

Entrega: 9 de febrero de 2024

## Cálculo vectorial:

### Problema 1

La ecuación de una familia de elipsoides está dada por:

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Encontrar el vector unitario normal a cada punto de la superficie de estos elipsoides.

## SOLUCIÓN

Para encontrar el vector normal a la familia de elipsoides debemos calcular el gradiente  $\nabla u$ , tal que,

$$\nabla u = 2 \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right).$$

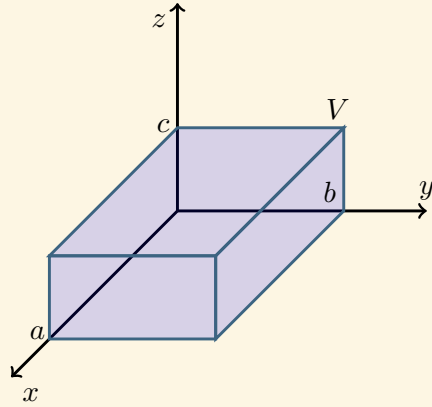
Sin embargo, este vector no está normalizado, por lo que debemos dividir por su magnitud para obtener el vector unitario normal, es decir,

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}, \\ &= \frac{2 \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)}{\sqrt{4 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}}, \end{aligned}$$

$$\hat{u} = \frac{\left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

## Problema 2

Dado el campo vectorial  $\vec{A} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ , evaluar el flujo de  $\vec{A}$  a través de la superficie de un paralelepípedo rectangular de lados  $a, b, c$ , con el origen de uno de los vértices y las aristas a lo largo de las direcciones positivas de los ejes rectangulares, tal como se muestra en la figura 1. Evaluar  $\int \nabla \cdot \vec{A} dV$  sobre el volumen de este mismo paralelepípedo y comparar resultados.



**Figura 1:** Diagrama correspondiente al problema 2.

**Problema 3**

Encontrar  $\nabla \cdot \vec{r}$  para el vector posición  $\vec{r}$  expresado en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, demostrando así que se obtiene el mismo resultado en todos los casos.

## Ley de Coulomb

### Problema 4

Cuatro cargas puntuales iguales,  $q'$ , se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado  $a$ . El cuadrado descansa sobre el plano  $yz$  con uno de sus vértices en el origen y sus lados paralelos a los ejes positivos. Otra carga puntual,  $q$ , se coloca sobre el eje  $x$  a una distancia  $b$  del origen. Encontrar la fuerza total sobre  $q$ .

## Problema 5

La superficie de una esfera de radio  $a$  se encuentra cargada con una densidad superficial de carga constante,  $\sigma$ . ¿Cuál es la carga total,  $Q'$ , de la esfera? Encontrar la fuerza ejercida por esta distribución de carga sobre una carga puntual,  $q$ , situada sobre el eje  $z$  para el caso que  $z > a$  y para el caso en que  $z < a$ .