Tarea 7

1. Supón que el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico, es decir, $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$. Entonces:

   a) Muestra que la ecuación de energía de puede escribir como:

   $$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{v^2}{2}\right) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho r_h - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

   b) Obtén la *versión termodinámica* de la ecuación de energía:

   $$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho r_h - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

2. Demuestra que para un fluido compresible, las ecuaciones de movimiento de Cauchy se pueden expresar como:

   $$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

   Simplifica la ecuación para:

   a) Fluido incompresible.

   b) Estado de esfuerzo hidrostático.

3. El campo de velocidad $\mathbf{v}$ se dice que es irrotacional cuando la vorticidad es cero, es decir, $\mathbf{w} = 0$. Entonces, existe un potencial de velocidad $\phi(\mathbf{x}, t)$ tal que $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Muestra que las ecuaciones de Navier-Stokes del problema anterior se pueden expresar como:

   $$\rho \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2\right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 \phi).$$

4. Muestra que, en el caso de una fuerza de cuerpo irrotacional $\mathbf{f} = -\nabla V$ y cuando la presión p es función únicamente de la densidad ρ, se cumple:

   $$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + V + P(\rho) - \frac{1}{\rho}(\lambda + 2\mu)(\nabla^2 \phi)^2 = g(t),$$

   donde $P(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho}$, p_0 es una constante y $g(t)$ es una función únicamente del tiempo.