Dinámica de Medios Deformables

Grupo 8253 – Sem. 2024-2

Marcos López Merino *Prof.: Dra. Adriana López Zazueta*

Tarea 1

Entrega: 16 de febrero de 2024

Problema 1

Considerar el campo de desplazamientos definido por:

$$\vec{u}(x,y,t) = u(x,y,t)\hat{e}_x + v(x,y,t)\hat{e}_y$$

donde

$$u(x,y,t) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) \qquad v = -\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)$$

en el dominio $0 \leq x \leq L_x = 1$, $0 \leq y \leq L_y = 1$.

Determinar:

1) el tensor de gradiente del campo de desplazamientos,

   Sabemos que el tensor de gradiente del campo de desplazamientos se obtiene a partir de

$$\nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

   pero como nuestro campo no tiene componente en la dirección de $\hat{e}_z$, entonces

$$\nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Calculando cada una de las componentes, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{2\pi}{L}\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\tfrac{2\pi}{L}\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{2\pi}{L}\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\tfrac{2\pi}{L}\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right).$$

Por lo que $\nabla\vec{u}$ queda como

$$\boxed{\nabla\vec{u} = \tfrac{2\pi}{L}\begin{bmatrix} \cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & -\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & -\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.}$$

2) el tensor de deformación (parte simétrica del gradiente del campo de desplazamientos),

Recordemos que el tensor gradiente del campo de desplazamientos puede escribirse como

$$\nabla\vec{u} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T\right) + \tfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} - (\nabla\vec{u})^T\right),$$

donde el tensor de deformación ε_{ij} es

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.1}$$

y el tensor de rotación ω_{ij} es

$$\omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \tag{1.2}$$

Queremos obtener ecuación (1.1), pero nos podemos ahorrar algunos cálculos debido a nuestra definición del campo de desplazamientos pues las componentes para las cuales $i = 3$ o $j = 3$ serán cero, *i.e.*,

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{3i} = 0.$$

Así,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{2\pi}{L}\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right),$$

$$\varepsilon_{xy} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) - \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)\right) = 0 = \varepsilon_{yx},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\tfrac{2\pi}{L}\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right).$$

Así, el tensor de deformación queda como

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \tfrac{2\pi}{L}\begin{bmatrix} \cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.}$$

3) el tensor de rotación (parte antisimétrica del gradiente del campo de desplazamientos),

Para obtener el tensor de rotación lo hacemos a partir de ecuación (1.2). Nos "ahorramos" nuevamente algunos cálculos pues sabemos que ω_{ij} para $i = j$ y que las componentes cuando $i = 3$ o $j = 3$ serán cero, lo cual nos deja únicamente con las componentes ω_{12} y ω_{21} pero $\omega_{12} = -\omega_{21}$. Entonces,

$$\omega_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\tfrac{2\pi}{L}\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) = -\omega_{21}.$$

Por lo que el tensor de rotación queda como

$$\boxed{\overline{\overline{\omega}} = 2\tfrac{2\pi}{L}\begin{bmatrix} 0 & -\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.}$$

4) el vector de rotación,

Calculamos $\nabla \times \vec{u}$ tal que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & -\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \hat{e}_x\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \hat{e}_y\left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \hat{e}_z\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ &= \tfrac{2\pi}{L}\left(\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)\hat{e}_x + \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{u} = \left(0, 0, \tfrac{4\pi}{L}\sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)\right).}$$

5) la divergencia.

La divergencia la calculamos como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ &= \tfrac{2\pi}{L}\left(\cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right) - \cos\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\tfrac{2\pi y}{L}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{u} = 0.}$$

Graficar:

6) campo de desplazamientos,

   La gráfica del campo de desplazamientos se muestra en la figura 1.

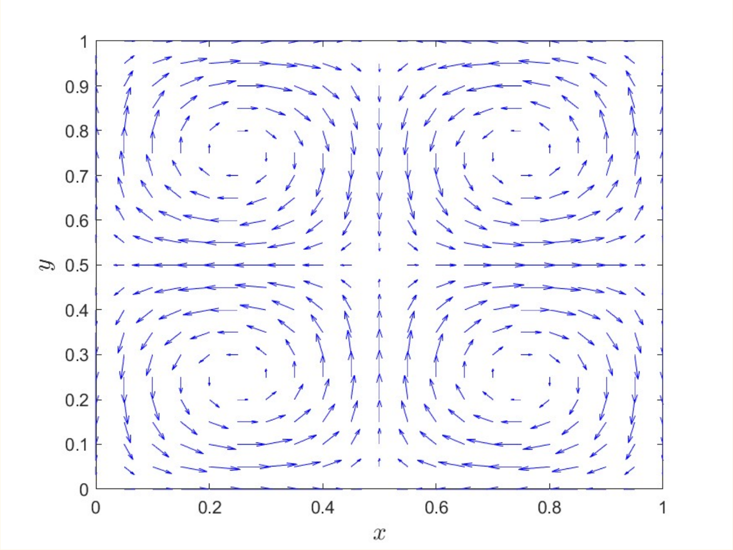

Figura 1: Gráfica del campo de desplazamientos.

7) vector de rotación (nota: considerar como un campo escalar).

   La gráfica del vector de rotación se muestra en la figura 2.

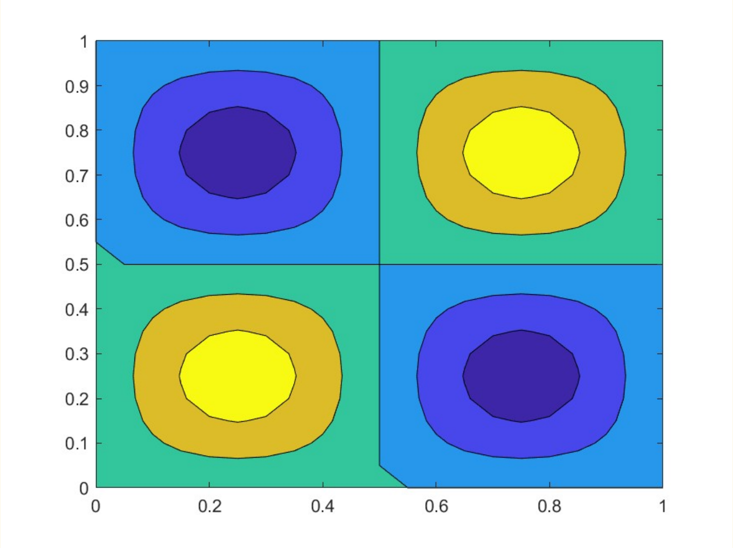

Figura 2: Gráfica del vector de rotación.

Problema 2

Considera el campo escalar definido por:

$$\phi(x, y) = x^2 - y^2$$

en el dominio $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$.

Determinar:

1) el gradiente del campo escalar,

   Calculamos el gradiente del campo escalar como

$$\nabla\phi(x\,\nabla y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, 0\right),$$

$$\boxed{\nabla\phi(x\,\nabla y) = (2x, -2y, 0).} \tag{2.1}$$

2) el Laplaciano del campo escalar,

   Recordemos que el Laplaciano de un campo escalar se define como

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi),$$

   entonces simplemente calculamos la divergencia de ecuación (2.1):

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(x, y) &= \frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial(2y)}{\partial y}, \\ &= 2 - 2, \\ \boxed{\nabla^2\phi(x, y) = 0.} \end{aligned}$$

Graficar:

3) el campo escalar ϕ,

La gráfica del campo escalar $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ se muestra en la figura 3.

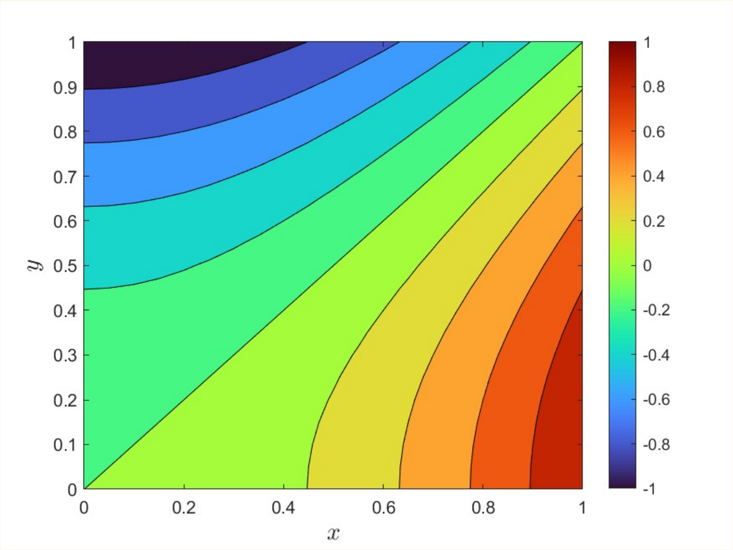

Figura 3: Gráfica del campo escalar $\phi(x, y) = x^2 - y^2$.

4) el gradiente del campo escalar.

La gráfica del gradiente del campo escalar $\nabla\phi(x\,\nabla y) = (2x, -2y, 0)$ se muestra en la figura 4.

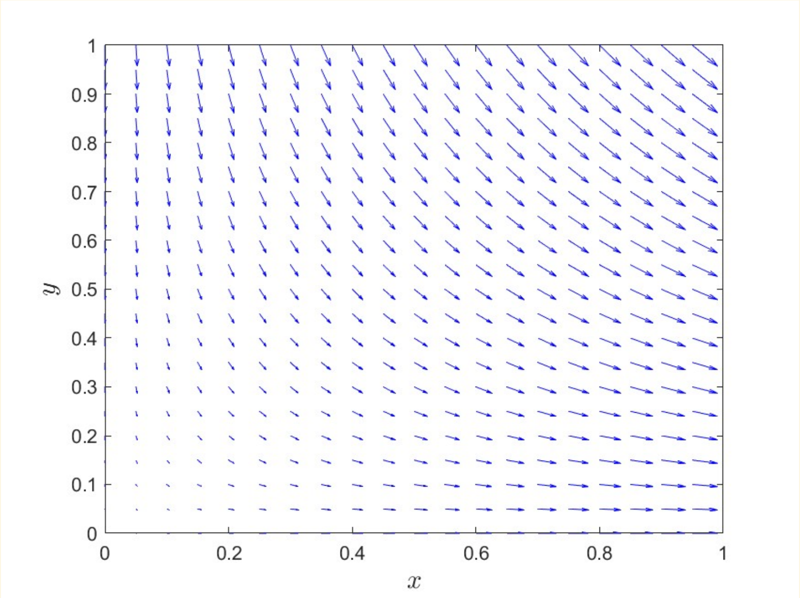

Figura 4: Gráfica del gradiente del campo escalar $\nabla\phi(x\,\nabla y) = (2x, -2y, 0)$.