Tarea 1

Entrega: 2 de septiembre de 2023

Problema 1: Adición de momentos angulares: acoplamiento entre momento angular orbital y de spin (valor total: 5 pt)

Considera una partícula cuyos números cuánticos de momento angular orbital y de spin son $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$, respectivamente. Realiza la adición de estos momentos angulares, es decir:

(a) Valor: 1.0 pt - Determina los posibles valores de los números cuánticos j y m del sistema acoplado.

Solución

Recordemos que los posibles valores de j en la base acoplada vienen dados por:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2,$$
$$\frac{1}{2} \leq j \leq \frac{3}{2}.$$

Entonces los posibles valores de j son:

$$\boxed{j = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}.} \tag{1.1}$$

Por lo que los posibles valores de m son de la forma

$$-j \leq m \leq j,$$

tal que,

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}} \tag{1.2}$$

(b) Valor: 3.0 pt - Expresa los elementos de la base acoplada $\{|j, m\rangle\}$ en términos de los elementos de la base desacoplada $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Para ello debes calcular "a mano" todos los coeficientes de Clebsch-Gordan involucrados, $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m\rangle$.

Solución

Por $(2j_1+1)(2j_2+1)$ sabemos que la base acoplada debe tener 6 elementos y de (1.1)eq:m-values tenemos que los elementos de la base acoplada (y para cada uno de lo subespacios) son:

$$\{|j,m\rangle\} = \begin{cases} |j=\frac{3}{2},m\rangle & \rightarrow \begin{cases} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle \end{cases} \\ |j=\frac{1}{2},m\rangle & \rightarrow \begin{cases} |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Recordemos ajora que los elementos de la base acoplada $\{|j,m\rangle\}$ en términos de la base desacoplada $\{|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle\}$ están dados por:

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j,m\rangle|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle. \tag{1.3}$$

Empezamos expresando el estado de máximo valor de j y m, $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$. Así,

$$|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^{1}\sum_{m_2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\langle 1,\frac{1}{2};m_1,m_2|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle|1,\frac{1}{2};\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle. \tag{1.4}$$

Sin embargo, las reglas de relación de los CCG (Coeficientes de Clebsch-Gordan) nos exigen que

$$m = m_1 + m_2.$$

Y para este caso tenemos que $m=\frac{3}{2}$. Lo cual es válido únicamente cuando $m_1=1$ y $m_2=\frac{1}{2}$, por lo que (1.4) se reduce a un solo término:

$$|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \langle 1,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle|1,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}\rangle.$$

Además necesitamos la condición de normalización,

$$\langle 1,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle^2 = 1,$$

$$\langle 1,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle = \pm 1.$$

Para determinar el signo del coeficiente usamos la condición de Condon-Shortley,

$$\langle j_1, j_2; j_1, (j - j_1) | j, j\rangle \geq 0.$$

Por lo que el signo de nuestro coeficiente es

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = 1.$$

Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= 1. \quad \text{(CCG)} \end{aligned}} \tag{1.5}$$

Ahora, para generar a $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ podemos aplicar $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$ a (1.5),

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= \hat{J}_{1-} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle + \hat{J}_{2-} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \hbar\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)} |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle, \\ \Aboxed{|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle.} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Los CCG son

$$\boxed{\begin{aligned} \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos $\hat{J}_-$ a (1.6),

$$\hat{J}_-|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\rangle,$$

$$2|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sqrt{2}|1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle + |1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}|1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle\right],$$

$$\boxed{|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle.} \tag{1.7}$$

Los CCG son:

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\frac{3}{2},-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}},\\ \langle 1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos $\hat{J}_-$ a (1.7),

$$\hat{J}_-|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\boxed{|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle = |1,\frac{1}{2};-1,-\frac{1}{2}\rangle.} \tag{1.8}$$

El CCG es

$$\boxed{\langle 1,\frac{1}{2};-1,-\frac{1}{2}|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle.}$$

Ahora hay que encontrar $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ que está en el subespacio $\{|j=\frac{1}{2},m\rangle\}$. Usamos (1.3):

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^{1}\sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\langle 1,\frac{1}{2};m_1,m_2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|1,\frac{1}{2};m_1,m_2\rangle. \tag{1.9}$$

Y sabemos que se deben cumplir las reglas de relación de los CCG, $m=m_1+m_2 \implies m=\frac{1}{2}$, lo cual se cumple únicamente cuando $m_1=0$ y $m_2=\frac{1}{2}$, $m_1=1$ y $m_2=-\frac{1}{2}$.

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \langle 1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\rangle + \langle 1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle|1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\rangle.$$

Definimos

$$a = \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle,$$

$$b = \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle.$$

Entonces,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = a|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + b|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{1.10}$$

Y por la condición de normalización,

$$a^2 + b^2 = 1. \tag{1.11}$$

Aplicamos $\hat{J}_+$ a (1.10)

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= a(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + b(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle, \\
0 &= \sqrt{2}a|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle + b|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\
0 &= (\sqrt{2}a + b)|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\
\sqrt{2}a + b = 0.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Resolviendo simultáneamente (1.11) y (1.12),

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ b &= \mp\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}}$$

Usamos la convención de Condon-Shortley, recordando la de a y que $j = \frac{1}{2}$,

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ b &= \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}}$$

Por lo que $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ queda como

$$\boxed{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle.} \tag{1.13}$$

Los CCG son:

$$\boxed{\begin{aligned}\langle 1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}},\\ \langle 1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}}$$

Aplicando $\hat{J}_{-1}$ a (1.13):

$$\hat{J}_{-}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\rangle,$$

$$\boxed{|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}|1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\rangle.}$$

Los CCG son

$$\boxed{\begin{aligned}\langle 1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}},\\ \langle 1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}}$$

(c) Valor 1.0 pt - Escribe la matriz de transformación entre estas dos bases.

Solución

La transformación puede escribirse como

$$\boxed{\begin{pmatrix} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}\rangle \\ |1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\rangle \\ |1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\rangle \\ |1,\frac{1}{2};1,\frac{-1}{2}\rangle \\ |1,\frac{1}{2};0,\frac{-1}{2}\rangle \\ |1,\frac{1}{2};-1,\frac{-1}{2}\rangle \end{pmatrix}}$$

Problema 2: Perturbación en un sistema de tres estados (valor total: 5 pt)

Considera un sistema que solo tiene tres estados linealmente independientes. Considera ahora que el Hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix},$$

en donde V_0 es una constante y ϵ es un número pequeño, es decir, $\epsilon \ll 1$.

(a) Valor: 0.5 pt - Si consideramos que ϵ es ele resultado de una perturbación, escribe este Hamiltoniano como la suma de un Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$ y una perturbación $\hat{W}$, es decir, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, de tal forma que $\hat{H} = \hat{H}_0$ cuando $\epsilon = 0$.

(b) Valor: 0.5 pt - ¿Quiénes son los eigenvalores y los eigenvectores del Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$? Nota que este Hamiltoniano tiene un eigenvalor no degenerado y dos eigenvalores degenerados.

(c) Valor: 1.0pt - El Hamiltoniano $\hat{H}$ puede resolverse exactamente Encuentra los eigenvalores exactos de $\hat{H}$. Una vez que los hayas encontrado, exprésalos como una serie de potencias de Taylor en ϵ hasta segundo orden, es decir, conserva todos los términos con orden igual o menor a ϵ^2.

(d) Valor: 1.0pt - Utiliza el caso **no** degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden y segundo orden del eigenvalor **no** degenerado del Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$. Compara este resultado con el que encontraste en (c).

(e) Valor: 2.0pt - Utiliza ahora el caso degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden de los dos eigenvalores degenerados de $\hat{H}_0$. Compara con los resultados del inciso (c).

Problema 3: Extra: Incertidumbre de $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$ (valor: +1pt)

Sea $\hat{\vec{J}}$ el operador general de momento angular con componentes $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ y $\hat{J}_z$. En clase aprendimos que estas componentes no conmutan entre sí y por lo tanto deben satisfacer alguna relación de incertidumbre. Considerando la base de autoestados $|j, m\rangle$ de los operadores $\hat{J}_0^2$ y $\hat{J}_z$, encuentra la relación de incertidumbre $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$.

Recuerda que la definición de la desviación estándar de un operador $\hat{\mathcal{O}}$ es

$$\Delta\hat{\mathcal{O}} = \sqrt{\langle\hat{\mathcal{O}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle^2}.$$

Sugerencia: Utiliza los operadores de ascenso y descenso, $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ y $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$, recordando que su acción sobre los estados $|j, m\rangle$ es:

$$\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\hbar|j, m\pm 1\rangle.$$