Marcos López Merino *Prof.: Dr. Salvador E. Venegas Andraca*

Entrega: 28 de marzo de 2025

Problema 1

Considere los siguientes números complejos:

$$a = (2 + 3i)(4 + i), \tag{1.1}$$

$$b = \frac{2 + 3i}{4 + i}. \tag{1.2}$$

(a) Exprese cada número en la forma $x + iy$.

Solución

Para expresar cada uno de los números de la forma deseada primero desarrollamos cada una de las expresiones. Por un lado, (1.1) queda como

$$\begin{aligned} a &= 2(4) + 2i + 3i(4) + 3i(i), \\ &= (8 - 3) + i(2 + 12), \\ \boxed{a = 5 + 14i,} \end{aligned} \tag{1.3}$$

con $x = 5$ y $y = 14$.

Por el otro, (1.2) se ve como

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{2+3i}{4+i}\frac{4-i}{4-i}, \\
&= \frac{(2+3i)(4-i)}{4^2-i^2}, \\
&= \frac{8-2i+12i+3}{17}, \\
&= \frac{8+3}{17}+\frac{12-2}{17}i, \\
&\boxed{b = \frac{11}{17}+\frac{10}{17}i,}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

con $x = \dfrac{11}{17}$ y $y = \dfrac{10}{17}$.

(b) Calcule el complejo conjugado de a y b.

SOLUCIÓN

De los resultados del inciso anterior, tenemos que el complejo conjugado de (1.3) es

$$\boxed{a^* = 5 - 14i.}$$

y de (1.4)

$$\boxed{b^* = \frac{11}{17} - \frac{10}{17}i.}$$

(c) Exprese cada número en la forma polar, $re^{i\theta}$.

SOLUCIÓN

Para pasar a la forma polar primero debemos recordar que

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}
$$

Así, para a tenemos que

$$r = \sqrt{5^2 + 14^2} = \sqrt{221},$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{14}{5}\right).$$

Entonces, (1.3) en su representación polar se ve como:

$$\boxed{a = \sqrt{221}\mathrm{e}^{i\arctan\left(\frac{14}{5}\right)}.} \tag{1.5}$$

Para (1.4) tenemos

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{11}{17}\right)^2 + \left(\tfrac{10}{17}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{13}{17}},$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{10}{11}\right).$$

Tal que,

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{13}{17}}e^{i\arctan\left(\frac{10}{11}\right)}.}$$

(d) Calcule a^5 y $\sqrt{b}$. Use la representación más conveniente para cada operación, pero exprese el resultado en la forma $x + iy$.

Solución

Para calcular a^5 usamos la representación dada por (1.3), tal que,

$$a^5 = \left(\sqrt{221}\mathrm{e}^{i\arctan(14/5)}\right)^5,$$
$$= (221)^{5/2}\mathrm{e}^{i5\arctan(14/5)},$$

donde $r = (221)^{5/2}$ y $\theta = 5\arctan(14/5) - 2\pi$. Entonces,

$$a^5 = (221)^{5/2}\left[\cos\Big(5\arctan(14/5) - 2\pi\Big) + i\sin\Big(5\arctan(14/5) - 2\pi\Big)\right],$$
$$\boxed{a^5 = 718525 - 104426i.}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\sqrt{b} &= \left[\left(\frac{13}{17}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{i \arctan(10/11)}\right]^{1/2}, \\ &= \left(\frac{13}{17}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{i \arctan(10/11)/2},\end{aligned}$$

donde $r = (13/17)^{1/4}$ y $\theta = \arctan(10/11)/2$. Por lo que,

$$\sqrt{b} = \left(\frac{13}{17}\right)^{1/4} \left[\cos\left(\frac{\arctan(10/11)}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\arctan(10/11)}{2}\right)\right],$$

$$\boxed{\sqrt{b} = 0.8722 + 0.3372i.}$$

Problema 2

Muestre lo siguiente:

(a) Si $a = x + iy$, entonces $a \cdot a^* = \|a\|^2$.

Solución

Sabemos que el conjugado a^* es

$$a^* = x - iy.$$

Entonces. calculando el producto

$$\begin{aligned}
a \cdot a^* &= (x + iy)(x - iy), \\
&= x \cdot x - ix \cdot y + iy \cdot x - (iy)(iy), \\
&= x^2 - (-y^2), \\
a \cdot a^* &= x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

Recordando que $\|a\| = \sqrt{x^2 + y^2} \implies \|a\|^2 = x^2 + y^2$. Entonces,

$$\boxed{a \cdot a^* = \|a\|^2.}$$

(b) Si $a = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$ y $b = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$, con $r_i, \theta_i \in \mathbb{R}$.

Solución

Calculando el producto

$$\begin{aligned}
ab &= \left(r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}\right)\left(r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}\right), \\
&= r_1 r_2 \mathrm{e}^{i\theta_1} \mathrm{e}^{i\theta_2}, \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \\
&= r_1 r_2 \mathrm{e}^{i\theta_1 + i\theta_2}, \\
&\boxed{ab = r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\theta_1 + \theta_2)}.}
\end{aligned}$$

(c) Si $a = r\mathrm{e}^{i\theta}$, con $r, \theta \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = r$.

SOLUCIÓN

Sea

$$\begin{aligned}
|a| &= |r\mathrm{e}^{i\theta}| = |r||\mathrm{e}^{i\theta}|,\\
&= |r||\cos(\theta) + i\sin(\theta)|,\\
&= r\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)},\\
&= r\sqrt{1},\\
&\boxed{|a| = r.}
\end{aligned}$$

(d) Si $a = r\mathrm{e}^{ix+y}$, con $r, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = r\mathrm{e}^{y}$.

SOLUCIÓN

Sea

$$\begin{aligned}
|a| &= |r\mathrm{e}^{ix+y}| = |r||\mathrm{e}^{ix+y}|,\\
&= r|\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{y}|,\\
&= r|\mathrm{e}^{y}||\mathrm{e}^{ix}|,\\
&= r\mathrm{e}^{y}\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)},\\
&\boxed{|a| = r\mathrm{e}^{y}.}
\end{aligned}$$

Problema 3

Considere los operadores

$$\hat{S}^\dagger = |0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|, \tag{3.1}$$

$$\hat{T} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|. \tag{3.2}$$

y los kets

$$|\psi\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle, \tag{3.3}$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle. \tag{3.4}$$

(a) Muestre que los operadores son unitarios y que los kets están normalizados.

Solución

Un operador es unitario si

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}.$$

Por un lado, para (3.1) tenemos que

$$\hat{S} = |0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{S}\hat{S}^\dagger &= (|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|),\\
&= |0\rangle\langle 0||0\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 0||1\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 1||0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1||1\rangle\langle 1|,\\
&= \langle 0|0\rangle|0\rangle\langle 0| - i\langle 0|1\rangle|0\rangle\langle 1| + i\langle 1|0\rangle|1\rangle\langle 0| + \langle 1|1\rangle|1\rangle\langle 1|,\\
&= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|,\\
\hat{S}\hat{S}^\dagger &= \hat{I},
\end{aligned}$$

$\therefore\ \hat{S}$ es unitario.

Por el otro, $\hat{T}^\dagger$ para (3.2) es

$$\hat{T}^\dagger = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{T}\hat{T}^\dagger &= (-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|)(i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|),\\
&= |0\rangle\langle 1||1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1||0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0||1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0||0\rangle\langle 1|,\\
&= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|,\\
\hat{T}\hat{T}^\dagger &= \hat{I},\\
\therefore\ &\hat{T} \text{ es unitario.}
\end{aligned}$$

Para determinar si (3.3) y (3.4) están normalizados, primero calculamos $\langle\psi|$ y $\langle\phi|$. Así,

$$\langle\psi| = \frac{1-i}{2}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|,$$

$$\langle\phi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|.$$

Entonces, para (3.3),

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= \left(\frac{1-i}{2}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right),\\
&= \frac{(1-i)(1+i)}{4}\langle 0|0\rangle + \left(\frac{1-i}{2}\right)\frac{i}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+i}{2}\right)\langle 1|0\rangle - \frac{i^2}{2}\langle 1|1\rangle,\\
&= \frac{2}{4} + \frac{1}{2},\\
\langle\psi|\psi\rangle &= 1,\\
\therefore\ &|\psi\rangle \text{ está normalizado.}
\end{aligned}$$

Para (3.4),

$$
\begin{aligned}
\langle\phi|\phi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle\right),\\
&= \frac{1}{2}\langle 0|0\rangle - \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle + \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\langle 1|1\rangle,\\
&= \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-i\theta+i\theta}}{2},\\
\langle\phi|\phi\rangle &= 1,\\
\therefore\ |\phi\rangle & \text{ está normalizado.}
\end{aligned}
$$

(b) Calcule $\langle\phi|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\phi\rangle$.

Solución

Calculamos $\langle\phi|\psi\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle\phi|\psi\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle\right),\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+i}{2}\langle 0|0\rangle + \frac{i}{2}|0\rangle\langle 1| - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\frac{1+i}{2}\langle 1|0\rangle - \frac{i\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\langle 1|1\rangle,\\
&\boxed{\langle\phi|\psi\rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} - \frac{i\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}.}
\end{aligned}
$$

Y $\langle\psi|\phi\rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\phi\rangle &= \left(\frac{1-i}{2}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle\right),\\
&= \frac{1-i}{2\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle - \frac{(1-i)\mathrm{e}^{i\theta}}{2\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle - \frac{i}{2}\langle 1|0\rangle + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\langle 1|1\rangle,\\
&\boxed{\langle\psi|\phi\rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}} + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{2}.}
\end{aligned}
$$

(c) Calcule $\hat{T}|\psi\rangle$ y $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$.

Solución

Calculamos $\hat{T}|\psi\rangle$

$$\begin{aligned}
\hat{T}|\psi\rangle &= (-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|)\left(\frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle\right), \\
&= -\frac{i(1+i)}{2}\langle 1|0\rangle|0\rangle - \frac{i^2}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle|0\rangle + \frac{i(1+i)}{2}\langle 0|0\rangle|1\rangle + \frac{i^2}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle|1\rangle, \\
&\boxed{\hat{T}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i-1}{2}|1\rangle.}
\end{aligned}$$

Y $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$

$$\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger|\phi\rangle &= (|0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle\right), \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle|0\rangle - \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle|1\rangle + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle|1\rangle, \\
&\boxed{\hat{S}^\dagger|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle.}
\end{aligned}$$

(d) Mida el estado $\hat{T}|\psi\rangle$ en la base computacional. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$?

Solución

Tenemos que la probabilidad de medir $|0\rangle$ es

$$\begin{aligned}
P(0) &= |\langle 0|\hat{T}\,|0\rangle\psi|^2, \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle + \frac{i-1}{2}\langle 0|1\rangle\right|^2, \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2, \\
\boxed{P(0) = \frac{1}{2}.}
\end{aligned}$$

Y de medir $|1\rangle$,

$$\begin{aligned}
P(1) &= |\langle 1|\hat{T}\,|1\rangle\psi|^2, \\
&= \left||1\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i-1}{2}\right)\right|^2, \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle + \frac{i-1}{2}\langle 1|1\rangle\right|^2, \\
&= \left|\frac{i-1}{2}\right|^2, \\
&= \left(\frac{i-1}{2}\right)\left(\frac{-i-1}{2}\right), \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \\
\boxed{P(1) = \frac{1}{2}.}
\end{aligned}$$

(e) Mida el estado $\hat{S}^{\dagger}\,|\phi\rangle$ en la base diagonal. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|+\rangle$ y $|-\rangle$?

Solución

Para medir $|+\rangle$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
P(+) &= |\langle+|\hat{S}^{\dagger}\,|+\rangle\phi|^2, \\
&= \left|\langle+|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\right|^2, \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+|0\rangle + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle+|1\rangle\right|^2, \\
&= \left|\frac{1}{2} + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right|^2, \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{i\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right), \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}^{i\theta-i\theta}}{4}, \\
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P(+) = \frac{1}{2}.}
$$

Mientras que para $|-\rangle$ es

$$
\begin{aligned}
P(-) &= |\langle -|\hat{S}^\dagger|-\rangle\phi|^2, \\
&= \left|\langle -|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\right|^2, \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle -|0\rangle + \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}\langle -|1\rangle\right|^2, \\
&= \left|\frac{1}{2} - \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right|^2, \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right), \\
&= \frac{1}{4} - \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{4} + \frac{i\mathrm{e}^{-i\theta}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{i\theta-i\theta}}{4}, \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{4}, \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin(\theta)}{2}, \\
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P(-) = \frac{1 + \sin(\theta)}{2}.}
$$

Problema 4

Muestre que la matriz

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

es unitaria, para $\theta \in (0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Solución

Por el problema anterior sabemos que una matriz es unitaria sin

$$UU^\dagger = I,$$

con $U^\dagger$ la transpuesta conjugada de U.

Entonces, calculamos $U^\dagger$:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora, calculamos $UU^\dagger$:

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\phi}e^{-i\phi}\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} & e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} + e^{-i\phi}e^{i\phi}\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ UU^\dagger &= I, \end{aligned}$$

$\therefore$ U es una matriz unitaria.

Problema 5

Si $\hat{H}$ es el operador Hadamard. Muestre que

$$\hat{H}^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^{2n}}}\sum_{i=0}^{2^n-1}|i\rangle.$$

Solución

Reescribiendo $\hat{H}^{\otimes n}$,

$$\hat{H}^{\otimes n} = \bigotimes_{n} \hat{H}\,|0\rangle = \bigotimes_{n}|+\rangle = |+\rangle^{\otimes n}.$$

Recordando que $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, tenemos que

$$|+\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}|i\rangle. \tag{5.1}$$

Si desarrollamos la expresión anterior para $n = 2$,

$$\begin{aligned} |+\rangle^{\otimes 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ &= \frac{1}{2^{2/2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle). \end{aligned}$$

Donde cada estado corresponde a la representación binaria de los números 0 a 3. Entonces, (5.1) se puede generalizar a n estados como:

$$|+\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{i=0}^{2^n-1}|i\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\hat{H}^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}|i\rangle.}$$

Problema 6

Calcula los eigenvalores y lo eigenvectores de la matrix X de Pauli.

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Resolvemos el problema de eigenvalores $(\hat{X} - \lambda\hat{I}) = 0$. Primero obtenemos los eigenvalores resolviendo $\det(\hat{X} - \lambda\hat{I}) = 0$, tal que:

$$\det(\hat{X} - \lambda\hat{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

$$\implies \lambda^2 - 1 = 0,$$

$$\implies \lambda^2 = 1.$$

Por lo tanto, los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

Ahora, obtenemos los eigenvectores. Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\implies x_2 = x_1 \ \wedge \ x_1 = x_1.$$

Por lo tanto, el eigenvector normalizado correspondiente a $\lambda_1 = 1$ es:

$$\boxed{\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Ahora, para $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\implies x_2 = -x_1 \ \wedge \ x_1 = x_1.$$

Por lo tanto, el eigenvector normalizado correspondiente a $\lambda_2 = -1$ es:

$$\boxed{\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$