Asignación de costes en autopistas con usuarios agrupados

Marcos Gómez Rodríguez[1], Laura Davila Pena[2], Balbina Casas Méndez[3]

[1]Universidade da Coruña, [2]University of Kent, [3]Universidade de Santiago de Compostela

Resumen

Se analiza cómo asignar los costes fijos de una autopista entre sus usuarios a través de peajes, considerando que diferentes clases de vehículos utilizan el servicio. Para ello, se utilizan juegos de autopistas generalizados con uniones a priori que representan grupos como viajeros frecuentes o transportistas con un mayor poder de negociación, obteniendo así reducciones en sus tarifas. En particular, se demuestran resultados relacionados con el valor de Owen y el valor de Tijs coalicional, y se introduce un nuevo valor, el valor de Shapley-Tijs. Finalmente, se aplica la metodología introducida a un caso real con datos de tráfico de la autopista AP-9 en España.

Motivación

En Kuipers et al. (2013) se propone un reparto de costes fijos en autopistas utilizando juegos cooperativos, pero suponiendo que todos los usuarios son vehículos ligeros. El objetivo de este trabajo es extender el modelo al resto de clases, pesados tipo 1 y tipo 2, e incluir en él uniones a priori, propuestas en Owen (1977), para considerar grupos de usuarios que puedan negociar juntos para obtener mejores condiciones.

El modelo

Para incorporar a los vehículos pesados se divide cada tramo de la autopista en 3 secciones, de forma que los ligeros (Lg) usarán solo una, los pesados 1 (P1) usarán dos y los pesados 2 (P2) usarán todas ellas, idea similar a la utilizada para tipos de trenes en Fragnelli et al. (2000). En la Figura 1 se ejemplifica con un esquema. Debido a que las secciones ya no son consecutivas, es necesario utilizar la versión generalizada del juego de la autopista.

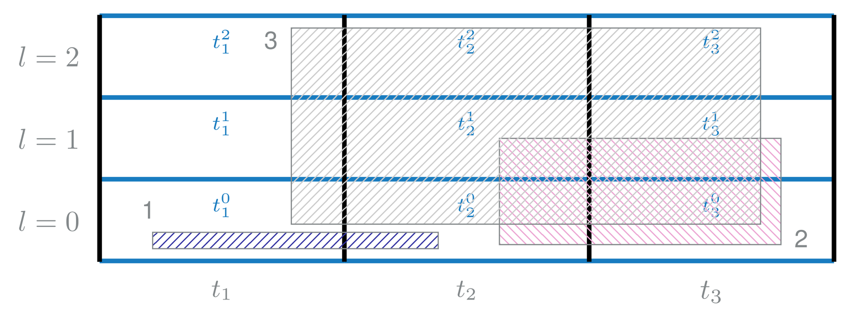

Figura 1: Esquema de las secciones utilizadas por un vehículo ligero (en azul), pesado 1 (en rojo) y pesado 2 (en gris).

Un juego de la autopista generalizado $\Gamma = (N, K, C, T)$ consta de N, un conjunto de usuarios, K un conjunto de secciones, C una aplicación con los costes de cada sección, y T la aplicación que asigna cada usuario con las secciones que usa. Además, se denota por K^e el conjunto de secciones de uso exclusivo (por un solo usuario) y $K^s = K \setminus K^e$ el conjunto de secciones de uso compartido. Se define $T^s(i) = T(i) \cap K^s$ y para $S \subset N$, $T(S) = \cup_{i\in S} T(i)$. (Γ, P) será el problema de la autopista generalizado con uniones a priori con el que se trabajará, siendo $P = \{P_1, \ldots, P_m\}$ una partición de N .

Resultados principales

Se obtienen expresiones sencillas para el valor de Owen, valor de Tijs coalicional y valor de Shapley-Tijs para un problema de la autopista, (Γ, P), generalizado con uniones a priori, y con juego asociado (N, c, P).

Ψ Valor de Owen

$$\Psi_i(N,\ c,\ P) = \sum_{t\in T(i)} \frac{C(t)}{|\mathscr{A}_t| \cdot |N_t^a|}, \quad \forall i \in P_a \in P,$$

siendo $\mathscr{A}_t := \{a \in M \ : \ t \in T(P_a)\}$, y $N_t^a := \{i \in P_a \ : \ t \in T(i)\}$.

- En el valor de Owen del juego del aeropuerto la alianza entre uniones nunca es perjudicial y es beneficiosa si y solo si la alianza no contiene a todas las uniones (Vázquez-Brage et al., 1997).
- Se demuestra para el caso de la autopista generalizado que la alianza entre uniones nunca es perjudicial, y es beneficiosa si y solo si la alianza no contiene a todas las uniones y existe una sección usada por al menos dos uniones de la alianza y por al menos otra unión que no esté en la alianza.

$\mathcal{T}$ Valor de Tijs coalicional

Para cada $a \in M$, y cada $i \in P_a$, se tiene que:

1. Si $T^s(P_a) = \emptyset$, entonces,
$$\mathcal{T}_i(N, c, P) = c^e(i).$$
2. Si $T^s(P_a) \neq \emptyset$, entonces,
$$\mathcal{T}_i(N, c, P) = c^e(i) + (\mathcal{T}_a(N, c, P) - c^e(a)) \cdot \frac{c^s(i)}{\sum_{j\in P_a} c^s(j)},$$

siendo $\mathcal{T}_a$ como sigue

$$\mathcal{T}_a(N, c, P) = \begin{cases} c_P^e(a) & \text{si } K_P^s = \emptyset \\ c_P^e(a) + c_P^s(M) \cdot \frac{c_P^s(a)}{\sum_{b\in M} c_P^s(b)} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Las alianzas entre uniones pueden ser perjudiciales.

Λ Valor de Shapley-Tijs

Para cada $a \in M$ y cada $i \in P_a$, se tiene que:

1. Si $T^s(P_a) = \emptyset$, entonces,
$$\Lambda_i(N, c, P) = c^e(i).$$
2. Si $T^s(P_a) \neq \emptyset$, entonces,
$$\Lambda_i(N, c, P) = c^e(i) + \left(\sum_{t\in T(P_a)} \frac{C(t)}{|\mathscr{A}_t|} - c^e(a) \right) \cdot \frac{c^s(i)}{\sum_{j\in P_a} c^s(j)}.$$

- Alianzas entre uniones con mismo comportamiento que en el caso del valor de Owen.

Caracterizaciones

- **Optimalidad de Pareto** (OP): la suma de los costes asignados iguala al total.
- **Trato equitativo de agentes en las uniones** (TEA): si dos agentes de una misma unión usan las mismas secciones, se les asigna el mismo coste.
- **Trato equitativo de uniones** (TEU): si dos uniones usan las mismas secciones se les asigna el mismo coste .
- **Independencia individual de cambios externos** (IICE): el coste asignado a agentes no se ve afectado por cambios en secciones que no utilizan.
- **Independencia coalicional de cambios externos** (ICCE): el coste asignado a uniones no se ve afectado por cambios en secciones que no utilizan.
- **Proporcionalidad en secciones compartidas entre agentes** (PSCA): si no hay secciones usadas por un solo agente, en cada unión se reparten los costes de manera proporcional al requerido por cada usuario.
- **Proporcionalidad en secciones compartidas entre uniones** (PSCU): si no hay secciones usadas por una sola unión, se reparten los costes de manera proporcional al requerido por cada una de ellas.
- **Covarianza bajo prolongaciones exclusivas en agentes** (CPEA): al añadir una sección usada por un solo agente, su coste asignado se ve incrementado por el coste de dicha sección.
- **Covarianza bajo prolongaciones exclusivas en uniones** (CPEU): al añadir una sección usada por una sola unión, su coste asignado se ve incrementado por el coste de dicha sección.

Ψ	$\mathcal{T}$	Λ
(**OP**)	(**OP**)	(**OP**)
(**TEA**)	(TEA)	(TEA)
(**TEU**)	(TEU)	(**TEU**)
(**IICE**)		
(ICCE)		(**ICCE**)
	(**PSCA**)	(**PSCA**)
	(**PSCU**)	
(CPEA)	(**CPEA**)	(**CPEA**)
(CPEU)	(**CPEU**)	(CPEU)

Tabla 1: Propiedades de cada valor, en negrita las que lo caracterizan.

En el Cuadro 1 se muestran las propiedades de cada valor y cómo caracterizarlos. El valor de Shapley, Φ, divide costes de tramos entre los agentees que los usan, mientras que el valor de Tijs, τ, es más equilibrado. La motivación detrás del valor de Shapley-Tijs es que entre miembros de una unión, que están más relacionados, el reparto sea más equitativo que entre uniones.

Aplicación a caso real

Se han tomado datos públicos de uso medio diario de la AP-9. Se consideran los tramos de la autopista mostrados en la Figura 2 y una unión a priori entre los vehículos pesados 2. En los Cuadros 2 y 3 se muestran los resultados obtenidos.

Figura 2: Esquema del tramo de la AP9 usado.

- El valor de Tijs es más equitativo, favoreciendo a secciones menos utilizadas.
- La alianza de vehículos pesados 2 repercute en un descuento considerable en sus tarifas.
- Si se considerase una alianza entre viajes de un mismo usuario, este solo pagaría un viaje. Esto es debido a que se consideran solo costes fijos.
- Aunque los valores cumplan (OP), la propiedad puede perderse al redondear a dos decimales.

	Total usuarios			Φ			τ		
	Lg	P1	P2	Lg	P1	P2	Lg	P1	P2
AC-Ma	22661	1032	1032	1.90	3.30	4.05	1.68	1.79	1.82
Ma-Or	16602	718	718	3.05	5.40	6.60	1.97	2.09	2.12
Or-Si	18082	808	808	1.80	2.95	3.80	1.27	1.34	1.36
Si-Sa	16127	745	745	1.75	3.10	3.80	1.11	1.18	1.20
Sa-Pa	22075	1170	1170	2.40	4.00	4.95	2.10	2.24	2.28
Pa-Cr	18218	1027	1027	1.05	1.85	2.65	0.76	0.82	0.85
Cr-Cl	20702	1206	1206	0.75	1.15	1.35	0.62	0.66	0.66
Cl-Cu	19426	1095	1095	1.25	2.20	2.75	0.97	1.04	1.07
Cu-Po	21948	1244	1244	1.35	2.45	3.05	1.18	1.28	1.31
Po-Vl	29796	1318	1318	1.10	1.95	2.40	1.28	1.36	1.38
Vl-Mo	28279	1229	1229	1.70	1.85	3.50	1.87	1.89	1.96
Mo-Vg	61032	2277	2277	1.10	2.00	2.80	2.59	2.73	2.80

Tabla 2: Usuarios totales, valor de Shapley y valor de Tijs, sin uniones.

	Ψ			$\mathcal{T}$			Λ		
	Lg	P1	P2	Lg	P1	P2	Lg	P1	P2
AC-Ma	1.98	4.78	3.00	1.73	1.83	3.34	1.98	4.78	3.34
Ma-Or	3.18	7.87	4.81	2.02	2.15	3.90	3.18	7.87	3.90
Or-Si	1.88	4.17	3.41	1.30	1.37	2.52	1.88	4.17	2.52
Si-Sa	1.83	4.52	2.81	1.13	1.21	2.20	1.83	4.52	2.20
Sa-Pa	2.52	5.72	3.80	2.15	2.29	4.21	2.52	5.72	4.21
Pa-Cr	1.11	2.70	3.20	0.78	0.84	1.65	1.11	2.70	1.65
Cr-Cl	0.79	1.59	0.80	0.64	0.67	1.21	0.79	1.59	1.21
Cl-Cu	1.32	3.21	2.20	0.99	1.07	1.99	1.32	3.21	1.99
Cu-Po	1.42	3.62	2.40	1.21	1.31	2.44	1.42	3.62	2.44
Po-Vl	1.15	2.85	1.80	1.31	1.39	2.54	1.15	2.85	2.54
Vl-Mo	1.77	2.07	6.60	1.92	1.93	3.83	1.77	2.07	3.83
Mo-Vg	1.14	2.94	3.20	2.65	2.80	5.26	1.14	2.94	5.26

Tabla 3: Valores coalicionales con alianza de pesados 2.

Referencias

Fragnelli, V., García-Jurado, I., Norde, H., Patrone, F., & Tijs, S. (2000). How to share railways infrastructure costs? En F. Patrone, I. García-Jurado & S. Tijs (Eds.), *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory* (pp. 91-101). Springer.
Kuipers, J., Mosquera, M. A., & Zarzuelo, J. M. (2013). Sharing costs in highways: A game theoretic approach. *European Journal of Operational Research*, *228*(1), 158-168.
Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. En R. Henn & O. Moeschlin (Eds.), *Mathematical Economics and Game Theory* (pp. 76-88). Springer.
Vázquez-Brage, M., van den Nouweland, A., & García-Jurado, I. (1997). Owen's coalitional value and aircraft landing fees. *Mathematical Social Sciences*, *34*(3), 273-286.