

DINÁMICA DE MEDIOS DEFORMABLES

Grupo 8253 – Sem. 2024-2

Tarea 1

Marcos López Merino

Prof.: Dra. Adriana López Zazueta

Entrega: 16 de febrero de 2024

Problema 1

Considerar el campo de desplazamientos definido por:

$$\vec{u}(x, y, t) = u(x, y, t)\hat{e}_x + v(x, y, t)\hat{e}_y$$

donde

$$u(x, y, t) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \quad v = -\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$$

en el dominio $0 \leq x \leq L_x = 1, 0 \leq y \leq L_y = 1$.

Determinar:

- 1) el tensor de gradiente del campo de desplazamientos,

Sabemos que el tensor de gradiente del campo de desplazamientos se obtiene a partir de

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

pero como nuestro campo no tiene componente en la dirección de \hat{e}_z , entonces

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando cada una de las componentes, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right).\end{aligned}$$

Por lo que $\nabla \vec{u}$ queda como

$$\nabla \vec{u} = \frac{2\pi}{L} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & -\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) el tensor de deformación (parte simétrica del gradiente del campo de desplazamientos),

Recordemos que el tensor gradiente del campo de desplazamientos puede escribirse como

$$\nabla \vec{u} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) + \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} - (\nabla \vec{u})^T),$$

donde el tensor de deformación ε_{ij} es

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.1)$$

y el tensor de rotación ω_{ij} es

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (1.2)$$

Queremos obtener ecuación (1.1), pero nos podemos ahorrar algunos cálculos debido a nuestra definición del campo de desplazamientos pues las componentes para las cuales $i = 3$ o $j = 3$ serán cero, *i.e.*,

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{3i} = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\right) = 0 = \varepsilon_{yx}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right).\end{aligned}$$

Así, el tensor de deformación queda como

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2\pi}{L} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) el tensor de rotación (parte antisimétrica del gradiente del campo de desplazamientos),

Para obtener el tensor de rotación lo hacemos a partir de ecuación (1.2). Nos “ahorramos” nuevamente algunos cálculos pues sabemos que ω_{ij} para $i = j$ y que las componentes cuando $i = 3$ o $j = 3$ serán cero, lo cual nos deja únicamente con las componentes ω_{12} y ω_{21} pero $\omega_{12} = -\omega_{21}$. Entonces,

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) = -\omega_{21}.$$

Por lo que el tensor de rotación queda como

$$\bar{\omega} = 2\frac{2\pi}{L} \begin{bmatrix} 0 & -\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) el vector de rotación,

Calculamos $\nabla \times \vec{u}$ tal que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & -\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) & 0 \end{vmatrix}, \\ &= \hat{e}_x \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \hat{e}_y \left(-\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ &= \frac{2\pi}{L} \left(\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \hat{e}_x + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \left(0, 0, \frac{4\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \right).$$

5) la divergencia.

La divergencia la calculamos como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ &= \frac{2\pi}{L} \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Graficar:

6) campo de desplazamientos,

La gráfica del campo de desplazamientos se muestra en la figura 1.

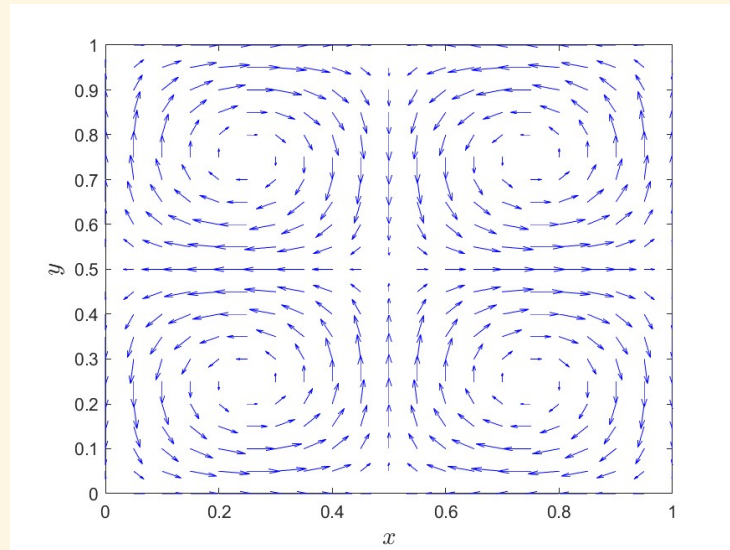


Figura 1: Gráfica del campo de desplazamientos.

7) vector de rotación (nota: considerar como un campo escalar).

La gráfica del vector de rotación se muestra en la figura 2.

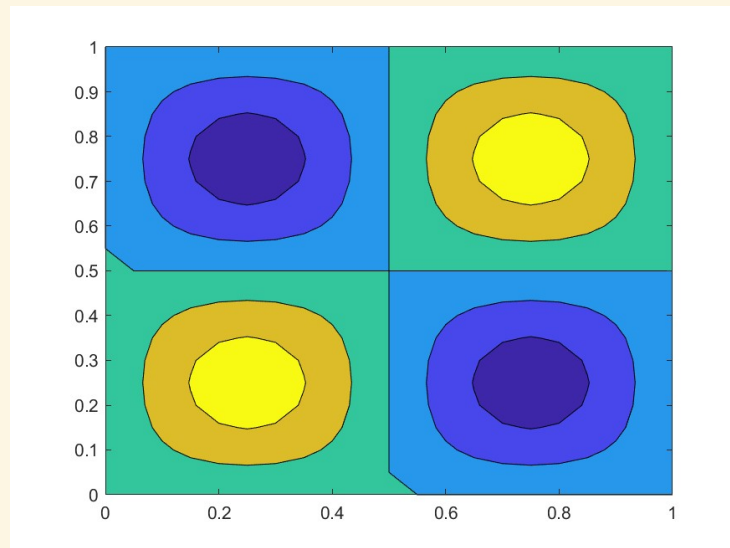


Figura 2: Gráfica del vector de rotación.

Problema 2

Considera el campo escalar definido por:

$$\phi(x, y) = x^2 - y^2$$

en el dominio $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$.

Determinar:

- 1) el gradiente del campo escalar,
- 2) el Laplaciano del campo escalar,

Graficar:

- 3) el campo escalar ϕ ,
- 4) el gradiente del campo escalar.