Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Ciência de Computação, Engenharia de Computação e Ciência de Dados e Inteligência Artificial
AEDs 2: Lista de exercícios de reforço
Material auxiliar de monitoria

(RESPOSTAS) Somatórios

Questão 1)
Dado o código abaixo, forneça o número de **subtrações** executadas em notação de somatórios e dê a sua formula fechada.

```
for(int i = 0; i < n; i++){
    for(int j = i; j < n; j++){
        b = b-1;
        c--;
    }
}
```

Somatório que representa o número de operações:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2i \tag{1}$$

Fórmula fechada:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} 2i &= 2\sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= 2\frac{n(n-1)}{2} \\ &= (n)(n-1)\end{aligned}$$

Questão 2)
Resolva os seguintes somatórios:

a) $\sum_{n=1}^{5} n^2$

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

b) $\sum_{i=1}^{5} 3i$

$$\sum_{i=1}^{5} 3i = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + (3 \cdot 5) = 45$$

c) $\sum_{i=1}^{5}(3-2i)$

$$\sum_{i=1}^{5}(3-2i) = (3-2\cdot 1)+(3-2\cdot 2)+(3-2\cdot 3)+(3-2\cdot 4)+(3-2\cdot 5) = -15$$

d) $\sum_{i=1}^{5}(2i+x)$

$$\sum_{i=1}^{5}(2i+x) = (2\cdot 1+x)+(2\cdot 2+x)+(2\cdot 3+x)+(2\cdot 4+x)+(2\cdot 5+x) = 30+5x$$

Questão 3)
Faça a análise de complexidade dos seguintes códigos. Dê as notações em **somatório** e as **notações assintóticas**.

a)
```
for(int i = 0; i < n; i++){
    media += array[i];
}
media /= n;
```

Solução para a quantidade de atribuições:

$$1+\sum_{i=0}^{n}1$$

Fórmula fechada e Notação Assíntota:

$$2+n$$
$$\Theta(n)$$

b)
```
for(int i = 0; i < n-1; i++) {
    if(array[i] == elem) {
        return true;
    }
}
```

Solução para a quantidade de comparações:

$$\sum_{i=0}^{n-2}1$$

Fórmula fechada e Notação Assíntota:

$$n-1$$
$$\Theta(n)$$

c)
```
int max = A[1];
int min = A[1];
for(int i = 2; i <= n; i++) {
    if(A[i] > max) {
        max = A[i];
    } elif(A[i] < min) {
        min = A[i];
    }
}
```

Melhor Caso:

$$\sum_{i=2}^{n} 1$$
$$(n-1)$$

Pior Caso:

$$\sum_{i=2}^{n} 2$$
$$(2n-2)$$

d)
```
for(int i = 0; i <= n; i++) {
    for(int j = i; j <= n; j++) {
        a+=;
    }
}
```

Solução para a quantidade de comparações:

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i+1)$$

Fórmula fechada e Notação Assíntota:

$$(n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\Theta(n^2)$$

Questão 4)
Faça a prova por indução dos resultados da questão 4.
Passo 1: Para $n = 1$

$$1 + \sum_{i=0}^{n} 1$$

$$n^2 + 2n = 1 + \sum_{i=0}^{n} 1$$

$$1^2 + 2 \cdot 1 = 1 + \sum_{i=0}^{1} 1$$

$$3 = 3$$

Se a igualdade for mantida, o primeiro passo deu certo. Passo 2:

$S_n = n^2 + 2n$ (objetivo)
Substituindo n por $n-1$ e somando com o último termo:
$S_n = (n-1)^2 + 2(n-1) + (2n+1)$
$S_n = n^2 + 2n$

Portanto, por indução, o somatório é verdadeiro para todo $n \geq 0$.
Para os outros casos, repetir o mesmo passo a passo.

Questão 5)
Marque V para verdadeiro e F para falso:

1. (V) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$

2. (V) $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=0}^{99} (k+1)^2$

3. (V) $\sum_{k=1}^{50} k^2 = \sum_{k=2}^{51} (k-1)^2$

4. (F) $\sum_{k=0}^{1000} (3+k) = 3 + \sum_{k=0}^{1000} k$

5. (F) $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$

Questão 6)
Dê o somatório que representa o número de subtrações do trecho de código abaixo. Após, dê a fórmula fechada para esse somatório.

```
for(int i = 0; i < n; i++){
    for(int j = i; j < n; j++){
       for(int j = i; j < n; j++){
           b = b-1;
           c--;
       }
    }
}
```

Passo 1: Análise das repetições

Temos três loops aninhados. Para cada valor de i, o segundo loop começa de $j = i$ e vai até $n-1$. O terceiro loop também começa de $j = i$ e vai até $n-1$, o que significa que ele realiza as subtrações.

O número de subtrações em cada iteração do primeiro loop (para um valor fixo de i) é o número de vezes que o terceiro loop é executado, ou seja, $(n-i)^2$.

Passo 2: Somatório que representa o número de subtrações

O total de subtrações é dado pelo somatório das execuções do terceiro loop em todas as iterações do primeiro loop (i.e., para cada valor de i):

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2$$

Passo 3: Expansão do somatório

Podemos expandir o termo $(n-i)^2$:

$$(n-i)^2 = n^2 - 2ni + i^2$$

Agora, podemos aplicar isso ao somatório:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (n^2 - 2ni + i^2)$$

Isso pode ser separado em três somatórios distintos:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 - 2n \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Passo 4: Cálculo dos somatórios

Agora, vamos calcular cada somatório separadamente:

1. Somatório constante:

$$\sum_{i=0}^{n-1} n^2 = n^2 \cdot n = n^3$$

2. Somatório de Gauss:

O somatório dos inteiros de 0 até $n-1$ é:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$$

Então:

$$-2n \sum_{i=0}^{n-1} i = -2n \cdot \frac{(n-1)n}{2} = -n^2(n-1)$$

3. Somatório quadrático:

O somatório dos quadrados dos inteiros de 0 até $n-1$ é:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Passo 5: Fórmula fechada

Agora, somamos os três termos:

$$S = n^3 - n^2(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Resumo:

- **Somatório que representa o número de subtrações:**

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2$$

- **Fórmula fechada:**

$$S = n^3 - n^2(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Questão 7)
Dê o somatório que representa o número de subtrações do trecho de código abaixo. Após, dê a fórmula fechada para esse somatório.

```
for(int i = 5; i < k; i++){
    for(int j = i+1; j < n-2; j++){
        b = b-1;
        c--;
    }
}
```

Passo 1: Análise das repetições
Temos dois loops aninhados. Para cada valor de i, o segundo loop começa de $j = i+1$ e vai até $n-2$. O número de iterações do segundo loop depende de i, e o número total de subtrações é equivalente ao número de vezes que o segundo loop executa.
Para um valor fixo de i, o número de iterações do segundo loop é dado por:

$$n - 2 - (i+1) = n - i - 3$$

Portanto, o número total de subtrações executadas pelo código pode ser expresso pelo seguinte somatório:

$$S = \sum_{i=5}^{k-1} (n - i - 3)$$

Passo 2: Expansão do somatório
Podemos expandir o somatório:

$$S = \sum_{i=5}^{k-1} (n - 3 - i)$$

$$S = \sum_{i=5}^{k-1} (n-3) - \sum_{i=5}^{k-1} i$$

Agora, podemos separar esses dois somatórios:

$$S = (n-3) \cdot \sum_{i=5}^{k-1} 1 - \sum_{i=5}^{k-1} i$$

Passo 3: Cálculo dos somatórios
Agora, vamos calcular cada somatório separadamente:
1. **Somatório constante:**

$$\sum_{i=5}^{k-1} 1 = (k-1) - 5 + 1 = k - 5$$

Portanto, o primeiro termo é:

$$(n-3) \cdot (k-5)$$

2. **Somatório linear:**

$$\sum_{i=5}^{k-1} i = \frac{(k-1)(k)}{2} - \frac{4(5)}{2} = \frac{(k-1)k}{2} - 10$$

Passo 4: Fórmula fechada

Agora, podemos substituir os valores de ambos os somatórios na equação geral:

$$S = (n-3) \cdot (k-5) - \left(\frac{(k-1)k}{2} - 10 \right)$$

Resumo:

- Somatório que representa o número de subtrações:

$$S = \sum_{i=5}^{k-1} (n - i - 3)$$

- Fórmula fechada:

$$S = (n-3) \cdot (k-5) - \left(\frac{(k-1)k}{2} - 10 \right)$$