Tarea 3

1. El movimiento de un medio continuo está dado por
$$x_1 = \left(1 + e^{at}\right) X_1, \quad x_2 = \left(1 + e^{-2at}\right) X_2, \quad x_3 = X_3, \quad 0 \leq t < \infty,$$
donde a es una constante positiva. Determina
    a) los componentes del gradiente de deformación $\mathbf{F}$ y la transformación inversa,
    b) las componentes de la velocidad en la descripción espacial,
    c) las componentes de la velocidad en la descripción material, y
    d) las componentes de la aceleración en la descripción espacial.

2. El movimiento de un cuerpo se describe por el siguiente mapeo
$$\chi(\mathbf{X}) = (X_1 + t^2 X_2)\,\hat{\mathbf{e}}_1 + (X_2 + t^2 X_1)\,\hat{\mathbf{e}}_2 + X_3\,\hat{\mathbf{e}}_3, \quad 0 \leq t < \infty.$$
Determina
    a) los componentes del gradiente de deformación $\mathbf{F}$ y su inversa,
    b) los componentes del desplazamientos, velocidad y aceleración,
    c) Esboza la forma del cuerpo deformado a los tiempos $t = 0, 1, 2, 3$, asumiendo que originalmente era un cubo unitario.

3. El movimiento de un cuerpo continuo está dado por
$$x_1 = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)e^{t} + \tfrac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t},$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)e^{t} - \tfrac{1}{2}(X_1 - X_2)e^{-t},$$
$$x_3 = X_3,$$
para $0 \leq t < \infty$. Determina
    a) velocidad en la descripción material,
    b) velocidad en la descripción espacial,
    c) componentes de los tensores de tasa de deformacióny de vorticidad.

4. Encuentre el máximo esfuerzo principal, máximo esfuerzo cortante y sus orientaciones para el estado de esfuerzos dado.
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 9 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

5. Dado el siguiente estado de esfuerzos a un punto del continuo,
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} A(x_1 - x_2) & Bx_1^2 x_2 & 0 \\ Bx_1^2 x_2 & -A(x_1 - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa},$$
determina las constantes A y B tales que el tensor de esfuerzos corresponde a un estado de equilibrio en ausencia de fuerzas de cuerpo.

6. Muestra que el principio de conservación de masa se puede expresar de la siguiente forma:
$$\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0.$$
Usa el resultado anterior para derivar la ecuación de continuidad.
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$