Computación Cuántica I

Grupo 7169 – Sem. 2025–2

Marcos López Merino   *Prof.: Dr. Salvador E. Venegas Andraca*

Tarea 02

Entrega: 23 de abril de 2025

Problema 1

Muestre que la representación matricial de la compuerta *CNOT* es

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

La compuerta CNOT actúa sobre dos qubits, el primero es el qubit de control y el segundo es el qubit objetivo, por lo que su base de estados es $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. La acción de la compuerta CNOT sobre los estados de la base es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{CNOT}|00\rangle &= |00\rangle \\
\text{CNOT}|01\rangle &= |01\rangle \\
\text{CNOT}|10\rangle &= |11\rangle \\
\text{CNOT}|11\rangle &= |10\rangle
\end{aligned}$$

Queremos entonces encontrar la representación matricial de la compuerta CNOT. Para ello recordamos que los elementos de la matriz se obtienen a partir de

$$\text{CNOT}_{ij} = \langle j|\text{CNOT}|i\rangle,$$

donde $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son los estados de la base.

Entonces, la matriz de la compuerta CNOT se puede escribir como

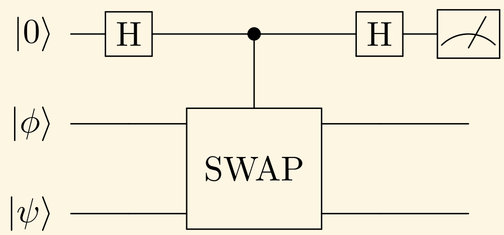
$$
\begin{aligned}
\mathrm{CNOT} &= \begin{pmatrix}
\langle 00|\mathrm{CNOT}|00\rangle & \langle 00|\mathrm{CNOT}|01\rangle & \langle 00|\mathrm{CNOT}|10\rangle & \langle 00|\mathrm{CNOT}|11\rangle \\
\langle 01|\mathrm{CNOT}|00\rangle & \langle 01|\mathrm{CNOT}|01\rangle & \langle 01|\mathrm{CNOT}|10\rangle & \langle 01|\mathrm{CNOT}|11\rangle \\
\langle 10|\mathrm{CNOT}|00\rangle & \langle 10|\mathrm{CNOT}|01\rangle & \langle 10|\mathrm{CNOT}|10\rangle & \langle 10|\mathrm{CNOT}|11\rangle \\
\langle 11|\mathrm{CNOT}|00\rangle & \langle 11|\mathrm{CNOT}|01\rangle & \langle 11|\mathrm{CNOT}|10\rangle & \langle 11|\mathrm{CNOT}|11\rangle
\end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix}
\langle 00|00\rangle & \langle 00|01\rangle & \langle 00|11\rangle & \langle 00|10\rangle \\
\langle 01|00\rangle & \langle 01|01\rangle & \langle 01|11\rangle & \langle 01|10\rangle \\
\langle 10|00\rangle & \langle 10|01\rangle & \langle 10|11\rangle & \langle 10|10\rangle \\
\langle 11|00\rangle & \langle 11|01\rangle & \langle 11|11\rangle & \langle 11|10\rangle
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\boxed{\mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.}
$$

Problema 2

Para el circuito de la figura siguiente, calcule las probabilidades de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en el primer qubit, en términos de $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$.



SOLUCIÓN

Para calcular las probabilidades de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, primero determinemos el estado final del sistema. Calculamos $|\Psi_1\rangle$,

$$
\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{H} \otimes \hat{I})(|0\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle), \\
&= \hat{H}\,|0\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \\
&= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \otimes |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \\
&\boxed{|\Psi_1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle}.
\end{aligned}
$$

La siguiente compuerta a aplicar es la compuerta Fredkin o CSWAP que opera sobre tres qubits. Si el qubit control es $|0\rangle$ los qubits restantes permanecen igual, si es $|1\rangle$ los qubits restantes invierten su orden. Así,

$$
\begin{aligned}
|\Psi_2\rangle &= \text{CSWAP}|\Psi_1\rangle, \\
&= \text{CSWAP} \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|\phi\rangle|\psi\rangle\right), \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\text{CSWAP}|0\phi\psi\rangle + \text{CSWAP}|1\phi\psi\rangle\Big), \\
&\boxed{|\Psi_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\phi\psi\rangle + |1\psi\phi\rangle\Big)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, aplicamos la compuerta de Hadamard al primer qubit,

$$
\begin{aligned}
|\Psi_3\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I})\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle|\phi\psi\rangle + |1\rangle|\psi\phi\rangle\Big),\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big[\hat{H}\,|0\rangle|\phi\psi\rangle + \hat{H}\,|1\rangle|\psi\phi\rangle\big],\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)|\phi\psi\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)|\psi\phi\rangle\Big],\\
&\boxed{|\Psi_3\rangle = \tfrac{1}{2}|0\phi\psi\rangle + \tfrac{1}{2}|1\phi\psi\rangle + \tfrac{1}{2}|0\psi\phi\rangle - \tfrac{1}{2}|1\psi\phi\rangle.}
\end{aligned}
$$

Para determinar las probabilidades de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, usamos la expresión

$$
p(a_i) = \langle\psi\,|\,\hat{M}^\dagger_{a_i}\hat{M}_{a_i}\,|\psi\rangle,
$$

donde $\hat{M}^\dagger_{a_i} = |i\rangle\langle i|$ es el operador de proyección asociado al posible resultado $\{a_i\}$ y $\hat{M}^\dagger_{a_i}$ es el resultado de aplicar el operador $\dagger$ a $\hat{M}_{a_i}$.

Entonces, la probabilidad del estado $|0\rangle$ es

$$
\begin{aligned}
p(0) &= \frac{1}{2}\langle\Psi_3\,|\,|0\rangle\langle 0|\,|\,\Psi_3\rangle,\\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle 0|(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|) + \langle 1|(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)\Big]\Big[(|0\rangle\langle 0|)\frac{1}{2}\Big(|0\rangle(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + |1\rangle(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle)\Big)\Big],\\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle 0|(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|) + \langle 1|(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)\Big]\Big[\frac{1}{2}\langle 0\,|\,0\rangle|0\rangle(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + \frac{1}{2}\langle 0\,|\,1\rangle|0\rangle(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle)\Big],\\
&= \frac{1}{4}\langle 0\,|\,0\rangle(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + \frac{1}{4}\langle 1\,|\,0\rangle(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle),\\
&= \frac{1}{4}(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle),\\
&= \frac{1}{4}\Big[\langle\phi\,|\,\phi\rangle\langle\psi\,|\,\psi\rangle + \langle\phi\,|\,\psi\rangle\langle\psi\,|\,\phi\rangle + \langle\psi\,|\,\phi\rangle\langle\phi\,|\,\psi\rangle + \langle\psi\,|\,\psi\rangle\langle\phi\,|\,\phi\rangle\Big],\\
&= \frac{1}{4}\Big[1 + |\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2 + |\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2 + 1\Big],\\
&= \frac{1}{4}\Big[2 + 2|\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2\Big],\\
&\boxed{p(0) = \frac{1}{2}\Big[1 + |\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2\Big].}
\end{aligned}
$$

De forma análoga, la probabilidad del estado $|1\rangle$ es

$$
\begin{aligned}
p(1) &= \frac{1}{2}\langle\Psi_3|\,|1\rangle\langle 1|\,|\Psi_3\rangle, \\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle 0|(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|) + \langle 1|(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)\Big]\Big[\tfrac{1}{2}\langle 1|0\rangle|1\rangle(|\phi\psi\rangle + |\psi\phi\rangle) + \tfrac{1}{2}\langle 1|1\rangle|1\rangle(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle)\Big], \\
&= \frac{1}{4}\langle 0|0\rangle(\langle\phi\psi| + \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle) + \frac{1}{4}\langle 1|1\rangle(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle), \\
&= \frac{1}{4}(\langle\phi\psi| - \langle\psi\phi|)(|\phi\psi\rangle - |\psi\phi\rangle), \\
&= \frac{1}{4}\Big[\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle - \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle - \langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle + \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\Big], \\
&= \frac{1}{4}\Big[2 - 2|\langle\phi|\psi\rangle|^2\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{p(1) = \frac{1}{2}\Big[1 - |\langle\phi|\psi\rangle|^2\Big].}
$$

Problema 3

Describa, con todo detalle, el protocolo de teletransportación de un qubit dado por

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

usando el siguiente estado de Bell

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

SOLUCIÓN

El protocolo de teletransportación comienza con el qubit que Alice quiere enviarle a Bob. Este qubit es

$$|\psi\rangle_C = \alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C.$$

Agregamos el subíndice C para distinguirlo de los estados A y B.

El protocolo requiere que Alice y Bob compartan un par de qubits fuertemente entrelazados (par EPR) que eligieron previamente, para este caso en particular, usaremos el estado de Bell $|\Psi^-\rangle_{AB}$,

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}.$$

Primero debemos obtener el estado completo del sistema, el estado completo producto tensorial de los tres qubits, i.e.

$$\begin{aligned}
|\Phi_0\rangle = |\psi\rangle_C \otimes |\Psi^-\rangle_{AB} &= \alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C \otimes \frac{|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}}{\sqrt{2}}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|0\rangle_C \otimes (|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}) - \beta|1\rangle_C \otimes (|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB})\Big].
\end{aligned}$$

Recordemos que Alice tiene dos qubits: C, el que quiere enviar y A, que forma parte del par EPR. Por lo tanto, debe realizar una medición local en los que qubits que posee. Desarrollando la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned}
|\Phi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|0\rangle_C|01\rangle_{AB} - \alpha|0\rangle_C|10\rangle_{AB} - \beta|1\rangle_C|01\rangle_{AB} + \beta|1\rangle_C|10\rangle_{AB}\Big], \\
|\Phi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|00\rangle_{CA}|1\rangle_B - \alpha|01\rangle_{CA}|0\rangle_B - \beta|10\rangle_{CA}|1\rangle_B + \beta|11\rangle_{CA}|0\rangle_B\Big]. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

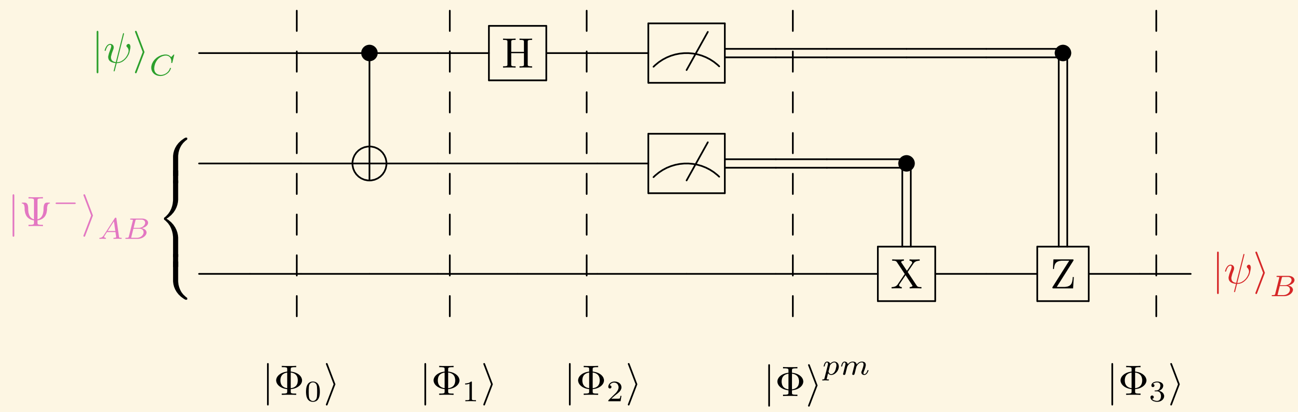


Figura 1: Diagrama del protocolo de teletransportación cuántica.

Dado que estamos trabajando en la base computacional, seguiremos los pasos mostrados en la figura 1. Primero aplicamos la compuerta CNOT a (3.1),

$$
\begin{aligned}
|\Phi_1\rangle &= (\mathrm{CNOT} \otimes \hat{I})|\Phi_0\rangle, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha\mathrm{CNOT}|00\rangle_{CA}|1\rangle_B - \alpha\mathrm{CNOT}|01\rangle_{CA}|0\rangle_B - \beta\mathrm{CNOT}|10\rangle_{CA}|1\rangle_B + \beta\mathrm{CNOT}|11\rangle_{CA}|0\rangle_B\Big], \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|00\rangle_{CA}|1\rangle_B - \alpha|01\rangle_{CA}|0\rangle_B - \beta|11\rangle_{CA}|1\rangle_B + \beta|10\rangle_{CA}|0\rangle_B\Big], \\
|\Phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha|0\rangle_C|01\rangle_{AB} - \alpha|0\rangle_C|10\rangle_{AB} - \beta|1\rangle_C|11\rangle_{AB} + \beta|1\rangle_C|00\rangle_{AB}\Big].
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Ahora aplicamos la compuerta $\hat{H}$,

$$
\begin{aligned}
|\Phi_2\rangle &= (\hat{H} \otimes \hat{I} \otimes \hat{I})|\Phi_1\rangle, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha\hat{H}|0\rangle_C|01\rangle_{AB} - \alpha\hat{H}|0\rangle_C|10\rangle_{AB} - \beta\hat{H}|1\rangle_C|11\rangle_{AB} + \beta\hat{H}|1\rangle_C|00\rangle_{AB}\Big], \\
&= \frac{1}{2}\Big[\alpha(|0\rangle_C + |1\rangle_C)|01\rangle_{AB} - \alpha(|0\rangle_C + |1\rangle_C)|10\rangle_{AB} - \beta(|0\rangle_C - |1\rangle_C)|11\rangle_{AB} + \beta(|0\rangle_C - |1\rangle_C)|00\rangle_{AB}\Big], \\
&= \frac{1}{2}\Big[\alpha|001\rangle + \alpha|101\rangle - \alpha|010\rangle - \alpha|110\rangle - \beta|011\rangle + \beta|111\rangle + \beta|000\rangle - \beta|100\rangle\Big], \\
|\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2}\Big[|00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) + |01\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) + |10\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) + |11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)\Big].
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Ahora Alice realiza la medición local que se mencionó previamente, denotada por $|\Phi_3\rangle$. Primero definimos los operadores de proyección para un qubit:

$$\hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} = |0\rangle\langle 0|,$$

$$\hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} = |1\rangle\langle 1|,$$

$$\hat{P}_{b_0}^{|\Psi^-\rangle} = |0\rangle\langle 0|,$$

$$\hat{P}_{b_1}^{|\Psi^-\rangle} = |1\rangle\langle 1|.$$

Los subíndices indican los posibles resultados de las mediciones: $\{a_0, a_1\}$ para $|\psi\rangle$ y $\{b_0, b_1\}$ para $|\Psi^-\rangle$.

Con base en los operados anteriores, definimos los operadores de proyección para dos qubits de la siguiente manera:

$$\hat{P}_{\{a_0,b_0\}} = \hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_0}^{|\Psi^-\rangle} = |0_{a_0}\rangle\langle 0_{a_0}||0_{b_0}\rangle\langle 0_{b_0}| = |00\rangle\langle 00|, \tag{3.4a}$$

$$\hat{P}_{\{a_0,b_1\}} = \hat{P}_{a_0}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_1}^{|\Psi^-\rangle} = |0_{a_0}\rangle\langle 0_{a_0}||1_{b_1}\rangle\langle 1_{b_1}| = |01\rangle\langle 01|, \tag{3.4b}$$

$$\hat{P}_{\{a_1,b_0\}} = \hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_0}^{|\Psi^-\rangle} = |1_{a_1}\rangle\langle 1_{a_1}||0_{b_0}\rangle\langle 0_{b_0}| = |10\rangle\langle 10|, \tag{3.4c}$$

$$\hat{P}_{\{a_1,b_1\}} = \hat{P}_{a_1}^{|\psi\rangle} \otimes \hat{P}_{b_1}^{|\Psi^-\rangle} = |1_{a_1}\rangle\langle 1_{a_1}||1_{b_1}\rangle\langle 1_{b_1}| = |11\rangle\langle 11|. \tag{3.4d}$$

Ahora, se calcularán las probabilidades y los estados de post-medición para cada uno de los posibles resultados de la medición hecha por Alice.

- $p(a_0, b_0) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0,b_0\}} | \Phi_2 \rangle$
  La probabilidad de obtener el resultado $\{a_0, b_0\}$ es

$$\begin{aligned}
p(a_0, b_0) &= \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_0,b_0\}} | \Phi_2 \rangle \\
&= \frac{1}{4}\Big[(\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)\langle 00| + (-\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|)\langle 01| + (-\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)\langle 10| + (-\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)\langle 11|\Big] \\
&\qquad |00\rangle\langle 00|\Big[|00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |01\rangle(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |10\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |11\rangle(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)\Big], \\
&= \frac{1}{4}\Big[(\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)\langle 00| + (-\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|)\langle 01| + (-\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)\langle 10| + (-\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)\langle 11|\Big] \\
&\qquad |00\rangle(\beta|0\rangle \quad + \quad \alpha|1\rangle), \\
&= \frac{1}{4}(\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle), \\
&= \frac{1}{4}\Big[\beta^*\beta\langle 0|0\rangle + \beta^*\alpha\langle 0|1\rangle + \alpha^*\beta\langle 1|0\rangle + \alpha^*\alpha\langle 1|1\rangle\Big],
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2\Big],$$

$$\boxed{p(a_0, b_0) = \frac{1}{4}.}$$

El estado de post-medición correspondiente $|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_0\}}$ está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_0\}} = \frac{\hat{P}_{\{a_0,b_0\}}|\Phi_2\rangle}{\sqrt{\langle\Phi_2|\hat{P}_{\{a_0,b_0\}}|\Phi_2\rangle}} = \frac{\frac{1}{2}|00\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)}{\sqrt{1/4}},$$

$$\boxed{|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_0\}} = |00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B).} \tag{3.5}$$

- $p(a_0, b_1) = \langle\Phi_2|\hat{P}_{\{a_0,b_1\}}|\Phi_2\rangle$
  La probabilidad de obtener el resultado $\{a_0, b_1\}$ es

$$p(a_0, b_1) = \langle\Phi_2|\hat{P}_{\{a_0,b_1\}}|\Phi_2\rangle,$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)\langle 00| + (-\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|)\langle 01| + (-\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|)\langle 10| + (-\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)\langle 11|\Big]$$

$$|01\rangle(-\alpha|0\rangle \; - \; \beta|1\rangle),$$

$$= \frac{1}{4}(-\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|)(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle),$$

$$\boxed{p(a_0, b_1) = \frac{1}{4}.}$$

El estado de post-medición correspondiente $|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_1\}}$ está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_1\}} = \frac{\frac{1}{2}|01\rangle(-\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)}{\sqrt{1/4}},$$

$$\boxed{|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_1\}} = |01\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B).} \tag{3.6}$$

- $p(a_1, b_0) = \langle\Phi_2|\hat{P}_{\{a_1,b_0\}}|\Phi_2\rangle$
  La probabilidad de obtener el resultado $\{a_1, b_0\}$ es

$$p(a_1, b_0) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1,b_0\}} | \Phi_2 \rangle,$$
$$= \frac{1}{4}(-\beta^* \langle 0| + \alpha^* \langle 1|)(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle),$$
$$\boxed{p(a_1, b_0) = \frac{1}{4}.}$$

El estado de post-medición correspondiente $|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_0\}}$ está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_0\}} = \frac{\frac{1}{2}|10\rangle(-\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)}{\sqrt{1/4}},$$
$$\boxed{|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_0\}} = |10\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B).} \tag{3.7}$$

- $p(a_1, b_1) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1,b_1\}} | \Phi_2 \rangle$
  La probabilidad de obtener el resultado $\{a_1, b_1\}$ es

$$p(a_1, b_1) = \langle \Phi_2 | \hat{P}_{\{a_1,b_1\}} | \Phi_2 \rangle,$$
$$= \frac{1}{4}(-\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|)(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle),$$
$$\boxed{p(a_1, b_1) = \frac{1}{4}.}$$

El estado de post-medición correspondiente $|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_1\}}$ está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_1\}} = \frac{\frac{1}{2}|11\rangle(-\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)}{\sqrt{1/4}},$$
$$\boxed{|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_1\}} = |11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B).} \tag{3.8}$$

Las ecuaciones (3.5) a (3.8) representan los posibles resultados debidos a la medición realizada por Alice, y cada uno indica en cuál de los cuatro estados se encuentra el sistema. Ahora Alice puede enviar el resultado a Bob a través de un canal clásico. Una vez que Bob recibe el mensaje, sabrá en qué estado se encuentra su qubit. A partir de esta información, Bob debe aplicar una serie de operadores unitarios a su qubit para transformarlo en el estado deseado $|\psi\rangle_C$.

Caso 1. Resultado $\{a_0, b_0\}$

La probabilidad de obtener $\{a_0, b_0\}$ es

$$p(a_0, b_0) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_0\}} = |00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es $|00\rangle_{CA}$ y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado $\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B$. Y puesto que

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_z(\hat{\sigma}_x(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B)) &= \hat{\sigma}_z(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B),\\
&= \hat{\sigma}_z(\beta\langle 1|0\rangle|0\rangle + \beta\langle 0|0\rangle|1\rangle + \alpha\langle 1|1\rangle|0\rangle + \alpha\langle 0|1\rangle|1\rangle),\\
&= (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle),\\
&= \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle - \alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle + \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle,\\
&= \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B.
\end{aligned}$$

Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$\boxed{|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x)_B\Big[|00\rangle_{CA}(\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B)\Big].}$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador $\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x$ para preparar su qubit en el estado deseado.

Caso 2. Resultado $\{a_0, b_1\}$

La probabilidad de obtener $\{a_0, b_1\}$ es

$$p(a_0, b_1) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_0,b_1\}} = |01\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es $|01\rangle_{CA}$ y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado $-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B$. Y puesto que

$$
\begin{aligned}
-\hat{\sigma}_z(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) &= (-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B), \\
&= \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle - \alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle + \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle, \\
&= \alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B.
\end{aligned}
$$

Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$
\boxed{|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (-\hat{\sigma}_z)_B \Big[|01\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B)\Big].}
$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador $-\hat{\sigma}_z$ para preparar su qubit en el estado deseado.

Caso 3. Resultado $\{a_1, b_0\}$

La probabilidad de obtener $\{a_1, b_0\}$ es

$$
p(a_1, b_0) = \frac{1}{4}.
$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$
|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_0\}} = |10\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B).
$$

Alice indica que su resultado es $|10\rangle_{CA}$ y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado $-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B$. Y puesto que

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B) &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B), \\
&= -\beta\langle 1|0\rangle|0\rangle - \beta\langle 0|0\rangle|1\rangle + \alpha\langle 1|1\rangle|0\rangle + \alpha\langle 0|1\rangle|1\rangle, \\
&= \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B.
\end{aligned}
$$

Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$
\boxed{|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (\hat{\sigma}_x)_B \Big[|10\rangle_{CA}(-\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B)\Big].}
$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador $\hat{\sigma}_x$ para preparar su qubit en el estado deseado.

Caso 4. Resultado $\{a_1, b_1\}$

La probabilidad de obtener $\{a_1, b_1\}$ es

$$p(a_1, b_1) = \frac{1}{4}.$$

Asimismo, el estado de post-medición correspondiente está dado por

$$|\psi\rangle^{pm}_{\{a_1,b_1\}} = |11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B).$$

Alice indica que su resultado es $|11\rangle_{CA}$ y, por tanto, sabe que el qubit de Bob se encuentra en el estado $-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$. Y puesto que

$$\begin{aligned}
-\hat{I}\,(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) &= (-|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B), \\
&= \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle + \alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle - \beta\langle 0|1\rangle|0\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle, \\
&= \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B.
\end{aligned}$$

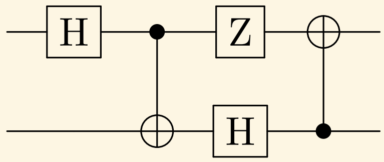
Entonces Alice se comunica con Bob mediante un canal clásico para informarle que

$$\boxed{|\Psi_3\rangle_{CA} = \hat{I}_C \otimes \hat{I}_A \otimes (-\hat{I})_B \Big[|11\rangle_{CA}(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)\Big].}$$

Es decir, Bob debe aplicar el operador $-\hat{I}$ para preparar su qubit en el estado deseado.

Problema 4

Sea U el circuito dado por el siguiente diagrama:



Calcule y escriba un circuito cuántico que corresponda a la operación U^{-1}.

Solución

Antes de poder escribir U, recordemos cómo se interpretan las compuertas aplicadas en serie (figura 2) y paralelo (figura 3).

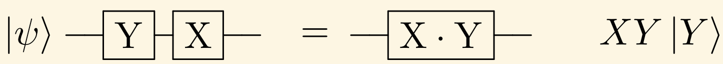


Figura 2: Dos compuertas $\hat{Y}$ y $\hat{X}$ aplicadas en serie. El orden en el que aparecen en el cable se invierte al multiplicarse sus matrices asociadas.

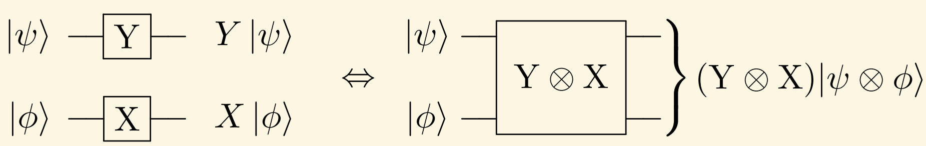


Figura 3: Dos compuertas $\hat{Y}$ y $\hat{X}$ aplicadas en paralelo son equivalentes a la compuerta $\hat{Y} \otimes \hat{X}$.

A partir de lo anterior, podemos escribir la operación asociada al circuito U como:

$$U = CNOT(\hat{Z} \otimes \hat{H}) \cdot CNOT(\hat{H} \otimes \hat{I}).$$

Para obtener U^{-1}, recordemos que para operadores unitarios se $U^{-1} = \hat{U}^{\dagger}$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
U^{-1} &= \Big[\text{CNOT}(\hat{Z} \otimes \hat{H}) \cdot \text{CNOT}(\hat{H} \otimes \hat{I})\Big]^{\dagger}, \\
&= \big(\text{CNOT}(\hat{H} \otimes \hat{I})\big)^{\dagger} \cdot \big(\text{CNOT}(\hat{Z} \otimes \hat{H})\big)^{\dagger}, \\
&= \big((\hat{H}^{\dagger} \otimes \hat{I}^{\dagger})\text{CNOT}^{\dagger}\big) \cdot \big((\hat{Z}^{\dagger} \otimes \hat{H}^{\dagger})\text{CNOT}^{\dagger}\big),
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{U^{-1} = (\hat{H} \otimes \hat{I})\text{CNOT} \cdot (\hat{Z} \otimes \hat{H})\text{CNOT}.}
$$

La operación U^{-1} puede representarse mediante el siguiente circuito: