

**Entrega: 23 de abril de 2025**

### Problema 1

Muestre que la representación matricial de la compuerta  $CNOT$  es

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### SOLUCIÓN

La compuerta  $CNOT$  actúa sobre dos qubits, el primero es el qubit de control y el segundo es el qubit objetivo, por lo que su base de estados es  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . La acción de la compuerta  $CNOT$  sobre los estados de la base es la siguiente:

$$CNOT|00\rangle = |00\rangle$$

$$CNOT|01\rangle = |01\rangle$$

$$CNOT|10\rangle = |11\rangle$$

$$CNOT|11\rangle = |10\rangle$$

Queremos entonces encontrar la representación matricial de la compuerta  $CNOT$ . Para ello recordamos que los elementos de la matriz se obtienen a partir de

$$CNOT_{ij} = \langle j | CNOT | i \rangle,$$

donde  $|i\rangle$  y  $|j\rangle$  son los estados de la base.

Entonces, la matriz de la compuerta CNOT se puede escribir como

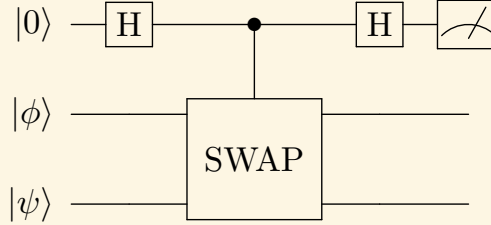
$$\begin{aligned} \text{CNOT} &= \begin{pmatrix} \langle 00 | \text{CNOT} | 00 \rangle & \langle 00 | \text{CNOT} | 01 \rangle & \langle 00 | \text{CNOT} | 10 \rangle & \langle 00 | \text{CNOT} | 11 \rangle \\ \langle 01 | \text{CNOT} | 00 \rangle & \langle 01 | \text{CNOT} | 01 \rangle & \langle 01 | \text{CNOT} | 10 \rangle & \langle 01 | \text{CNOT} | 11 \rangle \\ \langle 10 | \text{CNOT} | 00 \rangle & \langle 10 | \text{CNOT} | 01 \rangle & \langle 10 | \text{CNOT} | 10 \rangle & \langle 10 | \text{CNOT} | 11 \rangle \\ \langle 11 | \text{CNOT} | 00 \rangle & \langle 11 | \text{CNOT} | 01 \rangle & \langle 11 | \text{CNOT} | 10 \rangle & \langle 11 | \text{CNOT} | 11 \rangle \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \langle 00 | 00 \rangle & \langle 00 | 01 \rangle & \langle 00 | 11 \rangle & \langle 00 | 10 \rangle \\ \langle 01 | 00 \rangle & \langle 01 | 01 \rangle & \langle 01 | 11 \rangle & \langle 01 | 10 \rangle \\ \langle 10 | 00 \rangle & \langle 10 | 01 \rangle & \langle 10 | 11 \rangle & \langle 10 | 10 \rangle \\ \langle 11 | 00 \rangle & \langle 11 | 01 \rangle & \langle 11 | 11 \rangle & \langle 11 | 10 \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Problema 2

Para el circuito de la figura siguiente, calcule las probabilidades de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  en el primer qubit, en términos de  $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ .



## SOLUCIÓN

Para calcular las probabilidades de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , primero determinemos el estado final del sistema. Calculamos  $|\Psi_1\rangle$ ,

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{H} \otimes \hat{I})(|0\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle), \\ &= \hat{H}|0\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \end{aligned}$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle.$$

La siguiente compuerta a aplicar es la compuerta Fredkin o CSWAP que opera sobre tres qubits. Si el qubit control es  $|0\rangle$  los qubits restantes permanecen igual, si es  $|1\rangle$  los qubits restantes invierten su orden. Así,

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= \text{CSWAP}|\Psi_1\rangle, \\ &= \text{CSWAP} \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{CSWAP}|0\phi\psi\rangle + \text{CSWAP}|1\phi\psi\rangle\right), \end{aligned}$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\phi\psi\rangle + |1\psi\phi\rangle\right).$$

Finalmente, aplicamos la compuerta de Hadamard al primer qubit,

$$\begin{aligned}
 |\Psi_3\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|\phi\psi\rangle + |1\rangle|\psi\phi\rangle), \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{H}|0\rangle|\phi\psi\rangle + \hat{H}|1\rangle|\psi\phi\rangle], \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)|\phi\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)|\psi\phi\rangle \right], \\
 |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{2} |0\phi\psi\rangle + \frac{1}{2} |1\phi\psi\rangle + \frac{1}{2} |0\psi\phi\rangle - \frac{1}{2} |1\psi\phi\rangle.
 \end{aligned}$$

Para determinar las probabilidades de los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , usamos la expresión

$$p(a_i) = \langle\psi| \hat{M}_{a_i}^\dagger \hat{M}_{a_i} |\psi\rangle,$$

donde  $\hat{M}_{a_i}^\dagger = |i\rangle\langle i|$  es el operador de proyección asociado al posible resultado  $\{a_i\}$  y  $\hat{M}_{a_i}$  es el resultado de aplicar el operador  $\dagger$  a  $\hat{M}_{a_i}$ .

Entonces, la probabilidad del estado  $|0\rangle$  es

$$\begin{aligned}
 p(0) &= \frac{1}{2} \langle\Psi_3| |0\rangle\langle 0| |\Psi_3\rangle, \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \langle 0|(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|) + \langle 1|(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|) \right] \left[ (|0\rangle\langle 0|) \frac{1}{2} (|0\rangle(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + |1\rangle(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle)) \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \langle 0|(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|) + \langle 1|(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|) \right] \left[ \frac{1}{2} \langle 0|0\rangle |0\rangle(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + \frac{1}{2} \langle 0|1\rangle |0\rangle(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle) \right], \\
 &= \frac{1}{4} \langle 0|0\rangle (\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + \frac{1}{4} \langle 1|0\rangle (\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle), \\
 &= \frac{1}{4} (\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle), \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \langle\phi|\phi\rangle \langle\psi|\psi\rangle + \langle\phi|\psi\rangle \langle\psi|\phi\rangle + \langle\psi|\phi\rangle \langle\phi|\psi\rangle + \langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \right], \\
 &= \frac{1}{4} \left[ 1 + |\langle\phi|\psi\rangle|^2 + |\langle\phi|\psi\rangle|^2 + 1 \right], \\
 &= \frac{1}{4} \left[ 2 + 2|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \right], \\
 p(0) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + |\langle\phi|\psi\rangle|^2 \right].
 \end{aligned}$$

De forma análoga, la probabilidad del estado  $|1\rangle$  es

$$\begin{aligned}
 p(1) &= \frac{1}{2} \langle \Psi_3 | |1\rangle \langle 1| | \Psi_3 \rangle, \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \langle 0 | (\langle \phi\psi | + \langle \psi\phi |) + \langle 1 | (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |) \right] \left[ \frac{1}{2} \langle 1 | 0 \rangle |1\rangle (\langle \phi\psi | + \langle \psi\phi |) + \frac{1}{2} \langle 1 | 1 \rangle |1\rangle (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |) \right], \\
 &= \frac{1}{4} \langle 0 | 0 \rangle (\langle \phi\psi | + \langle \psi\phi |) (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |) + \frac{1}{4} \langle 1 | 1 \rangle (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |) (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |), \\
 &= \frac{1}{4} (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |) (\langle \phi\psi | - \langle \psi\phi |), \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle - \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle - \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle + \langle \psi | \psi \rangle \langle \phi | \phi \rangle \right], \\
 &= \frac{1}{4} \left[ 2 - 2 |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \right], \\
 p(1) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \right].
 \end{aligned}$$

### Problema 3

Describe, con todo detalle, el protocolo de teletransportación de un qubit dado por

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

usando el siguiente estado de Bell

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

### SOLUCIÓN

El protocolo de teletransportación comienza con el qubit que Alice quiere enviarle a Bob. Este qubit es

$$|\psi\rangle_C = \alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C.$$

Agregamos el subíndice  $C$  para distinguirlo de los estados  $A$  y  $B$ .

El protocolo requiere que Alice y Bob compartan un par de qubits fuertemente entrelazados (par EPR) que eligieron previamente, para este caso en particular, usaremos el estado de Bell  $|\Psi^-\rangle_{AB}$ ,

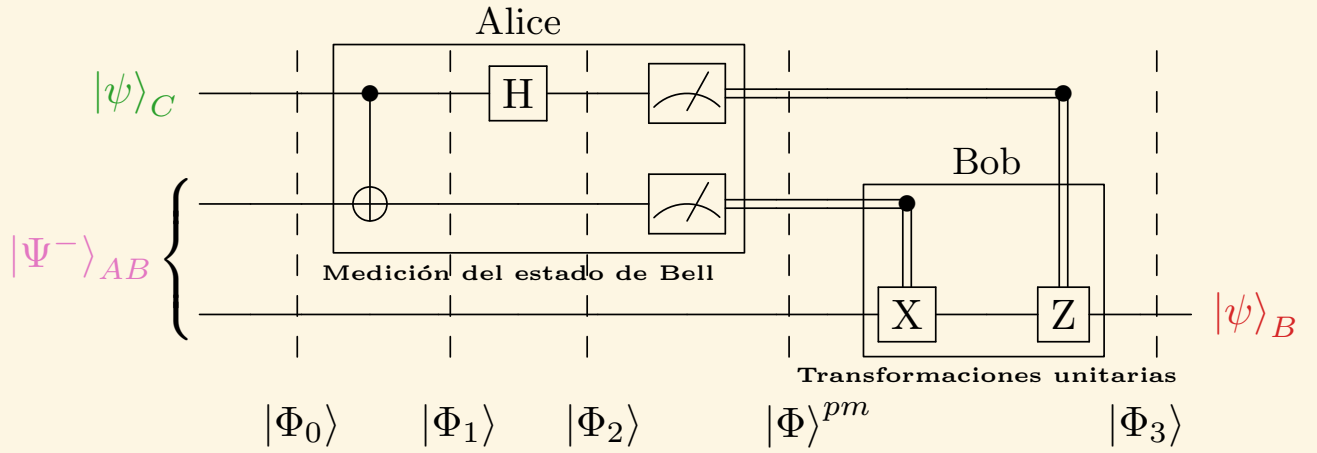
$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}.$$

Primero debemos obtener el estado completo del sistema, el estado completo producto tensorial de los tres qubits, i.e.

$$\begin{aligned} |\Phi_0\rangle &= |\psi\rangle_C \otimes |\Psi^-\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C) \otimes \left( \frac{|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha|0\rangle_C \otimes (|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}) - \beta|1\rangle_C \otimes (|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}) \right]. \end{aligned}$$

Recordemos que Alice tiene dos qubits:  $C$ , el que quiere enviar y  $A$ , que forma parte del par EPR. Por lo tanto, debe realizar una medición local en los dos qubits que posee. Desarrollando la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} |\Phi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha|0\rangle_C |01\rangle_{AB} - \alpha|0\rangle_C |10\rangle_{AB} - \beta|1\rangle_C |01\rangle_{AB} + \beta|1\rangle_C |10\rangle_{AB} \right], \\ |\Phi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha|00\rangle_{CA} |1\rangle_B - \alpha|01\rangle_{CA} |0\rangle_B - \beta|10\rangle_{CA} |1\rangle_B + \beta|11\rangle_{CA} |0\rangle_B \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$



**Figura 1:** Diagrama del protocolo de teletransportación cuántica.

Dado que estamos trabajando en la base computacional, seguiremos los pasos mostrados en la figura 1. Primero aplicamos la compuerta CNOT a (3.1),

$$\begin{aligned}
 |\Phi_1\rangle &= (\text{CNOT} \otimes \hat{I})|\Phi_0\rangle, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha \text{CNOT}|00\rangle_{CA}|1\rangle_B - \alpha \text{CNOT}|01\rangle_{CA}|0\rangle_B - \beta \text{CNOT}|10\rangle_{CA}|1\rangle_B + \beta \text{CNOT}|11\rangle_{CA}|0\rangle_B \right], \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha|00\rangle_{CA}|1\rangle_B - \alpha|01\rangle_{CA}|0\rangle_B - \beta|11\rangle_{CA}|1\rangle_B + \beta|10\rangle_{CA}|0\rangle_B \right], \\
 |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha|0\rangle_C|01\rangle_{AB} - \alpha|0\rangle_C|10\rangle_{AB} - \beta|1\rangle_C|11\rangle_{AB} + \beta|1\rangle_C|00\rangle_{AB} \right]. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la compuerta  $\hat{H}$ ,

$$\begin{aligned}
 |\Phi_2\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I})|\Phi_1\rangle, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha \hat{H}|0\rangle_C|01\rangle_{AB} - \alpha \hat{H}|0\rangle_C|10\rangle_{AB} - \beta \hat{H}|1\rangle_C|11\rangle_{AB} + \beta \hat{H}|1\rangle_C|00\rangle_{AB} \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \alpha(|0\rangle_C + |1\rangle_C)|01\rangle_{AB} - \alpha(|0\rangle_C + |1\rangle_C)|10\rangle_{AB} - \beta(|0\rangle_C - |1\rangle_C)|11\rangle_{AB} + \beta(|0\rangle_C - |1\rangle_C)|00\rangle_{AB} \right], \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \alpha|001\rangle + \alpha|101\rangle - \alpha|010\rangle - \alpha|110\rangle - \beta|011\rangle + \beta|111\rangle + \beta|000\rangle - \beta|100\rangle \right], \\
 |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2} \left[ |00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) + |01\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) + |10\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) + |11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \right]. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Ahora Alice realiza la medición local que se mencionó previamente, denotada por  $|\Phi_3\rangle$ . Primero definimos los operadores de proyección para un qubit:

$$\hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} = |0\rangle\langle 0|,$$

$$\hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} = |1\rangle\langle 1|,$$

$$\hat{P}_{b_0}^{|\Psi^-\rangle} = |0\rangle\langle 0|,$$

$$\hat{P}_{b_1}^{|\Psi^-\rangle} = |1\rangle\langle 1|.$$

Los subíndices indican los posibles resultados de las mediciones:  $\{a_0, a_1\}$  para  $|\psi\rangle$  y  $\{b_0, b_1\}$  para  $|\Psi^-\rangle$ .

Con base en los operadores anteriores, definimos los operadores de proyección para dos qubits de la siguiente manera:

$$\hat{P}_{\{a_0, b_0\}} = \hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_0}^{|\Psi^-\rangle} = |0_{a_0}\rangle\langle 0_{a_0}| |0_{b_0}\rangle\langle 0_{b_0}| = |00\rangle\langle 00|, \quad (3.4a)$$

$$\hat{P}_{\{a_0, b_1\}} = \hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_1}^{|\Psi^-\rangle} = |0_{a_0}\rangle\langle 0_{a_0}| |1_{b_1}\rangle\langle 1_{b_1}| = |01\rangle\langle 01|, \quad (3.4b)$$

$$\hat{P}_{\{a_1, b_0\}} = \hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_0}^{|\Psi^-\rangle} = |1_{a_1}\rangle\langle 1_{a_1}| |0_{b_0}\rangle\langle 0_{b_0}| = |10\rangle\langle 10|, \quad (3.4c)$$

$$\hat{P}_{\{a_1, b_1\}} = \hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_1}^{|\Psi^-\rangle} = |1_{a_1}\rangle\langle 1_{a_1}| |1_{b_1}\rangle\langle 1_{b_1}| = |11\rangle\langle 11|. \quad (3.4d)$$

Ahora, se calcularán las probabilidades y los estados de post-medición para cada uno de los posibles resultados de la medición hecha por Alice.

- $p(a_0, b_0) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0, b_0\}} | \Phi_2 \rangle$

La probabilidad de obtener el resultado  $\{a_0, b_0\}$  es

$$\begin{aligned} p(a_0, b_0) &= \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0, b_0\}} | \Phi_2 \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[ (\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) \langle 00| + (-\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) \langle 01| + (-\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) \langle 10| + (-\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) \langle 11| \right] \\ &\quad |00\rangle\langle 00| \left[ |00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |01\rangle(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |10\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |11\rangle(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \right], \\ &= \frac{1}{4} \left[ (\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) \langle 00| + (-\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) \langle 01| + (-\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) \langle 10| + (-\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) \langle 11| \right] \\ &\quad |00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle), \\ &= \frac{1}{4} (\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) (\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[ \beta^* \beta \langle 0|0\rangle + \beta^* \alpha \langle 0|1\rangle + \alpha^* \beta \langle 1|0\rangle + \alpha^* \alpha \langle 1|1\rangle \right], \\
&= \frac{1}{4} \left[ \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \right],
\end{aligned}$$

$$p(a_0, b_0) = \frac{1}{4}.$$

El estado de post-medición correspondiente  $|\psi\rangle_{\{a_0, b_0\}}^{pm}$  está dado por

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{\{a_0, b_0\}}^{pm} &= \frac{\hat{P}_{\{a_0, b_0\}} |\Phi_2\rangle}{\sqrt{\langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0, b_0\}} | \Phi_2 \rangle}} = \frac{\frac{1}{2} |00\rangle (\beta |0\rangle + \alpha |1\rangle)}{\sqrt{1/4}}, \\
|\psi\rangle_{\{a_0, b_0\}}^{pm} &= |00\rangle_{CA} (\beta |0\rangle_B + \alpha |1\rangle_B). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

- $p(a_0, b_1) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0, b_1\}} | \Phi_2 \rangle$

La probabilidad de obtener el resultado  $\{a_0, b_1\}$  es

$$\begin{aligned}
p(a_0, b_1) &= \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0, b_1\}} | \Phi_2 \rangle, \\
&= \frac{1}{4} \left[ (\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) \langle 00| + (-\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) \langle 01| + (-\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|) \langle 10| + (-\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) \langle 11| \right] \\
&\quad |01\rangle (-\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle), \\
&= \frac{1}{4} (-\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) (-\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle),
\end{aligned}$$

$$p(a_0, b_1) = \frac{1}{4}.$$

El estado de post-medición correspondiente  $|\psi\rangle_{\{a_0, b_1\}}^{pm}$  está dado por

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{\{a_0, b_1\}}^{pm} &= \frac{\frac{1}{2} |01\rangle (-\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)}{\sqrt{1/4}}, \\
|\psi\rangle_{\{a_0, b_1\}}^{pm} &= |01\rangle_{CA} (-\alpha |0\rangle_B - \beta |1\rangle_B). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

- $p(a_1, b_0) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1, b_0\}} | \Phi_2 \rangle$

La probabilidad de obtener el resultado  $\{a_1, b_0\}$  es

$$\begin{aligned}
 p(a_1, b_0) &= \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1, b_0\}} | \Phi_2 \rangle, \\
 &= \frac{1}{4} (-\beta^* \langle 0 | + \alpha^* \langle 1 |) (-\beta | 0 \rangle + \alpha | 1 \rangle),
 \end{aligned}$$

$$p(a_1, b_0) = \frac{1}{4}.$$

El estado de post-medición correspondiente  $|\psi\rangle_{\{a_1, b_0\}}^{pm}$  está dado por

$$|\psi\rangle_{\{a_1, b_0\}}^{pm} = \frac{\frac{1}{2} |10\rangle (-\beta | 0 \rangle + \alpha | 1 \rangle)}{\sqrt{1/4}},$$

$$|\psi\rangle_{\{a_1, b_0\}}^{pm} = |10\rangle_{CA} (-\beta | 0 \rangle_B + \alpha | 1 \rangle_B). \quad (3.7)$$

- $p(a_1, b_1) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1, b_1\}} | \Phi_2 \rangle$

La probabilidad de obtener el resultado  $\{a_1, b_1\}$  es

$$\begin{aligned}
 p(a_1, b_1) &= \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1, b_1\}} | \Phi_2 \rangle, \\
 &= \frac{1}{4} (-\alpha^* \langle 0 | + \beta^* \langle 1 |) (-\alpha | 0 \rangle + \beta | 1 \rangle),
 \end{aligned}$$

$$p(a_1, b_1) = \frac{1}{4}.$$

El estado de post-medición correspondiente  $|\psi\rangle_{\{a_1, b_1\}}^{pm}$  está dado por

$$|\psi\rangle_{\{a_1, b_1\}}^{pm} = \frac{\frac{1}{2} |11\rangle (-\alpha | 0 \rangle + \beta | 1 \rangle)}{\sqrt{1/4}},$$

$$|\psi\rangle_{\{a_1, b_1\}}^{pm} = |11\rangle_{CA} (-\alpha | 0 \rangle_B + \beta | 1 \rangle_B). \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.5) a (3.8) representan los posibles resultados debidos a la medición realizada por Alice, y cada uno indica en cuál de los cuatro estados se encuentra el sistema. Ahora Alice puede enviar el resultado a Bob a través de un canal clásico. Una vez que Bob recibe el mensaje, sabrá en qué estado se encuentra su qubit. A partir de esta información, Bob debe aplicar una serie de operadores unitarios a su qubit para transformarlo en el estado deseado  $|\psi\rangle_C$ .

**Caso 1. Resultado  $\{a_0, b_0\}$** 

La probabilidad de obtener  $\{a_0, b_0\}$  es

$$p(a_0, b_0) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle_{\{a_0, b_0\}}^{pm} = |00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es  $|00\rangle_{CA}$  y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado  $\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B$ . Y puesto que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z(\hat{\sigma}_x(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B)) &= \hat{\sigma}_z(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B), \\ &= \hat{\sigma}_z(\beta\langle 1|0\rangle|0\rangle + \beta\langle 0|0\rangle|1\rangle + \alpha\langle 1|1\rangle|0\rangle + \alpha\langle 0|1\rangle|1\rangle), \\ &= (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle), \\ &= \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle - \alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle + \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle, \\ &= \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B. \end{aligned}$$

Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x)_B \left[ |00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \right].$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador  $\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x$  para preparar su qubit en el estado deseado.

**Caso 2. Resultado  $\{a_0, b_1\}$** 

La probabilidad de obtener  $\{a_0, b_1\}$  es

$$p(a_0, b_1) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle_{\{a_0, b_1\}}^{pm} = |01\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es  $|01\rangle_{CA}$  y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado  $-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B$ . Y puesto que

$$\begin{aligned}
 -\hat{\sigma}_z(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) &= (-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B), \\
 &= \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle - \alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle + \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle, \\
 &= \alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B.
 \end{aligned}$$

Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (-\hat{\sigma}_z)_B \left[ |01\rangle_{CA} (-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \right].$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador  $-\hat{\sigma}_z$  para preparar su qubit en el estado deseado.

### Caso 3. Resultado $\{a_1, b_0\}$

La probabilidad de obtener  $\{a_1, b_0\}$  es

$$p(a_1, b_0) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle_{\{a_1, b_0\}}^{pm} = |10\rangle_{CA} (-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es  $|10\rangle_{CA}$  y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado  $-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B$ . Y puesto que

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_x(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B), \\
 &= -\beta\langle 1|0\rangle|0\rangle - \beta\langle 0|0\rangle|1\rangle + \alpha\langle 1|1\rangle|0\rangle + \alpha\langle 0|1\rangle|1\rangle, \\
 &= \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B.
 \end{aligned}$$

Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (\hat{\sigma}_x)_B \left[ |10\rangle_{CA} (-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) \right].$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador  $\hat{\sigma}_x$  para preparar su qubit en el estado deseado.

**Caso 4. Resultado  $\{a_1, b_1\}$** 

La probabilidad de obtener  $\{a_1, b_1\}$  es

$$p(a_1, b_1) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle_{\{a_1, b_1\}}^{pm} = |11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es  $|11\rangle_{CA}$  y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado  $-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ . Y puesto que

$$\begin{aligned} -\hat{I}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) &= (-|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B), \\ &= \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle + \alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle - \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle, \\ &= \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B. \end{aligned}$$

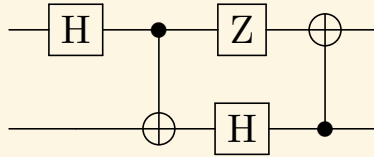
Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (-\hat{I})_B \left[ |11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \right].$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador  $-\hat{I}$  para preparar su qubit en el estado deseado.

## Problema 4

Sea  $U$  el circuito dado por el siguiente diagrama:



Calcule y escriba un circuito cuántico que corresponda a la operación  $U^{-1}$ .

## SOLUCIÓN

Antes de poder escribir  $U$ , recordemos cómo se interpretan las compuertas aplicadas en serie (figura 2) y paralelo (figura 3).

$$|\psi\rangle \text{---} \boxed{Y} \text{---} \boxed{X} \text{---} = \text{---} \boxed{X \cdot Y} \text{---} \quad XY |\psi\rangle$$

**Figura 2:** Dos compuertas  $\hat{Y}$  y  $\hat{X}$  aplicadas en serie. El orden en el que aparecen en el cable se invierte al multiplicarse sus matrices asociadas.

$$\begin{array}{c} |\psi\rangle \text{---} \boxed{Y} \text{---} Y |\psi\rangle \\ |\phi\rangle \text{---} \boxed{X} \text{---} X |\phi\rangle \end{array} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} |\psi\rangle \text{---} \boxed{Y \otimes X} \text{---} \\ |\phi\rangle \text{---} \boxed{Y \otimes X} \text{---} \end{array} \right\} (Y \otimes X) |\psi \otimes \phi\rangle$$

**Figura 3:** Dos compuertas  $\hat{Y}$  y  $\hat{X}$  aplicadas en paralelo son equivalentes a la compuerta  $\hat{Y} \otimes \hat{X}$ .

A partir de lo anterior, podemos escribir la operación asociada al circuito  $U$  como:

$$U = CNOT(\hat{Z} \otimes \hat{H}) \cdot CNOT(\hat{H} \otimes \hat{I}).$$

Para obtener  $U^{-1}$ , recordemos que para operadores unitarios se  $U^{-1} = \hat{U}^\dagger$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}
 U^{-1} &= \left[ \text{CNOT}(\hat{Z} \otimes \hat{H}) \cdot \text{CNOT}(\hat{H} \otimes \hat{I}) \right]^\dagger, \\
 &= (\text{CNOT}(\hat{H} \otimes \hat{I}))^\dagger \cdot (\text{CNOT}(\hat{Z} \otimes \hat{H}))^\dagger, \\
 &= ((\hat{H}^\dagger \otimes \hat{I}^\dagger) \text{CNOT}^\dagger) \cdot ((\hat{Z}^\dagger \otimes \hat{H}^\dagger) \text{CNOT}^\dagger), \\
 &\boxed{U^{-1} = (\hat{H} \otimes \hat{I}) \text{CNOT} \cdot (\hat{Z} \otimes \hat{H}) \text{CNOT}.}
 \end{aligned}$$

La operación  $U^{-1}$  puede representarse mediante el siguiente circuito:

