0) PRIMEIRO, VOU PROVAR QUE DADO UM ESPAÇO NORMADO $(X, \|\cdot\|)$, OS QUATRO AXIOMAS DE NORMA

A1) $\|x\| \geq 0$, A2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, A3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, A4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

SÃO IMPLICADOS POR A1') $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, A2') $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ E A3') $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

BOM, A3) É EQUIVALENTE A A2') E A4) A A3'). A IDA DE A2) É O AXIOMA A1'). PARA PROVAR A VOLTA DE A2), BASTA NOTAR QUE $\|0_X\| = \|0 \cdot 0_X\| \overset{A2')}{=} |0| \cdot \|0_X\| = 0$. LOGO, A NORMA DO VETOR NULO É ZERO E A2) ESTÁ PROVADO.

PARA PROVAR A1), BASTA VER QUE

$$0 \overset{\text{PROVEI}}{=} \|0\| = \|x - x\| \overset{A3')}{\leq} \|x\| + \|-x\| \overset{A2')}{=} \|x\| + |-1| \, \|x\| = \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

ISSO IMPLICA QUE $\|x\| \geq 0$. LOGO, A1) VALE.

PORTANTO, SEMPRE QUE QUISERMOS PROVAR QUE UMA FUNÇÃO É NORMA, BASTA MOSTRAR A1'), A2') E A3'). VOU USAR ISSO NESSA LISTA.

—— // —— // ——

OUTRO RESULTADO QUE PROVO É QUE SE d_1 E d_2 SÃO MÉTRICAS EQUIVALENTES EM X, ENTÃO ELAS TÊM AS MESMAS SEQUÊNCIAS CONVERGENTES. ISTO É, $x_n \xrightarrow{d_1} x$ SE, E SOMENTE SE, $x_n \xrightarrow{d_2} x$.

PROVO SÓ A IDA, POIS A VOLTA É ANÁLOGA. TOME $x_n \xrightarrow{d_1} x$, TOME $\varepsilon > 0$. COMO A BOLA $B_2(x, \varepsilon)$ É ABERTA POR d_1 PELA EQUIVALÊNCIA, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $B_1(x, \delta) \subseteq B_2(x, \varepsilon)$. COMO $x_n \xrightarrow{d_1} x$, EXISTE n_0 TAL QUE SE $n \geq n_0$, $d_1(x_n, x) < \delta$, ISTO É, $x_n \in B_1(x, \delta)$. LOGO, $x_n \in B_2(x, \varepsilon)$. ISTO É, $d_2(x_n, x) < \varepsilon$, EXATAMENTE COMO QUERÍAMOS. LOGO, $x_n \xrightarrow{d_2} x$. ◻

1) PRIMEIRO, PROVO QUE ℓ^∞ É SUBESPAÇO DE ℓ^0.

- $x, y \in \ell^\infty, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + y \in \ell^\infty$: ESTAR EM ℓ^∞ SIGNIFICA QUE O SUPREMO É LIMITADO. LOGO, TOMANDO A SEQUÊNCIA $\alpha x + y$, TEMOS PARA TODO $m \in \mathbb{N}$ $|\alpha x_m + y_m| \leq$
$$|\alpha| |x_m| + |y_m| \leq \sup_m |\alpha| |x_m| + \sup_m |y_m| \leq |\alpha| \sup_m |x_m| + \sup_m |y_m| =: M < \infty$$

COMO ACHAMOS UMA COTA SUPERIOR, TEREMOS $\sup_m |\alpha x_m + y_m| \leq M < \infty$.
LOGO, $\alpha x + y \in \ell^\infty$.

AGORA, PROVO QUE $\|\cdot\|_\infty$ É NORMA.

- $\|x\| = 0 \Rightarrow x_m = 0$ PARA TODO m: VOU PROVAR A CONTRAPOSITIVA.

TOME x TAL QUE $x_m \neq 0$ PARA ALGUM m. LOGO,
$$0 < |x_m| \leq \sup_m |x_m| = \|x\|_\infty .$$

- $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \|x\|_\infty$: TOME $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \ell^\infty$. LOGO, TEMOS

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_m |\alpha x_m| = \sup_m |\alpha| |x_m| \overset{|\alpha| > 0}{=} |\alpha| \sup_m |x_m| = |\alpha| \|x_m\|_\infty .$$

- $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$: TOME $x, y \in \ell^\infty$ E $m \in \mathbb{R}$. LOGO,

TEMOS $|x_m + y_m| \leq |x_m| + |y_m| \leq \sup_m |x_m| + \sup_m |y_m| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. COMO ISSO VALE PARA TODO m, $\|x + y\|_\infty = \sup_m |x_m + y_m| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

PORTANTO, $\|\cdot\|_\infty$ É NORMA. ∎

② TOME $X \subseteq \ell^\infty$ TAL QUE $\overline{X} = \ell^\infty$. VOU PROVAR QUE X NÃO PODE SER ENUMERÁVEL. TOME $S := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ISTO É, O CONJUNTO DAS SEQUÊNCIAS CUJAS ENTRADAS SÃO 0 OU 1. LOGO, $S \subseteq \ell^\infty$, POIS SÃO SEQUÊNCIAS LIMITADAS.

POR X SER DENSO EM ℓ^∞, DADO $s \in S$, PODEMOS ACHAR PELO MENOS UM $x \in X$ TAL QUE $\|x - s\|_\infty < 1/2$. ISTO É, $x \in B(s, 1/2)$. DADO ISSO, CONSTRUA UMA FUNÇÃO $f : S \to X$ QUE MAPEIA s A UM $f(s) \in X$ COM $f(s) \in B(s, 1/2)$. PODEM EXISTIR VÁRIOS x ASSOCIADOS A s, ENTÃO PARA A FUNÇÃO ESTAR BEM DEFINIDA ESCOLHA UM DELES E DESCARTE OS OUTROS. O ESCOLHIDO SERÁ $f(s)$.

PASSO 1. $s_1, s_2 \in S$ E $s_1 \neq s_2 \Rightarrow \|s_1 - s_2\|_\infty = 1$: TOME $s_1, s_2 \in S$ E $s_1 \neq s_2$. COMO ELES SÃO DIFERENTES, EXISTE $m \in \mathbb{N}$ TAL QUE $s_{i,m} = 1$ E $s_{j,m} = 0$. COMO SÃO SEQUÊNCIAS DE ZERO OU UM, $|s_{1,m} - s_{2,m}| \leq 1$ PARA TODO m. LOGO, TEMOS QUE

$$1 \geq \|s_1 - s_2\|_\infty = \sup_m |s_{1,m} - s_{2,m}| \geq |s_{i,m} - s_{j,m}| = 1.$$ LOGO, $\|s_1 - s_2\|_\infty = 1$.

PASSO 2. f É INJETIVA: TOME $f(s_1) = f(s_2)$. LOGO, $f(s_1) \in B(s_1, 1/2)$ E $f(s_2) \in B(s_2, 1/2)$. AGORA, NOTE QUE

$$\|s_1 - s_2\|_\infty = \|s_1 - f(s_1) + f(s_1) - s_2\|_\infty \leq \|f(s_1) - s_1\|_\infty + \|f(s_1) - s_2\|_\infty$$

$$= \|f(s_1) - s_1\|_\infty + \|f(s_2) - s_2\|_\infty < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$ LOGO, $\|s_1 - s_2\|_\infty < 1$,

O QUE IMPLICA PELO PASSO 1 QUE $s_1 = s_2$. LOGO, f É INJETIVA.

PASSO 3. S É NÃO ENUMERÁVEL: ESTE É O ARGUMENTO DA DIAGONAL DE CANTOR. SE S FOSSE ENUMERÁVEL, PODERÍAMOS ESCREVER $S = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. AÍ CONSTRUIRÍAMOS UMA NOVA SEQUÊNCIA y TAL QUE A PRIMEIRA COORDENADA DE y É DIFERENTE DA PRIMEIRA COORDENADA DE x_1, A SEGUNDA COORDENADA DE y É DIFERENTE DA SEGUNDA COORDENADA DE x_2 E ASSIM POR DIANTE. ISTO É, $y_i = 1$ SE $x_{i,i} = 0$ E $y_i = 0$ SE $x_{i,i} = 1$. LOGO, CONSTRUÍMOS UMA SEQUÊNCIA y DE ZEROS E UNS MAS $y \neq x_n$ PARA TODO n. ABSURDO. LOGO, S É NÃO ENUMERÁVEL.

PORTANTO, TEMOS $f: S \to X$ INJETIVA COM DOMÍNIO NÃO ENUMERÁVEL. ISSO IMPLICA QUE X NÃO PODE SER ENUMERÁVEL, COMO QUERÍAMOS. $\triangle$

③ O conjunto y é o conjunto das sequências que zeram a partir de um certo m. Vou achar um conjunto X para provar a separabilidade de Y. Nosso conjunto $X \subseteq y$ enumerável com $\overline{X} = y$ será

$X := \{x \in \ell^\infty \mid \forall k,\ x_k \in \mathbb{Q},\ \exists m \geq 1,\ \forall n \geq m,\ x_n = 0\}$. Isto é, X é igual ao y mas com coordenadas racionais.

- **X é enumerável:** Primeiro, dado $m \in \mathbb{N}$, defina

$X_m := \{x \in \ell^\infty \mid \forall k,\ x_k \in \mathbb{Q},\ \forall n > m,\ x_n = 0\}$. Note que $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$. Portanto, basta provar que cada X_m é enumerável. Definindo a função $f: \mathbb{Q}^m \to X_m$ por $f(q_1, \dots, q_m) := (q_1, \dots, q_m, 0, 0, \dots)$ vê-se que ela é sobrejetiva. Como $\mathbb{Q}^m$ é enumerável, X_m é enumerável.

- **X é denso em y:** Tome $y \in Y$. Logo, existe m tal que $y = (y_1, \dots, y_m, 0, 0, \dots)$. Tome $\varepsilon > 0$. Quero achar $x \in X$ tal que $\|y - x\|_\infty < \varepsilon$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para cada $k = 1, \dots, m$ existem $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{Q}$ com $|y_k - x_k| < \varepsilon$. Em particular, isso nos dá que

$\|y - x\|_\infty = \sup_m |y_m - x_m| = \max_{k=1,\dots,m} |y_k - x_k| < \varepsilon$, como queríamos. ∎

4 • $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$: TOME $f \neq 0$. LOGO, EXISTE $y \in X$ COM $f(y) \neq 0$. LOGO, $0 < |f(y)| \leq \sup_x |f(x)| = \|f\|_\infty$.

• $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|$: TOME $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$. TEMOS QUE

$$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\alpha| \|f\|_\infty.$$

• $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$: TOME $f, g \in F$. DADO $y \in X$, TEMOS QUE $|f(y) + g(y)| \leq |f(y)| + |g(y)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. TOMANDO O SUPREMO DO LADO ESQUERDO, TEMOS $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

$\square$

5 • $\|x\|_2 = 0 \Rightarrow x = 0$: TOME $x \neq 0$. LOGO, TEMOS QUE PARA ALGUM $m \in \mathbb{N}$, VALERÁ

$$0 < \sqrt{x_m^2} \leq \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2} = \|x\|_2 .$$

• $\|\alpha x\|_2 = |\alpha| \|x\|_2$: TOME $x \in \ell^2$ E $\alpha \in \mathbb{R}$. TEMOS QUE

$$\|\alpha x\|_2 = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha x_m)^2} = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^2 x_m^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2} = |\alpha| \|x\|_2 .$$

• $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$: TOME $x, y \in \ell^2$, $N \in \mathbb{N}$. TEMOS QUE

$$\sum_{m=1}^{N} (x_m + y_m)^2 = \sum_{m=1}^{N} \left(x_m^2 + 2 x_m y_m + y_m^2\right) = \sum_{m=1}^{N} x_m^2 + 2 \sum_{m=1}^{N} x_m y_m + \sum_{m=1}^{N} y_m^2$$

$$\leq \sum_{m=1}^{N} x_m^2 + 2 \sqrt{\sum_{m=1}^{N} x_m^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{N} y_m^2} + \sum_{m=1}^{N} y_m^2 = \left(\sqrt{\sum_{m=1}^{N} x_m^2} + \sqrt{\sum_{m=1}^{N} y_m^2} \right)^2 ,$$ ONDE

A DESIGUALDADE VEM POR CAUCHY-SCHWARZ NO $\mathbb{R}^N$.

MANDANDO N PARA INFINITO, TEMOS $\sum_{m=1}^{\infty} (x_m + y_m)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2} + \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} y_m^2} \right)^2$,

TIRANDO A RAIZ DOS DOIS LADOS, ISSO NOS DARÁ QUE

$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. $\blacksquare$

6 • $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow x = 0$: TOME $x \neq 0$. LOGO, EXISTE $n \in \mathbb{N}$ COM $x_n \neq 0$. ISSO DÁ $0 < |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$.

• $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \|x\|_1$: TOME $x \in \ell^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. LOGO, VALE

$$\|\alpha x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha| |x_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = |\alpha| \|x\|_1.$$

• $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$: TOME $x, y \in \ell^1$. TEMOS QUE

$$\|x+y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n| + |y_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

7 TOME $p=1,2$ E DEFINA (COMO NO EXERCÍCIO 3) O CONJUNTO $X_m := \{x \in \ell^p \mid \forall k,\ x_k \in \mathbb{Q},\ \forall n > m,\ x_n = 0\}$.

JÁ SABEMOS QUE ESSE CONJUNTO É ENUMERÁVEL. VOU PROVAR QUE ELE É DENSO EM ℓ^p.

TOME $y \in \ell^p$, $\varepsilon > 0$. COMO $y \in \ell^p$, EXISTE $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE $\sum_{m=N+1}^{\infty} |y|^p < \varepsilon^p/2$. COMO $\mathbb{Q}$ É DENSO EM $\mathbb{R}$, PARA CADA y_m, $m=1,\dots,N$, EXISTEM $x_m \in \mathbb{Q}$ TAIS QUE $|x_m - y_m| < \left(\frac{\varepsilon^p}{2^{m+1}}\right)^{1/p}$

LOGO, DEFININDO $x := \begin{cases} x_m, & m=1,\dots,N \\ 0, & m > N \end{cases}$, TEREMOS $x \in X_N$

E $$\|y-x\|_p^p = \sum_{m=1}^{\infty} |y_m - x_m|^p = \sum_{m=1}^{N} |y_m - x_m|^p + \sum_{m=N}^{\infty} |y_m - x_m|^p$$

$$< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{2^{m+1}} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$ LOGO,

VALE $\|y-x\|_p < \varepsilon$ E PORTANTO $\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ É DENSO EM ℓ^p. ∎

8 · $[0,1]$ É FECHADO: VOU PROVAR QUE

$\overline{[0,1]} \subseteq [0,1]$ PELA CONTRAPOSITIVA. ISTO É, VOU TOMAR UM PONTO FORA DE $[0,1]$ E PROVAR QUE ELE NÃO PODE SER PONTO LIMITE DE $[0,1]$.

TOME $x \notin [0,1]$. SUPONHA $x > 1$. LOGO, $x = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

TOME $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq [0,1]$. NOTE QUE A BOLA $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ NÃO CONTÉM NENHUM ELEMENTO DE $[0,1]$. LOGO, NÃO TEM COMO A SEQUÊNCIA $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ CONVERGIR PARA LÁ. LOGO, $x \notin \overline{[0,1]}$. A PROVA PARA $x < 0$ É ANÁLOGA

· $[0,1]$ NÃO É ABERTO: VOU PROVAR QUE O PONTO $0 \in [0,1]$ NÃO É INTERIOR. TOME $\varepsilon > 0$ E MONTE A BOLA $B(0, \varepsilon)$ AO REDOR DE 0. TEMOS $-\frac{\varepsilon}{2} \in B(0,\varepsilon)$, MAS $-\frac{\varepsilon}{2} \notin [0,1]$. LOGO, $[0,1]$ NÃO PODE SER ABERTO. ∎

9 a) DEFINA $A := \{ \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \}$. NOTE QUE $0 \in \bar{A}$, POIS A SEQUÊNCIA $(\frac{1}{m})_{m=1}^{\infty} \subseteq A$ E $\frac{1}{m} \to 0$, MAS $0 \notin A$. LOGO, A NÃO É FECHADO.

AGORA, PROVO QUE $A_0 := A \cup \{0\}$ É FECHADO.

TOME $x \in A_0^c$. SE $x > 0$, ENTÃO $\frac{1}{m+1} < x < \frac{1}{m}$. LOGO, PODEMOS ACHAR $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(x, \varepsilon) \subseteq \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right)$.

SE $x < 0$, A PROVA É ANÁLOGA. LOGO, A_0^c É ABERTO E, PORTANTO, A_0 É FECHADO.

POR FIM, COMO $A = A_0 \cap (\mathbb{R}\setminus\{0\})$ E A_0 É FECHADO, TEMOS QUE A É FECHADO DE $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

— // — // —

b) • $\sim$ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA:

→ VALE $x \sim x$, POIS COMO U É ABERTO, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$.

→ SE $x \sim y$, ENTÃO $y \sim x$, POIS O MESMO (a,b) DE $x \sim y$ IMPLICA $y \sim x$.

→ SE $x \sim y$, $y \sim z$, ENTÃO $x \sim z$, POIS TEMOS $\{x,y\} \subseteq (a,b) \subseteq U$, $\{y,z\} \subseteq (d,e) \subseteq U$, E TOMANDO $f := \min\{a,d\}$ E $g := \max\{b,e\}$, $\{x,z\} \subseteq (f,g)$. LOGO, $\sim$ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

DEFINA $U/_{\sim} := \{[x] \mid y \in [x] \Leftrightarrow y \sim x\}$ COMO O O CONJUNTO DAS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA GERADAS POR $\sim$.

• $[x]$ É ABERTO: TOME $y \in [x]$. LOGO, EXISTE $(a,b) \subseteq U$ TAL QUE $x, y \in (a,b)$. NOTE QUE TODO $z \in (a,b)$ SATISFARÁ $z \sim x$. QUERO PROVAR QUE EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(y,\varepsilon) \subseteq [x]$. COMO (a,b) É ABERTO, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(y,\varepsilon) \subseteq (a,b)$. LOGO, SE $z \in B(y,\varepsilon)$, ENTÃO $z \in (a,b)$ E PORTANTO $z \sim x$, ISTO É, $z \in [x]$, COMO QUERÍAMOS.

• $[x]$ É INTERVALO: SUPONHA, POR ABSURDO, QUE ALGUM $[x]$ NÃO É INTERVALO. LOGO, EXISTE $y \in [x]$ E $\alpha \in [0,1]$ TAIS QUE $\alpha x + (1-\alpha) y \notin [x] \subseteq U$. NO ENTANTO, COMO $x \sim y$, EXISTE $(a,b) \subseteq U$ TAL QUE $x, y \in (a,b)$. LOGO, $\alpha x + (1-\alpha) y \in (a,b)$ E $\alpha x + (1-\alpha) y \in U$, UMA CONTRADIÇÃO. LOGO, $[x]$ É INTERVALO.

• $U/\sim$ É ENUMERÁVEL: INDEXE $U/\sim$ POR I, ISTO É, ESCREVA $U/\sim = \{B_i \mid i \in I\}$. VOU PROVAR QUE I É ENUMERÁVEL.

DEFINA A FUNÇÃO $f: I \to \mathbb{Q}$, ONDE $f(i)$ É TAL QUE $f(i) \in B_i$. ISSO É POSSÍVEL, POIS CADA B_i É INTERVALO ABERTO E $\mathbb{Q}$ É DENSO EM $\mathbb{R}$.

TOMANDO $i \neq j$, TEMOS $f(i) \in B_i$ E $f(j) \in B_j$. COMO $B_i \cap B_j = \emptyset$, TEMOS $f(i) \neq f(j)$. LOGO, f É INJETIVA.

COMO $\mathbb{Q}$ É ENUMERÁVEL, I TAMBÉM É.

PORTANTO, $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, ONDE CADA B_i É UM INTERVALO ABERTO E I É ENUMERÁVEL. ELES SÃO DISJUNTOS ENTRE SI, POIS $\sim$ É RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA. $\blacksquare$

(10) PRIMEIRO, TOME F FECHADO. NOTE QUE PARA TODO $m \in \mathbb{N}$, $F \subseteq \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{1}{m})$. VAMOS DEFINIR $B_m := \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{1}{m})$ E PROVAR QUE $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, DEMONSTRANDO O EXERCÍCIO.

$\boxed{F \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m}$ COMO $F \subseteq B_m$ PARA TODO m, $F \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$.

$\boxed{\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \subseteq F}$ TOME $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$. LOGO, $x \in B_m$ PARA TODO m, OU $x \in \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{1}{m})$. LOGO, EXISTE $z_m \in F$ TAL QUE $x \in B(z_m, \frac{1}{m})$. LOGO, $d(z_m, x) < \frac{1}{m}$. DEFININDO A SEQUÊNCIA $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ POR CADA UM DESSES z_m, TEMOS QUE $z_m \to x$. COMO $(z_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq F$ E F É FECHADO, $x \in F$, COMO QUERÍAMOS PROVAR.

LOGO, $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, A INTERSECÇÃO ENUMERÁVEL DE ABERTOS (POIS $B_m = \bigcup_{y \in F} B(y, \frac{1}{m})$ É UNIÃO DE ABERTOS, LOGO ABERTO).

— // — // —

AGORA, BASTA PROVAR QUE TODO ABERTO É UNIÃO ENUMERÁVEL DE FECHADOS. MAS PARA ISSO, PODEMOS USAR O QUE ACABAMOS DE PROVAR.

TOME A ABERTO. LOGO, A^c É FECHADO, O QUE IMPLICA $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, TODO B_n ABERTO.

LOGO, $A = (A^c)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c$, ONDE B_n^c É FECHADO PARA TODO n.

$\boxed{M}$

(11) $\boxed{B(x,r) \subseteq x + rB(0,1)}$ TOME $y \in B(x,r)$ E DEFINA

$z := \frac{y-x}{r}$. ISSO IMPLICA QUE $y = x + rz$. SE

PROVARMOS QUE $z \in B(0,1)$, PROVAMOS $y \in x + rB(0,1)$. TEMOS

$\|z-0\| = \left\|\frac{y-x}{r}\right\| = \frac{1}{r}\|y-x\| < \frac{1}{r} \cdot r = 1$, COMO QUERÍAMOS.

$\boxed{x + rB(0,1) \subseteq B(x,r)}$ TOME $y \in x + rB(0,1)$.

LOGO, $y = x + rz$, ONDE $z \in B(0,1)$. VOU

PROVAR QUE $y \in B(x,r)$. TEMOS $\|y-x\| = \|\cancel{x} + rz - \cancel{x}\| =$

$= r\|z\| < r \cdot 1 = r$, COMO QUERÍAMOS. $\blacksquare$

12. PRIMEIRO, VOU MUDAR UM POUCO A NOTAÇÃO.

SEJA $V := \prod_{i=1}^{p} V_i$ UM ESPAÇO PRODUTO, VOU DEFINIR $v \in V$ COMO $v := (v[1], \ldots, v[p])$, ONDE $v[i] \in V_i$.

ALÉM DISSO, SE CADA V_i É NORMADO COM NORMA $\|\cdot\|_{V_i}$, A NORMA DO ESPAÇO PRODUTO É $\|v\|_V := \sum_{i=1}^{p} \|v[i]\|_{V_i}$.

PARA A PRIMEIRA PARTE, PRECISO QUE SE $(v_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq B \times B$ SATISFAZER $v_m \xrightarrow{\|\cdot\|_{B\times B}} v$, ENTÃO $+(v_m[1], v_m[2]) \xrightarrow{\|\cdot\|_B} +(v[1], v[2])$, OU $v_m[1] + v_m[2] \xrightarrow{\|\cdot\|_B} v[1] + v[2]$.

TOME $\varepsilon > 0$. SEI QUE EXISTE m_0 TAL QUE SE $m \geq m_0$, ENTÃO $\|v_m - v\|_{B\times B} < \varepsilon$. USANDO ESSE MESMO m_0, TEMOS QUE

$$\|(v_m[1] + v_m[2]) - (v[1] + v[2])\|_B = \|(v_m[1] - v[1]) + (v_m[2] - v[2])\|_B$$

$$\leq \|(v_m[1] - v[1])\|_B + \|(v_m[2] - v[2])\|_B = \|v_m - v\|_{B\times B} < \varepsilon,$$ COMO QUERÍAMOS.

AGORA, TOME $((\lambda_m, w_m))_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} \times B$ COM $(\lambda_m, w_m) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{R}\times B}} (\lambda, w)$.

QUERO PROVAR QUE $\cdot(\lambda_m, w_m) \xrightarrow{\|\cdot\|_B} \cdot(\lambda, w)$, OU $\lambda_m w_m \xrightarrow{\|\cdot\|_B} \lambda w$.

PRIMEIRO, NOTE QUE TEMOS CONVERGÊNCIA COORDENADA A COORDENADA DE $((\lambda_m, w_m))_{m=1}^{\infty}$, POIS DADO $\varepsilon > 0$, EXISTE m_0 TAL QUE SE $m \geq m_0$, VALE

$$\varepsilon > \|(\lambda_m, w_m) - (\lambda, w)\|_{\mathbb{R}\times B} = |\lambda_m - \lambda| + \|w_m - w\|_B \geq \max\{|\lambda_m - \lambda|, \|w_m - w\|_B\}.$$

LOGO, $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ É CONVERGENTE EM $\mathbb{R}$ E $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ É CONVERGENTE EM B. LOGO, SÃO LIMITADAS. EM PARTICULAR, $\|w_n\|_B \leq M$. TOME $\varepsilon > 0$. EXISTE n_1 TAL QUE $|\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2M}$ SE $n \geq n_1$ E n_2 TAL QUE $\|w_n - w\|_B < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$ SE $n \geq n_2$. LOGO, TOMANDO $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ E $n \geq n_0$, TEREMOS QUE

$$\|\lambda_n w_n - \lambda w\|_B = \|(\lambda_n w_n - \lambda w_n) + (\lambda w_n - \lambda w)\|_B$$

$$\leq \|\lambda_n w_n - \lambda w_n\|_B + \|\lambda w_n - \lambda w\|_B = |\lambda_n - \lambda|\,\|w_n\|_B + |\lambda|\,\|w_n - w\|_B$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M}\|w_n\|_B + \cancel{|\lambda|}\frac{\varepsilon}{2\cancel{|\lambda|}} < \frac{\varepsilon \cancel{M}}{2\cancel{M}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

COMO QUERÍAMOS.

LOGO, A FUNÇÃO $\cdot$ É CONTÍNUA. $\blacksquare$

13 SE M É LIMITADO, ENTÃO EXISTE $K>0$ TAL QUE $\|m\|_M < K$ PARA TODO $m \in M$.

EM PARTICULAR, $\|m_n\|_M < K$ PARA TODO $n \in \mathbb{N}$.

TOME $\varepsilon > 0$. SEI QUE EXISTE n_0 TAL QUE SE $n \geq n_0$, ENTÃO $|\lambda_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. LOGO, TEMOS QUE SE $n \geq n_0$, VALERÁ $\|\lambda_n m_n - 0\|_M = |\lambda_n| \, \|m_n\|_M < |\lambda_n| K < \frac{\varepsilon}{\cancel{K}} \cdot \cancel{K} = \varepsilon$,

COMO QUERÍAMOS. LOGO, $\lambda_n m_n \overset{\|\cdot\|_M}{\rightsquigarrow} 0$. $\square$

14) TOME $z \in U$. COMO U É ABERTO, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B_Z(z, \varepsilon) \overset{*}{\subseteq} U$. COMO $Z = (x, y)$, TOME $B_X(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq X$ E $B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq Y$. VOU PROVAR QUE $B_X(x, \frac{\varepsilon}{2}) \times B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U$.

TOME $w \in B_X(x, \frac{\varepsilon}{2}) \times B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2})$. LOGO, $w = (x_w, y_w)$.

USANDO A MÉTRICA DO ESPAÇO PRODUTO, TEMOS QUE $d_Z(z, w) = d_X(x, x_w) + d_Y(y, y_w) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

LOGO, $w \in B_Z(z, \varepsilon)$ E PORTANTO* $w \in U$, COMO QUERÍAMOS. DEFININDO $V := B_X(x, \frac{\varepsilon}{2})$, $W := B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2})$ TERMINAMOS O EXERCÍCIO. $\square$

(15) NOTE QUE O CONJUNTO

$\{z \in X : z_m \in B_m(x_m, r_m),\ 1 \leq m \leq N\}$ É O MESMO QUE

$B_1(x_1, r_1) \times \dots \times B_N(x_N, r_N) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \dots$. VOU ESCREVER ASSIM.

TOME $x \in U$. COMO U É ABERTO, EXISTE

$\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. COMO A MÉTRICA

PRODUTO CONVERGE, EXISTE $N \in \mathbb{N}$ TAL QUE

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(x_m, y_m)}{1 + d_m(x_m, y_m)} < \frac{\varepsilon}{2},$$ PARA TODO $y_m \in X_m$, $m > N$.

LOGO, TOMANDO $r_m := \frac{\varepsilon}{2}$, VOU PROVAR QUE

$B_1(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \times \dots \times B_N(x_N, \frac{\varepsilon}{2}) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \dots \subseteq B(x, \varepsilon)$, FINALIZANDO

O EXERCÍCIO (POIS $B(x, \varepsilon) \subseteq U$).

TOME $y \in B_1(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \times \dots \times B_N(x_N, \frac{\varepsilon}{2}) \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \dots$.

LOGO, $d_m(x_m, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ PARA $m \leq N$ E $y_m \in X_N$ PARA $m > N$.

TEMOS
$$d(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(x_m, y_m)}{1 + d_m(x_m, y_m)} = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(x_m, y_m)}{1 + d_m(x_m, y_m)} +$$
$$+ \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(x_m, y_m)}{1 + d_m(x_m, y_m)} < \sum_{m=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 + d_m(x_m, y_m)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ LOGO, $y \in B(x, \varepsilon)$, COMO QUERÍAMOS. @

16 Suponha, por absurdo, que $\|\cdot\|_E$ é norma com a mesma topologia da métrica produto d. Logo, eles terão as mesmas sequências convergentes.

O conjunto $M := \{x \in E : \|x\|_E < 1\}$ é tal que $M = B(0,1)$. Logo, é aberto e limitado.

Como $0 \in M$, pelo exercício 15 vale

$$B\left(0,\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \times \dots \times B\left(0,\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \times E_{N+1} \times \dots \subseteq M$$

para algum $N \in \mathbb{N}$.

Com isso, vou provar que a métrica d e a norma $\|\cdot\|_E$ discordam. Mais especificamente, pelo exercício 13, tomando $(\lambda_m)_{m=1}^{\infty} \neq 0$ com $\lambda_m \to 0$, temos $\lambda_m m_m \overset{\|\cdot\|_E}{\to} 0$ se $(m_m)_{m=1}^{\infty} \in M$. Vou provar é que $\lambda_m m_m \overset{d}{\not\to} 0$, um absurdo.

Tomando $(m_m)_{m=1}^{\infty} := (0, \dots, 0, m_m[N+1], m_m[N+1], \dots)$ com $\|\lambda_m m_m[k]\|_{E_k} = 1$ para $k > N$ (sempre é possível tomar vetores unitários), temos $(m_m)_{m=1}^{\infty} \in M$. Logo, temos

$$d(\lambda_m m_m, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{d_k(\lambda_m m_m[k], 0)}{1 + d_k(\lambda_m m_m[k], 0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\lambda_m m_m[k]\|_{E_k}}{1 + \|\lambda_m m_m[k]\|_{E_k}} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} > 0$$

e não depende de m. Logo, $d(\lambda_m m_m, 0) \overset{m}{\not\to} 0$.

17) DUAS NORMAS $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_2$ SÃO EQUIVALENTES SE GERAM OS MESMOS ABERTOS. VOU PROVAR QUE EXISTEM CONSTANTES $\alpha>0$ E $\beta>0$ TAIS QUE PARA TODO $v\in V$ $\alpha\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \beta\|v\|_1$, POIS SE PROVAR ISSO, TOMANDO $\varepsilon := \max\{\beta, \frac{1}{\alpha}\}$ TEREMOS $\frac{1}{\varepsilon}\|v\|_1 \leq \alpha\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \beta\|v\|_1 \leq \varepsilon\|v\|_1$.

VOU PROVAR SÓ $\|v\|_2 \leq \beta\|v\|_1$, POIS A PROVA DA OUTRA DESIGUALDADE É ANÁLOGA. VAMOS PROVAR POR ABSURDO. SE ISSO FOR FALSO, ENTÃO PARA TODO $\beta>0$ EXISTE $v(\beta)$ TAL QUE $\|v(\beta)\|_2 > \beta\|v(\beta)\|_1$. EM PARTICULAR, TOME $\beta=m$, ISTO É, $\|v_m\|_2 > m\|v_m\|_1$. AGORA, TOME $u_m := \frac{1}{m}\cdot\frac{v_m}{\|v_m\|_1}$, COM ISSO, TEMOS $\|u_m\|_2 = \frac{1}{m}\frac{\|v_m\|_2}{\|v_m\|_1} > \frac{1}{\cancel{m}}\cdot\frac{\cancel{m}\cancel{\|v_m\|_1}}{\cancel{\|v_m\|_1}} = 1$

E $\|u_m\|_1 = \frac{1}{m}\frac{\cancel{\|v_m\|_1}}{\cancel{\|v_m\|_1}} = \frac{1}{m}$. LOGO, $u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$ MAS $u_m \overset{\|\cdot\|_2}{\not\to} 0$, UM ABSURDO, POIS AS TOPOLOGIAS SÃO AS MESMAS. PORTANTO, EXISTE $\beta>0$ TAL QUE $\|v\|_2 \leq \beta\|v\|_1$ PARA TODO $v\in V$. $\blacksquare$

18 a) TOME $x \in \text{INT } A$. LOGO, EXISTE $U \subseteq A$ ABERTO TAL QUE $x \in U$. COMO $A \subseteq B$, TEMOS $U \subseteq B$. LOGO,

$$x \in \bigcup_{\substack{G \subseteq B \\ G \text{ ABERTO}}} G = \text{INT } B.$$

b) PRIMEIRO, PROVO QUE $\text{INT } B \subseteq B$ PARA QUALQUER B. SE $x \in \text{INT } B$, ENTÃO EXISTE $U \subseteq B$ ABERTO TAL QUE $x \in U$. LOGO, $x \in B$, COMO QUERÍAMOS.

$\text{INT}(\text{INT } A) \subseteq \text{INT } A$ O QUE MOSTREI ACIMA GARANTE ISSO.

$\text{INT } A \subseteq \text{INT}(\text{INT } A)$ PRIMEIRO, NOTE QUE $\text{INT } A$ É CONJUNTO ABERTO POR SER UNIÃO DE ABERTOS. SEGUNDO, NOTE QUE $\text{INT}(\text{INT } A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq \text{INT } A \\ U \text{ ABERTO}}} U$. LOGO,

$$\text{INT } A \subseteq \bigcup_{\substack{U \subseteq \text{INT } A \\ U \text{ ABERTO}}} U = \text{INT}(\text{INT } A),$$ POIS $\text{INT } A \subseteq \text{INT } A$.

c) $\boxed{\text{INT}(A\cap B) \subseteq \text{INT } A \cap \text{INT } B}$ TOME $x \in \text{INT}(A\cap B)$.

LOGO, EXISTE $U \subseteq A\cap B$ ABERTO COM $x \in U$. EM PARTICULAR, $U \subseteq A$ E $U \subseteq B$. LOGO, $x \in \text{INT } A$ E $x \in \text{INT } B$.

LOGO, $x \in \text{INT } A \cap \text{INT } B$.

$\boxed{\text{INT } A \cap \text{INT } B \subseteq \text{INT}(A\cap B)}$ TOME $x \in \text{INT } A \cap \text{INT } B$.

LOGO, EXISTEM $U_A \subseteq A$ E $U_B \subseteq B$ ABERTOS TAL QUE $x \in U_A$ E $x \in U_B$. COMO $U := U_A \cap U_B \subseteq A\cap B$ É ABERTO, $x \in \text{INT}(A\cap B)$

— // — // —

d) TOME $x \in \bigcup_{i\in I} \text{INT } A_i$. LOGO, EXISTE $j \in I$ TAL QUE $x \in \text{INT } A_j$ LOGO, EXISTE $U \subseteq A_j$ ABERTO COM $x \in U$. COMO $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, TEMOS $U \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. LOGO, $x \in \text{INT}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

$\blacksquare$

19 O QUE PRECISAMOS PROVAR É

$\text{INT } A = \left(\overline{A^c}\right)^c$. MAS NOTE QUE PELAS

DEFINIÇÕES DE FECHO E INTERIOR, TEMOS

$$\overline{A^c} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A^c \\ F \text{ FECHADO}}} F = \bigcap_{\substack{F^c \subseteq A \\ F \text{ FECHADO}}} F = \bigcap_{\substack{F^c \subseteq A \\ F^c \text{ ABERTO}}} (F^c)^c = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ ABERTO}}} U^c =$$

$$= \Bigg(\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ ABERTO}}} U\Bigg)^c = (\text{INT } A)^c.$$ LOGO, TEMOS

$$\left(\overline{A^c}\right)^c = \text{INT } A.$$ ■

20 QUERO PROVAR QUE SE $y \in B(x,r)$,

ENTÃO $B(x,r) = B(y,r)$.

$B(x,r) \subseteq B(y,r)$ TOME $z \in B(x,r)$. LOGO, TEMOS

$$d(z,y) \leq \max\{d(x,y), d(x,z)\} < \max\{r, r\} = r.$$

LOGO, $z \in B(y,r)$.

$B(y,r) \subseteq B(x,r)$ TOME $z \in B(y,r)$. LOGO,

$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} < r$. LOGO, $z \in B(x,r)$. ∎

21 COMO X É SEPARÁVEL, EXISTE $Y_X := \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ TAL QUE $\overline{Y_X} = X$. COMO Y_X É ENUMERÁVEL, O CONJUNTO $Y_Z := f(Y_X)$ TAMBÉM VAI SER ENUMERÁVEL. LOGO, ESCREVA $Y_Z := \{z_1, \dots, z_n, \dots\} = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$. VOU PROVAR QUE $\overline{Y_Z} = Z$.

$\boxed{\overline{Y_Z} \subseteq Z}$ COMO $Y_Z \subseteq Z$, ENTÃO $\overline{Y_Z} \subseteq \overline{Z} = Z$.

$\boxed{Z \subseteq \overline{Y_Z}}$ TOME $z \in Z$. QUERO PROVAR QUE DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $z_n \in Y_Z$ TAL QUE $d_Z(z, z_n) < \varepsilon$. COMO f É SOBREJETIVA, EXISTE $x \in X$ TAL QUE $f(x) = z$. COMO f É CONTÍNUA, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE SE $d_X(x, y) < \delta$, ENTÃO $d_Z(f(x), f(y)) < \varepsilon$. TOMANDO ESSE δ E USANDO O FATO DE QUE Y_X É DENSO EM X, EXISTE $x_n \in Y_X$ TAL QUE $d_X(x, x_n) < \delta$. LOGO, PELA CONTINUIDADE, TEMOS $d_Z(f(x), f(x_n)) = d_Z(z, z_n) < \varepsilon$, COMO QUERÍAMOS. LOGO, $z \in \overline{Y_Z}$. $\blacksquare$

22 a) DADO m, SEJA Y_m O CONJUNTO ENUMERÁVEL TAL QUE $\overline{Y_m} = X_m$. FIXE $y_m \in Y_m$ PARA TODO m E DEFINA $Z_m := Y_1 \times \dots \times Y_m \times \{y_{m+1}\} \times \{y_{m+2}\} \dots$.

LOGO, CADA Z_m É ENUMERÁVEL. PARA VER ISSO, DEFININDO $f: Y_1 \times \dots \times Y_m \to Z_m$ POR $f(u) := (u_1, \dots, u_m, y_{m+1}, \dots)$ GANHAMOS UMA FUNÇÃO SOBREJETIVA. COMO $Y_1 \times \dots \times Y_m$ É PRODUTO CARTESIANO FINITO DE ENUMERÁVEIS, ENTÃO É ENUMERÁVEL. LOGO, Z_m É ENUMERÁVEL.

AGORA, DEFINA $Z := \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$. COMO A UNIÃO É ENUMERÁVEL, Z É ENUMERÁVEL. BASTA PROVAR QUE $\overline{Z} = X$. TOME $x \in X$. TOME $\varepsilon > 0$. LOGO, EXISTE N TAL QUE $\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$. PORTANTO, PARA $m \leq N$ TOME $u_m \in Y_m$ COM $d_m(x_m, u_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ E DEFINA $z := (u_1, \dots, u_N, y_{N+1}, \dots)$

NOTE QUE $z \in Z_N$ E PORTANTO $z \in Z$. ALÉM DISSO,

$$d(x,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(x_m, z_m)}{1 + d_m(x_m, z_m)} = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} \frac{d_m(x_m, u_m)}{1 + d_m(x_m, u_m)} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d_m(x_m, y_m)}{1 + d_m(x_m, y_m)}$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, COMO QUERÍAMOS. ISSO FINALIZA $\overline{Z} = X$.

—//—//—

b) VOU PROVAR QUE SE $U \subseteq X_1 \times \dots \times X_N$ ABERTO, ENTÃO $f^{-1}(U) \subseteq X$ É ABERTO.

TOME $U \subseteq X_1 \times \dots \times X_N$ ABERTO E $x \in f^{-1}(U)$.

LOGO, $f(x) = (x_1, \dots, x_N) \in U$. PELO EXERCÍCIO 14, EXISTEM $U_m \subseteq X_m$ ABERTOS TAIS QUE $U_1 \times \dots \times U_N \subseteq U$ E $(x_1, \dots, x_N) \in U_1 \times \dots \times U_N$. AGORA, NOTE QUE

$$x \in f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_N) = U_1 \times \dots \times U_N \times X_{N+1} \times \dots$$

E QUE ESTE CONJUNTO É ABERTO PELO EXERCÍCIO 15. PELAS PROPRIEDADES DA PRÉ-IMAGEM, TEMOS $f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_N) \subseteq f^{-1}(U)$. COMO $x \in f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_N)$ E ESTE CONJUNTO É ABERTO, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $B(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_N) \subseteq f^{-1}(U)$.

LOGO, $f^{-1}(U)$ É ABERTO, COMO QUERÍAMOS.

—— // —— // ——

c) TOME $f_n \in X$, ONDE $f_n := (f_n[1], \dots, f_n[m], \dots)$.

SUPONHA PARA m FIXO, $f_n[m]$ CONVERGE PARA $f[m] \in X_m$. VOU PROVAR QUE f_n CONVERGE PARA f, ONDE $f := (f[1], \dots, f[m], \dots)$.

TOME $\varepsilon > 0$. EXISTE n_m TAL QUE SE $n \geq n_m$, $d_m(f[m], f_n[m]) < \frac{\varepsilon}{2}$. EXISTE N TAL QUE $\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

LOGO, TOMANDO $n_0 := \max\{n_1, \dots, N\}$, TEMOS QUE SE $n \geq n_0$ VALE

$$d(f, f_n) = \sum_{m=1}^{n_0} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(f[m], f_n[m])}{1 + d_m(f[m], f_n[m])} + \sum_{m=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{d_m(f[m], f_n[m])}{1 + d_m(f[m], f_n[m])} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

LOGO, $f_n \to f$. ∎

23 a) $\Rightarrow$] SE T É CONTÍNUA EM TODO PONTO ELA SERÁ CONTÍNUA NA ORIGEM.

$\Leftarrow$] SUPONHA T CONTÍNUA EM 0.

TOME $v \in V$. VOU PROVAR QUE T É CONTÍNUA EM v. TOME $\varepsilon > 0$. COMO É CONTÍNUA EM 0, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE SE $\|u - 0\|_V < \delta$, ENTÃO $\|Tv - T0\| < \varepsilon$.

LOGO, USANDO O MESMO δ, SE $\|v - u\|_V = \|(v-u) - 0\|_V < \delta$, ENTÃO $\|T(v-u) - T(0)\|_W = \|Tv - Tu\|_W < \varepsilon$.

—— // —— // ——

b) PRIMEIRO, PROVO QUE $\|Tv\|_W \leq \|T\|_{V \to W} \|v\|_V$ SE $v \in V$.

BOM, BASTA NOTAR QUE DADO $v \in V \setminus \{0\}$, TEMOS $\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \|Tu\|_W$, ONDE $u := \frac{v}{\|v\|_V}$. COMO $\|u\|_V = 1$, VALE $\|Tu\|_W \leq \|T\|_{V \to W}$.

LOGO, $\|Tv\|_W \leq \|T\|_{V \to W} \|v\|_V$, COMO QUERÍAMOS. SE $v = 0$, A DESIGUALDADE É $\|T0\|_W = \|0\|_W = 0 \leq \|T\|_{V \to W} \|0\|_V = 0$.

AGORA, CONTINUO COM O EXERCÍCIO.

$\Leftarrow)$ SUPONHA $\|T\|_{V\to W} \leq M < \infty$, $M > 0$. TOME $\varepsilon > 0$.

DEFINA $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$. $\|v - 0\|_V < \delta$, TEMOS PELO QUE ACABEI

DE MOSTRAR $\|Tv - T0\|_W \leq \|T\|_{V\to W} \|v\|_V < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. LOGO,

T É CONTÍNUA NA ORIGEM.

$\Rightarrow)$ VOU PROVAR A CONTRAPOSITIVA. SUPONHA

$\|T\|_{V\to W} = \infty$. ISSO SIGNIFICA QUE PARA TODO $m \in \mathbb{N}$

EXISTE v_m COM $\|v_m\|_V \leq 1$ TAL QUE $\|Tv_m\|_W > m$

DEFININDO $w_m := \frac{v_m}{\sqrt{m}}$, TEMOS $\|w_m - 0\|_V = \frac{\|v_m\|_V}{\sqrt{m}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$

E $\|Tw_m - T0\|_W = \frac{\|Tv_m\|_W}{\sqrt{m}} > \frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m}$.

LOGO, $w_m \xrightarrow{\|\cdot\|_V} 0$ MAS $Tw_m \xrightarrow{\|\cdot\|_W} \infty$, PORTANTO

NÃO É CONTÍNUA NA ORIGEM. ▢

24 SE $x_n = x_{n+1}$, ENTÃO $r_n \geq r_{n+1}$. SUPONHA $x_n \neq x_{n+1}$. ENTÃO, DEFININDO $t := \frac{r_{n+1}}{|x_n - x_{n+1}|}$, VAMOS TER QUE $|x_{n+1} + t(x_{n+1} - x_n) - x_{n+1}| = r_{n+1}$. LOGO, $x_{n+1} + t(x_{n+1} - x_n) \in B[x_{n+1}, r_{n+1}]$. ISSO IMPLICA QUE $|x_{n+1} + t(x_{n+1} - x_n) - x_n| \leq r_n$. REARRANJANDO, $(1+t)|x_{n+1} - x_n| \leq r_n$.

LOGO, $|x_{n+1} - x_n| \leq r_n - t|x_{n+1} - x_n| = r_n - r_{n+1}$. LOGO, $r_n \geq r_{n+1}$

AGORA, NOTE QUE DADOS $m \geq n$, TEMOS QUE $|x_m - x_n| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=n}^{m-1} r_{i+1} - r_i = r_m - r_n$. COMO $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ É CAUCHY (MAIS QUE ISSO, É CONVERGENTE), $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ SERÁ CAUCHY. LOGO, COMO B É COMPLETO, A SEQUÊNCIA CONVERGE.

SEJA $x_n \to x \in B$. FALTA PROVAR QUE $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$.

TOME $n \in \mathbb{N}$. LOGO, TEMOS QUE PARA TODO $k \geq n$ $x_k \in B[x_n, r_n]$ (POIS $x_k \in B[x_k, r_k] \subseteq B[x_n, r_n]$). COMO $B[x_n, r_n]$ É FECHADO, ISSO SIGNIFICA QUE UMA SUBSEQUÊNCIA DE UMA SEQUÊNCIA CONVERGENTE ESTÁ TODA EM UM FECHADO. LOGO, ESSA SUBSEQUÊNCIA CONVERGE PARA $x \in B[x_n, r_n]$. COMO n ERA ARBITRÁRIO, $x \in B[x_n, r_n]$ PARA TODO n. LOGO, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$. $\blacksquare$

25 PELAS NOTAS DE AULA, SABEMOS QUE

$$\tilde{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

É EQUIVALENTE A d E $\tilde{d} \leq 1$.

ELA SERVIRÁ PARA PROVAR QUE $(X, \tilde{d})$ É COMPLETO PELO ARGUMENTO ABAIXO.

TOME $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ CAUCHY POR $\tilde{d}$. PELA EQUIVALÊNCIA, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ É CAUCHY POR d. PELA COMPLETUDE DE (X, d), $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ CONVERGE A x POR d. PELA EQUIVALÊNCIA, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ CONVERGE A x POR $\tilde{d}$. LOGO, $(X, \tilde{d})$ É COMPLETO, COMO QUERÍAMOS.

$\blacksquare$

26 TOME x E y PONTOS FIXO. LOGO, $f(x)=x$ E $f(y)=y$. ISSO NOS MOSTRA QUE $d(x,y)=d(f(x),f(y))\leq \lambda d(x,y)$. SE $x\neq y$, ENTÃO DIVIDINDO DOS DOIS LADOS TEMOS $1\leq\lambda$, UM ABSURDO.

LOGO, $x=y$ COMO QUERÍAMOS. ■

(27) VAMOS DEFINIR $f^m := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ VEZES}}$. ISTO É,

$f^m(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x))\dots)}_{m \text{ VEZES}}$. PERCEBA DUAS COISAS. A PRIMEIRA É QUE $x_m = f^m(x_0)$ E A SEGUNDA É QUE $d(f^m(x), f^m(y)) = d(f(f^{m-1}(x)), f(f^{m-1}(y))) \leq \lambda d(f^{m-1}(x), f^{m-1}(y))$

$\leq \dots \leq \lambda^m d(x, y)$.

AGORA, VOU PROVAR QUE $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ É CAUCHY. TOME $\varepsilon > 0$. COMO $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m < \infty$, EXISTE m_0 TAL QUE

$\sum_{m=m_0}^{\infty} \lambda^m < \frac{\varepsilon}{d(x_0, f(x_0))}$, ONDE x_0 NÃO É PONTO FIXO (SE FOSSE, $x_m = f^m(x_0) = x_0$, A SEQUÊNCIA SERIA CONSTANTE, LOGO CONVERGENTE E A QUESTÃO ESTARIA RESOLVIDA). AGORA, TOME $m > n \geq m_0$ TEMOS $d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) =$

$= \sum_{k=n}^{m-1} d(f^k(x_0), f^k(f(x_0))) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k d(x_0, f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{\cancel{d(x_0, f(x_0))}} \cdot \cancel{d(x_0, f(x_0))} = \varepsilon$.

LOGO, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ É CAUCHY. COMO X É COMPLETO, $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ CONVERGE PARA $x \in X$.

POR FIM, PROVO QUE $x = f(x)$. COMO f É CONTRAÇÃO, É UMA FUNÇÃO CONTÍNUA. ALÉM DISSO, d É UMA FUNÇÃO CONTÍNUA. PORTANTO, TEMOS

$$d(x, f(x)) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, f(x_n)) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

LOGO $x = f(x)$, COMO QUERÍAMOS.