Equipes Teams.

→ material de aula.   8/11, 10/11 } Não haverá aula.

→ plano de ensino.

email do professor   TLC revisão

Métodos de convergência. Revisão

RAULMTA @ UNB.BR → tudo minusculo.

15 encontros.

Ementa: Amostra aleatória. Distribuição amostrais. 3. estimação 4. propiedades dos estimadores. 5. suficiência, completude. e famílias exponenciais. MVM. inf. Fisher. 10 Bayes. estimação intervalor

modulos 1 e 2 Revisar:

tópico » Quantidade pivotal

1. Kohatyi, Vijay, and A. K. ehsanes saleh.
An introduction to probability and statistics. → seguir

2. Casella → ficar para consulta

1ª prova 22 de Dezembro → toda parte de estimação pontual.

1

Ñ haverá Lista de exercício

Problemas 8.2

$\downarrow$

$\boxed{\text{Resolver.}}$ //

$\boxed{\text{pag 337. Livro.}}$ //

8.1 introdução

estimação pontual paramétrica.

x_i — $x_1 \dots x_n$ → Amostra aleatórias.

↓

$\boxed{\text{população}}$

→ exemplo da caixa bombom para dependência

Auto correlação ou correlação temporal.

seq. independente

I.I.D

forçar amostras IID

$p_\theta(x)$ → probabilidade de massa caso discreto

$f_\theta(x)$ → caso contínuo

$F_\theta(x) = P_\theta(X \leq x)$ → para o caso de função acumulado

o tela ñ vazia

$\theta = (\theta_1, \dots \theta_k)' \in \Theta$

↓

espaço paramétrico

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

(1)

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right.$$

$x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+}$

Θ ~~Θ~~ =

Inferência estatística   25/10/22

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$

Vetor de parâmetro   Espaço paramétrico

$X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{X}$, e

em que $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$

problema: Estimar $\psi(\theta)$ por meio de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ c/ θ desconhecido e ψ: função real.

$X_i \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$

Forma   Escala

$E(X_i) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $Var(X_i) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

O livro inicia utilizando estimador com delta depois muda p/ T

$T(X_1, \ldots, X_n)$

$\boxed{T: \mathcal{X} \to \Theta}$

qualquer função real c/ esse prop. é um estimador.

- Definição de critério p/ obtenção de estatística $T(X_1, \ldots, X_n)$

- Ex $|T(X_1, \ldots, X_n) - \psi(\theta)|$

$T(X_1, \ldots, X_n)$: V.A $\psi(\theta)$: Fixo

Inferencia estatistica

25/10/22

omontar criterio p/ escolha do estimador

· ex anterior

$$|T(x_1, \dots x_n) - \psi(\theta)|$$

$T(x_1, \dots x_n)$ → v. aleatorio

$\psi(\theta)$ → Fixo

distancia aleatória

$$P_\theta \left[|T_x - \psi_\theta| > \varepsilon \right]$$

p/ algum ε

$$E_\theta |T_x - \psi_\theta|^{r}$$

r → serve p/ penalizar

p/ algum r positivo

$$E|T_x - \psi_\theta|^2 = mse_\theta(t)$$

$mse_\theta(t)$ → Erro quadratico médio

T'_x é "melhor" do que T_x se

- $P_\theta(|T_x' - \psi_\theta| > \varepsilon) \leq (P_\theta |t_x - \psi_\theta| > \varepsilon)$
- $E_\theta |T_x' - \psi_\theta|^r \leq E_\theta |T_x - \psi_\theta|^r$

$$\boxed{var_\theta(T'_x) + b^2(T'_x, \theta) \leq var_\theta(T_x) + b^2(T_x, \theta)}$$

→ Demonstração na pag 5

Digitalizado com CamScanner

$$\boxed{E\,|T_x - \psi_\theta|^2 = \overset{\text{variância}}{Var_\theta(t_x)} + b^2(\theta, T)}$$ → vício

$\psi(\theta)$ - esperado

$$E_\theta|\underbrace{T_x - ET_x}_{} + \underbrace{ET_x - \psi_\theta}_{}|^2$$

$$= Var_\theta(t_x) + (E_\theta t_x - \psi_\theta)^2 + 2\,\cancel{E(t_x - Et_x)}.(E_\theta t_x - \psi_\theta) \to 0$$

No caso geral

$L(T,\theta) \geq 0$ função de perda
V A

$$R(T,\theta) = E\,L(t,\theta)$$

risco = perda esperada

o melhor estimador t' é:

- $t' = \arg\min\limits_{\forall \theta \in \Theta} E\,L(t,\theta)$

$= \arg\min\limits_{\theta \in \Theta} R_\theta(t,\theta)$

$$\boxed{R(T,\theta) = E_\theta L(T,\theta)}$$

$$\boxed{\min_{\theta \in \Theta} \int_{\mathcal{X}} L(T,\theta)\, f_\theta(x)\, dx}$$ - só observação

- $T' = \arg\min\limits_{\forall T(x_1,\dots,x_n)} \int_\Theta R_\theta(T,\theta)\,\pi(\theta)\,d\theta$

Estimador de Bayes

$T' = \arg\min \left[\max R_\theta(T, \theta) \right]$

Estimador min. max

parâmetros de forma e de escala.

Revisar variável aleatória.

Inferência Estatística 27/10/22

Consistência

$\{X_1, \dots, X_n\}$ a.a. qualquer retirada de $f(\theta)(x_1, \dots, x_n)$

com que $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$,

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Theta$

c) f: conhecido

Objetivo: estimar $\psi(\theta)$

com base $\underbrace{T(X_1, \dots, X_n)}_{\text{estatística}} = T_n$

$\boxed{\text{D.1}}$ Definição Resumida

T_n é consistente

se $T_n \xrightarrow{P} \psi(\theta)$, à medida que $n \uparrow \infty$

$$P(|T_n - \psi(\theta)| > \varepsilon) \to 0$$

qdo $n \uparrow \infty$

Inferência estatística 27/10/22

1.2 consistência diz respeito a $\{T_n\}$ p/ $n \in \mathbb{N}$

1.3 exemplo!

$X_1, \ldots, X_n$ $\boxed{\begin{matrix} i.i.d \\ A.A.S \end{matrix}}$ — mesma coisa

→ amostra aleatória simples

$X_1, \ldots, X_n$ iid Bernoulli (p)

Supondo que eu tenha um estimador

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}{n+2}$$

$$E[T_n] = \frac{np+1}{n+2} \neq p$$

é viciado

$$VAR(T_n) = \frac{n \cdot p(1-p)}{(n+2)^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} E\,T_n = \lim_{n \to \infty} \frac{np+1}{n+2} = p$$

Assintoticamente, T_n não é viciado.

Markov: $h(x) \geq 0$, $\varepsilon > 0$ inferência estatística 27/10/23

$$P(h(x) \geq \varepsilon) \leq \frac{E\,h(x)}{\varepsilon}$$

Tchebyshev.

$$\boxed{P(|T_n - \psi(\theta)| > \varepsilon) \leq \frac{mse_p(T_n)}{\varepsilon^2} \to 0}$$

→ se ñ for p/ zero não é um estimador consistente.

desde que $\underbrace{mse(T_n) < \infty}$

$$MSE(T_n) = \underbrace{Var(T_n)}_{\downarrow\ 0} + \Big[\underbrace{\frac{np+1}{n+2}}_{\downarrow\ 0} - p\Big]^2$$

Logo: $T_n \xrightarrow{P} p$ T_n é consistente

1.4 Exemplo 2

$X_1, \dots, X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \to ES^2 = \sigma^2$$

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = Q_{n-1}$$

$$\begin{cases} E\,Q_{n-1} = n-1 \\ Var\,Q_{n-1} = 2\cdot(n-1) \end{cases}$$

Kohagi 9   Inferencia estatística   27/10/22

$$Var\left(S^2 \cdot \frac{n-1}{\sigma^2}\right) = VAR\, Q_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} \cdot VAR\, S^2 =$$

$$2(n-1)\, VAR(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Distribuição de Levi ... de Pareto

$$\boxed{S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \text{ se } n \to \infty}$$

S^2 é consistente p σ^2

Revisar
Lei dos grandes números
Lei forte e Lei fraca

1.5 Além da desigualdade de markov (tchebychev) podemos utilizar lei dos grandes números

Se $X_1, \ldots, X_n$ for I.I.D com $E|X| < \infty$, então

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n} \xrightarrow{P} \mu = EX$$

Prova: Lei fraca dos grandes números de Khintchin (pp305-307)!

Consequência

mesmo que 2º momento $Ex^2 = +\infty$, o que significa $VAR(\bar{X}) = +\infty$.

tem que $\bar{X}$ é consistente p/μ

Caso geral: considerar $E|X|^r < \infty$

$r \in N^+$, tendo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^l}{n} \xrightarrow{P} EX^l .$$

$\forall\ 0 < l \leq r$

―――― " ―――― " ―――― " ――――

1.6 Exercícios da seção 8.2 $\boxed{\text{pag } 341 - 342}$

1.7 problema adicional

Seja $X_1, \ldots, X_n$ iid pareto na forma:

$$P(X > x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & p/\ x \geq x_0 > 0 \\ 0, & p/\ x < x_0 \end{cases}$$

para qual/quais situações a $\bar{X}$ seria consistente p/ $\mu = EX$

Inferência Estatística 01/10/22

2. Suficiência

(parametrizado) → pesquisar este termo.

2.1 $X_1, \dots, X_n$ AAS (iid) de $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$, $x \in \mathbb{R}$

$T(x_1, \dots, x_n)$ é estatística suficiente p/ θ se, e só se $X_1, \dots, X_n \mid T(X_1, \dots, X_n) = \tau$ não depender de θ então $T(x_1, \dots, x_n)$ é estatística suficiente

exemplificando $\sum x_i$ é uma estatística
$\frac{\sum x_i}{n}$ é um estatística + é um caso particular e é um estimador

~~obs $f_\theta(x_1, \dots, x_n)$, $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$~~

obs $f_\theta(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1, \dots, x_n, \tau)$

$$\left(\begin{array}{l} X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X} \\ \tau = T(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right) = h(x_1, \dots, x_n \mid \tau) \cdot g_\theta(\tau)$$

se T for estatística suficiente.

~~$h(x_1, \dots, x_n \mid \tau)$~~

2.2) considerando a própia Amostra como estatística.

$T(X_1, \dots, X_n) = (X_1, \dots, X_n)$ é um caso trivial e T é suficiente.

exemplificando

$X_1, \dots, X_n$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x_1 \qquad x_n$

$$f(x_1, \dots, x_n \mid x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1 \dots x_n)}{f(x_1 \dots x_n)} = 1 \text{ se } x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$$

11

1

inf. Estatística 01/12/23

2.3 Ex. qdo temos + parâmetro do que dados

discretizar espaço paramétrico → pesquisador

Exs.

$X \sim B(n, p)$

$n \in \{2, 3\}$

$p \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

Objetivo: estimar n, p por meio de amostra de tamanho 1

$X_1 = X \sim B(n, p)$ n, p

x	$(2, \frac{1}{2})$	$(2, \frac{1}{3})$	$(3, \frac{1}{2})$	$(3, \frac{1}{3})$
0	$\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{4}{9}}$	$\frac{1}{8}$	$8/27$
1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$12/27$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$6/27$
3	0	0	$\boxed{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{27}$
	1	1	1	1

→ observe a linha e verifica qual + prob de ser zero

$x = 0 \longrightarrow (\hat{n}, \hat{p})$

$$T(x) = \begin{cases} (2, \frac{1}{3}), & \text{se } x = 0 \\ (2, \frac{1}{2}), & \text{se } x = 1 \\ (3, \frac{1}{2}), & \text{se } x = 2 \text{ ou } x = 3 \end{cases}$$

2.4 - exemplo a. est. suficiente

$X_1, \dots, X_n$ A.A.S. Bernoulli (p), $p \in (0,1)$

$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ esta estatística é suficiente p/ p?

$X_1, \dots, X_n \mid T = t$, $p \ \forall t \in \{0, \dots, n\}$ independe funcionalmente de p

$$f_p(x_1 \dots x_n \mid T = t) = \frac{P_p(x_1, \dots, x_n, t)}{P_p(t)}$$

$t = t(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i$

$$= \frac{P_p(x_1 \dots x_n)}{P_p(t)}$$

$t \in (0, \dots, n)$

substitui por T

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}}{\binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}} = \frac{\cancel{p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum x_i}}}{\binom{n}{t} \cancel{p^T (1-p)^{n-t}}}$$

$$P(x_1 \dots x_n \mid T = t) = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

em que $t = 0, 1, \dots, n$

Logo $\sum x_i$ é suficiente p/ p

1º CASO

Verificação de suficiência.

$X_1 | T(X_1) = (2, \frac{1}{3}) \Rightarrow X_1 | X_1 = 0$

~~$X_1 | X_1 = 0$~~

$P(X_1 = 0 | X_1 = 0) = \frac{P(X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$

2º CASO

$X_1 | T(X_1) = (2, \frac{1}{2})$

$P(X_1 = x | X_1 = 1) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 1 \\ 0 \text{ se } x \neq 1 \end{cases}$

3º CASO

$X_1 | T(X_1) = (3, \frac{1}{2}) \Rightarrow X_1 | X_1 = 2 \text{ ou } X_1 = 3$

$P(X_1 = x | X_1 = 2 \text{ ou } X_1 = 3)$

$p\ x \in \{2, 3\},\ x = \frac{P(X_1 = x)}{P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3)}$

$= \text{ p } x = 2$

$P(X_1 = 2 | X_1 = 2 \text{ ou } X_1 = 3) =$

$= \begin{cases} 1 \text{ se } (n, p) = (2, \frac{1}{2}) \text{ ou } (2, \frac{1}{3}) \\ \frac{3}{4} \text{, se } (n, p) = (3, \frac{1}{2}) \\ \frac{6}{7} \text{, se } (n, p) = (3, \frac{1}{3}) \end{cases}$

Logo, $T(X_1)$ não é estatística suficiente p/ (n, p)

Suficiência

Inferência estatística

2-6) teorema da fatoração

Caso discreto

Sejam $X_1, \dots, X_n$ sequência qualquer e $T = t(X_1, \dots, X_n)$ uma estatística para θ

t é suficiente p/ θ, se e somente se,

$$\boxed{P_\theta(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_\theta(t) \quad *}$$

p/ $t = T(x_1 \dots x_n)$,

PROVA: $(\rightarrow)$ seja suficiente.

$$P_\theta(x_1 \dots x_n) | t) = H(x_1 \dots x_n)$$

utilizando a propriedade *

$$P_\theta(x_1 \dots x_n) = P_\theta(x_1 \dots x_n, t) =$$

$$= \underbrace{\cancel{P_\theta}(x_1 \dots x_n | t)}_{\text{suficiente ñ depende de } \theta} \cdot f_\theta(t)$$

$$= \boxed{H(x_1 \dots x_n) \cdot f_\theta(t)} \; *$$

$(\leftarrow)$ seja $P_\theta(x_1 \dots x_n) = h(x_1 \dots x_n) \cdot g_\theta(t)$

mapeando de discreto p/ discreto

$$P_\theta(t) = \sum_{\forall x \in \mathcal{X} : t = T(x} P_\theta(x_1 \dots x_n) = \sum h(x_1 \dots x_n) \cdot \underset{\text{fixo}}{g_\theta(t)}$$

$$P_{\theta}(X_1, \dots X_n \mid T) = \frac{P_\theta(X_1 \dots X_n)}{P_\theta(t)} = \frac{h(x_1, \dots x_n) \cdot \cancel{g_\theta(t)}}{\sum h(x_1 \dots x_n) \cdot \cancel{g_\theta(t)}}$$

Logo, $p(x_1 \dots x_n \mid t)$ não depende de θ e com isso $T(X_1 \dots X_n)$ é suficiente.

2.6 teorema de fatoração (caso discreto) $P(T(x)=t) = \cdot$ -

2.7 teorema de fatoração (caso contínuo)

- $X_1 \ldots X_n$ sequência qualquer retirada de $f_\theta(x_1,\ldots,x_n)$.

$\theta \in \Theta$, $(x_1,\ldots,x_n)' \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

$T(X_1,\ldots,X_n)$ é estatística suficiente p/ θ se, e somente se,

$$\boxed{f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = h(x_1,\ldots,x_n) \cdot g_\theta(t),}$$

em que $h(x_1,\ldots,x_n) > 0$, $g_\theta(t) > 0$,

e $t = T(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}$

obs: restrição p/ simplificar a prova

Prova.

$T = T(X_1,\ldots,X_n) = T_1$

$T_j = T_j(X_1,\ldots,X_n)$ $p\ j = 2,\ldots,n$

↳ inclusão de outras $n-1$ estatística quaisquer.

Suponha que:

$X_1 = R_1(T_1,\ldots,T_n)$

$\vdots$

$X_n = R_n(T_1,\ldots,T_n)$

$|J| = \left|\dfrac{\partial x_i}{\partial T_j}\right|_{i,j=1,\ldots,n}$ → matriz jacobiana

=

$\Rightarrow \theta$

Provar pela volta

($\Leftarrow$) seja $f_\theta(x) = h(x)\, g_\theta(T)$ $X = (x_1, \dots, x_n)'$

$$1 = \int_{\mathcal{X}} f_\theta(x)\, dx = \int_{T(\mathcal{X})} f_\theta(\tau)\, d\tau \;, \quad \tau = (t_1, \dots, t_n)' \;, \; t_j = T_j(x)$$

$$f_\theta(x)\,dx = h(x) \cdot g_\theta(t)\,dx = h(x) \cdot g_\theta(t_1)\,dx$$

transformação de variável.

$$= h(t_1, \dots, t_n) \cdot g_\theta(t_1) \cdot |J| \cdot dt_1 \dots dt_n$$

simplificando

$$= \boxed{h(\tau)\, g_\theta(t_1) \cdot |J|\; d\tau}$$ → forma padrão de substituição de variável

$$= f_\theta(\tau) = f_\theta(t_1 \dots t_n)$$

MARGINAL t_1:

constante

$$f_\theta(t_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h(t_1, \dots, t_n)\, g_\theta(t_1) \cdot |J|\, dt_2 \dots dt_n$$

$$= g_\theta(t_1) \cdot \underbrace{H(t_1)}_{\text{n depende de } \theta}$$

Assim,

$$f(x_1, \dots, x_n \mid t) = f_\theta(x_1, \dots, x_n \mid t_1) =$$

n dependeu no final

$$\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n, t_1)}{f_\theta(t_1)} = \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(t_1)} = \frac{h(x) \cdot \cancel{g_\theta(t_1)}}{H(t_1)\, \cancel{g_\theta(t_1)}}$$

$$= \frac{h(x)}{H(x)} \text{ não depende de } \theta$$

Logo $T = T(X_1, \dots, X_n)$ é suficiente p/ θ

Inferência estatística

03/11/22

$$I_{(x_{(1)}, x_{(n)})}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\theta \le X_{(1)} \le X_{(n)} \le \theta \\ 0, & \text{se c.c} \end{cases}$$

Logo, $f_\theta(x_1, \ldots, x_n)$ pode ser fatorado como

$h(x_1, \ldots, x_n) \cdot g_\theta(x_{(1)} \cdot x_{(n)})$ → neste caso particular é a identidade $= 1$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \quad \cdot \quad \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot I_{x_{(1)} \cdot x_{(n)}} \theta$$

de modo que

$T(X_1 \ldots X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})'$ constitui estatística suficiente para θ

2.9 exemplo $X_1, \ldots, X_n$ iid. $N(\mu, \sigma^2)$ $\quad \theta = (\mu, \sigma^2)$

$$f_\theta(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

$$f_\theta(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \sigma^{-n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum x_i^2 - 2\mu \sum x_i + n\mu^2\right]\right\}$$

$$= h(x_1 \ldots x_n) \cdot g_\theta(t)$$

em que $t = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$

2.10. problema 8.3 (pag. 357-358)

Questões 1, 5, 7, 10, 12.

Inferência estatística

03/11/22

P/caso contínuo testando o teorema naida

se T for suficiente então

$(\rightarrow)$

$$f(x|t) = \frac{f_\theta(x)}{f_\theta(t)} = h(x)$$

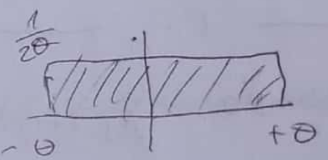
Logo, $f_\theta(x) = h(x) \cdot f_\theta(t)$ posso mudar o nome da função

$$= h(x) \cdot g_\theta(T)$$

2.8 Exemplo

$X_1, \ldots, X_n$ A.A.S Unif $[-\theta, +\theta]$

$$f_\theta(x) \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & \text{se } x \in [0, \theta] \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$



$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \cdot I_x(\theta)$$

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n = \frac{1}{2^n \cdot \theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{x_i}(\theta),$$

em que $I_{x_i}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-\theta, \theta] \\ 0, & \text{se } x \notin [-\theta, \theta] \end{cases}$

$$= \frac{1}{(2\theta)^n} \cdot I_x(\theta)$$

$$I_x(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\theta \le x_n \le \ldots \le x_n \le \theta \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$x_{(1)} = \min\{x_1 \ldots x_n\}$

$x_{(n)} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 = T_1(x_1 \ldots x_n) \\ x_2 = T_2(x_1 \ldots x_n) \end{pmatrix}$$

$T_1 = \min$

$T_2 = \max$

3) Inferência Estatística 17/11/22

3. Compactitude / completude (P. 347) o livro n explica mto bem

3.1 motivação

A.A.S $X_1, \dots, X_n$ $F_\theta(x)$; $\theta \in \Theta$, $x \in \mathbb{R}$; estatística T

~~$T(X_1, \dots, X_n)$~~ : seja $T_{\underset{\sim}{X}} = T(X_1, \dots X_n)$ T.q

$E_\theta[h(T_{\underset{\sim}{X}})] = \psi(\theta)$ (*)

proporciona informação sobre $\psi(\theta)$

Questão = Dada uma estatística $T_{\underset{\sim}{X}}$, $\forall \theta \subset \Theta$ Ligação (*) seria única?

considere 2 funções h e h', se aplicar na mesma estatística.

$$\left.\begin{aligned} E_\theta[h(T_{\underset{\sim}{X}})] &= \psi(\theta) \\ E_\theta[h'(T_{\underset{\sim}{X}})] &= \psi(\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{h(T_{\underset{\sim}{X}}) = h'(T_{\underset{\sim}{X}})}_{\text{se isso for verdade é uma tranformação única}} ?$$

3.2 Definição

$T_{\underset{\sim}{X}}$ é completa se, $\forall \theta \subset \Theta$ $E_\theta[g(T_X)] = 0 \Rightarrow g(T_X) = 0$

Em termos probabilístico $P_\theta(g(T_X) = 0) = 1$

3.3 continuando a motivação: Assim, se $T_{\underset{\sim}{X}}$ for completa, com respeito a motivação,

se $E_\theta[h(T_X)] = E_\theta[h'(T_X)]$, ou seja ~~$E_\theta[h(T_X)]$~~

$E_\theta[h(T_X) - h'(T_X)] = 0$

escolhendo $g(T_X) = h(T_X) - h'(T_{\underset{\sim}{X}})$, temos $E_\theta[g(T_\theta)] = 0$

$\Rightarrow P_\theta(g(T_X) = 0) = 1$, Logo, $h(T_X) = h'(T_X)$

3.4 Exemplo

Acordo.

$X_1, \dots X_n$ iid Bernoulli (p)

$T_{\underset{\sim}{x}} = X_1 + \dots + X_n$ $\quad h(T_x) = \frac{T_x}{n} = \bar{X}$ $\quad E\bar{X} = p$

$E_p[g(T_x)] = E_p[g(\sum_{i=1}^{n}(x_i)] = 0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim Bin(n, p)$ $\qquad E\,g(T_x) = \sum_{k=0}^{n} g(k) \cdot P(T_x = k)$

combinação de elementos ≥ 0

$= \sum_{k=0}^{n} g(k) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1-p)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} g(k) \underbrace{\binom{n}{k}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k}_{>0}$

para que tenhamos

$E_\theta\, g(T_x) = 0 \;\; \forall\, \underline{p} \in [0, 1]$, a unica escolha possível é $g(T_x) = 0$

3.5 Exemplo:

$X_1 \dots X_n$ iid $U[0, \theta], \theta > 0$ $\quad T_x = \max\{X_1, \dots, X_n\} = X_n$

$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \cdot 1_\theta(x)$, em que $1_\theta(x) \begin{cases} 1, \text{ se } x \in [0, \theta] \\ 0, \text{ se } x \notin [0, \theta] \end{cases}$, $F_\theta(x) = \frac{\theta}{x}\;\; \forall x \in [0\; \theta]$

$X_1, \dots, X_n \xrightarrow[\text{ORDENAÇÃO}]{} \underset{\min}{X_{(1)}} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq \underset{\text{MAX}}{X_{(n)}} \leq x$

$P[X_{(n)} \leq x] = [X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x]$

$P\, | X \in [0, \theta]$

Inferência estatística 17/11/22

Ex. 36

$X_1, \dots, X_n$ iid $N(\theta, \theta^2)$

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \theta^n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \theta)^2}{\theta^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \theta^n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i^2)} - 2\theta \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i)} + n\theta^2\right]\right.$$

$T_x = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$ é suficiente p/ θ

$E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = n \cdot \theta$

$E\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$

θ^2 $Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E x^2 = \theta^2 + \theta^2 = 2\theta^2$

$Var\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = n\theta^2$

$E\left[\left(\sum x_i\right)^2\right] = \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j\right]}_{\text{Ele apagou}} = (\cdot \theta^2 \quad n(n+1)\theta^2$

$E\left[\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j\right] = E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum x_i x_j\right] = 2n\theta^2 + n(n-1)\theta^2$

$= 2n\theta^2 + n^2\theta^2 - n\theta^2 = n\theta^2 + n^2\theta^2$

p/exemplo $E\left[\frac{1}{2n} \sum x_i^2 - \frac{1}{n(n+1)} \cdot \left(\sum x_i\right)^2\right]$ Existe pelo menos uma

função $g(T_x) = g\left(\sum x_i, \sum x_i^2\right) \neq 0 \ \forall \theta$ t.q $E(g(T_x)) = 0$

$\boxed{3.7}$ problemas 8.3 Pag. 357-359

$\boxed{\text{Questões } 2, 3, 4, 6, 8, 9}$ → exercício da aula anterior

$\boxed{2.10 \quad 1, 5, 7, 10, 12}$

continuando Ex 3.5

Inferência Estatística

17/11/22

$$\frac{d}{dx} P\left[X_{(n)} < x\right] = \frac{n \cdot x^{n-1}}{\theta^n}$$

$$E[g(X_n)] = \int_0^\theta g(x) \cdot n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} \, dx = 0 \quad \forall \theta > 0$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \int_0^\theta n \, g(x) \cdot x^{n-1} \, dx = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} E[g(X_n)] = 0$$

$$= \frac{-n}{\theta} \underbrace{\int_0^\theta g(x) \cdot \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \, dx}_{E(g(X_n))} + \frac{1}{\theta^n} g(\theta) \, n \theta^{n-1} = 0$$

$g(\theta) = 0$ única escolha possível

$\forall \theta > 0$

Exemplo 3.6

Inferência Estatística. 22/11/22

4- Estatística suficiente minimal esta

4.0 Motivação

A' = esta relacionado ao exemplo t_2 no fim da folha

Seja X_1, X_2, X_3 A.A.S Bernoulli (p)

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{x_1\ x_2\ x_3}{(0,0,0)} \longrightarrow A'_0 \\ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \to A'_1 \\ (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \to A'_2 \\ (1,1,1) \Big\} \to A'_3 \end{array} \right.$$

$p \in [0,1]$

objetivo: Estimar p como $T(X_1, X_2, X_3)$

1: considerar o próprio vetor de dados como estatística suficiente

ex. $T_1(X_1,X_2,X_3) = (X_1, X_2, X_3)\Big\}$ $\mathcal{X} = \{A_0, \dots, A_7\}$ $\boxed{f(x_1,x_2,x_3 \mid t_1) = 1}$ *

$t_1 = (x_1, x_2, x_3)'$

em que cada A_j refere-se a um ponto de *

$$\begin{cases} A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_7 = \mathcal{X} \\ A_j \cap A_j = \emptyset \end{cases}$$

Seja $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ uma sequência ordenada, ou seja, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$

$T_2(X_1, X_2, X_3) = (X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})'$

$t_2(x_1, x_2, x_3) \in \{(0,0,0)', (0,0,1)', (0,1,1)', (1,1,1)'\}$

$\mathcal{X} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$

Partição de $\mathcal{X}$ induzida por T_2 $\forall$ ex: $A'_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Inferência estatística 22/11/22

Continuação de estatística minimal suficiente

esta escolha foi = a t_2 por conta da estrutura dos dados

4.

$T_3 = (X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$

$t_3 = (x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1, 2, 3\} \to \mathcal{X} = \underbrace{\{A_0, A_1, A_2, A_3\}}_{\text{partição induzida por } T_3}$

Partição formada por c/ menor número possíveis de subconjuntos induzida por uma estatística suficiente, é partição suficiente minimal.

4.1| $X_1, \ldots, X_n$ A.A.S e $\mathcal{U} = \{A_t : t = T(X_1, \ldots, X_n)\}$

↳ $\mathcal{U}$ é uma partição gerada ou induzida por $T(X_1, \ldots, X_n)$

$\boxed{\mathcal{X} = \mathcal{U}}$ *

$\mathcal{U}$ é partição suficiente para θ

se $X_1, \ldots, X_n \mid A_t$ não depende de θ, $\forall A_t$

se $X_1, \ldots, X_n \mid T = t$ não depende de θ

4.2| uma partição $\mathcal{U}$ é suficiente minimal

i) $\mathcal{U}$ é suficiente p/ θ

ii) Se $\mathcal{U}^*$ for qualquer outra partição suficiente, então $\mathcal{U}^*$ é uma subpartição de $\mathcal{U}$

4. estatística suficiente minimal → continuação

4.2 continuação

$T_1(X_1,\ldots,X_n) \to \mathcal{U}_1 = \{A_0, A_1, \ldots A_7\}$

$T_2(X_1,\ldots,X_n) \to \mathcal{U}_2 = \{A_0', A_1', A_2', A_3'\}$

$T_3(X_1,\ldots,X_n) \to \mathcal{U}_3 = \{A_0', A_1', A_2', A_3'\}$

Estatística suficiente minimal é aquela com menor subconjunto de A_8

4.3 - ~~Estatística~~ Definição: Estatística suficiente minimal é aquela que induz uma partição suficiente minimal

4.4 - Questão: inexistência de estatística suficiente pode implicar impossibilidade (inexistência) de partição induzida por uma estatística ñ suficiente?

4.4: ñ suficiência pode não induzir a uma partição de $\mathcal{X}$?

voltando a motivação

$$\mathcal{X} = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

Considere X_1^*, e X_2^*, descontando-se X_1, ou X_2 ou X_3

$T^*(X_1, X_2, X_3) = X_1^* + X_2^*$

ñ é suficiente p/ P

Continuação

22/11/22

4.4.

$t^*(x_1, x_2, x_3) \in \{0,1,2\}$

$t^* = 0 \to A_0^* \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$t^* = 1 \to A_1^* \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

$t^* = 2 \to A_2^* \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$

Como A_0^*, A_1^*, A_2^* ñ formam uma partição de $\mathcal{X}$, T^* não induz partição de $\mathcal{X}$

4.5 Agora, vejamos a situação em que ocorre dados perdidos, causados p/ um processo aleatório:

$$r_j = \begin{cases} 0, & \text{se } X_j \text{ for perdido} \\ 1, & \text{se } X_j \text{ ñ for perdido.} \end{cases}$$

no qual $r_1, \dots, r_n$ iid ~ Bernoulli (π)

$X_i \sim N(\underset{\text{desconhecido}}{\mu}, \underset{\text{conhecido}}{1})$

$r_i \to \text{Bernoulli}(\pi)$

π: taxa de sucesso, $r_j =$ é V.A

neste caso a amostra é ampliada p/ $(X_1, \dots, X_n, r_1 \dots r_n)'$ e

$$f(x_1, \dots, x_n | \underbrace{r_1, \dots, r_n}_{\substack{\text{realização} \\ \text{de } r_1, \dots, r_n}}) = \prod_{i=1}^{n} f^{r_i}(x_i)$$

em que $r_j \in \{0,1\}$

continuação 4.5

$$f(x_1,\dots,x_n, r_1,\dots,r_n) = f(x_1,\dots x_n \mid r_1,\dots r_n) \cdot P(r_1,\dots r_n)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} f^{r_i}(x_i)\right) \cdot \pi^{\sum r_i} (1-\pi)^{n-\sum r_i}$$

Verifique-se $\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot r_i$ é suficiente p/ μ

0. Exercício Inferência Estatística 24/11/22

Seja $X_1 \dots X_n$ A.A.S $N(\mu, 1)$ e considere $R_k \sim$ Bernoulli (π), $(R_1, \dots, R_n)$ iid, na qual $R_k = 1$, se X_k for observável, e $R_k = 0$ se X_k não for observável ("missing")

Defina $X_1^*, \dots, X_{n^*}^*$ com a sequência de variáveis observáveis, tal que

$f_{(\mu,\pi)}(x_1^* \dots x_n^*) = f_\mu(x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n) \cdot P_\pi(r_1 \dots r_n)$, em que r_k é a realização de R_k, e $f(x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k)^{r_k}$

Mostre que

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k, \sum_{k=1}^{n} r_k \right)$$

contagem de sucesso n^*

é suficiente para (μ, π)

4. Suficiência minimal.

Partição induzida por uma estatística suficiente. T

$f_\theta(x_1, \dots, x_n | t) =$

$= g_\theta(T(x_1 \dots x_n)) \cdot h(x_1 \dots x_n)$

t

cada ponto desse vai gerar uma função que pode ser agrupado como subconjunto do espaço ~~paramétrico~~ amostral ($\mathcal{X}$) $\mathcal{U} \to$ partição de $\mathcal{X}$ $\mathcal{U} = \{A_t : t = T(x_1, \dots x_n)$ $\forall (x_1, \dots x_n) \in \mathcal{X}$ *

Partição suficiente minimal possui a menor quantidade de subconjunto de partição (A_t)

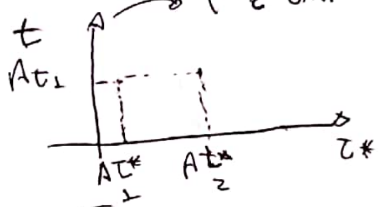
4.5 Se $T(x)$ e $T^*(x)$ forem 2 estatísticas suficientes, então $T(x)$ é minimal se ela é função de $T^*(x)$, $\forall$ T^* suficiente.

Partição induzida: $\mathcal{U}^* = \{A_{t^*} : t^* = T^*(x_1, \dots, x_n)\}$ por T^*

Partição induzida: $\mathcal{U} = \{A_t : t = T(x_1, \dots x_n)\}$, por T

$\mathcal{U}^*$ é subpartição de $\mathcal{U}$

t é uma função h de t^*.



Se t é função de qualquer t^* suficiente logo t é minimal

$A_{t_1^*}$, $A_{t_2^*}$ — A_{t_1}

Resumo T é suficiente minimal é função de qualquer outra ~~função~~ estatística suficiente

---

4.6 $X_1, \dots, X_n$ amostra aleatória retirada de uma densidade $f_\theta(x_1, \dots, x_n)$ e considere $T(x_1, \dots, x_n) = T$ uma estatística suficiente.

$\underset{\sim}{x}$ = vetor

$\underset{\sim}{y}$ = vetor

Dados dois pontos amostrais.

$\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$

$\underset{\sim}{x} \in \mathcal{X} \to T(\underset{\sim}{x}) = t$

$\underset{\sim}{y} \in \mathcal{X} \to T(\underset{\sim}{y}) = t$

Se $\dfrac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})}$ não depende de θ, se e só se, $T(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{y})$, então

T é minimal.

$\underset{\sim}{x} \in \mathcal{X} \to T(\underset{\sim}{x}) = t$

$\underset{\sim}{y} \in \mathcal{X} \to T(\underset{\sim}{y}) = t$

$\Big\} *$

$T(\underset{\sim}{x})$ e $T(\underset{\sim}{y}) \to A_t \in \mathcal{U}$

Inferência estatística : 24/11/22

Continuação 4.6

~~Prova~~: $\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \frac{g_\theta(T(\underset{\sim}{x}))\cdot h(\underset{\sim}{x})}{g_\theta(T(\underset{\sim}{y}))\cdot h(\underset{\sim}{y})}$, pois T é suficiente

$$\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \frac{h(\underset{\sim}{x})}{h(\underset{\sim}{y})} \Longleftrightarrow T(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{y})$$ Condição inicial.

Considere ~~uma~~ outra Estatística suficiente $T^* = T^*(X_1, \ldots, X_n)$

$$\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \frac{g_\theta^*(T^*(\underset{\sim}{x}))}{g_\theta^*(T^*(\underset{\sim}{y}))} \cdot \frac{h^*(\underset{\sim}{x})}{h^*(\underset{\sim}{y})}$$

Escolhendo $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$ que proporcione a mesma informação sobre θ, ~~então~~

pelo princípio da verossimilhança, temos

$g_\theta^*(T^*(\underset{\sim}{x})) = c(x,y) \cdot g_\theta^*(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) \cdot g_\theta^*(T^*(y))$, de modo

que $\frac{g_\theta^*(T^*(x))}{g_\theta^*(T^*(y))} = (x, y)$

Agora, se $T^*(\underset{\sim}{x}) = T^*(\underset{\sim}{y})$, $\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \frac{h^*(\underset{\sim}{x})}{h^*(y)}$

Mas qdo $T^*(\underset{\sim}{x}) = T^*(\underset{\sim}{y})$?

Dado condição inicial, temos que $T(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{y})$, logo

$$\underbrace{H(T^*(\underset{\sim}{x}))}_{T(x)} = \underbrace{H(T^*(x))}_{T(y)}$$

Inferência.

Exemplo $X_1, X_2 \ldots X_n$ A.A.S $N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$

$T = (\bar{X}, S^2)$ é suficiente para θ

$$f_\theta(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\underset{\sim}{x}}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2\right\}$$

$$f_\theta(\underset{\sim}{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right]\right\}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \cdot \exp\left\{-\frac{(n-1) \cdot S_x^2}{2 \cdot \sigma^2} - \frac{n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \exp\left\{-\frac{n-1}{2\sigma^2}\left[S_x^2 - S_y^2\right] - \frac{n}{2\sigma^2}\left[(\bar{x} - \mu) - (\bar{y} - \mu)^2\right]\right\}$$

esta razão independe de μ e σ^2 $\Leftrightarrow \begin{cases} S_x^2 = S_y^2 \\ \bar{x} = \bar{y} \end{cases}$

Logo $T(\bar{X}, S^2)$ é estatística suficiente e minimal.

Inferência estatística 29/11/22

Revisando. 4.6) Suficiência minimal.

Partição suficiente minimal

se $\dfrac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = c(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \dfrac{h(x)}{h(y)}$

$\Updownarrow$

$T(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{y})$, então $T(\underset{\sim}{x})$ é suficiente minimal.

Seja $T^*(\underset{\sim}{X}) = T^*$ estatística suficiente.

$$\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \frac{g_\theta(t^*(\underset{\sim}{x})) \cdot h(\underset{\sim}{x})}{g_\theta(t^*(\underset{\sim}{y})) \cdot h(\underset{\sim}{y})} = \frac{h(\underset{\sim}{x})}{h(y)} \qquad \mathcal{U}^* = \{A_0, A_2, \dots, A_{t^*}\}$$

$\Uparrow$

$T^*(x) = T^*(y) = t^*$

se $\dfrac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = c(\tilde{x}, \tilde{y}) \nRightarrow T^*(\underset{\sim}{x}) = T^*(y) = t^*$ desde que $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$ estejam no mesmo subconjunto de partição.

4.7) Exemplo:

Seja $X_1, \dots X_n$ A.A.S retirada de uma família Exponencial com $\theta \in \mathbb{R}$, $\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$

$f_\theta(x_i) = \exp\{A(\theta) \cdot B(x_i) + C(\theta) + D(x_i)\}$

$f_\theta(\underset{\sim}{x}) = \exp\{A(\theta) \sum B(x_i) + n\, C(\theta) + \sum D(x_i)$

$= \underbrace{\exp\{A(\theta)\, T(\underset{\sim}{x}) + n C(\theta)\}}_{g_\theta(T(x))} \cdot h(\underset{\sim}{x})$ $\rightarrow$ logo $T(x)$ é suficiente para θ.

Inferencia estatística

29/11/22

$$\frac{f_\theta(x)}{f_\theta(y)} = \exp\{A(\theta)\underbrace{[T(x)-T(y)]}_{=0 \text{ teremos } \frac{h(x)}{h(y)}}\}\frac{h(x)}{h(y)}$$

caí pilã

$$= \frac{h(x)}{h(y)} \Leftrightarrow T(x)=T(y)$$

curso q nos devia ter visto

Assim, $T(\underset{\sim}{x})$ é estatística suficiente e minimal.

$T(x)$ é suficiente e completa?

Aproveito o ex 4.7 p/ provar completude.

Obs caso eu quero provar que seja minimal posso utilizar o conceito de completude uma estatística suficiente e compacta é automaticamente minimal.

$$E\,g(T(\underset{\sim}{x}))=0 \Rightarrow \underbrace{g(T(\underset{\sim}{x}))=0}_{c/\text{prob}=1}$$

fatoração de exp.

$$E\,g(T(\underset{\sim}{x})) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{g(T(x))}_{?}\cdot \exp\{A(\theta)\cdot\underbrace{\textstyle\sum B(x_i)}_{>0}\}\cdot \exp\{n\cdot \underbrace{c(\theta)}_{>0}\}\cdot \underbrace{h(x)}_{>0}\cdot dx$$

Considere $B(.)$ função derivável e inversível. Transformação de variável $y_i = B(x_i)$ e $y_i \in \mathbb{R}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{A(\theta)\sum_{i=1}^{n} y_i\}\ \exp\{n\cdot c(\theta)\}\cdot \underbrace{g(T^*(y))\cdot \overset{>0}{h^*(y)}\,\overset{>0}{|J|_y}\,dy}_{H(\underset{\sim}{y})}$$

$$\text{seja } H(y) = \underbrace{H^+(\underset{\sim}{y})}_{>0} - \underbrace{H^-(\underset{\sim}{y})}_{>0}$$

$$= \exp\{n\cdot c(\theta)\}\int_{\mathbb{R}^n} \cancel{\exp\{A(\theta)\cdot\Sigma}$$

chamou de φ depois

$$= \exp\{n\cdot c\cdot(\theta)\}\int_{\mathbb{R}^n} e^{A(\theta)\Sigma y_i}\cdot[\underbrace{H^+(\underset{\sim}{y})}_{>0} - \underbrace{H^-(\underset{\sim}{y})}_{>0}]\,dy$$

Transformada de Laplace. olhar depois

Distribuição a priori ñ informativa →

Continuação do exemplo 4.7

$$\Rightarrow \exp\{n \cdot c(\theta)\}\left[\mathcal{L}H^{+}(y) - \mathcal{L}H^{-}(y)\right] = 0$$

(transformada de Laplace)

$$\mathcal{L}H^{+}(y) = \mathcal{L}H^{-}(y) \longrightarrow H^{+} = H^{-}$$

$$H^{+} - H^{-} = g(T^{*}) \cdot \underset{>0}{h^{*}} \cdot \underset{>0}{|J|} = 0$$

$$= (g^{+} - g^{-}) \quad \text{Logo}, \; g^{+} = g^{-}, \; g = 0$$

então $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i)$, é suficiente, completa e minimal.

4.8. Exemplo. $X_1, \ldots, X_n$ A.A.s retirada de uma distribuição de touchard (λ, δ) na forma.

$$P_{(\lambda\delta)}\,x = \frac{\lambda^{x}(x+1)^{\delta}}{x! \; \underbrace{\tau(\lambda,\delta)}_{\text{Função de normalização}}}, \; \lambda > 0, \; \delta \in \mathbb{R}, \; x \in \{0, 1, \ldots\} \text{ e } \cancel{\tau(\lambda,\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta &= \ln \lambda \\ \lambda &= e^{\theta} \end{aligned}} \quad \lambda > 0$$

$$\tau(\lambda,\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}(k+1)^{\delta}}{k!}$$

logaritmo

$$P_{\lambda\delta}(x) = \exp\left\{\ln \frac{\lambda^{x}(x+1)^{\delta}}{x! \; \tau(\lambda,\delta)}\right\}$$

Distribuição marginal

$$= \exp\{x \cdot \ln \lambda + \delta \cdot \ln(x+1) - \ln x! - \ln \tau(\lambda,\delta)\}$$

$$P_{\lambda,\delta}(\underset{\sim}{x}) = \exp\left\{\ln \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \delta \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i+1) - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i! - n \cdot \ln \tau(\lambda,\delta)\right\}$$

$$P_{\lambda,\delta}(\underset{\sim}{x}) = \exp\{A(\lambda,\delta) \cdot B(\underset{\sim}{x}) + C(\lambda,\delta) + D(\underset{\sim}{x})\}$$

continuação do ex. 4.8.

$$A(\lambda,\delta) = [\ln\lambda, \delta] \qquad B(\underset{\sim}{x}) = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i+1)\right]$$

$$P_{\lambda\delta}(\underset{\sim}{x}) = g_{\lambda,\delta}(B(\underset{\sim}{x})) \cdot \underbrace{h(x)}_{\exp\{-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\}}$$

Logo

$$B(\underset{\sim}{x}) = \left[\sum x_i, \sum \ln(x_i+1)\right]'$$

constitui estatística

$$\boxed{\text{Suficiente } p(\lambda,\delta), \text{ completa e minimal}}$$

5| Ancilaridade

5.1. $X_1,\dots,X_n$ A.A.S retirada de $f_\theta(x)$, se $R(X_1,\dots,X_n)$ não depende de θ então R é uma estatística ancilar

5.a| Exemplo

$X_1,\dots,X_n$ A.A.S. $N(\mu,1)$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\right)$$

$$S^2 = \sum \frac{(x_i-\bar{x})^2}{n-1}, \quad (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

segundo prof S^2 independe de $\bar{X}$?

$$\frac{\sum (x_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}$$ — erros padrões

Logo S^2 é estatística ancilar.

5.5. Ancilaridade

Amplitude Amostral $= \underbrace{X_{(n)}}_{MAX} - \underbrace{X_{(1)}}_{MIN}$

$\bar{X}$ e S^2 são independentes?

$f_{\bar{X}, S^2}(\bar{x}, s^2) = f(\bar{x}) \, f_{S^2}(s^2)$ ou utilizar a forma de Basu

5.3 Basu: se $T(\underset{\sim}{X})$ for estatística suficiente e completa e se $R(X)$ for uma estatística ancilar, então $T(\underset{\sim}{X})$, $R(\underset{\sim}{X})$ são independentes.

Relembrar teoria de prob

Inferência estatística

01/12/22

5. Estatística Ancilar

Suporte de função → Relembrar

5.3 Teorema de Basu.

Seja $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ uma A.A.S retirada de uma distribuição $F_\theta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$. Se $T(\underset{\sim}{X})$ for estatística suficiente completa p/ Θ, se $R(\underset{\sim}{X})$ for uma estatística ancilar, então $T(\underset{\sim}{X})$ e $R(\underset{\sim}{X})$ são independentes.

Prova: suponha $\theta \in \mathbb{R}$ (escalar), $T(\underset{\sim}{x})$, $R(x) \in \mathbb{R}$; temos suposição que é completa logo a $E(\ ) = 0$

$$f_R(r) = \int_{\mathbb{R}} f_{R|t}(r/t)\, f_t(t)\, dt$$

$$f_R(r) - \int_{\mathbb{R}} f_{R|t}(r/t) \cdot f_t(T)\, dt = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_t(t)\, dt \cdot f_R(r) - \int_{\mathbb{R}} f_{R|t}(r/t)\, f_t(t) = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[f_R(r) - f_{R|t}(r|t)\right] \cdot f_t(T) = 0$$

→ pois a V.A em questão é T

$$-E_\theta\left[f_R(r) - f_{R|t}(r|T)\right] = \underbrace{E_\theta[g(T)] = 0}_{\text{por suposição inicial de completitude.}}$$

Como T é completa, $P[g(T) = 0] = 1$, logo $f_R(r) = f_{R|t}(r|t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, $f_{R,T}(r,t) = f_R(r) \cdot f_t(T)$, logo T e R são independentes

Digitalizado com CamScanner

5.4 $X_1, \ldots, X_n$ A.A.S. $\big\rangle N(\mu, 1)$, com X, Y independentes.
$Y_1, \ldots, Y_n$ A.A.S.

SEJAM $T(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) = \underbrace{\bar{X}}_{N(\mu, \frac{1}{n})} + \underbrace{\bar{Y}}_{N(\mu, \frac{1}{n})} = N(2\mu, \frac{2}{n})$

$R(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) = \bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \frac{2}{n})$ Estatística ancilar

"POR FORÇA BRUTA", vamos verificar que R e T são independentes
Como são independentes partiremos da distribuição conjunta.

$f_{\bar{X}\bar{Y}}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{\bar{X}}(\bar{x}) f_{\bar{Y}}(\bar{y})\, d\bar{x}\, d\bar{y} = \cancel{\frac{1}{2\pi \frac{1}{n}}} \cdot \exp\{\cancel{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{1/n} - \frac{1}{2}\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{1/n}}$

" " " " " $= \frac{1}{2\pi \frac{1}{n}} \cdot \exp\left\{-\frac{n}{2}\left[(\bar{x}-\mu)^2 + (\bar{y}-\mu)^2\right]\right\}$

$$\begin{cases} t = \bar{x} + \bar{y} \\ r = \bar{x} - \bar{y} \end{cases} \to \begin{cases} \bar{x} = \frac{t+r}{2} \\ \bar{y} \quad \frac{t-r}{2} \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d\bar{x}}{dt} & \frac{d\bar{x}}{dr} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} & \frac{d\bar{y}}{dr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$f_{R,T}(r,t) = |J| \frac{1}{2\pi \cdot 1/n} \cdot \exp\left\{-\frac{n}{2}\left(\frac{t+r}{2} - \mu\right)^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{t-r}{2} - \mu\right)^2\right\}$$

$$= |J| \frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{n}} \cdot \exp\left\{-\frac{n}{2} \cdot \frac{(t+r-2\mu)^2}{4} - \frac{n}{2}\frac{(t-r-2\mu)^2}{4}\right\}$$

vai desaparecer
$+(t-2\mu) - r$
$-(t-2\mu)r$

$$= \frac{n}{4\pi} \exp\left\{-\frac{n}{2 \cdot 2}(t-2\mu)^2 - \frac{n}{2 \cdot 2} r^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2/n}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(t-2\mu)^2}{2/n}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2/n}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{2/n}\right\}$$

$$= f_T(t) \cdot f_R(r)$$

Inferência Estatística 05/12/22

5.4 continuação do Ex. pelo teorema de Basu,
sabendo que $\bar{X} + \bar{Y}$ é suficiente completo p/ μ como $\bar{X} - \bar{Y}$ é ancilar
então T e R são independentes.

5.5 sugestão dos exercícios PROBLEMA 8.3

EX. 10, 11, 13, 15, 18, e 19.

EXERCÍCIO 1 8.2

$P[|T_n - \theta| > \varepsilon] \to 0$

→ erro de estimação

se T_n for consistente p θ, e se $|T_n - \theta| \leq A < \infty$, então $T_n \xrightarrow{\text{EQ}} \theta$

$$E[\underbrace{(T_n - \theta)^2}_{>0}] \longrightarrow 0 \text{ qdo } n \uparrow \infty$$

se X for v.a contínua não negativa então $EX = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} P(X > x)\,dx$

$$E[\underbrace{(T_n - \theta)^2}_{>0}] = \int_0^\infty P[|T_n - \theta|^2 > \sqrt{e}]\,de$$

$\varepsilon = \sqrt{e} \to \varepsilon^2 = e$

$$= 2\int_0^A \varepsilon P[|T_n - \theta| > \varepsilon]\,d\varepsilon + 0 \leq \int_0^A A \cdot P[|T_n - \theta| >$$

$$P(|T_n - \theta| \leq A) = 1$$
$$P(|T_n - \theta| > A) = 0$$
$$0 \leq \varepsilon \leq A$$

$$\leq \int_0^A A \cdot P[|T_n - \theta| > \varepsilon]\,d\varepsilon$$

Revisão Inferencia Estatística Resumo. 05/12/22

174,00

772,98

Dezembro

- Foi predominante até $\frac{1}{2}$ século XX

- para distribuições independentes então prob conjunto e produtorio das marginais.

- procedimento frequentista.

A.A.S

→ Definição; Qualquer função da Amostra que ñ depende do parâmetro é denominado Estatística ex: MIN; MAX $T_1 = \bar{X}$, $\frac{1}{n}\sum Y_i$ — função de Amostra. $T_2(X) = S^2 \ \frac{1}{n-1}\sum (Y_i - \bar{X})^2$

em geral se ñ depende do parametro dizemos que estas estatísticas Tbm são amostra Aleatórias.

Estimador: Qualquer ~~estatística~~ ou seja, função da Amostra que Assuma Valores em Θ é um estimador $\hat{\theta}$ para o parâmetro θ

→ para encontrar

$$EQM[\hat{\theta}] = VAR(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

em que $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ é o vício do Estimador

" " "

Priori ñ informativo
1 Experimento
velocidade da Luz.

- $\boxed{\text{EXERCÍCIOS - SEÇÃO 8.1}}$
introdução sobre estimação pontual paramétrica

ex. 8.2 todos exercícios

$\boxed{\text{DEFINIÇÃO de SUFICIÊNCIA}}$ - EX 8 A SEÇÃO 8.3 1, 5, 7, 10, 12

8.3 - completude - Questões 2, 3, 4, 6, 8, 9

8.

D ~~James enviar email p/ ele~~ → Data academy

Desigualdade de Cramer-Rão possibilita verificar se um estimador é ou ñ ~~eficiente~~ suficiente, porem ñ é um método de construção de estimadores ótimos

ex. considere X_1, X_2, X_3 A.A tamanho 3 ~ Ber (θ)

$X = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$
$(0,0,1), (1,1,0), (1,0,1)$
$(0,1,1), (1,1,1)\}$

Seja $T(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$ uma função de A. A. que retorna valores tais que

$t(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = \{0, 1, 2, 3\}$

→ P/ ser Estatística suficiente NÃO se deve ter perda de informação a respeito do parâmetro, Assim o princípio da suficiência se uma estatística $T = T(x_1, \dots x_n)$ puder extrair toda informação que a amostra Al. $x_1, \dots x_n$ contem sobre θ então dizemos que T é suficiente para θ

Definição 1: Dizemos que $T = T(x) = T(x_1, \dots x_n)$ é suficiente p/ θ, qdo a distribuição condicional de $X_1, \dots X_n / T$ ~~suficiente~~ for independente do parametro (θ)

6.6. Exemplo/ Existente de "dois" ou mais estimadores não viciado.

$X_1, \dots X_n \sim$ poisson (λ) → somas de poisson = poisson

$\bar{X} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = T_1(\underset{\sim}{X})$, $ET_1(\underset{\sim}{X}) = \lambda$

$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = T_2(\underset{\sim}{X})$, $ET_2(\underset{\sim}{X}) = \lambda$

$\lambda =$ 1 acidente / dia
$\lambda =$ 1 (acidente / dia)^2
numericamente são iguais porém as grandezas são diferentes.

$T_3(\underset{\sim}{X}) = \pi \cdot T_1(\underset{\sim}{X}) + 1 - \pi \cdot T_2(\underset{\sim}{X})$ com $\pi \in [0, 1]$

temos que $ET_3(\underset{\sim}{X}) = \lambda \;\forall \pi \in [0, 1]$

6.7 Considere $ET_0(\underset{\sim}{X}) = \theta_0$; $ET_1(\underset{\sim}{X}) = \theta_0$, em que $\theta_0 \in \Theta$

$VAR(T_0) < VAR(T_1)$, significa que T_0 é, ~~localmente~~ estimador ~~localmente~~ não viciado de mínima variância, $\forall T_1$

6.8 Para $ET_0(\underset{\sim}{X}) = \theta$ e $ET_1(\underset{\sim}{X}) = \theta$, $\forall \theta \in \Theta$

$VAR(T_0) \leq VAR(T_1)$, $\forall T_1$, significa que T_0 é estimador não viciado uniformemente de mínima variância. (ENVUMV)

Ex utilizando series temporais

$\bar{Y}_n = \sum_{k=1}^{n} \theta^k \varepsilon_k$ $\quad |\theta| < 1$ $\quad VAR(\varepsilon_k) = \sigma^2$

$VAR(\bar{Y}_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} (\theta^2)^k$

$\lim_{n \to \infty} VAR(\bar{Y}_n) = \sigma^2 \cdot \frac{\theta^2}{1-\theta^2}$ não tende p/ zero

6- Estimação não viciado.

6.1 $\boxed{E_\theta T(\underset{\sim}{X}) = \psi(\theta)}$

$\boxed{\text{vício negativo = subestimar}}$

Em que $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, e T é uma função apropriada

6.2 $b_\theta(T, \psi) = E_\theta T(\underset{\sim}{X}) - \psi(\theta)$ vício

6.3 Exemplo: variância amostral

$$S_2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad E(S_2) = \sigma^2 \text{ (variância populacional)}$$

mas, como $VAR(S) = E S^2 - E(S) = \sigma^2 - E^2(S) > 0$, tem $E(S) < \sigma$

$b(S, \sigma) < 0$

Nem sempre o estimador não viciado existe

$\boxed{\tau = \ln \frac{p}{1-p}}$ transformação do parâmetro

6.4. Exemplo de (inexistência) $VAR\ X = p(1-p) = p - p^2$

$X \sim$ Bernoulli (p), $p \in (0,1)$, obter $T(x)$ t.q. $\underbrace{E\,T(x) = p^2}_{\text{verificar se isso é possível}} = \psi(1)$

$$T(x) = \begin{cases} T(0), & c/\ 1-p \\ T(1), & c\ p \end{cases}$$

$$E\,T(x) = (1-p) \cdot T(0) + p\,T(1) = p^2$$

$$p^2 + p[T(1) - T(0)] + T(0) = 0 \qquad \forall\ p \in (0,1)$$

$$\boxed{e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}}$$

Logo não é possível obter $T(x)$ t.q. $E\,T(x) = p^2$

6.5- Exemplo (Não adequação)

$X \sim$ Poisson (λ), $EX = \lambda > 0$, suponha que tenhamos $T(x) = (-2)^x$

$$E\,T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k \cdot (-2)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} = e^{-3\lambda}$$

$$E\,T(x) = e^{-3\lambda} = \psi(\lambda)$$

$T(x)$ não é viciado p/ $e^{-3\lambda}$

6.9 Considere $T(\underset{\sim}{x})$. tq $ET(x) = \theta$, $VAR\ T(\underset{\sim}{x}) < \infty$,

se, seja $V(\underset{\sim}{x})$, tq: $EV(\underset{\sim}{x}) = 0$ e $VAR\ V(x) < \infty$,

($V(\underset{\sim}{x})$ é um tipo de estatística ancilar? para qualquer $V(\underset{\sim}{x})$)

Nessas condições;

$T(\underset{\sim}{x})$ é ENVUMV, se e só se, $E[V(\underset{\sim}{x}) . T(\underset{\sim}{x})] = 0$, $\forall \theta$, $\forall V(\underset{\sim}{x})$

~~Volta primeiro~~ ida

PROVA: $\Rightarrow$ Por absurdo suponha que $E[V(\underset{\sim}{x}) \cdot T(\underset{\sim}{x})] \neq 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Seja $T^*(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{x}) + \alpha\, V(\underset{\sim}{x})$, de modo que

$$E\,T^*(\underset{\sim}{x}) = E[T(\underset{\sim}{x}) + \alpha . V((\underset{\sim}{x}))] = \theta$$

T^* ñ é viciado.

$$VAR\ T^*(\underset{\sim}{x}) = VAR\ T(\underset{\sim}{x}) + \alpha^2 VAR(\underset{\sim}{x}) + 2 . \alpha . Cov\ [T(x), V(\underset{\sim}{x})]$$

$\Rightarrow$ vamos mostrar o absurdo p/uma escolha particular de α

Seja $\alpha = -\dfrac{Cov\ [T(\underset{\sim}{x}), V(\underset{\sim}{x})]}{VAR(V(\underset{\sim}{x}))}$, Daí temos.

$$VAR\ T^* = VAR\ T(x) + \frac{cov^2\ [T(\underset{\sim}{x}), VAR(x)]}{VAR(V(x))} - 2 \cdot \frac{Cov^2\ [T(x), V(x)]}{VAR(V(x))}$$

$$\underset{>0}{VAR\ T^*(\underset{\sim}{x})} = \underset{>0}{VAR\ T(\underset{\sim}{x})} - \underset{>0}{\frac{COV^2\ [T(\underset{\sim}{x}), V(\underset{\sim}{x})]}{VAR(V(\underset{\sim}{x}))}}$$ ou seja,

$$VAR\ T^*(\underset{\sim}{x}) < VAR\ T(\underset{\sim}{x})$$

o que é uma contradição

Logo, $E(V(\underset{\sim}{x}) . T(\underset{\sim}{x})) = 0$, $T(x)$ é ENVUMV

Continuação 6.9

$\Leftarrow$ Seja T t.q $E[U(\underset{\sim}{x}).T(\underset{\sim}{x})] = 0$ e considere T^* t.q $ET^* = \theta$, tome $U(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{x}) - T^*(\underset{\sim}{x})$.

$$E[V(\underset{\sim}{x}).T(\underset{\sim}{x})] = E[(T-T^*).T] = 0$$

$$= E[T^2] - E[T^*.T] = 0$$

$$\underbrace{E(T^2) - \theta^2}_{VAR(T\underset{\sim}{x})} = E[T^*.T] - \theta \cdot \theta$$

$$= Cov(T(\underset{\sim}{x}), T^*(x))$$ ~~Com isso, VAR $T(x) \leq VAR(T^*)$~~

$\boxed{\cancel{T(x) \text{ é } EN VUMV}}$

$$|Cov(T(\underset{\sim}{x}), T^*(\underset{\sim}{x}))|^2 \leq VAR(T) \cdot VAR(T^*)$$

$$\frac{(VAR\ T(x))^2}{VAR\ T(x)} \leq VAR(T^*)$$

Com, isso, VAR $T(x) \leq VAR(T^*)$

$T(x)$ é EN VUMV

Digitalizado com CamScanner

6- Inferência estatística 08/12/22

* Relembrando a última aula

6.9. $X_1, \dots, X_n$ A.A.S $F_\theta(x)$, $E[T(\underset{\sim}{x})] = \theta$, $Var[T(\underset{\sim}{x})] < \infty$

$$E(U(\underset{\sim}{x})) = 0, \quad VAR[U(x)] < \infty, \forall U(\underset{\sim}{x}), \forall \theta$$

$T(\underset{\sim}{x})$ é ENVUMV p/ θ se e só se $E[U(x) \cdot T(\underset{\sim}{x})] = 0$

6.10. $\exists!$ ENVUMV p/ θ $\boxed{\exists! \to \text{se existe}}$

Prova: Suponha que existe que $E[T^*(\underset{\sim}{x})] = E[T(\underset{\sim}{x})] = \theta$ e Var

$VAR[T^*(x)] = VAR[T(x)] < \infty$

Considere $U(\underset{\sim}{x}) = T^*(\underset{\sim}{x}) - T(\underset{\sim}{x})$, $E\,U(x) = E[T^*(\underset{\sim}{x}) - T(x)] = 0$

$E[V(\underset{\sim}{x}) \cdot T(x)] =$

se

$E[U(x) \cdot T(x)] = E[(T^* - T) \cdot T] = E[T^*T - T^2] = E[T^*T] - E[T^2] = 0$

$E[T^*T] = E[T^2]$

$\underbrace{E[T^*T] - \theta^2}_{ET^* \cdot ET} = E[T^2] - \underset{(ET)^2}{\theta}$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$cov(T^*, T) = VAR(T) = \sqrt{VAR(T)} \cdot \sqrt{VAR(T)} = \sqrt{VAR(T)} \cdot \sqrt{VAR\,T^*}$

$$\rho_{T^*,T} = \frac{cov\, T^*, T}{\sqrt{VAR\,T^*\, VAR\,T}} = 1 \Rightarrow T = T^*$$

6. Estimação ñ viciada

[Migon e Gamerman] → livro estatística.

6.1. Teorema de Rao-Blackwell

Sejam $H(\underset{\sim}{X})$ e $T(\underset{\sim}{x})$ tais que $E[H(\underset{\sim}{X})] = \theta$ e $T(\underset{\sim}{x})$ estatística suficiente p/ θ

Então $E[H(\underset{\sim}{X}) \mid T(\underset{\sim}{x})]$
(variável aleatória)

i) é estimador não viciado p/ θ.

ii) de mínima variância.

Prova: i. $E[E(H|T)] = EH = \theta$

$$E[H|T] = \iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} h \cdot f(h \cdot t)\, dh \cdot f_t\, dt$$

$$\iint h \cdot f(h\,t)\, dt\, dh$$

---

ii $E[\text{VAR}(H|T)] = E[E(H^2|T) - E^2(H|T)] =$

$E[E(H^2|T)] - E[E^2(H|T)] = \underbrace{E(H^2) - E^2(H)}_{\text{VAR}(H)} - E[E^2(H|T)] + E^2(H)$

$= \text{VAR}(H) - E[E^2(H|T)] + (E[E(H|T)])^2$

$= \text{VAR}(H) - \text{VAR}[E(H|T)] \geq 0$

logo $\boxed{\text{VAR}\, E[H|T] \leq \text{VAR}(H)}$ $\forall \theta$ ENVUMV.

6.12 teorema de Lehmann - Scheffé

sejam $H(\underset{\sim}{X})$ e $T(\underset{\sim}{X})$ tais que

Prova: sejam H_1 e H_2 estimadores tais que $E[E(H_1|T)] = \theta$ e $E[E(H_2|T)] = \theta$

então $E[H_1 - H_2|T] = 0$

$$E[E(H_1|T) - E(H_2|T)] = 0$$

$$E[g(T)] = 0 \Rightarrow P[E(H_1|T) = E(H_2|T)] = 1$$

6.13 Exemplo

$X_1, \ldots, X_n$ A.A.S. $N(\mu, 1)$ obter ENVUMV p μ

sabemos que $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é suficiente $H(\underset{\sim}{X}) = X_1$ é NÃO viciado para μ.

$$E[H(\underset{\sim}{X})|T(X)] = E[X_1 | \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

curva de Regressão sob normalidade.

$$E[H(\underset{\sim}{X})|T(\underset{\sim}{X})] = \beta_0 + \beta_1 T(\underset{\sim}{X})$$

$\beta_1 \to \boxed{\frac{1}{n}}$

$$\beta_1 = \rho_{H,T} \frac{\sqrt{Var\, H(X)}}{\sqrt{Var\, T(X)}}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$Cov(H,T) = E(H \cdot T) - EH \cdot ET$

$= E[X_1 \sum_{i=1}^{n} x_i] - EX_1 \cdot E\sum x_i$

$= E[X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} X_1 \cdot X_i] - n\mu^2$

$= 1 + \mu^2 + (n-1)\cdot\mu^2 - n\mu^2 = 1$

$E[\underbrace{E(H|T)}_{\mu}] = \beta_0 + \beta_1 \cdot E[T]$

$\mu = \beta_0 + \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu \to \beta_0 = 0$

Logo $E(H_2|T) = \frac{T}{n} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$

Logo é ENVUMV ? acabou aqui

$\bar{x}$ é único pois, pois $\sum X_i$ é suficiente e completo.

Inferencia estatística.

6.14) Observação $\begin{cases} T(\underset{\sim}{x}) \text{ suficiente} \\ H(\underset{\sim}{x}) \text{. estatística ñ viciada.} \end{cases}$

se $H(\underset{\sim}{x}) = H(T(x))$, então $H(\underset{\sim}{x})$ é ~~estatística~~ ENVUMV

$$E[H(x) \mid T(x)] = \underbrace{E[H(T(x)) \mid T(x)]}_{\text{Redundante.}}$$

$= H[T(x)]$

Assunto da prova até seção 8.4.

<u>problemas 8.4</u>, 7, 8, 9, 10, 25, 26

13/12/22 (1)

7. Limite inferior de Cramer - Rão - Fréchet.

$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra retirada de uma densidade conjunta $f_\theta(x_1, \ldots, x_n)$, c/ $\theta \in \mathbb{R}$, e $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$. + q $f_\theta(x) > 0$

Objetivo: Dado um estimador $T(\underset{\sim}{x})$ $\boxed{T_q\ E_\theta T(x) = \psi(\theta),}$ * encontrar um limite inferior p/ $VAR_\theta T(x)$, ou seja, $VAR_\theta T(x) \geq g(\theta)$

Considere $E_\theta T(\underset{\sim}{x}) = \psi(\theta)$

$\boxed{\frac{d}{d\theta} f_\theta(x) = f'}$

$\boxed{\frac{(Cov(X,Y))^2}{VAR\ Y} \leq VAR\ X}$

$\frac{d}{d\theta} E_\theta\, T(\underset{\sim}{x}) = \frac{d}{d\theta} \cdot \psi(\theta) = \psi'(\theta)$, em que ψ é derivável

$\frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x}) f_\theta(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x} \underset{ii}{=} \int_{\mathbb{R}^n} T(x) \frac{d}{d\theta} f_\theta(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x}$

$\underset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x}) \cdot \frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \cdot f_\theta(x)\, dx$

$= E_\theta \Big[T(x) \cdot \underbrace{\frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x})}_{\text{Escore de Fisher.}} \Big] = ** \underbrace{Cov_\theta \Big[T(x), \frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \Big]}_{\text{este resultado é deduzido após } **}$

Devemos obter $E\left[1 \cdot \frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \right] = 0 \to **$ → Volte aplicando este 1 desde o passo 1 então temos

$\int_{\mathbb{R}^n} f_\theta(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x} = 1 \cdot \frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^n} f_\theta(x)\, d\underset{\sim}{x} \underset{\substack{ii\\iii}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{d\theta} f_\theta(x)\, dx \underset{*}{=}$

$= \int \frac{d}{d\theta} \cdot \ln f_\theta(\underset{\sim}{x})\, dx = \frac{d}{d\theta} \cdot 1 = 0$; então

$\left\{ Cov_\theta \left[T(x), \frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \right] \right\}^2 \leq VAR_\theta T(x) \cdot VAR \left[\frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \right]$

$E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \right)^2 \right]$

$$\boxed{VAR_\theta T(\underset{\sim}{x}) \geq \frac{[\psi'(\theta)]^2}{E\left[\left(\frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \right)^2 \right]}}$$

→ Limite inferior de Cramer-Rão

Condições do problema

i) ψ é derivável.

ii) espaço amostral $\underset{\sim}{X}$ não depende θ

iii) $\frac{d}{d\theta} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_\theta(x)\, dx = \int g(x) \frac{d}{d\theta} f_\theta(x)\, dx$

$\frac{d}{d\theta}$ atua sobre f_θ, mas não sobre a integral

iv) $VAR\ T(X) < \infty$

$VAR_\theta \left[\frac{d}{d\theta} \ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) \right] < \infty$

Condições de Regularidade

tomando a expressão da pag anterior **

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta\left[\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(\underset{\sim}{x})\right] = 0 \quad \frac{d}{d\theta}\int\left(\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(x)\right) f_\theta(x)\,dx$$

$$\underset{iii}{\overset{ii}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x)\, f_\theta(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(x)\right)^2 f_\theta(x)\,dx$$

$$= E\left[\underbrace{\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x)}_{<0}\right] + E\left[\underbrace{\left(\frac{d}{d\theta}\ln f(x)\right)^2}_{>0}\right] = 0$$

$$\boxed{VAR_\theta\, T(\underset{\sim}{x}) \geq - \frac{[\psi'(\theta)]^2}{\underbrace{E\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(\underset{\sim}{x})\right]}_{\text{informação de fisher}}}}$$

observação se $E\,T(\underset{\sim}{x}) = \theta$

então $\psi'(\theta) = 1$

Neste caso, $\boxed{VAR\, T(\underset{\sim}{x}) \geq -\frac{1}{E\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x)\right]}}$

Ou $VAR\,T(\underset{\sim}{x}) \geq -\dfrac{1}{\underbrace{I(\text{fisher})}_{I(\theta)}}$

Em que situação $VAR(T(\underset{\sim}{x})) = -\dfrac{(\psi'(\theta))^2}{E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(\underset{\sim}{x})\right]} \longrightarrow C^*$?

$$\left\{Cov_\theta\left[T(\underset{\sim}{x}), \frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(x)\right]\right\}^2 = (\psi'(\theta))^2 = -VAR_\theta\, T(x)\cdot E\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x)\right]$$

correlação 1 entre $t(\underset{\sim}{x})$ e $\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(\underset{\sim}{x})$

$$\underbrace{\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(\underset{\sim}{x})}_{\text{vamos chamar de } S_\theta(\underset{\sim}{x})} = \underbrace{\alpha(\theta)T(\underset{\sim}{x}) + \beta}_{\alpha(\theta)(T(\underset{\sim}{x}) - \psi(\theta))}$$ → Relação linear perfeita.

$$\alpha = \frac{Cov(T(\underset{\sim}{x}), S_\theta(x))}{Var(T(\underset{\sim}{x}))} = \frac{\psi'(\theta)I(\theta)}{[\psi'(\theta)]^2} = \frac{I(\theta)}{\psi'(\theta)}$$

C^* $VAR(T(\underset{\sim}{x})) = -\dfrac{(\psi'(\theta))^2}{E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x)\right]} = -\dfrac{(\psi'(\theta))^2}{I(\theta)}$

Dado: $\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(\underset{\sim}{x}) = \alpha(\theta)(T(\underset{\sim}{x}) - \psi(\theta))$

Família exponencial: $f_\theta(x)\exp\{A(\theta)T(x)+C(\theta)+D(x)\}$

$T(\underset{\sim}{x})$ estatística, suficiente, completa e minimal.

$$\frac{d}{d\theta}\int_{\mathbb{R}^n} f_\theta(\underset{\sim}{x})\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(A'(\theta)\,T(\underset{\sim}{x}) + C'(\theta)\right) f_\theta(\underset{\sim}{x})\,d\underset{\sim}{x}$$

$$= A'(\theta)\cdot E\,T(\underset{\sim}{X}) + C'(\theta) = 0 \qquad \boxed{E\,T(x) = -\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)} = \varphi(\theta)}$$

Problemas $\boxed{8.5}$

1, 2, 6, 7, 8, 9