Departamento de Física
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação em Física Estatística

2019.03.27

1º teste

1. Considera um canal de informação em que um bit tem uma probabilidade p de ser transmitido com erro e $1-p$ de ser transmitido sem erro (canal binário simétrico, BSC).

a) Se X for uma variável binária de entrada que toma valor 0 com probabilidade q e 1 com probabilidade $1-q$ e Y a variável correspondente ao bit recebido, determina os valores da probabilidade conjunta $p_{X,Y}(x,y)$. Os valores da função podem ser dados como uma tabela.

b) Mostra a partir de $p_{X,Y}(x,y)$ que:

$p_X(x)=q\,\delta_{x,0}+(1-q)\delta_{x,1}$ e $p_Y(y)=(q(1-p)+(1-q)p)\delta_{y,0}+(qp+(1-q)(1-p))\delta_{y,1}$ onde $\delta_{x,y}$ representa o delta de Kronecker.

c) Mostra que a informação mútua $I_{X,Y}$ se pode escrever na forma:

$I_{X,Y}=(1-p)\log_2(1-p)+p\log_2 p-A\log_2 A-(1-A)\log_2(1-A)$ com $A=q+p-2qp$.

d) Determina a capacidade do canal de informação definida como $C=max_q I_{X,Y}$. Comenta a dependência de C na probabilidade p .

2. Pretende-se fazer uma simulação de um gás de fotões bidimensional, confinado a um quadrado de lado L, usando o algoritmo *Demon*. Os estados de um gás de fotões são especificados pelo número de fotões, $n_{\vec{k}}$ que têm um dado vetor de onda, $k_{x,y}=\frac{\pi}{L}n_{x,y}$ e $n_{x,y}=1,2,\ldots,\infty$. A energia de um fotão com vetor de onda $\vec{k}$ é $E=\hbar ck$ onde c é a velocidade da luz e $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ é a constante de Planck dividida por 2π .

a) Mostra que se a energia total fôr E_0 podemos fazer simulações considerando[1] $n_{x,y}<n_{max}=ceil\left(\sqrt{\left(\frac{2LE_0}{hc}\right)^2-1}\right)$.

b) Escreve um programa para fazer uma simulação de Monte Carlo usando o algoritmo do Demon de um gás de fotões a duas dimensões. Um estado do gás é especificado pelo número de fotões de cada tipo (n_x,n_y) , registado numa matriz **nk** de dimensão $n_{max}\times n_{max}$.

Usa um valor de $n_{max}=min\left(\left[ceil\left(\sqrt{\left(\frac{2LE_0}{hc}\right)^2-1}\right),50\right]\right)$. A variável $nk(n_x,n_y)$ regista o número de fotões com energia $E=\frac{hc}{2L}n$, com $n=\sqrt{n_x^2+n_y^2}$. Considera a unidade de energia, $u_E=\frac{hc}{2L}$, e uma unidade de temperatura, $u_T=u_E/k_B$. Para atualizar o estado do sistema escolhe aleatóriamente um tipo de fotão, $1\leq n_{x,y}\leq n_{max}$ e propõe, com igual probabilidade, aumentar ou diminuir o número de fotões desse tipo em uma unidade. O número de fotões, $nk(n_x,n_y)$, é sempre uma quantidade positiva ou nula. Em cada passo de Monte Carlo consideram-se n_{max}^2 atualizações do estado do sistema. O programa deverá permitir escolher a energia total do sistema E_0 . Considera como estado inicial aquele em que não existem fotões no sistema e $E_D=E_0$. Despreza os `nequi=2000` passos iniciais e calcula médias considerando as `nmedidas=10000` efetuadas nos passos seguintes. É conveniente programar uma função:

`[Emedio,Edmedio]=fprob2b(E0,nequi,nmedidas)` que faz os cálculos para cada valor de E_0 .

c) Calcula numericamente a energia interna, em regime estacionário, do gás de fotões em função da temperatura medida pelo Demon, $T=\frac{\langle E_D\rangle}{k_B}$, e compara com a expressão teórica esperada:

1 A expressão seguinte continha um erro que foi corrigido.

$\langle E\rangle=\frac{4\pi(k_B T)^3 L^2}{(hc)^2}1.20206$. Faz uma representação gráfica das duas quantidades usando as unidades definidas na alínea anterior. Como a energia do Demon não varia continuamente, a expressão $T=\langle E_D\rangle$, em unidades de u_E e u_T é aproximada. Obtêm-se melhores resultados usando $T=\langle E_D\rangle-0.2$. Considera 8 valores de E_0 entre $\sqrt{2}$ e $80\sqrt{2}$. As temperaturas calculadas numéricamente, em unidades de u_T estão no intervalo [0,3].

d) Para uma configuração gerada num dado passo, calcula o número de fotões com energia entre ε e $\varepsilon+d\varepsilon$, $N(\varepsilon, d\varepsilon)$. Para isso convém definir previamente os vetores:

```
E=sqrt(2):sqrt(2):sqrt(nmax^2+1); % define o vetor de energias
ne=zeros(length(E),1); % regista o número de fotões com uma dada energia
iE=zeros(nmax,nmax); % faz a correspondencia entre (nx,ny) e a energia
for nx=1:nmax
   for ny=1:nmax
       iE(nx,ny)=floor((sqrt(nx^2+ny^2)-E(1))/(E(2)-E(1)))+1;
   end
end
```

No final de cada passo, em regime estacionário, calcula-se:

```
for nx=1:nmax
        for ny=1:nmax
            if(iE(nx,ny)<=length(E))
              % acumula valores para calculo de medias
              ne(iE(nx,ny))=ne(iE(nx,ny))+nk(nx,ny);
            end
        end
 end
```

ou seja, acumulam-se o número de fotões com energia dentro de cada intervalo de energia. No final da simulação calcula-se a média: `ne=ne/nmedidas;`

Compara a média, em regime estacionário, desta quantidade com o resultado esperado $N(\varepsilon, d\varepsilon)=\frac{2\pi L^2}{(hc)^2}\frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon$ para 3 temperaturas correspondentes a $E_0=20\sqrt{2}$, $50\sqrt{2}$ e $80\sqrt{2}$. A quantidade $N(\varepsilon, d\varepsilon)$ é a distribuição de Planck para um gás de fotões bidimensional.