

# **Métodos Numéricos**

## **Gram-Schmidt en $L^2[a, b]$**

### **Proyecto Final**

**Marcos Jared Castro Pérez**

## Resumen

En este trabajo implementamos el algoritmo de Gram-Schmidt en  $L^2[a, b]$  para aproximar funciones integrables con polinomios.

## Introducción

A lo largo del curso hemos visto cómo la serie de Taylor de las funciones nos ayuda el momento de calcular ciertos valores, tales como la integral, la derivada, entre otras. Sin embargo, la serie de Taylor nos pide una condición muy fuerte y esta es que la función sea diferenciable. En este trabajo presentaremos un método para aproximar funciones integrables (al cuadrado) por medio de polinomios aprovechando la estructura de espacio de Hilbert de  $L^2$ . Presentaremos la teoría necesaria sin la mayoría de las demostraciones.

## Método

En  $\mathbb{R}^n$  conocemos muy bien el proceso de Gram-Schmidt. Este se hace construyendo una base ortonormal y con ello podemos conocer muy bien los coeficientes de los vectores al hacer simplemente el producto interno del vector con otro de la base. Dicho de otro modo, si  $e_1, \dots, e_n$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y  $v \in \mathbb{R}^n$  es un vector cualquiera, entonces:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

Dicho esto, empezaremos a definir nuestros objetos.

Para eso, recordemos que en  $\mathbb{R}^n$  tenemos la medida de Lebesgue a la cual denotamos por  $\mu$ , la cual nos induce una integral. Tenemos la fortuna de que para funciones integrables en el sentido de Riemann, ambas integrales coinciden. Así, tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.1** Al espacio de todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sean integrables al cuadrado en el intervalo  $[a, b]$ , lo denotaremos por  $L^2[a, b]$ . A este espacio lo dotamos con la función  $\|\cdot\| : L^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|f\| = \left( \int_{[a,b]} f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

Claramente  $L^2[a, b]$  es un espacio vectorial, sin embargo la función  $\|\cdot\|$  no es una norma. Para notar esto, tomemos una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = 0$  casi en todas partes (c.t.p) pero no idénticamente 0. Entonces  $\|f\| = 0$ , pero  $f$  no es la función 0. Para arreglar este problema, tomamos el espacio vectorial cociente

$$L^2[a, b]/L_0,$$

donde  $L_0$  es el espacio vectorial de todas las funciones que son cero casi en todas partes. El espacio resultante también lo llamaremos  $L^2[a, b]$ . por abuso de notación, pero notemos que son espacios

diferentes. A pesar que de los elementos del espacio cociente no son funciones si no clases de equivalencia, las seguiremos usando cómo funciones pues éstas están bien definidas casi en todas partes y eso es lo importante para la integral. Además, la función  $\|\cdot\|$  se traslada al espacio cociente y resulta ser una norma. Por otro lado, si  $f, g \in L^2[a, b]$ , entonces

$$\langle f, g \rangle := \int_{[a,b]} fg d\mu < \infty,$$

por la linealidad de la integral, tenemos que la función anterior define un producto interno.

Tenemos el siguiente teorema que no demostraremos.

**Teorema 1.2** El espacio  $L^2[a, b]$  junto con la norma  $\|\cdot\|$  es un espacio de Banach, es decir, es completo respecto a la norma. Más aún, la norma viene inducida por el producto interno definido anteriormente y por lo tanto el espacio  $L^2[a, b]$  es un espacio de Hilbert.

Dado un subespacio  $U \subset L^2[a, b]$  y  $f \in L^2[a, b]$ , la proyección ortogonal de  $f$  sobre  $U$  es el elemento  $P_U f \in U$  tal que  $P_U f$  es ortogonal a  $f$  y  $P_U f$  minimiza la distancia entre  $f$  y  $U$ . Es sabido que la existencia de  $P_U f$  está garantizada cuando  $U$  es un subespacio cerrado y el espacio total es de Hilbert, qué es nuestro caso. En otro caso, la proyección podría estar en la cerradura de  $U$ . Ahora, si tenemos un subespacio cerrado  $U \subset L^2[a, b]$  con base ortonormal  $e_k$ , entonces para todo  $f \in L^2[a, b]$  se tiene que

$$P_U f = \sum_k \langle f, e_k \rangle e_k$$

Dado que nuestro objetivo es aproximar funciones integrables por polinomios, si fijamos un grado, entonces podremos usar el hecho anterior pues

$$P_n := \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

es un subespacio cerrado.

El problema de ahora sería construir una base ortonormal para el conjunto  $P_n$ . Afortunadamente, este proceso existe y es igual al dado en  $\mathbb{R}^n$ . En cualquier caso, lo describiremos a continuación.

Sea  $U \subset V$  un subespacio cerrado y  $\{f_k\}$  una base.

Definimos los siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_n &= \frac{f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle f, e_k \rangle e_k}{\|f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle f, e_k \rangle e_k\|} \end{aligned} \quad n \geq 2$$

Ahora sí podemos hablar un poco de lo computacional.

Calcular la base ortonormal de polinomios para  $P_n$  es sencillo, pues cómo dijimos, la integral de

Riemann y la integral de Lebesgue coinciden en funciones integrables en el sentido de Riemann, así que tenemos la siguiente siguiente formula sencilla para integrar monomios:

$$\int_{[a,b]} x^n d\mu = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

y por la linealidad de la integral, tenemos fórmula para polinomios.

Claro, hace falta programar toda el álgebra de los polinomios, pero eso no es tarea difícil. El mayor problema son las integrales de en la parte

$$\langle f, e_k \rangle = \int_{[a,b]} f e_k d\mu$$

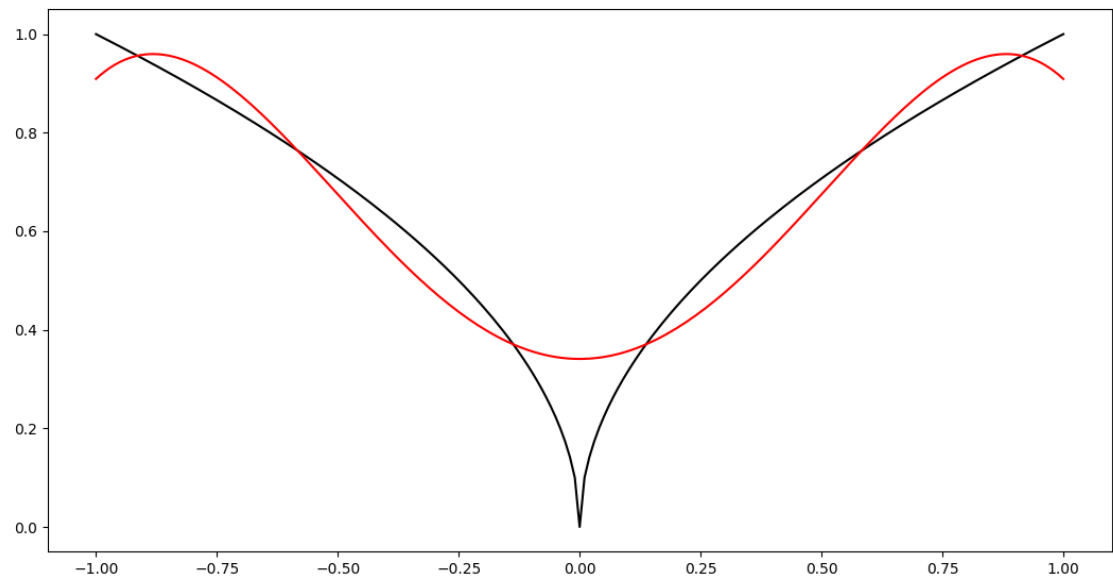
La integral la calculamos con la regla del trapecio. Lo interesante, es que parece no haber mucha diferencia si dividimos el intervalo en 10000 o 100000 partes. Al graficar los polinomios, parecen ser los mismos resultados. Más aún, Claramente  $P_n \subset P_m$  cuando  $n < m$ , sin embargo, parece que para  $n > 20$  empieza a haber problemas con la aproximación, pues las ondulaciones de los polinomios empeoran. Los veremos mejor con los ejemplos.

Considerando el intervalo  $[-1, 1]$ , aquí presentamos una base ortonormal para  $P_{10}$ .

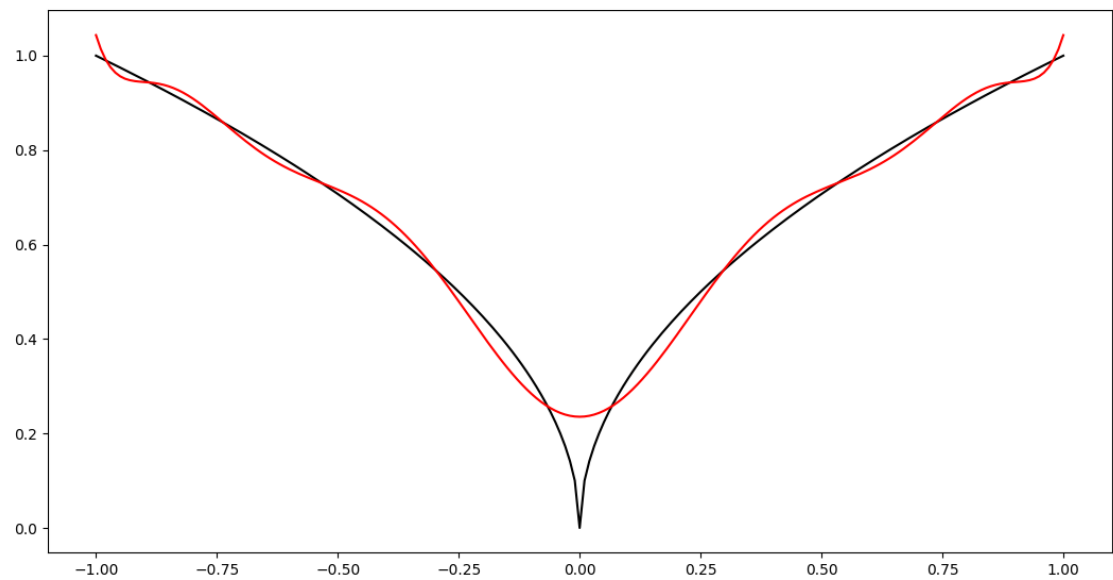
$$\begin{aligned} e_0 &= 0,7071067811865475 \\ e_1 &= 1,224744871391589x^1 \\ e_2 &= -0,7905694150420947 + 2,3717082451262845x^2 \\ e_3 &= -2,8062430400804557x^1 + 4,677071733467427x^3 \\ e_4 &= 0,7954951288348654 - 7,9549512883486555x^2 + 9,28077650307343x^4 \\ e_5 &= 4,397264774834478x^1 - 20,520568949227567x^3 + 18,468512054304806x^5 \\ e_6 &= -0,7967217989988606 + 16,73115777897629x^2 - 50,19347333692916x^4 + 36,80854711374818x^6 \\ e_7 &= -5,990715472712829x^1 + 53,9164392544156x^3 - 118,61616635971446x^5 + 73,42905536553758x^7 \\ e_8 &= 0,7972004543725797 - 28,699216357408314x^2 + 157,8456899657254x^4 - 273,599195940564x^6 \\ &\quad + 146,57099782529124x^8 \\ e_9 &= 7,585118792662262x^1 - 111,24840895900772x^3 + 433,86879494002153x^5 - 619,8125641999142x^7 \\ &\quad + 292,6892664276944x^9 \\ e_{10} &= -0,7974348906071899 + 43,85891898403472x^2 - 380,110631198973x^4 + 1140,3318936060055x^6 \\ &\quad - 1384,6887279587709x^8 + 584,6463518077338x^{10} \end{aligned}$$

Nuestro primer ejemplo es  $f(x) = \sqrt{|x|}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Cómo veremos, desde grado 5 hasta 20, la aproximación va mejorando, pero a partir de este grado, la proyección parece empezar a fallar.

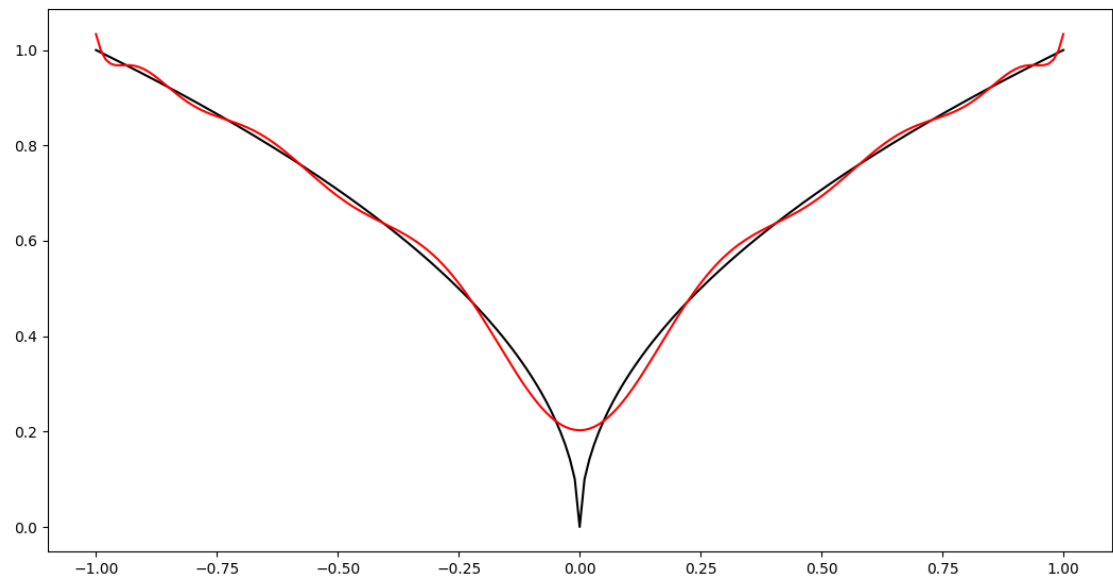
Aproximación con grado 5



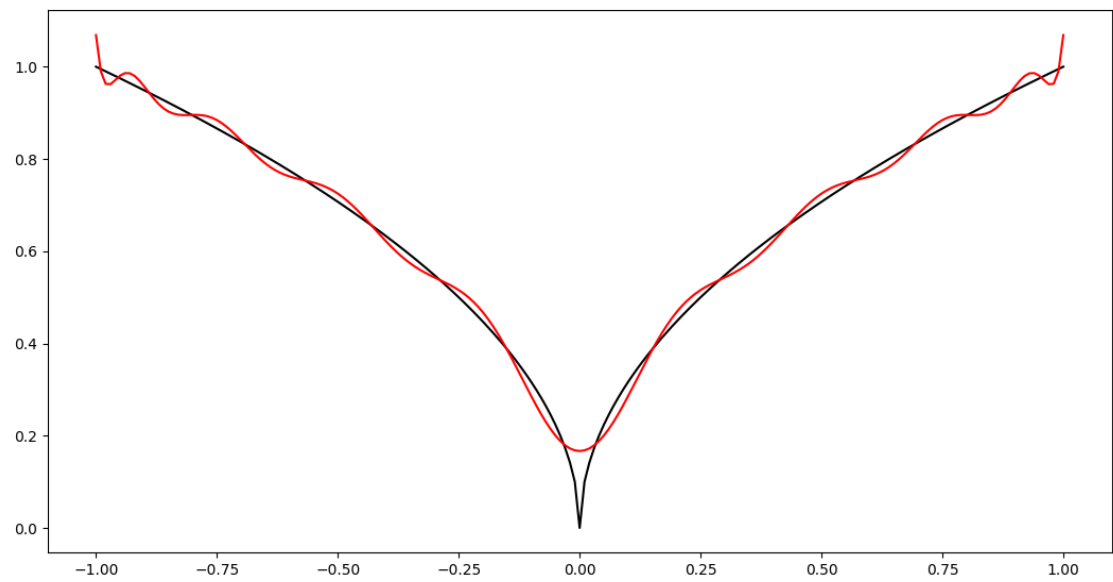
Aproximación con grado 10



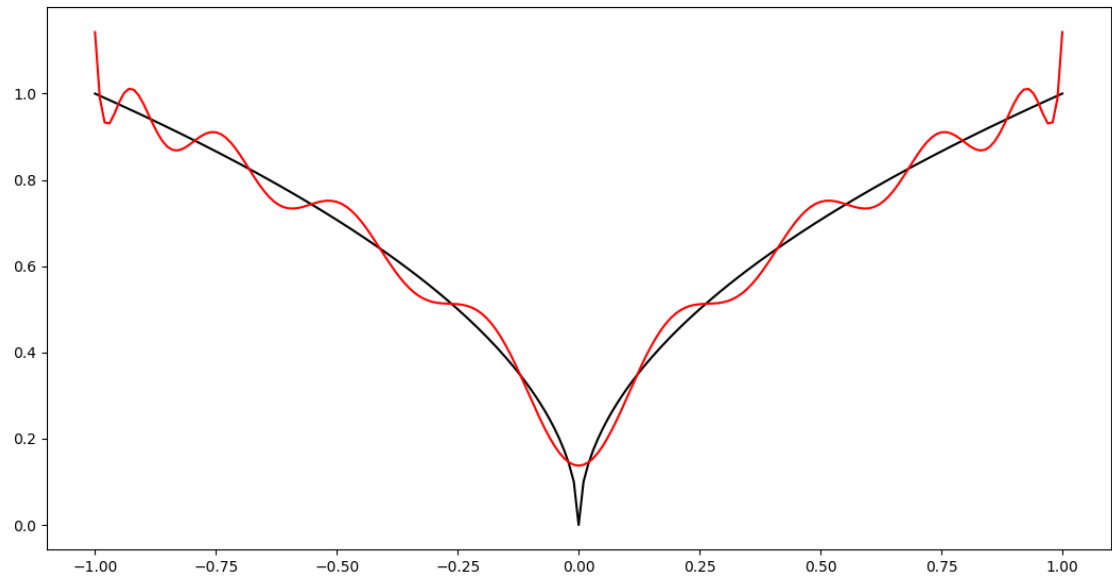
Aproximación con grado 15



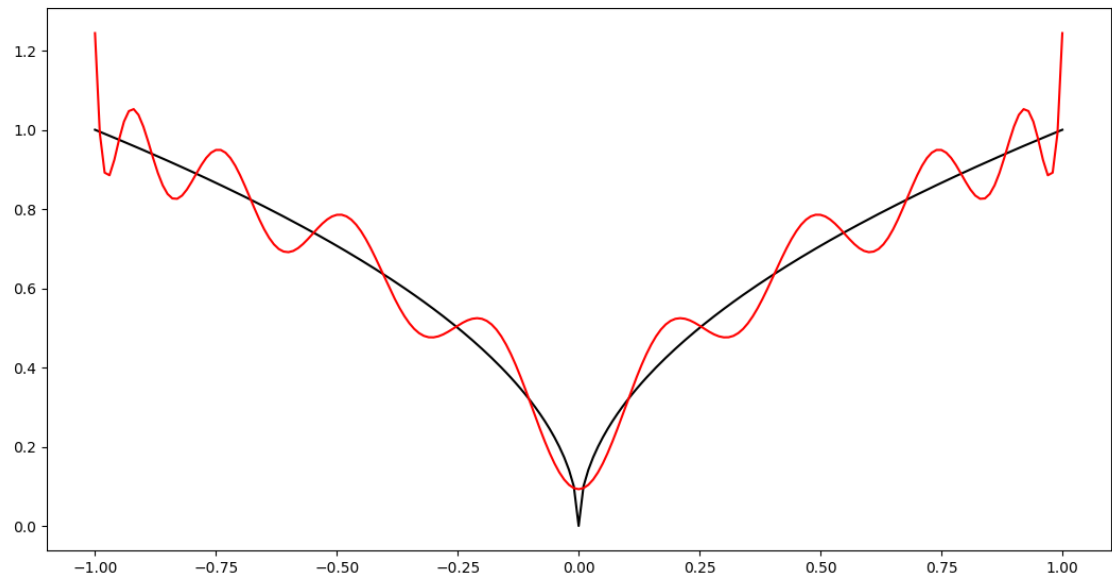
Aproximación con grado 20



Aproximación con grado 25



Aproximación con grado 30

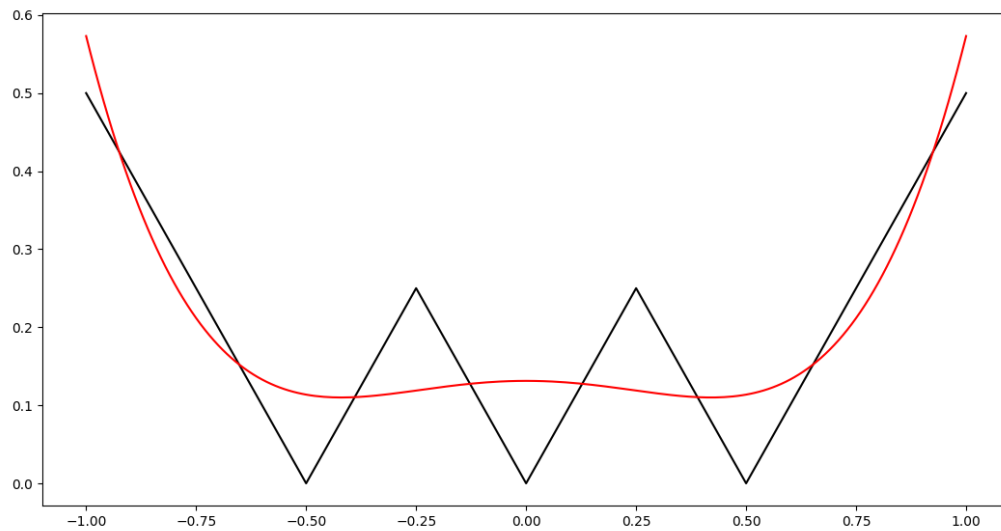


Ahora veamos una función que tiene varios puntos donde no es diferenciable.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

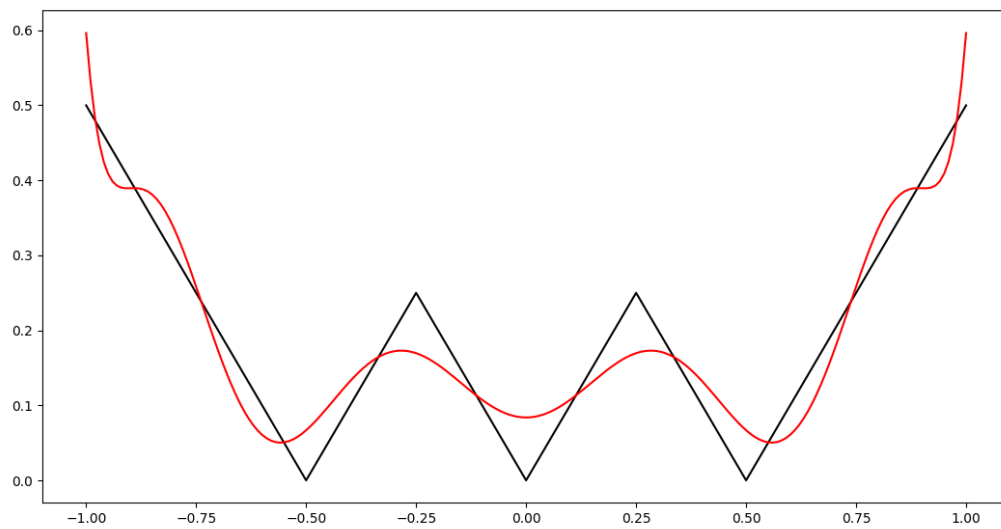
$$f(x) = \begin{cases} |x + 0,5| & \text{si } -1 \leq x < -0,25 \\ |x| & \text{si } -0,25 \leq x \leq 0,25 \\ |x - 0,5| & \text{si } 0,25 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Las aproximaciones son las siguientes.

Aproximación con grado 5

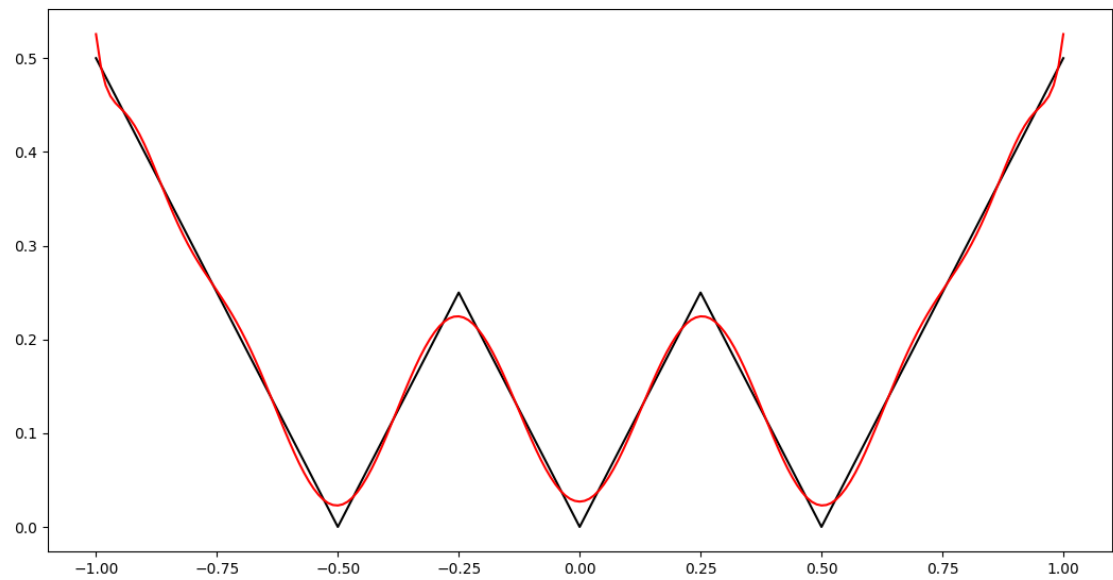


Aproximación con grado 10

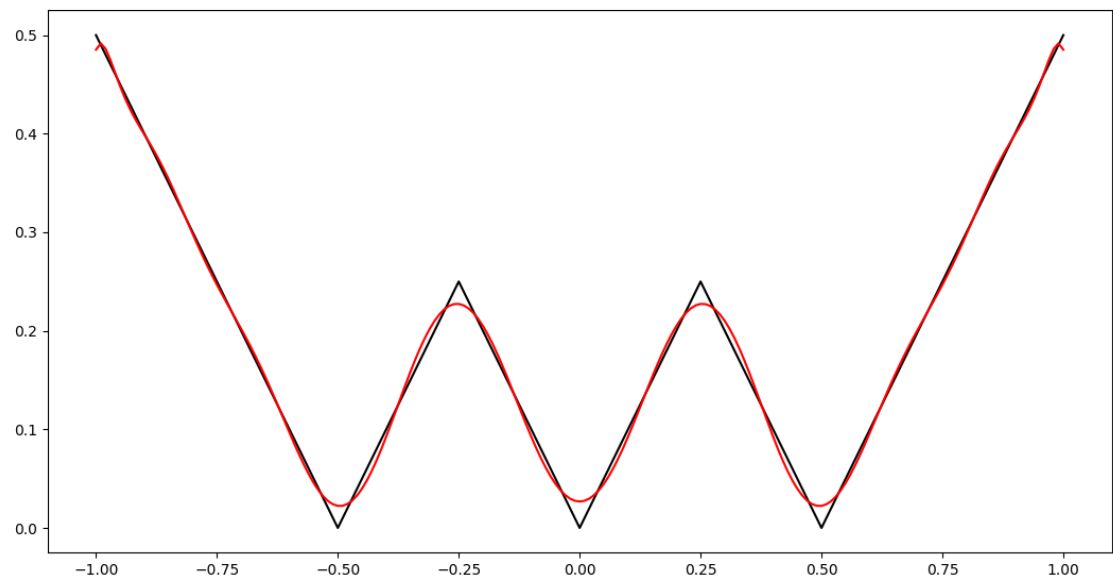




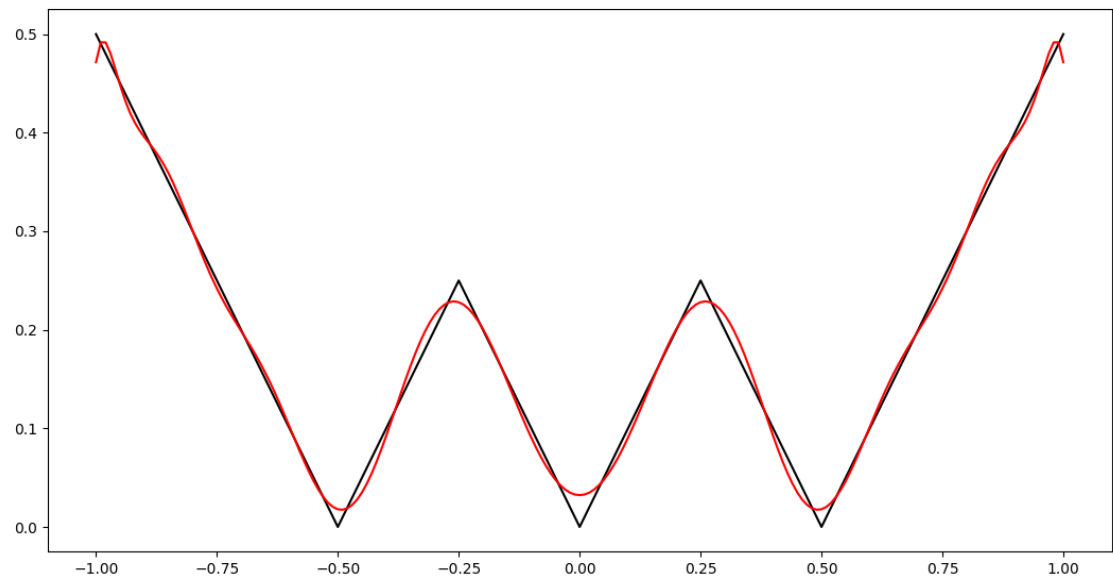
Aproximación con grado 15



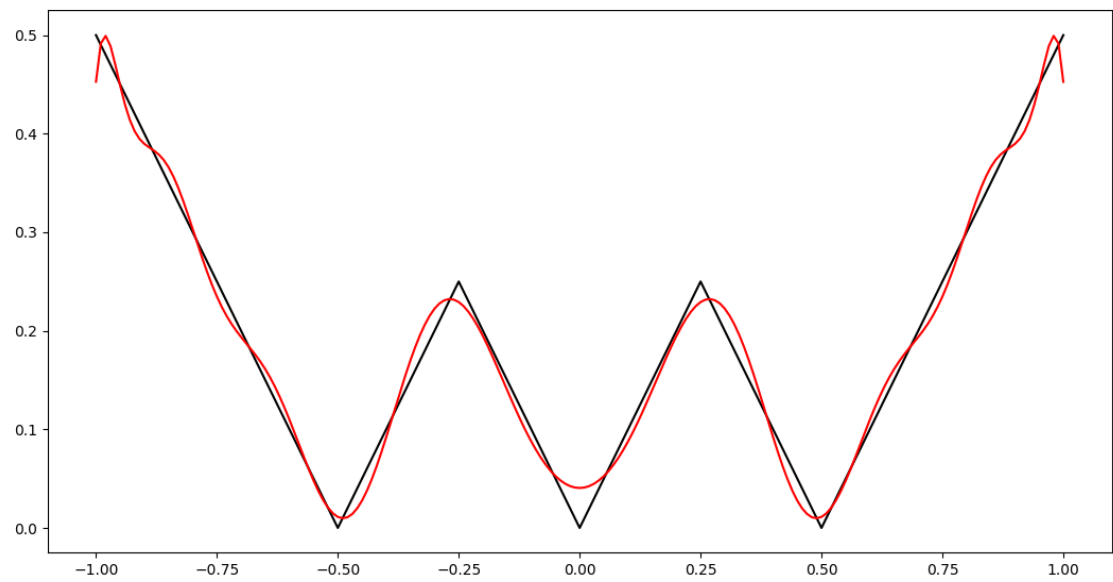
Aproximación con grado 20



Aproximación con grado 25



Aproximación con grado 30



## Referencias

- [1] Burden, R., & Faires, J. D. (2001). *Analisis Numerico* (7a ed.). Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- [2] Axler, S. (2019). *Measure, Integration and Real Analysis*. Springer.