Departamento de Física
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação em Física Estatística

2018.06.21

Exame

1. Considera um gás de fotões que se encontram numa caixa cúbica de lado L a uma temperatura T.

a) Deduz uma expressão para o número de estados com energia entre ε e $\varepsilon+d\varepsilon$, $g(\varepsilon)d\varepsilon$. Considerando a unidade de energia $u_\varepsilon=\frac{\hbar c}{L}$ mostra que se pode escrever $g(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{\varepsilon'^2}{2\pi^2}d\varepsilon'$, onde $\varepsilon'=\varepsilon/u_\varepsilon$. Ignora as diferentes polarizações possíveis dos fotões que introduziriam um fator 2 nos resultados.

b) Obtém uma expressão para o número médio de fotões na caixa a uma temperatura T, $\langle N\rangle$.

c) Obtém uma expressão para a energia total média do gás de fotões a uma temperatura T, $\langle E\rangle$.

d) Um plano preto (não-reflector) a temperatura fixa T_a é paralelo a outro plano que se encontra a uma temperatura fixa T_b , com $T_a>T_b$. O fluxo efectivo de energia entre os dois planos no vácuo é $J_0=\sigma_{SB}(T_a^4-T_b^4)$. Um terceiro plano preto é inserido entre os dois e atinge uma temperatura estacionária T_1 . Calcula a temperatura T_1 em termos de T_a e T_b . Calcula o fluxo de energia, J_1 entre os planos na situação final. Considera agora que foram colocados, entre os planos a temperatura T_a e T_b , não um plano mas N planos. Qual o fluxo de energia J_N entre os planos? Qual a dependência de T_i , com $i=1,\ldots,N$, nas temperaturas T_a e T_b ?

Nota: $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{e^x-1}=\zeta(p)\Gamma(p)$ onde $\zeta(p)$ é a função zeta de Riemann que toma valores $\zeta(3)=1.2020569\ldots$ e $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ e $\Gamma(p)$ é a função gama que toma valores $\Gamma(3)=2$ $\Gamma(4)=6$.

2. Considera um gás de fotões que se encontram numa caixa cúbica de lado L a uma temperatura T. Efetua todos os cálculos usando a unidade de energia $u_\varepsilon = \frac{\hbar c}{L}$ e a unidade de temperatura $u_T = u_\varepsilon / k_B$.

a) Cria uma função **function [nestados,energias]=DensidadeEstadosFotoes(nmax)** cujo input é o máximo número quântico (em módulo), em cada direção do espaço, para as componentes do vetor de onda (com condições fronteira periódicas) e cujo output é o número total de estados, **nestados** e um vetor, **energias,** com as energias dos estados. A variável **nmax** foi chamada **nmin** em versões anteriores desta função para partículas materiais. Compara o resultado gráficamente com a expressão fornecida na alínea 1. a) para o número de estados com energia entre entre ε' e $\varepsilon' + d\varepsilon'$

b) O estado de um gás de fotões é completamente especificado pelo número de fotões em cada estado. Seja **np** um vetor de tamanho **nestados** que armazena o número de fotões que se encontra em cada estado. Para fazer uma atualização de Monte Carlo, deste vetor, com o algoritmo de Metropolis a uma temperatura T, pode usar-se a função:

```
function [np]=atualiza_np_estado(np,estado,T,energias)
        dn=2*(randi(2)-1)-1;
        if (np(estado)==0)
           dn=1;
        end
        dE=energias(estado)*dn;
        if (np(estado)>0)
           pa=min([1,exp(-dE/T)]);
           if(np(estado)==1 && dn==-1)
              pa=min([1,2*exp(-dE/T)]);
           end
         else
            pa=min([1,0.5*exp(-dE/T)]);
        end
        if rand(1) < pa
           np(estado)=np(estado)+dn;
        end
  end
```

Explica o algoritmo usado na função. Em particular explica o que representa **dn**, o que representa **pa** e porque tem o valor **pa=min([1,exp(-dE/T)]);** se **np(estado)>1** e **pa=min([1,0.5*exp(-dE/T)])**; se **np(estado)=0**.

c) Faz uma função, **function [energias,np_med,emed2,nestados]=GasFotoes(T,tmax,nmax)** que simula durante um tempo **1.1*tmax,** um gás de fotões a temperatura **T** considerando estados até ±**nmax** e que devolve um vetor com as **energias** dos estados, o número médio de fotões em cada estado, **np_med,** o valor médio da energia ao quadrado, **emed2,** e o número de estados, **nestados.** Nesta função, **e**m cada instante de tempo, todos os estados são atualizados sequencialmente, usando a função **atualiza_estado** mas, o estado de energia nula cujo indice é obtido de **i0=find(energias==0);** tem sempre zero fotões **(é muito importante incluir esta restrição que consiste em não atualizar o número de fotões no estado de energia nula).** No ínicio da simulação não há fotões no sistema. As médias efetuadas para obter as variáveis **np_med** e **emed2 são efetuadas para t>0.1*tmax** de forma a desprezar 10% dos passos de Monte Carlo iniciais para equilibração do sistema.

d) Obtém resultados de simulações para temperaturas entre 2 e 4 em passos de 0.05 com nmin=5; e tmax=1000; Calcula para cada temperatura o número médio de fotões presentes no sistema, a energia total, e a capacidade térmica a volume constante fazendo uma representação gráfica destas quantidades em função da temperatura. Compara os resultados numéricos com as correspondentes expressões analíticas a que se referem as deduções pedidas 1. b) e 1. c).

e) Faz uma função **[nE]=planck(npmed,energias, E)** que calcula a distribuição de Planck, isto é, o número médio de fotões, por unidade de energia, com uma dada energia , **nE,** para valores de energia especificados pelo vetor **E=0:dE:Emax**;