

# Tarea 1

Entrega: 2 de septiembre de 2023

## Problema 1: Adición de momentos angulares: acoplamiento entre momento angular orbital y de spin (valor total: 5 pt)

Considera una partícula cuyos números cuánticos de momento angular orbital y de spin son  $j_1 = 1$  y  $j_2 = 1/2$ , respectivamente. Realiza la adición de estos momentos angulares, es decir:

- (a) Valor: 1.0 pt - Determina los posibles valores de los números cuánticos  $j$  y  $m$  del sistema acoplado.

### Solución

Recordemos que los posibles valores de  $j$  en la base acoplada vienen dados por:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2,$$

$$\frac{1}{2} \leq j \leq \frac{3}{2}.$$

Entonces los posibles valores de  $j$  son:

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \quad (1.1)$$

Por lo que los posibles valores de  $m$  son de la forma

$$-j \leq m \leq j,$$

tal que,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &\leq m \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2} &\leq m \leq \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

- (b) Valor: 3.0 pt - Expresa los elementos de la base acoplada  $\{|j, m\rangle\}$  en términos de los elementos de la base desacoplada  $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ . Para ello debes calcular “a mano” todos los coeficientes de Clebsch-Gordan involucrados,  $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle$ .

## Solución

Por  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  sabemos que la base acoplada debe tener 6 elementos y de (1.1)eq:m-values tenemos que los elementos de la base acoplada (y para cada uno de los subespacios) son:

$$\{|j, m\rangle\} = \begin{cases} |j = \frac{3}{2}, m\rangle \rightarrow \begin{cases} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \end{cases} \\ |j = \frac{1}{2}, m\rangle \rightarrow \begin{cases} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Recordemos ahora que los elementos de la base acoplada  $\{|j, m\rangle\}$  en términos de la base desacoplada  $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$  están dados por:

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle. \quad (1.3)$$

Empezamos expresando el estado de máximo valor de  $j$  y  $m$ ,  $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ . Así,

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle 1, \frac{1}{2}; m_1, m_2 | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle. \quad (1.4)$$

Sin embargo, las reglas de relación de los CCG (Coeficientes de Clebsch-Gordan) nos exigen que

$$m = m_1 + m_2.$$

Y para este caso tenemos que  $m = \frac{3}{2}$ . Lo cual es válido únicamente cuando  $m_1 = 1$  y  $m_2 = \frac{1}{2}$ , por lo que (1.4) se reduce a un solo término:

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle.$$

Además necesitamos la condición de normalización,

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle^2 = 1,$$

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle = \pm 1.$$

Para determinar el signo del coeficiente usamos la condición de Condon-Shortley,

$$\langle j_1, j_2; j_1, (j - j_1) | j, j \rangle \geq 0.$$

Por lo que el signo de nuestro coeficiente es

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle &= 1. \quad (\text{CCG}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ahora, para generar a  $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  podemos aplicar  $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$  a (1.5),

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= \hat{J}_{1-} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle + \hat{J}_{2-} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \hbar \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} - 1 \right)} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \hbar \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle, \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Los CCG son

$$\begin{aligned} \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos  $\hat{J}_-$  a (1.6),

$$\begin{aligned}
\hat{J}_- \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) \left| 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) \left| 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\
2 \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sqrt{2} \left| 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \right\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{2} \left| 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \right\rangle \right], \\
\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Los CCG son:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
\left\langle 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right. &= \sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos  $\hat{J}_-$  a (1.7),

$$\begin{aligned}
\hat{J}_- \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) \left| 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) \left| 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\
\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= \left| 1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

El CCG es

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \right.$$

Ahora hay que encontrar  $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$  que está en el subespacio  $\{|j = \frac{1}{2}, m\rangle\}$ . Usamos (1.3):

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\langle 1, \frac{1}{2}; m_1, m_2 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right| 1, \frac{1}{2}; m_1, m_2 \rangle. \tag{1.9}$$

Y sabemos que se deben cumplir las reglas de relación de los CCG,  $m = m_1 + m_2 \implies m = \frac{1}{2}$ , lo cual se cumple únicamente cuando  $m_1 = 0$  y  $m_2 = \frac{1}{2}$ ,  $m_1 = 1$  y  $m_2 = -\frac{1}{2}$ .

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right| 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \rangle + \left\langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right| 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} \rangle.$$

Definimos

$$a = \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle,$$

$$b = \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle.$$

Entonces,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = a|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + b|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \quad (1.10)$$

Y por la condición de normalización,

$$a^2 + b^2 = 1. \quad (1.11)$$

Aplicamos  $\hat{J}_+$  a (1.10)

$$\begin{aligned} \hat{J}_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= a(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + b(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle, \\ 0 &= \sqrt{2}a|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle + b|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ 0 &= (\sqrt{2}a + b)|1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \sqrt{2}a + b &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Resolviendo simultáneamente (1.11) y (1.12),

$$\begin{aligned} a &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ b &= \mp \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Usamos la convención de Condon-Shortley, recordando la de  $a$  y que  $j = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ b &= \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Por lo que  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  queda como

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \quad (1.13)$$

Los CCG son:

$$\begin{aligned}\langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Aplicando  $\hat{J}_{-1}$  a (1.13):

$$\hat{J}_{-1} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) | 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) | 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} \rangle,$$

$$| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} | 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} \rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} | 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \rangle.$$

Los CCG son

$$\begin{aligned}\langle 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(c) Valor 1.0 pt - Escribe la matriz de transformación entre estas dos bases.

## Solución

La transformación puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle \\ | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ | \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \rangle \\ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \\ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} \rangle \\ | 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} \rangle \\ | 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} \rangle \\ | 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} \rangle \\ | 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} \rangle \\ | 1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

## Problema 2: Perturbación en un sistema de tres estados (valor total: 5 pt)

Considera un sistema que solo tiene tres estados linealmente independientes. Considera ahora que el Hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix},$$

en donde  $V_0$  es una constante y  $\epsilon$  es un número pequeño, es decir,  $\epsilon \ll 1$ .

- (a) Valor: 0.5 pt - Si consideramos que  $\epsilon$  es el resultado de una perturbación, escribe este Hamiltoniano como la suma de un Hamiltoniano imperturbado  $\hat{H}_0$  y una perturbación  $\hat{W}$ , es decir,  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$ , de tal forma que  $\hat{H} = \hat{H}_0$  cuando  $\epsilon = 0$ .

### Solución

Para lograr escribir  $\hat{H}$  como  $\hat{H}_0 + \hat{W}$ , recordamos que  $\hat{H}_0$  se obtiene cuando  $\epsilon = 0$ , por lo que  $\hat{W}$  debe estar únicamente en términos de  $\epsilon$ . Así,

$$\hat{H}_0 = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Y,  $\hat{W}$ ,

$$\hat{W} = V_0 \epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El Hamiltoniano  $\hat{H}$  queda entonces como

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + V_0 \epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

- (b) Valor: 0.5 pt - ¿Quiénes son los eigenvalores y los eigenvectores del Hamiltoniano imperturbado  $\hat{H}_0$ ? Nota que este Hamiltoniano tiene un eigenvalor no degenerado y dos eigenvalores degenerados.

## Solución

Inmediatamente de (2.1) notamos que los eigenvalores de  $\hat{H}_0$  son

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= V_0, \\ \lambda_2 &= 2V_0,\end{aligned}$$

con  $\bar{\lambda}_1$  doblemente degenerado. Y que sus eigenvectores son

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Valor: 1.0pt - El Hamiltoniano  $\hat{H}$  puede resolverse exactamente Encuentra los eigenvalores exactos de  $\hat{H}$ . Una vez que los hayas encontrado, exprésalos como una serie de potencias de Taylor en  $\epsilon$  hasta segundo orden, es decir, conserva todos los términos con orden igual o menor a  $\epsilon^2$ .

## Solución

Reescribimos  $\hat{H}$  para no estar cargando con coeficientes, tal que,

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \frac{1}{V_0} \hat{H}, \\ \hat{H}' &= \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Resolvemos el problema de eigenvalores, tal que el polinomio característico de  $\hat{H}'$  es

$$[(1 - \epsilon) - \lambda][(1 - \lambda)(2 - \lambda) - \epsilon^2] = 0.$$

Los eigenvalores son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \epsilon, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( 3 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2} \right), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left( 3 - \sqrt{1 + 4\epsilon^2} \right).\end{aligned}$$



Haciendo la expansión de Taylor correspondiente para cada uno de los eigenvalores tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \epsilon, \\ \lambda_2 &\simeq 2 + \epsilon^2, \\ \lambda_3 &\simeq 1 - \epsilon^2.\end{aligned}$$

Multiplicando por  $V_0$  tenemos que los eigenvalores de  $\hat{H}$  son

$$\begin{aligned}\omega_1 &= V_0(1 - \epsilon), \\ \omega_2 &\simeq V_0(2 - \epsilon^2), \\ \omega_3 &\simeq V_0(1 - \epsilon^2).\end{aligned}\tag{2.4}$$

- (d) Valor: 1.0pt - Utiliza el caso **no** degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden y segundo orden del eigenvalor **no** degenerado del Hamiltoniano imperturbado  $\hat{H}_0$ . Compara este resultado con el que encontraste en (c).

## Solución

Sabemos que el eigenvalor no degenerado es  $\lambda_3 = 2V_0$ . Recordamos entonces que la corrección a primer orden viene dada por

$$E_3^{(1)} = \langle \psi_3^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned}E_3^{(1)} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$E_3^{(1)} = 0.$$

Es decir, no hay corrección de primer orden.

La corrección de segundo orden para el caso no degenerado se obtiene a partir de

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \psi_n^{(0)} | \hat{W} | \psi_k^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

Así,

$$E_3^{(2)} = \frac{|\langle \psi_1^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2}{E_3^{(0)} - E_1^{(0)}} + \frac{|\langle \psi_2^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2}{E_3^{(0)} - E_2^{(0)}}. \quad (2.5)$$

Por un lado tenemos que

$$\langle \psi_1^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle = V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{|\langle \psi_1^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2 = 0.}$$

Por el otro,

$$\langle \psi_2^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle = V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$= V_0 \epsilon,$$

$$\boxed{|\langle \psi_2^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2 = V_0^2 \epsilon^2.}$$

Y además sabemos que  $E_3^{(0)} = 2V_0$  y  $E_2^{(0)} = V_0$ , entonces

$$E_3^{(0)} - E_2^{(0)} = 2V_0 - V_0,$$

$$E_3^{(0)} - E_2^{(0)} = V_0.$$

Sustituyendo lo anterior en (2.5),

$$E_3^{(2)} = \frac{V_0^2 \epsilon^2}{V_0},$$

$$E_3^{(2)} = V_0 \epsilon^2.$$

Por lo que la corrección de la energía a segundo orden es:

$$\begin{aligned} E_3 &\simeq E_3^{(0)} + E_3^{(1)} + E_3^{(2)}, \\ &\simeq 2V_0 + 0 + V_0\epsilon^2, \\ E_3 &\simeq V_0(2 + \epsilon^2). \end{aligned}$$

Comparando el valor de  $E_3$  con el resultado obtenido en (2.4) observamos que es lo mismo, *i.e.*,

$$E_3 \simeq V_0(2 + \epsilon^2) = V_0(2 + \epsilon^2) \simeq \omega_3.$$

- (e) Valor: 2.0pt - Utiliza ahora el caso degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden de los dos eigenvalores degenerados de  $\hat{H}_0$ . Compara con los resultados del inciso (c).

## Solución

Recordamos que la corrección primer orden de la energía para el caso degenerado viene dada por

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 - 4|W_{ab}|^2} \right], \quad (2.6)$$

donde

$$W_{ij} = \langle \psi_i^{(0)} | \hat{W} | \psi_j^{(a)} \rangle.$$

Debemos obtener  $W_{aa}$ ,  $W_{bb}$  y  $W_{ab}$ ,

$$W_{aa} = \langle \psi_a^{(0)} | \hat{W} | \psi_a^{(0)} \rangle,$$

$$W_{bb} = \langle \psi_b^{(0)} | \hat{W} | \psi_b^{(0)} \rangle,$$

$$W_{ab} = \langle \psi_a^{(0)} | \hat{W} | \psi_b^{(0)} \rangle,$$

donde  $|\psi_a^{(0)}\rangle = |\psi_1\rangle$  y  $|\psi_b^{(0)}\rangle = |\psi_2\rangle$ .

Así,

$$\begin{aligned}
 W_{aa} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \boxed{W_{aa} = -V_0 \epsilon.} & \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{bb} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \boxed{W_{bb} = 0.} & \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ab} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \boxed{W_{ab} = 0.} & \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.7) a (2.9) en (2.6),

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} [-V_0 \epsilon \pm V_0 \epsilon],$$

$$\boxed{E_{\pm}^{(1)} = \{0, -V_0 \epsilon\}.}$$

Por lo que la corrección de la energía  $E^{(1)}$  es:

$$\begin{aligned} E_1 &\simeq E_0^{(1)} + E_1^{(1)}, \\ &\simeq V_0 + (0 - V_0\epsilon), \end{aligned}$$

$$E_1 \simeq V_0(1 - \epsilon).$$

Comparando con (2.4), verificamos que el resultado es igual al obtenido en el inciso (c).

---

## Problema 3: Extra: Incertidumbre de $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$ (valor: +1pt)

Sea  $\hat{\vec{J}}$  el operador general de momento angular con componentes  $\hat{J}_x$ ,  $\hat{J}_y$  y  $\hat{J}_z$ . En clase aprendimos que estas componentes no conmutan entre sí y por lo tanto deben satisfacer alguna relación de incertidumbre. Considerando la base de autoestados  $|j, m\rangle$  de los operadores  $\hat{J}_0^2$  y  $\hat{J}_z$ , encuentra la relación de incertidumbre  $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$ .

Recuerda que la definición de la desviación estándar de un operador  $\hat{O}$  es

$$\Delta\hat{O} = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}. \quad (3.1)$$

**Sugerencia:** Utiliza los operadores de ascenso y descenso,  $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$  y  $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$ , recordando que su acción sobre los estados  $|j, m\rangle$  es:

$$\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar|j, m \pm 1\rangle.$$

## Solución

A partir de los operadores de ascenso y descenso podemos encontrar a los operadores  $\hat{J}_x$  y  $\hat{J}_y$ , tal que,

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \quad \wedge \quad \hat{J}_y = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i}.$$

Recordemos que el valor esperado está dado por:

$$\langle\hat{O}\rangle = \langle j, m | \hat{O} | j, m \rangle.$$

Por un lado, tenemos que  $\langle\hat{J}_x\rangle$  y  $\langle\hat{J}_y\rangle$ ,

$$\langle\hat{J}_x\rangle = \frac{1}{2}\langle j', m' | (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) | j, m \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle j', m' | \hat{J}_+ | j, m \rangle + \langle j', m' | \hat{J}_- | j, m \rangle \right],$$

$$\langle\hat{J}_x\rangle = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j', m' | j, m+1 \rangle + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j', m' | j, m-1 \rangle \right],$$

$$\langle\hat{J}_y\rangle = \frac{1}{2i} \left[ \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j', m' | j, m+1 \rangle - \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j', m' | j, m-1 \rangle \right],$$

pero

$$\langle j', m' | j, m + 1 \rangle = 0,$$

$$\langle j', m' | j, m - 1 \rangle = 0,$$

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Por el otro, para  $\langle \hat{J}_x^2 \rangle$  y  $\langle \hat{J}_y^2 \rangle$  se tiene que

$$\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle j, m | (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)^2 | j, m \rangle = \frac{1}{4} \langle j, m | \hat{J}_+^2 + \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_-^2 | j, m \rangle.$$

Recordando que existen las siguientes relaciones:

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z,$$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z.$$

De esta manera, la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_x^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle j, m | \hat{J}_+^2 + \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_-^2 | j, m \rangle, \\ &= \frac{1}{4} \langle j, m | \hat{J}_+^2 + (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) + (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) + \hat{J}_-^2 | j, m \rangle, \\ &= \frac{1}{4} \langle j, m | 2\hat{J}^2 - 2\hat{J}_z^2 | j, m \rangle, \\ &= \frac{1}{2} \left[ \langle j, m | \hat{J}^2 | j, m \rangle - \langle j, m | \hat{J}_z^2 | j, m \rangle \right], \\ \langle \hat{J}_x^2 \rangle &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Análogamente para  $\langle \hat{J}_y^2 \rangle = \langle \hat{J}_x^2 \rangle$ .

Sustituyendo (3.2) y (3.3) respectivamente para  $\Delta \hat{J}_x$  y  $\Delta \hat{J}_y$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \hat{J}_x &= \sqrt{\langle \hat{J}_x^2 \rangle - \langle \hat{J}_x \rangle^2}, \\ &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2] - 0^2}, \end{aligned}$$

$$\Delta \hat{J}_x = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2]} = \Delta \hat{J}_y.$$

Por lo que la relación de incertidumbre  $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$  es igual a

$$\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2].$$