Dinámica de Medios Deformables

Grupo 8280 – Sem. 2026–1

Tarea 8

Marcos López Merino *Prof.: Dr. Ulisses Gutiérrez Hernández*

Entrega: 30 de octubre de 2025

Problema 1

Muestra que la $\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}$ también puede escribirse como

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \partial_t \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}), \quad v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

Solución

La derivada material es

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}. \tag{1.1}$$

Para a llegar a la forma deseada usamos la siguiente identidad vectorial

$$\begin{aligned}
\nabla(v^2) &= \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}),\\
&= 2\Big[\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{v}(\nabla\times\vec{v})\Big],\\
\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} &= \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}).
\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la Ecuación (1.1),

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}).} \tag{1.2}$$

Problema 2

Deriva la siguiente ecuación de vorticidad para un fluido de densidad y viscosidad constantes:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{w}$$

donde $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ y $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Solución

Partiendo de la ecuación de Cauchy para un fluido compresible,

$$\mu \nabla^2 \vec{v} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla p + \rho \vec{f} = \rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}.$$

Sea $\vec{f}$ conservativa,

$$\mu \nabla^2 \vec{v} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla p - \rho \nabla \phi = \rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}.$$

Calculando el rotacional de la expresión anterior,

$$\nabla \times (\mu \nabla^2 \vec{v} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla p + \rho \vec{f}) = \rho \nabla \times \left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right).$$

Del LHS tenemos que el único término de cero es $\nabla^2 \vec{v}$, pues el resto son de la forma $\nabla \times \nabla(\cdots) = 0$, así

$$\mu \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = \rho \nabla \times \left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right). \tag{2.1}$$

Ahora, desarrollamos el RHS, usando el resultado del problema anterior,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right) &= \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) + \nabla \times \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})), \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) + -\nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})), \\
\nabla \times \left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right) &= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}), \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

pues $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$.

Usando la siguiente identidad vectorial,

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}.$$

Sustituyendo en la Ecuación (2.2),

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}\right) &= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{w}) + \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}, \\
&= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} + \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v}, \\
&= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v},
\end{aligned}$$

donde $\nabla \cdot \vec{w} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{w}) = 0$ y $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ pues la densidad es constante, i.e. el fluido es incompresible.

Finalmente, de la sustitución de este resultado en la Ecuación (2.1), tenemos que la vorticidad es:

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2 \vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} - (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v},$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{w},} \tag{2.3}$$

con $\nu = \mu/\rho$.

Problema 3

Muestra que, para un flujo bidimensional de un fluido Newtoniano incompresible con $\mathbf{f}$ conservativa, la vorticidad $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}$ satisface la ecuación de difusión

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{D}t} = \mu\nabla^2\mathbf{w}.$$

SOLUCIÓN

Usando el resultado del problema anterior,

$$\frac{\mathrm{D}\vec{w}}{\mathrm{D}t} = (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{v} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{w},$$

donde $\frac{\mathrm{D}\vec{w}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{w}$.

Por otro lado, para un flujo bidimensional $\vec{w} = w_z\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}}$, por lo que el término $\vec{w}\cdot\nabla\vec{v} = 0$. De esta manera, la ecuación de difusión es:

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\vec{w}}{\mathrm{D}t} = \mu\nabla^2\vec{w}.}$$

Problema 4

Considera un fluido ideal, donde $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I}$, y fuerza de cuerpo conservativa $\mathbf{f} = -\nabla\phi$.

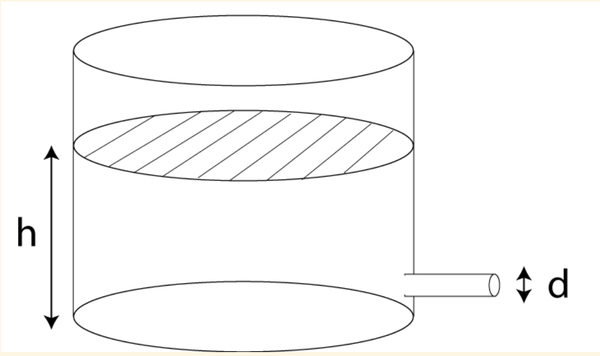
(a) Para flujo estacionario, demuestra que:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \phi\right)\right) + \frac{1}{\rho}\mathbf{v} \cdot \nabla p = 0.$$

(b) Para flujo estacionario e irrotacional (i.e. $\nabla\times\mathbf{v} = 0$), demuestra que:

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \phi\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0.$$

(c) Determina la velocidad y el gasto volumétrico del fluido en la salida de la boquilla en la pared del depósito mostrado en la figura ($d \ll D$, con D el diámetro del contenedor.)



Solución

Inciso (a)

Sabemos que la ecuación de Cauchy es

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\vec{f} = \rho\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}.$$

Por la Ecuación (1.2) y las hipótesis, la expresión anterior se ve como:

$$-\nabla p - \rho\nabla\phi = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right),$$

y como el flujo es estacionario,

$$-\nabla p - \rho\nabla\phi = \rho\left(\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right). \tag{4.1}$$

Calculando $\vec{v}\cdot(\cdots)$,

$$-\frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\nabla p - \vec{v}\cdot\nabla\phi = \vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\cdot\Big(\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\Big),$$

pero $\vec{v}\cdot\Big(\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\Big) = 0$. Así,

$$\vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right) + \frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\nabla p = 0. \tag{4.2}$$

Escribiendo el primer término como una divergencia,

$$\nabla\cdot\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right) = \left(\frac{v^2}{2}+\phi\right)(\nabla\cdot\vec{v}) + \vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right),$$

pero $\nabla\cdot\vec{v} = 0$ por ser incompresible, i.e.

$$\nabla\cdot\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right) = \vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right),$$

Entonces, la Ecuación (4.2) queda como:

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right)\right) + \frac{1}{\rho}\vec{v}\cdot\nabla p = 0.}$$

Inciso (b)

Como el flujo es irrotacional, la Ecuación (4.1)se ve como:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\phi\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0.}$$

Inciso (c)

Del resultado anterior tenemos que

$$nabla\left(\frac{v^2}{2} + \phi + \frac{1}{\rho}p\right) = 0,$$

$$\frac{v^2}{2} + \phi + \frac{1}{\rho}p = \text{cte.}$$

Es decir, para nuestro problema en particular tenemos

$$\frac{v_D^2}{2} + \phi + \frac{1}{\rho}p_D = \frac{v_d^2}{2} + \phi + \frac{1}{\rho}p_d,$$

donde $\phi = gz$ pues la única fuerza de cuerpo que actúa sobre el fluido es la de la gravedad. Ahora, si colocamos nuestro sistema de referencia en $z = 0$, tenemos que $z_d = 0$ y $z_D = h$. Así,

$$\frac{v_D^2}{2} + gh + \frac{1}{\rho}p_D = \frac{v_d^2}{2} + \frac{1}{\rho}p_d.$$

Por otro lado, la presión $p_D = p_d = p_{\text{atm}}$, entonces

$$\frac{v_D^2}{2} + gh = \frac{v_d^2}{2},$$

$$v_d^2 = v_D^2 + 2gh. \tag{4.3}$$

Y como to el fluido que baja del depósito sale por la boquilla,

$$v_D D \,\mathrm{d}t = v_d d \,\mathrm{d}t,$$

$$v_D = \frac{d}{D}v_d.$$

Sustituyendo en la Ecuación (4.3),

$$v_d^2 = \frac{d^2}{D^2}v_d^2 + 2gh,$$

pero $\frac{d^2}{D^2} \sim 0$, ya que $D^2 \ggg d^2$. Por lo que la velocidad de salida es

$$v_d^2 = 2gh,$$

$$\boxed{v_d = \sqrt{2gh}.}$$

Finalmente, para obtener el gasto volumétrico usamos que

$$Q = Av.$$

Así,

$$Q = \left(\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)v_d,$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi d^2 v_d}{4}.}$$