Tarea 6

Dinámica de Medios Deformables 2026-1

Fecha de entrega: 05.Oct.2025

Ejercicio 1. (4 *puntos*) Se derivará la ecuación de equilibrio de una placa. Para ello, considerar una placa, de material Hookeano, que sufre una deformación longitudinal, donde el único esfuerzo sobre la placa es de extensión al aplicar una distribución de esfuerzos en sus extremos izquierdo y derecho, como se muestra en la Figura 1. Considerar que no hay fuerzas de cuerpo y que la placa tiene un ancho h, un largo L y el grosor es pequeño en la dirección y.

a) ¿Qué condiciones de frontera debe cumplir el tensor de esfuerzos $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$ en $z = \pm h/2$?

b) Considerando que la placa es delgada se puede decir que $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} \simeq 0$ en toda la placa. A partir de la relación constitutiva Hookeana para $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$, escrita en términos de los coeficientes de Lamé, λ y μ, obtener E_{zz} como función de las componentes E_{xx} y E_{yy} del tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy $\overrightarrow{\overrightarrow{E}}$.

c) Reescribir E_{zz} en términos de la razón de Poisson ν y no en términos de λ y μ, ie. mostrar que $\dfrac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} = \dfrac{\nu}{\nu - 1}$.

d) A partir de la relación constitutiva Hookeana para $\overrightarrow{\overrightarrow{E}}$, escrita en términos de ν y del módulo de Young Y, encontrar las componentes del tensor de deformaciones E_{xz} y E_{yz} y mostrar que son nulos.

e) A partir de la relación constitutiva Hookeana para $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$, escrita en términos de ν y Y, encontrar las componentes del tensor de esfuerzos σ_{xy}, σ_{xx} y σ_{yy} como funciones de las componentes del tensor de deformaciones, E_{xx}, E_{yy} y E_{xy} . Usar la relación encontrada para E_{zz} en el inciso (c).

f) A partir de considerar que la placa está en equilibrio, $\nabla \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \overrightarrow{0}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

Integrar ambas ecuaciones con respecto a z, de $-h/2$ a $h/2$. Escribir el resultado sin eliminar el término h.

g) Reescribir el resultado de las integrales del inciso (f) en términos de las componentes del vector de desplazamiento u_x y u_y, usando la relación entre $\overrightarrow{\overleftrightarrow{E}}$ y $\overrightarrow{u}$. El resultado debe mostrar que la ecuación de equilibrio de la placa es

$$hY\left[\frac{1}{1-\nu^2}\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{u}) - \frac{1}{2(1+\nu)}\nabla\times(\nabla\times\overrightarrow{u})\right] = 0,$$

tomando ∇ para 2D. Considerar que como la placa es delgada, el vector de desplazamiento se puede aproximar como $\overrightarrow{u} \simeq u_x(x,y)\hat{e}_x + u_y(x,y)\hat{e}_y$.

Obsérvese que, cuando hay fuerzas de cuerpo $\vec{f}$, la ecuación de equilibrio de la placa es

$$hY\left[\frac{1}{1-\nu^2}\nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{u}) - \frac{1}{2(1+\nu)}\nabla\times(\nabla\times\overrightarrow{u})\right] + \overrightarrow{P} = 0\,,\ \text{donde } \overrightarrow{P} = \int \vec{f}\text{dz}\ .$$

Esta última ecuación no se tiene que derivar, sólo es una observación que servirá para el Ejercicio 2.

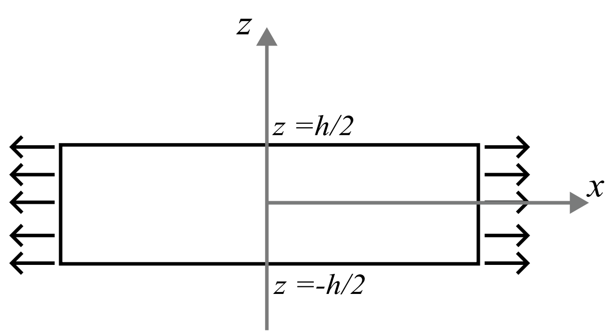

Figura 1.

Ejercicio 2. (3 *puntos*) "El problema del pizzero". Un pizzero, después de amasar su masa para una pizza, extienda la masa de tal forma que consigue formar un disco delgado de grosor h y radio R. Después, el pizzero gira este disco a una velocidad angular ω respecto al eje de simetría del disco. Desde el sistema del laboratorio, no hay fuerzas de cuerpo.

a) Si se toma como referencia el sistema que gira con el disco, aparece la fuerza centrífuga. Escribir la densidad de fuerza centrífuga en coordenadas cilíndricas y obtener $\overrightarrow{P}$.

b) Obtener el vector de desplazamiento $\vec{u} = u_r(r)\hat{e}_r$ aplicando las condiciones de frontera apropiadas.

Ejercicio 3. (3 *puntos*) Suponer dos barras del mismo largo, una de sección transversal circular y otra elíptica, pero con la misma área en ambos casos. Suponer que son del mismo material Hookeano y que se aplican las mismas torcas a ambas barras, provocando una torsión pequeña en ambas. ¿Cuál se torcerá más y porqué?