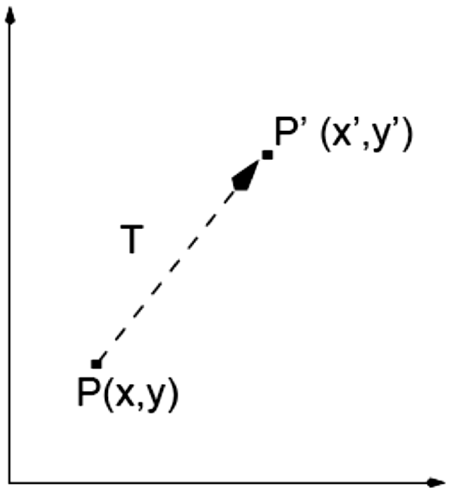
Processamento e Análise de Imagens

Transformações Geométricas

Prof. Alexei Machado
PUC Minas

Translação

Move um ponto para um novo local adicionando valores de translação às coordenadas



$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy$$

ou $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

ou $$\underline{P' = P + T}$$

Escala

Altera o tamanho do objeto multiplicando as coordenadas dos pontos por uma escala

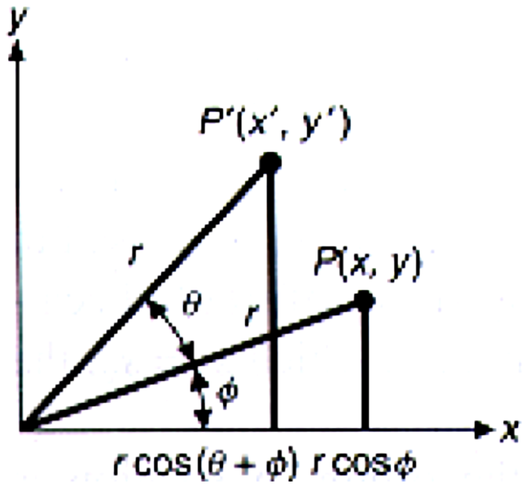
$$x' = x\, s_x,\;\; y' = y\, s_y \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\;\; s_x, s_y > 0 \quad \text{or} \quad \underline{P' = S\;P}$$

Escala

- Escala uniforme X não uniforme:
  - Se $s_x = s_y$, a escala é uniforme caso contrário é não uniforme
- Efeito do fator de escala:
- Se s_x , s_y < 1, o tamanho é reduzido e o objeto se move para mais perto da origem
- Se s_x , s_y > 1, o tamanho é aumentado e o objeto se move para mais longe da origem

Rotação

Gira pontos por um ângulo θ em relação à origem (θ > 0: rotação no sentido anti-horário)



$$cos(\phi) = x/r \text{ or } x = rcos(\phi)$$
$$sin(\phi) = y/r \text{ or } y = rsin(\phi)$$

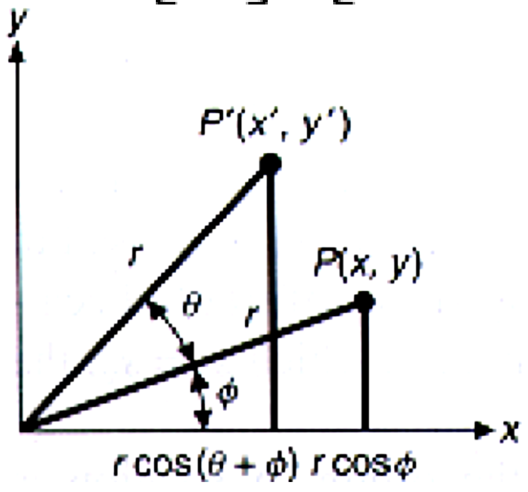
$$cos(\phi+\theta) = x'/r \text{ or } x' = rcos(\phi+\theta) = rcos(\phi)cos(\theta) - rsin(\phi)sin(\theta)$$
$$sin(\phi+\theta) = y'/r \text{ or } y' = rsin(\phi+\theta) = rcos(\phi)sin(\theta) + rsin(\phi)cos(\theta)$$

Rotação

Donde se conclui que:

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta), \quad y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \qquad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \underline{P' = R\ P}$$



Coordenadas Homogêneas

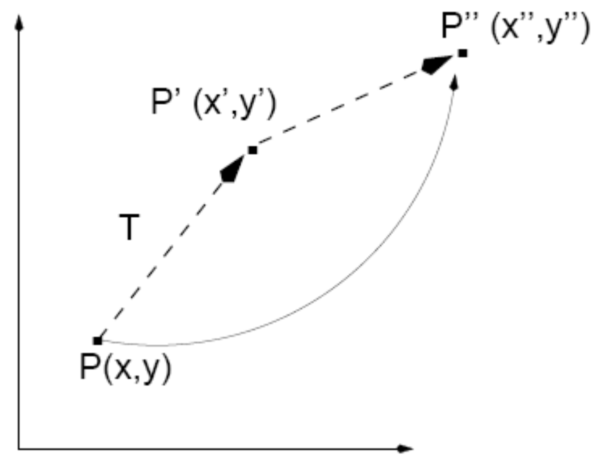
Translação com coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x' = x + dx, \quad y' = y + dy$$

$$\underline{P' = T(dx, dy)\ P}$$

Coordenadas Homogêneas

Translações sucessivas:



$$P' = T(dx_1, dy_1)\ P, \quad P'' = T(dx_2, dy_2)\ P'$$

$$P'' = T(dx_2, dy_2)T(dx_1, dy_1)\ P = T(dx_1 + dx_2, dy_1 + dy_2)\ P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Escala com coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x' = x\ s_x,\ \ y' = y\ s_y$$

$$\underline{P' = S(s_x, s_y)\ P}$$

Coordenadas Homogêneas

Escalas sucessivas:

$$P' = S(s_{x_1}, s_{y_1})\ P, \quad P'' = S(s_{x_2}, s_{y_2})\ P'$$

$$P'' = S(s_{x_2}, s_{y_2})S(s_{x_1}, s_{y_1})\ P = S(s_{x_1}s_{x_2}, s_{y_1}s_{y_2})\ P$$

$$\begin{bmatrix} s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x_2}s_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_2}s_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Rotação com coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = xcos(\theta) - ysin(\theta), \quad y' = xsin(\theta) + ycos(\theta)$$

$$\underline{P' = R(\theta)\ P}$$

Coordenadas Homogêneas

Rotações sucessivas:

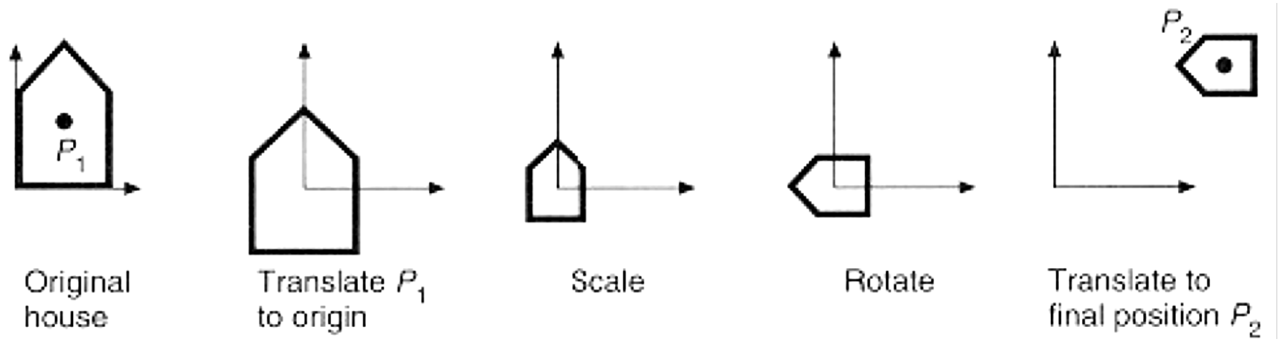
$$P' = R(\theta_1)\, P, \quad P'' = R(\theta_2)\, P'$$

ou $$P'' = R(\theta_1)R(\theta_2)\, P = R(\theta_1 + \theta_2)\, P$$

Composição de transformações

As matrizes de uma série de transformações podem ser concatenadas em uma única matriz

* Transladar P_1 para a origem
* Realizar escala e rotação
* Transladar para P_2



$$M = T(x_2, y_2)R(\theta)S(s_x, s_y)T(-x_1, -y_1)$$

Forma geral de uma matriz de transformação

Representar uma sequência de transformações como uma única matriz de transformação é mais eficiente!

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{Rotação e escala} \quad \text{translação} \\ \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

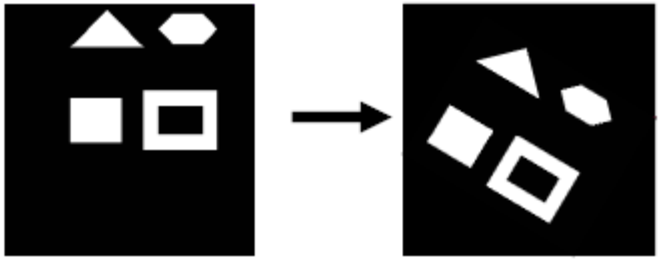
(apenas 4 multiplicações e 4 adições)

Casos especiais de transformação

Transformações rígidas: Envolvem apenas translação e rotação (3 parâmetros)

- Preservar ângulos e comprimentos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



A submatriz superior 2x2 é ortonormal:

$$u_1 = (r_{11}, r_{12}),\ u_2 = (r_{21}, r_{22})$$

$$u_1 . u_1 = ||u_1||^2 = r_{11}{}^2 + r_{12}{}^2 = 1$$

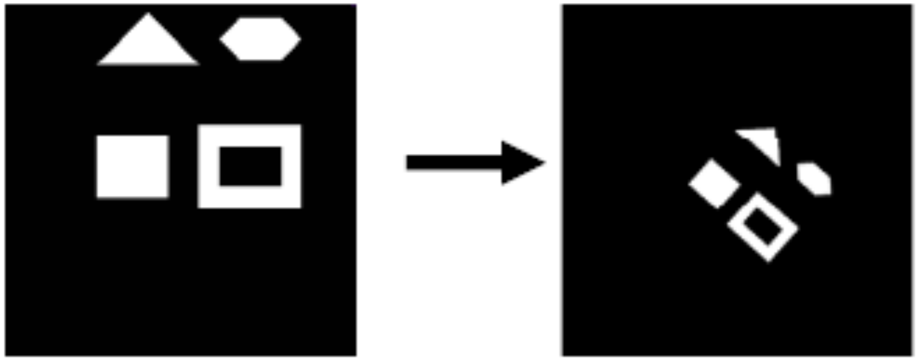
$$u_2 . u_2 = ||u_2||^2 = r_{21}{}^2 + r_{22}{}^2 = 1$$

$$u_1 . u_2 = r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} = 0$$

Casos especiais de transformação

Transformações de similaridade: Envolvem translação, rotação e escala (4 parâmetros)

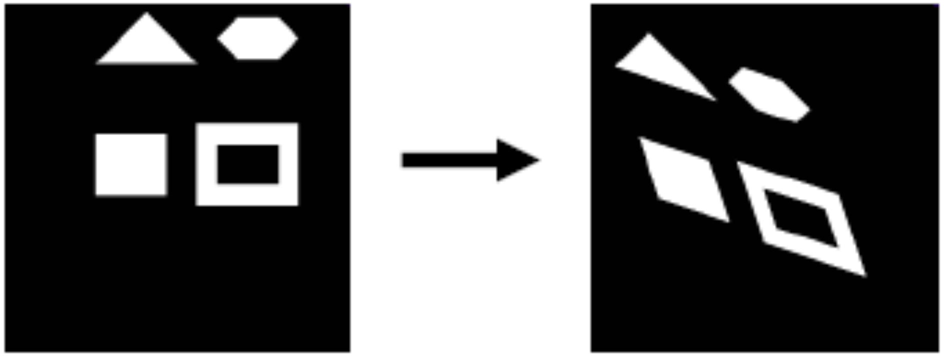
- Preserva ângulos, mas não comprimentos comprimentos



Casos especiais de transformação

Transformações afins: Envolvem translação, rotação, escala e cisalhamento (shear) (6 parâmetros)

- Preserva paralelismo de retas mas não ângulos nem comprimentos



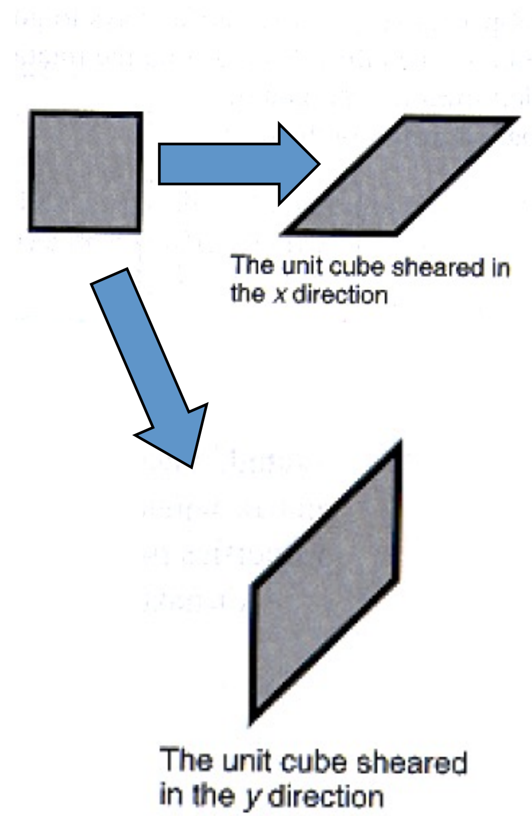
Cisalhamento

- Cisalhamento no eixo x

$$x' = x + ay,\ y' = y \qquad SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cisalhamento no eixo y:

$$x' = x,\ y' = bx + y \qquad SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Espelhamento ou reflexão

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)

Exemplo de espelhamento. (a) Imagem Original. (b) Flip Horizontal. (c) Flip Vertical.