

Trabajo práctico 1

Especificación y WP

14 de septiembre de 2024

Algoritmos y Estructura de Datos

SinGrupo4

Integrante	LU	Correo electrónico
Algañaraz, Franco	1092/22	francoarga10@gmail.com
Illescas, Marcos	390/14	marcosillescas90@gmail.com
Bahamonde, Matias	694/21	matubaham@gmail.com
Marión, Ian Pablo	004/01	ianfrodin@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja) Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina Tel/Fax: (++54+11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

1. Especificación

```
pred habitantesPositivos (in s: seg\langle Ciudad\rangle) {
          (\forall j: \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \longrightarrow_L s[j].habitantes \geq 0)
pred noCiudadesRepetidas (in s: seq\langle Ciudad\rangle) {
          (\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \le i < j < |s| \longrightarrow_L s[i].nombre \ne s[j].nombre)
pred matrizCuadrada (in s: seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle) {
         (\forall i : \mathbb{Z})(0 \le i < |s| \longrightarrow_L |s| = |s[i]|)
pred matrizPositivaSimetricaConCerosDiagonal (in s: seq\langle seq\langle \mathbb{Z} \rangle \rangle) {
          (\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \le i < j < |s| \longrightarrow_L s[i]_i = 0 \land s[i]_j = s[j]_i \land s[i]_j \ge 0)
pred esCamino (in s: seq\langle \mathbb{Z} \rangle, in n: \mathbb{Z}, in m: \mathbb{Z}, in A: seq\langle seq\langle \mathbb{Z} \rangle \rangle) {
          |s| \ge 2 \wedge s[0] = n \wedge s[|s| - 1] = m \wedge
          (\forall i : \mathbb{Z})(0 \le i < |s| \longrightarrow_L 0 \le s[i] < |A|) \land
          (\forall j: \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| - 1 \longrightarrow_L A[s[j]]_{s[j+1]} > 0)
1.1.
                grandesCiudades
proc grandesCiudades (in ciudades: seg\langle Ciudad \rangle) : seg\langle Ciudad \rangle
              requiere \{habitantesPositivos(ciudades) \land noCiudadesRepetidas(ciudades)\}
              asegura \{ |res| = CantidadCiudadesMayor50000(ciudades) \land 
              (\forall i: \mathbb{Z})(0 \leq i < |res| \longrightarrow_L (\exists j: \mathbb{Z})(0 \leq j < |ciudades| \land_L (res[i] = ciudades[j] \land ciudades[j] \land bitantes > 50000))) \}
aux CantidadCiudadesMayor50000 (in s: seq\langle Ciudad\rangle) : \mathbb{Z} =
       \sum_{i=0}^{|s|-1} if s[i].habitantes > 50000 then 1 else 0 fi;
1.2.
                sumaDeHabitantes
proc sumaDeHabitantes (in menoresDeCiudades: seq\langle Ciudad \rangle, in mayoresDeCiudades: seq\langle Ciudad \rangle): seq\langle Ciudad \rangle
              \texttt{requiere} \; \{ |menoresDeCiudades| = |mayoresDeCiudades| \; \land \;
              mismosNombres(menoresDeCiudades, mayoresDeCiudades) \land
              habitantesPositivos(menoresDeCiudades) \land habitantesPositivos(mayoresDeCiudades) \land
              noCiudadesRepetidas(menoresDeCiudades) \land noCiudadesRepetidas(mayoresDeCiudades)
              asegura \{ |res| = |menoresDeCiudades| \land
              (\forall i : \mathbb{Z})(0 \le i < |res| \longrightarrow_L (\exists j : \mathbb{Z})(\exists k : \mathbb{Z})(0 \le j < k < |menoresDeCiudad| \land_L
              siCoincidenNombresSumoHabitantes(res, menoresDeCiudades, mayoresDeCiudades, i, j, k)))
pred mismosNombres (in s: seq\langle Ciudad\rangle, in t: seq\langle Ciudad\rangle) {
          (\forall i : \mathbb{Z})(0 \le i < |s| \longrightarrow_L (\exists j : \mathbb{Z})(0 \le j < |t| \land_L s[i].nombre = t[j].nombre))
pred siCoincidenNombresSumoHabitantes (in s: seq\langle Ciudad\rangle, in t: seq\langle Ciudad\rangle, in r: seq\langle Ciudad\rangle, in i: \mathbb{Z}, in j: \mathbb{Z}, in k:
\mathbb{Z}) {
          (s[i].nombre = t[j].nombre \land s[i].nombre = r[k].nombre) \longrightarrow s[i].habitantes = t[j].habitantes + r[k].habitantes
                hayCamino
1.3.
proc hayCamino (in distancias : seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle, in desde : \mathbb{Z}, in hasta : \mathbb{Z}) : Bool
              requiere \{matrizCuadrada(distancias) \land matrizPositivaSimetricaConCerosDiagonal(distancias) \land matrixPositivaSimetricaConCerosDiagonal(distancias) \land matrixP
              0 \le desde < |distancias| \land 0 \le hasta < |distancias| \land desde \ne hasta
              asegura \{res = true \longleftrightarrow (\exists c : seq(\mathbb{Z}))(esCamino(c, desde, hasta, distancias))\}
1.4.
                cantidadCaminosNSaltos
proc cantidadCaminosNSaltos (inout conexion: seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle, in n: \mathbb{Z})
              requiere \{n > 1 \land matrizCuadrada(conexion) \land
              matrizPositivaSimetricaConCerosDiagonal(conexion) \land unosYceros(conexion) \land conexion = C_0
```

1.5. caminoMínimo

```
proc caminoMinimo (in origen: \mathbb{Z}, in destino: \mathbb{Z}, in distancias: seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle): seq\langle \mathbb{Z}\rangle requiere \{matrizCuadrada(distancias) \land matrizPositivaSimetricaConCerosDiagonal(distancias) \land 0 \leq origen < |distancias| \land 0 \leq destino < |distancias| \land origen \neq destino\} asegura \{(|res|=0 \longleftrightarrow \neg(\exists s: seq\langle \mathbb{Z}\rangle)(esCamino(s, origen, hasta, distancias))) \lor (esCamino(res, origen, hasta, distancias) \land (\forall c: seq\langle \mathbb{Z}\rangle)(esCamino(c, origen, destino, distancias) \longleftrightarrow distanciaTotal(res, distancias) \leq distanciaTotal(c, distancias)))\} aux distanciaTotal (in s: seq\langle \mathbb{Z}\rangle, in A: seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle): \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|c|-2} A[c[i]]_{c[i+1]};
```

2. Demostraciones de correctitud

2.1. Demostrar que la implementación es correcta con respecto a la especificación.

```
proc poblacionTotal (in ciudades: seq\langle Ciudad\rangle) : \mathbb{Z}
         requiere \{(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |ciudades| \land_L ciudades[j].habitantes > 50000) \land
         (\forall k: \mathbb{Z})(0 \leq k < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \land
         (\forall m: \mathbb{Z})(\forall n: \mathbb{Z})(0 \leq m < n < |ciudades| \longrightarrow_{L} ciudades[m].nombre \neq ciudades[n].nombre)\}
         asegura \{res = \sum_{i=0}^{|ciudades|-1} ciudades[i].habitantes\}
    S_1: res := 0
    S_2: i := 0
    while (i < ciudades.length) do
    \mathbf{S}_3: res := res + ciudades.[i].habitantes
    S_4: i := i + 1
    endwhile
    P \equiv A \wedge B \wedge C
    A \equiv (\exists l : \mathbb{Z})(0 \le l < |ciudades| \land_L ciudades[l].habitantes > 50000)
    B \equiv (\forall k : \mathbb{Z})(0 \le k < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[k].habitantes \ge 0)
    C \equiv (\forall m : \mathbb{Z})(\forall n : \mathbb{Z})(0 \le m < n < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[m].nombre \neq ciudades[n].nombre)
    Pc \equiv res = 0 \land i = 0 \land A \land B \land C
    B \equiv i < |ciudades|
    I \equiv 0 \le i \le |ciudades| \land_L res = \sum_{i=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes
    f_v \equiv |ciudades| - i
    Como la última instrucción del programa es el ciclo, podemos asumir que
    Q \equiv Qc \equiv res = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes
```

Para demostrar la correctitud del programa basta ver que son válidas las siguientes triplas de Hoare:

$$\{Pc\}S_c\{Qc \equiv Q\} \ y \ \{P\}S_1; S_2\{Pc\}$$

2.1.1. $Pc \implies wp(S_3; S_4, Qc)$ (Teorema del Invariante y Terminación)

2.1.1.1 $Pc \implies I$

$$Pc \equiv res = 0 \ \land i = 0 \ \land A \land B \land C \implies 0 \le 0 \le |ciudades| \land_L 0 = \sum_{j=0}^{-1} ciudades[j].habitantes \equiv 0 \le |ciudades| \land_L 0 = 0 \equiv True \ \land_L True \equiv True \ Pc \implies I$$

2.1.1.2 $I \wedge B \implies wp(S_3; S_4, I)$

$$\begin{split} wp(S_3;S_4,I) &\equiv wp(res=res+ciudades.[i].habitantes,\ wp(i=i+1,I)) \equiv \\ wp(res=res+ciudades.[i].habitantes,\ def(i+1) \land_L I^i_{i+1}) &\equiv \\ wp(res=res+ciudades.[i].habitantes,\ True \land_L 0 \leq i+1 \leq |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^i ciudades[j].habitantes) \equiv \\ wp(res=res+ciudades.[i].habitantes,\ -1 \leq i \leq |ciudades| -1 \land_L res = \sum_{j=0}^i ciudades[j].habitantes) &\equiv \\ I' \end{split}$$

 $def(res+ciudades.[i].habitantes) \wedge_L (I^{'})^{res}_{res+ciudades.[i].habitantes} \equiv$

 $0 \le i < |ciudades| \land_L - 1 \le i \le |ciudades| - 1 \land_L res + ciudades.[i].habitantes = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes = 0 \le i < |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes$

$$\begin{split} I \wedge B &\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L \ res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \wedge i < |ciudades| \equiv \\ 0 &\leq i < |ciudades| \wedge_L \ res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \Longrightarrow \\ 0 &\leq i < |ciudades| \wedge_L \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \equiv \\ True &\wedge_L \ True \equiv \\ True & I \wedge B \Longrightarrow wp(S_3; S_4, I) \end{split}$$

2.1.1.3 $I \wedge \neg B \implies Qc$

$$\begin{split} I \wedge \neg B \equiv 0 \leq i \leq |\mathit{ciudades}| \wedge_L \mathit{res} &= \sum_{j=0}^{i-1} \mathit{ciudades}[j].\mathit{habitantes} \wedge i \geq |\mathit{ciudades}| \equiv \\ & i = |\mathit{ciudades}| \wedge_L \mathit{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \mathit{ciudades}[j].\mathit{habitantes} \equiv \\ & \mathit{res} = \sum_{j=0}^{|\mathit{ciudades}|-1} \mathit{ciudades}[j].\mathit{habitantes} \implies \\ & \sum_{j=0}^{|\mathit{ciudades}|-1} \mathit{ciudades}[j].\mathit{habitantes} = \sum_{j=0}^{|\mathit{ciudades}|-1} \mathit{ciudades}[j].\mathit{habitantes} \equiv \\ & \mathit{True} \wedge_L \mathit{True} \equiv \\ & \mathit{True} \\ & I \wedge \neg B \implies \mathit{Qc} \end{split}$$

2.1.1.4 $I \wedge B \wedge v_0 = f_v \implies wp(S_3; S_4, f_v < v_0)$

$$\begin{split} ℘(S_3; S_4, f_v < v_0) \equiv wp(res = res + ciudades[i].habitantes, wp(i = i + 1, |ciudades| - i < v_0)) \equiv \\ ℘(res = res + ciudades[i].habitantes, def(i + 1) \land_L (|ciudades| - i < v_0)^i_{i+1}) \equiv \\ ℘(res = res + ciudades[i].habitantes, True \land_L |ciudades| - i - 1 < v_0) \equiv \\ &def(res + ciudades[i].habitante) \land_L (|ciudades| - i - 1 < v_0)^{res}_{res + ciudades[i].habitante} \equiv \\ &0 \leq i < |ciudades| \land_L |ciudades| - i - 1 < v_0 \equiv \end{split}$$

 $I \wedge B \wedge v_0 = f_v \equiv 0 \le i \le |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \wedge i < |ciudades| \wedge v_0 = |ciudades| - i \equiv i \le |ciudades|$

$$0 \le i < |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land v_0 = |ciudades| - i \implies$$

$$0 \le i < |ciudades| \land_L |ciudades| - i - 1 < |ciudades| - i \equiv$$

$$True \land_L True \equiv$$

$$True$$

$$I \land B \land v_0 = f_v \implies wp(S_3; S_4, f_v < v_0)$$

2.1.1.5
$$I \wedge f_v \leq 0 \implies \neg B$$

$$I \wedge f_v \leq 0 \equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge |ciudades| - i \leq 0 \equiv$$

$$0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge |ciudades| \leq i \equiv$$

$$i = |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \implies$$

$$i \geq |ciudades| \equiv$$

$$True$$

$$I \wedge f_v \leq 0 \implies \neg B$$

2.1.2.
$$P \implies wp(S_1; S_2, Pc)$$

$$wp(S_1; S_2, Pc) \equiv wp(res = 0, wp(i = 0, Pc)) \equiv wp(res = 0, def(0) \land_L Pc_0^i) \equiv wp(res = 0, True \land_L res = 0 \land 0 = 0 \land A \land B \land C) \equiv def(0) \land_L (res = 0 \land True \land A \land B \land C)_0^{res} \equiv True \land_L 0 = 0 \land A \land B \land C \equiv True \land A \land B \land C \equiv A \land B \land C$$

$$P \equiv A \land B \land C \implies A \land B \land C \equiv True \land True \land True \equiv True$$

$$P \implies wp(S_1; S_2, Pc)$$

El programa es correcto con respecto a su especificación.

2.2. Demostrar que el valor devuelto es mayor a 50.000.

Informalmente, a partir de la precondición del programa se puede asumir que existe algún elemento de la secuencia de entrada con más de 50.000 habitantes. Como el ciclo, mediante el paso de las iteraciones, suma los habitantes de cada ciudad de la entrada, no hay ciudades con un numero negativo de habitantes y el ciclo finaliza, se puede concluir que la suma total de habitantes dará como resultado al menos 50.000, cumpliendo así lo pedido.

Formalmente, para demostrar que el valor devuelto es mayor a 50.000, consideramos la siguiente postcondición Q y vemos si el programa sigue siendo correcto con respecto a su especificación.

Tomando P, B, Pc, f_v igual que en el punto anterior, y

$$\begin{split} Q &\equiv Qc \equiv res = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes \land res > 50000 \\ A &\equiv (\exists l: \mathbb{Z})(0 \leq l < |ciudades| \land_L ciudades[l].habitantes > 50000) \\ B &\equiv (\forall k: \mathbb{Z})(0 \leq k < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[k].habitantes \geq 0) \\ I &\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \end{split}$$

Para demostrar la correctitud del programa basta ver que son válidas las siguientes triplas de Hoare:

$$\{Pc\}S_c\{Qc \equiv Q\} \ y \ \{P\}S_1; S_2\{Pc\}\}$$

2.2.1. $Pc \implies wp(S_3; S_4, Qc)$ (Teorema del Invariante y Terminación)

2.2.1.1
$$Pc \implies I$$

$$Pc \equiv res = 0 \ \land i = 0 \ \land A \land B \land C \implies 0 \le 0 \le |ciudades| \land_L 0 = \sum_{j=0}^{-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \equiv 0$$

$$0 \leq |ciudades| \land_L 0 = 0 \land True \land True \equiv$$

$$True \land_L True \equiv$$

$$True$$

$$Pc \implies I$$

2.2.1.2 $I \wedge B \implies wp(S_3; S_4, I)$

 $wp(S_3; S_4, I) \equiv wp(res = res + ciudades.[i].habitantes, wp(i = i + 1, I)) \equiv$ $wp(res = res + ciudades.[i].habitantes, def(i+1) \land_L I_{i+1}^i) \equiv$ $wp(res = res + ciudades.[i].habitantes, \ True \land_L 0 \le i+1 \le |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^i ciudades[j].habitantes \land A \land B) \equiv i$

 $def(res + ciudades.[i].habitantes) \land_L (I^{'})_{res + ciudades.[i].habitantes}^{res} \equiv$

 $0 \le i < |ciudades| \land_L - 1 \le i \le |ciudades| - 1 \land_L res + ciudades.[i].habitantes = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \land A \land B \equiv 0$ $0 \leq i < |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B$

 $I \wedge B \equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge A \wedge B \wedge i < |ciudades| \equiv$

$$0 \le i < |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \implies$$

 $0 \le i < |ciudades| \land_L \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \equiv 0$

$$True \wedge_L True \wedge True \wedge True \equiv$$

True

$$I \wedge B \implies wp(S_3; S_4, I)$$

2.2.1.3 $I \wedge \neg B \implies Qc$

 $I \wedge \neg B \equiv 0 \le i \le |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge A \wedge B \wedge i \ge |ciudades| \equiv 0$

$$i = |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \equiv$$

$$res = \sum_{i=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \implies$$

 $res = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j]. habitantes \land A \land B \implies \\ \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j]. habitantes = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j]. habitantes \land \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j]. habitantes > 50000$

$$\equiv$$
 True $\wedge_L True \equiv$

$$I \wedge \neg B \implies Qc$$

2.2.1.4 $I \wedge B \wedge v_0 = f_v \implies wp(S_3; S_4, f_v < v_0)$

 $wp(res = res + ciudades[i].habitantes, def(i+1) \land_L (|ciudades| - i < v_0)_{i+1}^i) \equiv$ $wp(res = res + ciudades[i].habitantes, True \land_L | ciudades[-i - 1 < v_0) \equiv$ $def(res + ciudades[i].habitante) \land_L (|ciudades| - i - 1 < v_0)^{res}_{res + ciudades[i].habitante} \equiv$ $0 \le i < |ciudades| \land_L |ciudades| - i - 1 < v_0 \equiv$

 $I \wedge B \wedge v_0 = f_v \equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \wedge A \wedge B \wedge i < |ciudades| \wedge v_0 = |ciudades| - i = |ciudades| + |ciudades$ $\equiv 0 \le i < |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land A \land B \land v_0 = |ciudades| - i \implies$ $0 \le i < |ciudades| \land_L |ciudades| - i - 1 < |ciudades| - i \equiv$

$$True \wedge_L True \equiv$$

$$True$$

$$I \wedge B \wedge v_0 = f_v \implies wp(S_3; S_4, f_v < v_0)$$

2.2.1.5
$$I \wedge f_v \leq 0 \implies \neg B$$

$$\begin{split} I \wedge f_v \leq 0 &\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L \ res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \wedge A \wedge B \wedge |ciudades| - i \leq 0 \equiv \\ 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge_L \ res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \wedge A \wedge B \wedge |ciudades| \leq i \equiv \\ i = |ciudades| \wedge_L \ res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j]. habitantes \wedge A \wedge B \implies \\ i \geq |ciudades| \equiv \\ True \\ I \wedge f_v \leq 0 \implies \neg B \end{split}$$

2.2.2.
$$P \implies wp(S_1; S_2, Pc)$$

$$\begin{split} wp(S_1;S_2,Pc) &\equiv wp(res=0,wp(i=0,Pc)) \equiv wp(res=0,def(0) \wedge_L Pc_0^i) \equiv \\ wp(res=0,True \wedge_L res=0 \wedge 0 = 0 \wedge A \wedge B \wedge C) \equiv \\ def(0) \wedge_L (res=0 \wedge True \wedge A \wedge B \wedge C)_0^{res} \equiv \\ True \wedge_L 0 = 0 \wedge A \wedge B \wedge C \equiv True \wedge A \wedge B \wedge C \equiv A \wedge B \wedge C \end{split}$$

$$P \equiv A \land B \land C \implies A \land B \land C \equiv True \land True \land True \equiv True$$

$$P \implies wp(S_1; S_2, Pc)$$

El programa es correcto con respecto a su especificación.