soluções

Cálculo em Várias Variáveis

Monitores: Lucas Emanuel e Marcos Antonio

Agosto de 2020

1. (a) Primeiro, precisamos mudar a ordem de integração:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

$\Leftrightarrow$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

logo;

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{8y}{\sqrt{4 - 2y^4}} dydx$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{8y}{\sqrt{4 - 2y^4}} dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{8y^3}{\sqrt{4 - 2y^4}} dy$$

Fazendo $u = 4 - 2y^4$:

$$\int_4^2 -\frac{du}{\sqrt{u}} \tag{1}$$

$$= 2(\sqrt{u} \mid_2^4) = 4 - \sqrt{8}$$

(b) Como queremos integrar no $\mathbb{R}^3$ inteiro, podemos pensar numa bola de raio infinito:

$$\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{(\theta, \phi, \rho) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq +\infty\}$$

Por se tratar de coordenadas esféricas, o jacobiano é $\rho^2 sen\phi$

$$\int\int\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dzdydx \Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{+\infty} \rho^2 sen\phi e^{-\rho^3} dd\phi d\theta$$

Fazendo $u = \rho^3$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{+\infty} \rho^2 sen\phi e^{-\rho^3} dd\phi d\theta \Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{sen\phi e^{-u}}{3} dud\phi d\theta$$

$$-\frac{2\pi 2(e^{-\infty}-1}{3}) = \frac{4\pi}{3}$$

1

2. (a) seja w a região de integração, utilizando as transformações do enunciado, sabemos que $u + v + w = 1$. O Jacobiano da transformação $J = 8uvw$. Logo:

$$\int\int\int_W dV \Leftrightarrow \int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v} 8uvwdwdvdu = 4\int_0^1\int_0^{1-u} uv(1-u-v)^2 dvdu = (*)$$

Fazendo $p = 1 - u - v$ e seja $(i) = \int_0^{1-u} v(1-u-v)^2 dvdu$:

$$(i) = -\int_{1-u}^0 (1-u-p)p^2 dp = -\int_{1-u}^0 p^2 - p^2u - p^3 dp = -\frac{p^3}{3} + \frac{p^3u}{3} + \frac{p^4}{4}|_{1-u}^0 = (1-u)^3(\frac{1-u}{12})$$

$$= \frac{(u-1)^4}{12}$$

$(*) = 4\int_0^1 u\frac{(u-1)^4}{12} du$. Fazendo $q = u - 1$;

$$(*) = \frac{1}{3}\int_{-1}^0 (q+1)q^5 dq = -\frac{1}{3}(\frac{(-1)^6}{6} + \frac{(-1)^5}{5}) = \frac{1}{90}$$

(b) Utilizando coordenadas esféricas:
$x^2 + y^2 + z^2 \geq 4 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho \geq 2$, e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \Leftrightarrow \rho \leq 4cos\phi$.
Como ρ é maior que 2, $cos\phi \geq 0.5$, ou seja, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$. Portanto

$$w : \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, 2 \leq \rho \leq 4cos\phi\}$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_2^{4cos\phi} \rho^2 sen\phi \cdot d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\phi(64cos^3\phi - 8)d\phi d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\phi(64cos^3\phi - 8)d\phi = (*)$$

fazendo $u = cos\phi$:

$$(*) = \frac{2\pi}{3}\int_1^{\frac{1}{2}} (8 - 64u^3)du = \frac{22\pi}{3} \qquad (2)$$

3. Um plano tangente π à uma superfície num ponto $P = (a, b, c)$, $\pi : z = c + f_x(x - a) + f_y(y - b)$

$$f_x = 3x^2y^2 - \frac{1}{x}, f_y = 2x^3y$$

Substituindo por $(a, b) = (2, 1)$: $f_x(2, 1) = 12 - \frac{1}{2}$, $f_y(2, 1) = 16$, logo $\pi : z = 8 + \frac{23}{2}(x - 2) + 16(y - 1) = \frac{23x}{2} + 16y - 31$. $dx = 2.1 - 2 = 0.1$, $dy = 0.9 - 1 = -0.1$. Portanto, aproximando pelo plano tangente:

$$z(2.1, 0.9) \approx \frac{23 \cdot 2.1}{2} + 16 \cdot 0.9 - 31 = 7.55$$

Ou usando diferenciais:

$$dz = \frac{23}{2} \cdot 0.1 - 16 \cdot 0.1 = -0.45$$

Logo, $z \approx z_0 + dz = 8 - 0.45 = 7.55$

4.
$$f_x = g(x^2 - y^2) + 2x^2g^{'}(x^2 - y^2)$$

$$f_y = -2xyg^{'}(x^2 - y^2)$$

Portanto, $f_x(a, a) = g(0) + 2a^2g'(0)$ e $f_y(a, a) = -2a^2g'(0)$.

Logo, o plano tangente é dado por :

$$z = z_0+f_x(x-a)+f_y(y-a) = ag(0)+(g(0)+2a^2g'(0))(x-a)-2a^2g'(0)(y-a)$$

$$= xg(0) + 2a^2g'(0)x - 2a^2g'(0)y$$

Logo; $z(0, 0) = 0$, portanto, $(0, 0, 0)$ pertence ao plano tangente.

5. $$f_x = 2x + y - \frac{3}{x^2}$$

$$f_y = 2y + x - \frac{3}{y^2}$$

(1,1) satisfaz $f_x = 0,\ f_y = 0$.

$$f_{xx} = 2 + \frac{6}{x^3}$$

$$f_{yy} = 2 + \frac{6}{y^3}$$

$$f_{xy} = 1$$

Portanto o determinante da matriz hessiana de (1,1) é $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 63 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 8 > 0$, logo, é mínimo local.

6. Maximizar A é equivalente a maximizar $\frac{A^2}{s}$. Usando multiplicadores de lagrange:

$$\nabla \frac{A^2}{s} = -((s-y)(s-z),(s-x)(s-z),(s-x)(s-y) = \lambda(1,1,1)$$

$$\to (s-y)(s-z) = (s-x)(s-z) = (s-x)(s-y) \Leftrightarrow x = y = z$$

λ não pode ser 0 pois implicaria que algumas coordendas seriam iguais a s; logo, um dos lados seria maior ou igual que a soma dos outros dois, portanto, não formaria um triângulo.

7. (a) Usando coordendas polares:

$$1-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1+\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2rsen\theta$$

$$\to 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2sen\theta$$

$\Rightarrow$ Como θ é positivo e $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2sen\theta} r^3 sen\theta cos\theta dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^5\theta cos\theta d\theta = (*). \qquad (3)$$

Que sorte!, temos uma potência ímpar para o seno, portanto, fazendo $u = sen\theta$:

$$(*) = 4 \int_0^1 u^5 du = \frac{2}{3}$$

(b) A região de integração é um círculo centrado na origem e de raio a, logo, sua área é πa^2.