenciável. Então* f *é convexa se* $f''(x) \geq 0$ *para* $x \in (a,b)$.

Um resultado mais geral será demonstrado posteriormente.

Exemplo 39 (desigualdade aritmética–geométrica) *Se* $x_i > 0$ *para* $i \leq n$ *então*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

A função $f(x) = -\log x$ *é convexa pois* $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. *Pela desigualdade de Jensen,* $f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}$ *ou*

$$-\log \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{-\log(x_i)}{n} = -\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Exemplo 40 (função indicadora) *Para* $C \subset \mathbb{R}^n$ *a função indicadora de* C *é* $\delta(\cdot|C)$,

$$\delta(x|C) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & se & x \in C, \\ \infty & se & x \notin C. \end{pmatrix} \right.$$

O epígrafo da indicadora é $C \times [0, \infty)$. *Portanto* C *é convexo se e somente se a função indicadora for convexa.*

Definição 67 *A função suporte do conjunto convexo* C *é*

$$\delta^*(x|C) = \sup\{x \cdot y : y \in C\}.$$

Definição 68 *O gabarito* $\gamma(\cdot|C)$ *para* C *não–vazio:*

$$\gamma(x|C) = \inf\{r \geq 0 : x \in rC\}.$$

Definição 69 *A função distância:* $d(x,C) = \inf\{|x-y| : y \in C\}$.

Todas essas funções são convexas.

Teorema 57 *Seja* f *convexa e* $\alpha \in [-\infty, \infty]$. *Então são convexos:*

$$\{x : f(x) < \alpha\} \text{ e } \{x : f(x) \leq \alpha\}.$$

Demonstração: Se $f(x) \leq \alpha$ e $f(y) \leq \alpha$ então $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y) \leq r\alpha + (1-r)\alpha = \alpha$. Analogamente para a desigualdade estrita.

Manipulando funções convexas

Teorema 58 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ *convexa e* $\phi : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ *convexa e não–decrescente. Então* $\phi \circ f$ *é convexa.*

Demonstração: De $f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)f(y)$ obtemos aplicando ϕ:

$$\phi(f(rx + (1-r)y)) \leq \phi(rf(x) + (1-r)f(y)) \leq r\phi(f(x)) + (1-r)\phi(f(y)).$$

Exemplo 41 *1. Se* f *convexa própria, então* $e^{f(x)}$ *é convexa própria.*

2. Se f *for convexa não–negativa e* $p > 1$, $(f(x))^p$ *é convexa.*

Proposição 6 *A soma de convexas próprias é convexa. A soma é própria se uma das funções for finita sempre.*

A demonstração é imediata.

Proposição 7 *Seja* $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *convexo não–vazio. A seguinte função é convexa:*

$$f(x) = \inf\{\mu : (x, \mu) \in F\}.$$

Demonstração: Note que $\inf \emptyset = \infty$. Então se $rf(x) + (1-r)f(y) < \infty$ existe $(x, \mu) \in F$ e $(y, \nu) \in F$. Portanto $(rx + (1-r)y, r\mu + (1-r)\nu) \in F$ e logo $f(rx + (1-r)y) \leq r\mu + (1-r)\nu$.

Proposição 8 *Sejam* $f_1, \ldots, f_m$ *convexas próprias. E seja*

$$f(x) = \inf\{f_1(x_1) + \ldots + f_m(x_m) : x_1 + \ldots + x_m = x\}.$$

Então f *é convexa.*

Demonstração: Seja $F_i = \operatorname{epi} f_i$, $1 \leq i \leq m$ e $F = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$ é convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então $(x, \mu) \in F$ se existirem $(x_i, \mu_i) \in F_i$, $\mu = \sum_i \mu_i$, $x = \sum_i x_i$, $f_i(x_i) \leq \mu_i$. Portanto f é convexa.

Teorema 59 *O supremo de uma família de funções convexas é uma função convexa.*

Demonstração: Seja $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$. Então $f_i(rx + (1-r)y) \leq rf_i(x) \dot{+} (1-r)f_i(y) \leq rf(x) \dot{+} (1-r)f(y)$. Outra demonstração:

$$\operatorname{epi} f = \cap_{i \in I} \operatorname{epi} f_i.$$

22/03

Continuidade

Definição 70 *Uma função entre espaços métricos, $f : X \to Y$ é Lipschitz se existir $k > 0$ tal que*

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq kd\left(x, y\right), x, y \in X.$$

Comentário 39 *Se quisermos especificar a constante dizemos que f é k-lipschitz.*

Definição 71

1. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é lipschitz numa vizinhança de $x \in \mathbb{R}^n$ se exister $\epsilon > 0$ e $K > 0$ tais que*

$$\left|f\left(y\right) - f\left(z\right)\right| \leq K\left|y - z\right|, y, z \in B\left(x, \epsilon\right).$$

2. *E f é localmente lipschitz no aberto U se para todo $x \in U$, f é lipschitz numa vizinhança de x contida em U.*

Comentário 40 *Note que essa condição implica a continuidade de f em U.*

Proposição 9 *Seja f convexa própria. Seja $U = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Suponha que existe bola aberta, $x_0 + \epsilon B \subset U$ e $M < \infty$ tais que $f\left(x\right) \leq M$ para todo $x \in x_0 + \epsilon B$. Então para todo $x \in U$, f é localmente lipschitz numa vizinhança de x.*

Demonstração: Sem perda de generalidade[12], $x_0 = 0$. Assim $f\left(u\right) \leq M$ se $|u| < \epsilon$. Seja $x \in U$. Vou demonstrar que f é limitada numa vizinhança de x. Seja $\rho > 1$ tal que $y := \rho x \in U$.

Seja $\lambda = \frac{1}{\rho}$. Então V a seguir é uma vizinhança de x:

$$V = \left\{v : v = \left(1 - \lambda\right)x' + \lambda y, \left|x'\right| < \epsilon\right\} = x + \left(1 - \lambda\right)\epsilon B.$$

Por convexidade, $f\left(v\right) \leq \left(1 - \lambda\right)f\left(x'\right) + \lambda f\left(y\right) \leq M + \lambda f\left(y\right)$. Então f é limitada superiormente numa vizinhança de x. Se $z \in V$ existe $z' \in V$, $x = \frac{z+z'}{2}$. Então

$$f\left(x\right) \leq \frac{f\left(z\right) + f\left(z'\right)}{2} \implies f\left(z\right) \geq 2f\left(x\right) - f\left(z'\right) \geq 2f\left(x\right) - M - \lambda f\left(y\right).$$

Assim f é limitada numa vizinhança de x. Seja N uma cota superior para $|f|$ em $x + 2\delta B, \delta > 0$. Para $x_1 \neq x_2$ em $x + \delta B$, seja $x_3 = x_2 + \frac{\delta}{\alpha}\left(x_2 - x_1\right)$ sendo $\alpha = \left|x_2 - x_1\right|$. Note que $x_3 \in x + 2\delta B$. Resolvendo para x_2:

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{\delta}{\alpha + \delta}x_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \delta}x_3 &\implies f\left(x_2\right) \leq \frac{\delta}{\alpha + \delta}f\left(x_1\right) + \frac{\alpha}{\alpha + \delta}f\left(x_3\right) \\ &\implies f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \delta}\left[f\left(x_3\right) - f\left(x_1\right)\right] \leq \frac{\alpha}{\delta}2N = \frac{2N}{\delta}\left|x_2 - x_1\right|. \end{aligned}$$

Trocando x_2 com x_1 obtemos $\left|f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)\right| \leq \frac{2N}{\delta}\left|x_2 - x_1\right|$.

[12] Basta considerar $g\left(x\right) = f\left(x_0 + x\right)$.

Derivada direcional

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa, $h \in \mathbb{R}^n$. Seja $g(\lambda) = \frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda}, \lambda > 0$. Suponhamos $\lambda > \mu > 0$. Seja $r = \mu/\lambda$. Então

$$\begin{aligned} f(x+\mu h) = f(x+r\lambda h) = f(r(x+\lambda h)+(1-r)x) &\le rf(x+\lambda h)+(1-r)f(x) \\ \implies f(x+\mu h) - f(x) &\le r(f(x+\lambda h)-f(x)) \\ \implies g(\mu) &\le g(\lambda). \end{aligned}$$

Então $f'(x,h) = \lim_{\lambda\downarrow 0} g(\lambda) = \inf_{\lambda>0} g(\lambda)$ existe. Note que $f'(x,0) = 0$. E $f'(x,rh) = rf'(x,h)$ se $r > 0$.

Lema 31 $-f'(x,-h) \le f'(x,h)$.

Demonstração: Note que $\frac{f(x+rh)+f(x-rh)}{2} \ge f(x)$ e então

$$\frac{f(x+rh)-f(x)}{r} \ge -\frac{f(x-rh)-f(x)}{r} \implies f'(x,h) \ge -f'(x,-h).$$

Subgradiente

Seja f convexa. O vector x^* é um subgradiente de f em x se

$$f(z) \ge f(x) + x^* \cdot (z-x), z \in \mathbb{R}^n.$$

O conjunto dos subgradientes em x é denotado $\partial f(x)$. É imediato da definição que $\partial f(x)$ é convexo e fechado.

Exemplo 42 (subgradiente da indicadora) *Seja C convexo não–vazio. Então $x^* \in \partial\delta(x|C)$ se e somente se*

$$\begin{aligned} &\delta(z|C) \ge \delta(x|C) + x^* \cdot (z-x), \forall z \\ &\qquad \implies x \in C \text{ e } 0 \ge x^* \cdot (z-x), z \in C. \end{aligned}$$

Comentário 41 *x^* nesse caso é normal a C em x. Não entraremos nesse assunto.*

Proposição 10 *Seja f convexa própria. Então o subgradiente de f é não–vazio para todo $x \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$.*

Demonstração: Seja $x \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$. Então $(x, \mu) \in \operatorname{ri}\operatorname{epi} f$ se $f(x) < \mu < \infty$. E $(x, f(x)) \notin \operatorname{ri}\operatorname{epi} f$. Existe então um hiperplano não–trivial, suporte de $\operatorname{epi} f$ e contém $(x, f(x))$. Seja $(z^*, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\begin{aligned} z^* \cdot x + \lambda f(x) \geq z^* \cdot y + \lambda \mu, \\ y \in \mathbb{R}^n, \mu > f(y). \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$ temos $z^* \cdot x \geq z^* \cdot y$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ logo $z^* = 0$ contradição com $(z^*, \lambda) \neq 0$. Logo $\lambda \neq 0$. Fazendo $\mu \to \infty$ podemos concluir que $\lambda < 0$. Dividindo por λ e trocando o sinal da desigualdade:

$$\frac{z^*}{\lambda} \cdot x + f(x) \leq \frac{z^*}{\lambda} \cdot y + \mu, f(y) < \mu.$$

Seja $x^* = \frac{z^*}{\lambda}$. Agora com $\mu \downarrow f(y)$ vem

$$x^* \cdot x + f(x) \leq x^* \cdot y + f(y).$$

Assim $x^* \in \partial f(x)$.

Proposição 11 *O subgradiente é monótono.*

Demonstração: Sejam $x, y \operatorname{ri}\operatorname{dom} f$ e $x^* \in \partial f(x)$, $y^* \in \partial f(y)$. Então

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) \geq x^*(y - x) \\ f(x) - f(y) \geq y^*(x - y). \end{aligned}$$

Somando, $0 \geq (x^* - y^*) \cdot (y - x)$.

$$(y^* - x^*) \cdot (y - x) \geq 0.$$

Teorema 60 *Sejam $f_1, \ldots, f_m$ convexas próprias. Então*

$$\partial f(x) \supset \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

Além disso se $\cap_{i=1}^m \operatorname{ri}\operatorname{dom} f_i \neq \emptyset$,

$$\partial f(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_m(x).$$

A demonstração será omitida por falta de tempo. A demonstração da próxima proposição é imediata.

Proposição 12 $0 \in \partial f(x) \iff$ *x é ponto de mínimo de f convexa própria.*

Proposição 13 *x é ponto de mínimo de f se e somente se $f'(x, h) \geq 0$ para todo h.*

24/03

Multiplicadores de Kuhn Tucker

Definição 72 ((função afim)) *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é afim se for da forma*

$$f(x) = x \cdot v + \beta, v \in \mathbb{R}^n, \beta \text{ real.}$$

Teorema 61 *Seja* C *convexo. Sejam* $f_1, \ldots, f_m$ *convexas próprias com* $\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{ri} C$*,* $1 \leq i \leq m$*. Então somente uma das alternativas a seguir é válida:*

a) *Existe* $x \in C$*,* $(f_1(x), \ldots, f_m(x)) << 0$*;*

b) *Existe* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \geq 0$*,* $\lambda \neq 0$*,*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0, \forall x \in C.$$

Demonstração: Seja $g(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. É imediato que se $f_i(x) < 0$ então $\lambda_i f_i(x) \leq 0$ e pelo menos para um $i \leq m$, é < 0. Logo (b) não vale. Suponhamos que (a) seja falso. Devemos demonstrar que vale (b). Seja

$$C_1 = \{z \in \mathbb{R}^m : \exists x \in C, g(x) << z\} = g(C) + \mathbb{R}^m_{++}.$$

Então $C_1 \cap \left(-\mathbb{R}^m_+\right) = \emptyset$. Podemos então, pelo teorema 50, separar C_1 e $-\mathbb{R}^m_+$ propriamente. Existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$, e α real,

$$\begin{aligned} &\alpha \leq \lambda \cdot z = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_m z_m, z \in C_1; \\ &\alpha \geq \lambda \cdot z, z \in -\mathbb{R}^m_+. \end{aligned}$$

Logo $\alpha \geq 0$ e $\lambda \geq 0$. Portanto $0 \leq \lambda \cdot z, z \in C_1$. Então para $x \in D = C \cap \cap_{i=1}^m \operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{ri} C$,

$$\begin{aligned} &0 \leq \lambda_1 (f_1(x) + \epsilon) + \ldots + \lambda_m (f_m(x) + \epsilon), \\ &\epsilon \downarrow 0 \implies 0 \leq \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x), x \in D. \end{aligned}$$

Então a desigualdade vale para $x \in \overline{D}$ (ver cor. 27 abaixo) e então vale para $x \in C$ pois $C \subset \overline{\operatorname{ri} C} \subset \overline{D}$.

Exemplo 43 *A hipótese* $\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{ri} C$ *é necessária. Por exemplo seja*

$$f_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & se \quad x \geq 0 \\ \infty & se \quad x < 0. \end{cases}$$

E $f_2(x) = x$ *para* $x \in C := \mathbb{R}$*. Então (a) acima não vale. Mas* $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \geq 0$ *implica para* $x > 0$*,*

$$-\lambda_1 \sqrt{x} + \lambda_2 x \geq 0 \implies -\lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{x} \geq 0 \implies -\lambda_1 \geq 0 \implies \lambda_1 = 0 \implies \lambda_2 = 0.$$

Lema 32 *Seja f convexa e $x \in \operatorname{dom} f$ tal que $f(x) < \alpha$. Então existe $x' \in \operatorname{ri} \operatorname{dom} f$ tal que $f(x') < \alpha$.*

Demonstração: O aberto $U = \{(x, r) : r < \alpha\}$ intersecta $\operatorname{epi} f$. Portanto pelo cor. 19, $U \cap \operatorname{ri} \operatorname{epi} f \neq \emptyset$.

Corolário 26 *Seja f convexa. Seja C convexo tal que $\operatorname{ri} C \subset \operatorname{dom} f$. Se $f(x) < \alpha$ para $x \in \overline{C}$ existe $x' \in \operatorname{ri} C$ tal que $f(x') < \alpha$.*

Demonstração: Seja $x^0 \in \operatorname{ri} C$. Então $f((1-r)x^0 + rx) \leq (1-r) f(x^0) + r f(x) < \alpha$ se r estiver próximo de 1. Então $x' = (1-r)x^0 + rx \in \operatorname{ri} C$ e $f(x') < \alpha$.

Corolário 27 *Seja f convexa e $C \subset \operatorname{dom} f$ convexo. Se $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in C$ então $f(x) \geq \alpha$ para $x \in \overline{C}$.*

Teorema 62 *Seja C convexo, $f_1, \ldots, f_k$ convexas próprias, $\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{ri} C$, $1 \leq i \leq k$. Sejam $f_{k+1}, \ldots, f_m$ afins e tais que existe $x \in \operatorname{ri} C$ tal que $f_{k+1}(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0$. Então somente uma das alternativas a seguir é verdadeira:*

1. *Existe $x \in C$,*
$$f_1(x) < 0, \ldots, f_k(x) < 0, f_{k+1}(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0;$$

2. *Existe $\lambda_i \geq 0$, $i \leq m$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq 0$ e $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x) \geq 0, \forall x \in C$.*

Demonstração: Omitida.

Comentário 42 *Se $k = 0$ o teorema continua válido. Pois se não existir x com uma desigualdade estrita a soma $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x)$ será nula independentemente do multiplicador..*

Programa convexo

Um programa convexo[13], (P), é definido pela $m+3$ upla $(C, f_0, \ldots, f_m, r)$ sendo

1. C convexo não–vazio;

2. f_i convexa, finita em C, $0 \leq i \leq r$;

3. f_i afim, $r + 1 \leq i \leq m$.

[13]Chamado "programa convexo ordinário" no Rockafellar.

E queremos minimizar $f_0(x)$, $x \in C$ com as restrições:

$$f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq r;\ f_{r+1}(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0. \qquad (*)$$

Podemos ter $r = 0$ ou $r = m$.

Em geral supomos (a) f_0 convexa própria com $\operatorname{dom} f_0 = C$, (b) $f_i, i = 1, \ldots, r$ são convexax próprias com

$$\operatorname{ri}\operatorname{dom} f_i \supset \operatorname{ri} C;\ \ \operatorname{dom} f_i \supset C,$$

e (c) Para $i > r$, cada f_i é afim no $\mathbb{R}^n$ (e não somente em C).

Definição 73 *O vetor x é factível se $x \in C$ e (*).*

Seja $C_0 = C \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m$ sendo $C_i = [f_i \leq 0]$, $i = 1, \ldots, r$ e $C_i = [f_i = 0]$, $i = r+1, \ldots, m$. A função objetivo é

$$f(x) = f_0(x) + \delta(x|C_0) = \begin{cases} f_0(x) & \text{se} \quad x \in C_0 \\ \infty & \text{se} \quad x \notin C_0. \end{cases}$$

O ínfimo de f é o valor ótimo do problema (P). E os pontos nos quais o ínfimo é alcançado são soluções ótimas de (P).

Definição 74 *Um multiplicador de Kuhn–Tucker (KT) do problema (P) é um vetor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ tal que $\lambda_i \geq 0$ se $i \leq r$ e o ínfimo de*

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m$$

é finito e igual ao valor ótimo de (P).

Teorema 63 *Seja (P) um programa convexo. E λ multiplicador de KT de (P). E $h = f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m$. Seja $D = \{x : h(x) = \inf h(\mathbb{R}^n)\}$. Seja $I = \{i \leq r : \lambda_i = 0\}$, $J = \{1, \ldots, m\} \setminus J$. Seja D_0 os pontos $\bar{x} \in D$ tais que*

$$f_i(\bar{x}) = 0, i \in J$$
$$f_i(\bar{x}) \leq 0, i \in I.$$

Então D_0 é o conjunto das soluções ótimas de (P).

Demonstração: Por hipótese, $\inf h(\mathbb{R}^n) = \inf f\ (\mathbb{R}^n)$ é finito. Se $x \in C_0$, $\lambda_i f_i(x) \leq 0$, $1 \leq i \leq m$. E portanto

$$f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x) \leq f_0(x) = f(x).$$

Então $h(x) \leq f(x)$ para todo x com igualdade se e somente se x é factível e $\lambda_i f_i(x) = 0, i \leq m$. Assim se $i \in J$, $i \leq r$ temos $\lambda_i > 0$ o que implica $f_i(\bar{x}) = 0$. Se $i \in J$, $i > r$, $f_i(\bar{x}) = 0$ por hipótese. Então o mínimo de f está contido no mínimo de h e é D_0.

Comentário 43 *$D_0 \neq D$ é possível. Por exemplo se $C = \mathbb{R}^n$ e cada f_i afim. Nesse caso h é afim e tendo ínfimo finito é constante, $D = \mathbb{R}^n$. Mas $D_0 \subset C_0$.*

Interpretação como preço de equilíbrio

Para $u = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m)$, seja $p(u)$ o ínfimo de $f_0(x)$ com as restrições

$$\begin{aligned} f_i(x) &\leq \upsilon_i, i \leq r \\ f_i(x) &= \upsilon_i, r+1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

u perturbação de (P). Interpretando $f_0(x)$ como o custo de x, cada perturbação das desigualdades tem um custo $\lambda \cdot p(u)$. Ou seja

$$p(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m) + \upsilon_1^* \upsilon_1 + \ldots + \upsilon_m^* \upsilon_m = p(u) + u^* \cdot u.$$

Vale a pena comprar uma perturbação se essa soma for inferior a $p(0)$. Se λ for multiplicador de KT de (P), $\upsilon_i^* = \lambda_i$ nenhuma perturbação será comprada:

$$\inf_u f_0(x) + \upsilon^* \cdot \upsilon \geq \inf_x f_0(x) + \sum_i \lambda_i f_i(x) = p(0).$$

Teorema 64 *Seja (P) programa convexo. E I o conjunto dos $i \neq 0$ tais que f_i não é afim ($I \subset \{1, \ldots, r\}$). Suponhamos que o valor ótimo de (P) é finito e existe $x \in \operatorname{ri} C$, factível, que satisfaz as restrições com desigualdade estrita para cada $i \in I$. Então pelo menos um multiplicador de Kuhn-Tucker existe para (P).*

Demonstração: (a) caso sem restrições com igualdade ($r = m$.) Sem perda de generalidade $I = \{1, \ldots, k\}$. Seja α o valor ótimo de (P). Existe uma solução, $x \in \operatorname{ri} C$, de

$$\begin{aligned} f_i(x) &< 0, 1 \leq i \leq k, \\ f_{k+1}(x) &\leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Pela definição de α, o sistema

$$f_0(x) - \alpha < 0, f_1(x) < 0, \ldots, f_k(x) < 0, \qquad (*)$$
$$f_{k+1}(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0, \qquad (**)$$

não tem solução em C. As desigualdades (**) satisfazem as hipóteses do teorema 62. Existem então $\lambda_i \geq 0, 0 \leq i \leq m$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_k) \neq 0$, tais que

$$\lambda_0 (f_0(x) - \alpha) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x) \geq 0, x \in C.$$

Necessariamente, $\lambda_0 > 0$ (pois (*) e$(\lambda_0, \ldots, \lambda_k) \neq 0$) e então sem perda de generalidade, $\lambda_0 = 1$. Portanto

$$h = f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m \geq \alpha.$$

Mas $h \leq f_0$ nos pontos factíveis, e portanto $\inf h = \alpha$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são multiplicadores de KT. (b) Caso $r < m$. As funções $f_{r+1}, \ldots, f_m$ são afins. Podemos substituir a restrição $f_i(x) = 0$ pelas restrições $f_i(x) \leq 0$ e $-f_i(x) \leq 0$ ambas convexas. Podemos então usar a parte (a). Mas agora os multiplicadores para $i > r$ se escreve como a diferença de dois positivos.

Ponto de sela e Lagrangeano

O Lagrangiano do programa convexo (P) é a função $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$,

$$L(u^*, x) = \begin{cases} f_0(x) + \sum_{i=1}^m \upsilon_i^* f_i(x) & \text{se} \quad u^* \in E_r, x \in C \\ -\infty & \text{se} \quad u^* \notin E_r, x \in C \\ \infty & \text{se} \qquad x \notin C, \end{cases}$$

sendo

$$E_r = \{u^* = (\upsilon_i^*)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m : \upsilon_i^* \geq 0, i \leq r\}.$$

υ_i^* é o multiplicador de Lagrange da i–ésima restrição. Temos L côncava em u^* e convexa em x. O par $(\bar{u}^*, \bar{x})$ é ponto de sela de L (com respeito a maximizar em u^* e minimizar em x) se

$$L(u^*, \bar{x}) \leq L(\bar{u}^*, \bar{x}) \leq L(\bar{u}^*, x), \forall u^*, \forall x.$$

Teorema 65 *$\bar{u}^*$ é vetor de KT para (P) e $\bar{x}$ solução ótima para (P) é necessário e suficiente que $(\bar{u}^*, \bar{x})$ seja ponto de sela para o Lagrangiano. Além disso essa condição vale se e somente se $\bar{x}$ e as componentes λ_i de $\bar{u}^*$ satisfazem*

a) $\lambda_i \geq 0, f_i(\bar{x}) \leq 0$ *e* $\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0, 1 \leq i \leq r$

b) $f_i(\bar{x}) = 0$ *para* $i \geq r + 1$

c) $0 \in \partial f_0(\bar{x}) + \lambda_1 \partial f_1(\bar{x}) + \ldots + \lambda_m \partial f_m(\bar{x})$.

Comentário 44 *Se as funções f_i forem diferenciáveis em $\bar{x} \in \operatorname{int} C$ então temos* $0 = \nabla f_0(\bar{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x}) + \ldots + \lambda_m \nabla f_m(\bar{x})$.

Comentário 45 *Note que em geral na teoria do consumidor podemos ter soluções na fronteira de C e então o subgradiente de (c) não precisa coincidir com o gradiente. Esta situação acontece no exemplo abaixo.*

Exemplo 44 *Seja $u(x, y) = 2x + y$ definida para $(x, y) \geq 0$. Sejam $p > 0, q > 0$. O problema (do consumidor) é*

$$\begin{aligned} \max u(x, y), (x, y) &\geq 0, \\ px + qy &\leq 1. \end{aligned} \qquad (\$)$$

Para colocar o problema do consumidor no contexto do programa convexo devemos escolher C. Temos $f_0(x, y) = -2x - y + \delta((x, y)|C)$, $f_1(x, y) = px + qy - 1$, $\operatorname{dom} f_1 = \mathbb{R}^2$. *Se $C = \mathbb{R}^2$ temos ainda $f_2(x, y) = -x$ e $f_3(x, y) = -y$. Mas se $C = \mathbb{R}^2_+$ não precisamos de f_2 e f_3. Note para uso posterior que $\partial f_2(x, y) = (-1, 0)$ e $\partial f_3(x, y) = (0, -1)$.*

1. *Primeiro ataque:* $C=\mathbb{R}^2$. *Nesse caso temos três restrições de desigualdade e o problema é*

$$\begin{aligned} \min -2x-y \\ -x\leq 0 \\ -y\leq 0 \\ px+qy-1\leq 0. \end{aligned}$$

O problema pode ser reescrito da forma usual:

$$\begin{aligned} \max 2x+y \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ px+qy-1\leq 0. \end{aligned}$$

Os multiplicadores de KT do problema $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\geq 0$, *são tais que se* $(\bar{x},\bar{y})$ *é solução do problema ótimo,*

$$\min -2x-y+\lambda_1(-x)+\lambda_2(-y)+\lambda_3(px+qy-1)$$

tem solução $(\bar{x},\bar{y})$ *tal que (a,b,c) acima:*

$$\begin{aligned} &f_i(\bar{x},\bar{y})\leq 0 \text{ e } \lambda_i f_i(\bar{x},\bar{y})=0, i=1,2,3 \\ &\quad 0\in\partial f_0(\bar{x},\bar{y})+\lambda_1\partial f_1(\bar{x},\bar{y})+\ldots+\lambda_3\partial f_3(\bar{x},\bar{y}). \end{aligned}$$

Escrevendo como um problema de maximização:

$$\max 2x+y+\lambda_1 x+\lambda_2 y-\lambda_3(px+qy-1).$$

E

$$\begin{aligned} &0=(-2,-1)+\lambda_1(-1,0)+\lambda_2(0,-1)+\lambda_3(p,q) \implies \\ &0=-2-\lambda_1+\lambda_3 p \\ &0=-1-\lambda_2+\lambda_3 q. \end{aligned}$$

E $\lambda_1\bar{x}=0$, $\lambda_2\bar{y}=0$, $\lambda_3(p\bar{x}+q\bar{y}-1)=0$. *É imediato que* $\lambda\neq 0$ *pois senão o ínfimo de* f_0 *seria* $-\infty$. *É necessário considerar casos.*

(a) $\bar{x}>0$, $\bar{y}>0$. *Então* $\lambda_1=0=\lambda_2$ *e* $\lambda_3 p=2=2\lambda_3 q \implies p=2q$ *e* $\lambda_3=\frac{1}{q}$.

(b) $\bar{x}>0$ *e* $\bar{y}=0$. *Então* $\lambda_1=0$. *Logo* $\lambda_3=\frac{2}{p}$ *e* $\lambda_2=-1+\frac{2q}{p}\geq 0 \implies 2q\geq p$.

(c) $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} > 0$. Então $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = \frac{1}{q}$, $\lambda_1 = -2 + \frac{p}{q} \geq 0 \implies p \geq 2q$.

2. *Segundo ataque: Seja $C = \mathbb{R}^2_+$. $f_0(x, y) = -2x - y$. E $f_1(x, y) = px + qy - 1$ se $(x, y) \geq 0$. Temos $f_1(0, 0) = -1 < 0$. Existe então $\lambda > 0$ tal que*

$$\min_{(x,y)\geq 0} -2x - y + \lambda(px + qy - 1)$$

é o ótimo do programa convexo associado. Escrevendo em termos de maximização, se $(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ é solução de ($):

$$\begin{aligned} &\max 2x + y - \lambda(px + qy - 1) \\ &(x, y) \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{x} \geq 0, \bar{y} \geq 0, \\ p\bar{x} + q\bar{y} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Note que $2x + y - \lambda(px + qy - 1) = x(2 - \lambda p) + y(1 - \lambda q)$. Portanto para ter um ótimo é necessário que $2 \leq \lambda p$ e $1 \leq \lambda q$. Logo $\max\left\{\frac{2}{p}, \frac{1}{q}\right\} \leq \lambda$. Mas se tivermos a desigualdade estrita, $\bar{x} = \bar{y} = 0$ que não é ótimo. Assim $\lambda = \max\left\{\frac{2}{p}, \frac{1}{q}\right\}$. Se $\frac{2}{p} > \frac{1}{q}$ então $\bar{y} = 0$ e $\bar{x} = \frac{1}{p}$. Caso $\frac{1}{q} > \frac{2}{p}$ vem $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = \frac{1}{q}$. Se $\frac{2}{p} = \frac{1}{q}$ qualquer combinação $(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ com $p\bar{x} + q\bar{y} = 1$ é um ótimo. Para escrever em termos de (c) acima devemos calcular o subgradiente de f_0 nos pontos (x, y) com $xy = 0$. (exerc.)

Fim!