In [1]:

```
%display typeset
```

1

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$z \geq 0$$
$$x + y + z = 4$$

Podemos parametrizar a superfície da peça (S) em função de θ e z, isto é, seja ϕ uma parametrizaçao de S;

$$\phi(\theta, z) = (2cos(\theta), 2sin(\theta), z)$$

,

onde $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 2 - 2cos(\theta) - 2sin(\theta)$.

θ varia nesse intervalo pois em $[0, \pi/2]$, $z = 2(1 - cos(\theta) + sin(\theta)) \leq 0$, fora da nossa região.

Tendo a parametrização e a variação dos parâmetros basta calcular a integral para encontrar a área da região e depois multiplicar por A.

Lembrando que:

$$\int\int_D ds = \int_a^b \int_c^d |\phi_\theta x \phi_z| d\theta dz$$

$\phi_\theta = (-2cos(\theta), 2sin(\theta), z), \phi_z = (0, 0, 1) \rightarrow \phi_\theta x \phi_z = (2cos(\theta), 2sin(\theta), 0) = N \rightarrow |N| = 2$, N é normal à superfície.

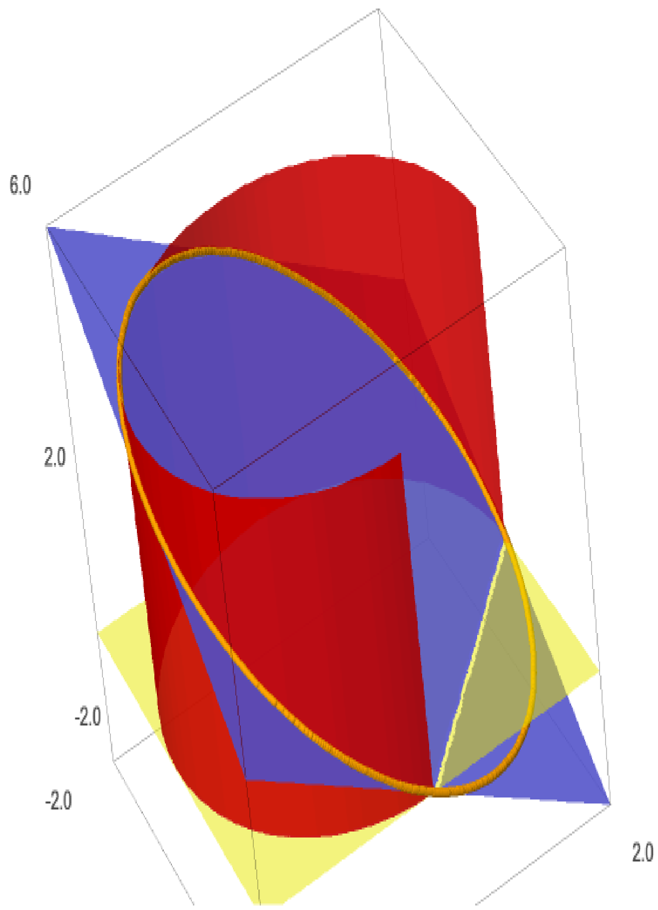
Portanto; $\int\int_S AdS = \int_{\pi/2}^{2\pi} \int_0^{2-2cos(\theta)-2sin(\theta)} A \cdot 2dzd\theta = 6A\pi + 8A$

veja o esboço abaixo.

In [6]:

```
x, y, z, theta = var('x y z theta')
p = parametric_plot3d([2*cos(theta),2*sin(theta),z], (theta,pi/2,2*pi),(z,0,2+4/(2^0.5
)), color = 'red',opacity = .8)
q = parametric_plot3d([x,y,2-x-y],(x,-2,2),(y,-2,2), opacity = .8)
r = parametric_plot3d([x,y,0],(x,-2,2),(y,-2,2),color = 'yellow', opacity = .5)
s = parametric_plot3d([2*cos(x),2*sin(x),2-2*cos(x)-2*sin(x)],(x,0,2*pi),color = 'orang
e', thickness = 10)
show(p+q+r+s)
```

Out[6]:



2

$$F = (y, 3y^3 - x, z)$$
$$\sigma(t) = (t, t^n, 0), 0 \leq t \leq 1$$

Sabemos que uma integral de linha de um campo vetorial pode ser calculada da seguinte forma dada uma parametrização σ:

$$\int_\sigma F \cdot dS = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

No nosso caso $F(\sigma(t)) = (t^n, 3t^{3n} - t, 0)$ e $\sigma'(t) = (1, 3nt3n - 1, 0)$, logo;
$F \cdot \sigma' = t^n + 3nt^{4n-1} - nt^n$

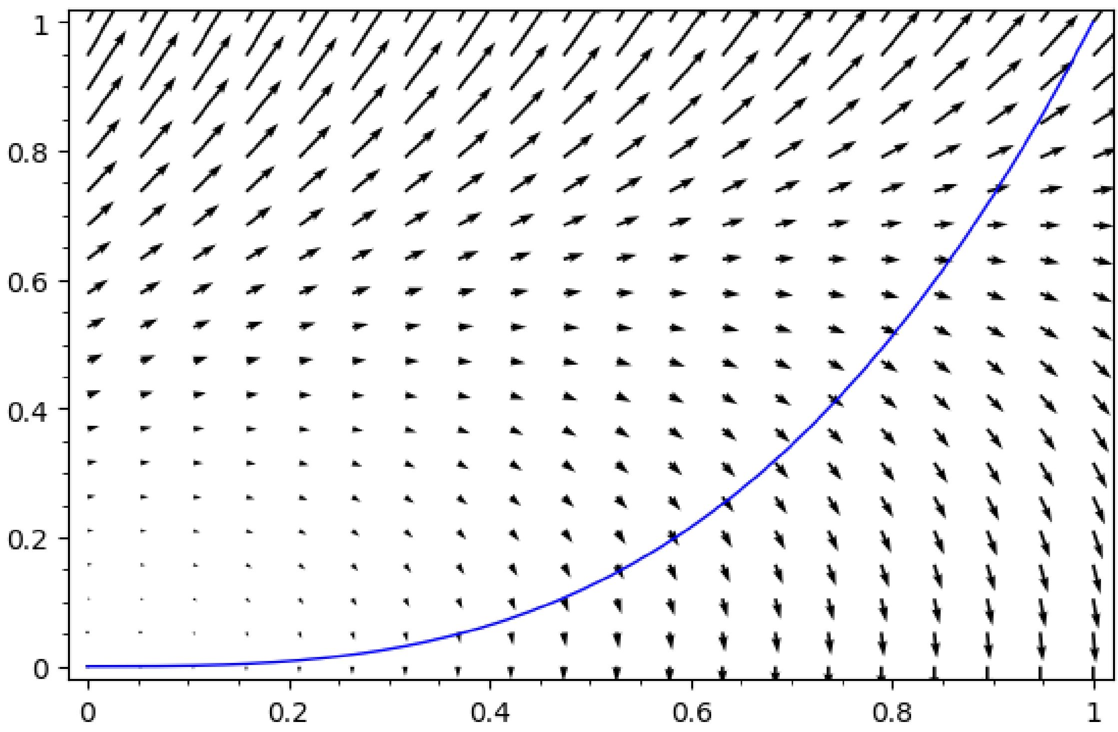
Portanto:

$$\int_\sigma F dS = \int_0^1 t^n + 3nt^{4n-1} - nt^n dt = 1/(n+1) + 3/4 - n/(n+1) = \frac{7-n}{4n+4}$$

In [2]:

```
f(x) = x^3
p = plot(f,(x,0,1), axes = False)
q = plot_vector_field((y,3*y^3-x),(x,0,1),(y,0,1))
show(p+q)
```

Out[2]:



3

Queremos $\int\int_S xydS$, onde S é o tetraedro dado por $z = 0, y = 0, x + z = 1, x = y$

Vamos dividir S em 4 partes correspondentes a cada um dos lados do tetraedro:

$$S_1 : \phi(x, y) = (x, y, 1 - x), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \to N = (1, 0, 1) \to |N| = \sqrt{2}$$
$$S_2 : \phi(x, z) = (x, 0, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x, \to N = (0, 1, 1) \to |N| = 1$$
$$S_3 : \phi(x, z) = (x, x, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x \to N = (1, -1, 0) \to |N| = \sqrt{2}$$
$$S_4 : \phi(x, y) = (x, y, 0), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \to N = (0, 0, 1) \to |N| = 1$$

Vamos então calcular a integral em cada uma das superfícies acima:

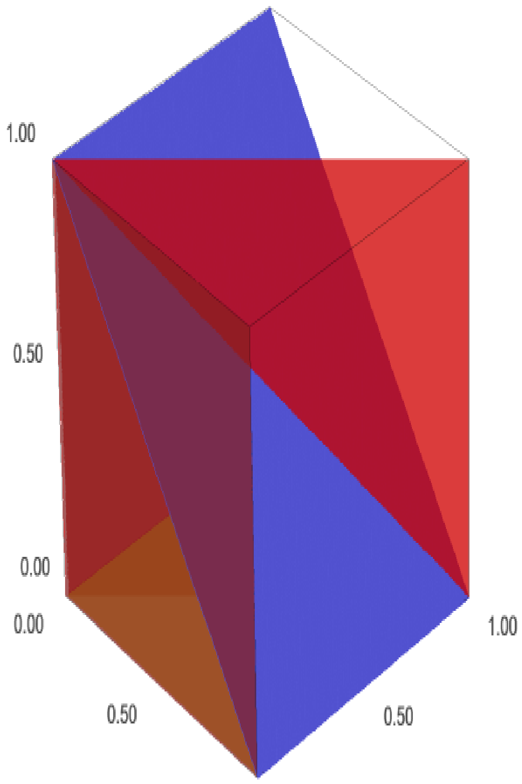
$$\int\int_{S_1} xydS = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{2}xydydx = \sqrt{2}/8$$
$$\int\int_{S_2} xydS = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \cdot 0dzdx = 0$$
$$\int\int_{S_3} xydS = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{2}x^2dzdx = \sqrt{2}/12$$
$$\int\int_{S_4} xydS = \int_0^1 \int_0^x xydydx = 1/8$$

Portanto, $\int\int_S = \int\int_{S_1} xydS + \int\int_{S_2} xydS + \int\int_{S_3} xydS + \int\int_{S_4} xydS = \frac{5\sqrt{2}+3}{24}$

In [4]:

```
p = parametric_plot((x,y,1-x),(x,0,1),(y,0,1), opacity = 1)
q = parametric_plot((x,y,0),(x,0,1),(y,0,1), color = 'yellow', opacity = 0.7)
r = parametric_plot((x,0,z),(x,0,1),(z,0,1), color = 'brown', opacity = 0.7)
s = parametric_plot((x,x,z),(x,0,1),(z,0,1), color = 'red', opacity = 0.7)
show(p+q+r+s)
```

Out[4]:



4

O fluxo de calor numa superfície S com temperatura $T(x, y, z)$ é dado por

$$-k\nabla T$$

onde k é uma constante.

$$T = 3x^2 + 3z^2 \rightarrow \nabla T = (6x, 0, 6y)$$

seja $F = -6 \cdot 1 \cdot (x, 0, z)$ e $S : x^2 + y^2 = 2, 0 \leq y \leq 2$, vamos parametrizar S da seguinte forma:

$$\phi(\theta, y) = (\sqrt{2}cos(\theta), y, \sqrt{2}sin(\theta)), 0 \leq \theta \leq 2pi, 0 \leq y \leq 2$$
$$\phi_\theta = \sqrt{2}(-sin(\theta), 0, cos(\theta))$$

$$\phi_y = (0, 1, 0)$$

$$N = \phi_y x \phi_\theta = \sqrt{2}(cos(\theta), 0, sin(\theta))$$
$$F(\phi(\theta, y)) = -6\sqrt{2}(cos(\theta), 0, sin(\theta)) \rightarrow F \cdot N = -12$$

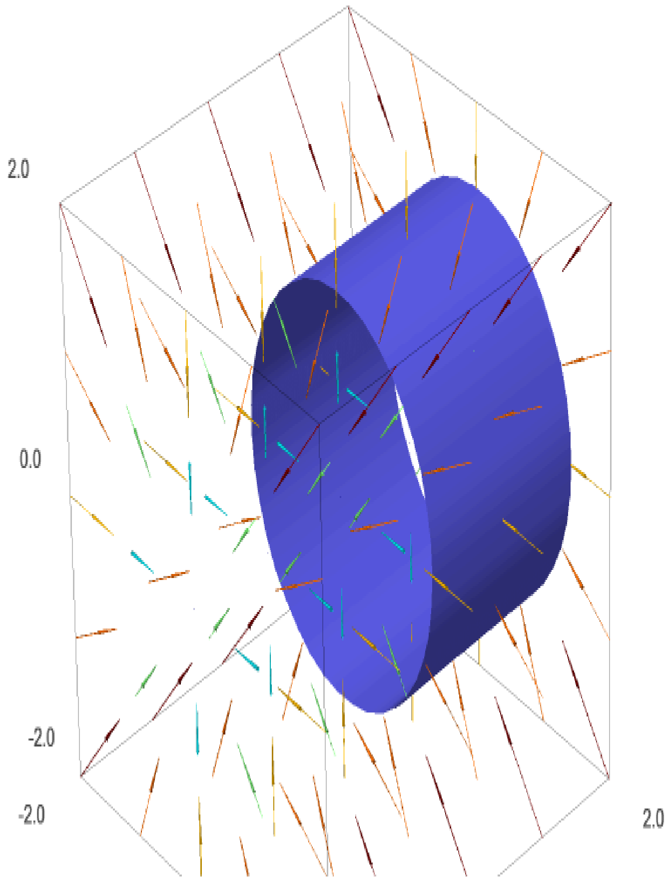
(N tem orientação para fora), ou seja;

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_D [F(\phi(\theta, y)) \cdot N] dyd\theta = \int_0^{2pi}\int_0^2 -12 dyd\theta = -48\pi$$

In [5]:

```
p = plot_vector_field3d((-6*x,0,-6*z),(x,-2,2),(y,-2,2),(z,-2,2))
q = parametric_plot(((2^0.5)*cos(x),y,(2^0.5)*sin(x)),(x,0,2*pi),(y,0,2), opacity = 0.9
)
show(p+q)
```

Out[5]:



In [0]:

```
```