# Simulado para a AS

Monitores: Lucas Emanuel e Marcos Antonio
Cálculo em Várias Variáveis

15 de dezembro de 2020

Este simulado tem como objetivo preparar o estudante para a prova AS de Cálculo em Várias Variáveis. Não é obrigatório, porém é recomendado.

## Exercícios

1. Verifique se o limite existe:

   $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

2. Determine a aproximação linear da função $f(x,y,z) = x^3\sqrt{y^2+z^2}$ no ponto $(2,3,4)$ e use-a para estimar o número $(1.98)^3\sqrt{(3.01)^2+(3.97)^2}$

3. Determine a taxa máxima de variação da função $f(x,y) = x^2y + \sqrt{y}$ no ponto $(2,1)$. Em que direção isso ocorre?

4. Determine os valores máximo e mínimo absoluto de $f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ na região triangular fechada do plano $xy$ com vértices $(0,0), (0,6), (6,0)$.

5. Utilize a fórmula de mudança de variáveis e uma transformação adequada para calcular $\iint_R xy dA$, onde $R$ é o quadrilátero com vértices $(0,0)$, $(1,1)$,$(2,0)$,$(1,-1)$.

6. Calcule $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x,y,z) = (e^z, xz, x+y)$ e $C$ é dado por $r(t) = (t^2, t^3, -t)$, $0 \le t \le 1$.

7. Calcule $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x,y,z) = (4x^3y^2 - 2xy^3, 2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)$ e $C : r(t) = (t + sen(\pi t), 2t + cos(\pi t))$, $0 \le t \le 1$.

8. Determine a área da parte da superfície $z = x^2 + 2y$ que está acima do triângulo com vértices $(0,0), (1,0), (1,2)$.

9. Se **a** é um vetor constante, e $r = (x,y,z)$ e $S$ é uma superfície orientada suave com uma curva fronteira C fechada simples, suave e positivamente orientada, mostre que
$\int\int_S 2\mathbf{a} \cdot dS = \int_C (\mathbf{a} \times r) \cdot dr$

10. Calcule $\int\int_S F \cdot dS$, onde $F = (x,y,z)$ na esfera unitária $x^2+y^2+z^2 = 1$.

## Soluções

1. Vamos considerar o limite por dois caminhos $\sigma_1(t) = (t,0)$ e $\sigma_2(t) = (0,t)$.
Logo:
$\lim_{t\to 0} f(\sigma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{sen(t^2)}{t^2} = \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u} = 1$
Já pelo segundo caminho:
$\lim_{t\to 0} f(\sigma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{sen(-t^2)}{t^2} = \lim_{u\to 0} \frac{-sen(u)}{u} = -1 \neq 1.$
Ou seja, o limite não existe.

2. f(x,y,z) $\approx f(2,3,4)+f_x(2,3,4)(x-2)+f_y(2,3,4)(y-3)+f_z(2,3,4)(z-4) = 40+60(x-2)+(24/5)(y-3)+(32/5)(z-4) = 60x+24y/5+32/5z-120 = g(x,y,z)$.
Portanto, em (1.98,3.01,3.97); f(x,y,z) $\approx g(1.98, 3.01, 3.97) = 38.656$.

3. Sabemos que a taxa máxima de variação sempre ocorre na direção do vetor gradiente.

$\nabla f = (2xy, x^2 + 1/(2\sqrt{y})) \to \nabla f(2,1) = (4, 9/2)$
Portanto, a taxa máxima de variação é dada pelo produto escalar do gradiente pelo gradiente unitário, ou seja:
T $= \nabla f(2,1) \cdot \frac{\nabla f(2,1)}{|\nabla f(2,1)|} = \sqrt{145}/2$

4. Vamos encontrar os pontos críticos dentro do triângulo primeiro, depois procuramos na borda (os pontos críticos são encontrados derivando a função e igualando a 0, ou no caso onde a derivada não se anule, tomamos a extremidade) .
$f_x = 4y^2 - 2xy^2 - y^3, f_y = 8xy - 2x^2y - 3xy^2$. O único ponto crítico dentro do triângulo é o ponto $(1,2)$ e $f(1,2) = 4$.
Vamos agora procurar nas extremidades, ou seja; nos 3 lados do triângulo:

- $L_1 = f(x,0) = 0$
- $L_2 = f(0,y) = 0$
- $L_3 : x = 6-y, f(6-y,y) = 2(y^3 - 6y^2)$ cujos pontos críticos estão estão em $y = 0$ e $y = 4 \rightarrow f(6,0) = 0, f(2,4) = -64$

Portanto, checando em todos os pontos críticos descobrimos que $f(1,2) = 4$ é máximo absoluto e $f(2,4) = -64$ é mínimo absoluto.

5. Tome $u = x - y, v = x + y \rightarrow x = (u+v)/2, y = (v-u)/2$. Temos que $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = |-1/2| = 1/2$. Com estas coordenadas a imagem de $R$ é o quadrado com vértices $(u,v) = (0,0), (-2,0), (0,2), and(-2,2).$, portanto:
$\int\int_R xydA = \int_0^2 \int_{-2}^0 (v^2 - u^2)/4dudv = 0$

6. $r'(t) = (2t, 3t^2, -1)$.
$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_0^1 2te^{-t} - 3t^5 - (t^2 + t^3)dt = 11/12 - 4/e$

7. seja $f(x,y) = x^4y^2 - x^2y^3 + y^4$, perceba que $F = \nabla f$, ou seja, $F$ é conservativo. Pelo teorema fundamental das integrais de linha:
$\int_C F \cdot dr = f(1,1) - f(0,1) = 1 - 1 = 0$

8. Parametrizando a superfície em função de x e y: $\sigma(x,y) = (x, y, x^2 + 2y)$, temos então que o vetor normal é dado por $N = (-z_x, -z_y, 1) = (-2x, -2, 1) \rightarrow |N| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4}$. O domínio está em $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x$. Portanto:
A(S) $= \int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1 + 4x^2 + 4}dydx = \int_0^1 2x\sqrt{5 + 4x^2}dx = (27 - 5\sqrt{5})/6$

9. Seja $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), F = \mathbf{a} \text{ } \mathbf{x} \text{ } \mathbf{r} = (a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a2x) \rightarrow divF = 2\mathbf{a} = 2(a_1, a_2, a_3)$. Pelo teorema de Stokes:
$\int\int_S 2\mathbf{a} \cdot dS = \int\int_S divF \cdot dS = \int_C F \cdot dr = \int_C \mathbf{axr} \cdot dr$
Como queríamos mostrar.

10. Uma mera aplicação do teorema de Gauss. Numa esfera, temos todas as condições necessárias para aplicá-lo
div$F = 1 + 1 + 1 = 3$. Pelo teorema de Gauss
$\int\int_S F \cdot dS = \int\int\int_E divFdV = 3\int\int\int_E 1dV = 3 \cdot 4\pi/3 = 4\pi$
pois $\int\int\int_E 1dV = 4\pi$ é o volume de uma esfera unitária.