6 de febrero de 2024

Cuántica, tarea

1) La delta de Dirac $\delta(x-x_0)$ tiene la propiedad de que $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0)$, para una función bien comportada.

a) Prueben que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(x))dx = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}.$$

Para una función derivable que admite inversa y en donde x_0 es una raíz: $f(x_0)=0$. *Sugerencia.* Hagan el cambio de variable $u=f(x)$. A notar que el valor absoluto aparece porque la Delta de Dirac es siempre positiva.

b) Prueben ahora que

$$\int dp^0 d^3p\, \delta\left((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2\right) = \int d^3p \frac{1}{2E},$$

en donde $E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$.

2) Demostrar que la probabilidad de presencia en mecánica cuántica cumple con la ecuación de continuidad, esto es que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0.$$

Donde $\rho = |\Psi|^2$ y $\vec{j} = (i\hbar/2m)[(\nabla\Psi^*)\Psi - \Psi^*\nabla\Psi]$.

3) Una partícula está representada al tiempo $t=0$ por la función de onda

$$\Psi(0,x) = \begin{cases} A(a^2-x^2) & \text{Si} -a\le x\le a; \\ 0 & \text{El resto.}\end{cases}$$

a) Determinar A, ¿Cuál es el valor de expectación de x al tiempo $t=0$?

b) ¿Cuál es el valor de expectación de p al tiempo $t=0$? Notar que no se puede obtener de $p = md\langle x\rangle/dt$, ¿porqué no?

c) Encontrar el valor de expectación de x^2 y de p^2 y sacar la incertidumbre en x, denotada por σ_x y en p, σ_p.