Entrega: 22 de octubre de 2025

Problema 1

It has been previously noted that the total time derivative of a function of q_i and t can be added to the Lagrangian without changing the equations of motion (tarea 4). What does such an addition do to the canonical momenta and the Hamiltonian? Show that the equations of motion in terms of the new Hamiltonian reduce to the original Hamilton's equations of motion.

Solución

Recordamos la forma del Lagrangiano L',

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}F(q_i,t)}{\mathrm{d}t}.$$

Ahora, calculamos el momento generalizado,

$$p_i' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right). \tag{1.1}$$

Recordando que el último término se puede escribir como

$$\frac{\mathrm{d}F(q_i,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F(q_i,t)}{\mathrm{d}q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Así, el momento generalizado queda como

$$p_i' = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\partial F(q_i,t)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right],$$

$$p_i' = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i},$$

pero $p_i = \frac{\partial p_i}{\partial q_i}$,

$$\boxed{p_i' = p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}.} \tag{1.3}$$

Entonces, el Hamiltoniano es

$$
\begin{aligned}
H' &= p'_i \dot{q}_i - L', \\
&= \left(p_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \left(L + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo la Ecuación (1.2), tenemos que

$$
\begin{aligned}
H' &= p_i \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i - L - \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial F}{\partial t}, \\
&= p_i \dot{q}_i - L - \frac{\partial F}{\partial t}, \\
&\boxed{H' = H - \frac{\partial F}{\partial t}.}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Calculamos ahora las ecuaciones de Hamilton de H', recordando que las ecuaciones para H son

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\
-\dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}.
\end{aligned}
$$

Así, para la primera ecuación tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H'(q_i, p'_i)}{\partial p'_i} &= \frac{\partial}{\partial p'_i}\left(p'_i \dot{q}_i - L'(q_i, \dot{q}_i)\right), \\
&= \frac{\partial (p'_i \dot{q}_i)}{\partial p'_i} - \frac{\partial L'}{\partial p'_i}, \\
&= \dot{q}_i.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}.}
$$

Ahora, para la segunda ecuación, sustituimos Ecuaciones (1.3) y (1.4),

$$
-\left(\dot{p}_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(H(q_i, p_i) - \frac{\partial F}{\partial t}\right),
$$

$$-\dot{p}_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

pero $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)$. Así,

$$\boxed{-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}.}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Hamilton de H' se reducen a las ecuaciones de Hamilton para H.

Problema 2

A particle in a uniform gravitational field is constrained to the surface of a sphere, centered at the origin, with a radius $r(t)$ which is a given function of time. Obtain the Hamiltonian and the canonical equations. Discuss energy conservation. Is the Hamiltonian the total energy?

Solución

Como el movimiento está constriñido a una esfera, usamos coordenadas para describir el movimiento de la partícula, por lo que la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\phi^2\right),$$

Mientras que la energía potencial es

$$U = mgr\cos\theta.$$

De esta forma, el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - mgr\cos\theta.$$

Pero como $r(t)$ se nos da explícitamente, i.e. no es una variable dinámica. El problema se reduce a uno con 2 DOF.

Calculamos los momentos conjugados

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} &&\implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \\ p_\phi &= \frac{\partial l}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} &&\implies \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano del sistema es

$$\begin{aligned} H &= p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) + mgr\cos\theta, \\ &= p_\theta\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right) + p_\phi\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right) - \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2 - \frac{1}{2}mr^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\cos\theta.}$$

Por lo que las ecuaciones de Hamilton son

$$\text{Para } \theta: \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \wedge \qquad -p_\theta = \frac{p_\phi}{4mr^2\sin\theta\cos\theta} - mgr\sin\theta,$$

$$\text{Para } \phi: \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2\theta} \quad \wedge \quad p_\phi \quad = 0.$$

Por otro lado, como el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, $E = T + U$,

$$E = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2\theta} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\cos\theta.$$

¿Es $H = E$? La respuesta es no, pues

$$E = H + m\dot{r}^2. \tag{2.1}$$

Es decir, el Hamiltoniano no corresponde a la energía total del sistema, pues aunque el potencial es independiente de las velocidades y no depende explícitamente del tiempo, la transformación de coordenadas sí depende explícitamente del tiempo.

Finalmente, para determinar si la energía del sistema se conserva, calculamos la derivada respecto al tiempo de la Ecuación (2.1),

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + 2m\dot{r}\ddot{r}, \\
&= \frac{\partial H}{\partial t} + 2m\dot{r}\ddot{r}, \\
&= m\dot{r}\ddot{r} + 2m\dot{r}\ddot{r}, \\
&= 3m\dot{r}\ddot{r}, \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía del sistema no se conserva.

Problema 3

Consider a particle of mass m moving in two dimensions, subject to a force $\vec{F} = -kx\hat{\boldsymbol{x}} + K\hat{\boldsymbol{y}}$, where k and K are positive constants. Write down the Hamiltonian and Hamilton's equations, using x and y as generalized coordinates. Solve the latter and describe the motion.

SOLUCIÓN

La energía cinética para este sistema es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{3.1}$$

Mientras que para obtener el potencial, primero verificamos si la fuerza es conservativa, i.e. $\nabla\times\vec{F} = 0$,

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -kx & k & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \hat{\mathbf{i}}(0-0) - \hat{\mathbf{j}}(0-0) + \hat{\mathbf{k}}(0-0), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza es conservativa y podemos escribirla como

$$\vec{F} = -\nabla V.$$

Así, tenemos que

$$\frac{\partial V}{\partial k} = kx, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -K. \tag{3.3}$$

De la Ecuación (3.3) tenemos que

$$V = \int \mathrm{d}x\, kx,$$

$$V = k\frac{x^2}{2} + C(y).$$

Sustituyendo en la Ecuación (3.3),

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = -K.$$

Así,

$$C(y) = -Ky + \alpha,$$

donde podemos elegir $\alpha = 0$ sin perdida de generalidad.

Por lo tanto, la energía potencial es

$$\boxed{V = \frac{1}{2}kx^2 - Ky.}$$

Y notemos que la energía potencial no depende de la velocidad ni depende explícitamente del tiempo, por lo que $H = T + V$. De esta manera, escribimos la Ecuación (3.1) en términos de los momentos conjugados, i.e.

$$T = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}.$$

Así, el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + k\frac{x^2}{2} - Ky.$$

Por lo que las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{m}; \quad -\dot{p}_x = kx, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m}; \quad \dot{p}_y \quad = K. \end{aligned}$$

Entonces, la EOM para x es

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

con $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Y, para y,

$$\ddot{y} = \frac{K}{m}. \tag{3.4}$$

Resolviendo cada una de las EOM tenemos que

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Y,

$$\dot{y} = \frac{K}{m}t + v_{0y},$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{K}{m}t^2.$$

Finalmente, tenemos que el movimiento en la dirección x es un movimiento oscilatorio, mientras que en la dirección y, tenemos un movimiento similar al de caída libre.

Problema 4

The relativistic Lagrangian for a particle of a rest mass m_0 moving along the x-axis under the potential field $V(x)$ is given by

$$L = m_0c^2\left(1-\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{1/2}\right) - V(x).$$

Show that the corresponding Hamiltonian is given by

$$H = m_0c^2\left(1+\frac{p_x^2}{m_0^2c^2}\right)^{1/2} - m_0c^2 + V(x),$$

where p_x is the generalized momentum conjugate to x.

Solución

Calculamos el Hamiltoniano dado por

$$H = p_i\dot{q}_i - L.$$

El momento generalizado es:

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0c^2\left[-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2\dot{x}}{c^2}\right)\right],\\
p_x &= \frac{m_0\dot{x}}{\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Resolviendo la expresión anterior para $\dot{x}$,

$$\begin{aligned}
p_x\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{1/2} &= m_0\dot{x},\\
p_x^2\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) &= m_0^2\dot{x}^2,\\
\frac{p_x^2}{m_0^2} - \frac{p_x^2\dot{x}^2}{m_0^2c^2} &= \dot{x}^2,\\
\left(1+\frac{p_x^2}{m_0^2c^2}\right)\dot{x}^2 &= \frac{p_x^2}{m_0^2},
\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{p_x}{m_0\left(1 + \dfrac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)}.} \tag{4.1}$$

Por lo que el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned}
H &= p_x \dot{x} - L, \\
&= p_x \dot{x} + m_0 c^2 \left[\left(1 - \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{1/2}\right) - V(x)\right], \\
&= p_x \dot{x} - m_0 c^2 + m_0 c^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{1/2} + V(x).
\end{aligned}$$

Sustituyendo la Ecuación (4.1) y simplificando,

$$\begin{aligned}
H &= p_x \left(\frac{p_x}{m_0\left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2}}\right) - m_0 c^2 + m_0 c^2 \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{p_x^2}{m_0^2\left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)}\right)\right]^{1/2} + V(x), \\
&= \frac{p_x^2}{m_0\left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2}\right)^{1/2}} - m_0 c^2 + m_0 c^2 \left[\frac{m_0^2 c^2 + p_x^2 - p_x^2}{m_0^2 c^2 \left(1 + \dfrac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)}\right]^{1/2} + V(x), \\
&= \frac{p_x^2}{m_0\left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2}\right)^{1/2}} - m_0 c^2 + m_0 c^2 \left(\frac{m_0 c}{m_0 c\left(1 + \dfrac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/2}}\right) + V(x), \\
&= \frac{\frac{p_x^2}{m_0} + m_0 c^2}{\left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)} - m_0 c^2 + V(x), \\
&= \frac{m_0 c^2 \left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)}{\left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right)} - m_0 c^2 + V(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano es

$$\boxed{H = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p_x^2}{m_0^2 c^2}\right) - m_0 c^2 + V(x).}$$