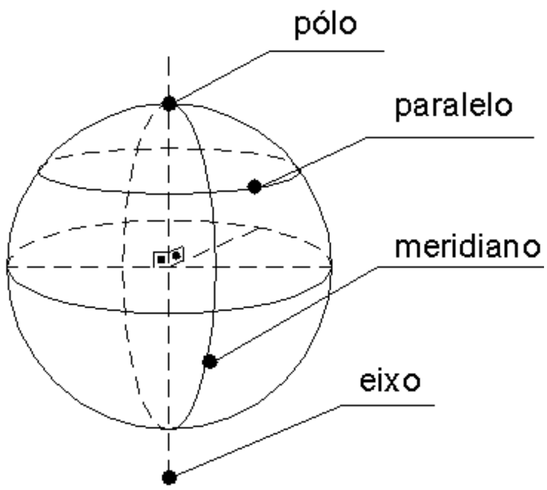
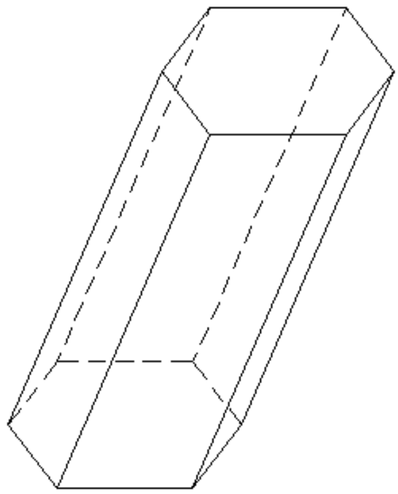
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 1

Geometria Espacial





Série: Matemática III

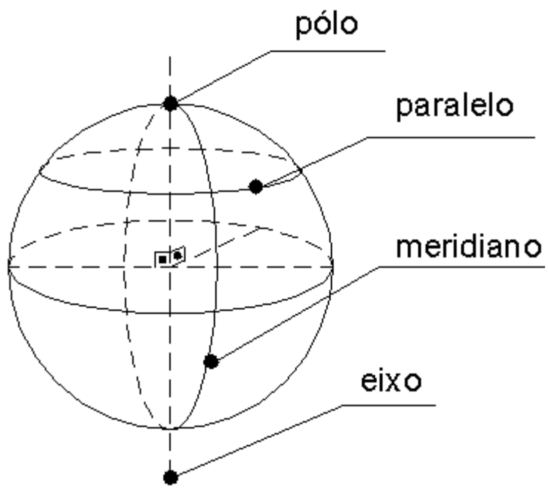
Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

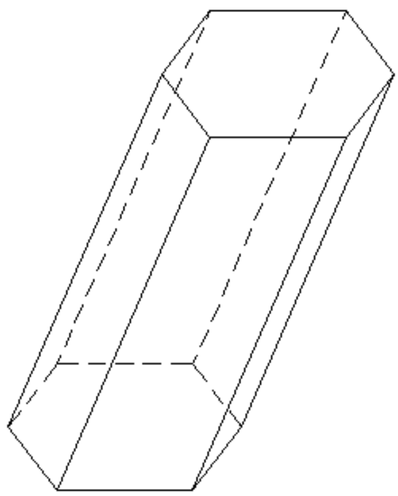
Janeiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 1

<u>Geometria Espacial</u>





Série: Matemática III

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Janeiro de 2020

C532c

Chiapinotto, Elisia L.

Caderno didático 1 : geometria espacial / por Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2004.
84 f. : il. (Série Matemática III)

1. Matemática 2. Geometria plana 3. Polígonos 4. Geometria espacial 5. Poliedros 6. Prismas I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

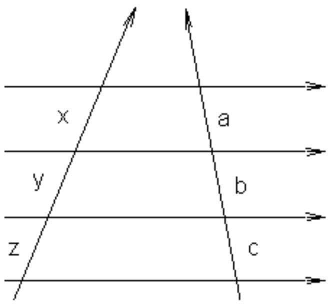
CDU: 514

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

REVISÃO GEOMETRIA PLANA

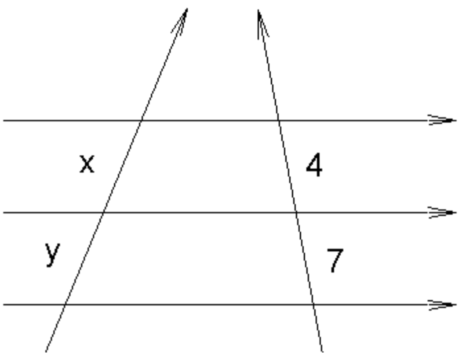
1 TEOREMA DE TALES



$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

Exemplos: 1. Calcule x e y, sabendo que x+y=22.

Resolução:



$$\frac{x}{4}=\frac{y}{7}\Rightarrow\frac{x+y}{4+7}=\frac{x}{4}=\frac{y}{7}$$

$$\frac{22}{11}=\frac{x}{4}=\frac{y}{7}$$

$$\frac{22}{11}=\frac{x}{4}\Rightarrow 11x=22.4$$

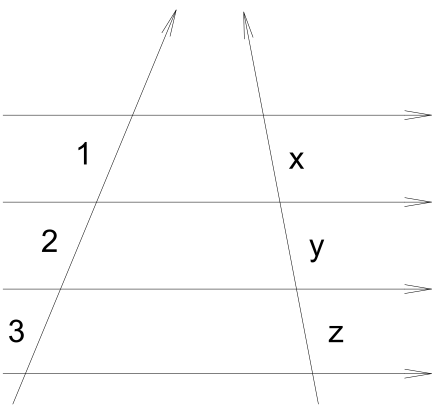
$$x=\frac{22.4}{11}=8$$

$$\frac{22}{11}=\frac{y}{7}\Rightarrow 11y=22.7\Rightarrow y=\frac{22.7}{11}=14.$$

Logo x=8 e y=14.

2. Calcule x, y e z, sabendo que x+y+z=48.

Resolução:



$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

$$\frac{x+y+z}{1+2+3}=\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

$$\frac{48}{6}=\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

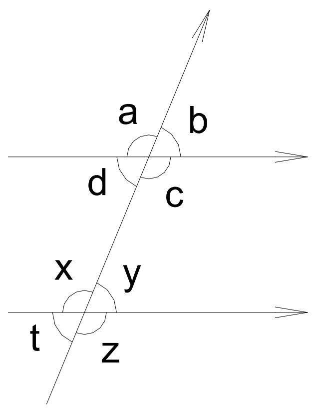
$$\frac{48}{6}=\frac{x}{1}\Rightarrow x=8$$

$$x=\frac{22.4}{11}=8$$

$\frac{48}{6}=\frac{y}{2}\Rightarrow$ y=16; $\frac{48}{6}=\frac{z}{3}\Rightarrow z=24$.

Logo x=8; y=16 e z=24.

1.1 Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

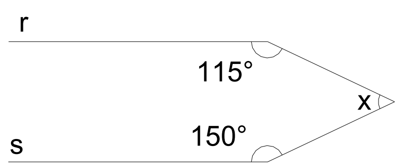


a) Todos os ângulos agudos formados são iguais entre si; ($b=d=y=t$);

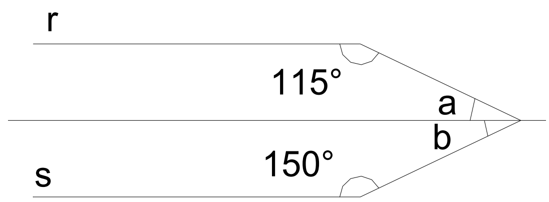
b) Todos os ângulos obtusos formados são iguais entre si; ($a=c=x=z$);

c)Um ângulo agudo mais um ângulo obtuso é igual a 180º; ($b+z=180^\circ$; $d+x=180^\circ$; $a+y=180^\circ$).

<u>Exemplos:</u> 1. Calcule x, sabendo que r e s são paralelas.



Resolução:



$x=a+b$

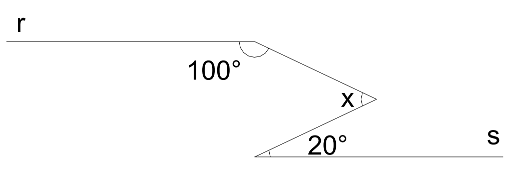
$b+150^\circ=180^\circ \Rightarrow b=30^\circ$

$a+115^\circ=180^\circ \Rightarrow a=65^\circ$

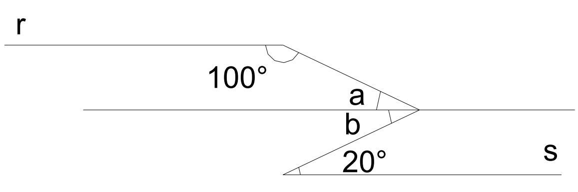
$x=a+b=65^\circ+30^\circ=95^\circ$

Logo $x=95^\circ$.

2. Calcule x, sabendo que r e s são paralelas.



Resolução:



$x=a+b$

$b=20^\circ$

$a+100^\circ=180^\circ$

$a=180^\circ-100^\circ$

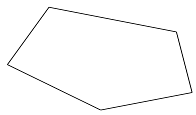
$a=80^\circ$

$x=80^\circ+20^\circ=100^\circ$; Logo $x=100^\circ$.

2 POLÍGONOS

Chama-se Polígono a figura geométrica plana limitada por segmentos de reta consecutivos, que não se cruzam entre si.

Exemplo:



2.1 Classificação dos Polígonos

O polígono que possui:

a) 3 lados se chama triângulo;

b) 4 lados se chama quadrilátero;

c) 5 lados se chama de pentágono;

d) 6 lados se chama hexágono;

e) 7 lados se chama heptágono;

f) 8 lados se chama octógono;

g) 9 lados se chama eneágono;

h) 10 lados se chama decágono

i) 11 lados se chama undecágono;

j) 12 lados se chama dodecágono;

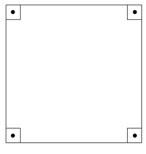
l) 15 lados se chama pentadecágono;

m) 20 lados se chama icoságono.

2.2 Polígono Regular

É o polígono que possui todos os lados iguais e todos os ângulos internos iguais.

Exemplo:



2.2.1 Número de diagonais de um polígono

$d = \frac{n(n-3)}{2}$ onde

d = número de diagonais do polígono;

n = número de lados do polígono.

Exemplos: 1.Calcule o número de diagonais de um dodecágono.

Resolução:

n=12

$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{12(12-3)}{2} = 54$

Logo d=54.

2. Determine o polígono que possui 35 diagonais.

Resolução:

d=35

$35 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 70 = n^2 - 3n$

$n^2 - 3n - 70 = 0$

n=10 ou n=-7 (não pode ser negativo)

Logo n=10 e o polígono é um decágono.

2.2.2 Soma dos ângulos internos de um polígono

$S = 180^\circ(n-2)$ onde, n = número de lados do polígono

Exemplo: Calcule a soma dos ângulos internos de um hexágono.

Resolução:

n=6

$S = 180^\circ(n-2) \Rightarrow S = 180^\circ(6-2) \Rightarrow S = 720^\circ$

Logo a soma dos ângulos internos de um hexágono vale 720º.

2.2.3 Cálculo da medida de cada ângulo interno de um polígono regular

$a_i = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$ onde, n = número de lados do polígono regular

Exemplo: Quanto mede cada ângulo interno de um eneágono regular.

Resolução:

n=9

$a_i = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n} \Rightarrow a_1 = \dfrac{180^\circ(9-2)}{9} = 140^\circ$

Logo cada ângulo do eneágono regular mede 140º.

(1) Exercícios

1. Sendo as retas r, s, t e u paralelas, os valores dos segmentos x e y, na figura abaixo, são respectivamente:

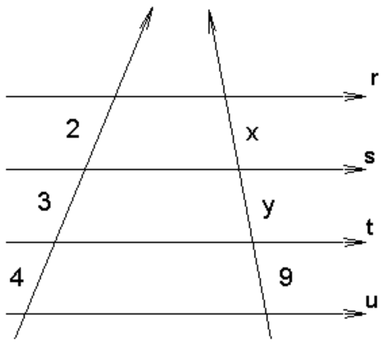
a) 27; 16

b) 27; $\frac{27}{4}$

c) 27; 26

d) $\frac{26}{4}$; $\frac{27}{4}$

e) $\frac{9}{2}$; $\frac{27}{4}$



2. Na figura abaixo as retas r, s, t e u são paralelas e x+y+z=30. Então, o produto x.y.z é igual a:

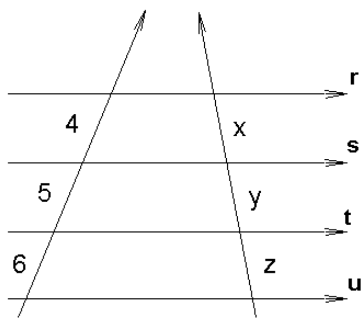
a) 960

b) 30

c) 80

d)1080

e) 120



3. Na figura, as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo x é:

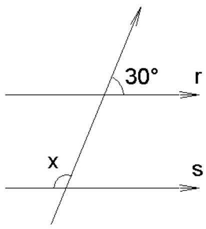
a) 30º

b) 50º

c) 60º

d) 150º

e) 180º



4. Na figura abaixo o valor do ângulo x é:

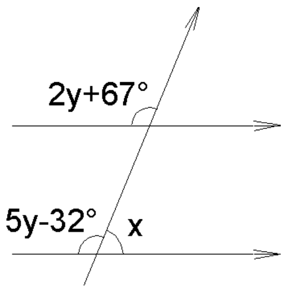
a) 30º

b) 33º

c) 47º

d) 133º

e) 147º



5. Na figura, as retas r, s são paralelas. A medida, em graus, do ângulo z é:

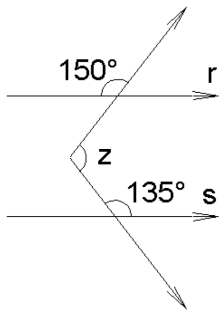
a) 45

b) 75

c) 85

d) 135

e) 145



6. Sabendo que as retas r e s são paralelas, a medida do ângulo x é:

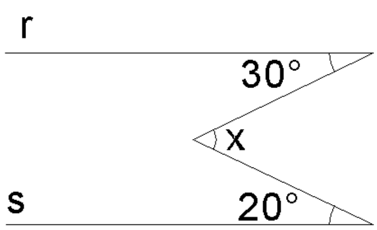
a) 20º

b) 30º

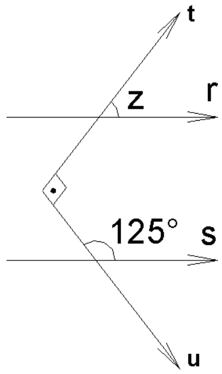
c) 40º

d) 60º

e) 50º



7. Na figura a seguir as retas r e s são paralelas e a reta t é perpendicular à reta u. Achar o valor do ângulo z:



a) 15º

b) 20º

c) 35º

d) 55º

e) 45º

8. O número de diagonais de um polígono é o dobro do seu número n de lados. O valor de n é:

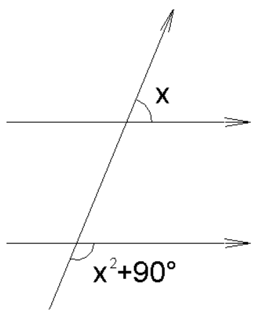
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

9. Qual o nome do polígono cujo número de diagonais é igual ao número de lados?

a) Quadrilátero b) Pentágono c) Hexágono

d) Heptágono e) Pentadecágono

10. A figura abaixo representa duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Para os ângulos assinalados, o conjunto solução para x é:



a) {9,0}

b) {9,10}

c) {9}

d) {-10}

e) {-10,9}

3 TRIÂNGULOS

Triângulo é o polígono que possui três lados.

3.1 Classificação dos triângulos

3.1.1 Quantos aos lados

a) Triângulo Isósceles

É o triângulo que possui dois lados iguais.

b) Triângulo Equilátero

É o triângulo que possui os três lados iguais. Cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60º.

c) Triângulo Escaleno

É o triângulo que possui os três lados diferentes.

3.1.2 Quanto aos ângulos internos

a) Triângulo Acutângulo

É o triângulo que possui os três ângulos internos agudos.

b) Triângulo Obtusângulo

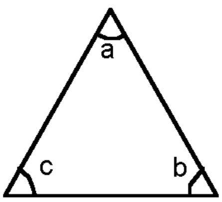
É o triângulo que possui um ângulo obtuso.

c) Triângulo Retângulo

É o triângulo que possui um ângulo reto (mede 90º).

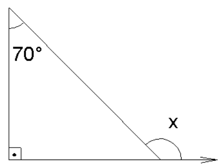
3.2 Propriedades dos triângulos

a) A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

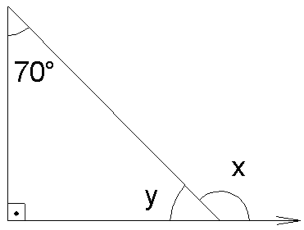


$a+b+c=180^\circ$

Exemplo: Determine x na figura abaixo:



Resolulção:



$70º+90º+y=180º$

$y=180º-160º$

$y=20º$

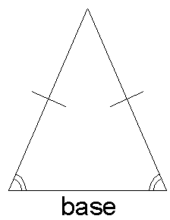
$x+y=180$

$x+20º=180º$

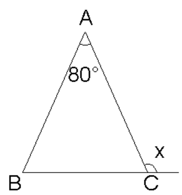
$x=160º$

Logo o ângulo x vale 160º.

b) Num triângulo isósceles, os ângulos que ficam na base são iguais.



Exemplo: O triângulo abaixo é isósceles de base $\overline{BC}$, calcule a medida do ângulo x.



Resolução:

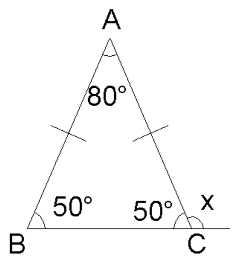
$80º+2y=180º$

$2y=180º-80º$

$y=50º$

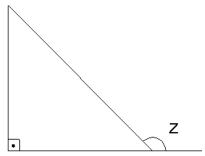
$x+50º=180º$

$x=130º$

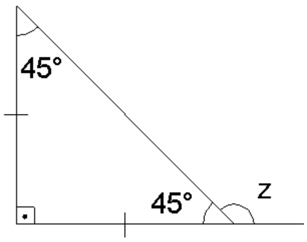


c) Triângulo retângulo isósceles é o triângulo retângulo que possui os catetos iguais. Num triângulo retângulo isósceles, cada ângulo agudo mede 45º.

Exemplo: O triângulo retângulo abaixo é isósceles. Calcule a medida de z.



Resolução:



45º+z=180º

z=180º-45º

z=135º

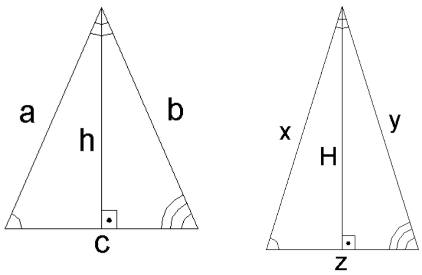
Logo o ângulo z vale 135º.

3.3 Triângulos Semelhantes

Dois triângulos são semelhantes quando:

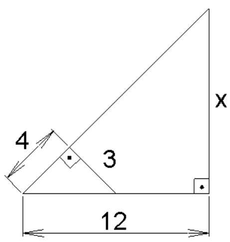
a) Três ângulos de um são iguais a três ângulos do outro.

b) Os lados correspondentes são proporcionais.

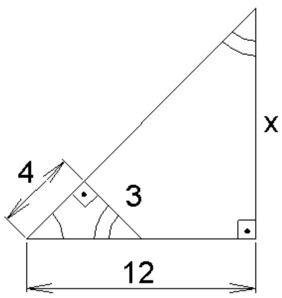


$$\boxed{\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{h}{H}}$$

Exemplos: 1.Calcule x na figura abaixo:



Resolução:



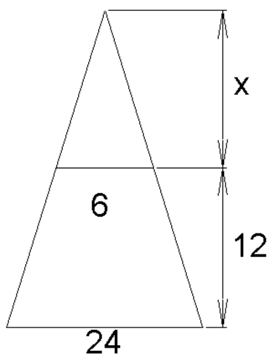
$$\frac{x}{3}=\frac{12}{4}$$

$$x=9$$

Logo x=9.

2. Calcule x na figura abaixo:

Resolução:



$$\frac{x}{12+x}=\frac{6}{24}$$

$$24x=(12+x).6$$

$$24x=72+6x$$

$$24x-6x=72$$

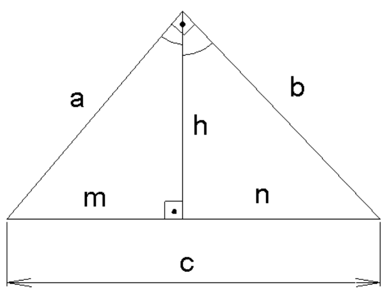
$$18x=72$$

$$x=4$$

Logo o valor de x é 4.

3.3 Relações métricas no triângulo retângulo

Chama-se triângulo retângulo ao triângulo que possui um ângulo reto (mede 90º).



Elementos:

a; b = catetos

c = hipotenusa

h = altura relativa à hipotenusa

m = projeção do cateto a sobre a hipotenusa

n = projeção do cateto b sobre a hipotenusa

a) $CAT^2 + CAT^2 = HIP^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

b) $CAT^2 = PROJ.HIP \Rightarrow a^2 = m.c$ ou $b^2 = n.c$

c) $ALT^2 = PROJ.PROJ \Rightarrow h^2 = m.n$

d) $CAT.CAT = ALT.HIP \Rightarrow a.b = h.c$

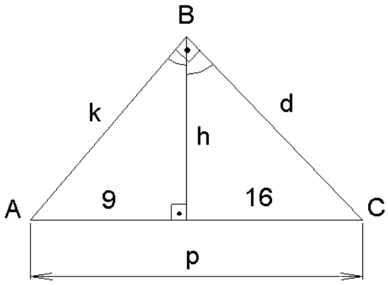
e) $HIP = PROJ + PROJ \Rightarrow c = m + n$

f) $Área = \frac{CAT.CAT}{2} \Rightarrow A = \frac{a.b}{2}$

g) $Perímetro = CAT + CAT + HIP \Rightarrow P = a + b + c$

Exemplo: No triângulo ABC, abaixo, calcule os valores desconhecidos:

Resolução:



Cálculo do P

$HIP = PROJ + PROJ$

P=9+16=25

Cálculo do H

$ALT^2 = PROJ.PROJ$

$h^2 = 9.16 \Rightarrow$ h=12

Cálculo do k

$CAT^2 = PROJ.HIP$

$k^2 = 9.25$

k=15

Cálculo do d

$CAT^2 + CAT^2 = HIP^2$

$225 + d^2 = 625$

d=20

Logo sabemos que P=25; h=12; k=15 e d=20.

(2) Exercícios

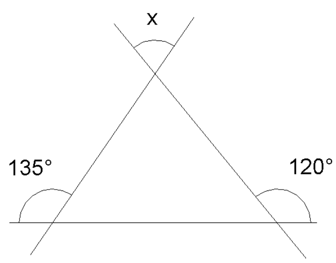
1. Na figura, o ângulo x mede:

a) 30º

b) 45º

c) 60º

d) 65º



e) 75º

2. Sendo r e s paralelas, o valor de x é:

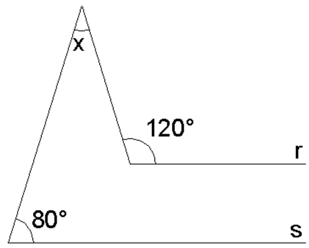
a) 40º

b) 50º

c) 60º

d) 70º

e) 80º



3. Sabendo que ABCD é um quadrado e que CDE é equilátero, a medida x do ângulo AÊD é:

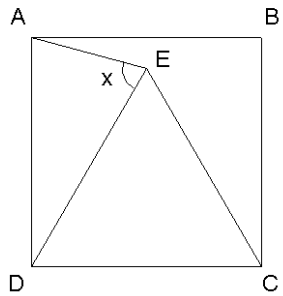
a) 60º

b) 75º

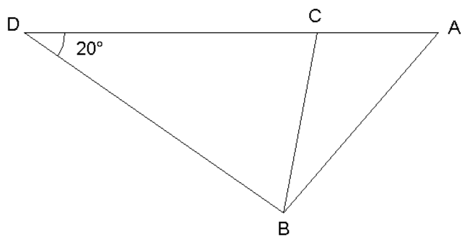
c) 80º

d) 85º

e) 90º



4.



Se na figura acima temos: medida D=20º, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ congruentes. $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ congruentes, então a medida do ângulo A é:

a) 100º b) 80º c) 70º d) 40º e) 20º

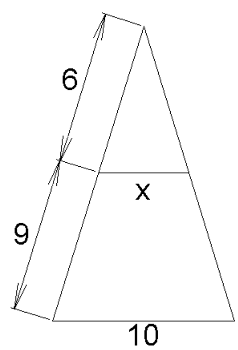
5. Nos triângulos da figura, os lados de comprimento x e 10 são paralelos. O valor de x é:

a) 2

b) 3

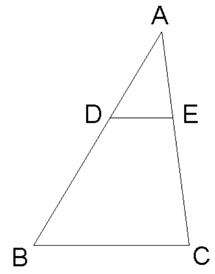
c) 4

d) 5



e) 6

6. No triângulo da figura, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $\overline{AB}$=6, $\overline{AD}$=2 e $\overline{EC}$=2,5. Nessas condições, $\overline{AE}$ vale:



a) 4

b) 5

c) $\frac{5}{2}$

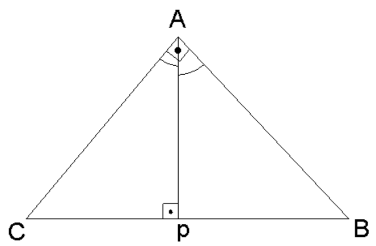
d) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{5}{4}$

7. Num triângulo retângulo cujos catetos medem respectivamente 6m e 8m, a projeção do maior cateto sobre a hipotenusa mede, em m.

a) 6,4 b) 3,6 c) 10 d) 4,8 e) 7,4

8. Na figura ao lado, ABC é um triângulo retângulo, $\overline{AP} \perp \overline{CB}$, $\overline{CP}$ mede 1,8 e $\overline{PB}$ mede 3,2. O perímetro de ABC é



a) 6

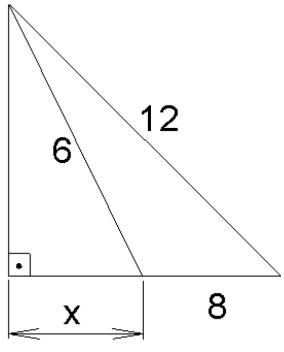
b) 8

c) 9

d) 10

e)12

9. Dada a figura. Qual o valor de x?



a) 2,15

b) 2,35

c) 2,75

d) 3,15

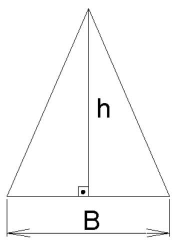
e) 3,35

10. Uma escada de 5m de comprimento é apoiada em uma parede vertical, da qual seu pé dista 3m. A altura do solo até o ponto em que a escada toca a parede é

a) 3m b) $3\sqrt{3}$ m c) 4m d) $4\sqrt{2}$ m e) 5m

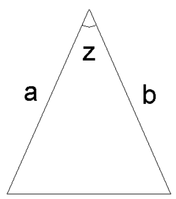
3.5 Área de um triângulo qualquer

1º Fórmula: Em função da base e da altura.



$$A = \frac{B.h}{2}$$

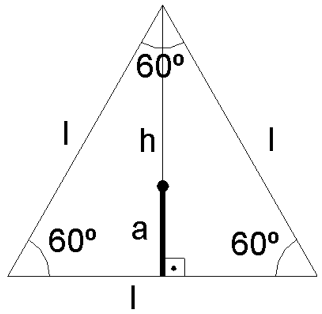
2º Fórmula: Em função do seno.



$$A = \frac{a.b.\operatorname{sen} z}{2}$$

3.6 Triângulo Equilátero

É o triângulo que possui três lados iguais e três ângulos internos iguais, cada um medindo 60º.



$$P = 3l$$

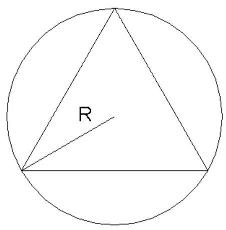
$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{6} \text{ ou } a = \frac{h}{3}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

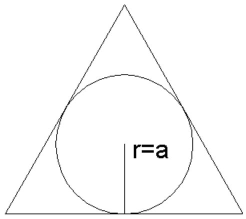
Onde l = lado; a= apótema; h = altura.

3.6.1 Triângulo equilátero inscrito num círculo



$l = R\sqrt{3}$

3.6.2 Círculo inscrito num triângulo equilátero



$r = a$

$a = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$

<u>Exemplos:</u> 1. Determine o perímetro de um triângulo equilátero inscrito num círculo de raio $4\sqrt{3}cm$.

Resolução:

R= $4\sqrt{3}cm$

$l = R\sqrt{3} \Rightarrow l = 4\sqrt{3}\sqrt{3} \Rightarrow$ l=12cm

P=3l $\Rightarrow$ P=36cm.

Logo o perímetro é 36 cm.

2. Calcule o raio do círculo inscrito num triângulo equilátero de área $81\sqrt{3}cm^2$.

Resolução:

A= $81\sqrt{3}cm^2$

$A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 81\sqrt{3} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l = 18cm$

R=a

$a = \dfrac{l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \dfrac{18\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = 3\sqrt{3} \Rightarrow R = 3\sqrt{3}$

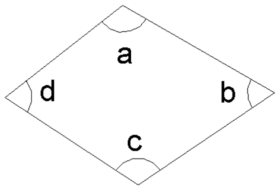
Logo $R = 3\sqrt{3}$.

4 QUADRILÁTERO

Quadrilátero é o polígono que possui quatro lados.

4.1 Propriedades

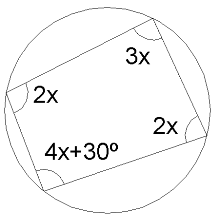
a) A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360º.



$a+b+c+d=360º$

<u>Exemplo:</u> Calcule x:

Resolução:

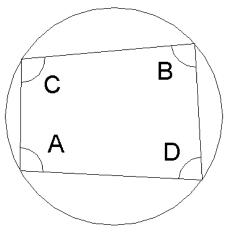


$2x+3x+2x+4x+30º=360º$

$11x=330º$

$x=30º$

b) Em qualquer quadrilátero inscrito num círculo, a soma dos ângulos opostos é igual a 180º.

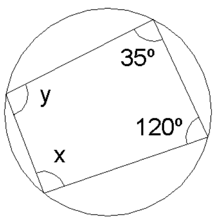


$A+B=180º$

$C+D=180º$

<u>Exemplo:</u> Calcule x e y:

Resolução:



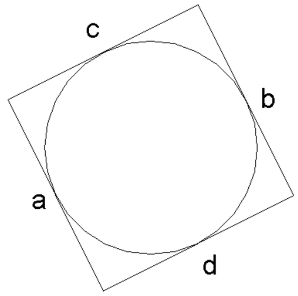
$35º+x=180º$

$x=145º$

$y+120º=180º$

$y=60º$.

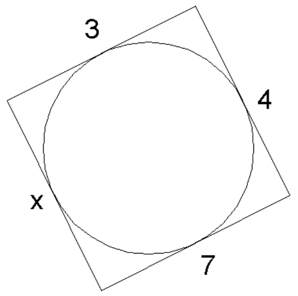
c) Em qualquer quadrilátero circunscrito a um círculo, a soma de dois lados é igual a soma dos outros dois:



a+b=c+d

Exemplo: Calcule x:

Resolução:



X+4=3+7

X=10-4

X=6

4.2 Classificação do quadriláteros

Os quadriláteros se dividem em paralelogramo e trapézios.

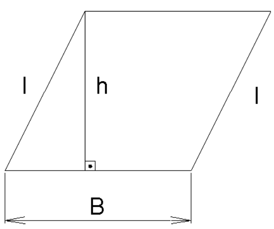
4.2.1 Paralelogramo

É o quadrilátero que possui os lados opostos **paralelos**. Num paralelogramo, temos:

a) Os lados opostos são iguais;

b) os ângulos opostos são iguais;

c) As diagonais cortam ao meio.

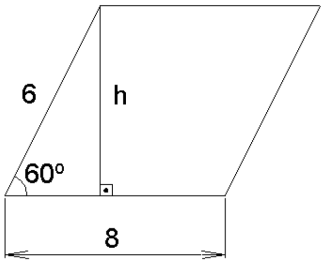


$A = B.h$

$P = 2B + 2l$

Exemplo: Calcule a área e o perímetro do paralelogramo abaixo:

Resolução:



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6}$$

$$h = 3\sqrt{3}$$

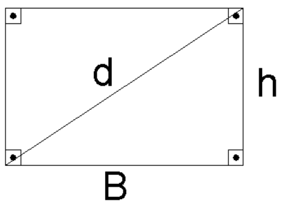
$A = B.h \Rightarrow A = 3\sqrt{3}.8 \Rightarrow A = 24\sqrt{3}$

$P = 2B + 2l \Rightarrow P = 2.8 + 2.6 \Rightarrow P = 28$.

Os paralelogramos, por sua vez, se dividem em retângulo, losango e quadrado.

4.2.1.1 Retângulo

É o paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos, num retângulo, temos:



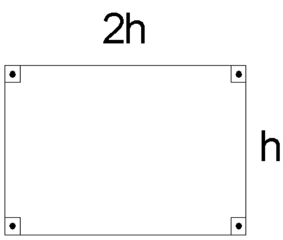
$A = B.h$

$P = 2B + 2h$

$d^2 = B^2 + h^2$

Exemplo: Num retângulo, uma dimensão é o dobro da outra. Se a área do retângulo é 128cm^2, calcule o seu perímetro.

Resolução:



A=128cm^2

$A = B.h \Rightarrow$ 128=h.2h $\Rightarrow$ h=8 cm

$P = 2B + 2h$ =8.2+16.2=48cm

Logo temos um perímetro de 48cm.

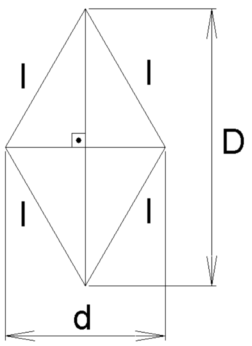
4.2.1.2 Losango

É o paralelogramo que possui os quatro lados iguais. Num losango, temos:

a) Os ângulos opostos são iguais;

b) As diagonais cortam-se ao meio;

c) As diagonais são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos.

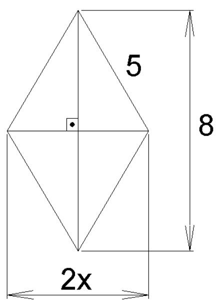


$$A = \frac{Dxd}{2}$$

$$P = 4l$$

<u>Exemplo:</u> Calcule a área e o perímetro de um losango cujo lado mede 5cm e a diagonal maior 8cm.

Resolução:



$$CAT^2 + CAT^2 = HIP^2$$

$25=16+x^2$

$x=3$

$$A = \frac{Dxd}{2} \Rightarrow A = \frac{6x8}{2} = 24cm^2$$

$$P = 4l = 5.4 = 20cm$$

4.2.1.3 Quadrado

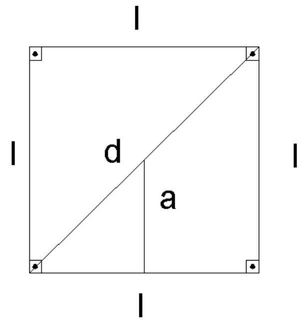
É o paralelogramo que possui os quatro lados iguais e os quatro ângulos internos retos.

Num quadrado, temos:

a) As diagonais cortam-se ao meio e são iguais;

b) As diagonais são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos;

c) O quadrado é ao mesmo tempo retângulo e losango.



$P = 4l$

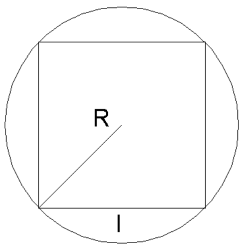
$A = l^2$

$a = \dfrac{l}{2}$

$d = l\sqrt{2}$

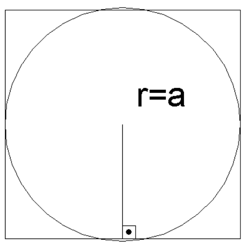
Onde l = lado; a = apótema; d = diagonal.

4.2.1.3.1 Quadrado inscrito num círculo



$l = R\sqrt{2}$

4.2.1.3.2 Círculo inscrito num quadrado

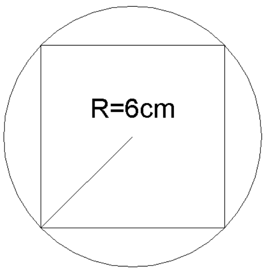


r=a

$a = \dfrac{l}{2}$

<u>Exemplos:</u> 1. Calcule a área de um quadrado inscrito num círculo de raio 6 cm.

Resolução:



$l = R\sqrt{2} \Rightarrow l = 6\sqrt{2}cm$

$A = l^2$

$A = 36.2 = 72cm^2$

2. A diagonal de um quadrado mede $8\sqrt{2}cm$. Determine o raio do círculo inscrito nesse quadrado.

Resolução:

d= $8\sqrt{2}cm \Rightarrow d = l\sqrt{2} \Rightarrow 8\sqrt{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow$ l=8cm

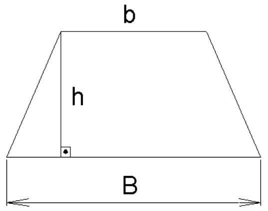
R=a

$$a = \frac{l}{2} = \frac{8}{2} = 4cm$$

Logo R=4cm.

4.2.2 Trapézios

É o quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos.



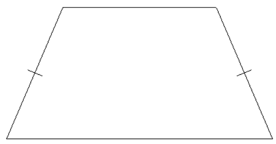
$$A = \frac{(B + b).h}{2}$$

Onde B = base maior; b = base menor; h = altura.

Os dois tipos de trapézio são:

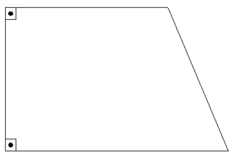
a) Trapézio isósceles

É o trapézio que possui os lados não paralelos iguais.



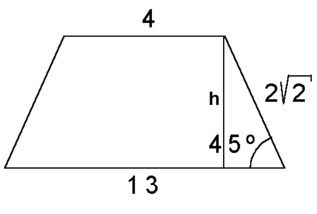
b) Trapézio retângulo

É o trapézio que possui dois ângulos retos.



Exemplo: Calcule a área do trapézio abaixo:

Resolução:



$$\text{sen } 45^\circ = \frac{h}{2\sqrt{2}}$$

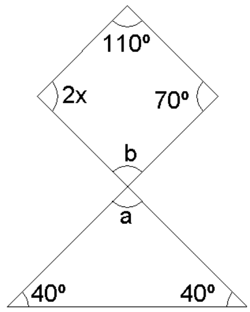
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h=2$$

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(13+4)2}{2} = 17$$

Logo a área é 17.

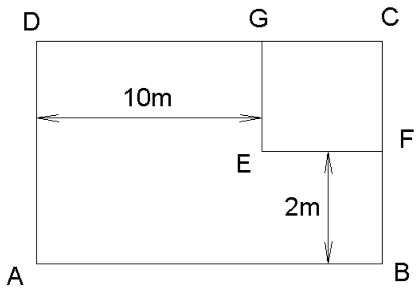
(3) Exercícios

1. Dada a figura, dar os valores de x, a e b.



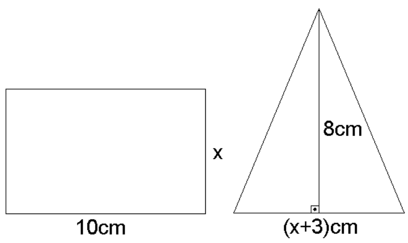
a) 40º, 100º, 100º
b) 80º, 100º, 100º
c) 40º, 90º, 90º
d) 80º, 90º, 90º
e) 90º, 90º, 90º

2. Na figura abaixo está representado o retângulo (ABCD) com $105m^2$. Usando as medidas indicada (DG=10m e BF=2m), verificamos que o lado do quadrado (EFCG) mede



a) $\sqrt{85}$ m
b) 42,5m
c) 8m
d) 5m
e) 3m

3. Sabendo que as áreas das figuras abaixo são iguais, o valor de x é: (em cm)



a) 10
b) 8
c) 5
d) 3
e) 2

4. Os lados de um retângulo de área x^2-x medem x-4 e 2x+3. O perímetro deste retângulo é

a) 26 b) 28 c) 30 d) 34 e) 40

5. Um retângulo e um paralelogramo têm a mesma área. O retângulo tem lados de medida 4 e 8. Todos os lados do paralelogramo têm medidas iguais a medida da diagonal do retângulo. Qual o valor do seno do ângulo agudo formado pelos lados do paralelogramo?

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

6. A altura de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência é $2\sqrt{3}cm$. A razão entre a área desse triângulo e a área de um quadrado inscrito nessa mesma circunferência é

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

7. Considere um quadrado e um losango de mesmo perímetro. Se a medida do lado quadrado é a e as medidas dos ângulos internos do losango são 60º e 120º, então a razão entre a área do quadrado e a área do losango é

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. Dois quadrados são tais que a área de um deles é o dobro da área do outro. A diagonal do menor é 4. A diagonal do maior é

a) 8 b) 6 c) $6\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{2}$

9. A área de um trapézio mede 120 cm^2. Se suas bases medem 40cm e 60cm, sua altura mede

a) 2,4cm b) 36cm c) 48cm d) 100cm e) 120cm

10. A área do polígono da figura é 30. O lado x mede

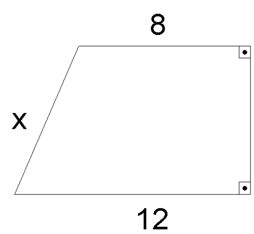
a) $^{15}/_{6}$

b) 3

c) 4

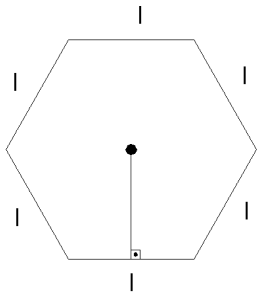
d) 5

e) $\sqrt{17}$



5 HEXÁGONO REGULAR

É o hexágono que possui seis lados iguais e seis ângulos internos iguais, cada um medindo 120º.



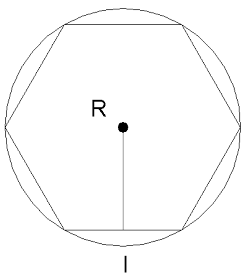
$$P = 6l$$

$$A = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

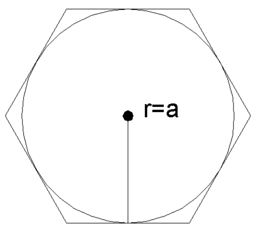
Onde l = lado e a = apótema.

5.1 Hexágono regular inscrito num círculo



l=R

5.2 Círculo inscrito num hexágono regular



r=a

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

<u>Exemplos:</u> 1. O apótema de um hexágono regular mede $2\sqrt{3}$ cm. Determine a sua área.

Resolução:

a= $2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow$ $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $l = 4cm$

$$A = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6.16.\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}cm^2$$

Logo a área vale $24\sqrt{3}cm^2$

2. Um hexágono regular tem área igual a $150\sqrt{3}$ cm^2.Calcule o raio do círculo nele inscrito.

Resolução:

$A = \dfrac{6l^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ l=10cm

R=a e $a = 5\sqrt{3}$.

Logo o raio é $a = 5\sqrt{3}$ cm.

6 CIRCUNFERÊNCIA

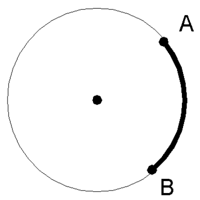
É o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo chamado **centro**.

6.1 Círculo

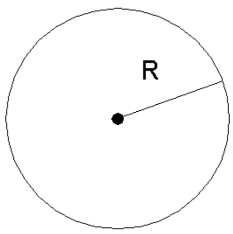
É o conjunto de todos os pontos de um plano interiores a uma circunferência e pertencentes a ela.

6.2 Elementos

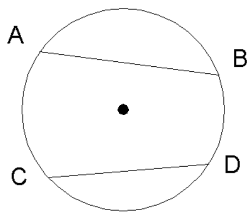
a) **Arco:** é qualquer parte da circunferência.



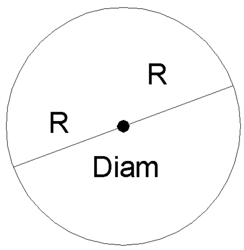
b) **Raio:** É a distancia do centro da circunferência ou do círculo até a circunferência.



c) **Corda:** É qualquer segmento de reta que une dois pontos da circunferência.

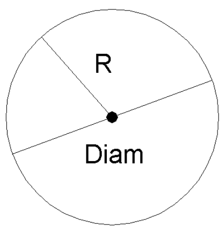


d) **Diâmetro:** É a corda que passa pelo centro da circunferência. O diâmetro é a maior corda de uma circunferência ou de um círculo e sua medida é igual a duas vezes a medida do raio.



Diam=2R

6.3 Fórmulas do círculo e da circunferência



Diam=2R

$A_0 = \pi R^2$

$C_o = 2\pi R$

Exemplo: A área de um círculo é $81\pi cm^2$. Calcule o comprimento da circunferência que limita este círculo.

Resolução:

$A=81\pi cm^2$

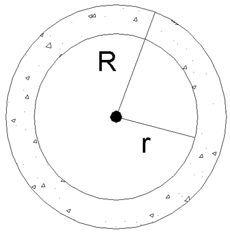
$A_0 = \pi R^2 = 81\pi \Rightarrow R = 9$

$C_o = 2\pi R = 18\pi cm$

Logo temos que o comprimento da circunferência é de 18πcm.

6.4 Coroa Circular

É a parte compreendida entre dois círculos de mesmo centro.



$$A_{cc} = \pi(R^2 - r^2)$$

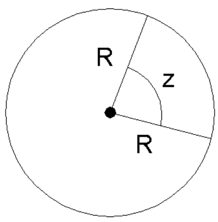
Exemplo: Calcule a área da coroa circular de raios 5cm e 3cm.

Resolução:

$$A_{cc} = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow A_{cc} = \pi(25 - 9) \Rightarrow A_{cc} = 16\pi cm$$

6.5 Setor circular

É a parte do círculo compreendida entre dois raios.



$$A_{sc} = \frac{\pi R^2 z}{360°}$$

$$A_{sc} = \frac{Rl}{2}$$

$$l = \frac{\pi R z}{180°}$$

Onde R = raio do setor; z = ângulo do setor;

l = comprimento do arco do setor.

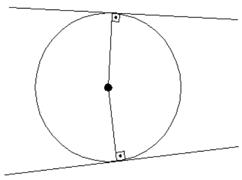
Exemplo: Calcule a área do setor circular de ângulo 120º e raio 2 cm.

Resolução:

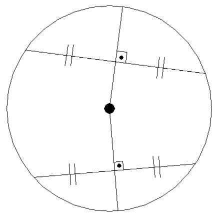
$$A_{sc} = \frac{\pi R^2 z}{360°} \Rightarrow A_{sc} = \frac{\pi 4.120°}{360°} = \frac{4\pi}{3}$$

6.6 Propriedades da circunferência ou do círculo

a) Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

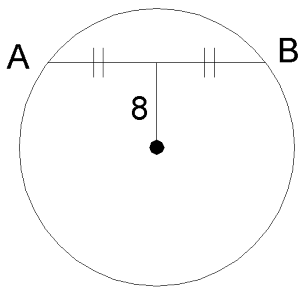


b) Todo raio perpendicular a uma corda divide a corda ao meio.



<u>Exemplo:</u> Determine o comprimento da corda AB da circunferência abaixo, sabendo que o raio mede 10cm.

Resolução:



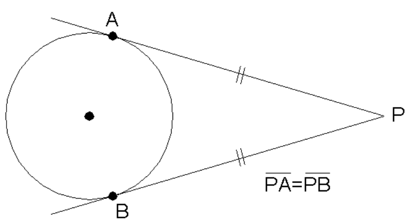
$10^2=8^2+x^2 \Rightarrow 100=64+x^2$

x=6cm

$AB=2x \Rightarrow AB=2.6=12cm$

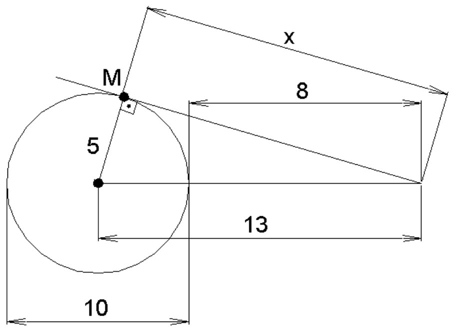
Logo o comprimento da corda é 12cm.

c) Se traçarmos as retas tangentes a uma circunferência por um ponto exterior a circunferência, as distâncias desse ponto aos pontos tangência serão iguais.



<u>Exemplo:</u> Prolonga-se o diâmetro $\overline{AB}$=10cm de uma circunferência de segmento $\overline{BD}$=8cm. Calcule o comprimento das tangentes à circunferência tiradas pelo ponto D.

Resolução:



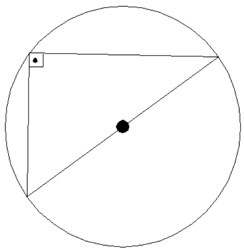
$x^2+5^2=13^2$

$x^2=13^2-5^2$

$x=12$ cm

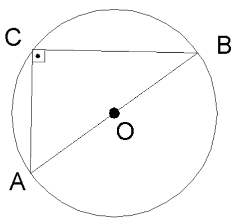
Logo o comprimento da tangente é 12 cm.

d) Todo triângulo inscrito numa circunferência ou numa semi-circunferência, em que um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência, é um triângulo retângulo. O diâmetro da circunferência é a hipotenusa do triângulo retângulo.



<u>Exemplo:</u> Na figura, abaixo, calcule a área do triângulo ABC, inscrito num circulo de centro O e área $16\pi cm^2$, sabendo que $\overline{BC}$ mede 6cm.

Resolução:



$A = \pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 4cm$

$x^2+6^2=8^2$

$x= 2\sqrt{7}$

$A = \frac{Cat.Cat}{2} = \frac{2\sqrt{7}.6}{2}$

Logo a área do triângulo vale $6\sqrt{7}cm$.

(4) Exercícios

1. Um hexágono regular de perímetro 12 está inscrito em um circulo. O perímetro do quadrado inscrito nesse círculo é

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $6\sqrt{2}$ e) $8\sqrt{2}$

2. Se o lado do hexágono regular inscrito num círculo mede 10cm, então a área deste círculo mede, em cm^2

a) 25π b) 100π c) 20π d)50π e) 10π

3. Uma corda de 36cm é cortada em três partes. Com uma delas que mede 12cm, é construído um triângulo equilátero e com as outras duas são construídos, respectivamente um quadrado e uma circunferência cujo raio mede $(8/\pi)$cm. A soma das áreas do quadrado e do triângulo, em cm^2, é

a) 20 b) 12 c) $8\sqrt{3}$ d) $4(4+\sqrt{3})$ e) $4(1+\sqrt{3})$

4. A área da coroa limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um quadrado de lado 3 é

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2π d) $\frac{9\pi}{4}$ e) $\frac{9\pi}{2}$

5. O círculo inscrito e o círculo circunscrito a um triângulo equilátero de lado a, formam uma coroa circular de área

a) πa^2 b) $\frac{\pi a^2}{3}$ c) $\frac{\pi a^2}{2}$ d) $\frac{\pi a^2}{4}$ e) n.d.a.

6. A área de um setor circular de 210º e de raio 3cm é

a) $\frac{9\pi}{2}$ b) $\frac{15\pi}{4}$ c) 8π d) $\frac{21\pi}{4}$ e) 6π

7. O quadrado da figura está inscrito no círculo de diâmetro igual a 2. A área da região hachurada é

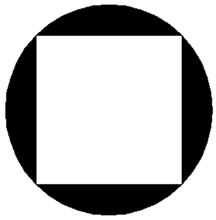
a) π - 1

b) π - 2

c) π - 4

d) 2π - 2

e) 4π - 8



8. Na figura ao abaixo, temos um quadrado inscrito num setor de 90º cujo raio é R. Deduzindo um fórmula para calcular a área da região sombreada, temos:

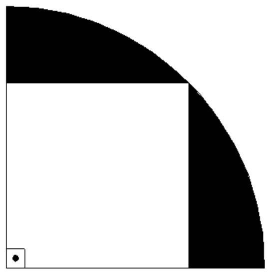
a) $A = R^2(\frac{\pi}{4} - 1)$

b) $A = R^2(\pi - \frac{1}{2})$.

c) $A = \frac{R^2(\pi - 1)^2}{4}$

d) $A = \frac{R^2(\pi - 2)}{4}$

e) $A = R^2(\pi - 2)$



9. A área da parte hachurada da figura é

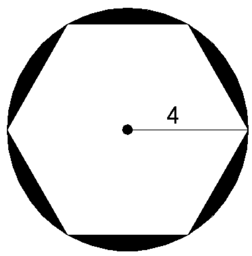
a) $8(2\pi - 3\sqrt{3})$

b) 16(π - 3)

c) 4(π - 3)

d) $16(2\pi - 3\sqrt{3})$

e) 8(π - 3)

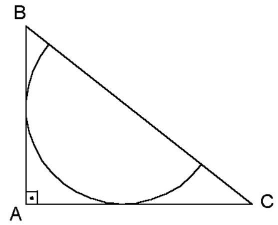


(5) Exercícios complementares

1. (UFSM/1995) Uma rampa de inclinação constante, apoiada sobre uma superfície horizontal, mede 4m de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, após caminhar 12,3m sobre esta rampa, para quando se encontra a 1,5m de altura em relação ao solo, o número de metros que a pessoa ainda deve caminhar, para atingir o ponto mais alto da rampa, é

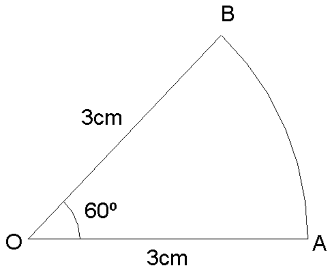
a) 30 b) 26,5 c) 20,5 d) 18,5 e) 13,8

2. (UFSM/1995) Na figura, o triângulo retângulo de vértice A, B e C tem inscrita uma semicircunferência cujo diâmetro se encontra sobre a hipotenusa BC. Sabendo-se que $\overline{AC} = 4cm$ e $\overline{BC} = 5cm$, então o raio da semicircunferência mede, em centímetros,



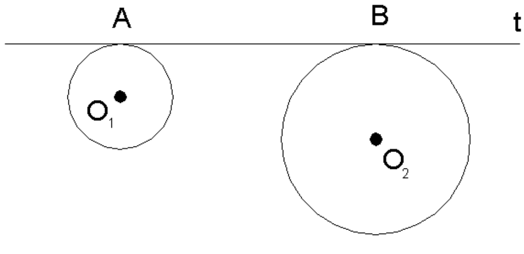
a) 6/5
b) 8/5
c) 9/5
d) 12/7
e) 15/7

3. (UFSM/1995) Considerando a figura, o comprimento, em centímetros, do arco AB é



a) π
b) $3\pi/4$
c) $\pi/2$
d) $\pi/4$
e) 1

4. (UFSM/1995) Na figura, são dados dois círculos C_1 e C_2, com centros nos pontos O_1 e O_2, respectivamente, sendo a reta t uma das tangentes externas comum às circunferências nos pontos A e B. Sabe-se que a área de C_1 mede $9\pi cm^2$, o perímetro de C_2 mede $30\pi cm$ e a distância entre os pontos de tangência A e B é 16 cm. Então a distância entre os centros O_1 e O_2, em centímetros, é



a) 17
b) 18
c) 19
d) 20
e) 21

5. (UFSM/1996) Na figura, AC e BD são segmentos de reta e cada um mede 10cm. As medidas dos arcos concêntricos AB e CD são respectivamente, $(25\pi/3)cm$ e $(20\pi/3)cm$. A área do quadrilátero ABCD, em cm^2, vale

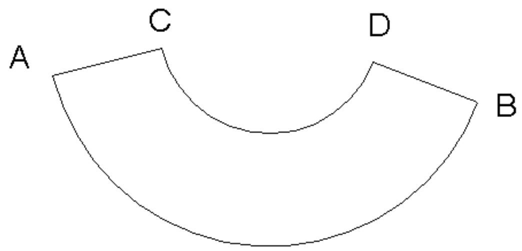
a) 75π

b) 25π

c) $10\pi/3$

d) $\pi/3$

e) 100



6. (UFSM/1997) Na figura, os ângulos AOD, A, B e C são retos. A medida do segmento de reta CD, em cm, vale

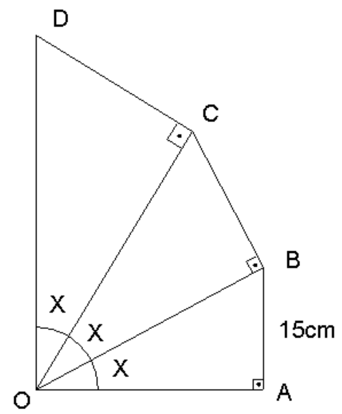
a) $20\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) 20

d) 30

e) 40



7. (UFSM/1997) Um orizicultor pretende construir um depósito cujo formato e dimensões aparecem na figura. AB é um arco de circunferência de centro C, as medidas DF e EG são iguais e valem a metade da medida de DE. Nessas condições, a medida da área da cobertura, em m^2, vale

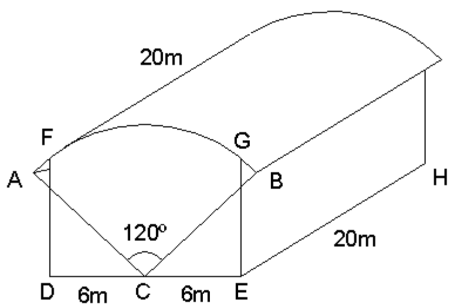
a) $4\pi\sqrt{2}$

b) $40\pi\sqrt{2}$

c) $80\pi\sqrt{2}$

d) $100\pi\sqrt{2}$

e) 400



8. (UFSM/1998) A figura representa três quadrados cujas áreas, em m^2, são A, B e C. As razões entre as áreas B e A, Ce A e B e C eqüivalem, respectivamente, a

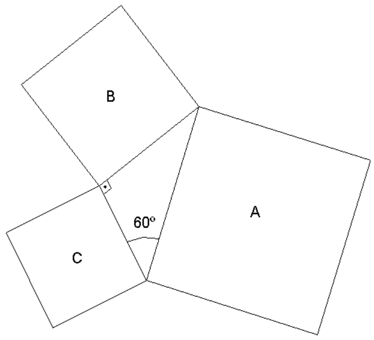
a) ½, ½, 1

b) ¾, ¼, 3

c) $\sqrt{3}$/2, ½, 3

d) ¼, ¾, 1/3

e) ½, $\sqrt{3}$/2, $\sqrt{3}$/3



9. (UFSM/1999) Um estudante de Engenharia vê um prédio do campus da UFSM construído em um terreno plano, sob um ângulo de 30°. Aproximando-se do prédio mais 40m, passa a vê-lo sob um ângulo de 60°. Considerando que a base do prédio está no mesmo nível do olho do estudante, então a altura h do prédio é igual a

a) 30$\sqrt{3}$ m b) 20$\sqrt{3}$ m c) 30m d) 10$\sqrt{3}$ m e) 28m

10. (UFSM/2001) Na construção proposta, o ponto A representa o número zero e o ponto B, o número 1. Ao construir $\overline{BC}$ de forma perpendicular a $\overline{AB}$ e de comprimento 1, obtém-se $\overline{AC}$. Após, ao construir $\overline{CD}$, também de comprimento 1 e perpendicular a $\overline{AC}$, obtém-se $\overline{AD}$. Marcando, na reta r, $\overline{AE}$ de mesmo comprimento que $\overline{AD}$, o ponto E representará o número

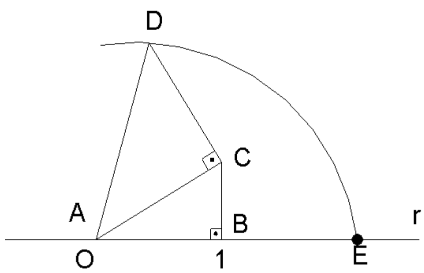
a) 1,0

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) 1,8

e) 2,0



11. (UFSM/2002) Um fio de antena está preso no topo de um prédio de 16 metro de altura e na cumeeira de uma casa ao lado, a 4 metros de altura. Considerando o terreno plano (horizontal) e sabendo que a distância entre a casa e o prédio é de 9 metros, o comprimento do fio é, em metros,

a) 12 b) 15 c) $\sqrt{337}$ d) 20 e) 25

GEOMETRIA ESPACIAL

7 HISTÓRICO

Sabe-se que os babilônios, povo que habitava a Mesopotâmia, deixaram documentos que mostram conhecimentos geométricos quase sempre ligados à astrologia, desde 2000 a.C.

A palavra geometria significa, em grego, medir terra. Os agrimensores egípcios (1300 anos a.C.) recorriam à geometria para determinar a área de seus campos e para delimitar suas terras quando as cheias anuais do Nilo cobriam ou apagavam os marcos anteriores.

A construção de pirâmides demonstra que os egípcios dominavam a geometria.

Por volta de 600 a.C., filósofos e matemáticos gregos, entre os quais podemos incluir Tales de Mileto e Pitágoras, passaram a sistematizar os conhecimentos geométricos da época. É voz corrente que a geometria, antes dos gregos, era puramente experimental, ou seja, não havia qualquer cuidado com os princípios matemáticos que regiam os conhecimentos geométricos. Foram, então, os gregos os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo.

Foi, porem, com o matemático grego Euclides de Alexandria que esta ciência realmente se desenvolveu, fazendo da cidade de Alexandria, onde vivia Euclides, o centro mundial da geometria, por volta de 300 anos a.C.

Para Euclides, a geometria era uma ciência dedutiva cujo desenvolvimento partia de certas hipóteses básicas: os axiomas ou postulados. O grande trabalho de Euclides foi reunir em 13 volumes, sob o título “Elementos”, tudo o que se sabia sobre a geometria em seu tempo.

A geometria é constantemente aplicada na vida prática nos projetos de edifícios, pontes, estradas, carros e aviões; na navegação aérea e marítima; na balística; no cálculo do volume de areia, cimento e água, nos moldes de costura, etc.

8 POLIEDROS

8.1 Definição

É um sólido cuja superfície é formada por regiões poligonais, e cada uma das regiões é chamada de face do poliedro, em outras palavras, são sólidos limitados por polígonos.

8.2 Elementos

Os polígonos que limitam o poliedro são denominado de faces do poliedro

Existem faces que se interceptam segundo um segmento de reta e cada um desses segmentos é chamado de aresta do poliedro, ou seja, são os lados do polígono.

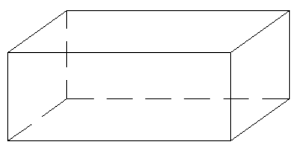
Existem grupos de três ou mais arestas que de interceptam em um ponto, e cada um desses pontos é chamado de vértice do poliedro.

8.3 Classificação dos poliedros

8.3.1 Quanto a forma

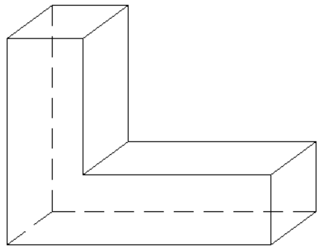
Poliedro convexo – se qualquer reta passando pelo seu interior furar o poliedro em apenas duas faces.

Exemplo:



Poliedro côncavo – se existir uma reta passando pelo seu interior que fure o poliedro em mais de duas faces.

Exemplo:



8.3.2 Quanto ao número de faces

O poliedro que possui:

4 faces chama-se tetraedro

5 faces chama-se pentaedro

6 faces chama-se hexaedro

7 faces chama-se heptaedro

8 faces chama-se octaedro

9 faces chama-se eneaedro

10 faces chama-se decaedro

11 faces chama-se undecaedro

12 faces chama-se dodecaedro

15 faces chama-se pentadecaedro

20 faces chama-se icosaedro

9 RELAÇÃO DE EULER

Sabemos que todo poliedro convexo recebe um nome de acordo com o número de faces.

Nome do poliedro	Faces	Vértices	Arestas
Tetraedro	4	4	6
Pentaedro	5	6	9
	5	5	8
Hexaedro	6	8	12
Heptaedro	7	10	15

Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

Observando a tabela acima e analisando o número de faces e vértices podemos concluir que, o número de faces mais o número de vértices menos duas unidades é igual ao número de arestas, ou seja:

$$F + V - 2 = A \Rightarrow F + V = A + 2$$

Com isto podemos enunciar o seguinte teorema:

> Num poliedro convexo, o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais dois, ou seja: $V + F = A + 2$

Onde:

V é o número de vértices do poliedro;

F é o número de faces do poliedro;

A é o número de arestas do poliedro.

<u>Exemplos:</u> 1. Calcule o número de faces de um poliedro convexo que possui 7 vértices e 17 arestas.

Resolução:

$V + F = A + 2 \Rightarrow 7 + F = 17 + 2$

$F = 12$

Logo possui 12 faces.

2. Um poliedro convexo tem 6 faces e 8 vértices. Calcular o número de arestas.

Resolução:

$V + F = A + 2 \Rightarrow 6 + 8 = A + 2$

$A = 12$

Logo possui 12 arestas.

10 POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

a) Todas as faces tem o mesmo número (n) de arestas;
b) Todos os ângulos poliédricos (ou sólidos) tem o mesmo número (p) de aresta;
c) Vale a relação de Euler $\Rightarrow V + F = A + 2$.

Obs: Ângulo poliédrico ou ângulo sólido é o ângulo formado por todas as faces que se encontram num mesmo vértice.

Só existem cinco classes de poliedros de Platão: os tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e os icosaedros.

Nome do poliedro	Faces	Vértices	Arestas	n	p
Tetraedro	4	4	6	3	3
Hexaedro	6	8	12	4	3
Octaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5

Quando contamos o número de faces, vértices e arestas na tabela acima, vimos que quanto maior o número de faces mais difícil fica de contar o número de vértices e arestas em cada poliedro.

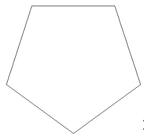
Porém podemos contar o número de arestas face a face.

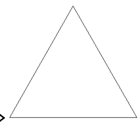
Sabemos que cada uma das faces F tem n arestas ($n \geq 3$), e como

$$n.F = 2.A \Rightarrow F = \frac{2.A}{n}$$

Sabemos também, que cada um do V ângulos poliédricos tem p arestas, ou seja, em cada vértice V concorrem p arestas ($p \geq 3$), e como cada aresta contém dois vértices.

$$p.V = 2.A \Rightarrow V = \frac{2.A}{p}$$

Exemplos: 1. Dodecaedro ⇒  ⇒ faces pentagonais

2. Icosaedro ⇒  ⇒ faces triangulares.

11 POLIEDROS REGULARES

Um poliedro convexo é regular quando:

a) Suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas;

b) Seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

Por estas conclusões temos que, os poliedros regulares são poliedros de Platão e portanto existem cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

Esta comprovação pode ser feita somando-se os ângulos das faces do poliedro unidas no mesmo vértice. A soma desses ângulos deve ser menor que 360º. Por exemplo, para quatro faces triangulares tem-se: *4. 60º = 240º*.

– Existe somente três poliedros regulares com faces triangulares

O tetraedro regular, com três faces unidas no mesmo vértice;

O octaedro regular, com quatro faces unidas no mesmo vértice;

O icosaedro regular, com cinco faces unidas no mesmo vértice;

É impossível ter um poliedro regular com seis ou mais faces triangulares unidas no mesmo vértice. Neste caso, a soma dos ângulos seria 360º ou mais o que não pode acontecer num ângulo poliédrico de um poliedro convexo.

– Existe somente um poliedro regular com faces quadrangulares

O cubo, com três faces unidas em cada vértice.

É impossível ter um poliedro regular com quatro faces ou mais faces quadrangulares unidas no mesmo vértice.

– Existe somente um poliedro regular com faces pentagonais

O dodecaedro regular, com três faces pentagonais unidas em cada vértice.

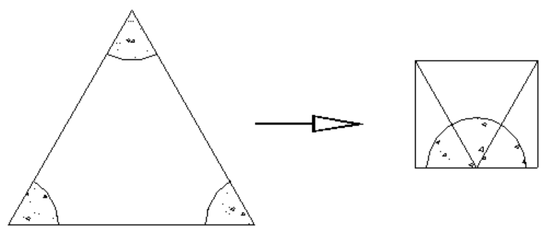
É impossível ter um poliedro regular com quatro ou mais faces pentagonais unidas no mesmo vértice.

Não existe poliedro regular com faces hexagonais, pois, a soma dos ângulos de três (ou mais) faces unidas num mesmo vértice é 360º (ou mais).

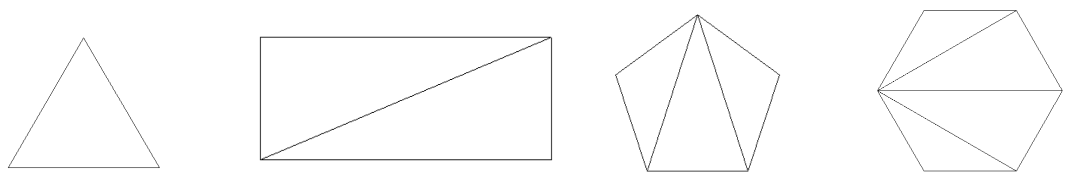
Analogamente, não existe poliedro com faces de sete lados ou mais.

– Soma dos ângulos internos de um poliedro convexo

Ao recortarmos triângulos, pintando os ângulos, dobrando tipo envelope, deixando as pontas juntas formando um único ângulo verificamos que:



O ângulo formado é um ângulo raso ou de meia volta, isto é, um ângulo de 180º, podemos portanto concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.



1 . 180º *2 . 180º* *3 . 180º* *4 . 180º*

Desenhando um quadrilátero, um pentágono, um hexágono, etc; cortando todos estes polígonos em triângulos podemos calcular a soma dos ângulos internos dos mesmos, através da seguinte fórmula:

$$S = (n - 2) . 180^{\circ}$$

Com base na dedução acima vamos deduzir a fórmula da soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo em função de seu número de vértices.

Sabendo que poliedro é um sólido formados por polígonos.

Então sendo:

$S_1 = (n_1 - 2).180^o \Rightarrow$ a soma dos ângulos internos da face F_1;

$S_2 = (n_2 - 2).180^o \Rightarrow$ a soma dos ângulos internos da face F_2;

$S_3 = (n_3 - 2).180^o \Rightarrow$ a soma dos ângulos internos da face F_3;

$S_f = (n_f - 2).180^o \Rightarrow$ a soma dos ângulos internos da face F_f.

Logo:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_f$$
$$S = (n_1 - 2).180^o + (n_2 - 2).180^o + (n_3 - 2).180^o + ... + (n_f - 2).180^o$$
$$S = [(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + (n_3 - 2) + ... + (n_f - 2)].180$$
$$S = [\underbrace{(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_l)}_{\text{2A}} - \underbrace{(2 + 2 + 2 + ... + 2)}_{\text{2F vezes}}].180$$
$$S = (2A - 2F).180^o$$

$S = (A - F).2.180^o \Rightarrow S = (A - F).360^o$, mas $F + V = A + 2$, substituindo em S, temos:

$$S = (V - 2).360^o$$

Exemplo: A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 1080º. Determine o número de faces, sabendo que o poliedro tem 8 arestas.

Resolução:

$$S = (V - 2).360^o$$

$1080^o = (V - 2).360^o$	$F + V = A + 2$
$3 = V - 2$	$F + 5 = 8 + 2$
$V = 5$	$F = 5$

Logo o poliedro tem 5 faces

(6) Exercícios

1. Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

2. Calcule o número de faces triangulares e quadrangulares do poliedro convexo no qual a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 6480º e o número de faces triangulares é igual ao dobro do número de faces quadrangulares.

3. Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem 5 arestas, de quatro outros partem 4 arestas e dos restantes 3 arestas. Calcule o número de arestas.

4. Em um poliedro de 20 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Calcule a soma dos ângulos das faces desse poliedro.

5. Um poliedro convexo tem faces pentagonais e faces quadrangulares. Se a soma das medidas dos ângulos de todas as faces é 4680º e ele tem 25 arestas, quantas faces tem de cada tipo?

6. Qual é a base de uma pirâmide cuja soma dos ângulos das faces é 56 retos?

7. Um poliedro convexo de 16 vértices só possui faces triangulares e hexagonais. Quantas faces tem o poliedro se o número de faces triangulares é 2/3 do número de faces hexagonais.

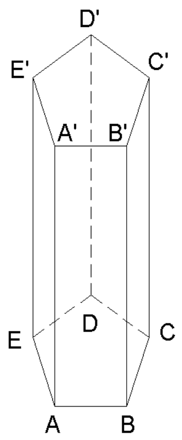
8. Um poliedro convexo tem faces triangulares e faces quadrangulares. Se ele tem 25 arestas e a soma das medidas dos ângulos de todas as faces é 3600º, quantas são as faces de cada tipo?

12 PRISMAS

12.1 Conceito

Prismas são poliedros que tem faces paralelas e congruentes, chamadas bases e as demais faces tem a forma de paralelogramos, que são chamadas faces laterais.

12.2 Elementos



<u>Bases</u>: são os polígonos paralelos e congruentes ABCDE e A'B'C'D'E'.

<u>Faces laterais</u>: são os paralelogramos AA'BB', BB'CC', AA'EE', EE'DD', DD'CC'.

<u>Arestas</u>: arestas da base (a_b): são elementos AB, BC, DE, EA, A'B', B'C', C'D', D'E', E'A' dos polígonos das bases. Arestas laterais (a_l): são segmentos AA', BB',..., dos lados das faces lateriais.

Nomenclaturas adotadas
P = Perímetro da base
A_b = Área da base
a = Apótema da base
d = Diagonal da base
A_{FL} = Área de uma face lateral
A_l = Área lateral
A_t = Área total
V = Volume
l = Aresta ou lado da base
a_b = aresta da base
a_l = aresta lateral
H ou h = Altura

12.3 Classificação

Podemos classificar um prisma quanto:

a) quanto ao número de arestas da base os prismas classificam-se em:

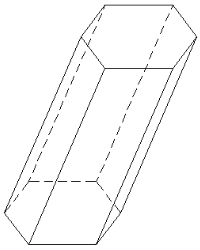
Prisma triangular $\Rightarrow$ se a base for um triângulo;

Prisma quadrangular $\Rightarrow$ se a base for um quadrilátero;

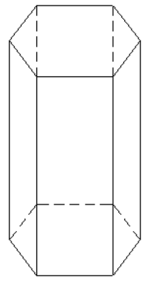
Prisma pentagonal $\Rightarrow$ se a base for um pentágono.

E assim por diante.

b) Quanto a posição das arestas laterais:



Prisma oblíquo ⇒ um prisma é dito oblíquo quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.



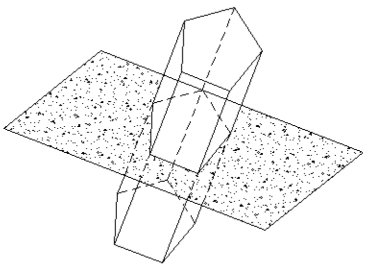
Prisma reto ⇒ um prisma é dito reto quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

c) Quanto a forma da base:

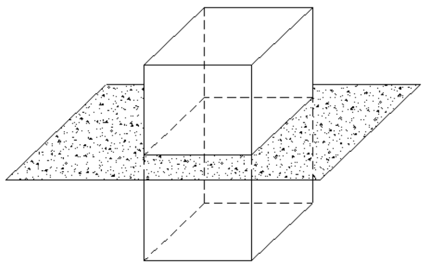
Prisma regular ⇒ é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Um prisma é dito triangular regular se a base for um triângulo equilátero, quadrangular regular se a base for um quadrado, hexagonal regular se a base for um hexágono regular, etc.

12.4 Secção



A intersecção de um prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais denomina-se <u>secção do prisma</u>.



A secção determinada num prisma por um plano paralelo às bases é denominada <u>secção reta</u>.

Observe que a secção reta é congruente às bases.

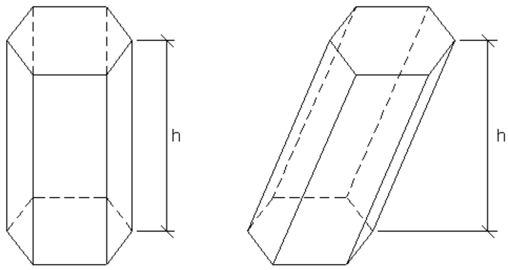
12.5 Superfícies

Superfície lateral ⇒ é a reunião das faces laterais. A área desta superfície é chamada área lateral e indicada por A_l.

Superfície total $\Rightarrow$ é a reunião das faces laterais com as bases. A área desta superfície é chamada área total e indicada por A_t.

12.6 Volume

Consideremos os prismas das figuras abaixo.



Sejam A_b a área da base e h a medida da altura de um prisma.

Então:

O volume V de um prisma qualquer é dado pelo produto da área A_b da base pela medida h da altura, ou seja,

$$V = A_b \cdot h$$

Exemplo: Calcular o volume de um prisma triangular regular, no qual a aresta da base mede *4cm* e a altura mede *10.* $\sqrt{3}$ *cm*.

Resolução:

Calculo da área da base

A base é um triângulo equilátero de lado *a=4cm*; logo:

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}cm^2$$

Calculo do volume

$$V = A_b.h \Rightarrow V = (4\sqrt{3}cm^2).(10\sqrt{3}cm) = V = 120cm^3$$

O volume do prisma é de *120cm³*.

13 PARALELEPÍPEDOS

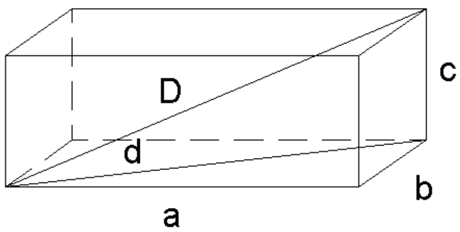
O paralelepípedo é um prisma cujas bases são também paralelogramos.

Assim, num paralelepípedos, todas as faces são paralelogramos e, em particular, podem ser retângulos (paralelepípedo retângulo ou ortoedro).

O cubo é um prisma mais particular ainda, pois os paralelogramos que formam as faces são todos quadrados. Assim, o cubo ou o hexaedro regular possuem todas as 6 faces congruentes.

13.1 Paralelepípedo retângulo ou ortoedro

É um sólido em que todas as faces são retângulos, iguais dois a dois. As três dimensões de um paralelepípedo retângulo são representadas por a, b e c, sendo a e b os lados ou arestas da base e c a altura do paralelepípedo. Representaremos por D a diagonal do paralelepípedo retângulo e por d a diagonal da base.



$A_b = a.b$

$A_l = 2ac + 2bc$

$A_t = A_l + 2ab$ ou $A_t = 2ab + 2ac + 2bc$

$V = axbxc$ ou $V = A_b.c$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemplo: Calcule a área lateral, a área total e ao diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 5cm, 4cm e 3cm.

Resolução

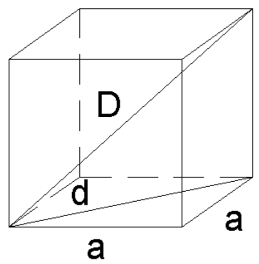
$A_l = 2ac + 2bc = 54cm^2$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cong 7{,}07cm$

$A_t = A_l + 2ab = 54 + 40 = 94cm^2$

13.2 Cubo ou hexaedro regular

É um tipo especial de paralelepípedo retângulo em que todas as faces são quadrados iguais. Portanto, as arestas de um cubo são iguais e as representaremos por a . A diagonal do cubo representaremos por D e a diagonal de uma face do cubo por d.



S=12a (soma das arestas)

$A_l=4a^2$

$A_t=6a^2$

$V=a^3$ *ou* $V=A_b.a$

$d=a.\sqrt{2}$ *e* $D=a.\sqrt{3}$

<u>Exemplo:</u> A área lateral de um cubo é $36cm^2$. Calcule a sua área total.

Resolução:

$A_l=36cm^2 \Rightarrow A_l=4a^2=36 \Rightarrow a=3$

$A_t=6a^2 \Rightarrow A_t=6.9=54 \Rightarrow A_t=54\ cm^2$

<u>(7) Exercícios</u>

1. Deseja-se elevar em 20cm o nível de água da piscina de um clube. A piscina é retangular, com 20m de comprimento e 10m de largura. A quantidade de litros de água a ser acrescentada é

a) 4000 b)8000 c)20000 d) 40000 e) 80000

2. Uma caixa d’água de forma cúbica tem 1m de aresta. Se aumentarmos a sua aresta em 20%, a sua capacidade da caixa aumenta, aproximadamente

a) 20% b) 40% c) 60% d) 8% e) 73%

3. A área de cada uma das faces de um cubo é igual a $12,25cm^2$. O volume deste cubo vale

a) $36,75cm^3$ b) $21,4cm^3$ c) $42,875cm^3$ d) $83,75cm^3$ e) $63,75cm^3$

4. A área total de um cubo é de $24m^2$. O seu volume será

a) $16m^3$ b) $8m^3$ c) $\sqrt[3]{24}m^3$ d) $216cm^3$ e) $16cm^3$

5. O número que expressa a área total de um cubo, em cm^2, é o mesmo que expressa seu volume, em cm^3. Qual o comprimento, em cm, de cada uma das arestas desse cubo?

a) 9 b) 6 c) 4 d)2 e)1

6. Se a diagonal da face de um cubo mede 2cm, então a diagonal do cubo mede

a) 3cm b) 5cm c) $2\sqrt{2}$cm d) $\sqrt{6}$ e) 4cm

7. O volume de um cubo cuja diagonal mede 3 é

a) 27 b) 9 c) 6 d) $3\sqrt{3}$ e) $\sqrt{3}$

8. Num prisma triangular regular, a altura mede 8cm e a aresta da base 6cm. Obter:

a) a área da base;

b) a área lateral;

c) a área total;

d) o volume.

9. Obtenha a área total, o volume, a diagonal do paralelepípedo retângulo cujas arestas medem 3cm, 4cm, 12cm.

10. Obtenha a área total, o volume, a diagonal e a área lateral de um cubo de aresta 2cm.

11. A aresta da base e a altura de um prisma regular triangular medem 8cm e 6cm, respectivamente. Calcule:

a) a área da base;

b) a área total;

c) a área lateral;

d) o volume.

12. Determine a área total de um prisma reto de 12cm de altura e cuja base é um trapézio isósceles de altura 8cm e de base 3cm e 15cm.

13. Calcule a área lateral de um prisma reto de 10cm de altura, cuja a base é um hexágono regular de apótema $3\sqrt{3}$ cm.

14. Um homem quer pintar as paredes e o teto de sua sala em forma de paralelepípedo retângulo, de dimensões 4m, 6m e 3m de altura.

a) qual é a área da superfície que ele vai pintar?

b) sabendo que cada lata de tinta cobre $21m^2$ de área, quantas latas ele vai precisar para pintar a sala?

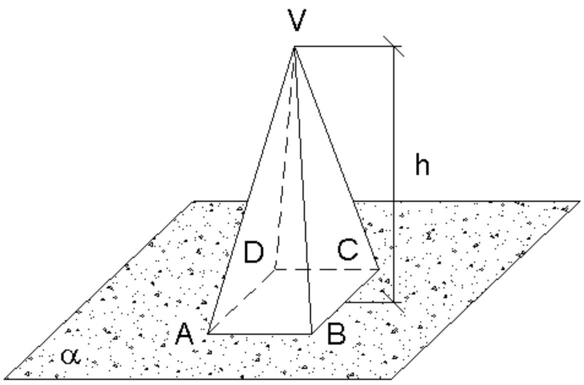
15. Calcular o volume de um prisma quadrangular regular, cuja a base está inscrita num círculo de 3cm de raio, sendo a altura igual ao diâmetro deste círculo.

14 PIRÂMIDES

14.1 Definição

Seja α um plano, V um ponto fora de α e P uma superfície poligonal contido em α. Pirâmide é a figura geométrica constituída por todos os segmentos que têm uma extremidade no ponto V e outra num ponto da superfície poligonal P.

A pirâmide é, pois, um sólido delimitado por faces planas, sua base é um polígono e suas faces laterais são triângulos.



Elementos:

<u>Vértice</u> $\Rightarrow$ é o ponto V;

<u>Base</u> $\Rightarrow$ é a superfície poligonal P;

<u>Aresta da base</u> $\Rightarrow$ são os lados do polígono da base AB, BC, CD e AD.

<u>Arestas laterais</u> $\Rightarrow$ são os segmentos VA, VB, VC e VD;

<u>Altura</u> $\Rightarrow$ distância entre o vértice e o plano da base.

14.2 Classificação

De acordo com o número de arestas da base, uma pirâmide pode ser classificada em:

Triangular $\Rightarrow$ quando a base é um triângulo;

Quadrangular $\Rightarrow$ quando a base é um quadrilátero;

Pentagonal $\Rightarrow$ quando a base é um pentágono e assim por diante.

14.3 Relações métricas numa pirâmide regular

Uma pirâmide se diz reta quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base.

Uma pirâmide é regular quando for reta e sua base for um polígono regular.

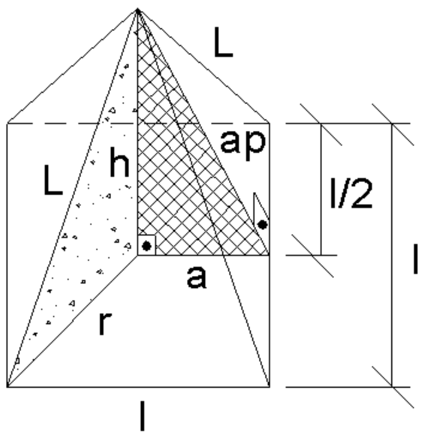
Numa pirâmide regular temos:

– O polígono da base é regular e portanto inscritível numa circunferência de raio r, chamado raio da base.

– Apótema da base (*a*): segmento que une o centro do polígono regular ao ponto médio de um dos lados.

– Apótema da pirâmide (a_p): segmento que une o vértice ao ponto médio de um dos lados da base.

Numa pirâmide regular podemos destacar as seguintes relações métricas:



$(a_p)^2=(a)^2+(h)^2$

$(L)^2=(a_p)^2+(l/2)^2$

$(L)^2=(h)^2+(r)^2$

Onde

a_p=ápotema da pirâmide; a= apótema da base ;h=altura da pirâmide; l= aresta da base; L=aresta lateral da pirâmide; r= raio do círculo circunscrito à base da pirâmide.

Área lateral (A_l) $\Rightarrow$ é a soma da área de todas as faces lateral

$$A_l = \frac{n.(l.a_p)}{2}$$

Área total (A_t) $\Rightarrow$ é a soma da área lateral com a área da base, ou seja:

$$A_t = A_l + A_b$$

O volume é dado por:

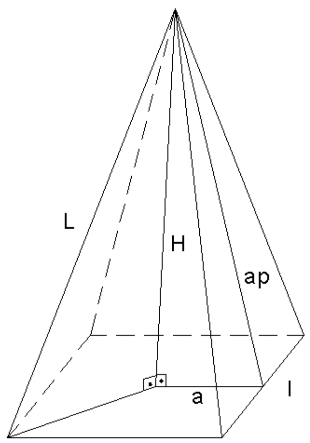
$$V = \frac{1}{3} A_b.H$$

14.4 Pirâmide quadrangular regular

É o solido que:

a) a base é um quadrado;

b) as faces laterais são triângulos iguais.



$H^2+a^2=a_p^2$

$H^2+R^2=L^2$

$$A_{FL} = \frac{l.ap}{2}$$

$$A_l = \frac{4.l.a_p}{2}$$

$A_t=A_l+A_b$

$$V = \frac{A_b.H}{3}$$

__Exemplo:__ Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 6cm e a altura mede 4cm. Calcule a área lateral, a área total e o volume da pirâmide.

Resolução:

$A_l = \frac{4.l.a_p}{2} = 60cm^2$ $\quad a_b=l/2=3cm$

$H^2+a^2=a_p^2 \Rightarrow a_p=5cm$

$A_t=A_l+A_b=96cm^2$

$A_b=36cm^2$

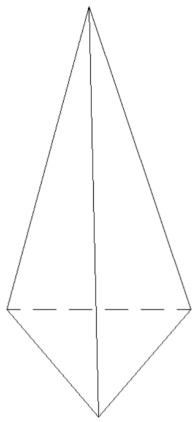
$V=48cm^3$

14.5 Pirâmide triangular regular

É o solido que:

a) a base é um triângulo equilátero;

b) as faces laterais são triângulos iguais.



$H^2+a^2=a_p^2$

$H^2+R^2=L^2$

$$A_{FL}=\frac{l.a_p}{2}$$

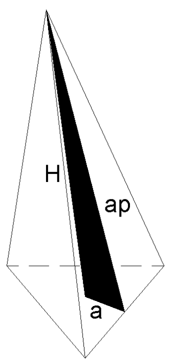
$$A_l=\frac{3.l.a_p}{2}$$

$A_t=A_l+A_b$

$$V=\frac{A_b.H}{3}$$

<u>Exemplo:</u> Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide triangular regular cuja aresta da base mede 6cm e a altura da pirâmide 1cm.

Resolução:



$$A_l=\frac{3.l.a_p}{2} \Rightarrow A_l=18cm^2$$

$$a=\frac{l.\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a_b=\sqrt{3}\text{ cm}$$

$H^2+a_b^2=a_p^2 \Rightarrow a_p=2cm$

$A_t=A_l+A_b \Rightarrow At=9(2+\sqrt{3})cm^2$

$$A_b=\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b=9\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

$V=3\sqrt{3}\text{ cm}^3$

(8) Exercícios

1. A altura de uma pirâmide quadrangular regular mede $2\sqrt{5}$ dm e a aresta da base mede 8dm. A área lateral da pirâmide, em dm^2, vale

a) 192 b) 160 c) 96 d) 64 e)32

2. Em uma pirâmide regular com 12cm de altura, tendo como base um quadrado de lado 10cm, a área lateral é

a)240cm^2 b)260cm^2 c)340cm^2 d)400cm^2 e)20 $\sqrt{119}$ cm^2

3. A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular é igual ao dobro da área de sua base. Se a aresta da base mede 3cm, então o apótema da pirâmide mede

a) 3cm b) 6cm c) 9cm d) 12cm e) 15cm

4. Em uma pirâmide quadrangular regular com 4cm de altura, tendo o apótema da base igual a 3cm, a área lateral é

a) 60cm^2 b) 30cm^2 c) 120cm^2 d) 45cm^2 e) 12cm^2

5. Uma pirâmide quadrangular regular tem 8m de altura e 10m de apótema. O seu volume é

a) 1152m^3 b) 288m^3 c) 96m^3 d) 384m^3 e)48m^3

6. O raio do círculo circunscrito à base de uma pirâmide quadrangular regular é 2 $\sqrt{2}$. Se a altura da pirâmide é 2, seu volume é

a) 32/3 b) 16/3 c) 8/3 d) 4/3 e) 2/3

7. Uma pirâmide triangular regular tem altura igual a $\sqrt{6}$ dm e aresta lateral igual 3dm. A área do círculo circunscrito à base da pirâmide é, em dm^2, igual a

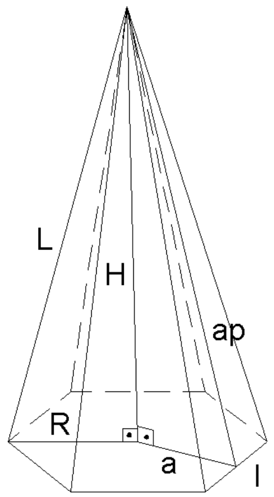
a) 3π b) 4π c) 5π d) 6π e) 9π

14.6 Pirâmide hexagonal regular

É o sólido em que:

a) a base é um hexágono regular;

b) as faces laterais são triângulos iguais.



$H^2+a^2=a_p^2$

$H^2+R^2=L^2$

$$A_{FL}=\frac{l.a_p}{2}$$

$$A_l=\frac{6.l.a_p}{2}$$

$A_t=A_l+A_b$

$$V=\frac{A_b.H}{3}$$

Exemplo: Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta da base mede 8cm e a altura 4cm.

Resolução:

$$a=\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

$H^2+a^2= a_p{}^2 \Rightarrow 48+16=a_p^2 \Rightarrow a_p=8$

$$A_l=\frac{6.l.a_p}{2}=192cm^2$$

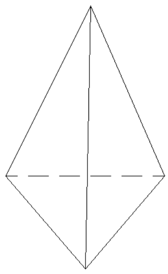
$$A_b=\frac{6.l^2\sqrt{3}}{4}=96\sqrt{3}$$

$$V=\frac{A_b.H}{3}=128\sqrt{3}cm^3$$

$A_t=A_l+A_b \Rightarrow A_t=96(2+\sqrt{3})cm^2$

14.7 Tetraedro regular

É a pirâmide triangular regular em que todas as faces são **triângulos equiláteros iguais**. Portanto, todas as arestas de um tetraedro regular são iguais e vamos representar cada uma por l.



S=6l (soma das arestas)

$$a_p = \frac{l\sqrt{3}}{2} \qquad H = \frac{l\sqrt{6}}{3} \qquad A_l = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \qquad A_t = \frac{4l^2\sqrt{3}}{4} \qquad V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

<u>Exemplo:</u> A área da base de um tetraedro regular é $9\sqrt{3}$ cm^2. Calcule o seu volume.

Resolução:

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow l=6$$

$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12} = \frac{216\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}\text{cm}^3$$

14.8 Secção da pirâmides

Sejam:

h = distância de secção ao vértice da pirâmide ou distância do plano ao vértice da pirâmide ou altura da "piramidinha" ou altura da pirâmide parcial;

H = altura da "piramidona" ou da pirâmide "grande";

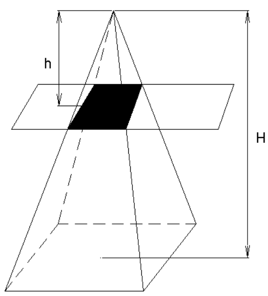
A_s = área de secção;

A_b = Área da base da pirâmide;

v = volume da "piramidinha" ou volume da pirâmide parcial;

V = volume da "piramidona" ou da pirâmide "grande".

Quando cortamos uma pirâmide por um plano paralelo à base, temos:

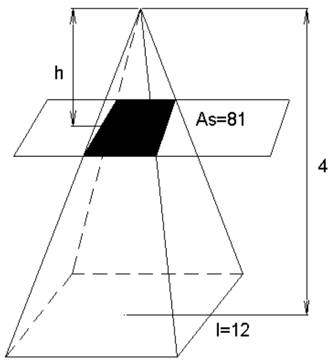


$$\frac{A_s}{A_b} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V}=\frac{h^3}{H^3}$$

<u>Exemplo:</u> Uma pirâmide quadrangular regular tem aresta da base igual a 12cm e altura 4cm. A distância do vértice que deve passar um plano paralelo à base de modo que á área da secção formada seja 81cm^2?

Resolução:



$$\frac{A_s}{A_b}=\frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{81}{144}=\frac{h^2}{4^2}$$

h=3cm

<u>(9) Exercícios</u>

1. A base de uma pirâmide é um hexágono regular cujo lado mede 2cm. Se a altura da pirâmide é $2\sqrt{3}\text{cm}$, seu volume, em cm^3, é igual a

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

2. Se o lado da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 3cm e sua aresta lateral mede 6cm, então sua altura mede

a) $3\sqrt{3}$ cm b) $\sqrt{3}$ cm c) 3cm d) $\sqrt{5}$ cm e) 5cm

3. A base de uma pirâmide regular é um hexágono que tem 6cm de lado. Se a altura da pirâmide mede 5cm, então sua aresta lateral mede

a) $\sqrt{30}$ cm b) 11cm c) $\sqrt{61}$ cm d) 30cm e) 7cm

4. O volume de um tetraedro regular de aresta 1 vale

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{12}$

5. A soma das arestas de um tetraedro regular é igual a 36cm. A sua área total, em cm^2, é igual a

a) $100\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{3}$ c) $36\sqrt{3}$ d) $144\sqrt{3}$ e) $108\sqrt{3}$

6. A aresta de base de uma pirâmide quadrangular regular mede 5cm e a altura da pirâmide mede 10cm. A que distância do vértice se deve passar um plano paralelo à base de modo que a área da secção obtida seja 16cm^2?

a) 5cm b) 6cm c) 7cm d) 8cm e) 9cm

7. Numa pirâmide quadrangular regular, a seção feita a 3dm do vértice tem área igual a 45dm^2. Se a altura da pirâmide é 6dm, então seu volume é, em dm^3, igual a

a) 90 b) 180 c) 360 d) 540 e) 1080

(10) Exercícios complementares

1. Numa pirâmide hexagonal regular de 4cm de altura, a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. Calcular:

a) a apótema da base;

b) o apótema da pirâmide

c) a aresta lateral;

d) a área da base;

e) a área lateral;

f) a área total.

2. Calcular a área total e o volume de uma pirâmide triangular regular cuja base tem 18cm de perímetro e cuja área total é igual a 3/2 da área lateral.

3. Uma pirâmide triangular regular tem área da base igual a $8\sqrt{3}$ dm^2 e altura 4dm, calcular o apótema da pirâmide.

4. Calcular a área lateral de um pirâmide quadrangular regular, cuja base está inscrita numa circunferência de $6\sqrt{2}$ cm de raio e 8cm de altura.

5. É dada uma pirâmide de base quadrada. A altura é de 9cm e o seu volume é $108cm^3$. Calcular a área total da pirâmide.

6. Quanto mede a altura de um tetraedro regular de $18\sqrt{3}\,m^2$ de área total?

7. Quanto mede a aresta de um tetraedro regular de $9\sqrt{2}\,m^3$ de volume?

8. Calcular a área total de um tetraedro cuja altura é $3\sqrt{6}$ cm.

9. Calcule a área lateral e o volume de um pirâmide quadrangular regular, sabendo que a área da base é $64cm^2$ e que a altura da pirâmide é igual a diagonal da base.

10. Em uma pirâmide hexagonal regular, cuja a altura mede 12m e o apótema da base mede 5m. Calcule a área total.

11. A área lateral de uma pirâmide regular hexagonal mede $72m^2$. Sabendo que a aresta da base mede 4m, calcule o volume.

12. A base de um tetraedro é um triângulo cujos lados medem 20cm, 24cm e 32cm. A uma distância de 3cm do vértice passa um plano paralelo à base. Sabendo que a altura do tetraedro é 4cm, calcule as medidas dos lados da secção.

13. A área da base de um tetraedro é $24cm^2$ e a altura do tetraedro é 4cm. A que distância do vértice deve passar um plano paralelo à base para que a área da secção seja $15cm^2$?

14. A base de uma pirâmide tem área de $225cm^2$. A 2/3 do vértice, corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base. Determine a área da secção.

15. Seja uma pirâmide na qual uma secção é feita a 2cm da base. Sabendo que a área da secção é igual a 4/9 da área da base, calcule a distância da secção ao vértice da pirâmide.

15 CILINDRO

15.1 Definição

Sejam dois planos α e β paralelos e o círculo de centro O e raio r contido em α. Seja a reta g, que intercepta os planos α e β sem interceptar o círculo. Cilindro circular ou cilindro de revolução é a reunião de todos os segmentos paralelos à reta g com uma extremidade no círculo e a outra no plano β. Ou também, chama-se Cilindro de Revolução ou Cilindro Circular Reto ao sólido que se obtém girando-se o retângulo em torno de um de seu lados.

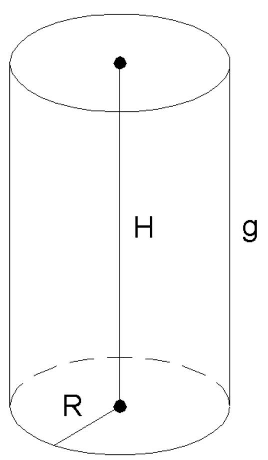
Elementos:

As bases são determinadas pelos círculos de raio R.

As geratrizes são os segmentos com extremos nas circunferências de raio R de cada base.

A altura é a distância H entre os planos que as duas bases determinam.

O eixo é a reta determinada pelos centros das circunferências de raio R.



R = raio da base; g = geratriz

H = altura do cilindro

g=h $\varnothing$=2R

$P=2\pi R$ $A_b=\pi R^2$

$A_l=2\pi Rg$ ou $A_l=2\pi RH$

$A_t=A_l+2A_b$

$V=A_b xH$ ou $V=A_b xg$

<u>Exemplo:</u> O volume de um cilindro de revolução é $567\pi cm^3$ e a sua geratriz mede 7cm. Calcule a área total do cilindro.

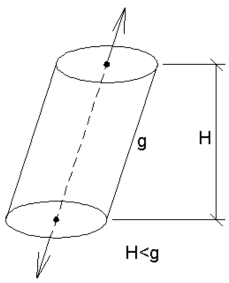
Resolução:

$V=A_b xg \Rightarrow r=9$

$At=Al+2A_b \Rightarrow At=288\pi cm^3$

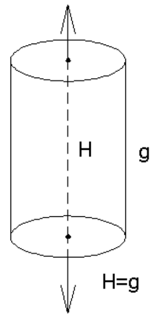
15.2 Classificação

Os cilindros podem ser classificados conforme a posição das geratrizes em relação aos planos das bases:



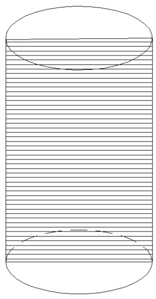
a) cilindro circular oblíquo $\Rightarrow$ quando as geratrizes são oblíquas às bases.

b) cilindro circular reto ou de revolução $\Rightarrow$ quando as geratrizes são perpendiculares às bases.



15.3 Secção transversal e meridiana de um cilindro de revolução

Secção transversal é a intersecção do cilindro com um plano paralelo às bases. A secção transversal é congruente às bases.



Secção meridiana de um cilindro circular reto é a intersecção deste com um plano que contém o eixo. A seção meridiana de um cilindro é um retângulo.

.A área da secção meridiana é dada por $A_{sm}=2Rg$ ou $A_{sm}=2RH$ e o perímetro $P_{sm}=4R+2g$ ou $P_{sm}=4R+2H$.

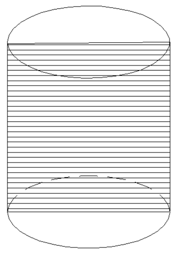
Exemplo: O perímetro da base de um cilindro circular reto é 12πcm. Sabendo que a geratriz do cilindro mede 9cm, calcule a área de sua secção meridiana.

Resolução:

$P=2\pi R \Rightarrow R=6$

$A_{sm}=2Rg \Rightarrow Asm=108$.

15.4 Cilindro equilátero



É o cilindro de revolução cuja secção meridiana é um **quadrado**.

Num cilindro equilátero, a geratriz ou a altura é igual ao dobro do raio, ou seja $g=H=2R$

Exemplo: A área lateral de um cilindro equilátero é $100\pi cm^2$. Calcule o seu volume.

Resolução:

$g=H=2R$

$Al=2\pi Rg \Rightarrow r=5cm$

$V=\pi R^2H=\pi 25.10=250\pi cm^3$

Logo o volume é $250\pi cm^3$.

(11) Exercícios

1. Num cilindro circular reto de volume 36π, a altura mede 4, então o raio da base mede

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 9

2. A área lateral de um cilindro de 6m de raio é igual a área da base. A altura desse cilindro é

a) 2 b) 3 c) 5 d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{5}$

3. A secção meridiana de um cilindro equilátero tem $64cm^2$ de área. O volume do cilindro é

a)$32\pi cm^3$ b)$48\pi cm^3$ c)$64\pi cm^3$ d)$108\pi cm^3$ e)$128\pi cm^3$

4. Um cilindro equilátero que tem $128\pi dm^3$ de volume, tem área total, em dm^2, igual a

a) 32π b) 48π c) 64π d) 96π e) 128π

5. Seja um cilindro de revolução de volume V. Se quadruplicarmos a medida do raio da base e reduzirmos sua altura à metade, seu volume passa a ser

a) 2V b) 4V c) 6V d) 8V e) 16V

6. De um cubo de aresta 2cm retiramos um cilindro de diâmetro 2cm. O volume do sólido resultante e, em cm^3, igual a

a) 0 b) 6π c) $8 - 2\pi$ d) $8 - 3\pi$ e) $8 - 8\pi$

7. A área total de um cilindro reto de revolução é 128π e sua altura é 12. A área lateral do sólido é

a) 192π b) 96π c) 64π d) 48π e) 36π

(12) Exercícios complementares

1. A área da secção meridiana de um cilindro circular reto é de $60cm^2$. Sabendo que a área total é de $78\pi cm^2$, determine o raio.

2. Um cilindro reto tem 10cm de altura, a área lateral é igual a área da base. Calcular:

a) a área lateral;

b) a área da secção meridiana.

3. Um cilindro reto tem altura igual ao raio da base e a sua área lateral mede $32\pi cm^2$. Calcular o seu volume.

4. Calcule o volume da um cilindro reto, gerado pela rotação de um retângulo de dimensões 3cm e 5cm em torno do maior lado.

5. A área lateral de um cilindro equilátero é $100\pi cm^2$. Calcular a área total e o volume.

6. A superfície lateral de um cilindro reto é $150\pi cm^2$. Calcule o volume sabendo que sua altura é o triplo da medida do raio.

7. Considere o retângulo ABCD. Uma rotação completa em torno de AB gera um cilindro de volume $96\pi cm^3$ e em torno de BC gera um cilindro de volume $144\pi cm^3$. Calcule os lados do retângulo.

8. Um cilindro está inscrito num prisma quadrangular regular, cuja aresta da base mede 8cm e a altura mede 12cm. Calcular a área lateral, a área total e o volume do cilindro.

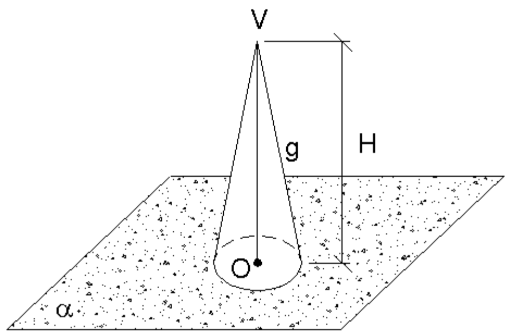
9. O diâmetro interno de um tanque de gasolina é 40cm. Qual deve ser sua altura para que o volume seja 88 dm^3? (adote π=3,14)

10. A razão entre o raio e a altura de um cilindro reto é 2/5. Calcular seu volume, sabendo que a área total é $63\pi cm^2$.

16 CONE DE REVOLUÇÃO

16.1 Definição

Consideremos um círculo de centro o e raio r contido num plano e um ponto V fora de α. Chamamos cone ou cone circular a reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e outra nos pontos do círculo. Ou também, chama-se Cone de Revolução ou Cone Circular Reto ao sólido que se obtém girando-se um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



Elementos:

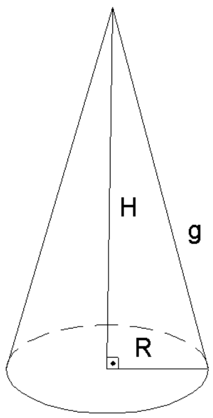
<u>Vértice</u> $\Rightarrow$ é o ponto V;

<u>Base</u> $\Rightarrow$ é o circulo de raio R.

<u>Geratriz</u> $\Rightarrow$ são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.

<u>Altura</u> $\Rightarrow$ é a distância entre o vértice V e o ponto O da base.

<u>Eixo</u> $\Rightarrow$ é a reta VO.



R = raio da base; g = geratriz; H = altura

$H^2+R^2=g^2$ $\varnothing=2R$ $P=2\pi R$

$A_b=\pi R^2$ $Al=\pi Rg$ $At=Al+A_b$

$$V=\frac{A_b.H}{3}$$

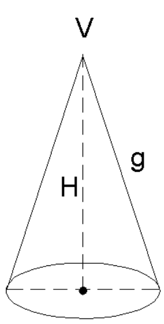
<u>Exemplo:</u> Num cone de revolução, a área da base é $36\pi cm^2$ e a área total é $96\pi cm^2$. Calcule o volume do cone.

Resolução:

$A_b=\pi R^2 \Rightarrow r=6cm$ $At=Al+A_b \Rightarrow g=10$

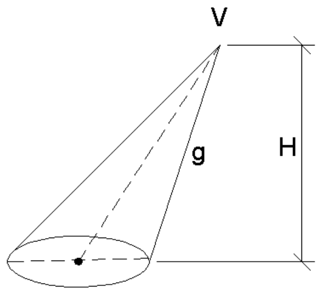
$H^2+R^2=g^2 \Rightarrow H=8cm$ $V=\frac{A_b.H}{3} \Rightarrow V=96\pi cm^2$

16.2 Classificação



Cone oblíquo $\Rightarrow$ quando o eixo é oblíquo à base.

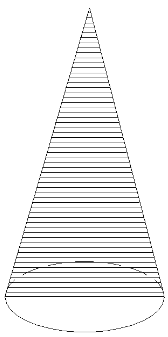
Cone reto ou de revolução $\Rightarrow$ quando o eixo é perpendicular à base. Num cone reto de raio de base r e altura H se indicarmos a geratriz por g, podemos estabelecer a seguinte relação métrica:



$$g^2 = r^2 + H^2$$

16.3 Secção transversal e meridiana de um cone de revolução

Secção transversal é a intersecção do cone com um plano paralelo à base.



Secção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles, onde a base é o diâmetro do cone (2r) e cada lado congruente é a geratriz do cone (g).

A área da secção meridiana é dada por Asm=R.H e o perímetro Psm=2R+2g.

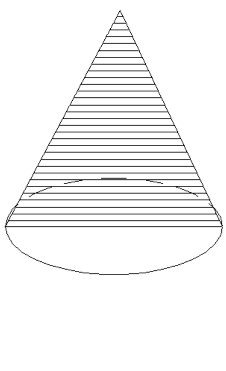
<u>Exemplo:</u> Calcule a área da secção meridiana de um cone circular reto de raio da base 8cm, sabendo que a geratriz mede 12cm.

Resolução:

$H^2+R^2=g^2 \Rightarrow H=4\sqrt{5}$ cm

$Asm=R.H \Rightarrow Asm=32\sqrt{5}$ cm^2

16.4 Cone equilátero



É o cone cuja secção meridiana é um triângulo equilátero.

Num cone equilátero, a geratriz é igual ao dobro do raio ou seja g=2R.

Exemplo: A área total de um cone equilátero é 12π. Calcule a altura do cone.

Resolução:

$g=2r$

$H^2+R^2=g^2 \Rightarrow H=2\sqrt{3}$ cm

$At=Al+A_b \Rightarrow r=2$

16.5 Secção nos cones

Sejam:

h = distância de secção ao vértice do cone ou distância do plano ao vértice do cone ou altura da "conezinho" ou altura do cone parcial;

H = altura do "conezão" ou do cone "grande";

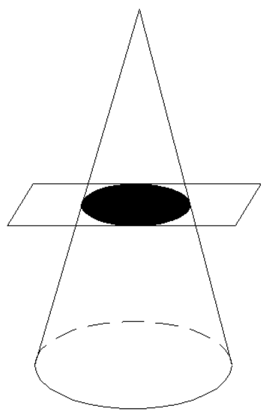
A_s = área de secção;

A_b = Área da base do cone;

v = volume do "conezinho" ou volume do cone parcial;

V = volume do "conezão" ou do cone "grande".

Quando cortamos um cone de revolução por um plano paralelo à base, temos

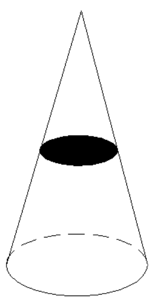


$$\frac{A_s}{A_b} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{h^3}{H^3}$$

<u>Exemplo:</u> Um cone de revolução tem raio da base igual a 8cm e altura igual a 16cm. A que distância do vértice devemos passar um plano paralelo à base de modo que a área da secção feita seja $9\pi cm^2$?

Resolução:



$A_b=\pi R^2 \Rightarrow A_b=64\pi$

$$\frac{A_s}{A_b} = \frac{h^2}{H^2} \Rightarrow h=6$$

(13) Exercícios

1. Um cone que tem raio 3cm e a altura igual ao diâmetro da base, tem o volume de

a) $24\pi cm^3$ b) $12\pi cm^3$ c) $18\pi cm^3$ d) $54\pi cm^3$ e) $36\pi cm^3$

2. Duplicando a altura e reduzindo à metade o raio da base de um cone de volume V_1, obtém-se um cone de volume V_2. O valor de V_1/V_2 é

a) ¼ b) ½ c) 1 d) 2 e)4

3. A altura da um cone de revolução que tem área lateral igual a 15π e raio da base igual a 3 é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e)5

4. A área lateral de um cone circular reto é o dobro da área de sua base. A razão entre a geratriz e o raio do cone é

a)1/3 b) ½ c) 1 d) 2 e) 3

5. Uma ampulheta pode ser considerada como formada por dois cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. A razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro é

a) ½ b) 1/3 c) ¼ d) 1/6 e) 1/8

6. A secção meridiana de um cone equilátero tem perímetro igual a 30cm. A área lateral do cone, em cm^2, é igual a

a) 250π b) 50π c) 25π d) 100π e) 90π

7. A razão entre a área total e a área lateral de um cone equilátero é

a) ½ b) 2/3 c) 1 d) 3/2 e) 2

(14) Exercícios complementares

1. Calcule a geratriz, a área lateral e a área total de um cone reto de raio igual a 3m e altura igual a 4m.

2. O volume de um cone equilátero é de $9\pi\sqrt{3}$ cm^3. Determine a área lateral e a área total.

3. Num cone reto, cuja base tem área igual a 27πcm^2, uma geratriz forma um ângulo de 60º com eixo. Calcule o volume.

4. A área total de um cone equilátero mede 50πcm^2. Calcule a medida de sua altura.

5. A base de um cone reto está inscrita num quadrado de 6cm de lado. Sabendo que a geratriz do cone mede 5cm. Calcule a área lateral do cone e a área da secção meridiana.

6. Num cone reto, o diâmetro da base mede 24cm e o perímetro de sua secção meridiana é 50cm. Calcule o volume.

7. Um cone de revolução tem área total igual ao triplo da área da base. Se o perímetro da base é igual a 6πm. Calcule o volume do cone.

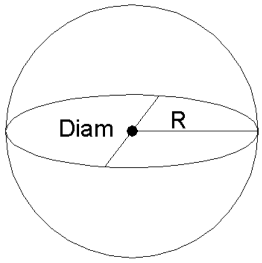
8. Num cone reto de altura 8cm, a área de sua secção meridiana é igual a 48cm^2. Calcule a área lateral e a área total.

9. Calcule o volume de um cone cuja base está inscrita num quadrado de 64m^2 de área e cuja geratriz mede 5m.

10. Ache o raio da base de um cone equilátero, sabendo que sua área lateral mede 128πcm^2.

17 ESFERA

17.1 Definição



Chama-se esfera ao sólido que se obtém girando-se um semi-círculo em torno do seu diâmetro.

Elementos e fórmulas da esfera:

R = raio da esfera	$\varnothing=2R$
A = área da esfera	$A=4\pi R^2$
V = volume da esfera	$V=\frac{4\pi R^3}{3}$
A_{cm} = área da círculo máximo	$A_{cm}=\pi R^2$

<u>Exemplo:</u> O volume da esfera é $288\pi cm^3$. Calcule a área da superfície da esfera.

Resolução:

$$V=\frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow r=6cm$$

$$A=4\pi R^2 \Rightarrow 144\pi cm^2$$

17.2 Secção na esfera

Quando um plano corta uma esfera, ele determina sobre a esfera um círculo que é chamado secção da esfera. Portanto, a secção de uma esfera sempre é um círculo. Vamos chamar de:

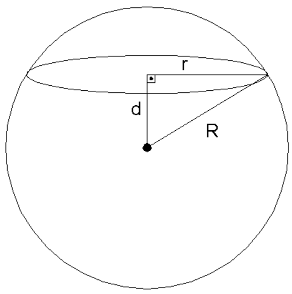
r = raio da secção do circulo

d = distância da secção ao centro da esfera;

R = Raio da esfera;

As = área da secção;

Ps = perímetro da secção.



$d^2+r^2=R^2$

$A=\pi r^2$

$P=2\pi r$

<u>Exemplo:</u> Um plano intercepta uma esfera a 6cm do centro, determinando uma secção de 8cm de raio. Calcule o volume da esfera.

Resolução:

$d^2+r^2=R^2 \Rightarrow R=10cm$

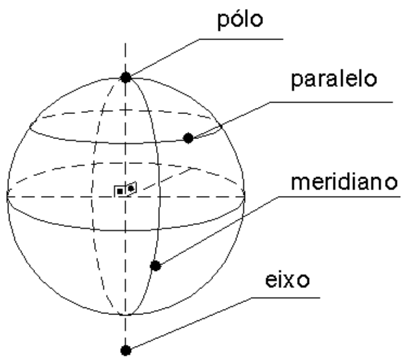
$V=\frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V=(4000\pi)/3cm^3$

17.3 Eixo, pólo, paralelo, equador e meridiano

Numa esfera de centro O e raio r, ou na correspondente superfície esférica, centro O e raio r, vamos definir eixo, pólo, paralelo (equador incluído) e meridiano.

<u>Eixo</u> $\Rightarrow$ é qualquer reta que passa pelo centro desta esfera.

Fixando um eixo, definimos:



<u>Pólo</u> $\Rightarrow$ é cada um dos pontos onde o eixo encontra a superfície esférica. Cada eixo tem dois pólos;

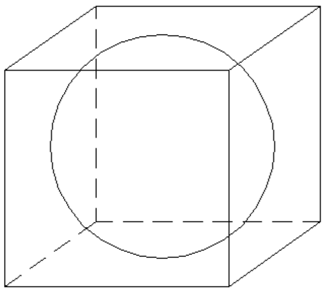
<u>Paralelo</u> $\Rightarrow$ é a circunferência determinada na superfície esférica por um plano à esfera e perpendicular ao eixo;

<u>Equador</u> $\Rightarrow$ é a circunferência (máxima) determinada na superfície esférica por um plano perpendicular ao eixo e que passa pelo centro da esfera;

Note-se que o equador é um paralelo. O que ocorre, e justifica o nome “paralelos” para estas linhas, é o paralelismo dos planos secantes que determinam tais circunferências na superfície da esfera.

Meridiano $\Rightarrow$ é a circunferência (máxima) determinada na superfície esférica por um plano que contém o eixo da esfera.

17.4 Esfera inscrita num cubo

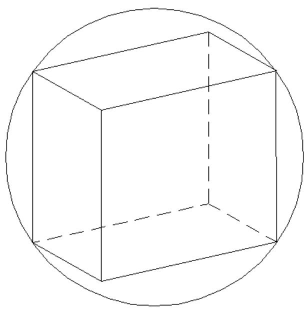


$\varnothing$=a

a=2R

R=a/2

17.5 Cubo inscrito numa esfera



Diam=Diagonal

$2R = a\sqrt{3}$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo: Calcule o volume de uma esfera inscrita num cubo de área total 96cm^2.

Resolução:

$At = 6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4$

$2r = a$

$R = a/2 \Rightarrow R = 2$

$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V = 32\pi/3cm^3$

(15) Exercícios

1. A razão entre o volume e a área de uma esfera de raio 2π é

a) $3/\pi$ b) $\pi/3$ c) $2\pi/3$ d)2π e) $\pi/2$

2. O volume de uma semiesfera de raio $3\sqrt{2}$ é

a)$216\sqrt{2}$ b)$180\sqrt{2}\,\pi$ c)$72\sqrt{2}\,\pi$ d)$36\sqrt{2}\,\pi$ e)$18\sqrt{2}\,\pi$

3. Duas esferas de chumbo, uma de raio 2cm e outra de raio 3cm, fundem-se formando uma nova esfera. O raio da nova esfera mede, em cm

a) 2,5 b) 5 c) $\sqrt[3]{35}$ d) 35 e) 6

4. Uma panela cilíndrica de 20cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura de 16cm, o número de doces, em formato de bolinhas de 2cm de raio, que se podem obter com toda a massa é

a) 300 b) 250 c) 200 d) 150 e) 100

5. A área da interseção de um plano com uma bola de raio 13 é 144π. A distância do plano ao centro da bola é

a) 1 b) 5 c) 8 d) 12 e) 25

6. Uma esfera de área 2π está inscrita em um cubo. A área total do cubo é

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) $6\sqrt{2}$ d)8 e)12

7. Uma esfera de volume 36π está inscrita em um cilindro de volume igual a

a) 9π b) 18π c) 24π d) 54π e) 60π

8. Uma esfera de raio 5cm é seccionada por um plano distante 3cm do centro. Calcule a área da secção.

9. A intersecção de um plano com uma esfera é um círculo de $9\pi cm^2$ de área. Esta intersecção ocorre a 4cm do centro da esfera. Determinar a área da superfície esférica e o volume.

10. Calcule a área da uma superfície esférica, sabendo que a medida de uma circunferência máxima é de 6π.

11. A área da superfície da uma esfera e a área total do cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é $12\pi cm^3$ e o raio da base é 3cm.

12. Se um cubo de aresta igual a $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm está inscrito numa esfera, calcule seu volume.

13. Calcule o volume da esfera circunscrita num cone reto de 8cm de raio e 16 cm de altura.

14. Uma esfera está inscrita num cone circular reto. Sabendo que o raio do cone é 3cm e sua altura é 4cm, calcular o volume da esfera.

15. Calcule o volume de uma esfera inscrita num cone reto sabendo-se que o raio da base do cone é 5cm e a sua altura é 12cm.

(16) Exercícios complementares

1. (UFSM/1995) O líquido contido numa lata cilíndrica deve ser distribuído em potes, também cilíndricos, cuja altura é ¼ da altura da lata e cujo diâmetro da base é 1/3 do diâmetro da base da lata. O número de potes que serão necessários é

a) 12 b) 36 c) 48 d) 72 e) 144

2. (UFSM/1996) Uma pirâmide pentagonal regular de volume V e altura D é seccionada por um plano paralelo da base a uma distância d=½D do vértice, resultando uma pirâmide menor e um tronco de pirâmide. A diferença entre os volumes da pirâmide maior e da menor vale

a) (7/8) V b) (2/3) V c) (3/8) V d) (5/8) V e) (1/2) V

3. (UFSM/1996) Sejam duas esferas de centros C_1 e C_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente, com $R_1>R_2$. Seja α um plano diametral comum às duas esferas e d à distância C_1C_2. As esferas são secantes se, e somente se,

a) $d<R_1+R_2$ b) $d<R_1-R_2$ c) $d=R_1+R_2$

d) $d=R_1-R_2$ e) $R_1-R_2<d<R_1+R_2$

4. (UFSM/1997) Na figura, o perímetro do quadrilátero ABCD mede $4(1+\sqrt{2})$cm. Então o volume do cubo, em cm^3, é

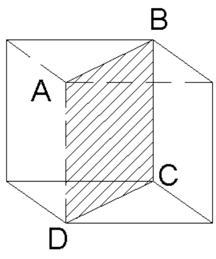
a) $4(1+\sqrt{2})$

b) 8

c) 16

d) 64

e) $2\sqrt{3}$



5. (UFSM/1998) Deve-se construir um tanque para armazenagem de gás, na forma de um cilindro reto de 3m de altura, com um hemisfério em cada extremidade. Se o raio r mede 2m, então o volume do tanque, em m^3, é

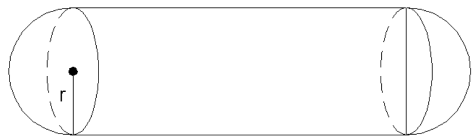
a) $(68/3)\pi$

b) 32π

c) $(52/3)\pi$

d) $(32/3)\pi$

e) 68π



6. (UFSM/1998) A figura a seguir representa um prisma triangular reto de altura h, no qual é feito um corte conforme a secção ACE. Se V é o volume do prisma inicial, V_1 é o volume do tetraedro ABCE e V_2 o volume do pentaedro ACFDE, então

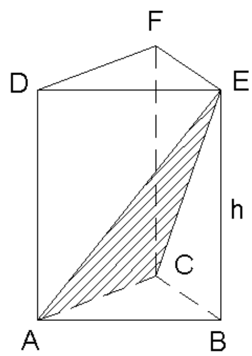
a) $V_1=½V$

b) $V_2=1/3V$

c) $V_1=2/3V$

d) $V_2=2V_1$

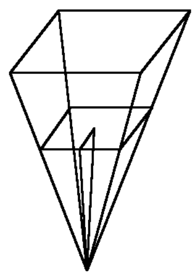
e) $V_1=V_2$



7. (UFSM/1999) Um poliedro convexo tem 12 faces triangulares e as demais, pentagonais. Sabendo que o número de arestas é o triplo do número de faces pentagonais, então a soma dos ângulos de todas as faces pentagonais é, em radianos, igual a

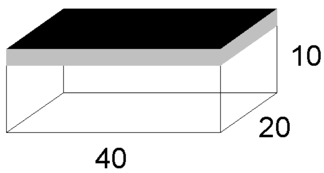
a) 3π b) 12π c) 36π d) 64π e) 108π

8. (UFSM/1999) Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular regular, para verificar o índice pluviométrico de uma certa região. A água, depois de recolhida, é colocada num cubo de 10cm de aresta. Se, na pirâmide, a água atinge uma altura de 8cm e forma uma pequena pirâmide de 10cm de apótema lateral, então a altura atingida pela água no cubo é de



a) 2,24cm
b) 2,84cm
c) 3,84cm
d) 4,24cm
e) 6,72cm

9. (UFSM/2000) Uma caixa de sapatos (com tampa) é confeccionada com papelão e tem as medidas, em centímetros, conforme a figura. Sabendo-se que à área total da caixa são acrescentados 2% para fazer as dobras de fixação, o total de papelão empregado na confecção da caixa, em cm^2, é



a) 2406
b) 2744
c) 2856
d) 2800
e) 8000

10. (UFSM/2000) Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades. Supondo-se que as bolas têm raio a em centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que NÃO é ocupado pelas bolas é, em cm^3,

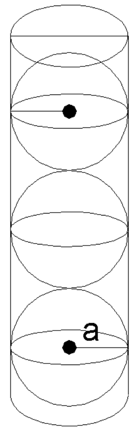
a) $2\pi a^3$

b) $(4/3)\pi a^3$

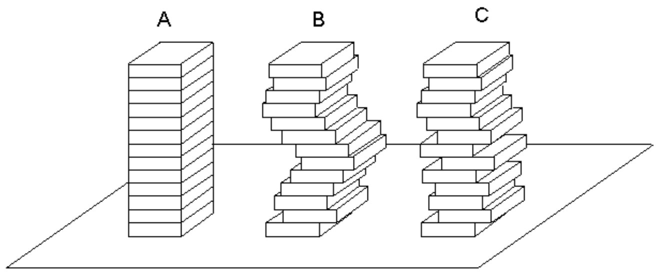
c) $(\pi a^3)/3$

d) a3

e) $(2/3)\pi a^3$



11. (UFSM/2001)



Três crianças estavam brincando na biblioteca da escola e resolveram fazer pilhas de mesma altura, com livros, conforme a figura. A mais organizada fez a pilha A, e as outras duas fizeram as pilhas B e C. Considerando-se que todos os livros têm a mesma área de capa e que as pilhas têm a mesma altura, pode-se afirmar que

a) o volume da pilha A é maior do que o volume da pilha c.

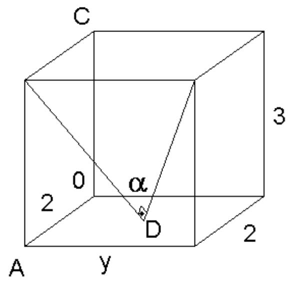
b) os volumes das pilhas B e C são iguais e maiores do que o volume da pilha A.

c) o volume da pilha A é menor do que o volume da pilha B que é menor do que o volume da pilha C.

d) os volumes das três pilhas são iguais.

e) não existem dados suficientes no problema para decidir sobre os volumes e compará-los.

12. (UFSM/2001) No paralelepípedo retângulo apresentado, o ponto D indica a interseção das diagonais da base. O valor de y, para que o ângulo α tenha 90º, é



a) um número entre 6 e 7

b) menor que 6

c) maior que 7

d) 6

e) 7

13. (UFSM/2002) Um caminhão tem carroceria com 3,40 metros de comprimento, 2,50 metros de largura e 1,20 metros de altura. Quantas viagens devem-se fazer, no mínimo, para transportar 336 metros cúbicos de arroz?

a) 24 b) 29 c) 30 d) 32 e) 33

14. (UFSM/2002) Um retângulo de lados x e y, com x>y, gira, primeiro, ao redor de um eixo que contém o lado x e, depois, ao redor de um eixo que contém o lado y. No primeiro caso, é gerado um sólido de revolução com área lateral S_1 e volume V_1. No segundo caso, o sólido gerado tem área lateral S_2 e volume V_2. Ambos os sólidos assim gerados são _______ de revolução, a área lateral S_1 é _______ área lateral S_2, e o volume V_1 é________ volume V_2.

Selecione a alternativa que completa corretamente as lacunas.

a) cilindros – igual à – menor que o

b) cones – menor que a – menor que o

c) cilindros – menor que a – maior que o

d) cones – igual à – maior que o

e) cilindros – menor que a – igual ao

15. (UFSM/2002) Uma pirâmide tem altura H. A que distância do vértice deve-se passar um plano paralelo à base, para dividi-la em duas partes de mesmo volume?

a) $H/\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{H}/2$ c) $3\sqrt{H}$ d) H/3 e) H/2

16. (UFSM-PEIES/1998) Um cone circular reto de volume V cm^3 tem h cm de altura. A uma distância h/2 do vértice do cone, traça-se um plano paralelo à sua base, determinando, assim, um outro cone de volume W cm^3. Então

a) V=(3/2)W b) V=2W c) V=4W d) V=6W e) V=8W

17. (UFSM-PEIES/1998) Deseja-se construir um aquário de vidro na forma de prisma regular, de base hexagonal, com 20cm de aresta. Sabendo que $1000cm^3$ eqüivalem a 1 litro, a altura do aquário, em cm, para que o mesmo, totalmente cheio, contenha 3,6 litros de água deve ser

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$

18. (UFSM-PEIES/1999) O reservatório de água de uma residência tem a forma cúbica com 1m de aresta. Numa situação de emergência, teve de ser adaptado outro, de forma cilíndrica, que se encaixasse, perfeitamente, no anterior. Desprezando as espessuras das paredes dos reservatórios, a caixa cilíndrica deve conter, em relação à cúbica, aproximadamente,

a) 1,785 l a mais.

b) 0,785 l a menos.

c) 215 l a mais.

d) 215 l a menos

e) 1,215 l a mais.

19. (UFSM-PEIES/1999) Uma esfera está inscrita num cilindro circular reto de raio r. O volume da esfera é igual a _____ do volume do cilindro, e a razão entre a área da superfície lateral do cilindro e a área da superfície esférica é ___.

Assinale a alternativa que completa, corretamente, as lacunas.

a) 2/3; 1

b) 2/3 ; 1/3

c) 3/2; $1/\pi$

d) 3/2; r

e) r/π; 1

20. (UFSM-PEIES/2000) Um poliedro convexo tem três faces triangulares, uma quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. A soma dos ângulos de todas as faces desse poliedro é

a) 2880º b) 2890º c) 3000º d) 4000º e) 4320º

21. (UFSM-PEIES/2000) Considere um cilindro circular reto de raio da base 6cm e altura 10 cm. V1 é o volume do prisma regular triangular e V2 é o volume do prisma regular hexagonal, inscritos no cilindro. A relação V1/V2 é

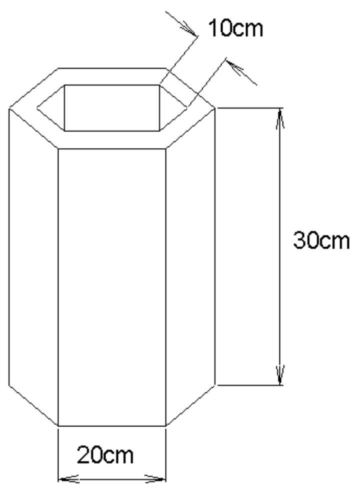
a) 3 b) ½ c) $(3\sqrt{3})/8$ d) $(8\sqrt{9})/3$ e) $(3\sqrt{3})/4$

22. (UFSM-PEIES/2001) Numa caixa d'água na forma de um paralelepípedo retângulo, com área da base S e altura h, está depositada uma quantidade de água que ocupa a terça parte de sua capacidade total. Retirando-se 300 l de seu conteúdo , a altura do nível de água baixa 10%. O número que expressa a capacidade dessa caixa, em litros, é

a) 900 b) 1800 c) 2700 d) 3600 e) 9000

23. (UFSM-PEIES/2001) Tem-se uma peça feita conforme a figura, ou seja, um prisma hexagonal regular reto com um "buraco" também na forma de prisma hexagonal regular reto, de mesma altura. O volume dessa peça, em cm^3, é

a) $27000\sqrt{3}$
b) $13500\sqrt{3}$
c) $7000\sqrt{3}$
d) $4500\sqrt{3}$
e) $2250\sqrt{3}$



GABARITO

(1) 1. e 2. a 3. d 4. c 5. b 6. e 7. c 8. c 9. B 10. c.

(2) 1.e 2.a 3. b 4. d 5. c 6. e 7. a 8. e 9. c 10. c.

(3) 1. a 2. d 3. e 4. d 5. a 6. e 7. e 8. e 9. a 10. d.

(4) 1. e 2. b 3. e 4. d 5. d 6. d 7. b 8. d 9. a.

(5) 1. c 2. d 3. a 4. d 5. a 6. c 7. c 8. b 9. b 10. c 11. b.

(6) 1. F=8 2. Faces quadrangulares 9 e triangulares 18. 3. 31 4. 3240º
5. Faces pentagonais 2 e quadrangulares 10. 6. Pentadecágono
7. 10 8. 5 quadrangulares e 10 triangulares.

(7) 1. d 2. e 3. c 4. b 5. b 6. d 7 d
8. a) $9\sqrt{3}$ b) 144 c) $18(8+\sqrt{3})$ d) $72\sqrt{3}$
9. $A_t=192cm^2$, $V=144cm^3$, D=13cm
10. $A_t=24cm^2$, $D=2\sqrt{3}$ cm, $V=8cm^3$, $A_l=16cm^2$
11. a) $16\sqrt{3}$ b) $16(9+2\sqrt{3})$ c) 144 d) $96\sqrt{3}$
12. 600 13. 360 14. a) $84m^2$ b) 4 latas 15. 108

(8) 1. c 2. b 3. a 4. a 5. d 6. a 7. a.

(9) 1. b 2. a 3. c 4. e 5. c 6. d 7. c.

(10) 1. a) 3cm b) 5cm c) $2\sqrt{7}$ cm d) $18\sqrt{3}\,cm^2$ e) $30\sqrt{3}\,cm^2$ f) $48\sqrt{3}\,cm^2$
2. $A_t=27\sqrt{3}\,cm^2$ e $V=9\sqrt{3}\,cm^3$ 3. $\frac{2\sqrt{42}}{3}$ 4. $A_l=240cm^2$
5. $A_t=36(\sqrt{10}+1)cm^2$ 6. $2\sqrt{3}$ m 7. $3\sqrt[3]{4}$ 8. $A_t=81\sqrt{3}\,cm^2$
9. $A_l=192cm^2$ e $V=\frac{512\sqrt{2}}{3}\,cm^3$ 10. $180\sqrt{3}\,m^2$

11. $V=48\sqrt{2}\,m^3$ 12. 15cm; 18cm; 24cm. 13. $\sqrt{10}$ cm
14. $100cm^2$ 15. 4cm.

(11) 1. c 2. b 3. e 4.d 5. d 6. c 7.b.

(12) 1. 3cm 2. a) $400\pi cm^2$ b) $400cm^2$ 3. $V=64\pi cm^3$ 4. $V=45\pi cm^3$
5. $A_t=150\pi cm^2$ e $V=250\pi cm^3$ 6. $V=375\pi cm^3$ 7. 4cm e 6cm
8. $A_l=96\pi cm^2$ $A_t=128\pi cm^2$ e $V=192\pi cm^3$ 9. H=70cm
10. $V=135\pi/2cm^3$

(13) 1. c 2. d 3. d 4. d 5. d 6. b 7. d.

(14) 1. 5m; $15\pi\ m^2$; $24\pi m^2$ 2. $A_l=18\pi m^2$ e $A_t=27\pi m^2$ 3. $27\pi m^3$
4. $5\sqrt{2}$ cm 5. $A_l=15\pi cm^2$ e $A_{sm}=12cm^2$ 6. $V=240\pi cm^2$
7. $V=9\pi\sqrt{3}\,m^3$ 8. $A_l=60\pi cm^2$ e $A_t=96\pi cm^2$ 9. $V=16\pi m^3$ 10. 8cm.

(15) 1. c 2. d 3. c 4. d 5. b 6. e 7. d 8. $16\pi cm^2$
9. $A=100\pi cm^2$ e $V=500\pi/3cm^3$ 10. 36π 11. $\sqrt{6}$ cm
12. $256\pi/3cm^3$ 13. $4000\pi/3cm^3$ 14. $9\pi/2cm^3$ 15. $4000\pi/81cm^3$

(16) 1. b 2. a 3. e 4. b 5. a 6. d 7. e 8. c
9. c 10. a 11. d 12. a 13. e 14. a 15. a 16. e
17. b 18. d 19. a 20. a 21. b 22. e 23. b.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior.** V. 5, Santa Maria, 1999

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

ESCOLA ESTADUAL DE 2º GRAU CILON ROSA. **Geometria espacial.** Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1999, 79 p.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática.** V. 2, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática.** Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** V. 2, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volúme Único Curso Completo.** Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.

TIZZIOTI, José Guilherme. **Matemática: programa completo: 2º grau, vestibular.** Ática, São Paulo, 1982.