Monitoria Dia 18

Marcos Antonio

Regra da cadeia

Lembremo-nos de quando tínhamos uma função de uma única variável, a regra da cadeia nos fornecia $x = g(t)$, $f(x) = f(g(t))$;

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Suponha agora $f(x, y)$ onde x é uma função de t e y também; então a regra da cadeia também nos fornece uma fórmula para $\frac{df}{dt}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

É claro que podemos generalizar esta equação para quando f for uma função de m variáveis. Suponha $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ onde cada x_i é uma função de t:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt} \tag{2}$$

Neste caso, $f : R \to R$, pois apesar de estar função de m variáveis, cada uma delas depende unicamente de t.

Podemos dizer ainda que cada variável x_i de $f(\mathbf{X}$ depende de n variáveis; ou seja, $x_i(t_1, t_2, ..., t_n)$. Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{x_m}{\partial t_j} \tag{3}$$

onde $f : R^n \to R$.
Podemos ainda representar as derivadas parciais como matrizes:

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + ... + \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + ... + \frac{\partial x_m}{\partial t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} \tag{4}
$$

Deivadas Direcionais

Até agora vimos apenas derivadas parciais, onde $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos davam a taxa de variação da função na direção do eixo x e do eixo y respectivamente. Mas e se quisermos a taxa de variação na direção da reta $x = y$ por exemplo, ou então da da reta que faz um ângulo de 30 graus com o eixo x ?

Teo: Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário, a derivada direcionada de f na direção u:

$$\nabla f \cdot \mathbf{u}$$

e a direção onde f cresce mais rapidamente é na direção do vetor gradiente.

Ainda com o gradiente; podemos traçar um plano tangente π à uma superfície de nível $F(x, y, z)$, passando por P_0. De forma suscinta; seja $\mathbf{r}'(t) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, um vetor que pertence à π:

$$\pi : \nabla F(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 =$$
$$= F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0)$$

Isto pode ser deduzido facilmente sabendo que o vetor gradiente é sempre perpendicular à superfície de nível; pois como $\mathbf{r}'(t)$ é um vetor que pertence à π então o produto escalar entre eles deve ser 0.