Computación Cuántica I

Grupo 7169 – Sem. 2025-2

Tarea 01

Marcos López Merino *Prof.: Dr. Salvador E. Venegas Andraca*

Entrega: 28 de marzo de 2025

Problema 1

Considere los siguientes números complejos:

$$a = (2 + 3i)(4 + i), \tag{1.1}$$

$$b = \frac{2 + 3i}{4 + i}. \tag{1.2}$$

(a) Exprese cada número en la forma $x + iy$.

Solución

Para expresar cada uno de los números de la forma deseada primero desarrollamos cada una de las expresiones. Por un lado, (1.1) queda como

$$\begin{aligned} a &= 2(4) + 2i + 3i(4) + 3i(i), \\ &= (8 - 3) + i(2 + 12), \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 5 + 14i,} \tag{1.3}$$

con $x = 5$ y $y = 14$.

Por el otro, (1.2) se ve como

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{2+3i}{4+i}\frac{4-i}{4-i},\\
&= \frac{(2+3i)(4-i)}{4^2-i^2},\\
&= \frac{8-2i+12i+3}{17},\\
&= \frac{8+3}{17}+\frac{12-2}{17}i,\\
&\boxed{b = \frac{11}{17}+\frac{10}{17}i,}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

con $x = \dfrac{11}{17}$ y $y = \dfrac{10}{17}$.

(b) Calcule el complejo conjugado de a y b.

Solución

De los resultados del inciso anterior, tenemos que el complejo conjugado de (1.3) es

$$\boxed{a^* = 5 - 14i.}$$

y de (1.4)

$$\boxed{b^* = \frac{11}{17} - \frac{10}{17}i.}$$

(c) Exprese cada número en la forma polar, $re^{i\theta}$.

Solución

Para pasar a la forma polar primero debemos recordar que

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2},\\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}
$$

Así, para a tenemos que

$$r = \sqrt{5^2 + 14^2} = \sqrt{221},$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{14}{5}\right).$$

Entonces, (1.3) en su representación polar se ve como:

$$\boxed{a = \sqrt{221}\mathrm{e}^{i\arctan\left(\frac{14}{5}\right)}.} \tag{1.5}$$

Para (1.4) tenemos

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{11}{17}\right)^2 + \left(\tfrac{10}{17}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{13}{17}},$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{10}{11}\right).$$

Tal que,

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{13}{17}}e^{i\arctan\left(\frac{10}{11}\right)}.}$$

(d) Calcule a^5 y $\sqrt{b}$. Use la representación más conveniente para cada operación, pero exprese el resultado en la forma $x + iy$.

Solución

Para calcular a^5 usamos la representación dada por (1.3), tal que,

$$a^5 = \left(\sqrt{221}\mathrm{e}^{i\arctan(14/5)}\right)^5,$$
$$= (221)^{5/2}\mathrm{e}^{i5\arctan(14/5)},$$

donde $r = (221)^{5/2}$ y $\theta = 5\arctan(14/5) - 2\pi$. Entonces,

$$a^5 = (221)^{5/2}\left[\cos\left(5\arctan(14/5) - 2\pi\right) + i\sin\left(5\arctan(14/5) - 2\pi\right)\right],$$
$$\boxed{a^5 = 718525 - 104426i.}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\sqrt{b} &= \left[\left(\frac{13}{17}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{i\arctan(10/11)}\right], \\ &= \left(\frac{13}{17}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{i\arctan(10/11)/2},\end{aligned}$$

donde $r = (13/17)^{1/4}$ y $\theta = \arctan(10/11)/2$. Por lo que,

$$\begin{aligned}&\sqrt{b} = \left(\frac{13}{17}\right)^{1/4} \left[\cos\left(\frac{\arctan(10/11)}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan(10/11)}{2}\right)\right], \\ &\boxed{\sqrt{b} = 0.8722 + 0.3372i.}\end{aligned}$$

Problema 2

Muestre lo siguiente:

(a) Si $a = x + iy$, entonces $a \cdot a^* = \|a\|^2$.

(b) Si $a = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$ y $b = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$, con $r_i, \theta_i \in \mathbb{R}$.

(c) Si $a = r\mathrm{e}^{i\theta}$, con $r, \theta \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = r$.

(d) Si $a = r\mathrm{e}^{ix+y}$, con $r, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = r\mathrm{e}^{y}$.

Problema 3

Considere los operadores

$$\hat{S}^\dagger = |0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|,$$

$$\hat{Y} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|.$$

y los kets

$$|\psi\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle,$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

(a) Muestre que los operadores son unitarios y que los kets están normalizados.

(b) Calcule $\langle\phi|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\phi\rangle$.

(c) Calcule $\hat{T}|\psi\rangle$ y $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$.

(d) Mida el estado $\hat{T}|\psi\rangle$ en la base computacional. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$?

(e) Mida el estado $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$ en la base diagonal. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|+\rangle$ y $|-\rangle$?

Problema 4

Muestre que la matriz

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

es unitaria, para $\theta \in (0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Problema 5

Si $\hat{H}$ es el operador Hadamard. Muestre que

$$\hat{H}^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^{2n}}}\sum_{i=0}^{2^n-1}|i\rangle.$$

Problema 6

Calcula los eigenvalores y lo eigenvectores de la matrix X de Pauli.

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$