Computación Cuántica - Tarea 01

1. Considere los siguientes números complejos,

$$a = (2+3i)(4+i),$$
$$b = \frac{2+3i}{4+i}.$$

   (a) Exprese cada número en la forma $x + iy$.

   (b) Calcule el complejo conjugado de a y de b.

   (c) Exprese cada número en forma polar, $re^{i\theta}$.

   (d) Calcule a^5 y $\sqrt{b}$. Use la representación más conveniente para cada operación, pero exprese el resultado en la forma $x + iy$.

2. Muestre lo siguiente:

   (a) Si $a = x + iy$, entonces $a \cdot a^* = ||a||^2$.

   (b) Si $a = r_1 e^{i\theta_1}$ y $b = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces $ab = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, con $r_i, \theta_i \in \mathbb{R}$.

   (c) Si $a = re^{i\theta}$, con $r, \theta, \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = r$.

   (d) Si $a = re^{ix+y}$, con $r, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|a| = re^y$.

3. Considere los operadores

$$\hat{S}^\dagger = |0\rangle\langle 0| - i|1\rangle\langle 1|$$
$$\hat{Y} = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$$

   y los kets

$$|\psi\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$
$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

   (a) Muestre que los operadores son unitarios y que los kets están normalizados.

   (b) Calcule $\langle\phi|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\phi\rangle$.

   (c) Calcule $\hat{T}|\psi\rangle$ y $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$.

   (d) Mida el estado $\hat{T}|\psi\rangle$ en la base computacional. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|0\rangle$ y $|1\rangle$?

   (e) Mida el estado $\hat{S}^\dagger|\phi\rangle$ en la base diagonal. ¿Cuál es la probabilidad de medir $|+\rangle$ y $|-\rangle$?

4. Muestre que la matriz

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

es unitaria, para $\theta \in (0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

5. Si $\hat{H}$ es el operador de Hadamard. Muestre que

$$\hat{H}^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n - 1} |i\rangle.$$

6. Calcule los eigenvalores y los eigenvectores de la matrix X de Pauli,

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$