



Finanças Aplicadas

Modelos de volatilidade

Ana Catarina Pinto – N° 104547

Bárbara Carvalho – N° 88095

Gustavo Gil – N° 92978

Marcos Mendes – N° 90706

Aveiro | janeiro de 2022



Índice

Introdução	3
Revisão da Literatura.....	4
Dados e Metodologia.....	6
Dados	6
Metodologia.....	6
Análise de Resultados.....	14
Conclusão	22
Bibliografia.....	23

Índice de Figuras

Figura 1 – Evolução dos preços ao longo do tempo.....	15
Figura 2 - Retornos ao longo do tempo	15
Figura 3 - Histograma dos retornos	16
Figura 4 - Correlograma dos retornos	17
Figura 5 - Correlograma dos retornos quadrados	18
Figura 6 - Volatilidade condicional estimada usando um modelo GARCH(1,1).....	18
Figura 7 - Volatilidade condicional estimada usando um modelo TARCH (1,1,1)	19
Figura 8 - Volatilidade condicional estimada usando um modelo GARCH(1,1) - X	20

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Estatísticas sumárias dos Retornos.....	14
Tabela 2 - Resultados do modelo GARCH	18
Tabela 3 - Resultados do modelo TARCH (1,1,1)	18
Tabela 4 - Resultados do modelo GARCH(1.1)-X.....	20
Tabela 5 - Parâmetros estimados para diferentes frequências	21



Introdução

A volatilidade é uma medida estatística de distribuição de lucros para um determinado mercado ou índice de ações. Na maioria dos casos, quanto maior a volatilidade, maior o risco. A volatilidade pode ser medida por desvios-padrão ou variações entre os retornos da mesma ação ou índice de mercado. (Nguyen, 2019).

As séries temporais financeiras são conhecidas por exibir certas características comumente referidas na literatura como fatos estilizados (Poon e Granger 2003; Tsay 2005). Um bom modelo de volatilidade deve ser capaz de captar a maioria dos fatos estilizados na análise da volatilidade de um ativo financeiro. Os modelos de heterocedasticidade condicional autorregressiva generalizada (GARCH) são normalmente favorecidos, pois têm uma vantagem sobre os modelos de regressão tradicionais no estudo da volatilidade, porque o último assume variância constante. (Musunuru, 2016).

O objetivo deste trabalho é o de estudar a volatilidade associada ao mercado das ações, analisando o padrão da volatilidade do índice Dow Jones, num dado período de tempo. Para isso foram usados os modelos ARCH.

O trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma: o presente capítulo fará uma breve introdução ao tema a ser estudado no trabalho, o capítulo dois será dedicado à revisão da literatura, o capítulo três ao enquadramento teórico, o capítulo quatro aos dados e metodologia e, por fim, o capítulo cinco dedicado às principais conclusões do trabalho.



Revisão da Literatura

Autor	Dados	Objetivo	Metodologia	Resultados	Citações
Vasileiou, E.	Dados diários para o período de 4/1/2021-5/2/2021	O principal objetivo do artigo é fornecer novas evidências quantitativas de que os retornos das ações são anormais em condições de short squeeze.	O autor emprega os modelos de heterocedasticidade condicional autoregressiva de assimetria (GARCH) exponencial GARCH (EGARCH) e Threshold GARCH (TGARCH)	Os resultados mostram que os retornos do GME não foram distribuídos aleatoriamente durante o período examinado e os modelos de assimetria GARCH indicam que, ao contrário do que as séries temporais normalmente mostram, a volatilidade aumentou com o aumento dos preços do GME.	0
Nguyen, C.T., Nguyen, M.H.	Dados do preço de fecho diário do Índice VN durante o período de 1/3/2001-1/3/2019	O objetivo do artigo é o de medir a volatilidade do preço das ações na bolsa de valores de HO Chi Minh (HSX).	Modelos simétricos (GARCH, GARCH-M) e assimétricos (EGARCH e TGARCH) para medir a volatilidade do preço da ação no HSX	Os resultados mostram que a volatilidade dos retornos das ações têm um grande impacto nos movimentos do mercado de futuros sob o impacto de choques, enquanto a volatilidade assimétrica aumenta o risco de mercado, aumentado assim a atratividade do mercado de ações. O modelo GARCH sugere um alto grau de persistência na volatilidade condicional dos retornos diários das ações do NSE. Os modelos TGARCH e EARCH não mostram evidências de assimetria nos retornos diários do NSE. No entanto, não houve evidência de volatilidade condicional para GSE-CI. Os dois mercados são ineficientes e, embora os efeitos do dia da semana sejam irrelevantes na tomada de decisões de investimento do GSE, ele é relevante para o NSE.	18
Gbede, J.M., Peprah, J.A.	Dados do preço de fecho diário dos Índices GSE-CI e NSE-20 para o período de 4/1/2005-31/12/2014	O objetivo do artigo é o de examinar o efeito do dia da semana e a volatilidade nos retornos na Bolsa de Valores de Gana (GSE) e na Bolsa de Valores de Nairobi (NSE)	Para examinar a volatilidade nos retornos, o estudo adotou modelos heterocedásticos condicionais autoregressivos generalizados (GARCH) que permitem que as variâncias dos erros sejam dependentes do tempo.	Os resultados revelam que as séries de retorno dos futuros de soja apresentam características de volatilidade típicas de uma série temporal financeira.	7
Musunuru, N.	preços de liquidação diários para contratos de futuros de soja para o período de 4/1/1993-31/5/2013	O objetivo do artigo é o de examinar a presença de persistência de volatilidade e assimetria de notícias nos dados de futuros de soja	Modelos GARCH	Para toda a amostra, existe um fenómeno significativo de agrupamento no comportamento de investimento de três investidores institucionais, e o impacto devido a uma mudança no conteúdo das notícias mostra assimetria e efeitos de alavancagem significativos. Um fenómeno assimétrico também pode ser visto no aspecto das notícias internacionais, respondidas por investidores institucionais estrangeiros.	1
Yang, T.-Y., Yang, Y.-T.	Período de 2/1/2001-31/10/2012	Este artigo usa dados diários para investigar o comportamento de investidores institucionais no mercado de ações de Taiwan. Adotando os modelos TGARCH e EGARCH para testar várias notícias.	Modelo TGARCH e EGARCH	O impacto da crise sobre a volatilidade e o efeito de alavancagem foi significativo nos mercados de ações de diferentes nações, mas a direção do impacto foi mista.	2
Rastogi, S.		Este artigo analisa e compara a volatilidade antes e depois da crise financeira de 2008	Modelo TGARCH e EGARCH	Das doze séries de metais não ferrosos, incluindo à vista e futuros, TGARCH captura efeitos assimétricos em sete séries e EGARCH captura efeito de alavancagem em dez séries.	17
Gil-Alana, L.A., Tripathy, T.	Período de 1/1/2009-31/6/2012	Este artigo trata da análise da persistência da volatilidade e do efeito de alavancagem em seis séries de metais não ferrosos à vista e futuros na Índia.	A persistência da volatilidade foi determinada em toda a classe de modelos ARCH / GARCH. O efeito de alavancagem foi testado usando os modelos TARCH e EGARCH.	Os autores encontraram evidências de PTM que é acompanhado por forte volatilidade condicional e efeitos fracos de assimetria.	23
Lai, B., Joseph, N.L.	Período de Janeiro de 1986 a Março de 2005	Este estudo empírico examina o comportamento do Pricing-To-Market (PTM) de 20 setores de exportação do Reino Unido.	Modelo TGARCH e EGARCH	Os autores encontraram evidências de assimetrias da forma EGARCH para a produção industrial dos Estados Unidos, assimetrias de TGARCH para a produção industrial alemã, japonesa e americana, e de tal forma que a variância da produção é sempre maior após choques negativos na produção do que após choques positivos da mesma magnitude.	0
McMillan, D.G., Speight, A.E.H.	Período de Fevereiro 1968 a Fevereiro de 1996	Este artigo relata detalhes de testes de presença de assimetrias de variância condicional nas taxas de crescimento das séries mensais da produção industrial internacional.	Modelo TGARCH e EGARCH		4

Foi utilizada a plataforma SCOPUS de forma a obter literatura existente sobre a temática em estudo, tendo sido introduzidas as seguintes *keywords*: *volatillity*, *asymmetry*, TGARCH e EGARCH. Os resultados foram refinados pelo tipo de documento Artigo e, pelas áreas de Economia, Econometria e Finanças e, Negócio, Gestão e Contabilidade, tendo sido obtidos 9 artigos.



Nguyen & Nguyen (2019), mediram a volatilidade do preço das ações na bolsa de valores de Ho Chi Minh (HSX) usando os modelos simétricos (GARCH e GARCH-M) e assimétricos (EGARCH e TGARCH), os resultados mostraram que a volatilidade dos retornos das ações tem um grande impacto nos movimentos do mercado de futuros sob o impacto de choques, enquanto a volatilidade assimétrica aumenta o risco de mercado, aumentando assim a atratividade do mercado de ações.

Rastogi (2014), analisou e comparou a volatilidade antes e depois da crise financeira de 2008 usando o modelo TGARCH e EGARCH tendo concluído que o impacto da crise sobre a volatilidade e o efeito de alavancagem foi significativo nos mercados de ações de diferentes nações, mas a direção do impacto foi mista.

Gil-Alana & Tripathy (2014), analisaram a persistência da volatilidade e do efeito de alavancagem em seis séries de metais não ferrosos à vista e futuros na Índia. A persistência da volatilidade foi determinada em toda a classe de modelos ARCH/GARCH e, o efeito de alavancagem foi testado usando os modelos TARCH e EGARCH. Das doze séries de metais não ferrosos, incluindo à vista e futuros, o modelo TGARCH capturou efeitos assimétricos em sete séries e o modelo EGARCH capturou o efeito de alavancagem em dez séries.



Dados e Metodologia

Dados

Com o objetivo de compreender qual o melhor modelo de volatilidade, ou seja, o que melhor prevê a volatilidade futura, recorreremos à análise prática.

Para isso, usamos dados de fecho diários do índice Dow Jones Industrial, no período entre 23 de agosto de 1988 a 22 de agosto de 2000, obtendo 3130 observações.

Os referentes dados foram fornecidos pelo Docente, da Unidade Curricular Finanças Aplicadas, Doutor Carlos Pinho.

Metodologia

Considerando, P_t o preço do ativo no momento t e sendo o retorno logarítmico do ativo no período $t-1$ a t , dado por: $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$.

A média e a variância serão definidas de forma condicional, ou seja, o seu valor é condicionado pelo valor nos períodos de tempo anteriores. Assim, a média condicional é definida por:

$$m_t = E_{t-1}[r_t].$$

Enquanto que a variância condicional é dada por:

$$h_t = E_{t-1}[(r_t - m_t)^2],$$

onde $E_{t-1}[u]$ corresponde à expectativa de uma dada variável u , ter em conta a informação definida durante o período $t-1$.

Sem ocorrer perda de generalidade, o R_t é dado por:

$$R_t = m_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t,$$

onde, $E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0$ e $V_{t-1}[\varepsilon_t] = 1$.

A condição de variação do processo e a distribuição dos retornos é um dos motivos de alerta. De acordo com a definição, a distribuição de ε é central. E o modelo, por vezes, assumirá: $\{\varepsilon_t\} \sim i. i. d. F(\cdot)$, onde F corresponde à função de distribuição acumulada de ε .



Os momentos incondicionais também podem ser definidos. Nestes casos a média e a variância são dados por:

$$\mu = E[r_t]$$

e

$$\sigma^2 = E[(r_t - \mu)^2],$$

e a distribuição incondicional é dada por:

$$(r_t - \mu)/\sigma \sim G,$$

onde G corresponde à função acumulada dos retornos normalizados.

O modelo GARCH (complementado a partir do modelo ARCH), considera que a variância dos retornos é condicional (o seu valor no período t é influenciado pelos valores dos períodos anteriores, t-1).

Os modelos de rutura estrutural multifractais ou rutura estrutural estocástica consideram que as distribuições são incondicionais, o que implica que sejam frequentemente reformulados para permitirem dar previsão das relações.

Os momentos mais elevados de cada processo observam-se facilmente nos modelos de volatilidade.

No modelo incondicional, a skewness e kurtosis são definidas por, respetivamente:

$$\xi = \frac{E[(r_t - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

e

$$\zeta = \frac{E[(r_t - \mu)^4]}{\sigma^4}.$$

No modelo condicional, já são definidas por:

$$s_t = \frac{E_{t-1}[(r_t - m_t)^3]}{h_{t-1}^{3/2}}$$
$$k_t = \frac{E_{t-1}[(r_t - m_t)^4]}{h_{t-1}^2}$$

A variância do retorno, pode ser medida através de uma mudança proporcional, definida por:



$$\text{variance return} = \frac{h_t - h_{t-1}}{h_{t-1}}$$

Esta variância de retorno pode ser prevista ou ser resultado de inovação. A volatilidade da variância (VoV) é o desvio-padrão desta inovação, e é diretamente relacionada com a volatilidade dos preços:

$$\text{VoV} = \sqrt{V(\text{variance return})}.$$

O modelo também gerará um termo estrutura da volatilidade, definido por $h_{t+k|t} \equiv E_t[r_{t+k}^2]$, ou seja, o termo da estrutura da volatilidade é o desvio-padrão da previsão dos retornos começados no período t. Então, um ativo com vencimento no período t+k, é definido por:

$$v_{t+k|t} \equiv \sqrt{V_t\left(\sum_{j=1}^k r_{t+j}\right)} \cong \sqrt{\sum_{j=1}^k E_t(r_{t+j}^2)}$$

Este termo resume as previsões das propriedades dos segundos momentos. Estas previsões permitem definir facilmente as características específicas dos processos de volatilidade.

-Tipos de modelos de volatilidade

Essencialmente existem 2 classes de volatilidade, a primeira define a variância condicional diretamente como uma função observável (modelos ARCH e GARCH), enquanto que a segunda classe, refere-se a modelos de volatilidade estocástica que não têm apenas por base as funções observáveis.

Um exemplo de um modelo de volatilidade estocástica é:

$$\begin{aligned} r_t &= m_t + \sqrt{v_t} \varepsilon_t \\ v_t &= \omega v_{t-1}^\beta \exp(\kappa \eta_t) \\ r_t &= m_t + \sqrt{v_{1,t}} \varepsilon_t. \end{aligned}$$

O v , não pode ser a variância condicional, porque não é apenas a função da informação dos retornos passados.



Isto deve-se a existir, 2 choques e apenas 1 é observável, assim, o v anterior e o atual nunca serão observados com precisão. A variância condicional é facilmente definida, mas difícil de calcular.

Os modelos de volatilidade latente podem ser facilmente elaborados, mas são difíceis de calcular e prever:

$$r_t = m_t + \sqrt{v_t} \varepsilon_t$$

$$\vec{v}_t = f(\vec{v}_{t-1}, \vec{\eta}_t)$$

$$\begin{matrix} \varepsilon \\ \vec{\eta} \end{matrix} \sim G$$

-Fatores de volatilidade aplicados ao preço dos ativos

Os fatores aplicados à volatilidade dos preços dos ativos financeiros têm sofrido alterações com o passar do tempo. Os modelos de volatilidade devem possuir algumas variáveis como a persistência, a reversão à média e ainda ter em conta a influência de variáveis exógenas.

- Persistência na volatilidade

Grandes alterações no preço de um ativo levam à ocorrência de grandes mudanças, enquanto que as pequenas alterações provocam pequenas mudanças.

A aglomeração de pequenos e grandes movimentos foi uma das primeiras características documentadas no processo de volatilidade do preço dos ativos. No entanto, a volatilidade futura esperada pode vir a ser influenciada por estas aglomerações.

Deste modo, a persistência da volatilidade, pode ser definida por:

$$h_{t+k|t} \equiv E_t[(r_{t+k} - m_{t+k})^2]$$

A volatilidade futura é afetada pelos retornos atuais. Considera-se que a volatilidade é persistente se os retornos atuais tiverem uma elevada influência na variação da previsão no futuro. A persistência futura é definida por:



$$\theta_{t+k|t} = \frac{\partial h_{t+k|t}}{\partial r_t^2}$$

Este é um número dimensional, porque os retornos quadrados e variância condicional estão nas mesmas unidades.

Uma medida parecida, é a persistência cumulativa que corresponde ao impacto de um choque no retorno na variância média do retorno do ativo no período $t+k$. Sendo definida por:

$$\phi_{t+k|t} = \frac{\partial \left(\frac{1}{k} (h_{t+k|t} + h_{t+k-1|t} + \dots + h_{t+1|t}) \right)}{\partial r_t^2} = \frac{1}{k} (\theta_{t+k|t} + \theta_{t+k-1|t} + \dots + \theta_{t+1|t})$$

De acordo com a resposta dos preços das opções no longo prazo é proposto que os modelos de volatilidade tenham persistência cumulativa significativa um ano no futuro. Também é de notar a importância da “meia-vida” da volatilidade, isto é, o tempo que demora para a volatilidade se movimentar metade do caminho para a média incondicional, após o desvio, sendo definida por:

$$\tau = k: |h_{t+k|t} - \sigma^2| = \frac{1}{2} |h_{t+1|t} - \sigma^2|$$

- Volatilidade e reversão à média

Um período de elevada volatilidade levará a uma volatilidade mais semelhante à normal, enquanto que um período de baixa volatilidade levará a um aumento.

A reversão da média ocorre quando existe um nível normal de volatilidade, onde a volatilidade, eventualmente, regressará. As previsões de volatilidade no longo prazo devem regressar ao mesmo nível normal de volatilidade. Apesar de muitos considerarem esta uma das características da volatilidade, esta pode diferir do normal nível de volatilidade e ser constante apesar de todas as mudanças.

A reversão à média implica que as informações atuais não influenciem a previsão no longo prazo:

$$\text{plim}_{k \rightarrow \infty} \theta_{t+k|t} = 0, \text{ para todos os } t.$$



Designado também por:

$$\text{plim}_{k \rightarrow \infty} h_{t+k|t} = \sigma_t^2 < \infty, \text{ para todos os } t.$$

- Inovações podem ter um impacto assimétrico na volatilidade

Alguns modelos de volatilidade supõem que a volatilidade condicional de cada ativo é afetada simetricamente por inovações positivas e negativas. Um exemplo é o modelo GARCH, que nos diz que a variância influencia o quadrado da inovação desfasada não tendo em conta esse sinal.

Nos retornos das ações, os choques positivos e negativos não terão o mesmo impacto. Esta assimetria deve-se ao efeito alavanca, uma vez que consoante o preço desce a sua relação dívida/património irá aumentar o que leva ao aumento da volatilidade dos retornos. Pode também ser admitida para o prémio de risco, onde um aumento da volatilidade leva à diminuição da procura de uma ação, derivado à aversão ao risco. Uma descida no valor das ações levará a um aumento na volatilidade.

Alguns autores defendem que a volatilidade está negativamente relacionada com os retornos das ações, pois quando as taxas diminuem, os preços aumentam tornando as taxas menos voláteis. Por outro lado, se as taxas diminuïrem, os preços irão aumentar e as taxas ficam menos voláteis. Isto ocorre devido à correlação entre o choque nos retornos e a volatilidade.

- A influência da variável exógena na volatilidade

Existem várias variáveis que podem dar informações sobre a volatilidade e também podem ocorrer eventos que a influenciem diretamente. Estes eventos pode ser anúncios macroeconómicos, anúncios da empresa, e podem ter efeito logo no dia em que ocorrem.

Alguns autores determinaram que o anúncio de dados macroeconómicos de determinado país poderá influenciar os mercados financeiros.



Alterações recentes nos preços da Bitcoin levam a períodos de grande volatilidade devido ao facto de ser altamente especulativo, mais volátil e mais suscetível a bolhas especulativas. É essencialmente mais usada como ativo do que como moeda.

- Heavy Tails

Em todos os modelos de volatilidade, as estimativas de kurtosis variam entre 4 a 50, ocorrendo assim uma elevada não normalidade. O que leva à verificação de distribuições incondicionais, estando assim perante Heavy Tails.

A relação entre a densidade condicional e incondicional dos retornos também pode revelar a origem de Heavy Tails.

Se a densidade condicional for Gaussian, a densidade incondicional terá excesso de kurtosis, visto que existe uma combinação de densidades de Gaussian com diferentes volatilidades. No entanto, a densidade em si não é Gaussian.

Os retornos podem satisfazer os teoremas do padrão de valores extremos, dependendo da dependência da volatilidade.

- Avaliação prevista

A eficácia de uma previsão de volatilidade é um ponto difícil, visto que nem a sua própria estabilidade se verifica. Assim, o método mais consistente dos modelos estimados consiste em dividir o retorno pela previsão com um desvio de forecast e após isso aplicar qualquer tipo de teste para verificar se o quadrado da variável é ou não previsível.

No caso de um período, este é referente à regressão dos retornos ao quadrado sobre uma constante e a variação condicional. Esta equação permite adicionar várias previsões para uma melhor definição:

$$r_t^2 = a + bh_t + u_t$$

Apesar de ser possível, não é recomendado, uma vez que o r é heterocedástico e o r^2 será ainda mais. A regressão será ineficiente e terá erros. Uma correção para este erro



consiste em dividir ambos os lados por h , o que nos levará exatamente à abordagem original.

Em termos de desvantagem destaca-se também o facto de o r^2 ser uma estimativa com ruídos da volatilidade que queremos estimar. O que nos leva ao máximo que o r^2 pode ser calculado através desta regressão ser um valor muito baixo. No entanto, a volatilidade pode ser utilizada em períodos mais longos (semanal ou mensal). Quando não existem períodos de sobreposição, utilizam-se amostras mais pequenas e se existirem dados sobrepostos, o erros-padrão torna-se problemático.

Outra das desvantagens é o facto de medir o nível de erros de variação em alternativa aos erros proporcionais mais realistas, avaliando assim principalmente os desempenhos para altas volatilidades.



Análise de Resultados

- Sumário dos dados

A figura 1 e 2 mostra os gráficos dos preços e retornos do índice ao longo do período da amostra. Como mostra a tabela 1, os dados utilizados no presente trabalho são compostos por 3130 observações. O valor reduzido da média indica que os retornos, em média, geraram 0,05€ por dia. O desvio-padrão diário foi de 0,9084 implicando uma variância de 0,8251 o que resulta numa volatilidade anualizada de 14,42%. O valor do coeficiente de assimetria indica que a distribuição dos retornos é negativamente desviada, como também se pode observar pelo histograma da figura 3 onde as barras mais altas se encontram à esquerda do 0. Como se pode observar pelo valor do coeficiente de achatamento bastante maior que 3, a distribuição dos retornos não é normal. Isto fica comprovado pelo valor da estatística de Jarque-Bera elevado em conjunto com um *p-value* de 0 que permite recusar a hipótese de os retornos serem normalmente distribuídos.

Tabela 1 - Estatísticas sumárias dos Retornos do índice Dow Jones

N	3130
Média	0,055037
Desvio-Padrão	0,908479
Mínimo	-7,45487
Máximo	4,860497
Assimetria	-0,52662
Achatamento	9,047314
Jarque-Bera	4914,009
<i>P-value</i>	7,14E-93

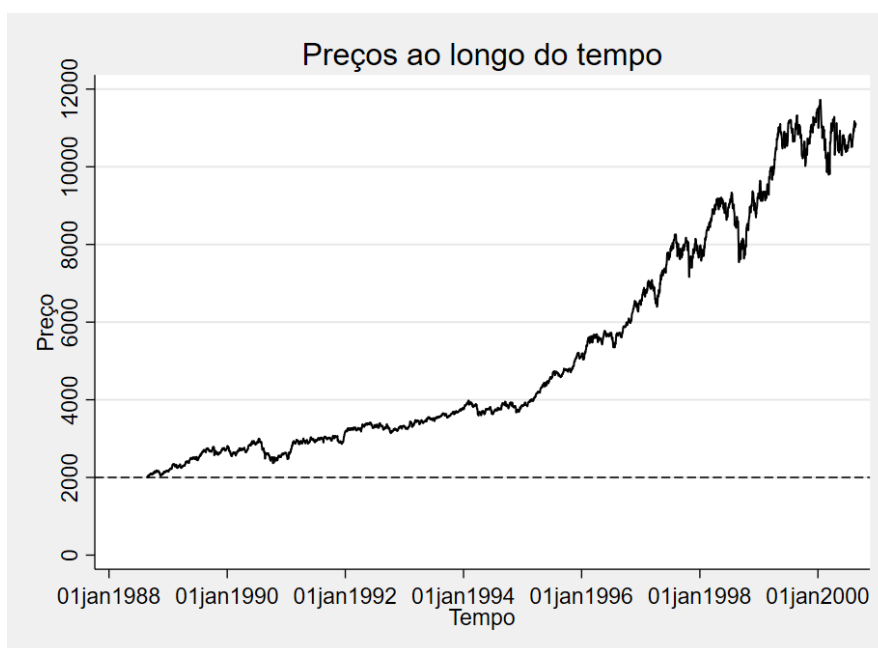


Figura 1 – Evolução dos preços ao longo do tempo

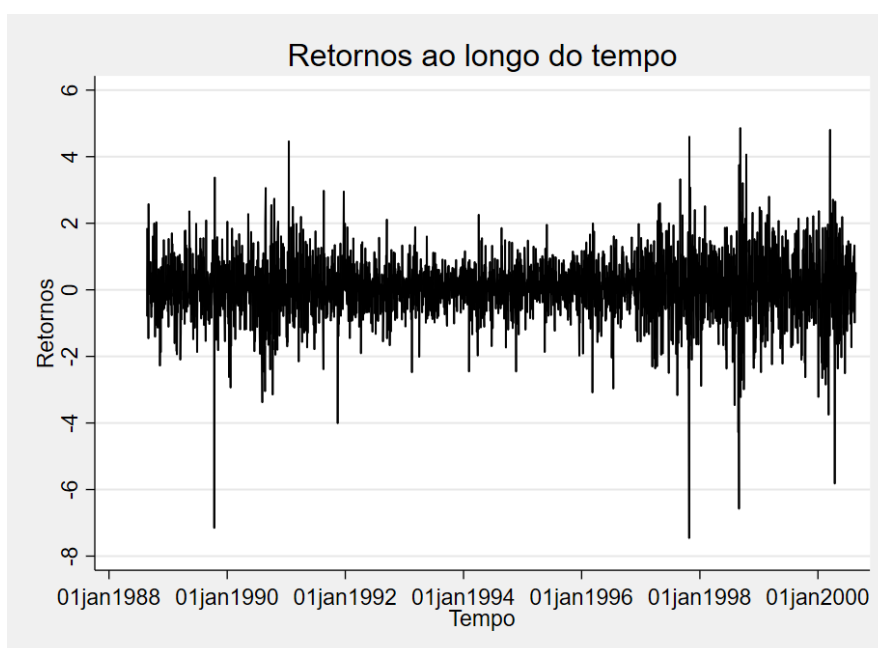


Figura 2 - Retornos ao longo do tempo

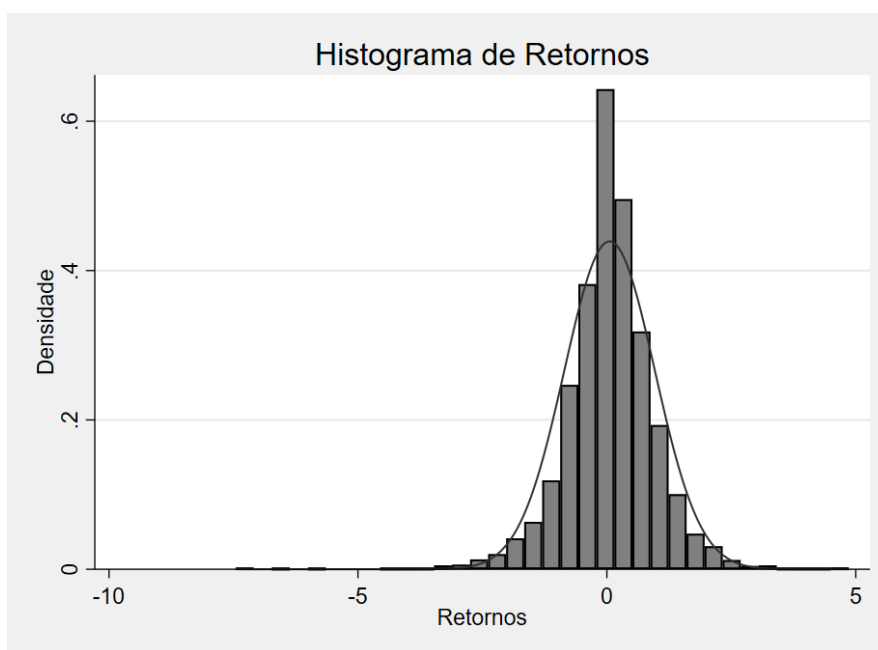


Figura 3 - Estimação dos retornos

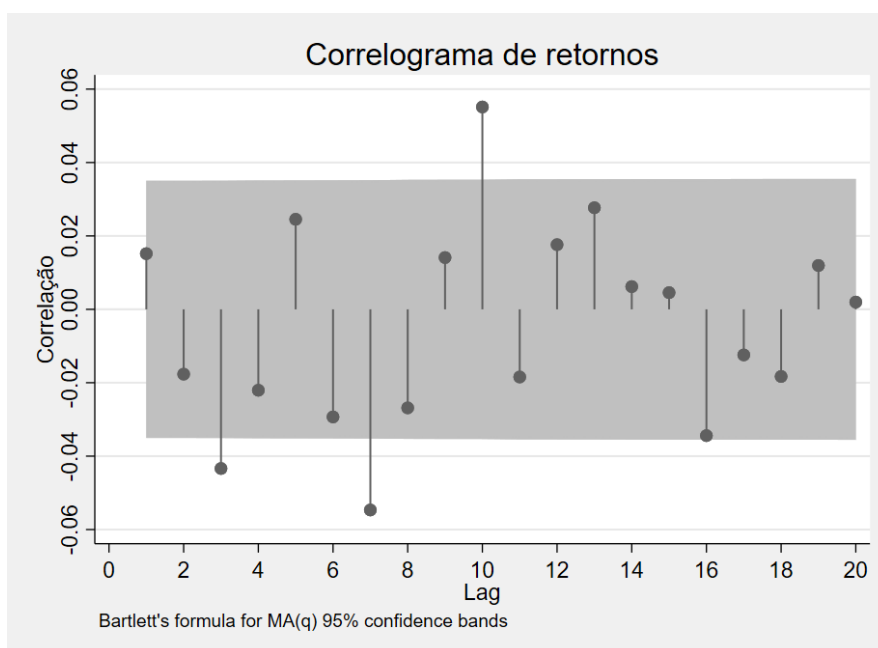


Figura 4 - Correlograma dos retornos

Ao analisar os correlogramas dos retornos, apresentados na figura 4, é possível retirar que existem apenas dependências fracas na média da série. Já o correlograma presente na figura 5, indica uma dependência substancial na volatilidade dos retornos.

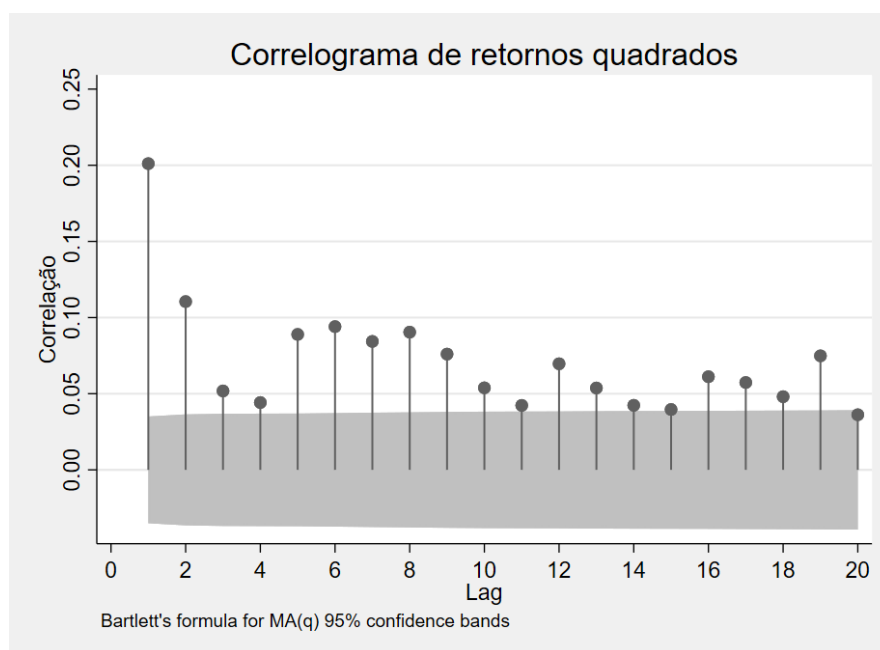


Figura 5 - Correlograma dos retornos quadrados

- Modelos de volatilidade

Utilizando o critério de informação de *Schwarz* chegamos à conclusão de que o melhor modelo na classe $GARCH(p, q)$ era $GARCH(1,1)$, sendo definido por:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t-1} - \mu)^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

Os resultados para o modelo $GARCH(1,1)$ estão presentes na tabela 2. Estes resultados indicam que o modelo aparenta ter uma longa memória visto que a soma entre α e β é próxima de 1 ($\alpha + \beta = 0,9916$) resultando numa volatilidade de meia-vida de 84 dias. No entanto, o facto da soma ser menor do que 1 indica que mesmo demorando muito tempo, a volatilidade volta para a sua média. A média incondicional do modelo $GARCH(1,1)$ é calculada como o quociente entre ω e a diferença entre 1 e a soma de α e β . Para o índice Dow Jones o valor é de 0,8538 o que implica que a média da volatilidade anualizada é de 14,54%, muito próximo do valor calculado a partir da tabela 1 (14,42%). Na figura 6 é apresentado um gráfico da volatilidade anualizada durante o período da amostra.

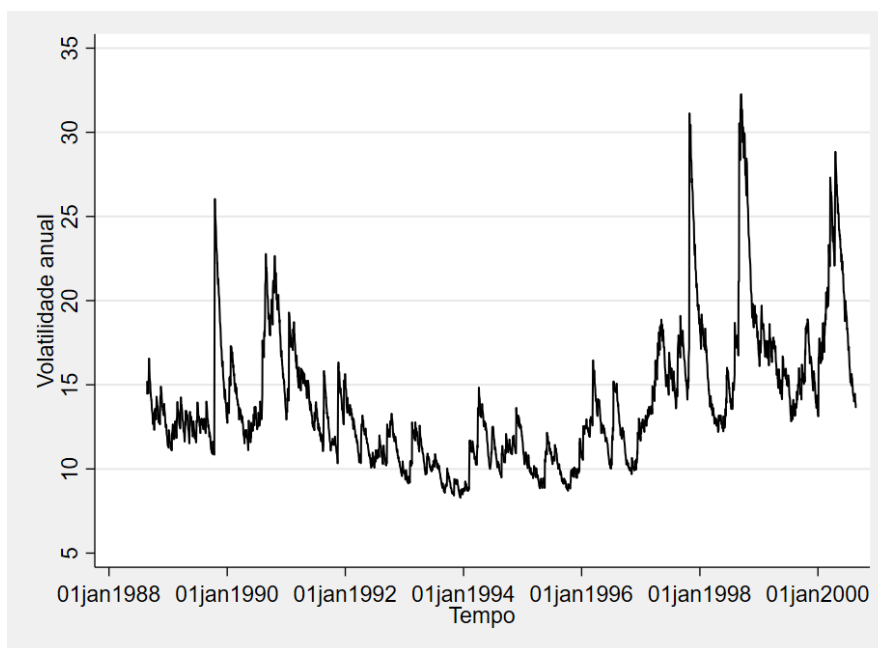


Figura 6 - Volatilidade condicional estimada usando um modelo GARCH(1,1).

Tabela 2 - Resultados do modelo GARCH(1,1)

	Coefficiente	Erro-padrão
Constante	0,05955196	0,014686629
ω	0,007172096	0,001445563
α	0,037138334	0,003028789
β	0,954579249	0,004214367

- Modelo assimétrico de volatilidade

O modelo $TARCH(1,1,1)$ foi, também, estimado e os resultados estão presentes na tabela

3. Este modelo é definido por:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t-1} - \mu)^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} + \sum_{k=1}^r \delta_{t-k} \gamma_k (R_{t-k} - \mu)^2$$

Sendo o valor do coeficiente γ negativo, indica que uma inovação positiva tem um impacto maior do que uma inovação negativa. Na figura 7 é apresentado um gráfico da volatilidade anualizada durante o período da amostra.



Tabela 3 - Resultados do modelo TARCH (1,1,1)

	Coefficientes	Erro-padrão
Constante	0,05097685	0,015079768
ω	0,01672446	0,002276496
α	0,075745159	0,005733038
γ	-0,060891206	0,00798439
β	0,932868052	0,006985174

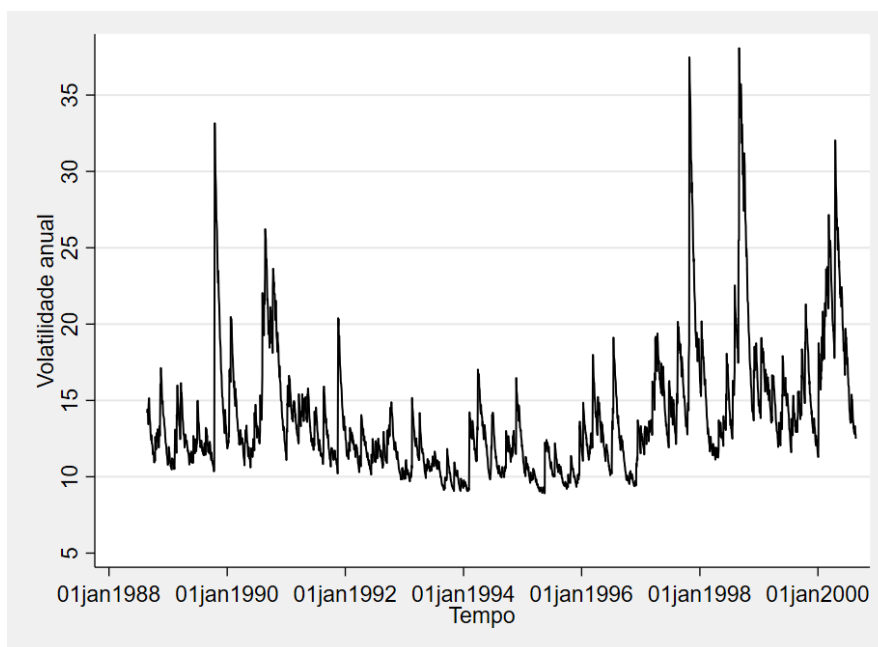


Figura 7 - Volatilidade condicional estimada usando um modelo TARCH (1,1,1)

- Um modelo com regressores de volatilidade exógenos

Um outro modelo que foi testado foi o $GARCH(1,1) - X$, onde X é o regressor exógeno que neste caso é a Taxa de bilhetes do Tesouro dos Estados Unidos, que pode ser definido como:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t-i} - \mu)^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} + \varphi X_{t-1}$$



A taxa T-bill está correlacionada com o custo do empréstimo às empresas, podendo assim transportar informação relevante para a volatilidade do índice Dow Jones. Como é possível observar pelo valor do coeficiente de ϕ na tabela 5, o impacto da taxa T-bill é elevado. O sinal positivo sobre este coeficiente indica que as taxas de juro elevadas estão geralmente associadas a níveis mais elevados de volatilidade no retorno de ações. Na figura 8 é apresentado um gráfico da volatilidade anualizada durante o período da amostra.

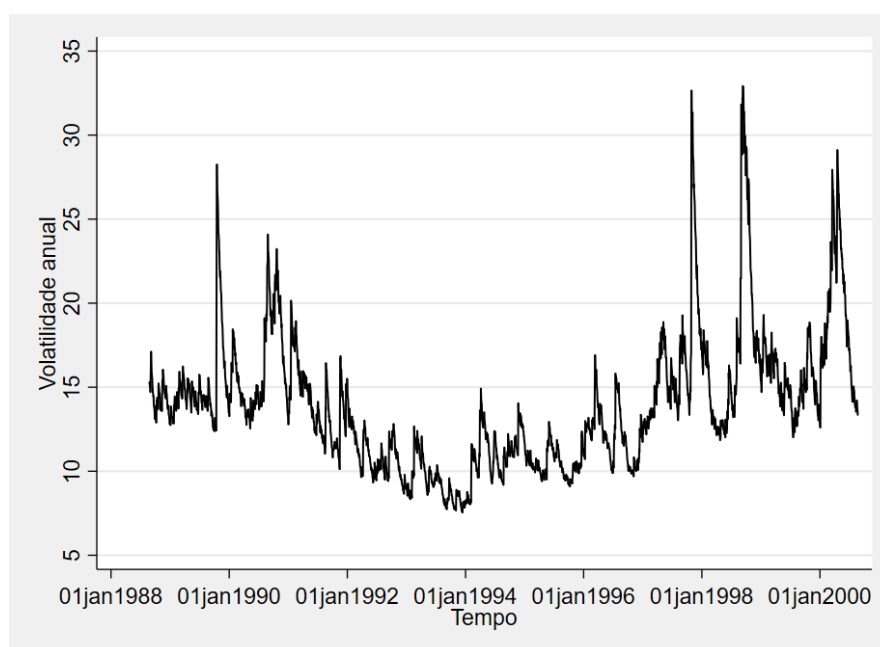


Figura 8 - Volatilidade condicional estimada usando um modelo GARCH (1,1) - X

Tabela 4 - Resultados do modelo GARCH(1.1)-X

	Coeficientes	Erro-padrão
Constante	0,060081015	0,014429806
ω	-5,491952673	0,254792147
α	0,043143103	0,00373141
β	0,941694487	0,005866859
ϕ	0,199680175	0,022220975

- Agregação de modelos de volatilidade



Na tabela 6 apresentamos o modelo $GARCH(1,1)$ para diferentes frequências temporais. Estes resultados indicam que a frequência da amostra afeta os valores obtidos. A meia-vida implícita da volatilidade de cada modelo (em dias) é 84, 50, 110, 106 e 303.

Tabela 5 - Parâmetros estimados para diferentes frequências, de acordo com o modelo $GARCH(1,1)$

	Dados diários	Período de 2 dias	Período de 3 dias	Período de 4 dias	Dados semanais
Constante	0,059106416	0,117885834	0,167747206	0,219774953	0,262577845
ω	0,007111305	0,027202038	0,025921655	0,025465888	0,020720089
α	0,036994975	0,065887545	0,063775579	0,045594975	0,040388469
β	0,954814026	0,920551908	0,929944177	0,947943617	0,95732828



Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo caracterizar um bom modelo de volatilidade e a sua habilidade de prever e capturar factos comuns sobre volatilidade condicional. Dentro destes factos temos como por exemplo, a persistência na volatilidade, o impacto assimétrico sobre inovações de retorno negativo em contraste com retorno positivo e a possibilidade de variáveis exógenas ou pré-determinadas terem uma influência significativa sobre a volatilidade. Para este estudo utilizamos 12 anos de dados diários do índice Dow Jones. A volatilidade condicional deste índice possuía uma volatilidade de meia-vida de 84 dias, o que indica ser bastante persistente. Verificou-se que uma inovação de retorno positiva tinha um impacto na variação condicional de cerca de cinco vezes maior do que uma inovação negativa. Adicionalmente observou-se que o impacto da taxa T-Bill foi considerado positivamente correlacionado com a volatilidade, o que implica que taxas de juro mais elevadas levam a uma maior equidade volatilidade de retorno. Por fim, os resultados do modelo GARCH mostraram-se dependentes da frequência da amostra o que representa uma desvantagem deste modelo.



Bibliografia

Gbede, J.M., Peprah, J.A. (2018). Day of the week effect and stock market volatility in Ghana and Nairobi stock exchanges. "Journal of Economics and Finance 42(4), pp. 727-745"

Gil-Alana, L.A., Tripathy, T. (2014). Modelling volatility persistence and asymmetry: A Study on selected Indian non-ferrous metals markets. "Resources Policy 41(1), pp. 31-39"

Lai, B., Joseph, N.L. (2010). Pricing-to-market and the volatility of UK export prices. "Applied Financial Economics 20(18), pp. 1441-1460"

McMillan, D.G., Speight, A.E.H. (1998). Asymmetric volatility in industrial production: some international evidence. "Applied Economics Letters 5(6), pp. 375-381"

Musunuru, N. (2016). Examining Volatility Persistence and News Asymmetry in Soybeans Futures Returns. "Atlantic Economic Journal 44(4), pp. 487-500"

Nguyen, C.T., Nguyen, M.H. (2019). Modeling stock price volatility: Empirical evidence from the Ho Chi Minh City stock exchange in Vietnam. "Journal of Asian Finance, Economics and Business 6(3), pp. 19-26"

Rastogi, S. (2014). The financial crisis of 2008 and stock market volatility - Analysis and impact on emerging economies pre and post crisis. Afro-Asian Journal of Finance and Accounting 4(4), pp. 443-459

Vasileiou, E. (2021). Does the short squeeze lead to market abnormality and antileverage effect? Evidence from the Gamestop case. Journal of Economic Studies (Article in Press)

Yang, T.-Y., Yang, Y.-T. (2015). A study on the asymmetry of the news aspect of the stock market: Evidence from three institutional investors in the Taiwan stock market. Panoeconomicus 62(3), pp. 361-383