Análisis Numérico - Curso Sassano
(75.12 - 95.04)

Trabajo Práctico 2
Ecuaciones Diferenciales - Péndulo

6 de julio de 2024

Marcos Bianchi
108921

Federico Genaro
109447

Felipe Sagasti
103730

1. Resolución del primer punto

Se realizar la discretización a través del método de Runge-Kutta de orden dos de la ecuación diferencial provista, la cual describe la posición de una masa en función del tiempo a medida que ésta pendula sujeta por una cuerda a un punto fijo.

Ecuacion original:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m} * \dot{\theta} + \frac{g}{L} * sin(\theta) = 0 \tag{1}$$

Discretizacion de la ecuación:

Definimos $\mu = \dot{\theta}$, por lo que reemplazando en (1) obtenemos:

$$\mu' + \frac{b}{m} * \mu + \frac{g}{L} * sin(\theta) = 0 \tag{2}$$

Despejando μ' tenemos entonces un sistema:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \mu \\ \mu' = -\frac{b}{m} * \mu - \frac{g}{L} * sin(\theta) \end{cases} \tag{3}$$

Para el cual en caso de tener $\theta(t_0) = \theta_0$ podríamos tener un PVI para el sistema tal que:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \mu \\ \mu' = -\frac{b}{m} * \mu - \frac{g}{L} * sin(\theta) \\ \theta(t_0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 = \mu(t_0) = \mu_0 \end{cases}$$

Aplicando Runge-Kutta de orden 2 del punto medio tendríamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ \mu_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \mu_i \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} m_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$m_1 = f(t_i, \theta_i, \mu_i) = \mu_i$$

$$m_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, \theta_i + \frac{h * m_1}{2}, \mu_i + \frac{h * k_1}{2}) = \mu_i + \frac{h * k_1}{2}$$

$$k_1 = g(t_i, \theta_i, \mu_i) = -\frac{b}{m} * (\mu_i) - \frac{g}{L} * sen(\theta_i)$$

$$k_2 = g(t_i + \frac{h}{2}, \theta_i + \frac{h * m_1}{2}, \mu_i + \frac{h * k_1}{2}) = -\frac{b}{m} * (\mu_i + \frac{h * k_1}{2}) - \frac{g}{L} * sen(\theta_i + \frac{h * m_1}{2})$$

Obteniendo finalmente:

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ \mu_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_i \\ \mu_i \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} \mu_i + \frac{h*(-\frac{b}{m}*(\mu_i) - \frac{g}{L}*sen(\theta_i))}{2} \\ -\frac{b}{m} * (\mu_i + \frac{h*(-\frac{b}{m}*(\mu_i + \frac{h*k_1}{2}) - \frac{g}{L}*sen(\theta_i + \frac{h*m_1}{2}))}{2}) - \frac{g}{L} * sen(\theta_i + \frac{h*\mu_i}{2}) \end{bmatrix}$$

1.1. Ejecución de dos iteraciones para sistema planteado

Se realiza para los datos propuestos para el tercer punto, y un paso de $h = 0{,}1$, dos iteraciones del algoritmo propuesto:
Datos:

- $m = 1$

- $L = 1$
- $b = 1$
- $\theta = 30$
- $\dot{\theta} = 0$
- $h = 0{,}1$

1.1.1. Primera iteración

$$m_1 = f(t_0, \theta_0, \mu_0) = \mu_0 = 0$$
$$k_1 = g(t_0, \theta_0, \mu_0) = \mu_0 = -4,905$$
$$m_2 = f(t_0 + \frac{h}{2}, \theta_0 + \frac{h * m_1}{2}, \mu_0 + \frac{h * k_1}{2}) = \mu_0 + \frac{h * k_1}{2} = -0{,}2453$$
$$k_2 = g(t_0 + \frac{h}{2}, \theta_0 + \frac{h * m_1}{2}, \mu_0 + \frac{h * k_1}{2}) = -(\mu_0 + \frac{h * k_1}{2}) - g * sen(\theta_0 + \frac{h * m_1}{2}) = -4,6598$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} m_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4991 \\ -0,4660 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Segunda iteración

$$m_1 = f(t_1, \theta_1, \mu_1) = \mu_1 = -0,4660$$
$$k_1 = g(t_1, \theta_1, \mu_1) = \mu_1 = -4,229$$
$$m_2 = f(t_1 + \frac{h}{2}, \theta_1 + \frac{h * m_1}{2}, \mu_1 + \frac{h * k_1}{2}) = \mu_1 + \frac{h * k_1}{2} = -0,6775$$
$$k_2 = g(t_1 + \frac{h}{2}, \theta_1 + \frac{h * m_1}{2}, \mu_1 + \frac{h * k_1}{2}) = -(\mu_1 + \frac{h * k_1}{2}) - g * sen(\theta_1 + \frac{h * m_1}{2}) = -3,8160$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} m_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4314 \\ -0,8474 \end{bmatrix}$$

De esta forma concluye el desarrollo del primer punto del trabajo práctico, pudiéndose encontrar los desarrollos de los demás puntos en el archivo de nombre report.ipynb.