



# Morfologia Matemática

---

Carlos Alexandre Mello

Pós-Graduação em Ciência da Computação



Carlos Alexandre Mello – [cabm@cin.ufpe.br](mailto:cabm@cin.ufpe.br)



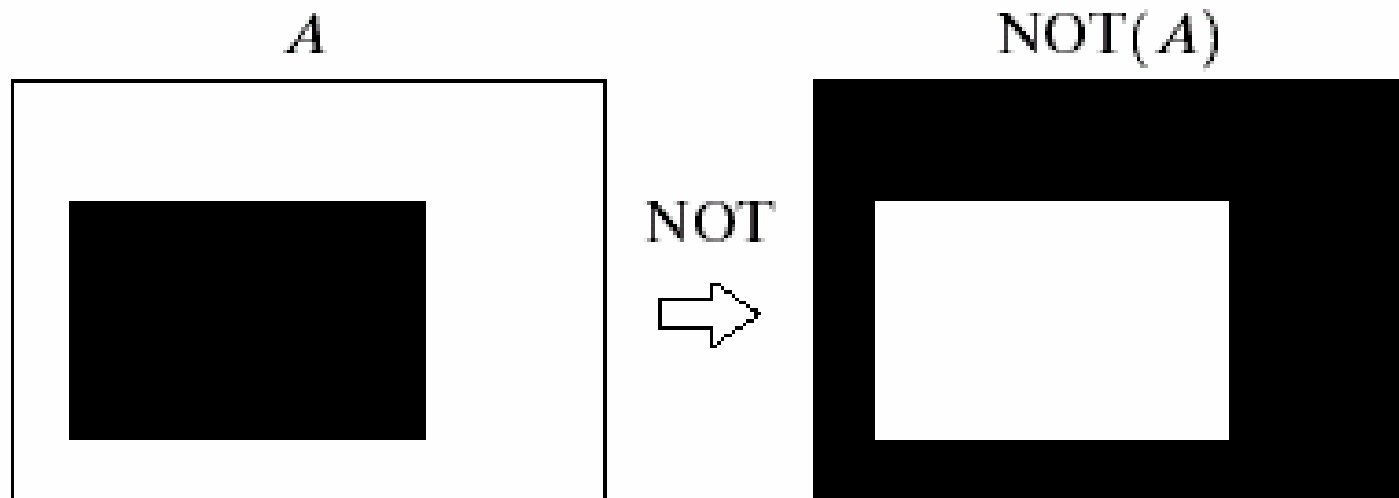
# Morfologia Matemática

---

- Morfologia = Forma e estrutura de um objeto
  - Inter-relações entre as partes de um objeto
- Base na Teoria dos Conjuntos
- Algumas operações matemáticas podem ser aplicadas a conjuntos de pixels a fim de intensificar aspectos das formas tal que eles possam ser contados ou reconhecidos

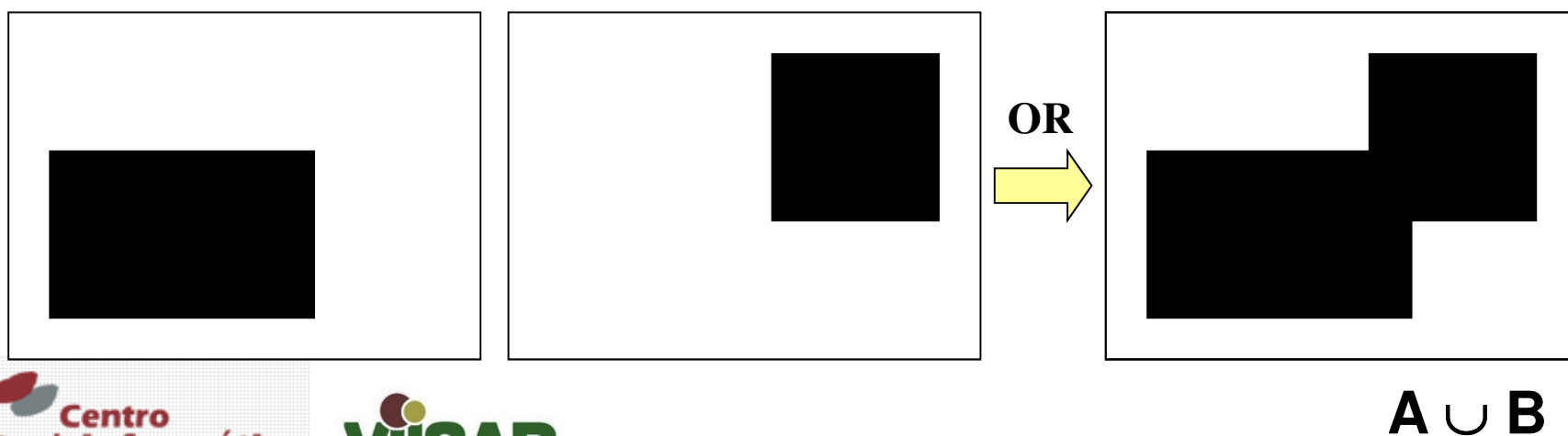
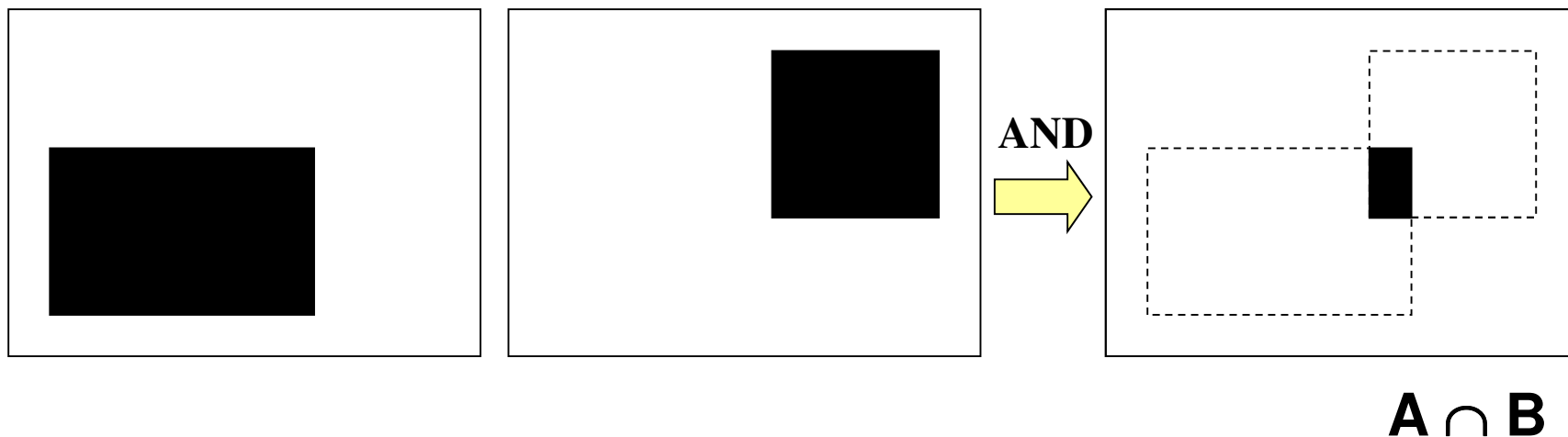
# Morfologia

## Operações de Conjuntos em Imagens



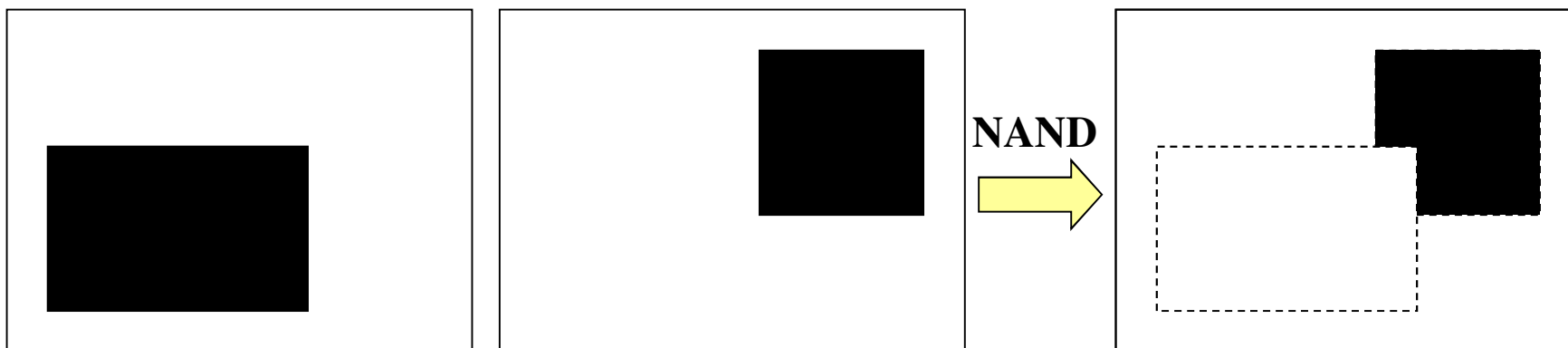
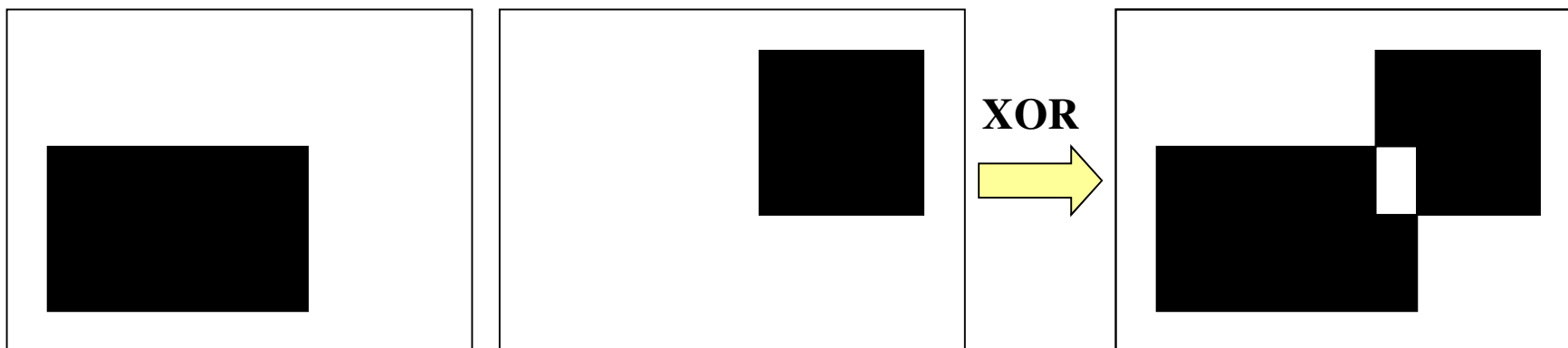
# Morfologia

## Operações de Conjuntos em Imagens



# Morfologia

## Operações de Conjuntos em Imagens





# Morfologia Matemática

---

- Dilatação

- Se *qualquer* pixel na vizinhança do pixel de entrada estiver ativo, o pixel de saída fica ativo; caso contrário, o pixel fica inativo

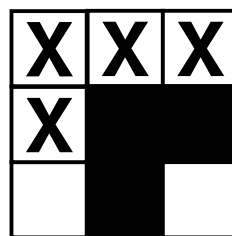
- Erosão

- Se *todos* os pixels na vizinhança do pixel de entrada estiver ativo, o pixel de saída fica ativo; caso contrário, o pixel fica inativo

- A vizinhança pode ter qualquer forma ou tamanho

# Morfologia Matemática

- O ‘elemento central’ pode ser qualquer ponto do elemento estruturante
- Não necessariamente o elemento estruturante é uma matriz retangular ou quadrada...
  - Elementos chamados ‘don’t care’ podem mudar a forma do elemento



**X** = *don't care*  
(não importa)



# Morfologia Matemática

---

## ■ Operação

- A operação deve casar o pixel central do elemento estruturante com o pixel analisado na imagem
- No caso de pixels na borda da imagem, considera-se que os elementos estruturantes que não estão sobre elementos da imagem cobrem podem cobrir elementos *off* ou *don't care*
  - É como se a imagem sofresse uma extensão nula ou com elementos don't care



# Morfologia Matemática

- Operações morfológicas binárias são definidas em imagens de duas cores
- Observe a imagem abaixo....

(0,0)

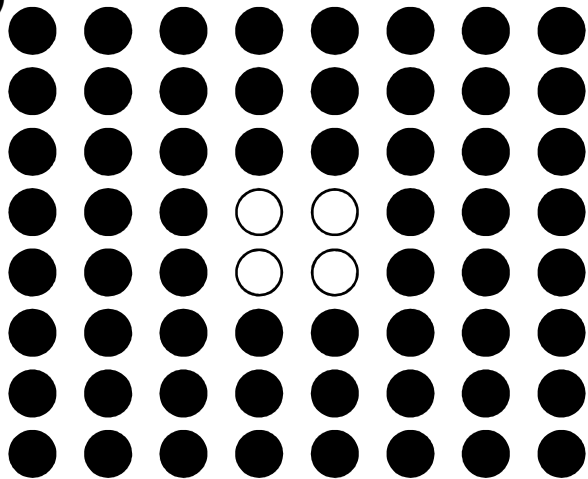
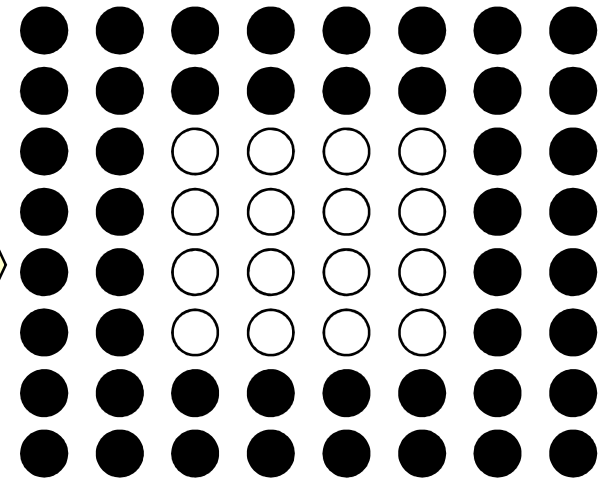


Imagem A

Vamos pintar de branco todos os vizinhos de um pixel branco....



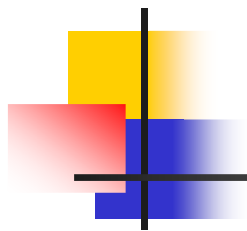
O mesmo quadrado, mas um pixel mais largo que o anterior... *Dilatação*



# Morfologia Matemática

---

- De forma simples, a dilatação faz com que os objetos tornam-se mais largos
- Esse é um exemplo de uma operação de morfologia que pode ser facilmente implementado



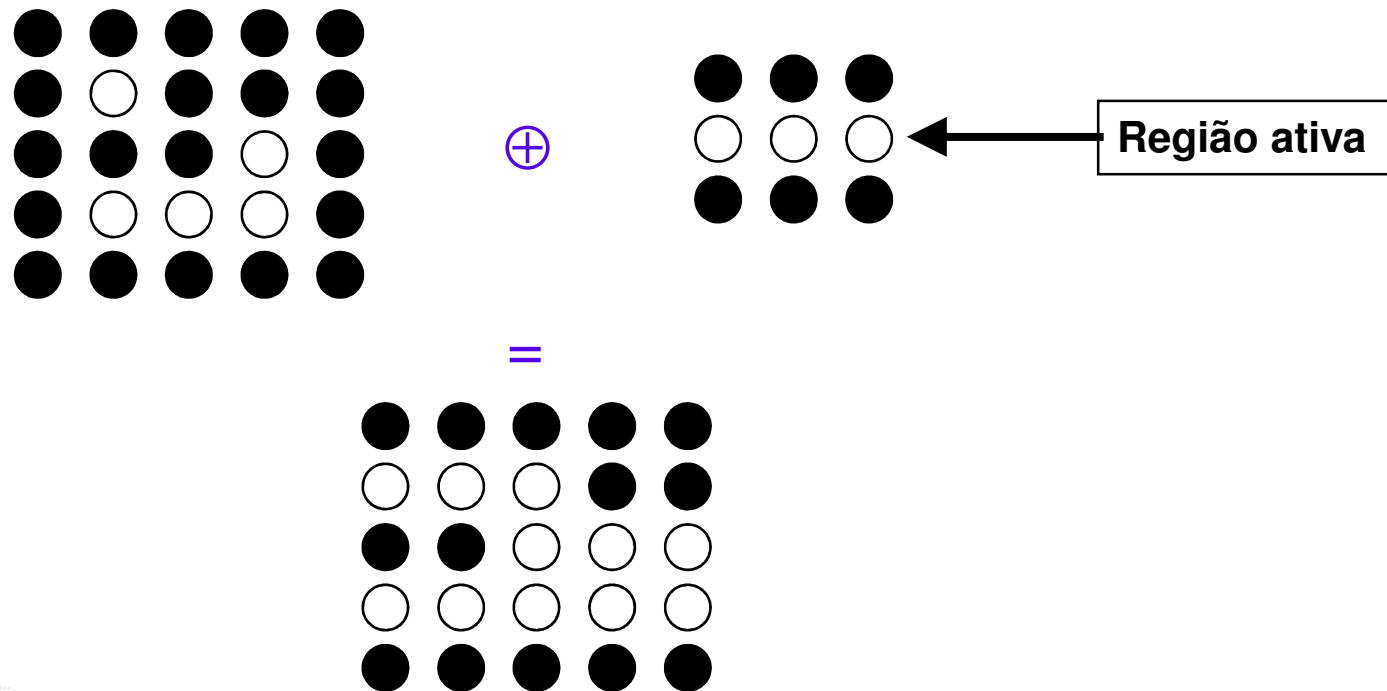
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1

$$\begin{array}{ccccc} \text{im} = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} \text{struct} = & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} \text{bw} = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

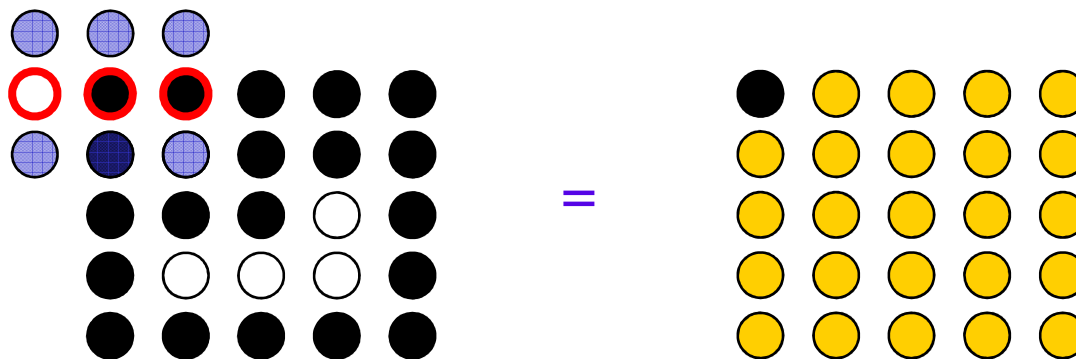
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1

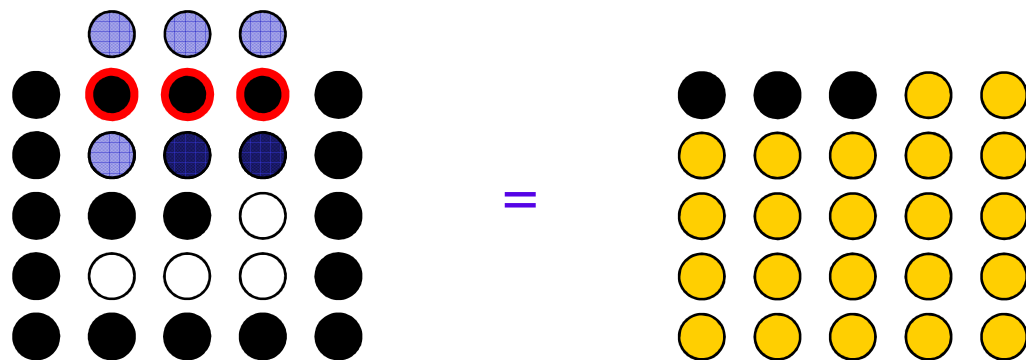
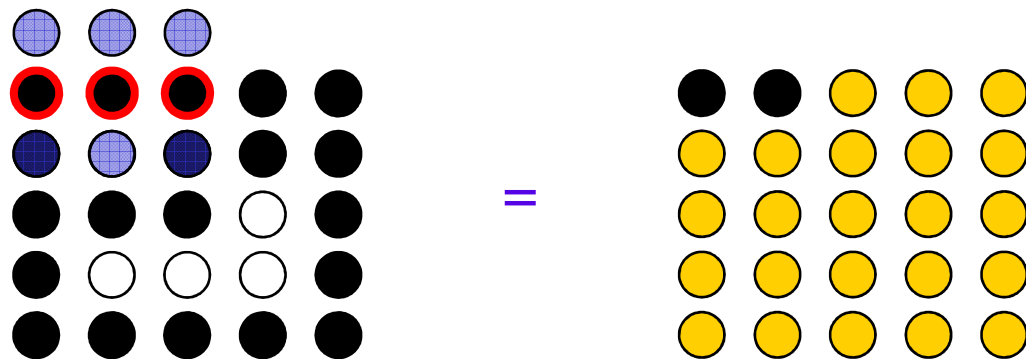


O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se **qualquer** pixel sob a região ativa estiver ativo, então o pixel correspondente na imagem final fica ativo (1); se todos forem inativos, o pixel na imagem final fica inativo (0).



# Morfologia Matemática

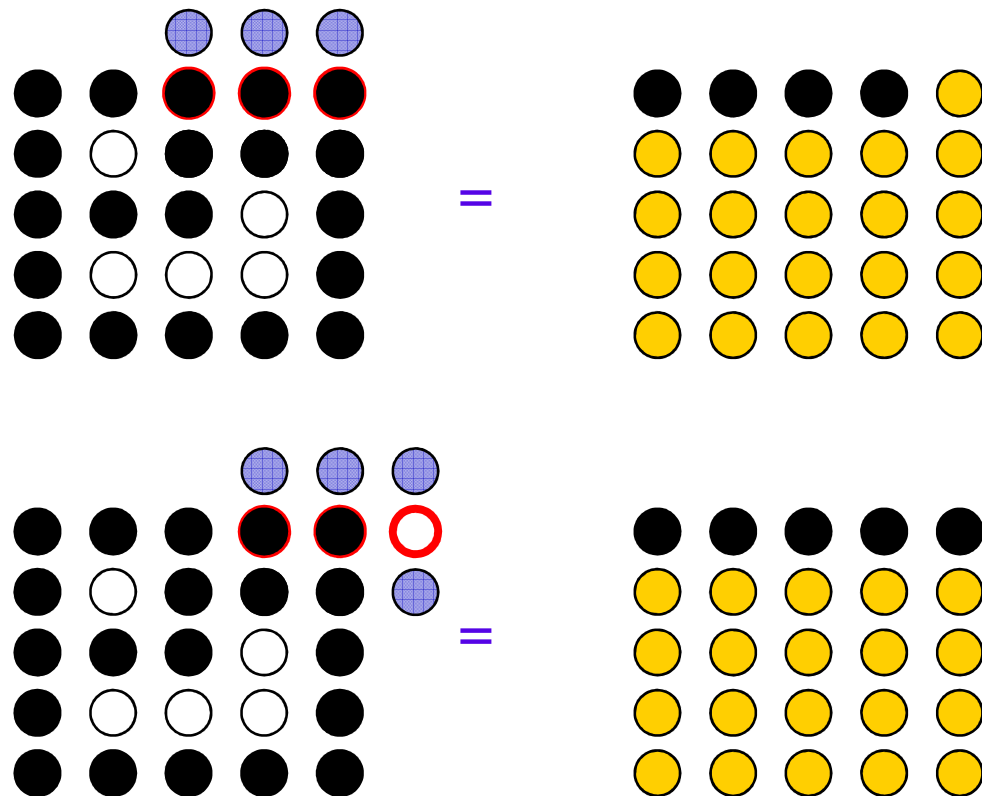
## ■ Dilatação: Exemplo 1





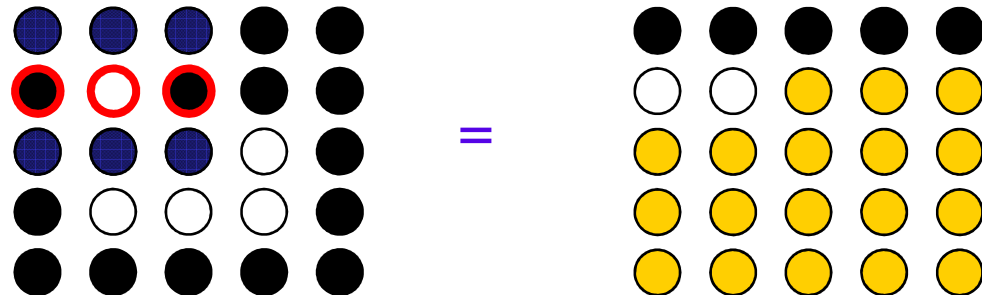
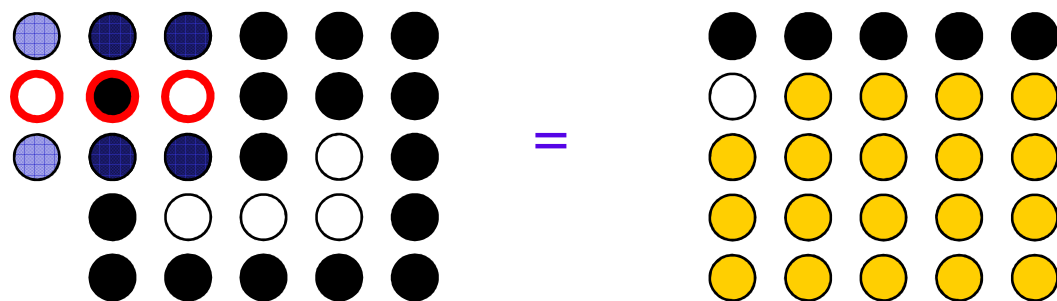
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



# Morfologia Matemática

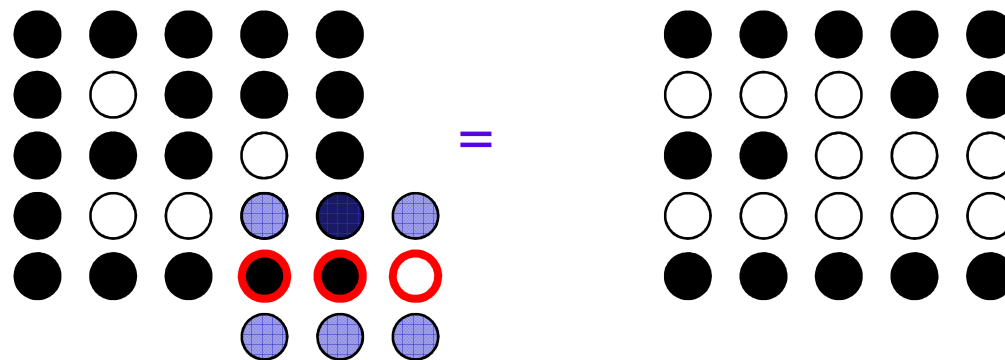
## ■ Dilatação: Exemplo 1





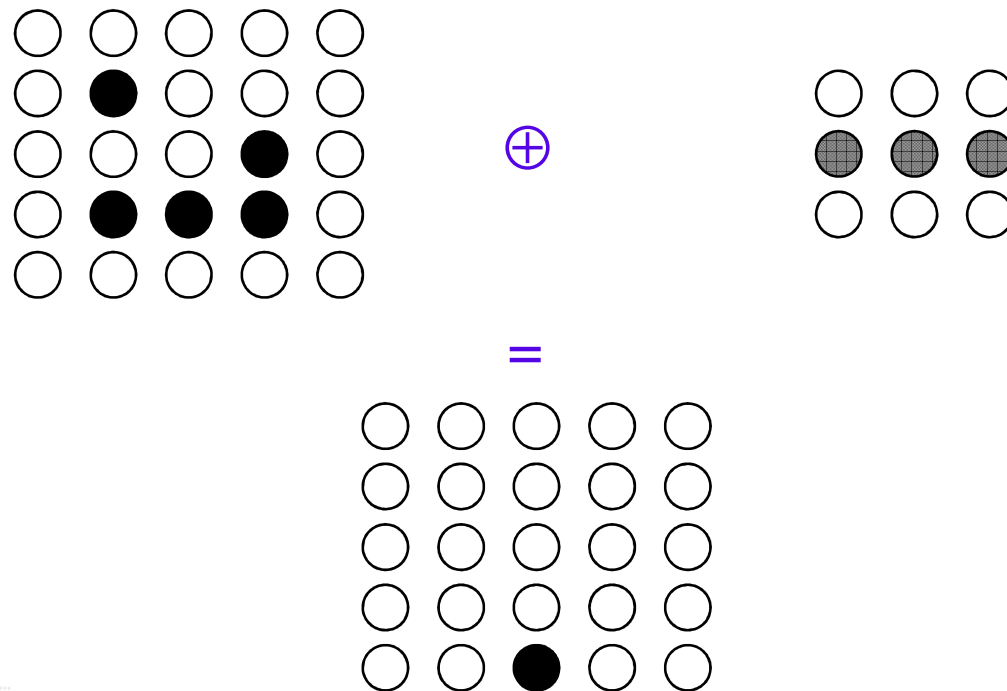
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



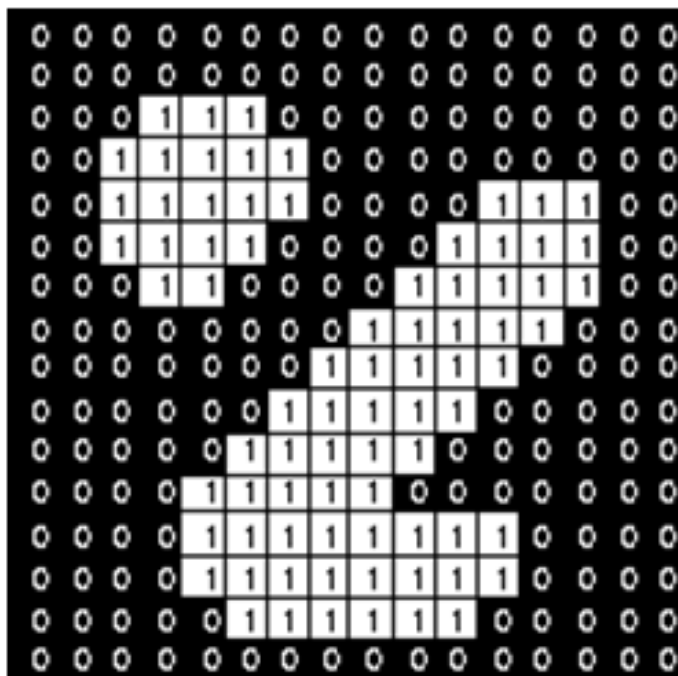
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 2

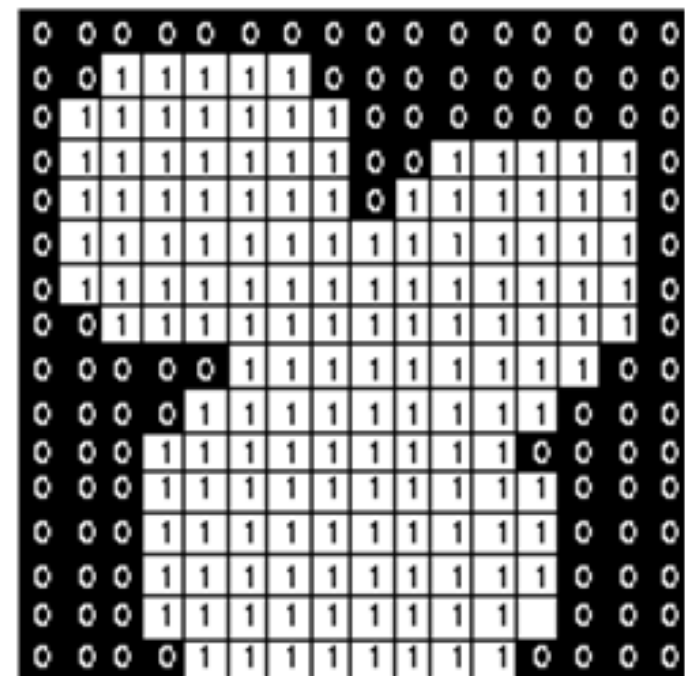


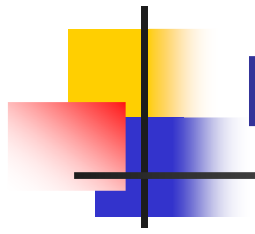
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 3



1	1	1
1	1	1
1	1	1





# Morfologia Matemática

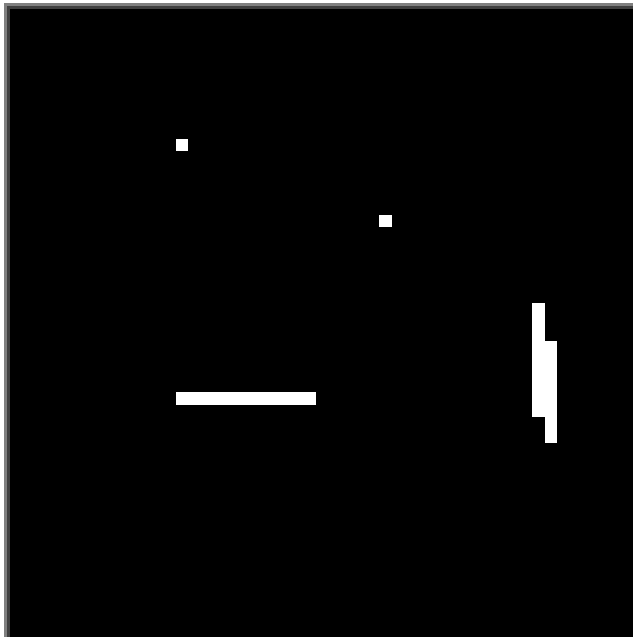
---

- Dilatação: Observe que o “objeto” são os pixels com tom 1 (brancos)
  - *Logo, a dilatação faz com que as áreas de branco aumentem em uma imagem*
  - Às vezes, é interessante ter o complemento da imagem para aplicar uma dilatação
    - Depois, calcula-se o complemento novamente

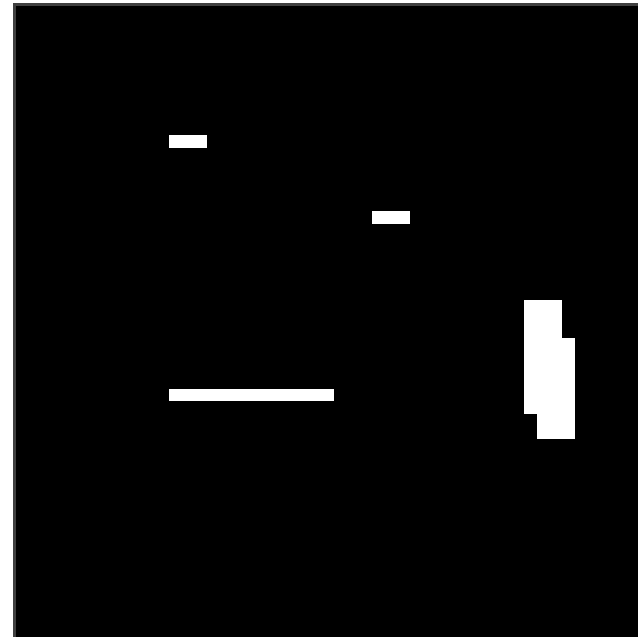
# Morfologia Matemática

- Dilatação

- Exemplo: Observe o resultado da dilatação da imagem abaixo pelo elemento estruturante do Exemplo 1 anterior



**Imagem original**

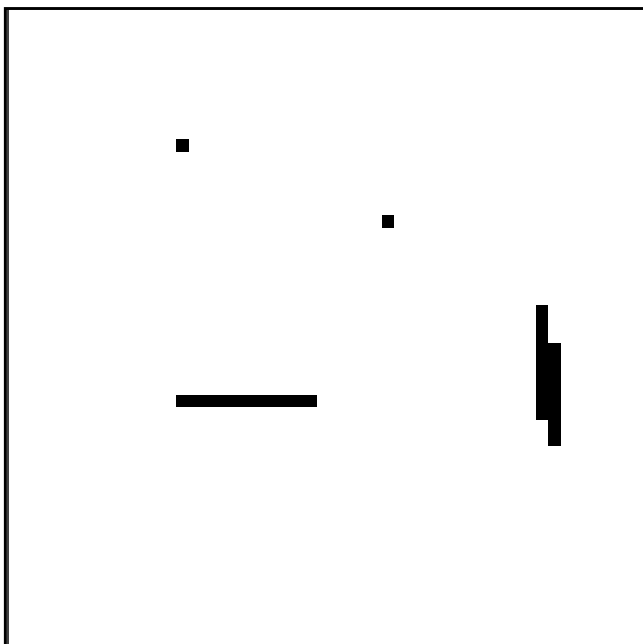


**Imagem dilatada**

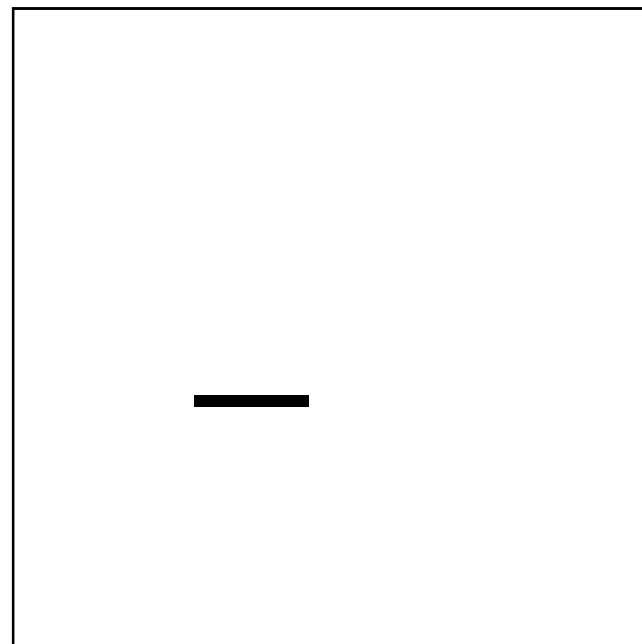
# Morfologia Matemática

- Dilatação

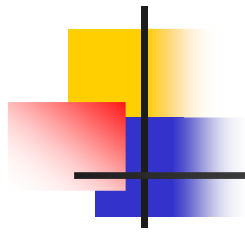
- Exemplo: Enquanto que o resultado à aplicação na imagem não complementar seria.....



**Imagem original**



**Imagem dilatada**



# Morfologia Matemática

---

- Dilatação

- Assim, a dilatação pode ser considerada como a união de todas as translações especificadas pelo elemento estrutural B
  - Como a união é comutativa, a dilatação também será a mesma se trocarmos a imagem com o elemento estrutural

# Morfologia Matemática

- Aplicação de Dilatação (sobre imagem complementar)

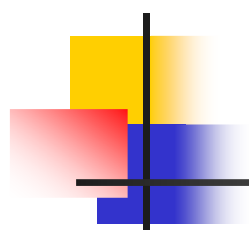
Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.







# Morfologia Matemática

## ■ Aplicação de Dilatação

struct =

●	○	●
○	○	○
●	○	●

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
ereei sobre o Barral mando-lh  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

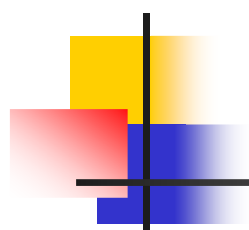
**Imagem original**

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
ereei sobre o Barral mando-lh  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

**Imagem dilatada**

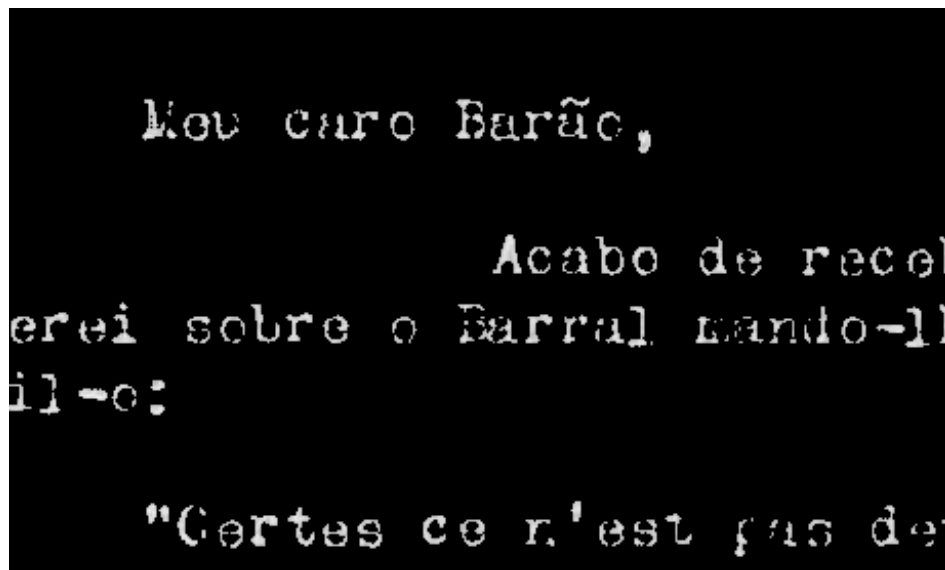


# Morfologia Matemática

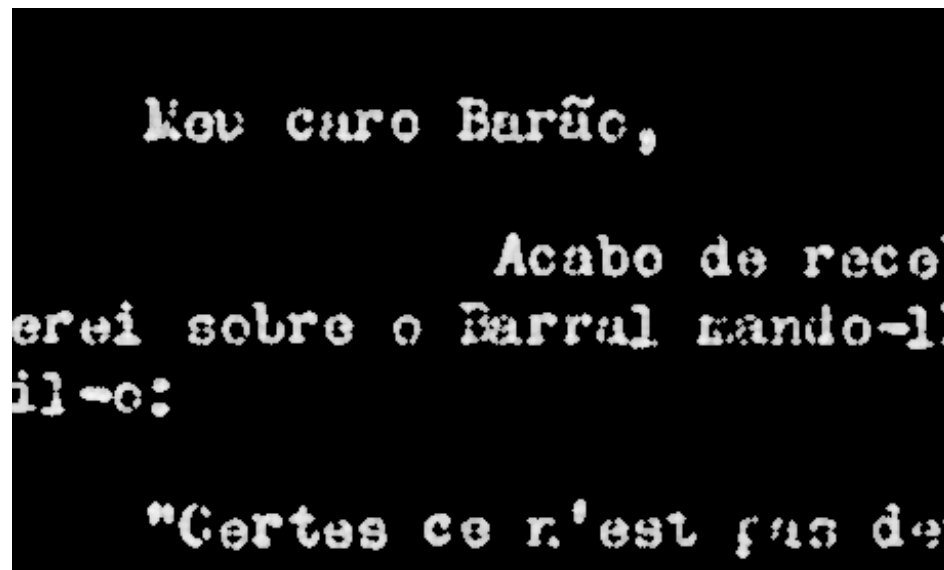
## ■ Aplicação de Dilatação

struct =

●	○	●
○	○	○
●	○	●



**Imagem original  
negativada**



**Imagem complementar  
dilatada**

# Morfologia Matemática

## ■ Aplicação de Dilatação

struct =

●	○	●
○	○	○
●	○	●

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
ereei sobre o Barral mando-lh  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

Imagem original

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
ereei sobre o Barral mando-lh  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

Resultado final após  
novo complemento

# Morfologia Matemática

## ■ Erosão

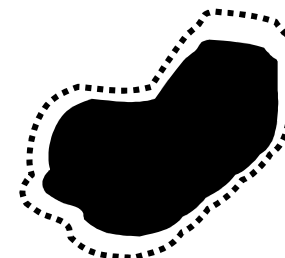
- Se a dilatação deixa um objeto mais largo, a erosão o estreita
- De forma simples, a erosão remove os pixels da camada externa de um objeto



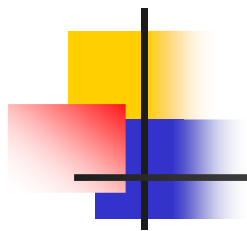
Objeto  
Original



Dilatação



Erosão



# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1

im =

1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1



s =

1	1	1
1	1	1
1	1	1

=

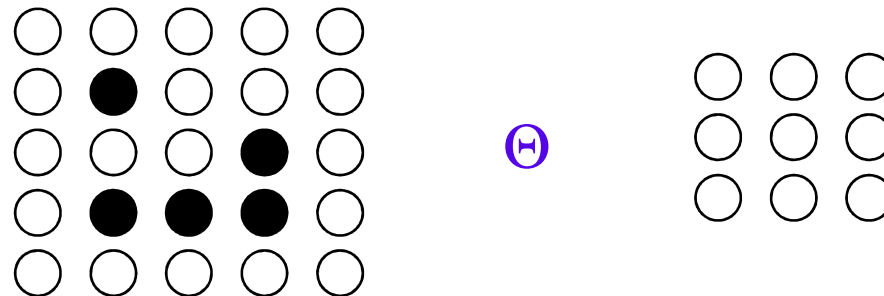
bw =

0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

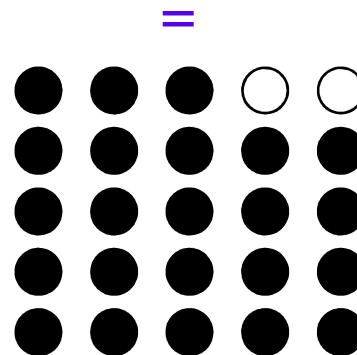


# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1

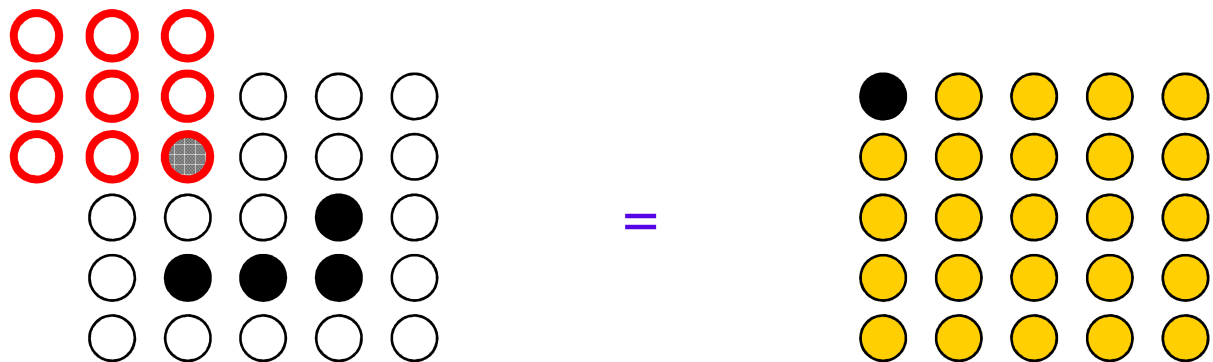


O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se todos os pixels da região ativa estiverem ativos, o resultado final fica ativo



# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1

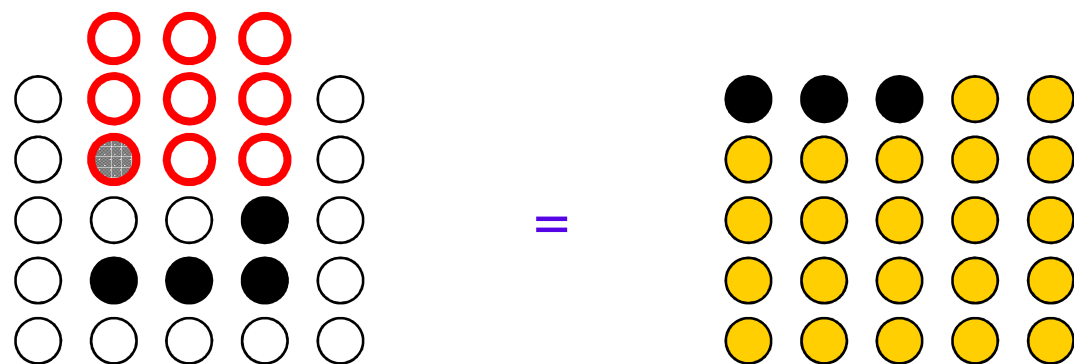
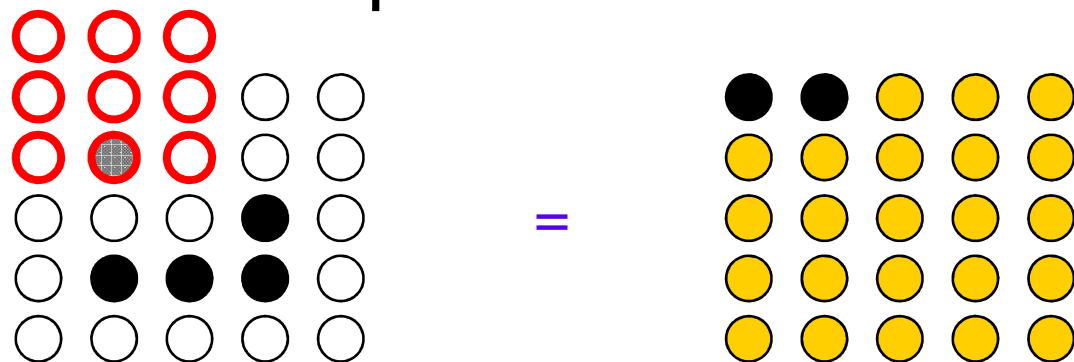


O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se todos os pixels da região ativa estiverem ativos, o resultado final fica ativo



# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1

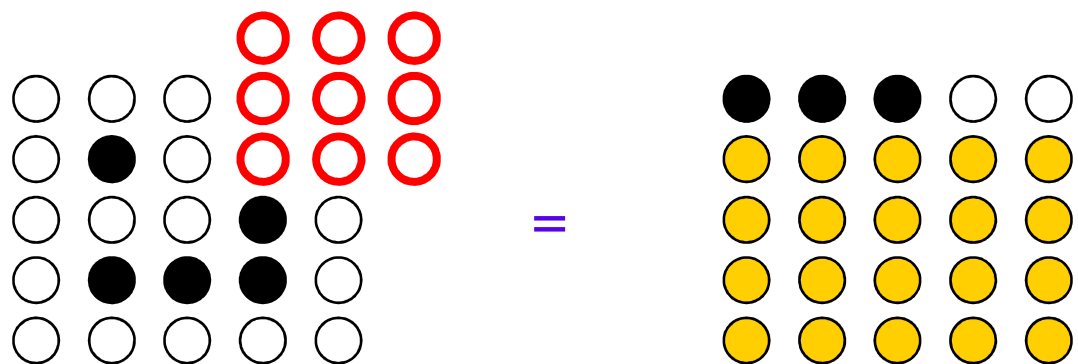
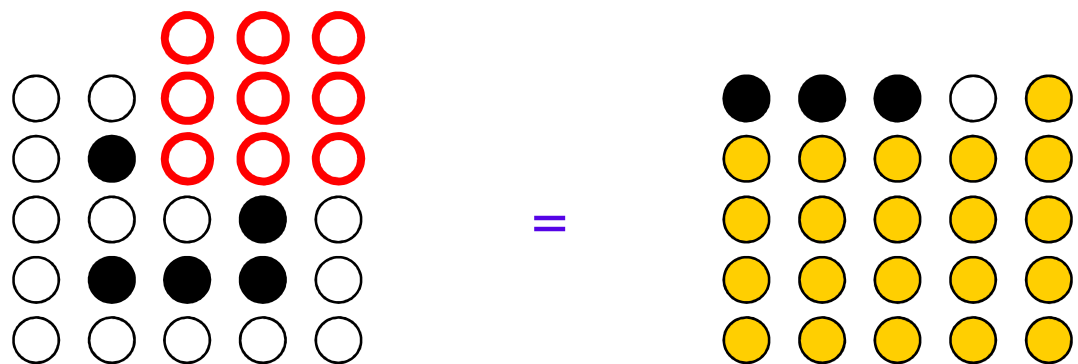






# Morfologia Matemática

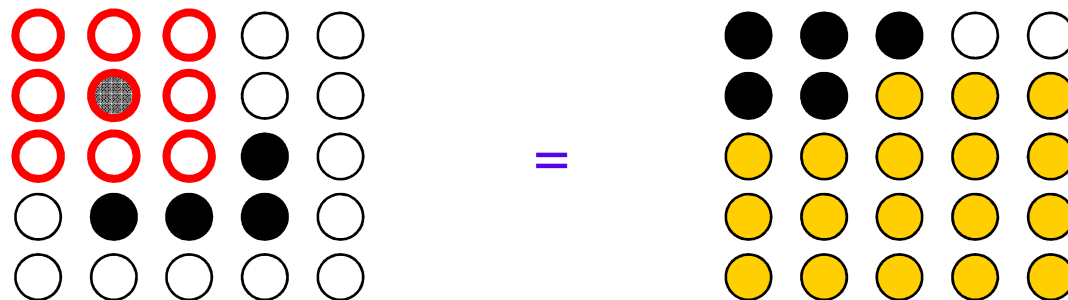
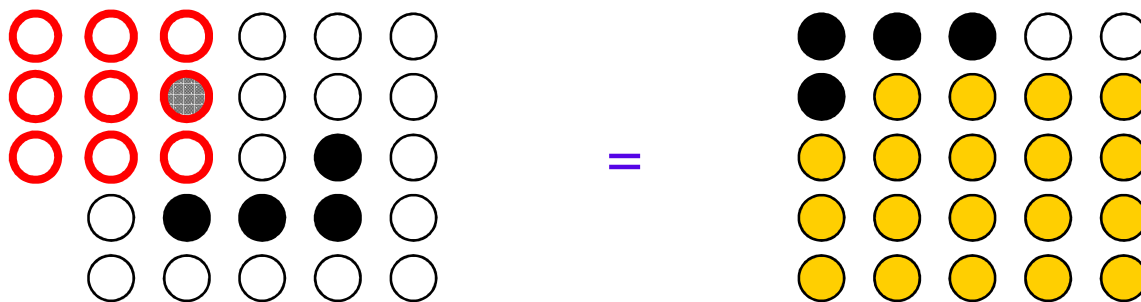
## ■ Erosão: Exemplo 1





# Morfologia Matemática

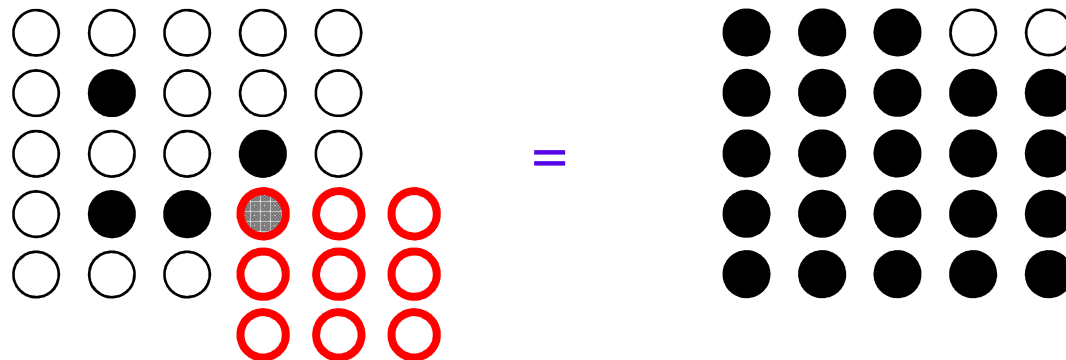
## ■ Erosão: Exemplo 1





# Morfologia Matemática

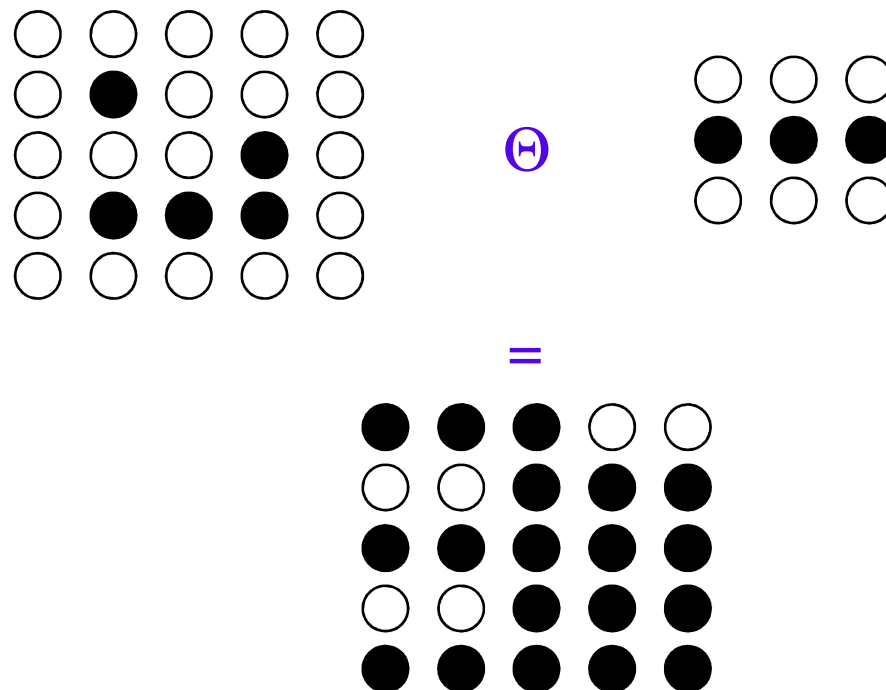
## ■ Erosão: Exemplo 1





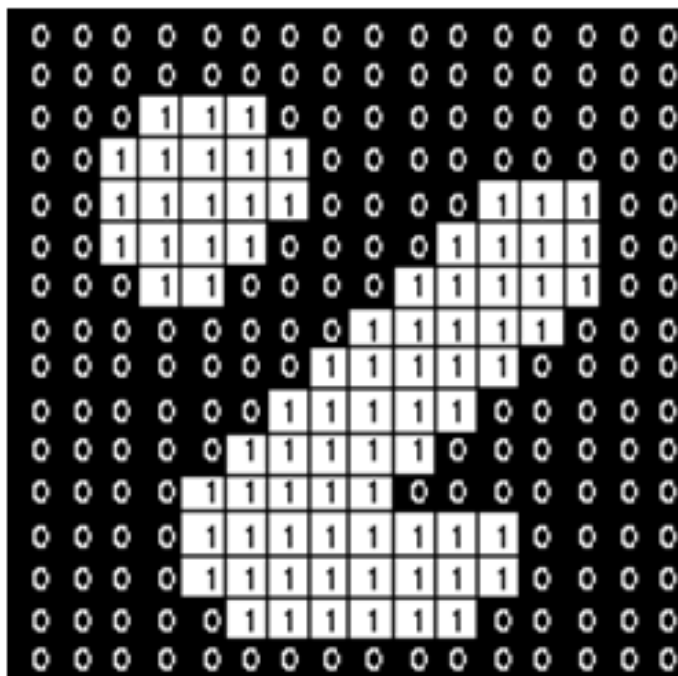
# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 2

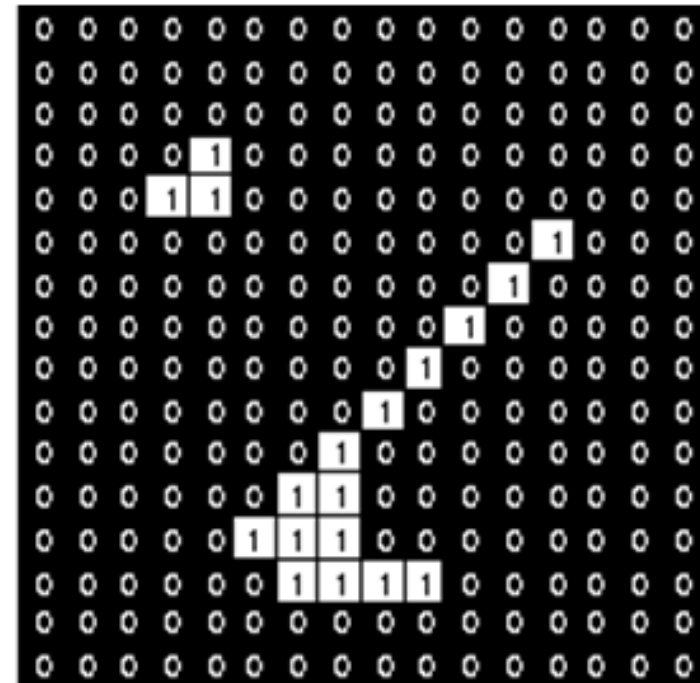


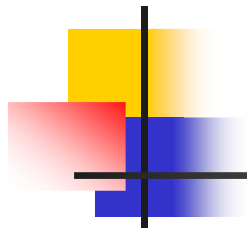
# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 3



1	1	1
1	1	1
1	1	1

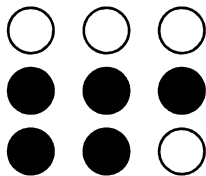




# Morfologia Matemática

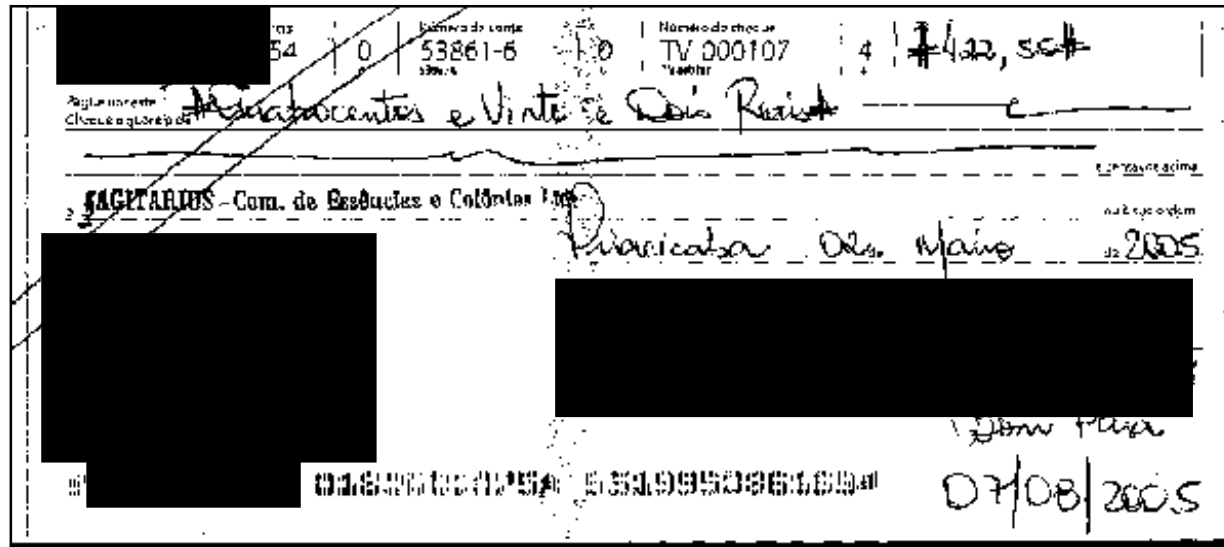
---

- Exemplo 4
  - Elemento estruturante



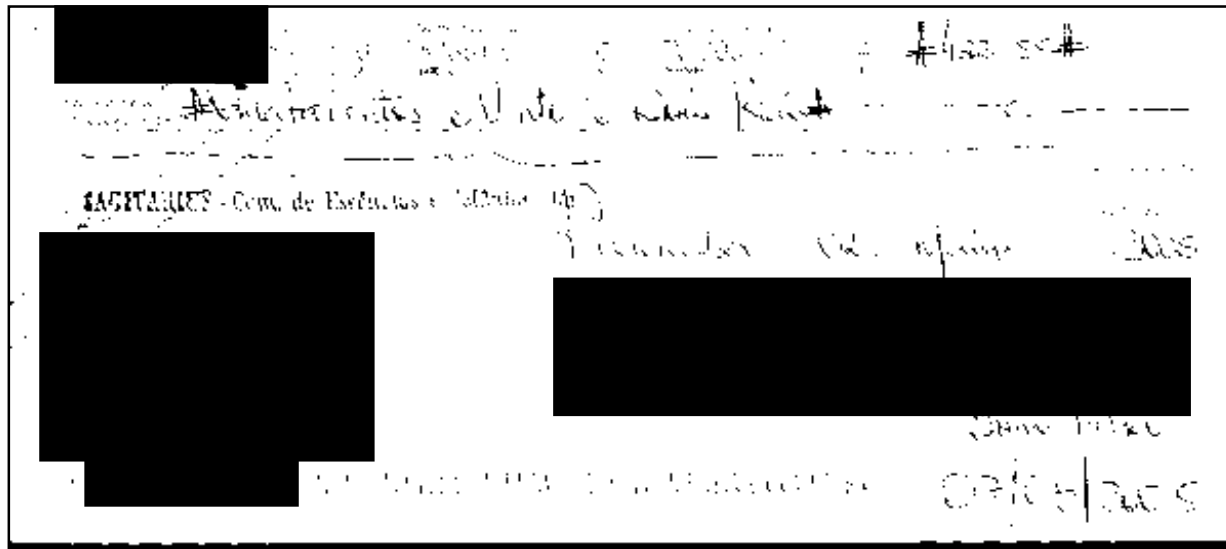
# Morfologia Matemática

- Exemplo 4: Imagem original



# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo 4: Dilatação



(lembre que crescem as áreas de branco)



# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo 4: Erosão

Pague por este cheque a quem for devido

54 | 0 | 53861-6 | TV-000107 | 4 | R\$ 422,00

Pague por este cheque a quem for devido

SACETABIOS - Com. de Roupas e Calçados

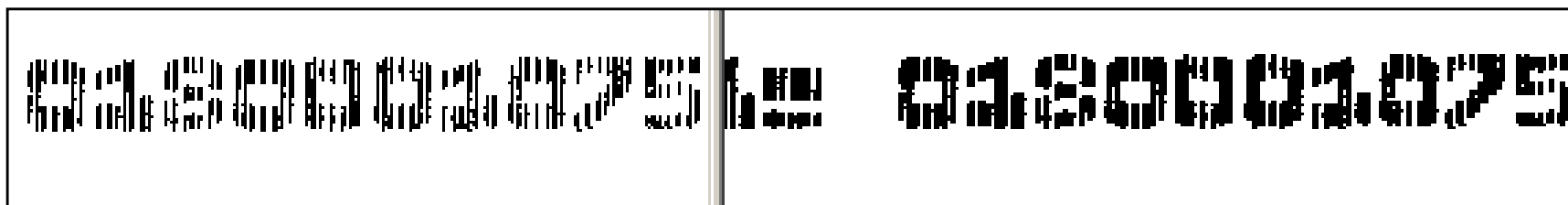
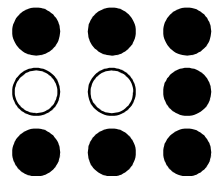
Piacabara, 07/08/2005

0180001075 551995386169

07/08/2005

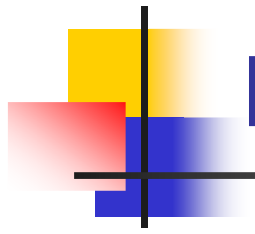
# Morfologia Matemática

- Exemplo 5: Erosão
  - Elemento estruturante



**Imagem Original**

**Imagem Filtrada**



# Morfologia Matemática

---

- Erosão e dilatação *não* são operações inversas
- Em algumas situações, uma erosão pode desfazer o resultado de uma dilatação, mas isso não é sempre...

# Morfologia Matemática

- Aplicação de Erosão em Cascata



Imagem  
original



Erosão



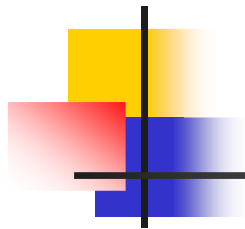
Segunda  
Erosão



# Morfologia Matemática

---

- Relações entre Erosão e Dilatação
  - $\text{erode}(\text{dilate}(S)) \neq S$
  - $\text{dilate}(\text{erode}(S)) \neq S$
  - $\text{erode}(\text{dilate}(S)) \supseteq S$
  - $\text{dilate}(\text{erode}(S)) \subseteq S$



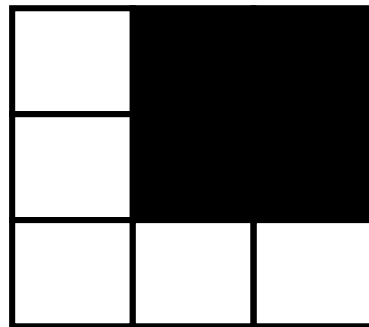
# Morfologia Matemática

---

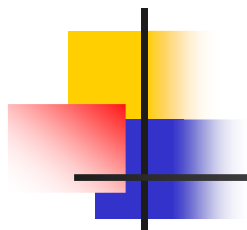
- Mais do que mudar as características da imagem, a morfologia trabalha com a forma de objetos presentes (ou não) na imagem
- Assim, podemos usar essas operações para tentar encontrar determinados objetos ou, mais ainda, determinadas *formas* em uma imagem

# Morfologia Matemática

- Suponha, por exemplo, que queremos saber se uma imagem tem algum objeto na forma de um L, como no elemento abaixo:

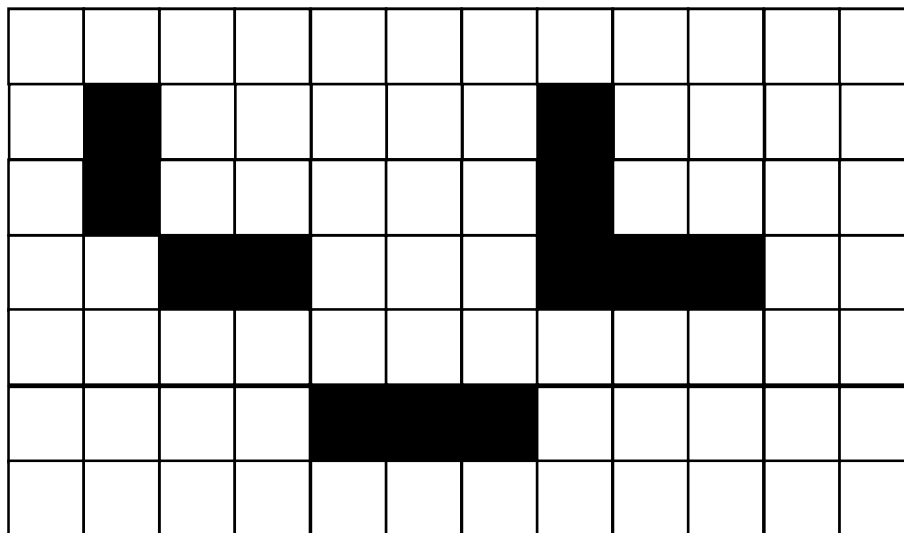


- Se essa matriz for usada como elemento estruturante, podemos usar a operação de erosão para identificar se o elemento existe em uma imagem ou não



# Morfologia Matemática

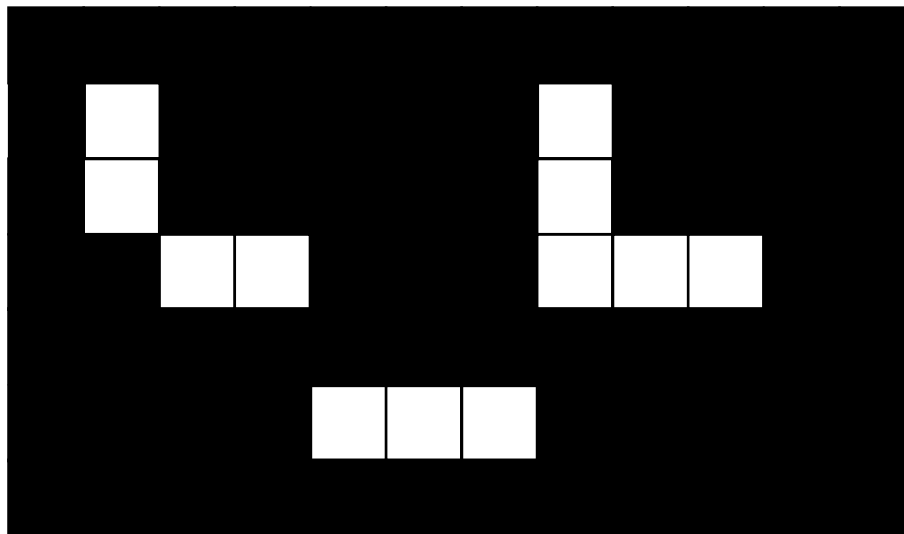
- Considere a imagem a seguir:





# Morfologia Matemática

- Podemos negar a imagem



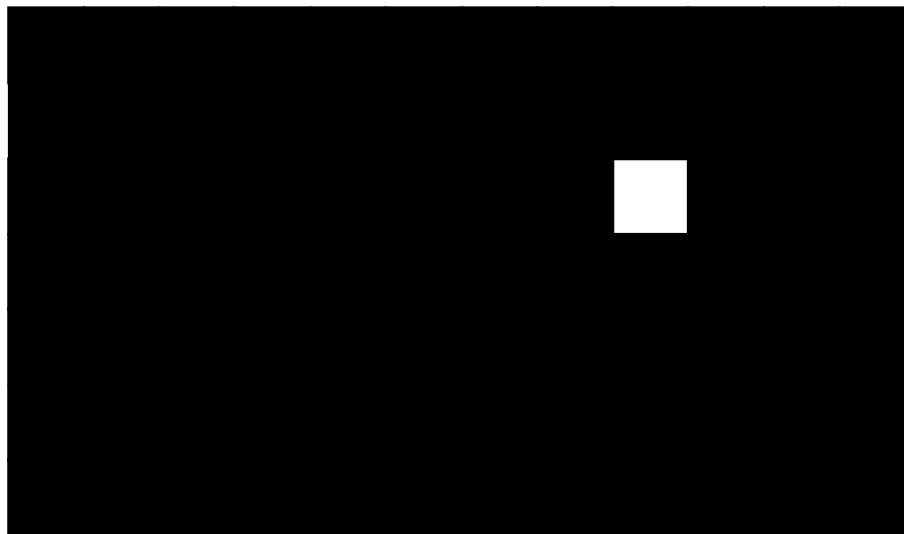
- e aplicar uma erosão com o elemento estruturante da forma do objeto que procuramos



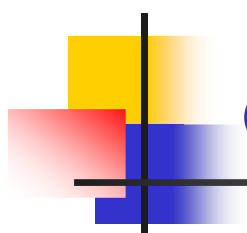
# Morfologia Matemática

---

- O resultado será:



- Ou seja, mais do que uma erosão, o retorno de um valor verdade indica que o objeto está presente na imagem



# Morfologia Matemática

## Outras Operações Derivadas

---

### ■ Abertura e Fechamento

- Abertura = Aplicação de uma erosão seguida por uma dilatação com o mesmo elemento estruturante
- Fechamento = Aplicação de uma dilatação seguida por uma erosão com o mesmo elemento estruturante



# Morfologia Matemática

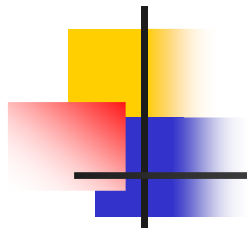
---

- **Abertura:**

- Suavização de contornos
- Remoção de ramificações
- Aumenta as áreas de preto (expande)

- **Fechamento:**

- Preenchimento de falhas em contornos
- Diminui as áreas de preto (contraí)



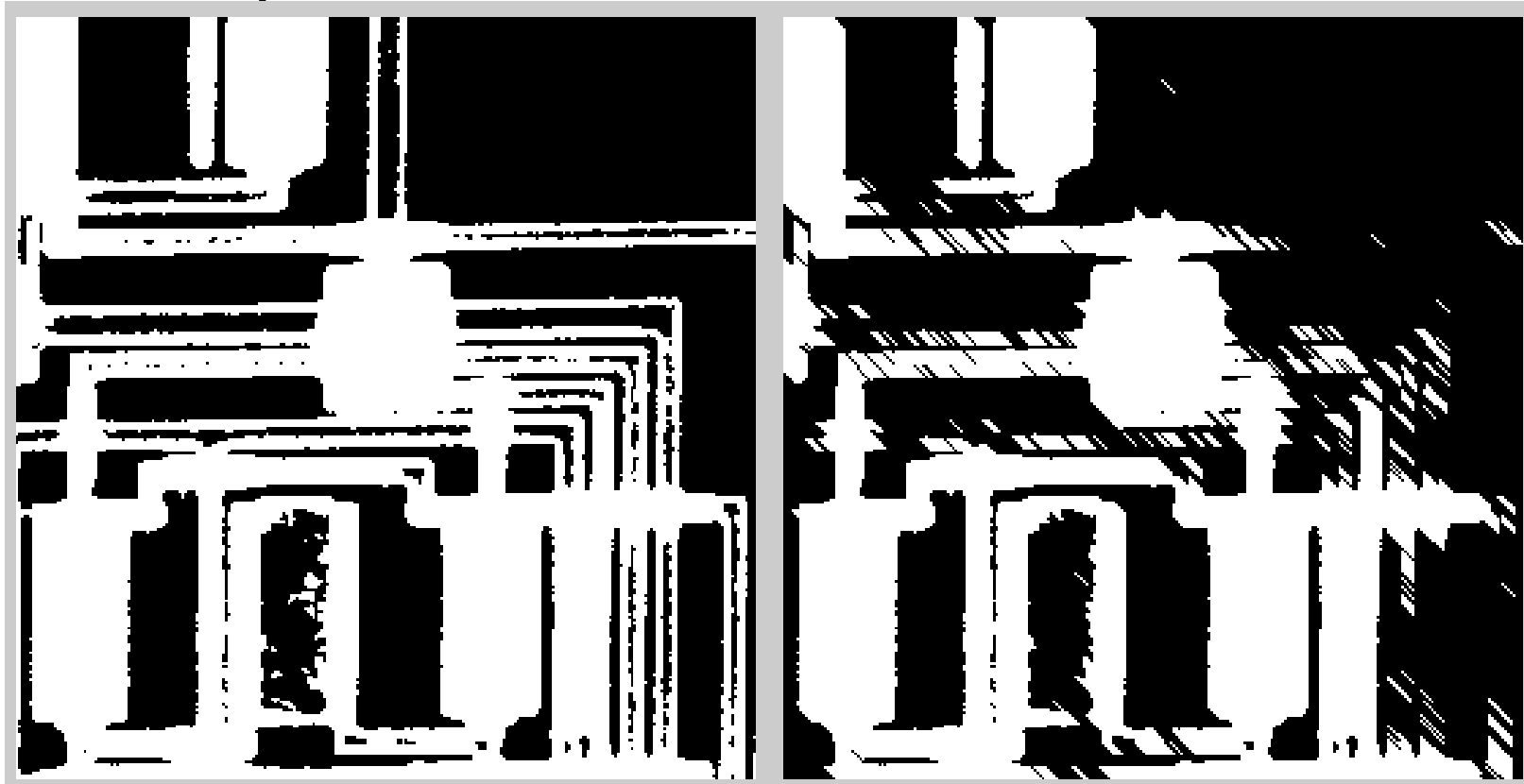
# Morfologia Matemática

---

- Por que os termos Abertura e Fechamento?
  - O nome abertura descreve uma operação que tende a ‘abrir’ pequenos espaços entre objetos em uma imagem
  - Por outro lado, um fechamento preenche esses espaços entre objetos

# Morfologia Matemática

- Exemplo de Abertura:



Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)

# Morfologia Matemática

## Exemplo de Abertura:

Original image of a Brazilian check (cheque) with handwritten details and redacted areas (blacked out).

Handwritten details:

- Number of the account (Número da conta): 53861-6
- Number of the check (Número do cheque): TV-000107
- Amount (Valor): 422,55 (Four hundred and twenty-two and fifty-five cents)
- Payee (Beneficiário): SACITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltda
- Location (Local): Piraicaba
- Date (Data): 02 de Maio de 2005
- Signature (Assinatura): Dom Para
- Date of payment (Data do pagamento): 07/08/2005

Redacted areas (blacked out):

- Top left corner (header area)
- Bottom left corner (bank stamp area)
- Bottom right corner (signature area)

Imagem original

# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Abertura:

0 53861-6 0 TV-000107 4 422,50

Pague por este Cheque a ordem de Quatrocentos e Vinte e Dois Reais

SACITABUS - Com. de Bens e Colônias Ind.

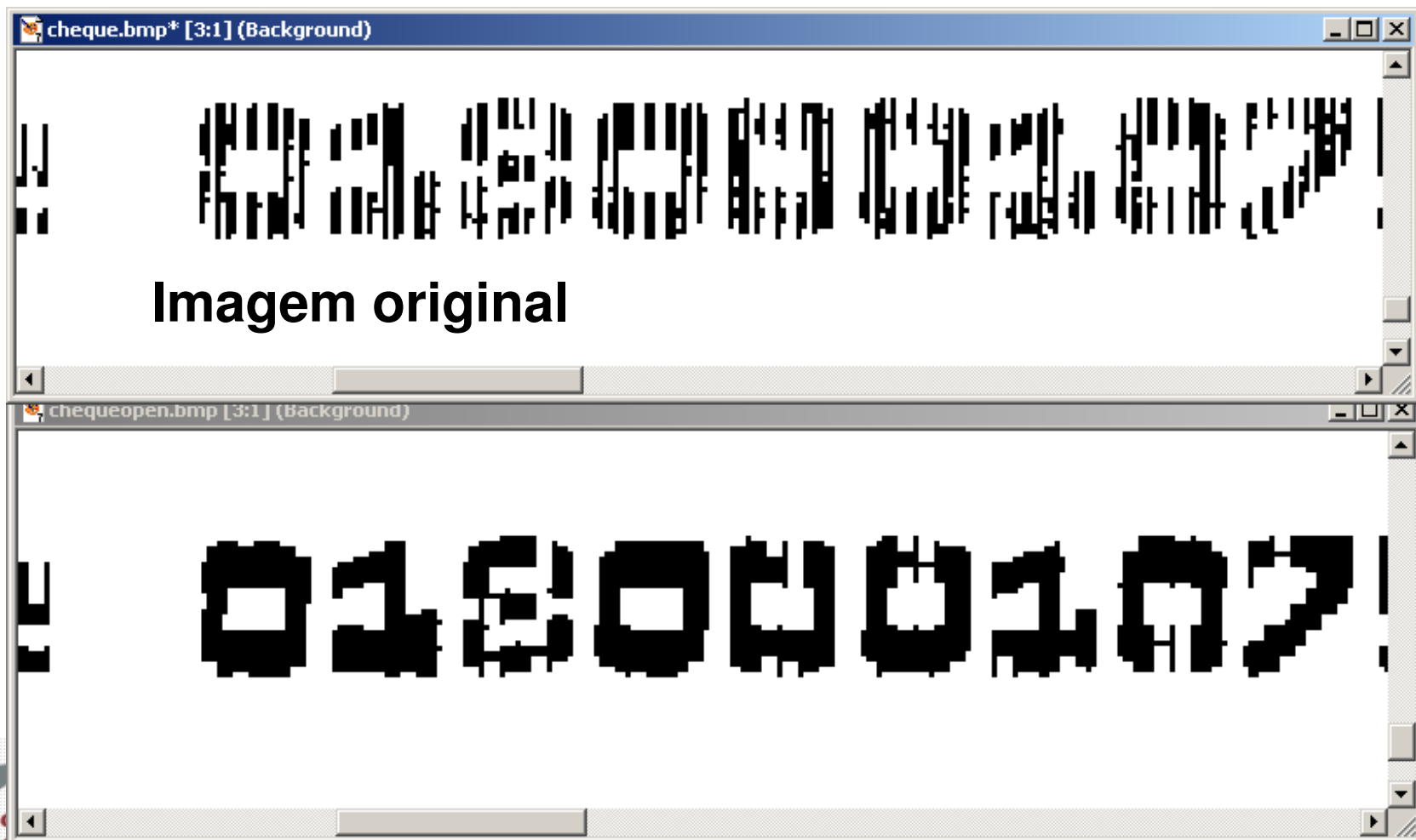
Piracicaba, 02 de Maio de 2005

0180001075# 551995386169# 07/08/2005



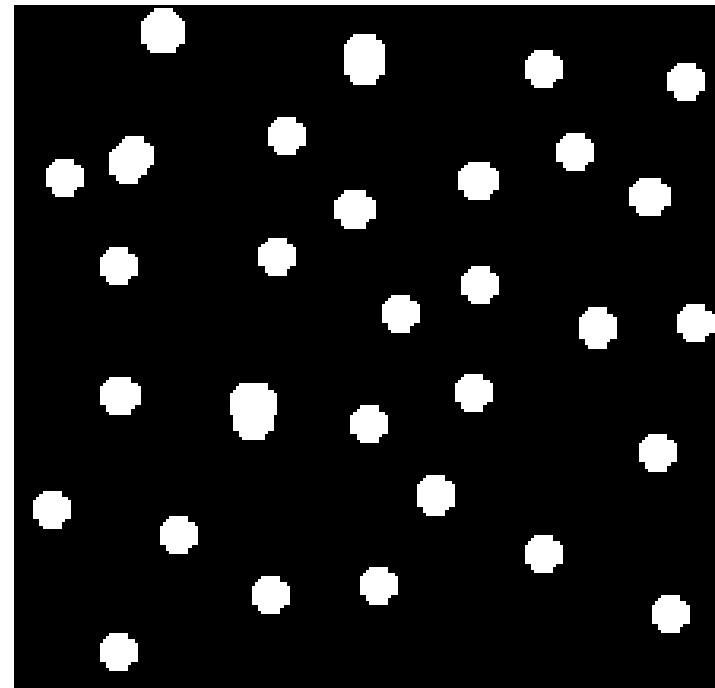
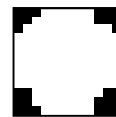
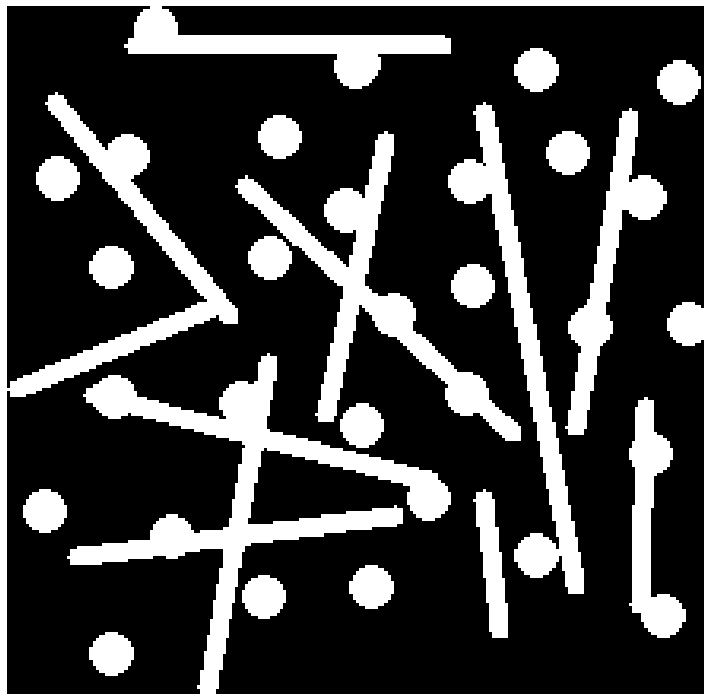
# Morfologia Matemática

- Exemplo de Abertura (detalhes)



# Morfologia Matemática

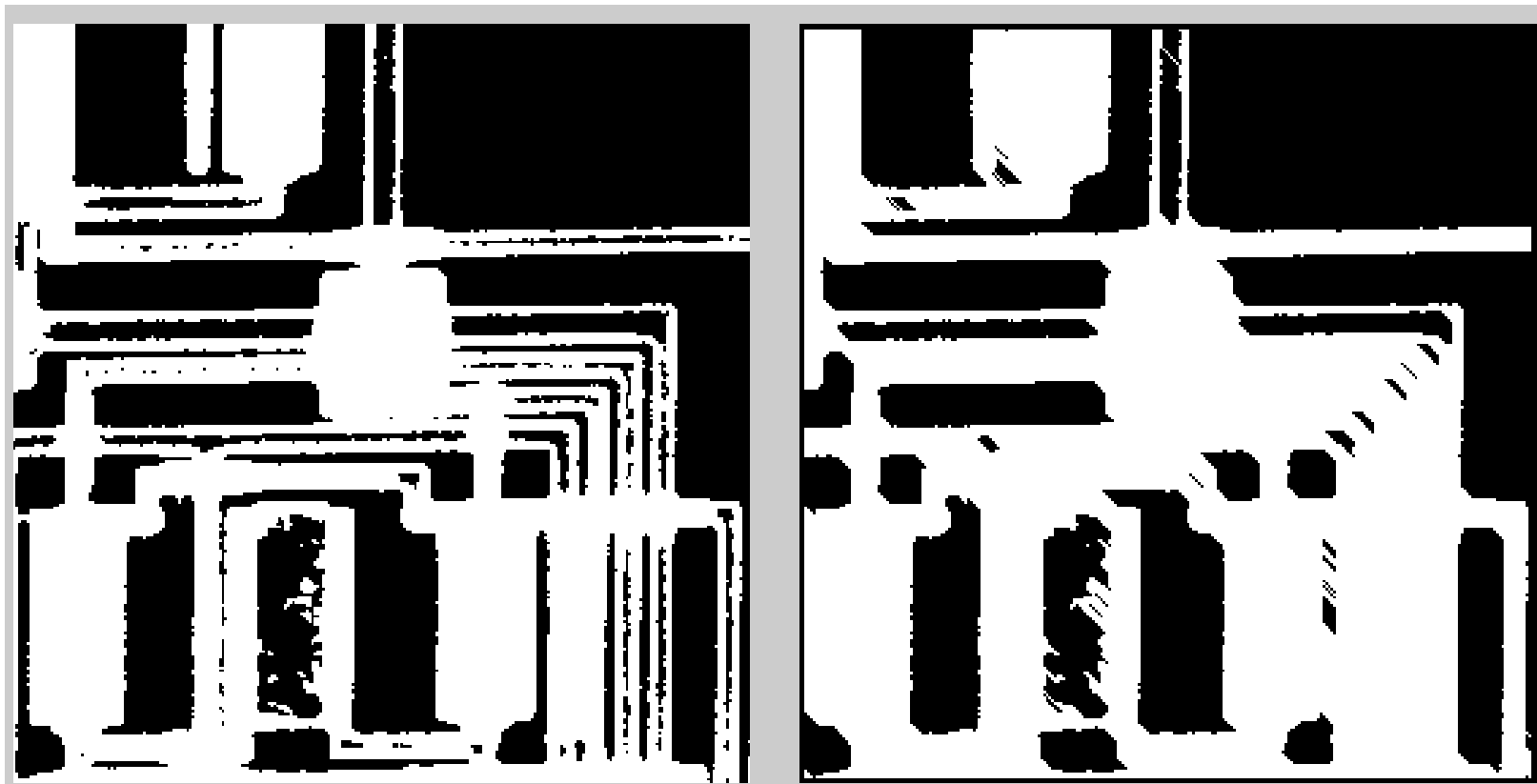
## ■ Exemplo de Abertura:



Elemento estruturante: uma matriz 11x11  
na forma de um círculo

# Morfologia Matemática

- Exemplo de Fechamento:



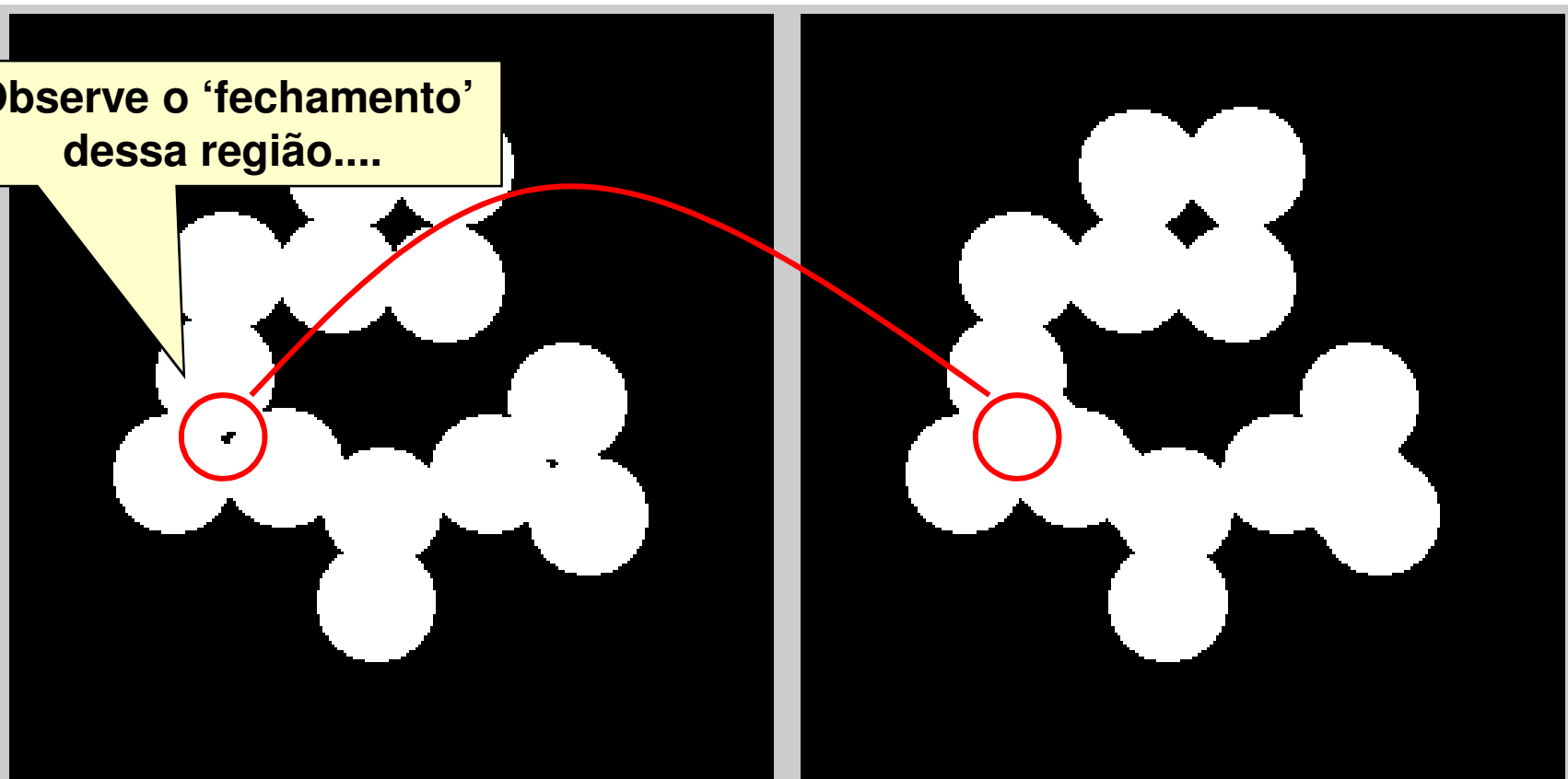
**Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)**

Carlos Alexandre Mello – cabm@cin.ufpe.br

# Morfologia Matemática

## Exemplo de Fechamento:

Observe o 'fechamento' dessa região....



Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)

Carlos Alexandre Mello – cabm@cin.ufpe.br

# Morfologia Matemática

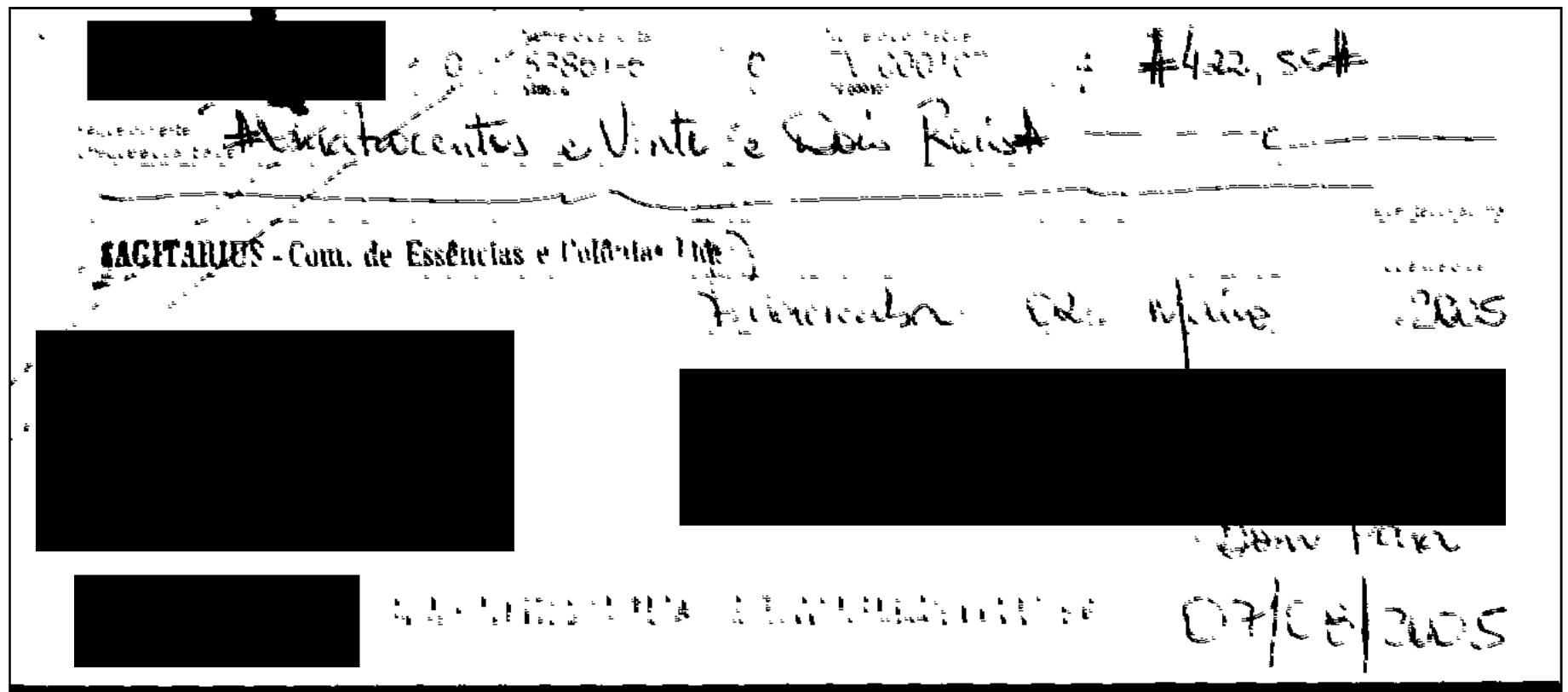
## Exemplo de Fechamento:

[Redacted]		0	Número da conta 53861-6	0	Número do cheque TV-000107	4	R\$ 422,55
Pague por este Cheque a quantia de		Quatrocentos e Vinte e Dois Reais					
		e centavos acima					
a SACITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltd		ou à sua ordem					
		Piracicaba 02 de Maio de 2005					
[Redacted]		[Redacted]					
[Redacted]		Dom Para					
		07/08/2005					

Imagem original

# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Fechamento:



# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Fechamento: Granulometria

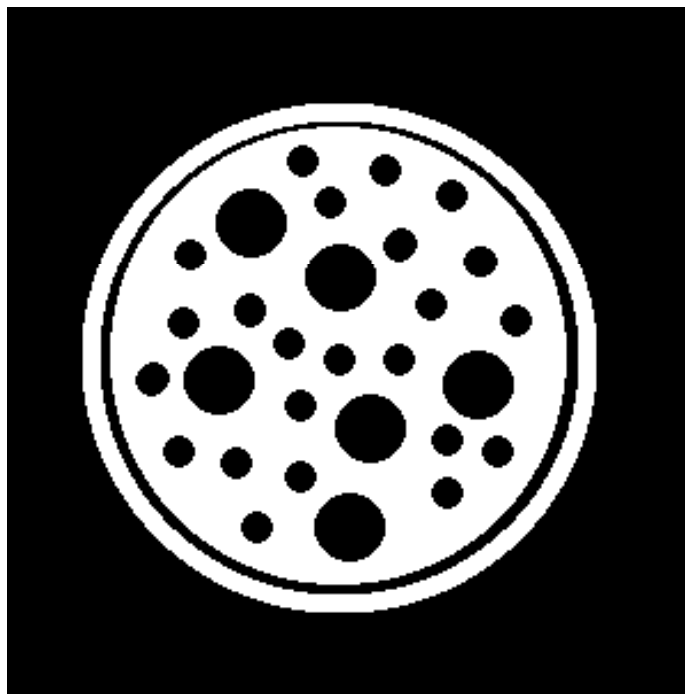
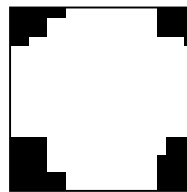
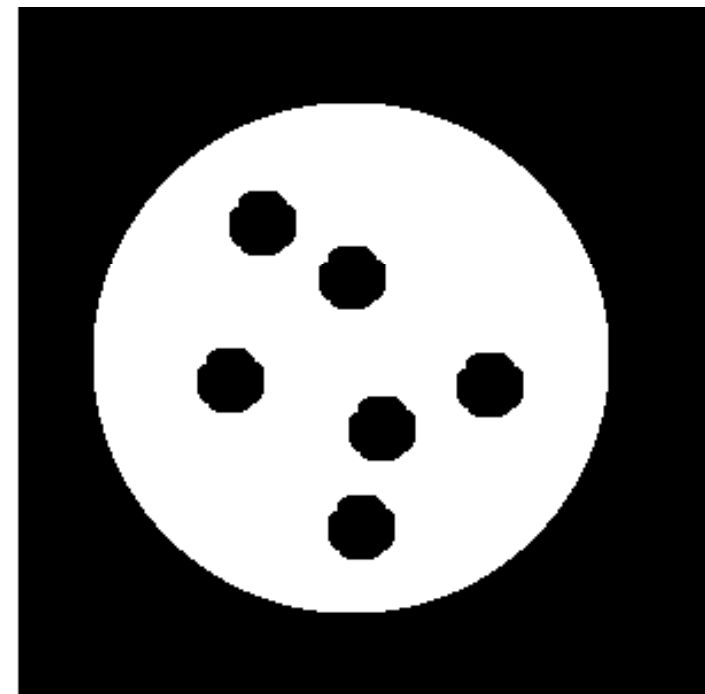


Imagem original



Elemento estruturante: uma matriz 30x30  
na forma de um círculo

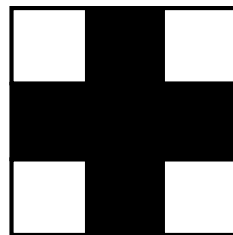




# Morfologia Matemática

---

- Extração de Fronteiras
  - $\beta(A) = A - (A \ominus B)$
  - Ou seja, a diferença de conjuntos entre A e sua erosão pelo elemento B
  - Exemplo: Considere o elemento estrutural B



**B**



# Morfologia Matemática

- Extração de Fronteiras

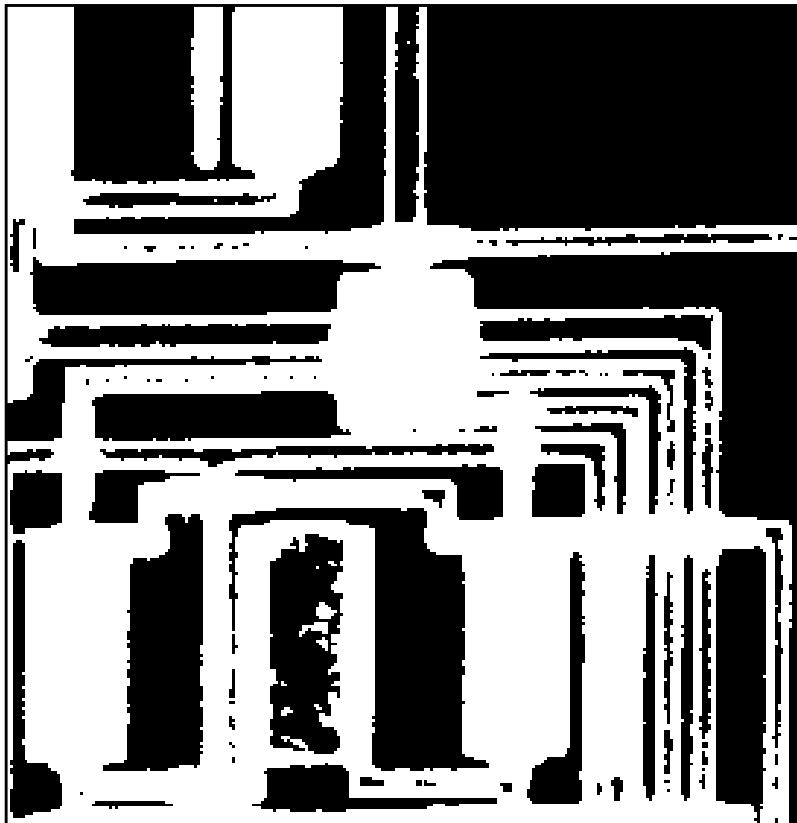
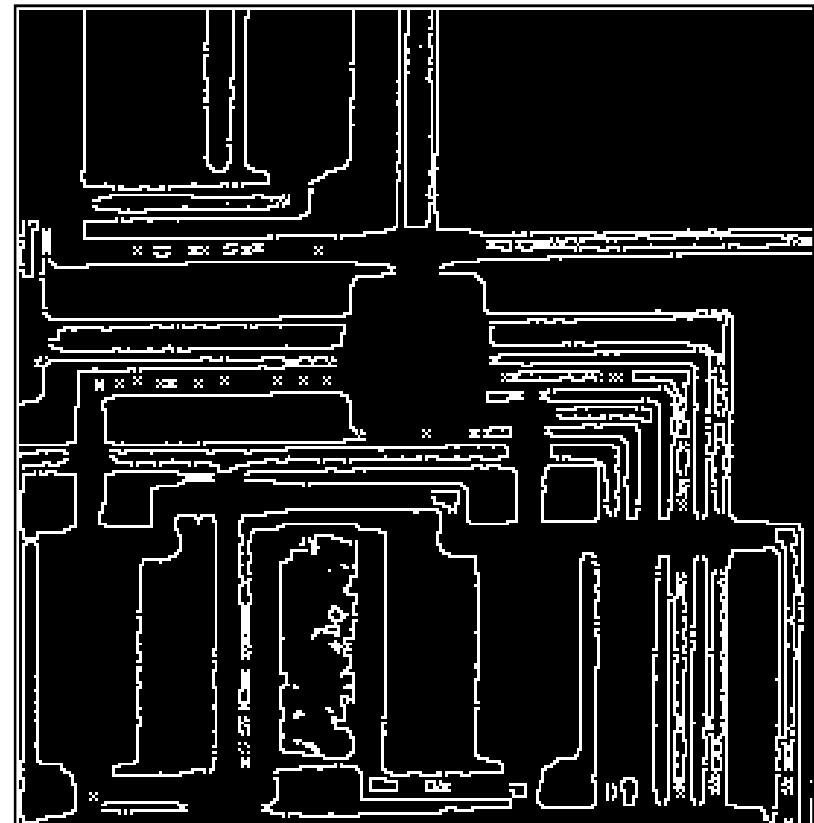
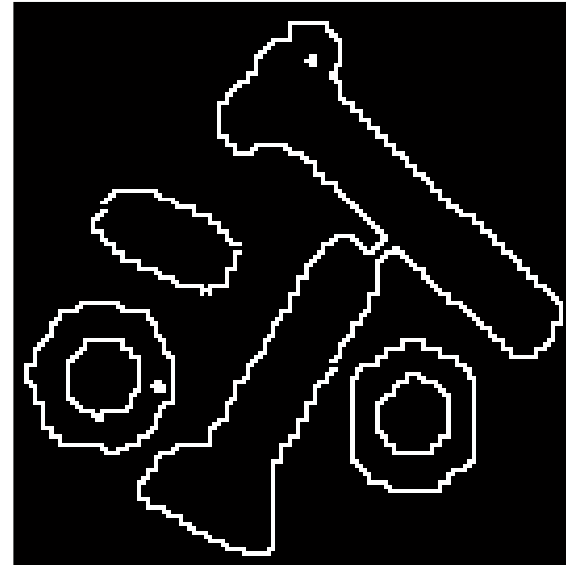
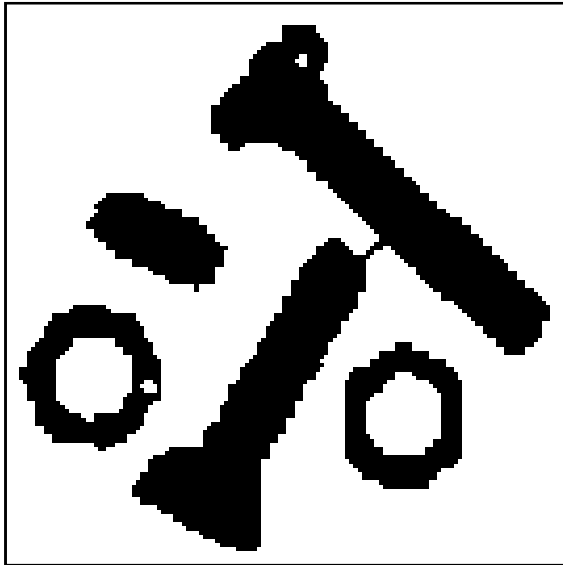


Imagem original



# Morfologia Matemática

- Extração de Fronteiras



**Imagem original**

# Morfologia Matemática

- Extração de Fronteiras

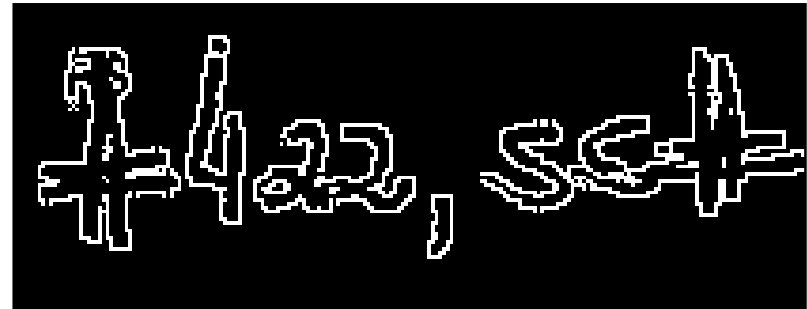
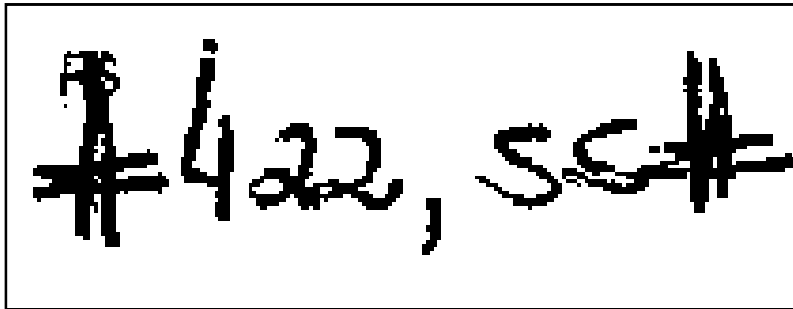


Imagem original



# Morfologia Matemática

---

- Outras operações
  - *Watershed*
  - Esqueletização
  - Afinamento
  - *Hit-and-Miss*
  - Operações aplicadas a imagens em tons de cinza



# Morfologia Matemática

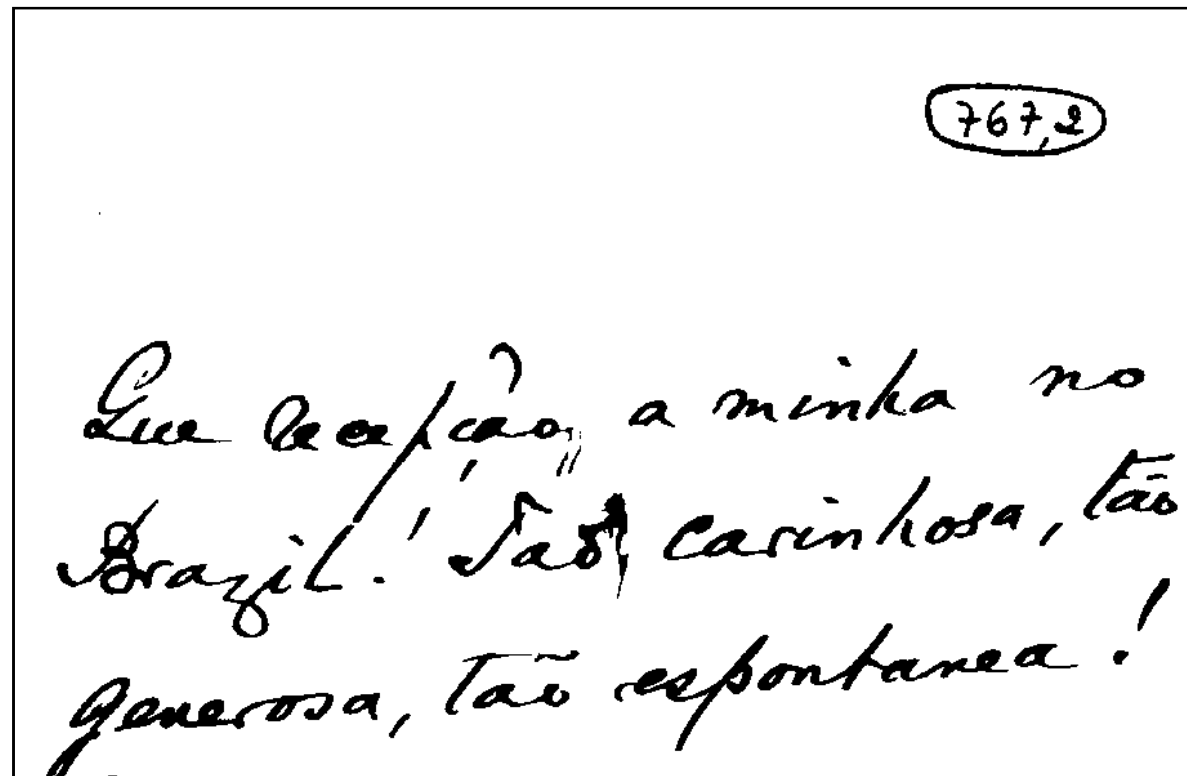
---

- Watershed
  - Método de segmentação
  - Pode provocar sobre-segmentação



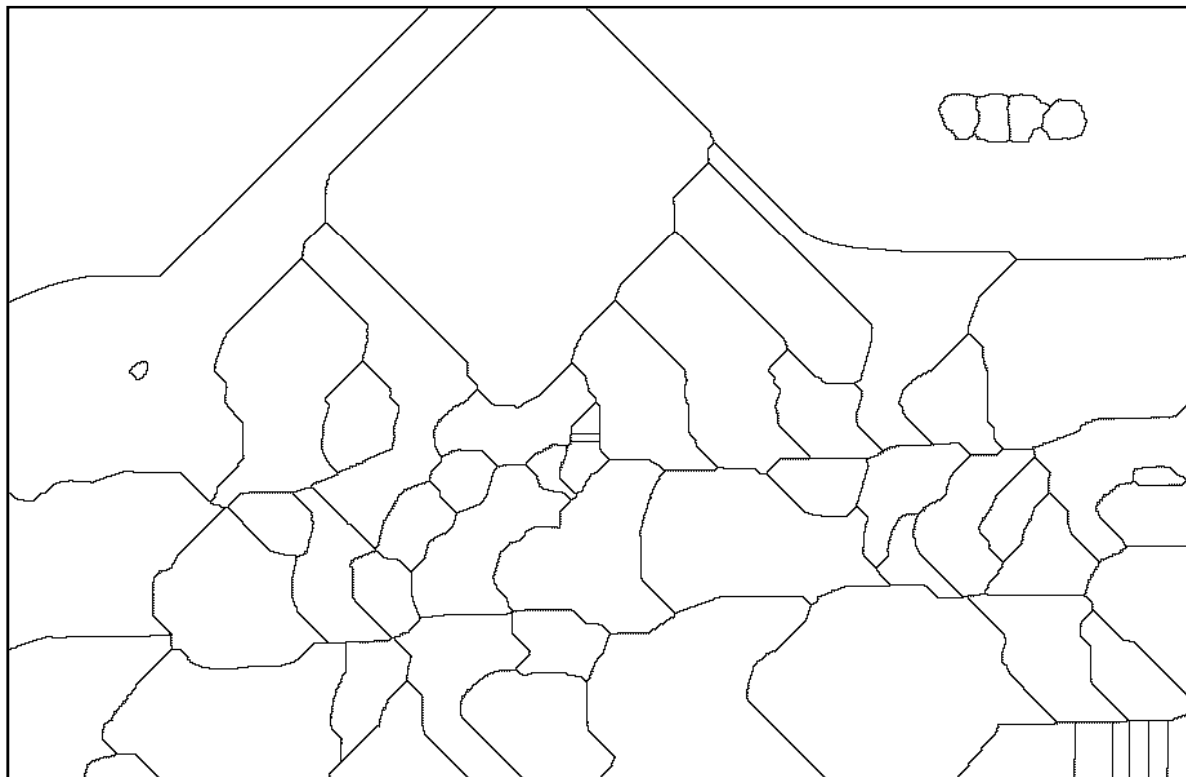
# Morfologia Matemática

- Watershed



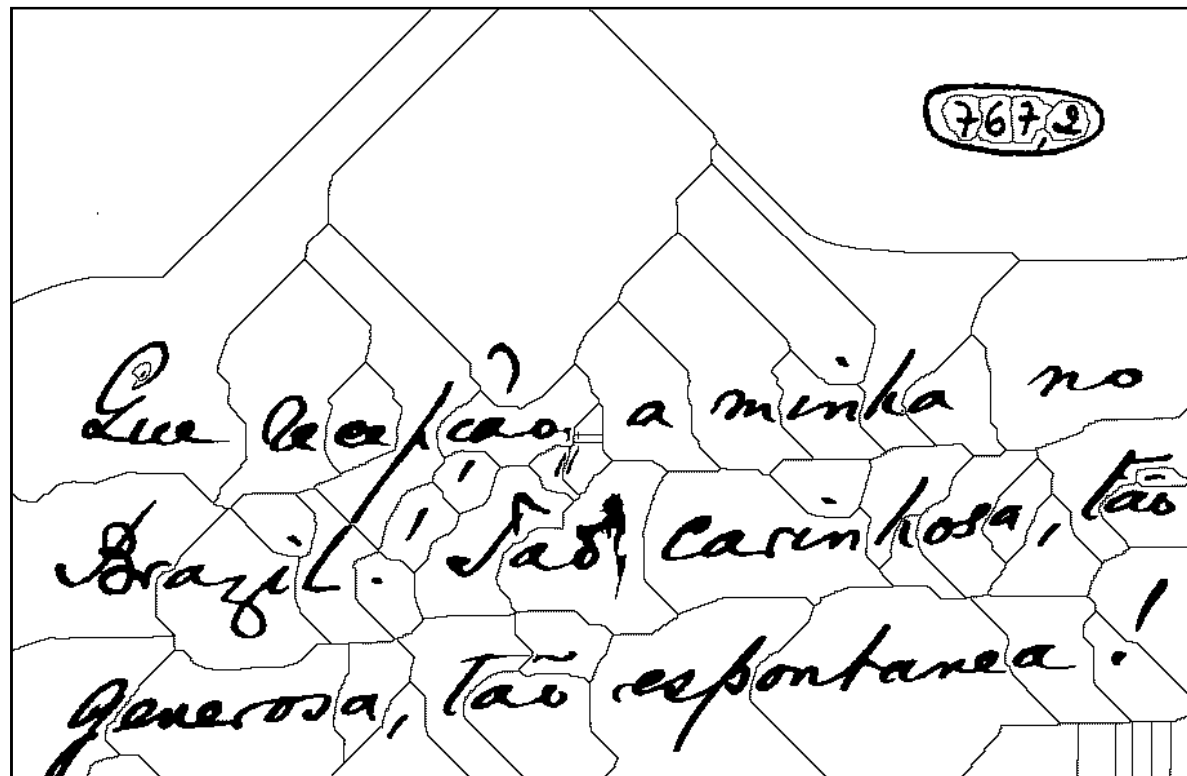
# Morfologia Matemática

## ■ Watershed



# Morfologia Matemática

- Watershed

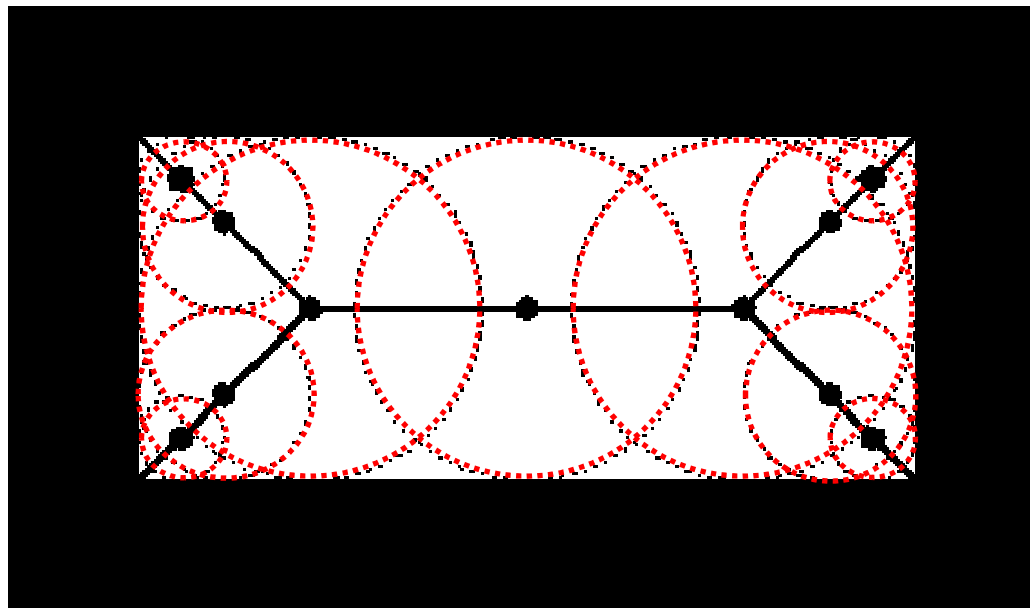




# Morfologia Matemática

## ■ Esqueletização

- O esqueleto é o centro de círculos que tangenciam a região sendo considerada





# Morfologia Matemática

---

- Esqueletização

- Alcançado por sucessivas erosões

- `>> im = imread('numeros.bmp');`
- `>> BW2 = bwmorph(im,'skel',Inf);`
  - 'Inf' provoca a aplicação do algoritmo infinitas vezes até que a imagem não mude

# Morfologia Matemática

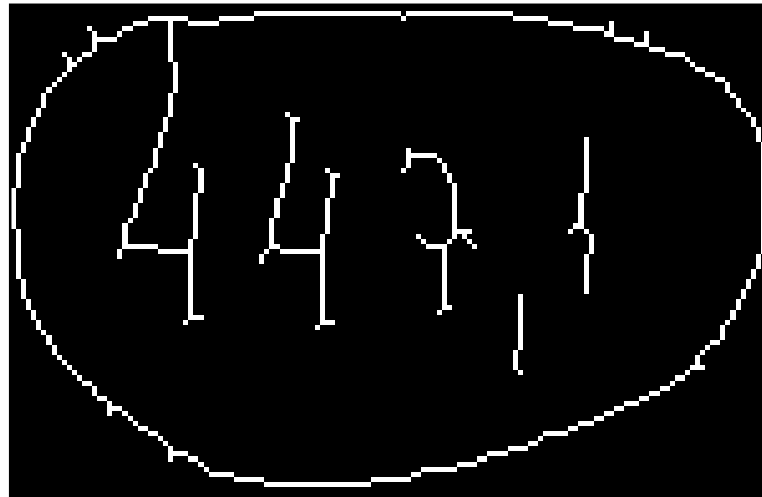
- Esqueletização
  - Aplicação na imagem negativada



Imagem original

# Morfologia Matemática

- Esqueletização



Esqueleto

# Morfologia Matemática

- Esqueletização



Sobreposição



# Morfologia Matemática

---

- Afinamento (*Thinning*)
  - Diversos algoritmos
  - Exemplo:
    - `>> im = imread('numeros.bmp');`
    - `>> BW2 = bwmorph(im,'thin',Inf);`

# Morfologia Matemática

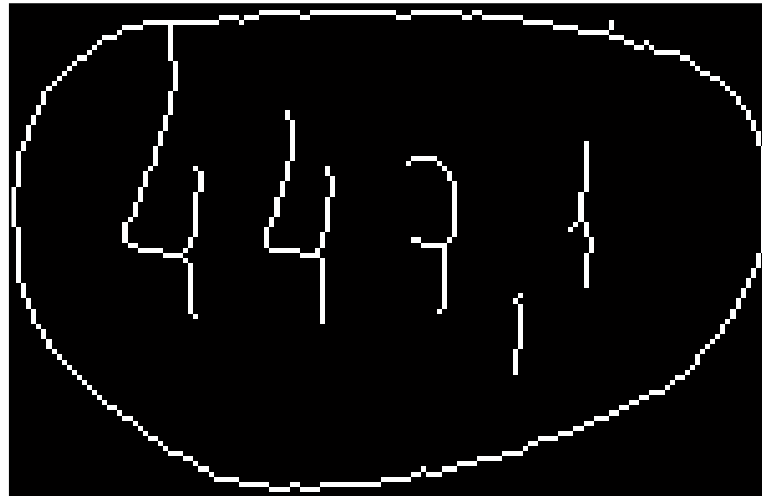
- Afinamento



Sobreposição

# Morfologia Matemática

- Afinamento



Afinamento



# Morfologia Matemática

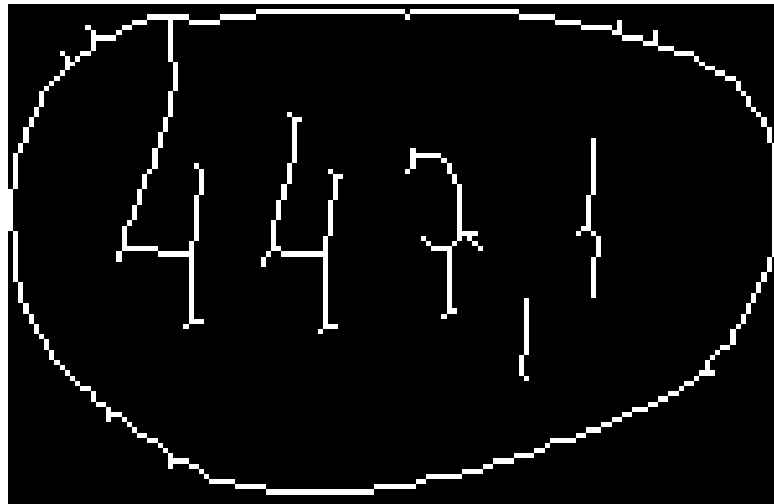
- Afinamento



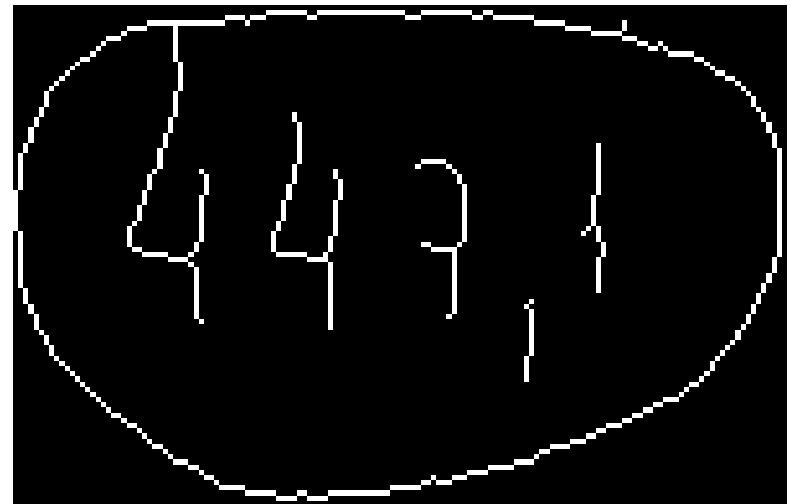
Sobreposição

# Morfologia Matemática

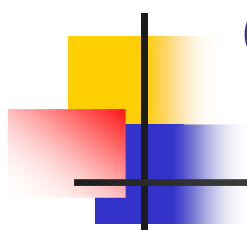
- Esqueletização x Afinamento
  - Observe a diferença



Esqueleto



Afinamento



# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Dilatação

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento Estruturante

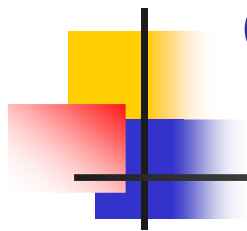
O resultado é o maior tom sob o elemento estruturante...

10	23	16	19	111
42	19	255	198	111
76	11	32	56	16
16	54	123	78	61
169	49	23	19	139

Imagem de entrada

10	23	16	19	111
42	255	255	255	111
76	76	255	198	16
16	123	123	123	61
169	49	23	19	139

Imagem Final



# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Dilatação

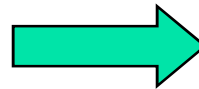


Imagem com ruído  
sal e pimenta

# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Erosão

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento Estruturante

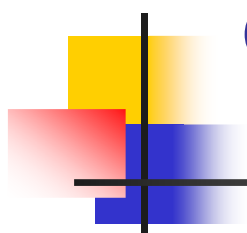
O resultado é o menor tom sob o elemento estruturante...

10	23	16	19	111
42	19	255	198	111
76	11	32	56	16
16	54	123	78	61
169	49	23	19	139

Imagem de entrada

10	23	16	19	111
42	11	16	19	111
76	11	11	16	16
16	11	23	19	61
169	49	23	19	139

Imagem Final



# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Erosão

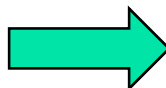


Imagem com ruído  
sal e pimenta



# Morfologia Matemática

---

- No MatLab:
  - imerode
  - imdilate
  - bwmorph
    - thin, skel, etc...
  - watershed