# Prova 2 - Inferência Estatística
Nome: Marcos Augusto D. Barbosa
Matrícula: 22/0006024

1

* $X_1, \ldots, X_n$ A.A de uma distribuição de Pareto
* $F_{(\alpha,\mu)}(x) = \begin{cases} 1 - (\mu/x)^{\alpha}, & \text{se } x \geq \mu \\ 0, & \text{se } x < \mu \end{cases}$

* $\mu > 0$ e $\alpha > 0$

$\boxed{I}$ Calcular densidade.

$x \geq \mu$: $f_{(\alpha,\mu)}(x) = \frac{d}{dx} F_{(\alpha,\mu)}(x)$

$$= \alpha \left(\frac{\mu}{x}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{\mu}{x^2}$$

$$= \alpha \cdot \mu^{\alpha} \cdot x^{-(\alpha+1)}$$

$$\Rightarrow f_{(\alpha,\mu)}(x) = \begin{cases} \alpha \mu^{\alpha} \cdot x^{-(\alpha+1)} & , x \geq \mu \\ 0 & , x < \mu \end{cases}$$

$\boxed{II}$ Calcular log-verossimilhança

$$L(\alpha,\mu) = \prod_{i=1}^{n} \alpha \cdot \mu^{\alpha} \cdot x_i^{-(\alpha+1)}$$

$$= \alpha^{n} \cdot \mu^{n\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha+1)}$$

$$l(\alpha,\mu) = n \cdot \ln(\alpha) + n\alpha \cdot \ln(\mu) - (\alpha+1) \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$\boxed{III}$ Calcular $\hat{\alpha}$ (EMV).

i) $\mu$ é conhecido

$$\frac{d}{d\alpha} l(\alpha, \mu) = \frac{n}{\alpha} + n \cdot \ln(\mu) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

Igualando a zero:

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(x_i/\mu\right)}$$

$$\Longrightarrow n \cdot \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i/\mu).$$

Uma vez que $X \sim Pareto(\alpha, \mu)$, então $\ln(X/\mu) \sim Exponencial(\alpha)$

Consequentemente, $\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i/\mu) \sim Gamma(n, \alpha)$

Neste caso,

$$n \cdot \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i/\mu) \sim Gamma(n, 1)$$

ii) $\alpha$ e $\mu$ desconhecidos

Conforme o artigo "Estimation of the Parameters of the Pareto Distribution" de H.J. Malik, Guelph:

Se $X_1, \ldots, X_n$ é A.A de tamanho $N$ em que $f(x) = \alpha \mu^{\alpha} \cdot x^{-(\alpha+1)}$, $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $x \geq \mu$. Se $g$ é a média geométrica amostral e $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_N\}$, então a função de densidade de probabilidade de $S = \ln(g/X_{(1)})$ é descrita por:

$$f_S(s) = \frac{\alpha^{N-1} \cdot N^{N-1} \cdot s^{N-2} \cdot e^{-\alpha N s}}{\Gamma(N-1)} \quad , s > 0$$

Agora, vale notar que:

$$S = \ln\left[\frac{(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_N)^{1/N}}{\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \cdot \ln\left(X_i / \mu\right)$$

$$= 1/\hat{\alpha}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 1/S$$

Nesse artigo, é argumentado que fazendo a transformação $\hat{\alpha} = 1/S$ e multiplicando pelo Jacobiano, $|J| = 1/\hat{\alpha}$, é obtida a função de densidade de probabilidade do EMV $\hat{\alpha}$.
Finalmente, conclui-se no artigo que

$$2N \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} \sim \chi^2_{2N-2}$$

(2)

* $X_1, \ldots, X_{10}$ A.A.S retirada de Poisson($\lambda$)
* Teste: $H_0: \lambda = 2$ versus $H_1: \lambda = 3$

(Baseando-se na distribuição exata.

i) $\lambda^*(\underset{\sim}{X}) = \dfrac{L(\lambda|H_0)}{L(\lambda|H_1)}$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{10} 2^{x_i} \cdot e^{-2} \cdot (x_i!)^{-1}}{\prod_{i=1}^{10} 3^{x_i} \cdot e^{-3} \cdot (x_i!)^{-1}}$$

$$= e^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_{i=1}^{10} X_i}$$

$$\Rightarrow \ln(\lambda^*) = 10 + \ln(2/3) \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i$$

Sendo assim, $\lambda^*$ e $\ln(\lambda^*)$ são funções monótonas decrescentes de $\sum_{i=1}^{10} X_i$. Com isso, é obtida a função teste:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{10} X_i > c \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{10} X_i = c \\ 0, & \sum_{i=1}^{10} X_i < c \end{cases}$$

Vamos definir $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim Poisson(10\lambda)$

$P(Y > 28 \mid \lambda = 2) = 0{,}0343$

$P(Y > 27 \mid \lambda = 2) = 0{,}0524$.

Assim,

$$\underset{\lambda=2}{E}\, \varphi(\underset{\sim}{X}) = P(Y > 28 \mid \lambda = 2) + \gamma \cdot P(Y = 28 \mid \lambda = 2)$$

Igualando com $\alpha = 0{,}05$.

$$P(Y > 28 \mid \lambda = 2) + \gamma \cdot \underbrace{P(Y = 28 \mid \lambda = 2)}_{0{,}0181} = 0{,}05$$

$$\Rightarrow \gamma = 0{,}863$$

Portanto, temos:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{10} X_i > 28 \\ 0{,}863, & \sum_{i=1}^{10} X_i = 28 \\ 0, & \sum_{i=1}^{10} X_i < 28 \end{cases}$$

ii) Para o cenário de teste não aleatorizado, a regra decisão seria:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{10} X_i > 28 \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 28 \end{cases}$$

E o nível de significância do teste $\alpha$ seria 3,43%, que é menor ou igual a 5%.

iii) No item i), a razão de verossimilhança obtida foi:

$$e^{10} \cdot (2/3)^{\sum_{i=1}^{10} x_i}$$

Além disso, com a definição da variável aleatória $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$, podemos checar

Para $y_1 > y_2$, temos $e^{10} (2/3)^{y_1} < e^{10} (2/3)^{y_2}$

$\therefore$ A razão de verossimilhança é função monótona decrescente.

iv)

$$E_\lambda \varphi(\underset{\sim}{X}) = P_\lambda (\text{Rejeitar } H_0)$$

$$= P_\lambda \left( \sum_{i=1}^{10} X_i > 28 \right) + 0{,}863 \cdot P\left( \sum_{i=1}^{10} X_i = 28 \right)$$

$$= \left[ 1 - e^{-10 \cdot \lambda} \sum_{k=0}^{28} (10\lambda)^k (k!)^{-1} \right] + 0{,}863 \cdot \left[ e^{-10} \cdot (10\lambda)^{28} (28!)^{-1} \right].$$

Uma vez que $\lambda = 3$, sob $H_1$:

$$P_{\lambda=3} (\text{Rejeitar } H_0) \cong 0{,}658$$

3

* $X_1, \dots, X_5$ A.A.S retirada de Geometrica($p$)

* Teste: $H_0: p = 0{,}4$ versus $H_1: p = 0{,}3$

(Baseando-se na distribuição exata)

i) $$\lambda^*(\underset{\sim}{X}) = \frac{L(p|H_0)}{L(p|H_1)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{5} 0{,}4 \cdot 0{,}6^{x_i}}{\prod_{i=1}^{5} 0{,}3 \cdot 0{,}7^{x_j}}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{6}{7}\right)^{\sum_{i=1}^{5} X_i}$$

$$\Rightarrow \ln(\lambda^*(\underset{\sim}{X})) = 5 \cdot \ln(4/3) + \ln(6/7) \cdot \sum_{i=1}^{5} X_i$$

Sendo assim, $\lambda^*$ e $\ln(\lambda^*)$ são funções monótonas decrescentes de $\sum_{i=1}^{10} X_i$.

Com isso, é obtida a função teste:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > c \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{5} X_i = c \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < c \end{cases}$$

Vamos definir $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$, que segue

Binomial Negativa $(5, p)$.

$P(Y > 16 \mid p = 0{,}4) \cong 0{,}0370$

$P(Y > 15 \mid p = 0{,}4) \cong 0{,}051$

Assim,

$E_{p=0{,}4}\, \varphi(\underset{\sim}{X}) =$

Igualando com $\alpha = 0{,}05$.

$$P(Y > 16 \mid p = 0{,}4) + \gamma \underbrace{P(Y = 16 \mid p = 0{,}4)}_{\cong 0{,}0140} = 0{,}05$$

$\Rightarrow \gamma \cong 0{,}932$

Portanto, temos:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > 16 \\ 0{,}932, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 16 \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < 16 \end{cases}$$

ii) Para o cenário de teste não aleatorizado, a regra decisão seria:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \sum_{i=1}^{10} X_i > 16 \\ 0 & , \text{ se } \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 16 \end{cases}$$

E o nível de significância do teste $\alpha$ seria 3,70% que é menor ou igual a 5%.

iii) No item i), a razão de verossimilhança obtida foi:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{6}{7}\right)^{\sum_{i=1}^{5} X_i}$$

Além disso, com a definição da variável aleatória $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$, podemos checar

Para $y_1 > y_2$, temos $\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{6}{7}\right)^{y_1} < \left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(\frac{6}{7}\right)^{y_2}$.

$\therefore$ A razão de verossimilhança é função monótona decrescente.

iv) $E_p\, \varphi(\underset{\sim}{X}) = P_p(\text{Rejeitar } H_0)$

$$= P_p\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 16\right) + 0{,}932\, P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 16\right)$$

Uma vez que $p = 0{,}3$, sob $H_1$:

$$P_{p=0{,}3}(\text{Rejeitar } H_0) \cong 0{,}235$$

(4)

* $X_1, \dots, X_{10}$ A.A.S retirada de Gamma, com média $5/\lambda$ e variância $5/\lambda^2$, $\lambda > 0$ representa a taxa.

* Teste: $H_0: \lambda = 1$ versus $H_1: \lambda = 0{,}5$

(Baseando-se na distribuição exata)

i) Vamos escrever a distribuição Gamma como Gamma($\alpha = 5$, $\beta = \lambda$)

$$\lambda^*(\underset{\sim}{X}) = \frac{L(\lambda | H_0)}{L(\lambda | H_1)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{10} 1^5 \cdot x_i^{5-1} \cdot e^{-x_i}}{\prod_{i=1}^{10} 0{,}5^5 \cdot x_i^{5-1} \cdot e^{-0{,}5 x_i}}$$

=

$$\prod_{i=1} 0{,}5 \cdot X_i$$

$$= 2^{50} \cdot \exp\left(-0{,}5 \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i\right)$$

$$\Rightarrow \ln(\lambda^*(\underset{\sim}{X})) = 50\ln(2) - 0{,}5 \sum_{i=1}^{10} X_i$$

Sendo assim, $\lambda^*$ e $\ln(\lambda^*)$ são funções monótonas decrescentes de $\sum_{i=1}^{10} X_i$.

Com isso, é obtida a função teste:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{10} X_i > c \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{10} X_i \leq c \end{cases}$$

Vamos definir $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$, que segue distribuição Gamma$(50, \lambda)$.

Para descobrir o quantil de 95% probabilidade da distribuição Gamma$(50, \lambda = 1)$, pode se utilizar o R. É obtido o valor 62,17.

Portanto, temos a regra de decisão:

$$\varphi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{10} X_i > 62{,}17 \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 62{,}17 \end{cases}$$

ii) No item i), a razão de verossimilhança obtida foi:

$$2^{50} \cdot \exp\left(-0{,}5 \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i\right)$$

Além disso, com a definição da variável aleatória $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$, podemos checar

Para $y_1 > y_2$, temos $2^{50} \cdot \exp(y_1) < 2^{50} \cdot \exp(y_2)$

∴ A razão de verossimilhança é função monótona decrescente.

iii) $E_\lambda \varphi(\underset{\sim}{X}) = P_\lambda(\text{Rejeitar } H_0)$

$$= P_\lambda\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 62{,}17\right)$$

Uma vez que $\lambda = 0{,}5$, sob $H_1$:

$$P_{\lambda=0{,}5}(\text{Rejeitar } H_0) \cong 0{,}999$$

5

* $X_1, \ldots, X_n$ A.A.S retirada de

$$F(x;\beta) = 1 - \beta/x,$$

$x \geq \beta > 0$.

* Teste: $H_0: \beta = \beta_0$ versus $H_1: \beta = \beta_1$, $\beta_1 > \beta_0$

Calculando a densidade:

$x \geq \beta > 0$:

$$f(x;\beta) = \frac{d}{dx} F(x;\beta)$$

$$= -\beta \cdot (-1) \cdot x^{-2}$$

$$= \beta / x^2$$

$$\Rightarrow f(x;\beta) = \begin{cases} \beta/x^2, & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases}$$

ou

$$f(x,\beta) = \frac{\beta}{x^2} \cdot \mathbb{1}_{\{\beta,\infty\}}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x},\beta_0)}{f(\underset{\sim}{x},\beta_1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \beta_0 x_i^{-2} \mathbb{1}_{\{\beta_0,\infty\}}(x_i)}{\prod_{i=1}^{n} \beta_1 x_i^{-2} \mathbb{1}_{\{\beta_1,\infty\}}(x_i)}$$

$$= \frac{\beta_0^n}{\beta_1^n} \cdot \frac{\mathbb{1}_{\{\beta_0,\infty\}}(x_{(1)})}{\mathbb{1}_{\{\beta_1,\infty\}}(x_{(1)})}$$

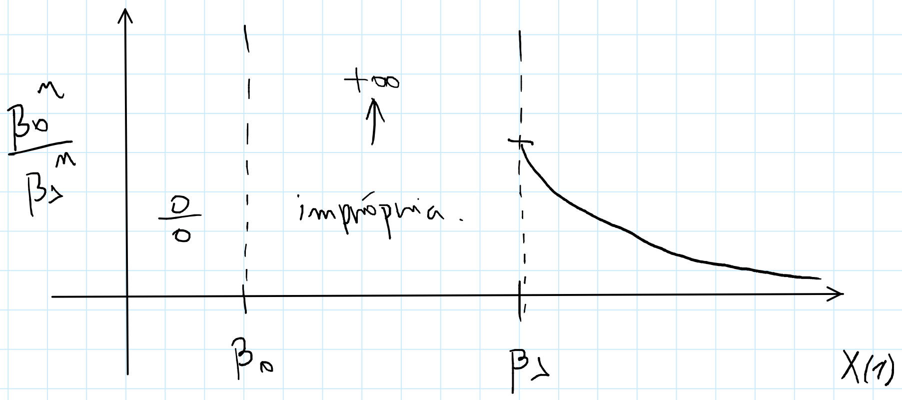
Assim,

$$\lambda(X_{(1)}) = \begin{cases} +\infty & , \text{se } \beta_0 \leq X_{(1)} < \beta_1 \end{cases}$$

Assim,

$$\lambda(X_{(1)}) = \begin{cases} +\infty & , \text{ se } \beta_0 \leq X_{(1)} < \beta_1 \\ \beta_0^n / \beta_1^n & , \text{ se } X_{(1)} \geq \beta_1 \end{cases}$$

em que $X_{(1)} = \min \underset{\sim}{X}$




Classificamos $\lambda(X_{(1)})$ como função que "decresce" monotonicamente.

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } X_{(1)} > c^* \\ 0 & , \text{ se } X_{(1)} < c^* \end{cases}$$

Queremos $c^*$ tal que $E_{\beta_0} \varphi(\underset{\sim}{X}) = \alpha = P_{\beta_0}[X_{(1)} > c^*]$

$$P(X_{(1)} > x) = P(\min \underset{\sim}{X} > x)$$

$$= P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x)$$

$$= \left(\frac{\beta}{x}\right)^n \sim \text{Pareto}(\beta, n)$$

Sendo assim, o mínimo de $n$ i.i.d variáveis aleatórias Pareto$(\beta, 1)$ é Pareto$(\beta, n)$.

$$\underbrace{E_{\beta_0}\varphi(X_{(1)})}_{\alpha} = P_{\beta_0}\left[X_{(1)} > c^*\right] = \left(\frac{\beta_0}{c^*}\right)^n$$

$$\Rightarrow \alpha^{1/n} = \frac{\beta_0}{c^*}$$

$$\Rightarrow c^* = \beta_0 / \alpha^{1/n}$$

$\therefore$

$$\varphi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & , \text{se } X_{(1)} > \beta_0/\alpha^{1/n} \\ 0 & , \text{se } X_{(1)} < \beta_0/\alpha^{1/n} \end{cases}$$