

ámetrosB.141Parámetro para el ciclo PIClstlisting.185

---

# Análisis de oscilaciones e inestabilidades de un plasma frío por medio del método Particle-In-Cell

---

Marcos Gutierrez



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades



Trabajo de graduación en modalidad de tesis presentado por  
Marcos Gutierrez  
Para optar al grado académico de licenciado en física

Guatemala, enero del 2019

Vo.Bo.:

(f) \_\_\_\_\_  
MSc. Diego Porres

Tribunal Examinador:

(f) \_\_\_\_\_  
MSc. Diego Porres

(f) \_\_\_\_\_  
MSc. Carlos Juárez

(f) \_\_\_\_\_  
Ing. Luis Pedro Gonzáles

Fecha de aprobación: Guatemala, 5 de diciembre de 2018.

---

## Agradecimientos

---

Es necesario agradecer a mis padres: Marco y Olga, porque han sido los que me han brindado las herramientas necesarias para los pequeños pasos de la vida. Sin embargo, yo creo que la dedicación de mi tesis (y la dedicatoria que mis padres también deben dar) va para mis abuelos: Marco, Marta, Vicenta y Jerónimo. No solo por haber hecho de mis padres lo que son, también por haber dado ese salto de la vida que nos ha permitido estudiar a todos, por haber hecho la verdadera diferencia. Para finalizar, se la dedico a mis hermanos menores: Marcelo, Esteban y Camila, que somos los que tenemos el peso de los nombres de nuestros abuelos.

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Justificación</b>	<b>3</b>
<b>3. Objetivos</b>	<b>4</b>
3.1. Objetivo General . . . . .	4
3.2. Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>4. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
4.1. El concepto de temperatura . . . . .	5
4.2. Parámetros fundamentales . . . . .	6
4.3. Frecuencia del plasma . . . . .	6
4.4. Escudo de Debye . . . . .	7
4.5. Parámetros del plasma . . . . .	8
4.6. Colisiones . . . . .	8
4.7. Plasmas magnetizados . . . . .	9
4.8. Movimiento en plasmas uniformes . . . . .	10
4.9. Plasma frío . . . . .	11
4.10. Inestabilidad Two-Stream . . . . .	12
4.11. Inestabilidad Beam-plasma . . . . .	14
4.12. Amortiguamiento de Landau . . . . .	15
4.13. Aspectos importantes de la simulación . . . . .	18
4.13.1. Método Particle-in-Cell . . . . .	18
4.13.2. Esquema Leap-frog . . . . .	19
4.13.3. Pesaje de grado 1: Cloud-in-Cell (CIC) . . . . .	20
4.13.4. Diferencia entre el laboratorio y una simulación . . . . .	21
<b>5. Metodología</b>	<b>23</b>
5.1. Especificaciones . . . . .	23
5.2. Módulos . . . . .	23
5.2.1. Parametros.py . . . . .	23

5.2.2. Funciones.py . . . . .	24
5.3. Normalización . . . . .	25
5.4. Drift de energía . . . . .	25
5.5. Ciclo computacional . . . . .	25
5.5.1. Condiciones iniciales . . . . .	25
5.5.2. Calculo de la densidad de carga y el campo eléctrico . . . . .	26
5.5.3. Actualización de la velocidad y la posición . . . . .	26
<b>6. Discusión y resultados</b>	<b>27</b>
6.1. Plasma frío . . . . .	27
6.2. Inestabilidad Two-stream . . . . .	29
6.3. Inestabilidad Beam-plasma . . . . .	31
6.4. Amortiguamiento de Landau . . . . .	32
<b>7. Antecedentes</b>	<b>36</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>
<b>Anexos</b>	<b>40</b>
<b>A. Valor principal de Cauchy</b>	<b>40</b>
<b>B. Módulos Parametros.py y Funciones.py</b>	<b>41</b>

---

## Lista de Figuras

---

4.1. Distribuciones de iones y electrones ignorando el espacio de las mallas [1] . . . . .	11
4.2. Se muestra a $F(x,y)$ en la inestabilidad Two-stream cuando el plasma es estable [4] .	14
4.3. Se muestra a $F(x,y)$ en la inestabilidad Two-stream cuando el plasma es inestable [4]	14
4.4. Integrales de contorno para el problema de Landau: (a) para $Im(\omega) > 0$ y (b) para $Im(\omega) < 0$ [4]. . . . .	16
4.5. Integral de contorno para valores pequeños de $Im(\omega)$ [4]. . . . .	17
4.6. Esquema del método PIC . . . . .	19
4.7. Representación del esquema Leap-Frog. La línea roja representa la posición y los datos del campo eléctrico, mientras que la línea azul representa la velocidad. Este diagrama se encuentra en [11] . . . . .	20
4.8. Esquema donde se compara gráficamente el método NGP con el CIC. Gráfico de Daniel Martin [11] . . . . .	21
4.9. Representación visual de cómo se vería un experimento de nos haces en el laboratorio, en una simulación y sus distribuciones de velocidad. . . . .	22
6.1. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de un plasma frío en el momento inicial . . . . .	27
6.2. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido una unidad de tiempo. . . . .	28
6.3. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido 1.57 unidades de tiempo. . . . .	28
6.4. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido tres unidades de tiempo. . . . .	28
6.5. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido quince unidades de tiempo. . . . .	28
6.6. Figura de las energías potencial, cinética y total. Además, se gráfica el arrastre energético. . . . .	29
6.7. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de una inestabilidad Two-stream con amplitud de perturbación 0.0 en el momento inicial. . . . .	29
6.9. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de una inestabilidad Two-stream con amplitud de perturbación 0.0 después de 18 unidades de tiempo. . . . .	30
6.10. Estados iniciales de inestabilidades Two-stream con amplitudes de perturbación 0.0, 0.01 y 0.1, respectivamente. . . . .	30
6.8. Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de una inestabilidad Two-stream con amplitud de perturbación 0.0 después de 9.0 unidades de tiempo . . . . .	30



6.11. Estado después de 9 unidades de tiempo para de inestabilidades Two-stream con amplitudes de perturbación 0.0, 0.01 y 0.1, respectivamente. . . . .	31
6.12. Estado después de 18 unidades de tiempo para de inestabilidades Two-stream con amplitudes de perturbación 0.0, 0.01 y 0.1, respectivamente. . . . .	31
6.13. Estado inicial de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0. .	31
6.14. Estado después de 0.5 unidades de tiempo de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0. . . . .	32
6.15. Estado después de 10 unidades de tiempo de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0. . . . .	32
6.16. Estado después de 18 unidades de tiempo de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0. . . . .	32
6.17. Evolución temporal de la energía potencial. Después del máximo de energía es posible ver el amortiguamiento predicho por Landau. . . . .	33
6.18. En estos diagramas se puede ver le evolución temporal del diagrama de fase a partir de el máximo de energía potencial . . . . .	34
6.19. Evolución temporal de las energías potencial y cinética. Se puede observar como, conforme la energía potencial disminuye, la cinética aumenta. . . . .	35

---

## Resumen

---

En este trabajo se construyó el método Particle-in-cell para simulación de un plasma frío electrostático. Esto se logró con el lenguaje Python en su versión 3.8.2. Se obtuvo resultados satisfactorios a la hora de estudiar los cuatro fenómenos propuestos: oscilaciones de plasma frío, las inestabilidades Two-stream y Beam-plasma y el amortiguamiento de Landau. El programa construido mostró ser congruente con los resultados obtenidos por otros investigadores. Además, en este trabajo se logró obtener las gráficas de las energías, potencial y cinética, del amortiguamiento de Landau, algo que no se encontró en la bibliografía consultada, con la excepción de la gráfica de energía potencial encontrada en el libro de Birdsall y Langdon[1] que no se muestra tan amigable para el lector.

El plasma es la mayor parte de la materia observable. Fenómenos complejos como las estrellas, la formación de galaxias, las tormentas solares y el comportamiento de la ionosfera se comprenden y modelan a través de la física del plasma[5].

Debido a la relevancia de la física del plasma en distintas aplicaciones de la física, este tipo de trabajos adquieren su valor. Intentando apoyarse sobre todo este respaldo, se trabajó esta tesis pensando en cómo la física computacional, tan avanzada y fundamental en esta era, puede aportar a un campo tan versátil. Durante las lecturas para entender la física detrás y la construcción matemática de los algoritmos que permiten, hasta cierto punto, entender el comportamiento del plasma se puede notar que los intentos de simular plasma por computadora han estado sucediendo desde que la teoría fue tomando importancia. Se tiene, por ejemplo, el libro de Birdsall y Langdon[1]. En este libro se explora todas las consideraciones computacionales para hacer este tipo de simulaciones (consideraciones aún vigentes). Sin embargo, este libro, cuando fue escrito, se programó en el lenguaje Fortran y sus simulaciones no trabajan con más que unos pocos miles de partículas. Hay otros trabajos como el de Martin[11] o Gibbon[12]. El primero, explora las oscilaciones de plasma frío y la inestabilidad Two-stream. Esto se programó en C, pero lo hizo con pocas partículas y no exploró uno de los resultados más importantes: el amortiguamiento de Landau. El segundo se programó en Python y es más reciente que los otros dos, pero solo abordó las oscilaciones de plasma frío e incluyó un pequeño factor de ajuste térmico. En cambio, en el aspecto teórico de los temas tratados hay una amplia y completa bibliografía. Por lo tanto, pareció pertinente efectuar trabajos computacionales de estos fenómenos del plasma.

En cuanto a la simulación hay dos formas de abordarla: a través de simulación de partículas o trabajando el plasma como un fluido cargado. En este trabajo se utilizó el método Particle-In-Cell, que es un método que trabaja con partículas. Se escogió este método por ser el más directo y por el ser el que permite observar comportamientos e interacciones entre partículas que son omitidos por los métodos Magnetohidrodinámicos, que son los que conciben al plasma como un fluido. Ambos caminos son complementarios, pero tienen herramientas y teorías distintas.

En este trabajo se logró construir un código en Python 3.8.2, haciéndolo versátil para explorar la inestabilidad Two-stream y Beam-plasma y el amortiguamiento de Landau bajo distintas condiciones. Se logró comprobar las congruencias de los resultados obtenidos por los distintos autores en la bibliografía citada. Además, el trabajo en sí es un texto funcional para brindar una teoría básica del plasma y las herramientas para hacer simulaciones. Uno de los análisis hechos en este trabajo es el de lograr observar el comportamiento de las energías, tanto cinética como del campo eléctrico de los fenómenos en cuestión análisis que o no se hizo en la bibliografía citada o que no presentaba resultados tan notorios como los aquí presentados. Una aclaración que es importante hacer, por el

bien de la congruencia con la teoría expuesta, es que las distribuciones utilizadas para las condiciones iniciales de las velocidades son Maxwellianas. Esta distribución se expondrá a lo largo del marco teórico. Esto se hizo porque es una de las distribuciones que cumplen con las condiciones expuestas en la sección de la teoría del amortiguamiento de Landau<sup>4.90</sup>. A pesar de que esas distribuciones podrían ser otras, se hizo esto para que la simulación se mantuviera acorde a la teoría expuesta.

## CAPÍTULO 2

---

### Justificación

---

Los estudios de plasma frío, a pesar de no ser un evento posible como tal, son algo que permite simular con mucha mayor facilidad estudiar el comportamiento de plasmas en equilibrio térmico[1] y de plasmas sin colisiones[6]. Además, el método Particle-in-cell tiene una gran gama de aplicaciones en la física del plasma: esto implica evolución estelar[2], estudios de la ionosfera[5], estado sólido[6], mecánica de fluidos, etc. Por lo tanto, entender las simulaciones de plasma frío por el método Particle-in-cell brinda muchas herramientas y nuevas líneas de investigación. Sentar las bases en un trabajo como este, puede construir las bases para todo un campo en el estudio de fenómenos físicos por computadora, siendo este método, para Guatemala, mucho más viable que los métodos experimentales.

### 3.1. Objetivo General

Construir un código funcional que permita estudiar distintos fenómenos de un plasma frío y así poder iniciar una línea de investigación de la física del plasma a través de métodos computacionales.

### 3.2. Objetivos Específicos

- Programar el código en el lenguaje Python, debido a su amplitud en la comunidad científica y versatilidad.
- Analizar los fenómenos principales del plasma desde todas las facetas presentadas por la bibliografía y, a la vez, explorar nuevas formas de análisis.
- Implementar el método de simulación por partículas Particle-in-cell e implementar métodos de perturbación del sistema para explorar sistemas inestables.

### 4.1. El concepto de temperatura

Antes que nada, es necesario retomar la importancia de la noción de temperatura. Es cierto que en este trabajo se realizaron simulaciones de plasma frío, siendo este un método de simplificación de los problemas del plasma. Sin embargo, las simulaciones de plasma frío son funcionales porque sus condiciones se asemejan mucho al de un plasma en equilibrio térmico. Repasar las nociones de temperatura nos permite interpretar mejor los resultados. Además, en las inestabilidades estudiadas en este trabajo, un plasma frío pasa a ser un plasma caliente debido a las interacciones entre las partículas. Esto se explicará en la sección de Discusión y resultados. El concepto de temperatura se explicará para el caso unidimensional, ya que es el caso en el que se trabajaron las simulaciones. La ampliación a tres dimensiones es sencilla si se parte del caso unidimensional. Esta puede ser consultada en los libros de Bellan[2] y Chen[4].

Empecemos estudiando el fenómeno como a un gas. Un gas en equilibrio térmico tiene partículas con distintas velocidades. La distribución más probable de estas partículas es una distribución Maxwelliana:

$$f(u) = A \exp\left(-\frac{1}{2}mu^2/KT\right) \quad (4.1)$$

donde  $u$  es la velocidad y  $K$  es la constante de Boltzmann:

$$K = 1.38 \times 10^{-23} J/K^\circ \quad (4.2)$$

el número de partículas por  $m^3$  está dado por:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \quad (4.3)$$

La constante de normalización  $A$  para la distribución de Maxwelliana puede ser derivada de la ecuación(4.3) igualándola a 1. El resultado es:

$$A = \left(n \frac{m}{2\pi KT}\right)^{1/2} \quad (4.4)$$

El ancho de la distribución está caracterizado por  $T$ , algo que llamamos temperatura. Para entender qué es la temperatura, obtenemos la energía cinética promedio:

$$E_{prom} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mu^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du} \quad (4.5)$$

Definiendo la velocidad térmica como  $v_t = (2KT/m)^{\frac{1}{2}}$  y  $y = u/v_t$ . Sustituyendo estas dos expresiones en (4.1) tenemos:

$$f(u) = A \exp(-u^2/v_t^2) \quad (4.6)$$

Entonces, la ecuación (4.5) se vuelve:

$$E_{prom} = \frac{\frac{1}{2} A v_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(y^2) * y^2 dy}{A v_t \int_{-\infty}^{\infty} \exp(y^2) dy} \quad (4.7)$$

Resolviendo el numerador de (4.7) por partes, se elimina un término con el denominador. Luego, resolviendo, se obtiene que:

$$E_{prom} = \frac{\frac{1}{2} m A v_t^3 \frac{1}{2}}{A v_t} = \frac{1}{4} m v_t^2 = \frac{1}{2} K T \quad (4.8)$$

Como se puede ver, en este resultado, la energía y la temperatura tienen una relación muy estrecha. Por eso, en ciertas ramas de la física estas cantidades se dan en una cantidad denominada electrón-volt (eV).

## 4.2. Parámetros fundamentales

Se le llama **plasma ideal** a aquel que tiene el mismo número de electrones e iones cuyas masas son, respectivamente,  $m_e$  y  $m_i$ . Los electrones tienen carga  $-e$  y los iones  $+e$ , donde  $e$  es la carga fundamental  $1.6 \times 10^{-19}$  C.

Se denota a la temperatura cinética  $T_s$  como:

$$T_s = \frac{1}{3} m_s \langle V_s \rangle^2 \quad (4.9)$$

En esta notación, los subíndices  $s$  se refieren a las especies del plasma. En el caso de un plasma ideal una especie son los electrones y otra son los iones. Entonces,  $T_s$  se refiere a la energía cinética de una determinada especie.

La propiedad de cuasi-neutralidad demanda:

$$n_i \simeq n_e \equiv n \quad (4.10)$$

Si se asume que los iones y electrones tiene la misma temperatura (no siempre es el caso), entonces se puede expresar la velocidad térmica:

$$V t_s = \left( \frac{2T}{m_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

Operando la ecuación 2 podemos encontrar una relación entre las velocidades térmicas de las distintas especies:

$$V t_i \sim \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}} V t_e$$

## 4.3. Frecuencia del plasma

Esta cantidad es la escala temporal más fundamental del plasma y se define como:

$$\omega_p = \left( \frac{n e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

Esta ecuación es para plasmas «fríos» ya que se omite el factor térmico. Obviamente, hay una frecuencia diferente para cada especie.



Si se desplaza una partícula de su estado cuasineutral por una distancia  $\delta x$  se genera una densidad superficial de carga de la forma:  $\sigma = en\delta x$ . Esta densidad superficial de carga variará dependiendo de la carga de la especie. En este caso, habrá una con signo positivo y otra con signo negativo en direcciones opuestas.

Aplicando la segunda Ley de Newton a lo largo de  $\delta x$  se obtiene lo siguiente:

$$m \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = eE_x$$

donde:

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{en\delta x}{\epsilon_0}$$

Sustituyendo y resolviendo se obtiene:  $\delta x = (\delta x_0) \cos(\pi t)$ . Esta función describe las oscilaciones del plasma. Este valor permite definir qué oscilaciones son o no observables. Si las mediciones del observador se hacen con un periodo  $T$  mayor al periodo de la oscilación del plasma,  $\tau = 2\pi/\Pi$ , entonces se pueden hacer observaciones. En caso contrario el fenómeno ya no es observable.

De la misma manera, una medición a una distancia  $L$  que sea menor a una distancia típica que recorre una partícula durante un periodo de plasma no será detectada. Esta distancia es  $Vt_s\tau$  y se llama **distancia de Debye**, en honor a Peter Debye. Esta distancia se define como:

$$\lambda_D = \frac{1}{\omega_p} \left( \frac{\tau}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\epsilon_0 \tau}{ne^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

Estos resultados nos llevan a un resultado importante: un sistema puede ser considerado plasma si cumple con las siguientes relaciones:

$$\frac{\lambda_D}{L} \ll 1, \quad \frac{\tau}{T} \ll 1 \quad (4.14)$$

#### 4.4. Escudo de Debye

Una forma bastante ilustrativa de ver el escudo de Debye es pensar en un dieléctrico: la polarización del plasma y la distribución de las partículas cargadas evitan que un campo eléctrico externo penetre el sistema.

Considérese un plasma lo más cercano al equilibrio térmico, lo suficiente como para que sus dos especies tengan la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$n_s = n_0 \exp \left[ \frac{-e_s \phi}{T} \right] \quad (4.15)$$

Donde  $\phi$  es el potencial,  $n$  es electrostático,  $n_0$  es la cantidad inicial de una especie  $s$  y  $T$  es la temperatura de equilibrio.

En la ecuación se puede notar que, para satisfacer la Propiedad de cuasi-neutralidad, se necesita que el potencial electrostático sea 0.

Es necesario entender que pasaría si ocurriese una perturbación en el potencial electrostático. Supónganse que el potencial  $\phi(r)$  es perturbado de la forma  $\delta\phi(r)$ , como consecuencia de una pequeña y localizada densidad de carga  $\delta\rho_{ext}$ . La densidad de carga total es:

$$\delta\rho = \delta\rho_{ext} + e(\delta n_i - \delta n_e) \approx \delta\rho_{ext} - 2e^2 n_0 \frac{\delta\phi}{T} \quad (4.16)$$

La ecuación de Poisson para la perturbación del potencial es:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\delta\rho}{\epsilon_0} = - \left( \frac{\delta\rho_{ext} - 2e^2 n_0 \frac{\delta\phi}{T}}{\epsilon_0} \right) \quad (4.17)$$

Operando, simplificando y sustituyendo la (4.13) de la página 7 se obtiene la ecuación final:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{2}{\lambda_D^2} \right] \delta\phi = \frac{\delta\rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad (4.18)$$

Si la perturbación de la densidad se reduce a solo un punto, entonces:

$$\delta\rho_{ext} = q\delta(r) \quad \delta\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{Exp} \left[ \frac{-\sqrt{2}r}{\lambda_D} \right] \quad (4.19)$$

## 4.5. Parámetros del plasma

Se define la distancia promedio entre partículas:

$$r_d = n^{\frac{1}{3}} \quad (4.20)$$

también se define la distancia media de aproximación:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 T} \quad (4.21)$$

Balanceando la energía térmica con el potencial electrostático repulsivo de un par binario se tiene:

$$\frac{1}{2}mV_t^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_c} \quad (4.22)$$

Es interesante estudiar la proporción  $r_d/r_c$ . Si esta proporción es pequeña ( $r_d/r_c \ll 1$ ) significa que las partículas cargadas son dominadas por una influencia electrostática. Esto implica que sus energías cinéticas son menores en comparación respecto a sus interacciones entre potenciales. Este tipo de plasmas se llaman **fuertemente acoplados**.

Si se da el caso en que la proporción sea grande ( $r_d/r_c \gg 1$ ), significa que las interacciones electrostáticas son raras y muy ocasionales. Estos plasmas son llamados **débilmente acoplados**.

Todo lo anterior permite definir al Parámetro del plasma:

$$\Lambda = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \quad (4.23)$$

también llamado como esfera de Debye. Operando con la distancia promedio y con la distancia se máxima aproximación se obtiene:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{3r_c} = \frac{1}{3\sqrt{4\pi}} \left( \frac{r_d}{r_c} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi\epsilon_0^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}}{3e^3 n^{\frac{1}{2}}} \quad (4.24)$$

Entonces: cuando  $\Lambda \ll 1$  se tiene un plasma fuertemente acoplado y cuando  $\Lambda \gg 1$  se tiene un plasma débilmente acoplado.

## 4.6. Colisiones

En la sección anterior notamos que se pueden definir colisiones binarias solo en plasmas débilmente acoplados. Claro, bajo ciertos efectos colectivos se pueden observar colisiones binarias en plasmas fuertemente acoplados, pero estos casos se alejan de los escenarios más generales.

Sin embargo, para  $\Lambda$  grandes sí se puede hablar de colisiones binarias. Esto nos lleva a definir las frecuencias de colisión:

$$\nu_s \simeq \sum_{s'} \nu_{ss'} \quad (4.25)$$

La ecuación (4.25) cuenta la cantidad de colisiones que tiene la especie  $s$  con las otras especies  $s'$ .

La relativamente pequeña masa del electrón implica que, por unidad de carga iónica y la temperatura de las especies:

$$\nu_e \approx \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \nu_i \quad (4.26)$$

Este resultado se verá más claro al final de esta sección.

La frecuencia  $\nu$  mide las trayectorias por las que pasa una partícula bajo un cambio significativo del ángulo bajo las interacciones de Coulomb con otras partículas. Esta  $\nu$  es el inverso del tiempo necesario para que ocurran suficientes colisiones para que ocurran suficientes colisiones y la partículas se desvíe  $90^\circ$ . Por eso, a veces se llama a  $\nu$  como radio de Scattering de  $90^\circ$ .

Se define la media de la trayectoria libre como:

$$\lambda_{mpf} = \frac{V_t}{\nu} \quad (4.27)$$

Esta mide la distancia típica que una partícula recorre entre colisiones. Un plasma dominado por colisiones es aquel que cumple con  $\lambda_{mpf} \ll L$  donde  $L$  está a escalas del observador. Si  $\lambda_{mpf} \gg L$  entonces es un plasma sin colisiones.

La magnitud típica de la frecuencia de las colisiones es:

$$\nu \sim \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \Pi \quad (4.28)$$

Notése que si  $\nu \ll \Pi$  es un plasma débilmente acoplado. Esto implica que las colisiones no interfieren con las oscilaciones del plasma. Por otro lado, cuando  $\nu \gg \Pi$  significa que es un plasma fuertemente acoplado, dominado por interacciones de Coulomb y no tiene cabida en las dinámicas convencionales del plasma.

Uniendo las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$\frac{\lambda_{mpf}}{\lambda_D} \sim \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \quad (4.29)$$

donde si  $\lambda_{mpf} \gg \lambda_D$  se tiene un plasma débilmente acoplado. Sustituyendo se obtiene que:

$$\nu = \frac{3e^4 \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0 m^{\frac{1}{2}} T^{\frac{3}{2}}} \frac{n}{n} \quad (4.30)$$

## 4.7. Plasmas magnetizados

Un **plasma magnetizado** es aquel que tiene un campo magnético externo  $B$  lo suficientemente fuerte como para afectar alguna de las condiciones del sistema. Estos plasmas responden de manera extraña a fuerzas fuera paralelas a  $B$ . Un plasma magnetizado moviéndose a velocidad media  $V$  tiene un campo eléctrico  $E = -V \times B$  que no se ve afectado por el escudo de Debye.

Recordando la fuerza de Lorentz:

$$F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.31)$$

Sabemos que las partículas cargadas responden a la ecuación (4.31) girando en un plano perpendicular al campo magnético  $B$ . Estas partículas siguen la trayectoria de un radio de Larmor, también conocido como girorradio. La distancia de estas órbitas de Larmor (o giro-orbitas) son inversamente proporcionales a la magnitud del campo magnético.

El radio típico de Larmor es:

$$\rho = \frac{v_t}{\Omega} \quad (4.32)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia del ciclotrón:

$$\Omega = \frac{eB}{m} \quad (4.33)$$

Naturalmente, hay un distinto radio de Larmor para cada especie del plasma. Si las temperaturas son parecidas, la relación entre los radios de Larmor entre electrones y iones es proporcional:

$$\rho_e \sim \left(\frac{me}{mi}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_i \quad (4.34)$$

Un plasma se considera magnetizado si la escala  $L$  es mucho más grande que el radio de Larmor. En caso contrario, cuando  $\rho \gg L$ , las partículas cargadas tienen trayectorias rectas. Esto nos lleva a definir el Parámetro de magnetización:

$$\delta = \frac{\rho}{L} \quad (4.35)$$

Hay casos de interés cuando los electrones están magnetizados y los iones no. Pero, generalmente, se tratan los casos cuando ambas especies están magnetizadas. Entonces, la expresión general del parámetro de magnetización es la siguiente:

$$\delta_i = \frac{\rho_i}{L} \gg L \quad (4.36)$$

## 4.8. Movimiento en plasmas uniformes

Considérese el caso de una partícula moviéndose en un campo electromagnético espacial y temporalmente uniforme:

$$m \frac{dv}{dt} = e(E + v \times B) \quad (4.37)$$

Las componentes paralelas al campo magnético tienen la siguiente forma:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = eE_{\parallel} \quad \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{e}{m} E_{\parallel} \quad (4.38)$$

A continuación se expone el desarrollo para comprender las componentes perpendiculares a  $B$ . Como  $E$  y  $B$  son uniformes:

$$\begin{aligned} m \frac{d\langle v \rangle_t}{dt} &= 0 = e(E + v \times B) \Rightarrow -E = v \times B \\ &\Rightarrow E \times B = B \times (v \times B) \\ &= v(B \cdot B) - B(v \cdot B) \end{aligned}$$

Como  $v$  y  $B$  son perpendiculares, entonces  $(v \cdot B) = 0$ :

$$\Rightarrow E \times B = vB^2 \Rightarrow v_d = \frac{E \times B}{B^2}$$

Como la velocidad total es  $v = v_d + v_{osc}$  donde  $v_{osc}$  es la velocidad de oscilación. Para obtener esta expresión se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} m \frac{dv_{osc}}{dt} &= e(E + v_{osc} \times B + v_d \times B) \\ \Rightarrow m \frac{dv_{osc}}{dt} &= e(v_{osc} \times B) \Rightarrow m \frac{dv_{osc}}{dt} = ev_{osc} B \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la expresión de velocidad en planos uniformes:

$$\Rightarrow v_{osc} = \frac{E \times B}{B^2} + \rho \Omega [\sin(\Omega + \gamma_0) e_1 + \cos(\Omega + \gamma_0) e_2] \quad (4.39)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia del ciclotrón,  $\rho$  es el radio de Larmor,  $\gamma_0$  la girofase y donde  $e_1$  y  $e_2$  son vectores unitarios ortogonales a  $B$ .

De esta expresión, utilizando  $r(t) = R(t) + \rho(t)$  se puede obtener la posición de una partícula:

$$\rho[-\cos(\Omega t) e_1 + \sin(\Omega t) e_2] \quad (4.40)$$

$$R(t) = \left( v_{0\parallel} t + \frac{e}{m} E_{\parallel} \frac{t^2}{2} \right) b + v_d t \quad (4.41)$$

## 4.9. Plasma frío

Un plasma frío parece ser una contradicción, la mayoría de plasmas tienen una energía térmica que asciende a 1eV ( $\approx 10^4 K$ ) [1]. Pero, haciendo la simplificación  $v_{termica} \Rightarrow 0$  nos permite utilizar condiciones iniciales más simples y explorar la naturaleza del plasma de una manera más sencilla. Este tipo de análisis restringe nuestras pruebas a la condición  $k\lambda_D \ll 0.1$ .

Repasando algo expuesto en las secciones anteriores, sabemos que un plasma tiene un movimiento armónico simple alrededor de su punto de equilibrio-los  $x_0$ -. Esto se describe de la siguiente forma:

$$\delta x = x - x_0 \quad y \quad \delta \ddot{x} = -\omega_p^2 \delta x \quad (4.42)$$

La solución de este sistema es:

$$\delta x(t - t_0) = A(t_0) \cos \omega_p(t - t_0) + B(t_0) \sin \omega_p(t - t_0) \quad (4.43)$$

Este resultado es tan directo que generalmente no levanta muchas preguntas. Pero en el caso de esta tesis, que busca abordar aspectos de la simulación computacional, es necesario plantear algunas preguntas.

En primer lugar, no hay ningún problema con tener a los electrones y a los iones moviéndose, ya que estos se mueven a la misma frecuencia- $\omega^2 = \omega_p^2 = \omega_e^2 + \omega_i^2$ . Pero los iones con densidades y velocidades menores a las de los electrones por un factor de  $\frac{m_e}{m_i}$ . Si tratamos a los iones como estacionarios, entonces tenemos que  $\frac{m_i}{m_e} \Rightarrow \infty$  para oscilaciones de alta frecuencia [1].

Por el enfoque computacional de este trabajo, se debe decidir qué hacer con los iones. Supóngase que ignoramos el espacio y la distribución entre las mallas-como corresponde en el método en cuestión-y solo nos enfocamos en la distribución de iones y electrones en una dimensión; entonces tendríamos lo siguiente: Este sistema es neutro. Si desplazamos un electrones más de la mitad de el espacio

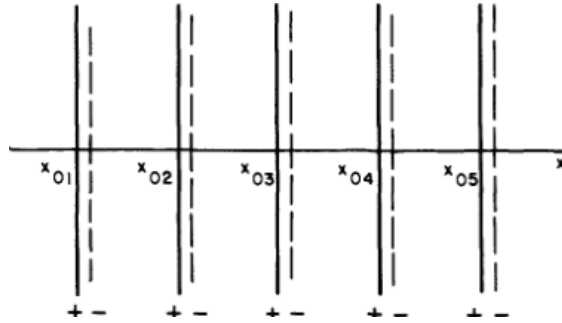


Figura 4.1: Distribuciones de iones y electrones ignorando el espacio de las mallas [1]

entre iones de la forma  $\delta x < \frac{1}{2}(x_{02} - x_{01})$ . Al hacer esto, el electrón se vería atraído por su iones correspondiente y este oscilaría alrededor del ion. Sin embargo, esta oscilación no sería de la forma de un movimiento armónico simple [1]. Este problema se soluciona con una distribución uniforme de los iones en algo llamado fondo de iones. Esto se logra a través del mallado, que es un proceso necesario en los métodos de simulación por partículas. En un sistema periódico, donde la densidad neta no es necesariamente cero en un intervalo, se puede recalibrar la densidad iónica para que esto se cumpla. Además, se puede colocar un ion por malla, por ejemplo, para ahorrarse un movimiento de los iones relativo a los electrones y hacer  $m_i \gg m_e (\omega_i \ll \omega_e)$ . Entonces se tiene  $\rho_j = \rho_{ion}$  donde el

subíndice  $j$  representa a las mallas.

Con esto claro, ya se procede a mapear cada uno de los electrones sobre la malla. Estos inician en su posición de equilibrio. Se buscará que la frecuencia de la perturbación tenga la siguiente forma:

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{q}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{L\epsilon_0 m}} \quad (4.44)$$

Donde  $L$  es la longitud total de una malla,  $m$  la masa y  $N$  el número de partículas. Entonces, la oscilación del electrón alrededor de su posición de equilibrio será de una forma sinusoidal:

$$x = x_0 + x_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x_0\right) \quad (4.45)$$

Donde  $x_0$  es la posición de equilibrio,  $x_1$  es la amplitud de la oscilación y  $n$  es un entero. La amplitud, generalmente es mucho más pequeña que la longitud de la malla, esto se debe a que, si esta es muy grande, el movimiento de las partículas puede traslaparse[11]. Estas oscilaciones tendrán un efecto en la densidad de carga-y consecuentemente en el campo eléctrico-que se comportarán de una manera similar a la oscilación de una cuerda atada en sus dos extremos[11]. Esto provocará oscilaciones en tanto la energía potencial como cinética y estas oscilaciones deben oscilar con la frecuencia expuesta anteriormente (4.44) acorde al o expuesto en [11].

## 4.10. Inestabilidad Two-Stream

La inestabilidad Two-stream para plasma frío consiste en dos flujos de electrones con velocidades medias iguales pero en sentidos contrarios. Estas velocidades son relativamente diferentes a 0 respecto a un fondo inerte de iones. Los haces de electrones reciben una perturbación sinusoidal. Para entender este fenómeno, reescribamos las ecuaciones de movimiento (4.37):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{q}{M} E_1 \quad (4.46)$$

$$\left[ \frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) \right] = \frac{q}{m} E_1 \quad (4.47)$$

En la ecuación 4.36 se omite el termino  $(v_0 \cdot \nabla)$  porque se toma  $v_{i0} = 0$ . Además, el término mencionado caerá de la ecuación 4.37 porque se asume continuidad para  $v_0$ . En esta inestabilidad lo que se busca son oscilaciones de la forma:

$$E_1 = E e^{i(kx - \omega t)} \mathbf{x} \quad (4.48)$$

donde  $\mathbf{x}$  es la dirección de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{k}$ . Sustituyendo (4.48) en (4.46) y en (4.65) obtenemos lo siguiente:

$$v_i = \frac{iq}{\omega M} E \mathbf{x} \quad (4.49)$$

$$v_e = -\frac{iq}{m} \frac{E \mathbf{x}}{\omega - kv_0} \quad (4.50)$$

Como las velocidades están sobre el eje  $x$ , podemos omitir el vector normal en la notación. La ecuación de continuidad de los iones del sistema es:

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \eta_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (4.51)$$

donde

$$\eta_i = \frac{k}{\omega} \eta_0 v_i \approx \frac{i\eta_0 k}{M\omega^2} E \quad (4.52)$$

Ahora, la ecuación de continuidad de los electrones es:

$$\frac{\partial \eta_e}{\partial t} + \eta_0 \nabla \cdot v_e + (v_0 \cdot \nabla) \eta_e = 0 \quad (4.53)$$

Esto se vuelve:

$$(-i\omega + ikv_0) + ik\eta_0 v_e = 0 \quad (4.54)$$

con la densidad de electrones siendo:

$$\eta_e = \frac{k\eta_0}{\omega - kv_0} v_e \approx \frac{iek\eta_0}{m(\omega - kv_0)} E \quad (4.55)$$

Como las inestabilidades son oscilaciones de plasma de alta frecuencia, estas no afectan el movimiento de los iones; por lo tanto, no se trabaja con una aproximación de plasma, pero sí con la ecuación de Poisson [4].

$$\epsilon_0 \nabla \cdot E_1 = q(\eta_i - \eta_e) \quad (4.56)$$

Substituyendo (4.52) y (4.55) en (4.56) obtenemos:

$$ik\epsilon_0 E = q(ik\eta_0 kE) \left[ \frac{1}{M\omega^2} + \frac{1}{m(\omega - kv_0)^2} \right] \quad (4.57)$$

La relación de dispersión se obtiene dividiendo por  $ik\epsilon_0 E$ .

$$1 = \omega_p \left[ \frac{m/M}{\omega^2} \frac{1}{m(\omega - kv_0)^2} \right] \quad (4.58)$$

Ahora se analizan los posibles resultados para un  $k$  real. Si tomamos la ecuación (4.58) y la multiplicamos por el denominador común del lado derecho, tendríamos una ecuación de orden cuatro respecto a  $\omega$ . Si todas las raíces de esta ecuación son reales, entonces obtendríamos que cada raíz representa una oscilación distinta de la forma (4.48). En caso de que algunas de las raíces fuesen complejas, tendríamos lo siguiente:

$$\omega_j = \alpha_j + i\gamma_j \quad (4.59)$$

Con esto, ya obtenemos la dependencia temporal:

$$E_1 = E e^{i(kx - \alpha_j t)} e^{\gamma_j t} \quad (4.60)$$

Si se tiene un  $\gamma$  positivo, significa que se tiene una onda exponencialmente creciente. En caso de ser  $\gamma$  negativo se tiene una oscilación amortiguada.

Como las raíces  $\omega_j$  vienen en pares conjugados, siempre habrá inestabilidades, a menos que todas las raíces sean reales. Las raíces amortiguadas no son auto-excitadas, por lo que no son de interés [4].

La relación de dispersión (4.58) puede ser analizada sin necesitar resolver la ecuación de cuarto orden. A continuación se expone cómo:

$$x = \frac{\omega}{\omega_p} \quad y = \frac{kv_0}{\omega_p} \quad (4.61)$$

Entonces, podemos reescribir (4.58) de la forma:

$$1 = \frac{m/M}{x^2} + \frac{1}{(x - y)^2} = F(x, y) \quad (4.62)$$

Ahora se sabe que esta función tendrá singularidades en  $x = 0$  y  $x = y$ . La intersección de esta curva será con la línea  $F(x, y) = 1$ , con los valores de  $x$  que satisfacen la relación de dispersión. A continuación estudiemos las gráficas presentadas en [4] para explicar el inestabilidad Two-stream:

En la figura 4.2 se puede ver que hay cuatro intersecciones sobre el eje de 1. Esto quiere decir que las cuatro soluciones de la ecuación de orden 4 de (4.58) son reales. En cambio, si vemos la figura 4.3 esta solo tiene dos intersecciones. Esto muestra que con valores de  $y$  lo suficientemente pequeños- $\omega_p \gg kv_0$ -entonces solo se tiene dos raíces reales. Como estas raíces vienen en pares conjugados, las

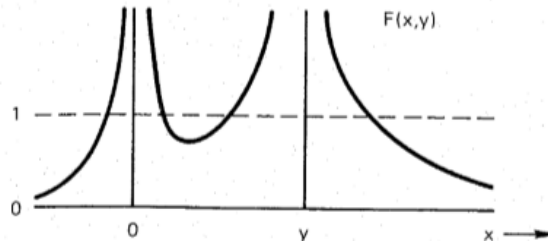


Figura 4.2: Se muestra a  $F(x, y)$  en la inestabilidad Two-stream cuando el plasma es estable [4]

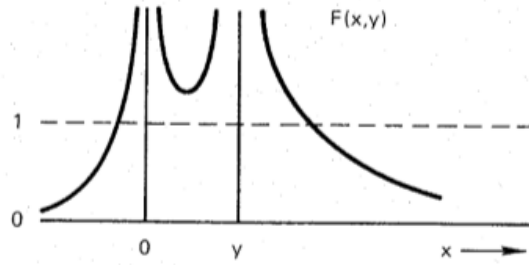


Figura 4.3: Se muestra a  $F(x, y)$  en la inestabilidad Two-stream cuando el plasma es inestable [4]

otras dos raíces deben ser complejas y representan oscilaciones que hacen del plasma inestable. La máxima velocidad de crecimiento está dada por [4]:

$$Im\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.63)$$

Una lectura atenta hará que nos demos cuenta que hay una aparente contradicción en lo que estamos estudiando: para que suceda una inestabilidad se requieren valores muy pequeños de la velocidad. Esto no tiene mucho sentido físico, debido a que la energía cinética es lo que, en primer lugar, mueve la inestabilidad. La explicación es la siguiente: la frecuencia natural del plasma es  $\omega_p$  y la frecuencia de oscilación de los iones es  $\Omega_p = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_p$ . Debido al efecto Doppler de la frecuencia natural en los haces de electrones, estas dos frecuencias pueden coincidir si se dan los valores justos de  $kv$ . Además, las densidades de iones y electrones satisfacen la ecuación de Poisson. Todo esto nos podría mostrar energías cinéticas negativas que, a una primera mirada, carecerían de todo sentido. Pero esta energía cinética negativa es la diferencia entre la energía cuando la no hay y cuando hay oscilación. Este resultado nos diría que la energía cinética es menor cuando hay oscilación que cuando no la hay. En un haz sin perturbación la energía cinética sería  $\frac{1}{2}mn_0v_0^2$ . En cambio, cuando hay oscilación la energía cinética sería  $\frac{1}{2}m(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)^2$  y este valor resulta ser menor que el anterior [4]. Consecuentemente, las oscilaciones de los electrones tienen energía negativa y las oscilaciones de los iones la tiene positiva, pero ambas oscilaciones se comportan de tal forma que la energía se conserva.

#### 4.11. Inestabilidad Beam-plasma

Esta inestabilidad es consecuencia directa de la inestabilidad Two-stream. Lo que varía en esta es que uno de los haces de electrones tiene una menor densidad que el otro. A lo largo de la bibliografía, pero principalmente en los libros de Birsdall [1], Fox[7] y Hockney[13] se trabajó con haces donde uno tiene el 10% de la densidad y otro el 90%, pero estas proporciones pueden variar.

Como ya se ha visto, el fundamento teórico detrás de estas inestabilidades se construye alrededor de la relación de dispersión, que es una función que nos relaciona la frecuencia y el número de onda.



Entonces, para entender la inestabilidad Beam-plasma se hace un planteamiento igual que en la prueba Two-stream, salvo unos pequeños cambios:

$$M0.10\eta_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \eta_0 \frac{q}{M} E_1 \quad (4.64)$$

$$m0.90\eta_0 \left[ \frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) \right] = 0.90\eta_0 \frac{q}{m} E_1 \quad (4.65)$$

Donde ya se hace el ajuste de la distribución del porcentaje de electrones en cada haz. Ahora, sustituyendo en (4.64) la forma de las oscilaciones expuesta en (4.48), se obtiene:

$$v_i = \frac{iq}{0.10\omega M} E\mathbf{x} \quad (4.66)$$

$$v_e = -\frac{iq}{m} \frac{E\mathbf{x}}{0.90(\omega - kv_0)} \quad (4.67)$$

Con esto se hace el mismo procedimiento para llegar la (4.58).

¿Qué se espera observar en una simulación de Beam-plasma? Al haz con menor densidad de electrones lo podemos tratar como a un rayo y al que tiene mayor densidad como un fondo de electrones. Conforme el campo eléctrico oscila, este hace que la energía del rayo de electrones tenga «pulsaciones». Estas pulsaciones causarán inestabilidades similares a las vistas en la sección de Two-stream.

## 4.12. Amortiguamiento de Landau

El amortiguamiento de Landau es, quizá, el resultado más importante de la física del plasma. No solo porque fue hecho en la década de 1920 por Landau y fue el primero en notar que los modelos de fluidos no lograban comprender en su totalidad el fenómeno del plasma. Si no que, además, se puede aplicar a varios fenómenos de astrofísica. En este trabajo se incluye una deducción más breve utilizando integrales de contorno, pero si se busca consultar una deducción que no utilice este método, se puede consultar la sección 7.6 del libro de Chen [4].

Para esta deducción es necesario invocar a la ecuación de Vlasov. Para empezar, se asume un plasma uniforme con una distribución  $f_0(\mathbf{v})$ . El campo eléctrico inicial es 0. Denotamos la perturbación en  $f(r, v, t)$  como  $f_1(r, v, t)$ . Entonces:

$$f(x, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + f_1(r, v, t) \quad (4.68)$$

Como la velocidad es una variable independiente, la ecuación de Vlasov de primer orden para los electrones es:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{q}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (4.69)$$

Como se ha hecho anteriormente, se asume que los iones son masivos y fijos en un fondo de iones y también se asume que las ondas son planas:

$$f_1 \propto e^{i(kv - \omega t)} \quad (4.70)$$

Utilizando (4.70) en (4.69), obtenemos:

$$-i\omega f_1 + ikv_x f_1 = \frac{q}{m} E_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \quad (4.71)$$

$$f_1 = \frac{iqE_x}{m} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\omega - kv_x} \quad (4.72)$$

Utilizando la ecuación de Poisson y substituyendo (4.72) obtenemos:

$$\epsilon_0 \nabla \mathbf{E}_1 = ik\epsilon_0 E_x = -qn_1 = -q \int \int \int f_1 d^3v \quad (4.73)$$

Un factor  $n_0$  puede ser factorizado si se reemplaza  $f_0$  por una función normalizada  $\hat{f}_0$  [4].

$$1 = \frac{\omega_p}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0(v_x, v_y, v_z)/\partial v_x}{\omega - kv_x} \quad (4.74)$$

Si  $f_0$  es una distribución Maxwelliana, las componentes  $y$  y  $z$  se descartan fácilmente [4]. Entonces, una distribución  $\hat{f}_0$  de Maxwell de una sola dimensión se vería de la siguiente forma:

$$\hat{f}_m(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi KT} \right)^{1/2} \exp(-mv_x^2/2KT) \quad (4.75)$$

Como estamos trabajando en una sola dimensión, para simplificar la notación, se puede omitir la escritura de  $v_x$  y hacerlo solo como  $v$ . Entonces, en esta nueva notación, nuestra relación de dispersión es:

$$1 = \frac{\omega_p}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0/\partial v}{v - (\omega/k)} \quad (4.76)$$

Esta integral no es tan directa como se cree a primera vista. La razón es la singularidad en  $v - (\omega/k)$ . Se podría pensar que no es necesario considerar esta singularidad ya que  $\omega$  siempre tendrá una forma compleja debido a las oscilaciones amortiguadas siempre presentes debido a las colisiones internas entre partículas. Sin embargo, esta aproximación no es correcta y en esta interpretación está el mérito de Landau, al ser el primer en abordar propiamente esta ecuación. Él descubrió que, a pesar de que la singularidad yace en el contorno de la integral, su presencia introduce una modificación en la forma de la relación de dispersión, efectos no predichos en la perspectiva de la teoría de fluidos. Para seguir los pasos de Landau hay que asumir lo que ya se ha asumido en las otras pruebas: un plasma con una perturbación senosoidal. Esto implica que  $k$  sea real y, si la perturbación cae o aumenta,  $\omega$  va a oscilar, entonces tendrá un valor complejo. Entonces, esta integral se tiene que abordar como una integral de contorno. En la figura 4.4 se tiene dos casos: el caso (a) representa

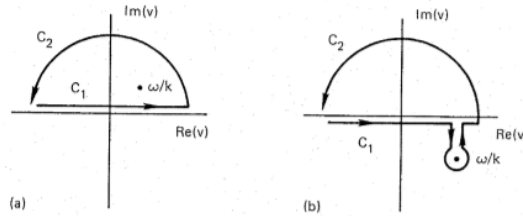


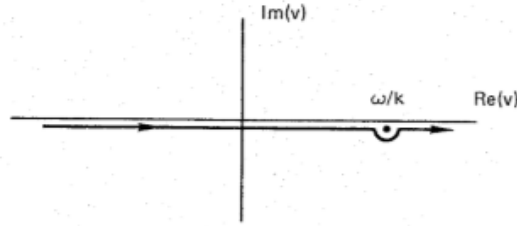
Figura 4.4: Integrales de contorno para el problema de Landau: (a) para  $Im(\omega) > 0$  y (b) para  $Im(\omega) < 0$  [4].

una onda inestable y el caso (b) una onda amortiguada. Generalmente, esta integral se haría en el eje real de  $v$  utilizando el teorema del residuo:

$$\int_{C_1} Gdv + \int_{C_2} Gdv = 2\pi i R(\omega/k) \quad (4.77)$$

Aquí,  $G$  es el integrando  $C_1$  es el camino en el eje  $x$ ,  $C_2$  es el semicírculo en el infinito y  $R(\omega/k)$  es el residuo en  $\omega/k$ . Desgraciadamente, esto no se cumple para una distribución Maxwelliana, debido al término exponencial,  $\exp(-v^2/v_{th}^2)$ , este crece conforme  $v \rightarrow \pm i\infty$ . Entonces, la contribución de  $C_2$  no puede obviarse. Landau demostró que si se aborda este problema como uno de valores iniciales, la forma de correcta de resolverlo es utilizando la curva  $C_1$  pasando por debajo de la singularidad. Esta integral debe evaluarse numéricamente pero Fried y Conte, en su libro, crearon unas tablas para ahorrarnos ese trabajo [3], aunque sus resultados solo se aplican cuando  $\hat{f}_0$  es una distribución Maxwelliana.

Sin embargo, un análisis exacto de este problema sigue siendo muy complicado. Para simplificarlo se hacen aproximaciones a una alta velocidad de fase y un amortiguamiento pequeño. En este caso

Figura 4.5: Integral de contorno para valores pequeños de  $Im(\omega)$ [4].

el polo en  $\omega/k$  se encuentra muy cerca del eje real de  $v$ , así como se ve en la figura 4.5. Rodeado el polo, se obtiene  $2\pi i$  veces el residuo local. Entonces, la ecuación (4.76) se vuelve:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{v - (\omega/k)} + i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k} \right] \quad (4.78)$$

Donde  $P$  es el valor principal de Cauchy, que se explica en el apéndice A. Si la velocidad de fase es lo suficientemente larga, entonces las partes del contorno que serán obviadas a la hora de entrar y salir del polo serán despreciables. Esto se debe a que tanto  $\hat{f}_0$  como  $\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v}$  son pequeñas en esos puntos. Entonces, la integral de (4.78) se resuelve como una integral por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \frac{dv}{v - v_\phi} = \left[ \frac{\hat{f}_0}{v - v_\phi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\hat{f}_0 dv}{(v - v_\phi)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_0 dv}{(v - v_\phi)^2} \quad (4.79)$$

Donde  $v_\phi = \omega/k$  es lo mismo que la velocidad de fase. Como este resultado es solo un promedio sobre la distribución, la parte real de la relación de dispersión se puede escribir como:

$$1 = \frac{\omega^2}{k^2} \overline{(v - v_\phi)^{-2}} \quad (4.80)$$

Como se asumió que  $v_\phi \gg v$  se puede expandir  $(v - v_\phi)^{-2}$ :

$$(v - v_\phi)^{-2} = v_\phi^{-2} \left( 1 - \frac{v}{v_\phi} \right)^{-2} = v_\phi^{-2} \left( 1 + \frac{2v}{v_\phi} + \frac{3v^2}{v_\phi^2} + \frac{4v^3}{v_\phi^3} \dots \right) \quad (4.81)$$

Los términos impares desaparecen del promedio, entonces:

$$\overline{(v - v_\phi)^{-2}} = v_\phi^2 \left( 1 + \frac{3v^2}{v_\phi^2} \right) \quad (4.82)$$

Ahora, evaluamos en  $\hat{f}_0$ , que es una distribución Maxwelliana, a  $v^2 = v_x^2$ . Entonces:

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} K T_e \quad (4.83)$$

Entonces, substituyendo (4.83) en (4.80) la relación de dispersión se vuelve:

$$\omega = \omega_p + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{3K T_e}{m} k^2 \quad (4.84)$$

Si el ajuste térmico es pequeño, podemos substituir  $\omega_p$  por  $\omega$  en el segundo término. Entonces, tenemos:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3K T_e}{m} k^2 \quad (4.85)$$

Bueno, esto fue el desarrollo para el término real, ahora vamos a elaborar el término imaginario. Si observamos la ecuación (4.76) y se evalúa el término pequeño, debería ser lo suficientemente preciso desestimar las correcciones térmicas de la parte real y hacer  $\omega = \omega_p$  [4]. En las ecuaciones (4.76) y (4.79) se puede observar que el valor principal de la ecuación (4.76) es  $\approx \omega^2/k^2$ . Entonces, (4.76) se vuelve:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Big|_{v=v_\phi} \quad (4.86)$$

Despejando para  $\omega_p$ :

$$\omega_p^2 = \omega^2 \left( 1 - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) \quad (4.87)$$

Tratando el término imaginario como uno pequeño, podemos eliminar los términos cuadráticos después de una expansión de Taylor:

$$\omega_p = \omega \left( 1 - i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \right]_{v=v_\phi} \right) \quad (4.88)$$

Como  $\hat{f}_0$  es una distribución Maxwelliana unidimensional, tenemos que:

$$\frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} = \frac{2v}{\sqrt{\pi}v_t^3} \exp\left(\frac{-v^2}{v_t^2}\right) \quad (4.89)$$

Se puede aproxima  $v$  como  $\omega/k$  en el coeficiente, pero se debe mantener la corrección térmica en el exponente[4], tal como se muestra en la ecuación (4.85). Ahora, tomando esto en cuenta y obteniendo  $Im(\omega)$  y  $I(\omega_p)$  y simplificando obtenemos:

$$Im\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = -0.22\sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_p}{kv_t}\right)^3 \exp\left(\frac{-1}{2k^2\lambda_D^2}\right) \quad (4.90)$$

Como  $Im(\omega)$  es negativo, entonces existe un amortiguamiento de ondas planas que no es causado por colisiones dentro del plasma. Este amortiguamiento es muy pequeño para casos muy pequeños de  $k\lambda_D$ . Este efecto está estrechamente relacionado con la perturbación inicial del sistema.

Esta deducción, un poco más simplificada pero respetando el razonamiento que hizo Landau en su momento, ha tenido muchas repercusiones en la física del plasma y en otros campos desde su descubrimiento. No solo por ser uno de los resultados más importantes de los plasmas sin colisiones, también tiene el mérito de ser uno de los grandes trabajos de la matemática aplicada, al ser un fenómeno descubierto primero en la teoría y luego de forma experimental. Pero, ¿qué nos dice el amortiguamiento de Landau? Lo primero que hay que notar es que  $Im(\omega)$  aparece en el polo, cuando  $v \Rightarrow v_\phi$ . Entonces, es amortiguamiento de Landau surge porque hay partículas que tiene, aproximadamente, la misma velocidad de fase. Entonces, podemos tener casos en que la partícula va más lento que la onda, entonces, la partícula se ve «empujada» por la onda y ocurre un intercambio de energía: la partícula gana energía y la onda pierde energía. En el caso de que la partícula tenga una velocidad más alta que la onda, sucede que la partícula «jala» a la onda. Entonces, la partícula pierde energía y la onda gana. Una distribución Maxwelliana tiene más electrones lentos que rápidos [4]. Por lo tanto, la onda pierde más energía de la que gana y esto causa el amortiguamiento.

## 4.13. Aspectos importantes de la simulación

### 4.13.1. Método Particle-in-Cell

Para modelar plasmas hay dos métodos populares: Particle-in-Cell (PIC) y Magnetohidrodinámica (MHD). El primero, busca resolver las ecuaciones de movimiento para cada partículas del plasma y el segundo busca modelar el plasma como un fluido. Este trabajo se enfoca en el método PIC.

Resolver las ecuaciones de movimiento de cada partícula es, computacionalmente, insostenible. Por eso surge el método PIC: este trabaja ciertas condiciones en un mallado, del cual se obtendrá información que se extrapolará a las partículas del plasma.

La ecuación de movimiento a resolver es la siguiente:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (4.91)$$

Donde  $\mathbf{F}$  es una la fuerza de Lorentz (4.31). La discretización de esta ecuación se hace a través del método Leap-frog.

Ya que para obtener el campo eléctrico se necesita la densidad de carga, esta se obtiene a través de una extrapolación de las posiciones de las partículas sobre a la malla. Este proceso a través de hace un pesaje de primer orden llamdo Cloud-in-Cell. Los detalles de este método y del método Leap-frog se exponen más adelante en esta sección.

Por último, se necesita calcular el campo eléctrico: se resuelve la ecuación de la Ley de Gauss con la la densidad de carga obtenida. Para resolver esto hay varios métodos en toda la bibliografía. En este trabajo se decidió trabajar con una integración numérica con el método del trapecio ya que en la bibliografía se encuentran buenos resultados obtenidos en este camino.

En conclusión, el método se puede resolver en el siguiente esquema:

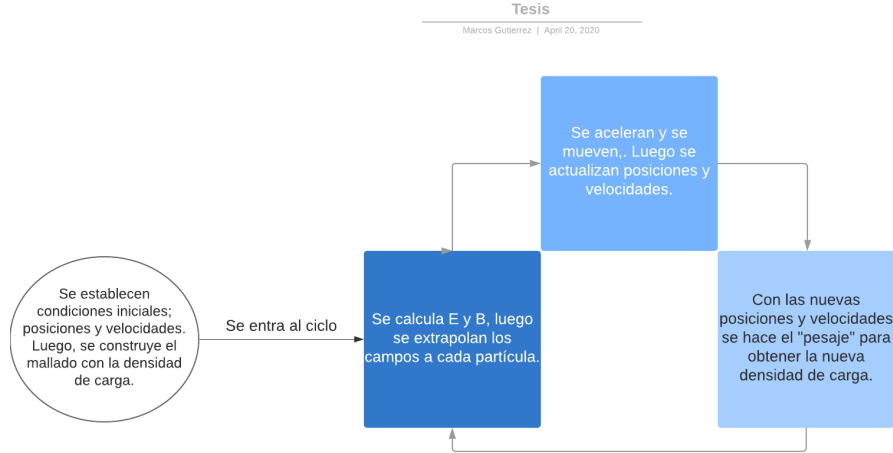


Figura 4.6: Esquema del método PIC

#### 4.13.2. Esquema Leap-frog

En [11] se recomienda trabajar la solución de las ecuaciones a través del método Leap-frog. Este es mucho más preciso que el método de Euler y requiere menos poder de computo que los métodos de Runge-Kutte.

Para lograr simular un plasma frío en el caso electroestático, lo que se busca conseguir es lo siguiente: a través de de valores del campo eléctrico obtener información de la velocidad y a través de esta

obtener información sobre la posición de las partículas.

De la ecuación de la fuerza de Lorentz(4.31) se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m} E(t), \quad \frac{dx}{dt} = v(t) \quad (4.92)$$

Reescribiendo estas ecuaciones en notación  $\Delta$ -debido a que las computadoras no manejan la diferenciación-obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = \frac{q}{m} E(t) \quad (4.93)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = v(t) \quad (4.94)$$

Esto lo podemos reescribir como:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{q}{m} E_n \Delta t \quad (4.95)$$

$$x_{n+1} = x_n + v \Delta t \quad (4.96)$$

Estas ecuaciones serían las utilizadas en los métodos de Euler o Runge-Kutta. El método de Leap-frog se caracteriza por "escalonar" las ecuaciones anteriores:

$$v_{n+\frac{1}{2}} = v_{n-\frac{1}{2}} + \frac{q}{m} E_n \Delta t \quad (4.97)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (4.98)$$

Con estas ecuaciones, el método consiste en, a partir de datos conocidos de la velocidad, podemos determinar las nuevas posiciones de las partículas. Este salto de datos conocidos de la velocidad a nuevos datos de la posición se asemeja a un salto de rana, de ahí el nombre del método. En la siguiente imagen se puede visualizar los saltos de este método. Este método, que es más preciso que el

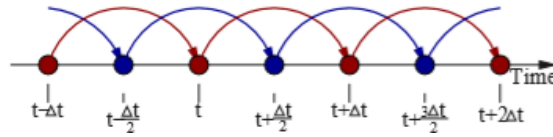


Figura 4.7: Representación del esquema Leap-Frog. La línea roja representa la posición y los datos del campo eléctrico, mientras que la línea azul representa la velocidad. Este diagrama se encuentra en [11]

método de Euler requiriendo menor poder de computo, presenta el siguiente problema: la velocidad debe estar centrada respecto al tiempo. Cualquier cambio en el  $\Delta t$  establecido, requeriría recalcular los valores iniciales de la velocidad. Para resolver estos problemas, se trabajará con promedios de las velocidades cuando sea necesario. Para el desarrollo futuro, la energía cinética se aproximará de la siguiente forma:

$$T_n = \frac{1}{2} m v_{n-\frac{1}{2}} v_{n+\frac{1}{2}} \quad (4.99)$$

### 4.13.3. Pesaje de grado 1: Cloud-in-Cell (CIC)

La etapa de pesaje es cuando se pasa de partículas a mallas. Este proceso se aplica para calcular la densidad de carga y los campos en toda la malla. Bien se podría calcular los campos de cada carga de manera individual, pero esto implicaría un excesivo poder de computo que haría el proceso inviable. En cambio, a través de este método el comportamiento de cada partícula se visualiza como una nube de partículas. Además del método CIC existe uno de grado 0, llamado Near-grid-Point (NGP), que genera muchos errores[1], por lo que no se le consideró en este trabajo.

En el método CIC, cada partícula se ve asociada a dos puntos en la malla. La forma que tiene la

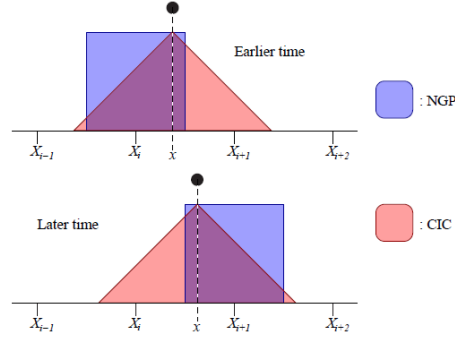


Figura 4.8: Esquema donde se compara gráficamente el método NGP con el CIC. Gráfico de Daniel Martin [11]

partícula es triangular con un ancho de  $2\Delta x$ . La densidad de carga  $\rho_i$  es la densidad de carga asociada a una partícula que está más a la derecha y  $\rho_{i+1}$  es la que está más a la izquierda. Entonces, tomando a  $\rho_i$  como el punto a la izquierda más cercano a la partícula y a  $\rho_{i+1}$  como el más cercano a la derecha, hacemos:

$$\rho_{i+1} = \frac{q}{\Delta x} \left[ \frac{x - X_i}{\Delta x} \right] \quad \text{y} \quad \rho_i = \frac{q}{\Delta x} \left[ \frac{X_{i+1} - x}{\Delta x} \right] = \frac{q}{\Delta x} \left[ \frac{X_{i+1} + \Delta x}{\Delta x} \right] \quad (4.100)$$

Donde  $x$  es la posición de la partícula,  $X_i$  la posición del  $i$ -ésimo nodo de malla y  $\Delta x$  es el espacio entre nodos.

Si se hace a  $X_0 = 0$ , entonces se tiene la siguiente simplificación:

$$\rho_{i+1} = \frac{q}{\Delta x} \left[ \frac{x}{\Delta x} + i \right] \quad \text{y} \quad \rho_i = \frac{q}{\Delta x} - \rho_{i+1} \quad (4.101)$$

Después de obtener la densidad de carga y calcular el campo eléctrico, se aplica el campo eléctrico de la malla a la partícula para poder moverla. El campo aplicado a la partícula tiene la siguiente forma:

$$E = \left[ 1 - \left( \frac{x}{\Delta x} - i \right) \right] E_i + \left[ \frac{x}{\Delta x} - i \right] E_{i+1} \quad (4.102)$$

Con estos resultados, ya tenemos los algoritmos necesarios para proceder a las simulaciones.

#### 4.13.4. Diferencia entre el laboratorio y una simulación

Para explicar bien esta diferencia, se apoyará la explicación en un gráfico muy ilustrativo que Birdsall y Langdon brindan en su libro[1]. Este gráfico es la figura 4.9. La aclaración en esta figura es importante para las inestabilidades Two-stream y Beam-plasma. Como se puede ver en la imagen citada, la parte (a) es cómo se verían los haces en un laboratorio, la parte (b) es cómo lo vemos en la simulación y la parte (c) es cómo se ven las distribuciones iniciales de las velocidades de cada haz (en este caso, ambas Maxwellianas).

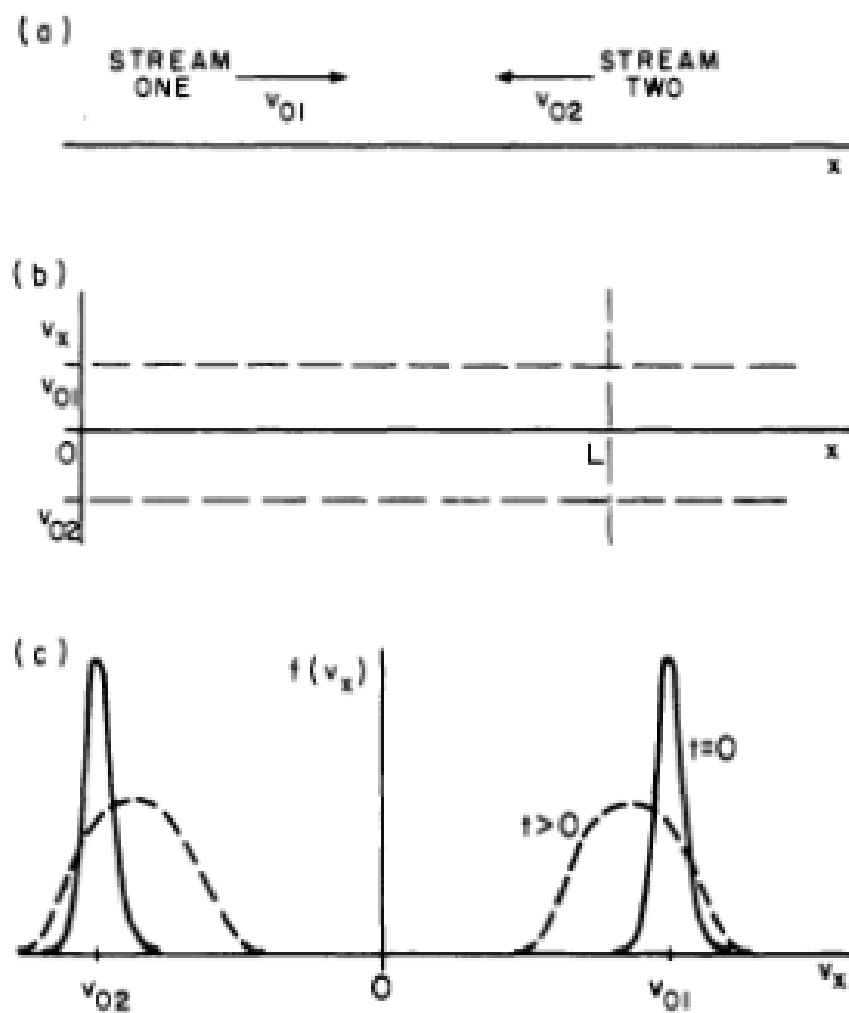


Figura 4.9: Representación visual de cómo se vería un experimento de nos haces en el laboratorio, en una simulación y sus distribuciones de velocidad.



En este capítulo se expone todo el proceso de programación y otras operaciones necesarias para hacer las simulaciones efectivas. Se explica la naturaleza de los módulos principales: `parametros.py` y `funciones.py`. junto a estos módulos se encuentran otros tres: `plasmafrio.py`, `beamplasma.py` y `twostream.py`. Estos cumplían con la única función de llamar a las funciones pertinentes durante de la simulación y efectuar y guardar las gráficas necesarias. No existe un módulo para el amortiguamiento de Landau porque este visible si se obtienen suficientes pasos temporales en las simulaciones de Beam-plasma y Two-stream.

## 5.1. Especificaciones

Toda la programación necesaria se trabajó con la versión 3.8.2 de Python. Todo esto se hizo en una laptop HP Desktop-F2C29L6 con Windows 10 instalado más las siguientes propiedades:

- Procesador: Intel Core i5
- RAM: 8GB
- Sistema operativo: 64 bits

## 5.2. Módulos

Para trabajar con la simulación se elaboraron dos módulos principales: `parametros.py` y `funciones.py`.

### 5.2.1. Parametros.py

En este modulo se incluyeron todas las variables que se utilizan de manera general en los cuatro fenómenos analizados:

- `noParticulas`: número de partículas
- `noMalla`: número de malla
- `carga_e`: carga del electrón
- `carga_i`: carga del ion

- time\_step: número de pasos temporales
- vh: velocidad media de los haces densidad
- coor\_malla: coordenada de cada nodo de la malla
- x\_inicial: posiciones iniciales
- malla\_longitud: longitud de cada malla
- plasma\_inicio: punto inicial desde donde se empieza a medir la malla
- plasma\_final: punto donde termina de medirse una malla
- dx: step espacial
- dt: step temporal
- carga\_masa: relación carga masa
- rho0: densidad del fondo de iones
- x0: amplitud de perturbación de la posición
- v0: amplitud de perturbación de la velocidad
- ki: array sobre el que se calcula la energía cinética
- kdrift: array sobre el que se calcula el drift de energía
- upot: array sobre el que calcula la energía del campo eléctrico
- totalenergy: array sobre el que se calcula la energía total
- x\_i: longitud de una malla
- espacio\_particulas: espacio entre partícula y partícula
- carga: carga total de la distribución de partículas
- m: masa de las partículas

### 5.2.2. Funciones.py

En este modulo están todas las funciones utilizadas para abordar los cuatro fenómenos en cuestión.

- builgrid\_pos(): distribuye la posición inicial de las partículas
- leapfrog(): función que efectúa el corrimiento en la posición para que el método leapfrog funcione.
- cf(): función que se encarga de que las partículas cumplan las condiciones de frontera periódicas dentro de la malla
- bulgrid\_vel(): función que genera las velocidades iniciales para plasma frío.
- electricfield(): función que calcula el campo eléctrico
- chargevelocity(): función que actualiza las velocidades
- charposition: función que actualiza las posiciones
- chargedensity(): función que calcula las densidades de carga en el mallado

- Kenergy(): función que calcula la energía cinética
- Uenergy(): función que calcula la energía del campo eléctrico
- totalenergy(): función que calcula la energía total
- drift(): función que obtiene el drift de la energía cinética
- buildgrid\_vel\_2bp(): función que genera las velocidades iniciales para la inestabilidad two-stream
- buildgrid\_vel\_ibp(): función que genera las velocidades iniciales para la inestabilidad beam-plasma

### 5.3. Normalización

Un proceso que es importante a la hora de trabajar con simulación de fenómenos físicos es la normalización de unidades. Esto permite optimizar procesos ya que no se acarrearán constantes con muchos decimales. Esto hace que todas las soluciones se hagan en coordenadas naturales.

$$\begin{array}{lll} t \Rightarrow \omega_p t & x \Rightarrow \omega_p x / c & v \Rightarrow v / c \\ E \Rightarrow qE / m\omega_p c & \eta_{e,i} \Rightarrow \eta_{e,i} / \eta_0 & \end{array}$$

Donde la carga  $q_e$ , las masas  $m_e y m_i$  y la densidad electrónica  $\eta_0$  valen la unidad.

### 5.4. Drift de energía

Un elemento que no es posible dejar de lado es el drift de energía. Siempre que se efectúan simulaciones de fenómenos físicos es necesario tomarlo en cuenta debido a las operaciones numéricas que se hacen. Este fenómeno es el aumento gradual de la energía total de un sistema cerrado. Esto, en primera instancia, contradice la ley de la conservación de la energía. Pero esto sucede debido a las integraciones numéricas en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Este aumento se ve representado por:

$$T = \Sigma m v_{real}^2 + \Sigma m \delta v^2 \quad (5.1)$$

Donde  $\delta v$  es la posible pequeña perturbación de la velocidad real de la simulación.

### 5.5. Ciclo computacional

Las generalidades del método PIC se expusieron en la sección 4.13.1. Para ampliar el tema, esta sección se expone el ciclo con las funciones que se utilizan.

#### 5.5.1. Condiciones iniciales

Primero, se utiliza la función buildgrid\_pos() para construir la malla y distribuir a las partículas en ella. A este resultado se le aplica la función leapfrog(x) para efectuar el corrimiento de necesario para hacer efectivo los métodos de integración. Luego, se utiliza la función buildgrid\_vel(), buildgrid\_vel\_2bp() o buildgrid\_vel\_ibp() para determinar las velocidades iniciales de cada uno de los casos.

Luego de calcular las condiciones iniciales, se entra al ciclo computacional que efectuará los ciclos que el usuario determine con la variable time\_step.

### 5.5.2. Cálculo de la densidad de carga y el campo eléctrico

Ahora, para poder calcular la densidad de carga se utiliza la función `chargedensity(x)`, donde  $x$  es la posición de la partícula en ese momento.

Para calcular el campo se utiliza la función `electricfield( $\rho$ )` donde  $\rho$  es la densidad de carga calculada para ese instante.

### 5.5.3. Actualización de la velocidad y la posición

Para actualizar la velocidad y la posición se utiliza el método Leap-frog expuesto en la sección 4.13.2. Para actualizar la velocidad se utiliza la función `chargevelocity(v0,E)` donde  $v0$  es el valor anterior de la velocidad  $E$  es el campo eléctrico calculado para ese instante. Luego, para actualizar la posición se utiliza la función `chargeposition(v,x0)` donde  $v$  es la velocidad en ese instante y  $x0$  es la posición anterior de cada una de las partículas. A este resultado se le aplica la función `cf(x)` para evaluar que cada una de las partículas cumpla con las condiciones de frontera periódicas.

Luego de hacer esto, se repite el procedimiento a partir de lo expuesto en la sección 5.5.2.

ón y resultados-@alias-@aliasón y resultados-@alias ón y resultados-@alias

## 6.1. Plasma frío

Esta simulación se efectuó con 10,000 partículas, 1000 nodos de malla, una longitud de malla de  $4\pi$ , un step temporal de 0.005 y una amplitud de perturbación de 0.001, acorde a lo recomendado en [1].

Para exponer los resultados se mostrarán varios instantes de la simulación donde se ven los comportamientos tanto del campo eléctrico, la densidad de carga y el diagrama de fase.

Debido a que se está trabajando con el caso electroestático, se tiene que lo expuesto en la sección 4.8 se reduce al caso de la ecuación (4.38). Se puede observar en la secuencia de figuras 6.1b, 6.2b, 6.3b, 6.4b y 6.5b que el campo eléctrico oscila. Esto cuadra con los resultados de Daniel Martín [11] y de Birdsall [1]. Esta oscilación se debe a los campos autogenerados por el movimiento de las partículas. Otro resultado interesante en esta simulación, es que en el caso de la ecuación (4.38) los plasmas uniformes cercanos a su posición de equilibrio tienden a tener un  $E \approx 0$ [6]. En este caso, debido a la perturbación inicial del plasma, cuando el campo eléctrico tiende a 0 en 6.3b y en el diagrama de fase 6.3c se observa el amplitud completa de la perturbación. Asimismo, se puede observar en las gráficas de densidad de carga 6.3a una oscilación acorde a lo esperado[1], ya que la densidad de carga depende únicamente de la distribución de las partículas en la malla. En la figura 6.6 se muestra el intercambio entre la energía potencial-representada en la leyenda U- y la energía cinética-representada por la leyenda K-. Además, se muestra un muy leve oscilación en la energía

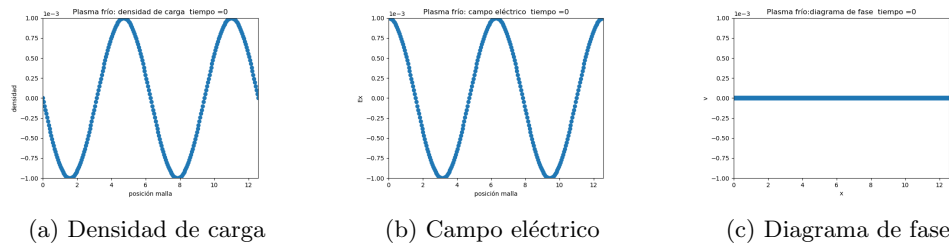


Figura 6.1: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de un plasma frío en el momento inicial

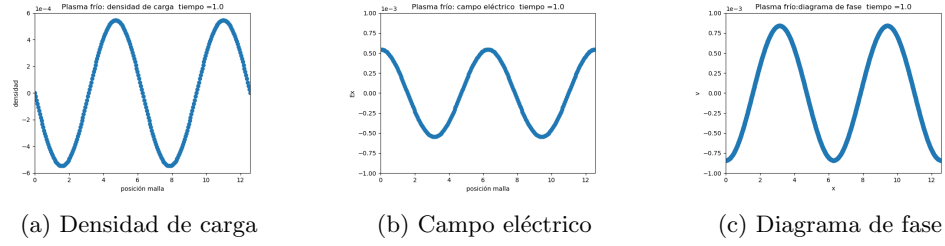


Figura 6.2: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido una unidad de tiempo.

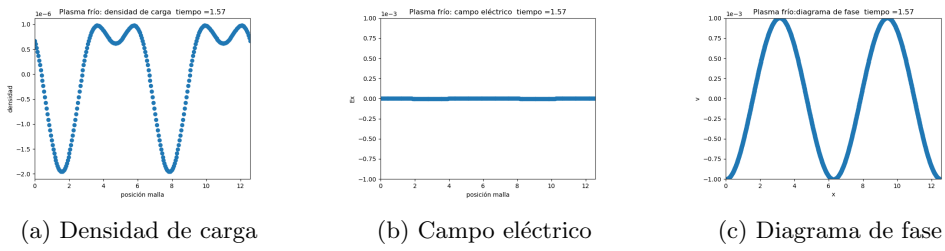


Figura 6.3: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido 1.57 unidades de tiempo.

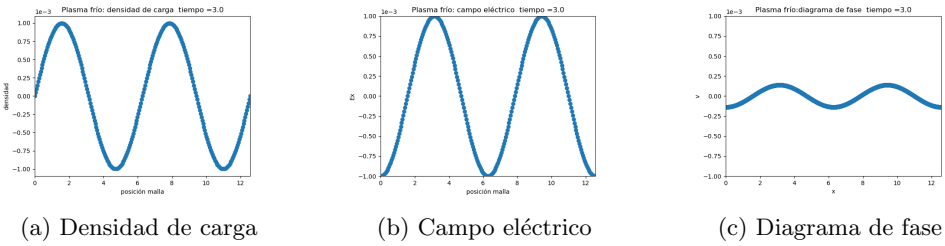


Figura 6.4: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido tres unidades de tiempo.

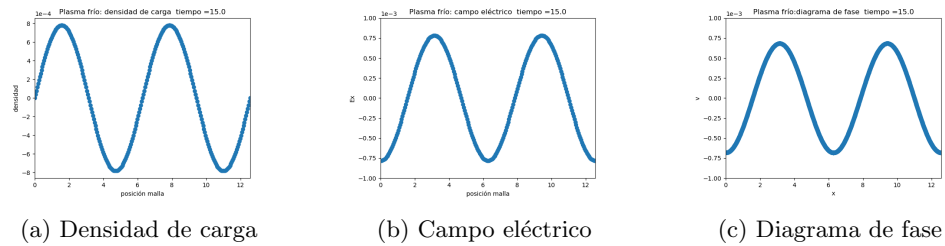


Figura 6.5: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase después de haber transcurrido quince unidades de tiempo.

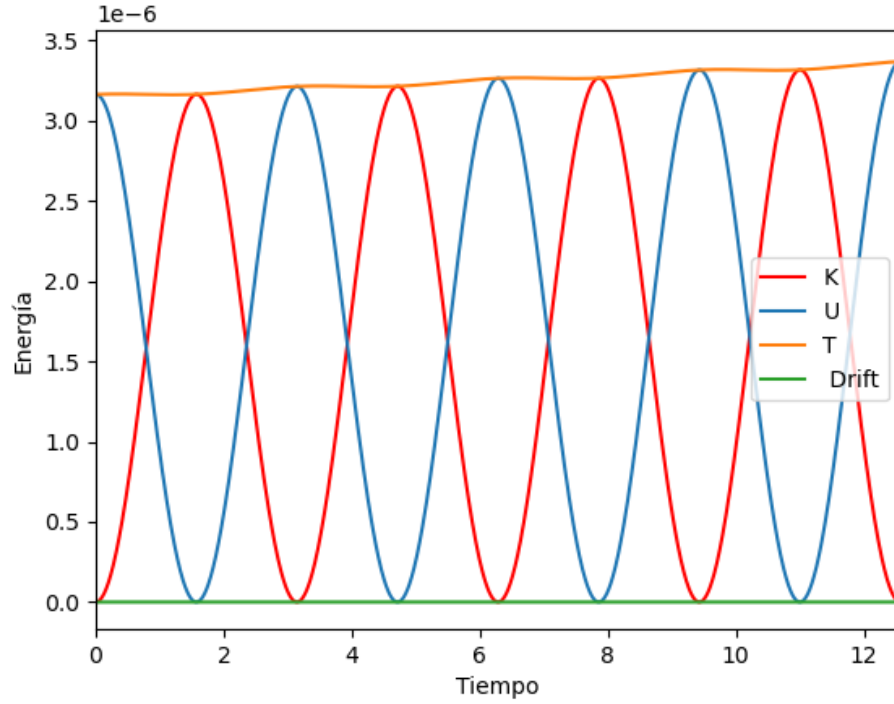


Figura 6.6: Figura de las energías potencial, cinética y total. Además, se gráfica el arrastre energético.

total. Esta puede ser causada por algún leve aumento causado por arrastre de energía expuesto en la sección 5.4, aunque este tiende a ser 0 debido al  $dt$  tan pequeño.

## 6.2. Inestabilidad Two-stream

Para esta simulación se utilizaron 10,000 partículas, 1000 nodos de malla, una longitud de malla de  $32\pi$ , 200 ciclos temporales y con una velocidad media de los haces de 6. La longitud de la malla es la recomendada por Birdsall [1]. Las otras condiciones se determinaron durante las numerosas corridas del código ya que, a pesar de que todas concordaron con lo expuesto en los trabajos de Martin[11] y Birdsall[1], la escogida fue la que mostró resultados más amigables. Además, se trabajó con distintas amplitudes de perturbación en la posición, 0.0, 0.01 y 0.1, esto con el fin de observar como esto incide en el desarrollo de la simulación.

En 6.7 podemos ver el estado inicial del sistema. así como se expuso en la sección 4.10, en este

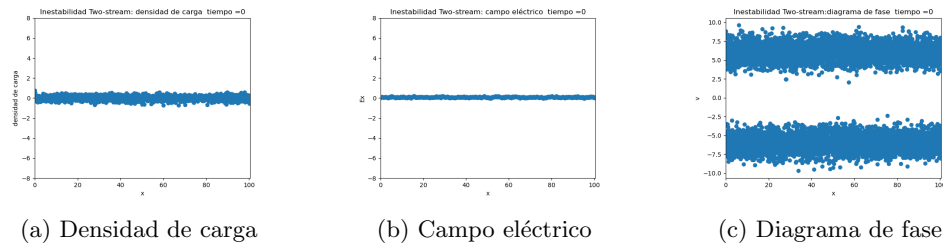


Figura 6.7: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de una inestabilidad Two-stream con amplitud de perturbación 0.0 en el momento inicial.

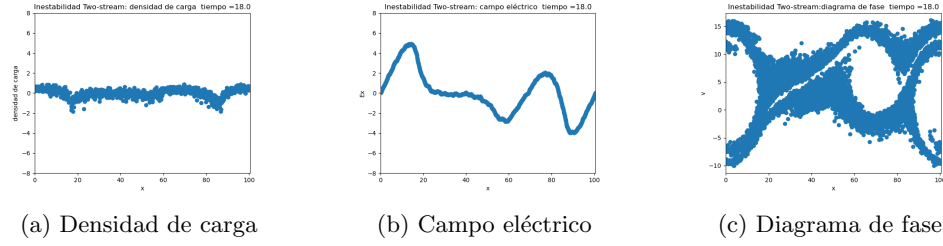


Figura 6.9: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de una inestabilidad Two-stream con amplitud de perturbación 0.0 después de 18 unidades de tiempo.

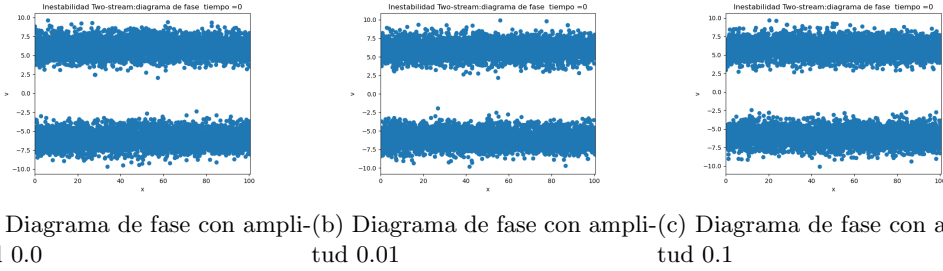


Figura 6.10: Estados iniciales de inestabilidades Two-stream con amplitudes de perturbación 0.0, 0.01 y 0.1, respectivamente.

momento las soluciones de la relación de dispersión(4.58) son reales. Entonces, si se deja el sistema, después de 9 unidades temporales, en la figura 6.11a se ve que ya se entra a un estado inestable.

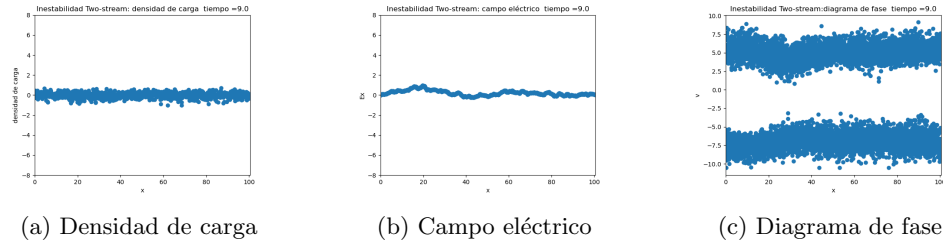


Figura 6.8: Densidad de carga, campo eléctrico y diagrama de fase de una inestabilidad Two-stream con amplitud de perturbación 0.0 después de 9.0 unidades de tiempo

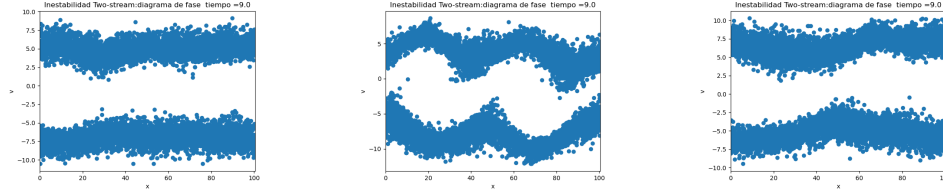
Como se puede ver en 6.8b, después de 9 unidades de tiempo ya ocurre una perturbación en el campo eléctrico. Esto se traduce en una alteración en el los haces del plasma, donde se empieza a vislumbrar la aparición de un vórtice en 6.8c. Este instante donde se empieza a mostrar la inestabilidad se llama espacio de transición[11].

Después de 18 unidades temporales transcurridas, el sistema se como se muestra en 6.9

Como se puede ver en la figura 6.11 cuando los plasmas con una amplitud de perturbación 0.0 y 0.1 están en un estado de transición, ya el plasma con una amplitud de 0.01 ya está empezando a crear vórtices. Otro diferencia relacionada con la amplitud se puede observar en la figura 6.12 donde el plasma con amplitud de 0.1 solo generó dos vórtices.

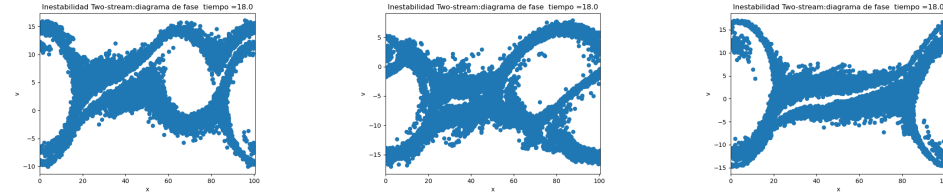
Una tendencia que se puede observar es que cada vórtice busca alejarse lo más posible del otro. Un efecto que se espera de esta inestabilidad es que el plasma de caliente [11]. Esto se puede observar debido a la extensa dispersión de la velocidad de las partículas.





(a) Diagrama de fase con amplitud 0.0 (b) Diagrama de fase con amplitud 0.01 (c) Diagrama de fase con amplitud 0.1

Figura 6.11: Estado después de 9 unidades de tiempo para de inestabilidades Two-stream con amplitudes de perturbación 0.0, 0.01 y 0.1, respectivamente.

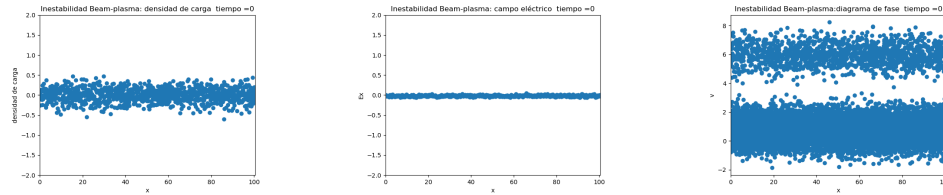


(a) Diagrama de fase con amplitud 0.0 (b) Diagrama de fase con amplitud 0.01 (c) Diagrama de fase con amplitud 0.1

Figura 6.12: Estado después de 18 unidades de tiempo para de inestabilidades Two-stream con amplitudes de perturbación 0.0, 0.01 y 0.1, respectivamente.

### 6.3. Inestabilidad Beam-plasma

Para esta simulación se utilizaron 10,000 partículas, 1000 nodos de malla, una longitud de malla de  $32\pi$ , un step temporal de 0.1 y 200 ciclos temporales. La velocidad media fue de 6 y el haz con mayor velocidad fue el con menor concentración de partículas, tal como se realizó en los trabajos de Fox[7] y Morse[15]. Como se explica en la sección 4.11 el desarrollo teórico de esta inestabilidad es el mismo que la inestabilidad Two-stream pero con diferencia en la densidad de los rayos. También se tiene la diferencia que la velocidad del haz con mayor cantidad de electrones se distribuye alrededor del equilibrio y la velocidad del otro se distribuye alrededor de la velocidad media del haz. En este caso, siguiendo lo expuesto en libro de Fox[7], se hizo que un haz de electrones tuviera el 10% de todas las partículas y el otro haz se creó con el 90%. En la imagen 6.13 se puede observar la diferencia entre el diagrama de fase de una inestabilidad Beam-plasma con una Two-stream. Además, la diferencia de dimensiones de los dos haces, hace más inestable el sistema. Por esa razón, el campo eléctrico ya se ve levemente perturbado. Si se compara la figura 6.14 con su equivalente en two-stream 6.8 se observar que la perturbación en el campo eléctrico del caso Beam-plasma es mucho más fuerte. En el diagrama de fase no es tan visible por la misma naturaleza de esta inestabilidad.



(a) Densidad de carga (b) Campo eléctrico (c) Diagrama de fase

Figura 6.13: Estado inicial de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0.

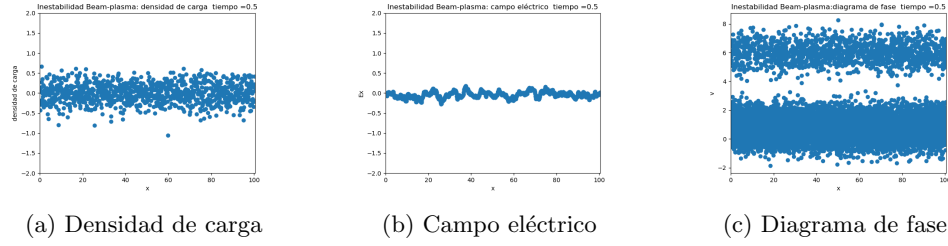


Figura 6.14: Estado después de 0.5 unidades de tiempo de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0.

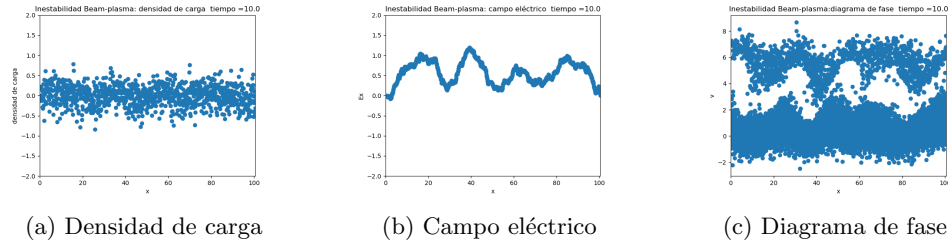


Figura 6.15: Estado después de 10 unidades de tiempo de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0.

La diferencia entre lo visto en la sección 6.2 reside en, en el caso Beam-plasma, el haz más grande «dominará» al más pequeño. Esto sucede porque conforme el campo eléctrico va absorbiendo energía del haz de electrones, llega a un punto en que la energía del campo se vuelve lo suficientemente grande como para que los electrones del haz más pequeño se «atrapen» con los del haz más grande y este evento genera vórtices similares a los observados en la sección de la simulación de la inestabilidad Two-stream 6.2. Esto es visible en la figura 6.15. Además, al igual como se mencionó en la discusión de la inestabilidad Two-stream, este plasma ser de frío a caliente. También visible por la dispersión de la velocidad[11]. En la figura 6.16 se observa el estado final después de 18 unidades de tiempo.

## 6.4. Amortiguamiento de Landau

Para observar el amortiguamiento de Landau podemos abocarnos a dos diagramas basándonos en lo explicado en la sección 4.90: al intercambio energético entre las partículas y el campo. En este caso, se vería el amortiguamiento en la energía potencial. La otra forma de observar el fenómeno en cuestión es a través del diagrama de fase. Esto sería observando un plasma como, después de haber pasado por una inestabilidad, se empiezan a crear regiones estables. Para efectuar estas pruebas se utilizó una amplitud de perturbación de 0.0, 20,000 partículas, 1024 nodos de malla, 2,000 ciclos

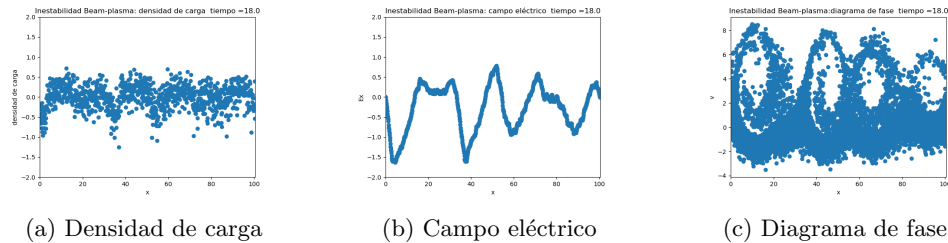


Figura 6.16: Estado después de 18 unidades de tiempo de una inestabilidad Beam-plasma con amplitud de perturbación 0.0.

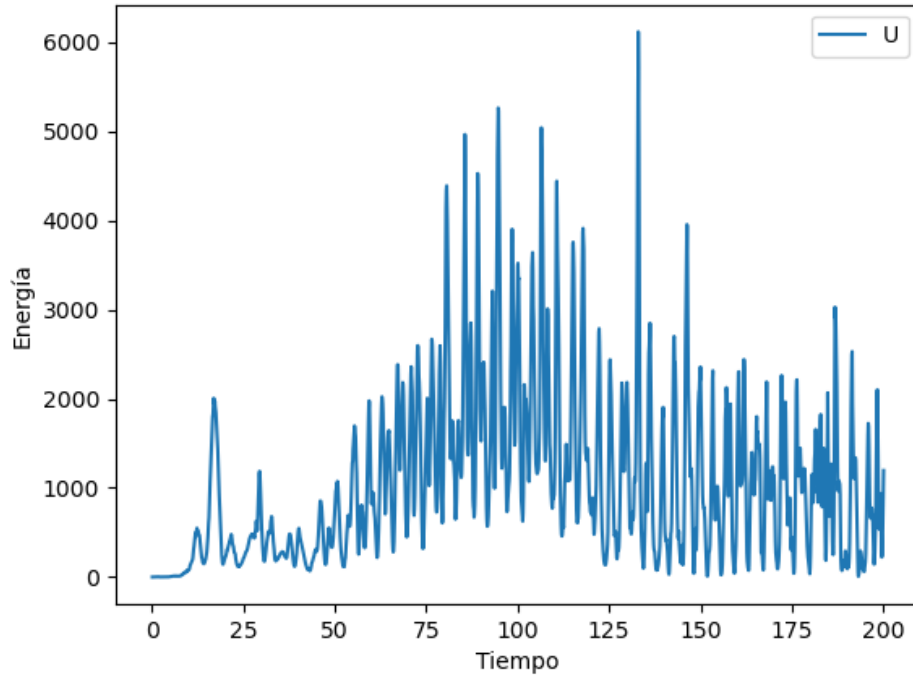


Figura 6.17: Evolución temporal de la energía potencial. Después del máximo de energía es posible ver el amortiguamiento predicho por Landau.

temporales y un step temporal de 0.1. Estas condiciones se establecieron después de haber efectuado numerosas corridas. Se mantuvo una amplitud de 0.0, debido a que en el libro de Birdsall[1] se afirma que, una amplitud más grande bien puede apresurar la aparición del amortiguamiento, se vuelve muy susceptible al número de partículas, a pesar de que esta variable no afecta el límite de tiempo. Entonces, durante varias corridas se probó variar el número de partículas y el step temporal. También, así como se afirma en el artículo de Qi[10], una mayor amplitud de perturbación puede llevar a presentar efectos no-lineales, y este tema se va más allá de lo que se presenta en este trabajo. Ahora bien, a pesar de que el amortiguamiento de Landau se presenta en cualquiera de las inestabilidades presentadas, por la susceptibilidad a las condiciones iniciales de este tipo de simulaciones[1], la inestabilidad Beam-plasma toma muchos ciclos temporales en mostrar los efectos predichos por Landau y esto, tanto por razones de visibilidad de los datos y por el tiempo que esto implica, se muestra en esta sección los resultados obtenidos estudiando la inestabilidad Two-stream.

Con todas las aclaraciones pertinentes hechas podemos pasar a ver la figura 6.17. En esta figura se puede ver como después de que la energía potencial llega a un máximo de crecimiento en, aproximadamente, 95 unidades temporales, la onda empieza a amortiguarse hasta llegar a niveles entre 0 y 1000 después de 200 unidades temporales. Claro, hay ciertos datos atípicos que han surgido inevitablemente en todas las corridas. En esta gráfica, que cuadra con los resultados obtenidos por Birdsall y Langdon[1] con diferentes parámetros, muestra como la energía del campo eléctrico se amortigua conforme las partículas le «roban» energía a las ondas. La única gráfica obtenida de este fenómeno en la bibliografía consultada se encuentra en la obra de los autores anteriormente citados. En los demás trabajos consultados se encuentran grandes desarrollos teóricos y discusiones, pero no hay otro que haya generado esta gráfica. En la figura 6.18 podemos observar como, a partir de 95 unidades temporales el plasma empieza a presentar cada vez más puntos de estabilidad. Los vórtices, así como en las demás inestabilidades, representan las partículas que están en fase con la onda del campo eléctrico. Esto quiere decir que no están en ningún proceso de intercambio energético con

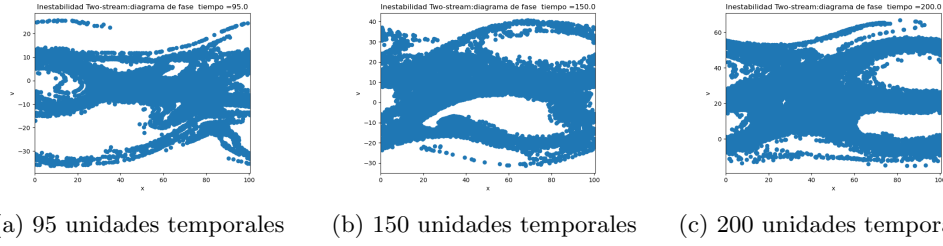


Figura 6.18: En estos diagramas se puede ver la evolución temporal del diagrama de fase a partir de el máximo de energía potencial

el campo. En la figura se puede ver como la cantidad de vórtices disminuye y como estos se van alargando hasta desvanecerse. Esto sucede porque, debido a la constante interacción de las partículas con el campo estas se van acelerando hasta entrar en el rango de velocidad de interacción con la energía potencial. Luego, éstas ganan energía gracias a su interacción con el campo entonces, la energía potencial disminuye y la energía de la partícula aumenta. En la figura 6.19 se puede ver como la energía cinética aumenta conforme la energía potencial disminuye. Se puede ver, esta figura concuerda con la figura 6.17 porque, aproximadamente cuando el amortiguamiento comienza, la energía cinética empieza a aumentar.

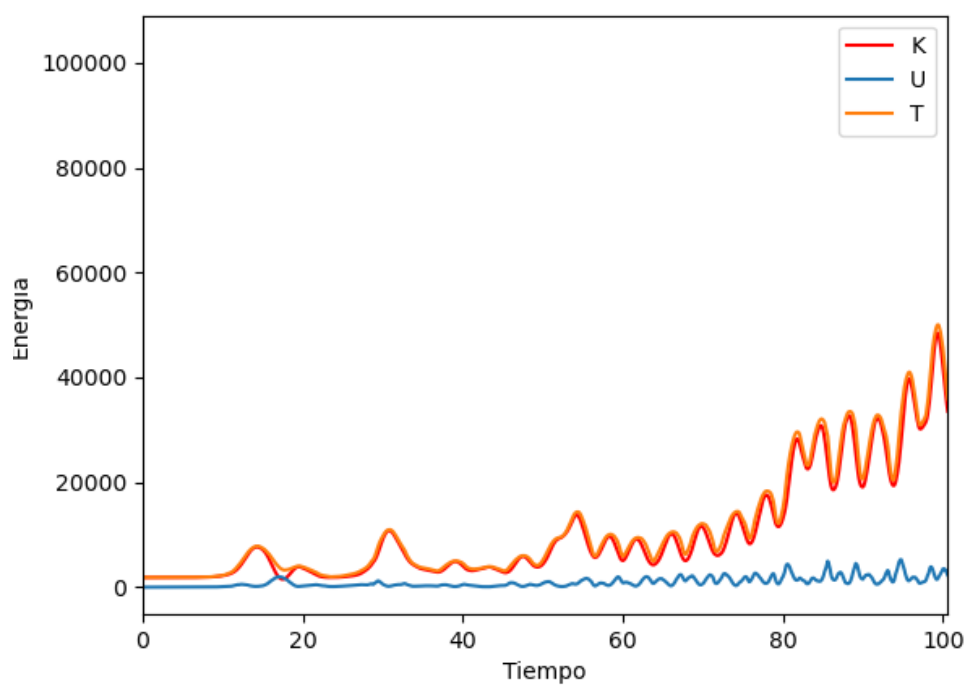


Figura 6.19: Evolución temporal de las energías potencial y cinética. Se puede observar como, conforme la energía potencial disminuye, la cinética aumenta.

En cuanto a la teoría fundamental del plasma hay una amplia bibliografía detrás. De la literatura consultada para los fundamentos detrás de los fenómenos estudiados destacan *Fundamentals of Plasma physics* de Paul Bellan [2] y *Plasma physics. An introduction* de Richard Fitzpatrick[6]. Además, un autor que cubre los temas de electromagnetismo aplicado al plasma es David Griffiths en su libro *Introduction to Electrodynamics* [8].

Ahora, todo el fundamento teórico del método Particle-In-Cell se encuentra ampliamente desarrollado en *Computer simulation using particles* de R. Hockney y J.Easwood[13] y en el libro fundamental del tema: *Plasma physics via computer simulation* de A.B. Langdon y C.K. Birdsall [1]

En el caso de las simulaciones, en el trabajo *Electrostatic PIC simulation of plasma in one dimension* de Daniel Martin[11] se encuentran resultados tanto de oscilaciones de plasma frío como de la inestabilidad Two-stream. Sin embargo, hay trabajos más completos en el caso de la inestabilidad Two-stream, como es el caso de *one, two- and three dimensional numerical simulation of two-beam plasmas* de W.C. Neslon y R.L. Morse[15]. En el caso de la inestabilidad Beam-plasma solo se encontró el libro *Parallel computing works!* de Fox, Williams y Messina[7]. En este libro se llega a los mismos resultados que los obtenidos en la sección 6.3 pero con otro método completamente diferente. También se consultó el trabajo de Roger Hess: *Study of Beam-plasma instability by spectroscopic methods*[9] que, utilizando métodos diferentes también llega a resultados congruentes.

En el caso del amortiguamiento de Landau, el mejor desarrollo teórico para el caso lineal (que es el abordado en este trabajo) se encuentra en *Introduction to plasma physics and controlled fusion* de Francis Chen[4]. Además, se tiene resultados de simulación en el trabajo *Simulation of linear and nonlinear Landau damping of lower hybrid waves* de Lei Qi, X.Y. Wang y Y.Lin[10] y en un capítulo del libro de A.B. Langdon C.K. Birdsall[1] anteriormente mencionado. Precisamente en esta sección se encuentra un diferenciador de este trabajo: los resultados con el libro de Lei Qi et al son congruentes con los obtenidos, pero desde otro enfoque. En cambio, con los de A.B. Langdon y C.K. Birdsall se tienen resultados desde el mismo enfoque computacional y distintos parámetros. Sin embargo, en toda la bibliografía solo se presentó un análisis gráfico de las energías durante el amortiguamiento de Landau y este se encuentra en el libro anteriormente mencionado pero con una muy pobre graficación y descripción. En este trabajo se hizo más énfasis en esta parte.

- Se construyó un código en Python 3.8 funcional para analizar oscilaciones de plasma frío, las inestabilidades Two-stream y Beam-plasma y para comprender el amortiguamiento de Landau. Estos resultados fueron congruentes con lo ya explorado en la bibliografía, como ya se ha mencionado en la discusión de los resultados y en los antecedentes.
- Se logró trabajar con una mayor cantidad de partículas, a diferencia de lo expuesto en trabajos como los de Martin[11] y Langdon y Birdsall[1], lo cual permitió observar como la interacción entre partículas y los campos autogenerados se mantiene congruente independientemente del número de partículas.
- En este trabajo se presentó en los resultados de la inestabilidad de Landau se presentaron gráficas de la energía que no había sido efectuada en la bibliografía estudiada o bien, como es el caso de la energía potencial en el libro de Langdon[1], la visualización de sus resultados no era tan amigable. Esto permitió observar el fenómeno de una manera más clara y entender como se comporta en los aspectos referentes a la energía del sistema.

---

## Bibliografía

---

- [1] A.B. Langdon, C.K. Birdsall y: *Plasma physics via computer simulation*. Taylor and Francis, USA, 2ª edición, 2004.
- [2] Bellan, Paul: *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [3] Burton D. Fried, Samuel D. Conte: *The plasma dispersion function*. Academic Press, Nueva York, 1ª edición, 1961.
- [4] Chen, Francis F.: *Introduction to Plasma physics and controlled fusion*. Springer, USA, Nueva York, 2ª edición, 1984.
- [5] Eliezer, Shalom y Yaffa Eliezer: *The fourth state of matter. An introduction to plasma science*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2ª edición, 2001.
- [6] Fitzpatrick, Richard: *Plasma Physics. An Introduction*. CRC Press, USA, Texas, Austin, 1ª edición, 2015.
- [7] Geoffrey Fox, Roy Williams, Paul Messina: *Parallel computing works!* Morgan Kauffmann Publishers, USA, 1ª edición, 1994.
- [8] Griffiths, David J.: *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, USA, 4ª edición, 2013.
- [9] Hess, Roger: *Study of a Beam-plasma instability by spectroscopic methods*. University of California, Lawrence Berkeley laboratory, Diciembre 1972. Financiado por el gobierno de los Estados Unidos y su comisión de energía atómica.
- [10] Lei Qi, X.Y. Wang y Y.Lin: *Simulation of linear and nonlinear Landau damping of lower hybrid waves*. API, 20(20), Junio 2013. Publicado en línea.
- [11] Martin, Daniel: *Electrostatic PIC simulation of plasma in one dimension*. School of physics and astronomy, University of Manchester, Enero 2007. Reporte de cuarto de año de la Maestría en Física.
- [12] P.Gibbon: *Introduction to plasma physics*. Indico CERN. Plasma Wake Acceleration 2014:<https://indico.cern.ch/event/285444/contributions/1636921/>, Noviembre 2014. Último acceso: 04/06/2020.
- [13] R. Hockney, J Eastwood: *Computer simulation using particles*. Adam Hilger, Bristol, 1ª edición, 1988.
- [14] Robert Goldston, Paul Rutheford: *Introduction to Plasma Physics*. Institute of Physics publishing, Bristol, 1995.



- [15] W.C. Nielson, R.L. Morse y: *One-, two-, and three-dimensional numerical simulation of two-beam plasmas*. Physical Review Letters, 23(19):1087–1090, Octubre 1969.

---

## Valor principal de Cauchy

---

En este trabajo, el valor principal de Cauchy se presentó en operaciones que involucraban integrales de contorno. Por eso, esta sección solo cubrirá dicho caso.

El valor principal de Cauchy es un método que permite asignar valores a integrales impropias que, en caso de utilizarse, estas resultarían indefinidas. En el caso de las integrales de contorno tenemos la siguiente situación:

$$f(z) = x + iy \tag{A.1}$$

Donde esta función compleja tiene un polo en el contorno, exactamente como se puede ver en la parte (b) de la figura 4.4. Este polo es rodeado por un círculo de radio  $\varepsilon$  y un trozo de camino fuera de camino denominado  $L(\varepsilon)$ . Siempre que (A.1) sea integrable sobre  $L(\varepsilon)$ , sin importar el tamaño de  $\varepsilon$ , entonces, el valor principal de Cauchy es:

$$P \int_L f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} f(z) dz \tag{A.2}$$

---

Módulos Parametros.py y Funciones.py

---

Listing B.1: Parámetro para el ciclo PIC

```

# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Feb 26 11:36:26 2020

@author: Marcos Gutierrez
"""

import numpy as np
import scipy as sp
#####
# Parametros para el ciclo del PIC
#####

#Parametros principales
noParticulas = 20000 #Numero de particulas
noMalla = 1024 #puntos de la malla
carga_e = -1 #electron
carga_i = 1 #ion
time_step = 2000 #para beamplasma #150 para two stream
vh = 6 #velocidad media del haz. Para pruebas 2-stream y Beam Stream

#Parametros de la malla
coor_malla = [float(i) for i in range(noMalla+1)]
campoEx = np.zeros(noMalla + 1)
x_inicial = np.zeros(noParticulas)
malla_longitud = 32*np.pi #Tamano de la malla espacial #32pi para two stream y beam
plasma_inicio = 0
plasma_final = malla_longitud

#Parametros operacionales

```

```
dx = malla_longitud/noMalla
dt = 0.1
```

```
#Parametros de las particulas
```

```
carga_masa = -1 #relacion carga masa
rho0 = 1 #Densidad del fondo de iones (default)
x0 = 0.0 #perturbacion de amplitud
v0 = 0.0 #perturbacion de velocidad
densidadI = rho0 #densidad ionica
```

```
#Parametros energeticos
```

```
ki =[0.0 for i in range (time_step + 1)]
kdrift =[0 for i in range (time_step + 1)]
upot =[0.0 for i in range (time_step + 1)]
totalenergy =[0.0 for i in range (time_step + 1)]
x_i = plasma_final - plasma_inicio #Longitud de donde va a cargar la malla
espacio_particulas = x_i / noParticulas
carga = -rho0 * espacio_particulas
m = carga/carga_e #masa
```

Listing B.2: Funciones para el ciclo PIC

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
```

```
Created on Tue Mar 24 14:13:12 2020
```

```
@author: Marcos Gutierrez
"""
```

```
import parametros as pa
```

```
import numpy as np
```

```
import scipy as sp
```

```
from scipy import integrate
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#####
```

```
# Funciones para el ciclo del PIC
```

```
#####
```

```
#FUNCION PARA POSICIONES INICIALES
```

```
def buildgrid_pos(x_0):
```

```
    #posiciones:
```

```
    plasma_inicio = 0.0
```

```
    plasma_final = pa.malla_longitud
```

```
    x_i = plasma_final - plasma_inicio #Longitud de donde va a cargar la malla
```

```
    espacio_particulas = x_i / pa.noParticulas
```

```
    carga = -pa.rho0 * espacio_particulas
```

```
    masa = carga/pa.carga_e
```

```
    for i in range(pa.noParticulas):
```

```
        x_0[i] = plasma_inicio + espacio_particulas * (i + 0.5)
```

```
        x_0[i] += pa.x0 * np.cos(x_0[i])
```

```
    return x_0
```

```

def leapfrog(x,v): #Necesaria para que el proceso de Leapfrog sea valido
    for i in range (len(x)):
        x[i] = x[i] + 0.5 * pa.dt * v[i]
    return x

```

*#FUNCION PARA LA VELOCIDAD DE PLASMA FRIO*

```

def buildgrid_vel():
    #velocidades
    #plasma frio
    v_0 = np.zeros(pa.noParticulas)
    v_0[1:pa.noParticulas] = 0.0

    return v_0

```

*#FUNCION PARA LA VELOCIDAD DE LA INESTABILIDAD TWO STREAM PLASMA*

```

def buildgrid_vel_2bp(x):
    velocidad = np.zeros(pa.noParticulas)
    for i in range(pa.noParticulas):
        #Construcción de la distribución Maxwelliana de la velocidad
        f_velmax = 0.5*(1 + sp.exp(-2*(pa.vh**2)))
        vmin = -5 * pa.vh
        vmax = 5*pa.vh
        v_temp = vmin + (vmax-vmin)*(sp.random.random())
        f_vel = 0.5 * (sp.exp(-(v_temp - pa.vh)*(v_temp - pa.vh) / 2.0) + sp.exp(-(v_
        x_temp = f_velmax*(sp.random.random())
        while x_temp > f_vel:
            f_velmax = 0.5*(1 + sp.exp(-2*pa.vh*pa.vh))
            vmin = (-5) * pa.vh
            vmax = 5*pa.vh
            v_temp = vmin + (vmax-vmin)*(sp.random.random())
            f_vel = 0.5 * (sp.exp(-(v_temp - pa.vh)*(v_temp - pa.vh) / 2.0) + sp.exp
            x_temp = f_velmax*(sp.random.random())
            va_temp = v_temp + pa.v0*np.cos(2*np.pi*x[i]/pa.malla_longitud)
        velocidad[i] = va_temp
    return velocidad

```

*#FUNCION PARA LA VELOCIDAD DE LA INESTABILIDAD BEAM PLASMA*

```

def buildgrid_vel_ibp (x):
    velocidad = []
    v_m = pa.vh
    n_l = pa.noParticulas * 0.9 #90% de las particulas estan a una velocidad menor
    n_m = pa.noParticulas * 0.1 #10% de las particulas van a una velocidad mayor
    v_s = (v_m * n_m)/(n_l-n_m)

    for i in range (pa.noParticulas):
        f_velmax =0.5*(1 + sp.exp(-2.0*(v_m**2)))
        vmin = -2*v_m
        vmax = 2*v_m
        v_temp = vmin + (vmax - vmin)*(np.random.random())
        f = (1-(n_m/n_l))*np.exp(-(v_temp - v_s)*(v_temp - v_s)/1.0) + (n_m/n_l)*np
        x_temp = f_velmax*(np.random.random())
        while x_temp > f:
            f_velmax =0.5*(1 + sp.exp(-2.0*(v_m**2)))
            vmin = -2*v_m

```

```

        vmax = 2*v_m
        v_temp = vmin + (vmax - vmin)*(np.random.random())
        f = (1-(n_m/n_l))*np.exp(-(v_temp - v_s)*(v_temp - v_s)/1.0) + (n_m/n_l)
        x_temp = f_velmax*(np.random.random())
        velocidad.append(v_temp+ pa.v0*np.cos(2*np.pi*x[i]/pa.malla_longitud) )
    return velocidad

#FUNCION DEL CAMPO ELECTRICO
def electricfield(rho0):
    rho_neto = 1.0 + rho0

    integrante = pa.dx * sp.arange(pa.noMalla + 1)
    Ex = integrate.cumtrapz(rho_neto, integrante, initial=integrante[0])
    E_i = sp.sum(Ex)
    return Ex

#FUNCION QUE ACUTUALIZA VELOCIDADES
def chargevelocity(x,v, E_malla):
    '''
    Implementando Ecuacion 8 de Martin.pdf
    '''
    #Extrapolaci n del campo el ctrico (no lo hab a puesto)
    for k in range(pa.noParticulas):
        xa = x[k]/pa.dx
        j1 = int(xa)
        j2 = j1 + 1
        f2 = xa - j1
        f1 = 1.0 - f2
        ex = f1*E_malla[j1] + f2*E_malla[j2]
        v[k] = v[k] + pa.carga_e*pa.dt*ex
    return v

#FUNCION QUE ACUTALIZA POSICIONES
def chargeposition(v_med, x):
    '''
    Implementando Ecuacion 9 de Martin.pdf
    '''
    #Condic i n necesaria para el m todo de integraci n Leap-Frog
    for i in range(pa.noParticulas):
        x[i] = x[i] + v_med[i] * pa.dt
    return x

#FUNCION QUE VERIFICA LAS CONDICIONES DE FRONTERA
def cf(x_cf):
    for i in range(pa.noParticulas):
        if x_cf[i] < pa.plasma_inicio:
            while x_cf[i] < pa.plasma_inicio:
                x_cf[i] += pa.plasma_final
        elif x_cf[i] > pa.plasma_final:
            while x_cf[i] > pa.plasma_final:
                x_cf[i] -= pa.plasma_final

```

```

    return x_cf

#FUNCION QUE CALCULA LA DENSIDAD DE CARGA
def chargedensity(x):
    '''
    Implementando Ecuaciones 20 y 21 de Martin.pdf
    Solo si  $X[0] = 0$  (revisa que esto suceda) YA SUCEDE
    '''
    j1=np.dtype(np.int32)
    j2=np.dtype(np.int32)
    charge_density = np.zeros(pa.noMalla + 1)
    qe = -pa.rho0*((pa.plasma_final-pa.plasma_inicio)/pa.noParticulas)
    re = (qe/pa.dx)
    for k in range (pa.noParticulas):
        xa = x[k]/pa.dx
        j1 = int(xa)
        j2 = j1 + 1
        f2 = xa - j1
        f1 = 1.0 - f2
        charge_density[j1] = charge_density[j1] + re*f1
        charge_density[j2] = charge_density[j2] + re*f2

    charge_density[0] += charge_density[pa.noMalla]
    charge_density[pa.noMalla] = charge_density[0]

    return charge_density

#ENERGIA CINETICA
def Kenergy(v,step):
    v2 = [x**2 for x in v]
    pa.ki[step] = 0.5*pa.m*sum(v2)
    return pa.ki

#ENERGIA POTENCIAL
def Uenergy (Ex,step):
    e2 = [x**2 for x in Ex]
    pa.upot[step] = 0.5*pa.dx*sum(e2)
    return pa.upot

#ENERGIA TOTAL
def totalenergy (k,u):
    for i in range(pa.time_step):
        pa.totalenergy[i] = k[i] + u[i]
    return pa.totalenergy

#DRIFT DE ENERGIA
def drift(v,step):
    vdrift = sum(v)/pa.noParticulas
    pa.kdrift[step] = 0.5*pa.m*(vdrift**(2))*pa.noParticulas
    return pa.kdrift

```