

# Fundamentos Matemáticos

Marcos Cordeiro de B. Jr

PPGEEC - Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica e Computação  
**Universidade Presbiteriana Mackenzie**

Março de 2020

## Questão 1 - Multiplicação de Matrizes

Efetue a multiplicação entre as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  e verifique se a propriedade comutativa é válida.

## Resposta

Multiplicação das Matrizes  $A \cdot B$ :

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \\ A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ A \cdot B &= \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicação das Matrizes  $B \cdot A$ :

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto  $A \cdot B \neq B \cdot A$  e por isso a propriedade comutativa não é válida.

## Questão 2 - Determinante de Matrizes

Dado uma Matriz  $A \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ , sendo  $A^t$  sua transposta, qual o determinante da matriz  $A.A^t$ ?

### Resposta

Multiplicação das Matrizes:

$$\begin{aligned} A.A^t &= \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ A.A^t &= \begin{bmatrix} 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 & 4 \cdot (-1) + 7 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 7 & (-1) \cdot (-1) + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} \\ A.A^t &= \begin{bmatrix} 65 & 31 \\ 31 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buscando a determinante:

$$\begin{aligned} Det(A.A^t) &= 65 \cdot 26 - 31 \cdot 31 \\ Det(A.A^t) &= 1690 - 961 \\ Det(A.A^t) &= 729 \end{aligned}$$

## Questão 3 - Produto Interno

Cálculo o valor do produto interno entre os vetores  $\vec{x} = (3, 1, 4)$  e  $\vec{y} = (6, 0, 2)$ .

### Resposta

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= (3, 1, 4) \cdot (6, 0, 2) \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= 3 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= 18 + 0 + 8 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= 26 \end{aligned}$$

## Question 4 - Probabilidade

No jogo de RPG (Role Playing Game), os jogadores utilizam diversos dados com várias lados que variam entre 4, 6, 8, 10, 12 e 20 faces. Essa variação no número de lados serve para controlar o grau de aleatoriedade e equilibrar as regras do sistema de jogo.

Em uma partida entre amigos, um jogador precisa matar um monstro que tem 35 pontos de defesa. Esse jogador terá que jogar o dado de 20 lados duas vezes.

Qual a Probabilidade desse jogador tirar mais que 35 pontos e matar o monstro?

## Resposta

Fórmula:

$$P = \frac{\text{soma da possibilidades dos dados}}{\text{quantidade de combinações máximas dos dois dados}} = \frac{S}{J}$$

Possibilidades de vencer:

- Se dado 1 tirar 16, dado 2 pode tirar 20;
- Se dado 1 tirar 17, dado 2 pode tirar 20 ou 19;
- Se dado 1 tirar 18, dado 2 pode tirar 20, 19 ou 18;
- Se dado 1 tirar 19, dado 2 pode tirar 20, 19, 18 ou 17;
- Se dado 1 tirar 20, dado 2 pode tirar 20, 19, 18, 17 ou 16;

Soma possibilidades do dado 2.

$$S = [1 + 2 + 3 + 4 + 5]$$
$$S = 15$$

Quantidade máxima de possibilidades dos dois dados.

$$J = 20 \cdot 20$$
$$J = 400$$

Probabilidades:

$$P = \frac{S}{J} = \frac{15}{400} = \frac{3}{80}$$

## Questão 5 - Probabilidade Condicional

Em outra rodada da mesma partida de RPG do exercício anterior, o jogador com os dados pode ganhar um item muito valioso para seu personagem. Porém, para que isso ocorra, ele precisa jogar o dado de 6 lados e tirar um número ímpar ou maior que dois.

Quais são as probabilidades do jogador ganhar esse item?

### Resposta

Evento  $A$  - Tirar o número ímpar.

$$P(A) = \frac{\text{números ímpares do dado}}{\text{quantidade de faces do dado}}$$
$$P(A) = \frac{3}{6}$$

Evento  $B$  - Tirar número maior que 2.

$$P(B) = \frac{\text{quantidade de números possíveis}}{\text{quantidade de faces do dado}}$$
$$P(B) = \frac{4}{6}$$

Identificando os elementos comuns entre os eventos  $A$  e  $B$ .

$$A \cap B = \{3, 5\}$$
$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

Cálculo da probabilidade dos eventos pela *lei da adição*.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

## Questão 6 - Teorema de Bayes

Uma empresa produz 4% de peças defeituosas. O controle de qualidade da empresa é realizado em duas etapas independentes. A primeira etapa acusa uma peça defeituosa com 80% de probabilidade de acerto. A segunda etapa acusa uma peça defeituosa com 90% de probabilidade.

Calcule a probabilidade de que:

- a Uma peça defeituosa passe pelo controle de qualidade.
- b Ao adquirir uma peça produzida por esta empresa, ela seja defeituosa.

## Resposta

Probabilidade de que a peça defeituosa passe pelo controle de qualidade.

$$P[(E_1|D) \cap (E_2|D)] = 0.20 \cdot 0.10 = 0.02$$

Probabilidade de que seja defeituosa a peça adquirida desta empresa:

$$P(D) = 4\% \text{ de } 2\% = 0.04 \cdot 0.02 = 0.00008 \text{ ou } 0.08\%$$