Transformada de Fourier

Operações de processamento digital de imagem em que é usada a Transforma de Fourier:

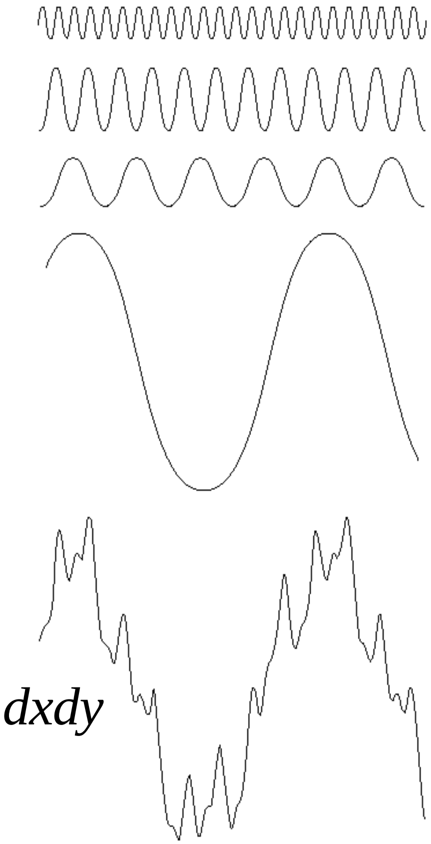
✓ Filtragem no domínio da frequência:

- Na suavização da imagem para remoção do ruído de alta frequência que corrompe a imagem.
- Na detecção das arestas que delimita as diferentes regiões da imagem.

✓ Extracção de características que permitam por exemplo reconhecer e classificar os diferentes objectos presentes na imagem. Os coeficientes da Transformada discreta de Fourier podem permitir a distinção entre a representação dos objectos (ex: círculos e rectângulos).

✓ Na compressão de imagem. O emissor pode enviar apenas um sub-conjunto dos coeficientes da transformada de Fourier da imagem e o receptor reconstrói a imagem aproximada, somando as várias componentes de frequências (sinusóides).

Transformada de Fourier



Decomposição de uma imagem em componentes (senos e cosenos).

No domínio de Fourier cada ponto da imagem representa uma frequência particular contida no domínio espacial.

Contínuo - FFT

u – variável de frequência

1D: $$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

2D: $$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+vy)} dxdy$$

Discreto - DFT

1D: $$\Im\{f(x)\} = F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

2D: $$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Transformada de Fourier

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

•O valor de cada ponto $F(u,v)$ é obtido pela multiplicação da imagem espacial com a correspondente função base e somando o resultado.

•As funções base são seno e cosenos de frequência crescente.

•$F(0,0)$ representa a componente contínua da imagem a qual corresponde à média das intensidades.

•$F(M-1,N-1)$ representa as mais altas frequência em ambas as direcções x e y.

Transformada de Fourier

•Os incrementos espaciais na função $f(x,y)$ e os incrementos da frequência na função $F(u,v)$ estão relacionados por $\Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$ e $\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$

•Se $f(x,y)$ é uma função real, $F(u,v)$ é uma função complexa que se apresenta sob a forma de uma soma de termos reais R e imaginários I: $F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$

→ Espectro do sinal $f(x,y)$: $|F(u,v)| = \left(R^2(u,v) + I^2(u,v)\right)^{\frac{1}{2}}$

→ Ângulo de fase: $\psi(u,v) = arctg\left(\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right)$

→ Espectro de energia: $E(u,v) = \left[F(u,v)\right]^2$

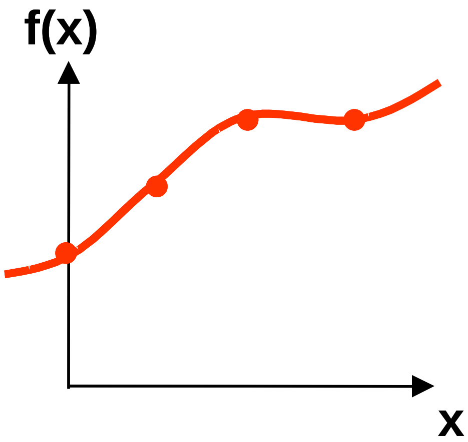
Transformada Inversa Discreta de Fourier

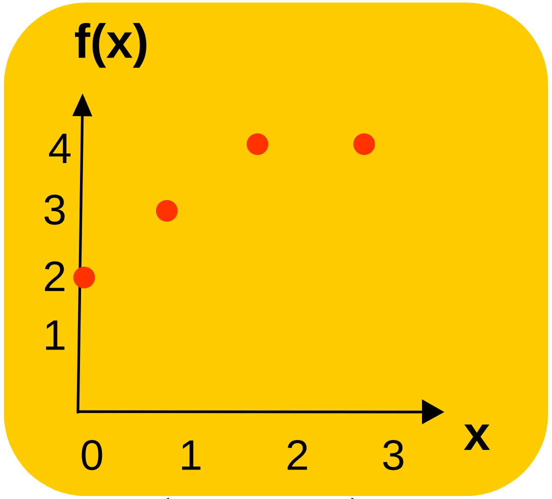
$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

Passagem do domínio de Fourier para o domínio espacial

Transformada Discreta de Fourier

Exemplo 1D:





f(0)=2 f(1)=3
f(2)=4 f(3)=4

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp\left(-j\frac{2\pi ux}{N}\right), \text{ u=0,1,2,3.}$$

$$F(0) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp(0) = \frac{1}{4}[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)] = \frac{1}{4}[2+3+4+4] = 3.25$$

$$F(1) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp(-j\frac{2\pi x}{4}) = \frac{1}{4}[2e^{0}+3e^{-j\pi/2}+4e^{-j\pi}+4e^{-j3\pi/2}] = \frac{1}{4}[-2+j]$$

$$F(2) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp(-j\frac{4\pi x}{4}) = \frac{1}{4}[2e^{0}+3e^{-j\pi}+4e^{-j2\pi}+4e^{-j3\pi}] = -\frac{1}{4}[1+0j]$$

$$F(3) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp(-j\frac{6\pi x}{4}) = \frac{1}{4}[2e^{0}+3e^{-j3\pi/2}+4e^{-j3\pi}+4e^{-j9\pi/2}] = -\frac{1}{4}[2+j]$$

Transformada Discreta de Fourier

Exemplo 1D:

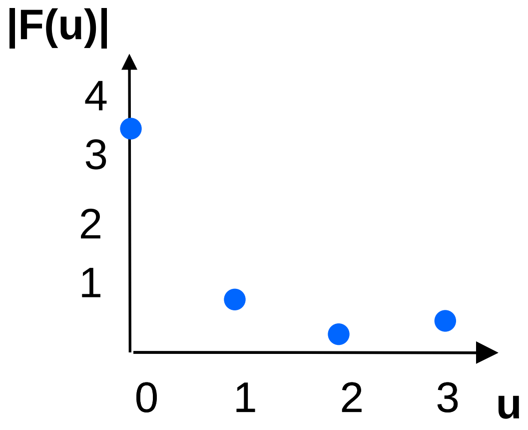
$$|F(0)| = 3.25$$

$$|F(1)| = \sqrt{\left(\tfrac{2}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{5}/4$$

$$|F(2)| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{0}{4}\right)^2} = 1/4$$

$$|F(3)| = \sqrt{\left(\tfrac{2}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{5}/4$$

Espectro do sinal



Propriedades

Na representação do espectro do sinal $|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{\frac{1}{2}}$ acontece que os valores baixam rapidamente à medida que aumenta a frequência.

Frequentemente utiliza-se a expressão logarítmica seguinte para a sua representação:

$$D(u,v) = \log\left(1 + |F(u,v)|\right)$$

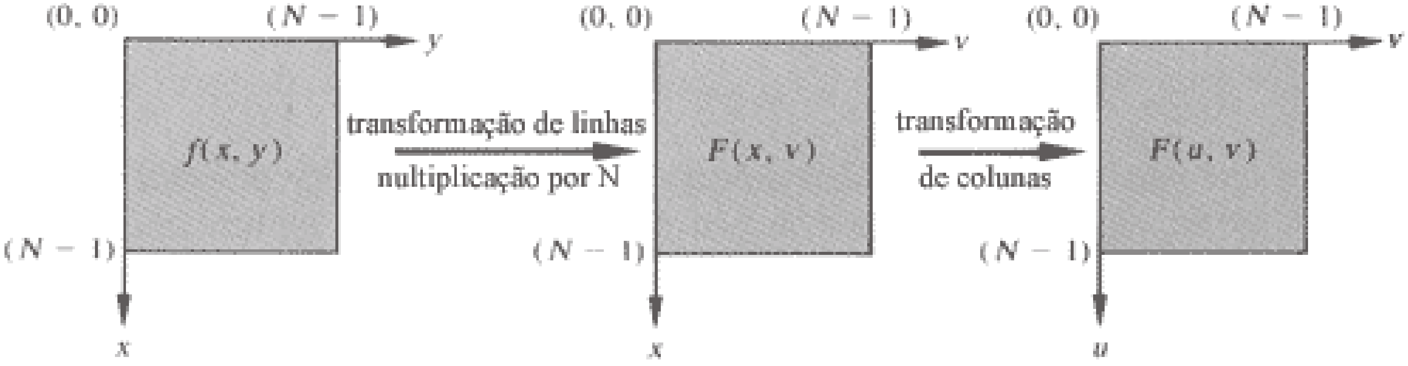
visto possuir as seguintes vantagens:

- $D(u,v) \geq 0, \quad \forall u,v$
- O valor nulo é preservado→ Se $|F(u,v)| = 0$ então $D(u,v) = 0$

Propriedades

Propriedade da Separabilidade

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{M-1}\exp\left(-j\frac{2\pi ux}{N}\right)\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left(-j\frac{2\pi vx}{N}\right),\ u,v=0,1,\dots,N-1$$



- Primeiro calcula-se a FFT monodimensional sobre os valores de y de .
- Seguidamente calcula-se a FFT monodimensional sobres os valores de x de

Propriedades

Propriedade da Periodicidade e Simetria Conjugada

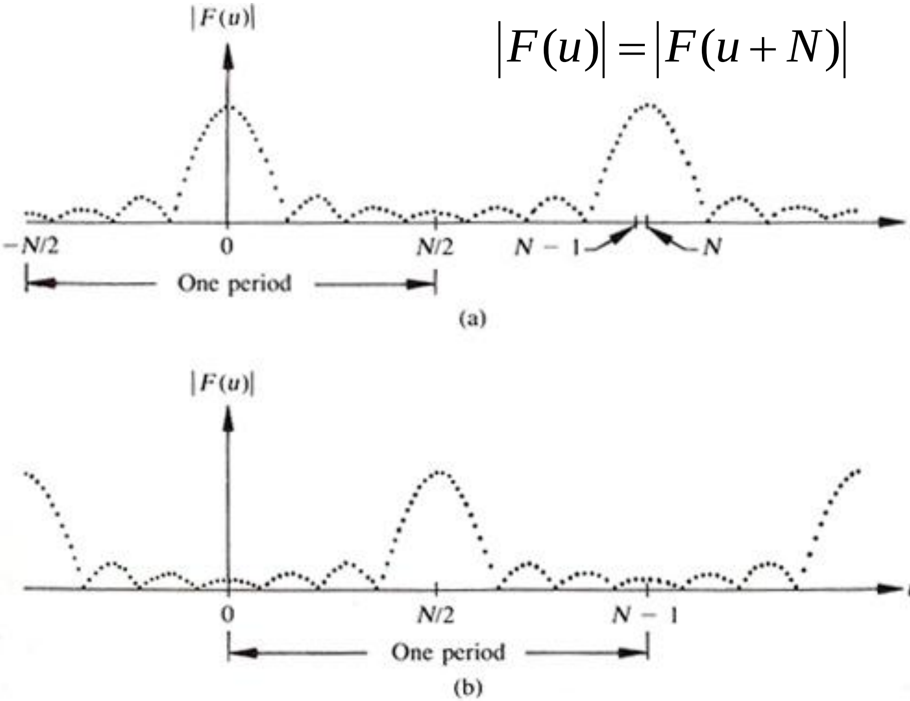
Caso 1D:

A TDF e a TIDF são periódicas de período *N*, ou seja:

$$F(u) = F(u+N)$$

$$|F(u)| = |F(u+N)|$$

$$F(u) = F(u+N)$$



(a)

(b)

Se f(x,y) é real, A TDF exibe a propriedade de simetria conjugada, isto é:

$$F(u) = F^{*}(-u)$$

que se aplica também à magnitude:

$$|F(u)| = |F(-u)|$$

Propriedades

Propriedade da Translação

$$f(x,y)\exp\left(-j\frac{2\pi(u_0x+v_0y}{N}\right)\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)\exp\left(-j\frac{2\pi(ux_0+vy_0}{N}\right)$$

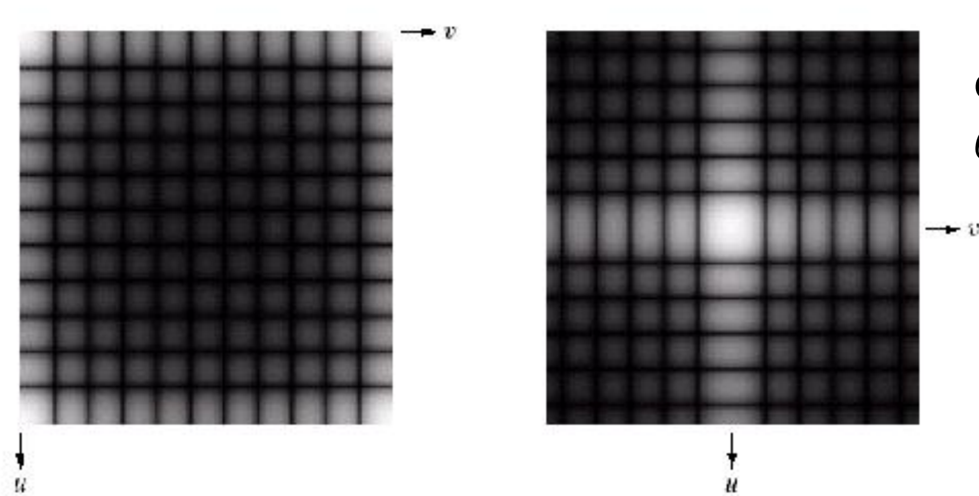
Com: $u_0=v_0=N/2$

Vem: $\exp\left(-j\frac{2\pi(u_0x+v_0y}{N}\right)=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{x+y}$

$$\left.\begin{array}{l} u_0=v_0=N/2 \\ \exp\left(-j\frac{2\pi(u_0x+v_0y}{N}\right)=e^{j\pi(x+y)}=(-1)^{x+y} \end{array}\right\} \quad f(x,y)(-1)^{x+y}\Leftrightarrow F(u-\tfrac{N}{2},v-\tfrac{N}{2})$$

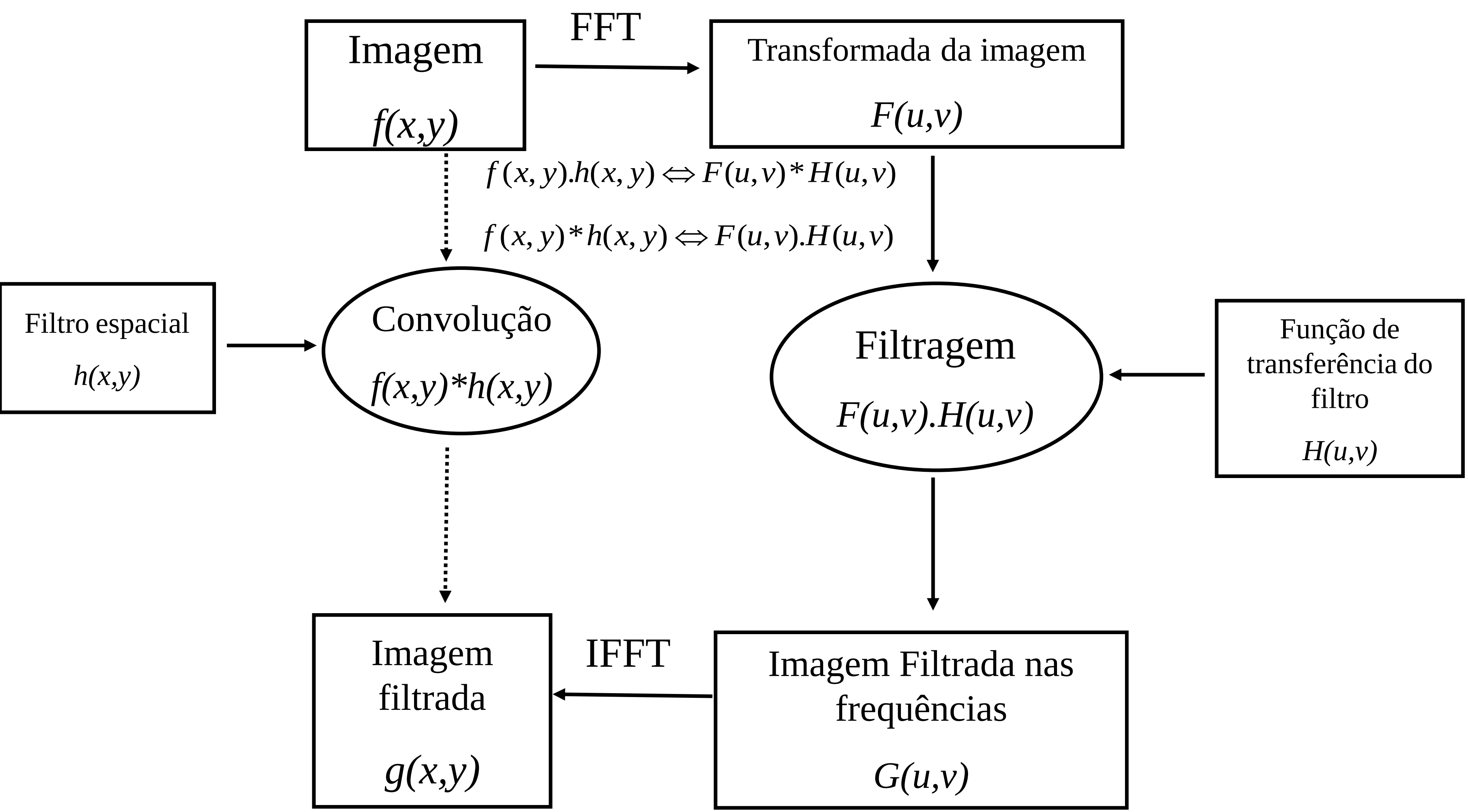
O espectro do sinal não é afectado: $\left|F(u,v)\exp\left(-j\frac{2\pi(ux_0+vy_0}{N}\right)\right|=\left|F(u,v)\right|$

Caso 2D:



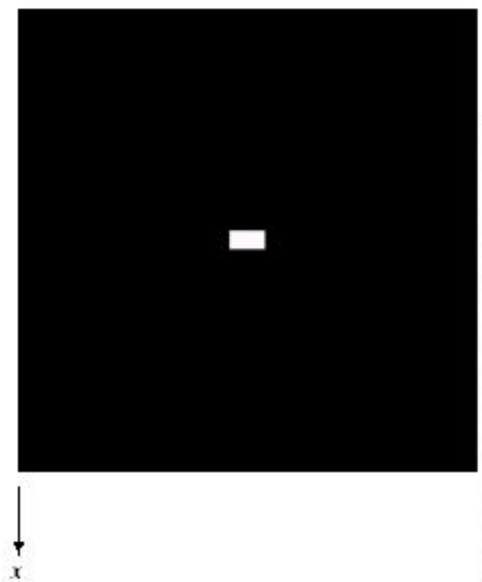
Centrando a transformada no ponto *(N/2, N/2)*→ centro da imagem

Teorema da Convolução

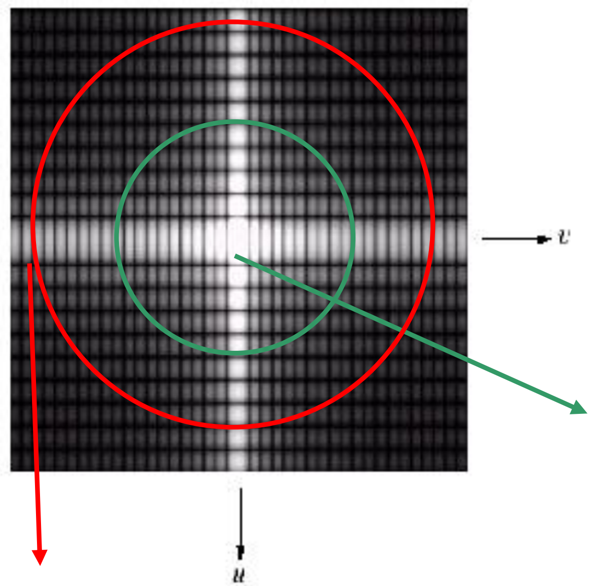


Interpretação da TF de uma imagem

Imagem 512x512 de fundo preto
com um rectângulo branco 20x40



Representação centrada do
logaritmo do Espectro de Fourier

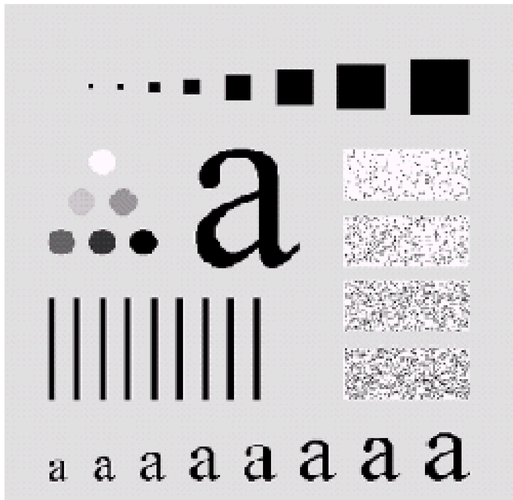


Baixas frequências

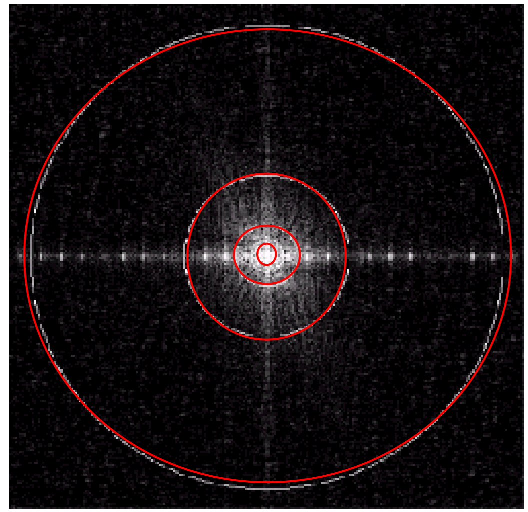
Altas frequências

Filtragem no domínio da frequência

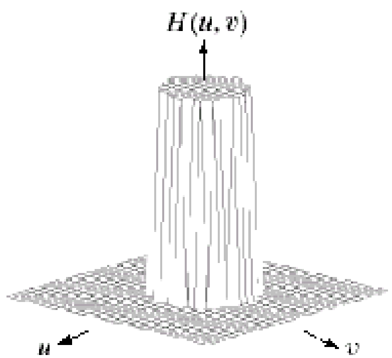
Imagem 500x500



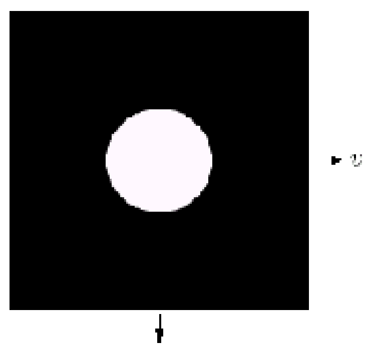
Espectro de Fourier.



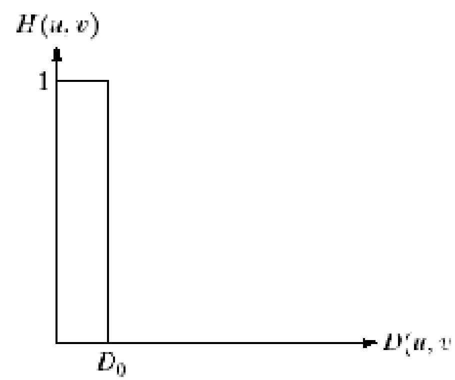
Os círculos têm raio de 15, 30, 80 e 230, os quais englobam respectivamente 94.6%, 96.4%, 98% e 99.5% da energia da imagem



Perspectiva da função de transferência de um filtro passa-baixo ideal



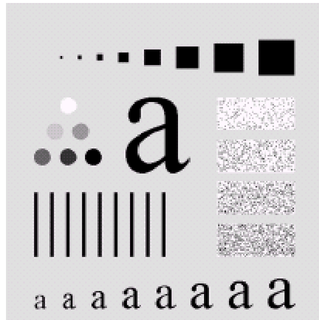
Representação do filtro na forma de imagem

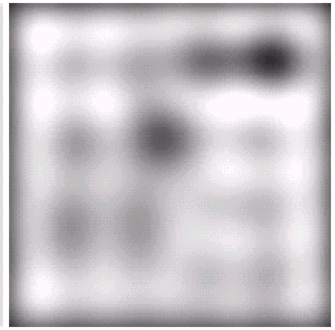


Vista de um corte radial do filtro passa-baixo

Filtragem com o passa-baixo ideal

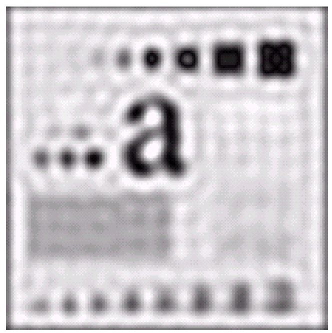
Imagem original

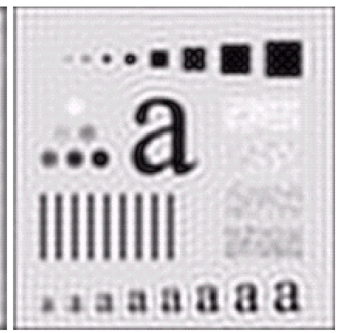




Resultado da filtragem com um passa-baixo ideal com frequência de corte com um raio de 5. A energia removida pela filtragem foi 8%

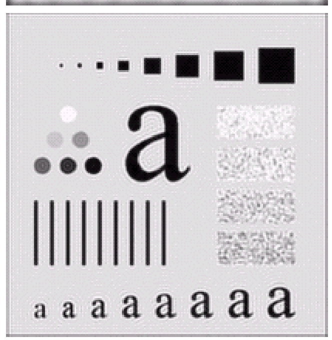
Resultado da filtragem com um passa-baixo ideal com frequência de corte com um raio de 15. A energia removida pela filtragem foi 5.4%

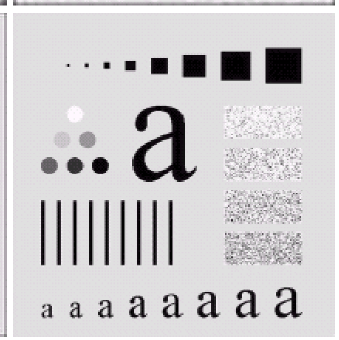




Resultado da filtragem com um passa-baixo ideal com frequência de corte com um raio de 30. A energia removida pela filtragem foi 3.6%

Resultado da filtragem com um passa-baixo ideal com frequência de corte com um raio de 80. A energia removida pela filtragem foi 2%

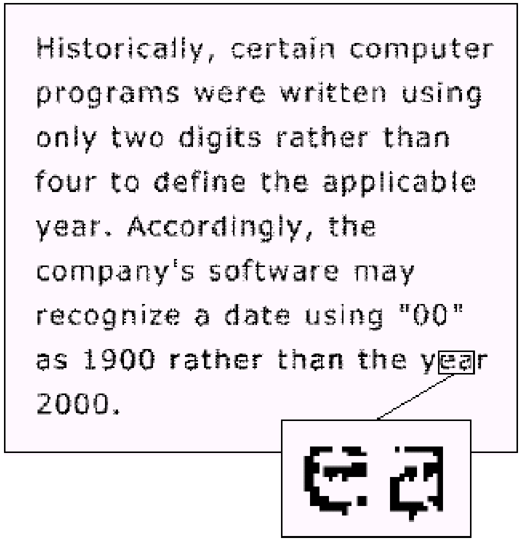




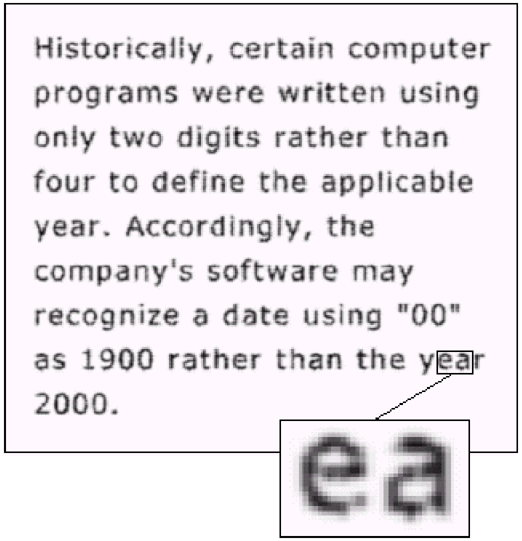
Resultado da filtragem com um passa-baixo ideal com frequência de corte com um raio de 230. A energia removida pela filtragem foi 0.5%

Filtragem com o passa-baixo ideal

Texto digitalizado a baixa resolução com caracteres quebrados



Resultado da filtragem com um filtro passa-baixo no domínio da frequência

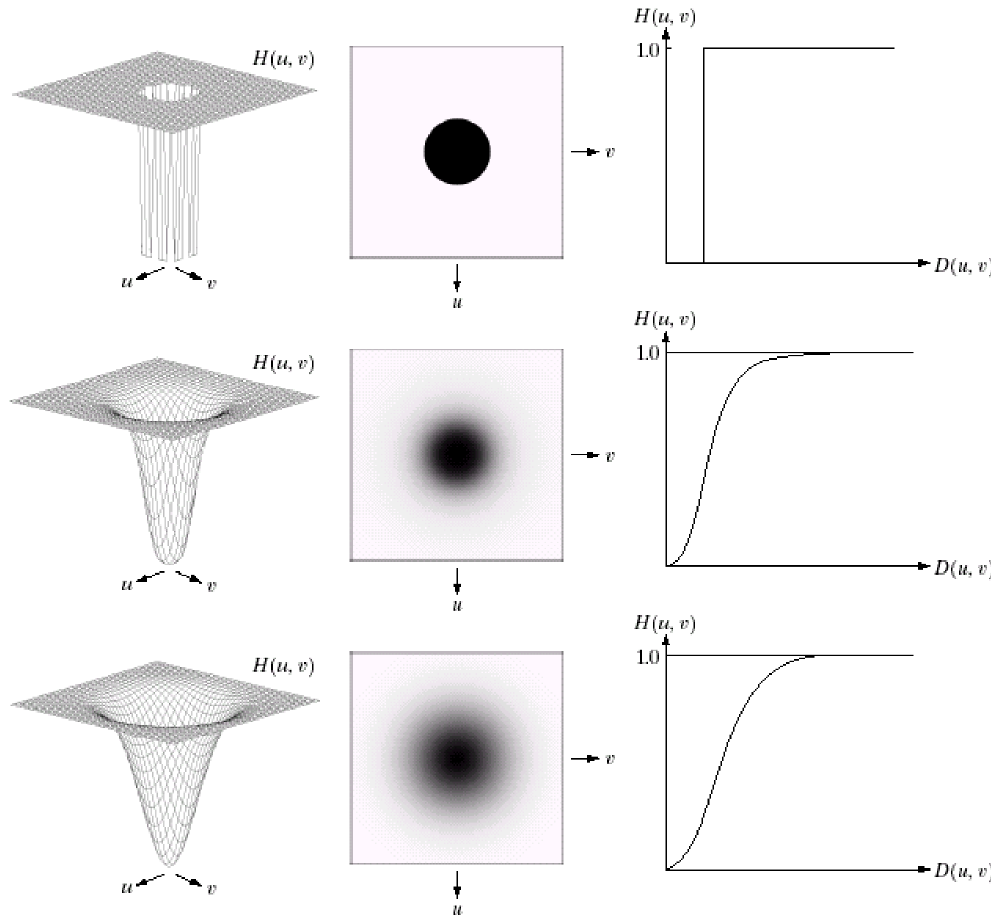


Filtros passa-alto

Filtro passa-alto ideal

Filtro passa-alto Butterworth

Filtro passa-alto Gaussiano

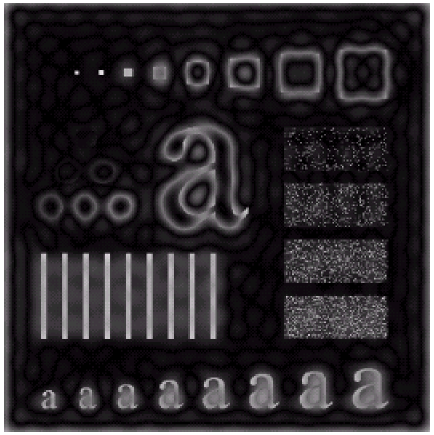


Perspectiva da função de transferência dos filtros

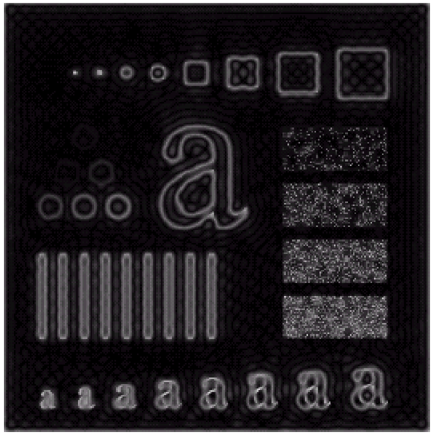
Representação do filtro na forma de imagem

Vista de um corte radial dos filtros

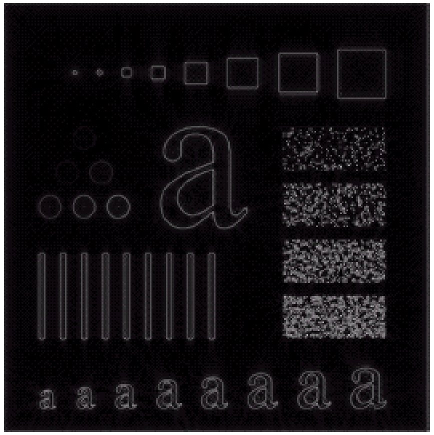
Filtragem com o passa-alto ideal



Resultado da filtragem com um passa-alto ideal com frequência de corte com um raio de 15.



Resultado da filtragem com um passa-alto ideal com frequência de corte com um raio de 30.



Resultado da filtragem com um passa-alto ideal com frequência de corte com um raio de 80.