Dinámica de Medios Deformables

Grupo 8280 – Sem. 2026–1

Marcos López Merino *Prof.: Dr. Ulisses Gutiérrez Hernández*

Tarea 7

Entrega: 23 de octubre de 2025

Problema 1

Supón que el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico, es decir, $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$. Entonces:

(a) Muestra que la ecuación de energía se puede escribir como:

$$\rho \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e + \frac{v^2}{2}\right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \rho r_h - \nabla \cdot \boldsymbol{q}.$$

(b) Obtén la versión termodinámica de la ecuación de energía:

$$\rho \frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho r_h - \nabla \cdot \boldsymbol{q}.$$

Problema 2

Demuestra que para un fluido compresible, las ecuaciones de movimiento de Cauchy se pueden expresar como:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{v}.$$

Simplifica la ecuación para:

(a) Fluido incompresible.

(b) Estado de esfuerzo hidrostático.

Problema 3

El campo de velocidad $\boldsymbol{v}$ se dice que es irrotacional cuando la vorticidad es cero, es decir, $\boldsymbol{w} = 0$. Entonces, existe un potencial de velocidad $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ tal que $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$. Muestra que las ecuaciones de Navier-Stokes del problema anterior se pueden expresar como:

$$\rho\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(\nabla\phi\Big)^2\right) = \rho\boldsymbol{f} - \nabla p + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2\phi).$$

Problema 4

Muestra que, en el caso de una fuerza de cuerpo irrotacional $\boldsymbol{f} = -\nabla V$ y cuando la presión p es función únicamente de la densidad ρ, se cumple:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V + P(\rho) - \frac{1}{\rho}(\lambda + 2\mu)(\nabla^2\phi)^2 = g(t),$$

donde $P(\rho) = \int_{p_0}^{p} \mathrm{d}p \, \frac{1}{\rho}$, p_0 una constante y $g(t)$ es una función únicamente del tiempo.