Tarea 12

Entrega: 1 de diciembre de 2022

Problema 1

Calcula las componentes del tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura de las siguientes métrica:

a) $\mathbb{R}^2$ en coordenadas cartesianas

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

Solución

Sabemos que las componentes del tensor de Riemann están dadas por

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}. \tag{1.1}$$

Para esta métrica los símbolos de Christoffel se anulan, *i.e.*,

$$\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu} = 0. \tag{1.2}$$

Sustituyendo (1.2) en (1.1), tenemos que las componentes del tensor de Riemann son:

$$\boxed{R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0.} \tag{1.3}$$

Por otro lado, sabemos que el tensor de Ricci está dado por

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}.$$

Y puesto que el tensor de Ricci es una contracción del tensor de Riemann, (1.3) implica que

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0.}$$

Finalmente, tenemos que el escalar de Ricci es una contracción del tensor de Ricci, por lo que

$$\boxed{R = 0.}$$

b) $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Solución

Notamos que la métrica describe el espacio plano en coordenadas polares y, del inciso anterior sabemos que la curvatura del espacio es 0, así

$$\boxed{\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= 0, \\ R_{\mu\nu} &= 0, \\ R &= 0. \end{aligned}}$$

c) La 2-esfera S^2 en coordenadas esféricas

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2.$$

Solución

Para esta métrica sabemos que los símbolos de Christoffel que no se anulan son:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} &= \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot\theta. \end{aligned}$$

Por lo que las componentes del tensor de Riemann que debemos calcular son:

$$R^{\theta}{}_{\beta\theta\phi} = \partial_\theta \Gamma^{\theta}{}_{\beta\phi} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\rho\theta} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\rho\phi}, \tag{1.4}$$

$$R^{\phi}{}_{\beta\phi\theta} = -\partial_\theta \Gamma^{\phi}{}_{\beta\phi} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\rho\phi} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\rho\theta}. \tag{1.5}$$

De (1.4) tenemos

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} + \Gamma^{\rho}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\rho\theta} - \Gamma^{\rho}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\rho\phi}, \\ &= \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta) + \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta} - \Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} - \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}, \\ &= -\cos^2\theta + \cot\theta\sin\theta\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\boxed{R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta = -R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta}.}$$

Y, de (1.5),

$$
\begin{aligned}
R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} &= -\partial_\theta \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} + \Gamma^{\rho}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\rho\phi} - \Gamma^{\rho}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\rho\theta}, \\
&= -\partial_\theta(\cot\theta) + \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} + \Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}, \\
&= -\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\right) - \cot^2\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 = -R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi}.}
$$

De esta manera, las componentes restantes del tensor de Riemann se anulan.

Ahora, las componentes del tensor de Ricci que debemos calcular son:

$$
\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= R^{\sigma}{}_{\phi\sigma\phi} = R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} + R^{\phi}{}_{\phi\phi\phi}, \\
R_{\phi\theta} &= R_{\theta\phi} = R^{\sigma}{}_{\phi\sigma\theta} = R^{\theta}{}_{\phi\theta\theta} + R^{\phi}{}_{\phi\phi\theta}, \\
R_{\theta\theta} &= R^{\sigma}{}_{\theta\sigma\theta} = R^{\theta}{}_{\theta\theta\theta} + R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\boxed{
\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta, \\
R_{\phi\theta} &= R_{\theta\phi} = 0, \\
R_{\theta\theta} &= 1.
\end{aligned}
}
$$

Finalmente, calculamos el escalar de Ricci, tal que,

$$
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}.
$$

Así,

$$
\boxed{R = 2.}
$$

Problema 2

Partiendo de la identidad de Bianchi

$$\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} = 0 \tag{2.1}$$

demuestra que el tensor de Ricci cumple

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0.$$

Hint: contrae los índices α y μ de la identidad de Bianchi y usa que la conexión de Levi Civita es compatible con la métrica, así como las simetrías de los tensores involucrados.

Solución

Comenzamos contrayendo α con μ en cada uno de los términos de (2.1).

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda R^\mu{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\mu{}_{\beta\lambda\mu} &= 0, \\ \nabla_\lambda R_{\beta\nu} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} - \nabla_\nu R_{\beta\lambda} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $R_{\beta\nu}$ es el tensor de Ricci y $R_{\beta\lambda}$ es el negativo de este, por la contracción 3) que se encuentra en las notas.

Usando la compatibilidad de la métrica, *i.e.*, $\nabla_\alpha g^{\beta\lambda} = 0$ podemos contraer más índices. Así, (2.2) queda como:

$$\begin{aligned} g^{\beta\lambda} \nabla_\lambda R_{\beta\nu} + g^{\beta\lambda} \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} - g^{\beta\lambda} \nabla_\nu R_{\beta\lambda} &= 0, \\ \nabla_\lambda \left(g^{\beta\lambda} R_{\beta\nu} \right) + \nabla_\alpha \left(g^{\beta\lambda} R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} \right) - \nabla_\nu \left(g^{\beta\lambda} R_{\beta\lambda} \right) &= 0, \\ \nabla_\lambda R^\lambda{}_\nu + \nabla_\alpha R^\alpha{}_\nu - \nabla_\nu R &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Escribiendo ∇_λ como

$$\nabla_\lambda = \nabla^\mu g_{\lambda\mu}. \tag{2.4}$$

Por (2.4), (2.3) queda

$$
\begin{aligned}
\nabla^{\mu} g_{\lambda\mu} R^{\lambda}{}_{\nu} + \nabla^{\mu} g_{\alpha\mu} R^{\alpha}{}_{\nu} - \nabla^{\mu} g_{\nu\mu} R &= 0, \\
\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} + \nabla^{\mu} R_{\mu\nu} - \nabla^{\mu} g_{\mu\nu} R &= 0, \\
2\,\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} - \nabla^{\mu} R g_{\mu\nu} &= 0, \\
\nabla^{\mu} \left(2R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}\right) &= 0, \\
\boxed{\nabla^{\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) = 0.}
\end{aligned}
$$

Problema 3

El ansatz para la solución de Schwarzschild (esféricamente simétrica) que discutimos en clase se escribe en coordenadas polares como

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\,\mathrm{d}t^2 + h(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{3.1}$$

Sustituir esta métrica en las ecuaciones de Einstein lleva a las siguientes tres ecuaciones diferenciales independientes (las demás componentes se satisfacen automáticamente)

$$-rh(r)f'(r)^2 + f(r)(2h(r)(rf''(r) + f'(r)) - rf'(r)h'(r)) - 2f(r)^2h'(r) = 0, \tag{3.2}$$

$$rh'(r) + h(r)^2 - h(r) = 0, \tag{3.3}$$

$$rf'(r) - f(r)h(r) + f(r) = 0. \tag{3.4}$$

En este problema resolverás este sistema de ecuaciones.

a) Usa (3.3) y (3.4) para demostrar que

$$f(r) = \frac{k}{h(r)}, \tag{3.5}$$

con k una constante arbitraria que fijaremos a 1 sin pérdida de generalidad.

Solución

Primero, multiplicamos (3.3) por $f(r)$ y (3.4) por $h(r)$.

$$rh'f + fh^2 - fh = 0, \tag{3.6}$$

$$rf'h + fh^2 + fh = 0, \tag{3.7}$$

donde $f(r) = f$ y $h(r) = h$.

Ahora, sumamos (3.6) y (3.7),

$$\begin{aligned} r(h'f + hf') &= 0, \\ r(hf)' &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}\,(hf)}{\mathrm{d}r} &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Integrando (3.8) respecto a r.

$$h(r)f(r)+C=0,$$
$$h(r)f(r)=k,$$
$$f(r)=\frac{k}{h(r)}.$$

Igualando $k=1$, la expresión anterior queda como:

$$\boxed{f(r)=\frac{1}{h(r)}.} \tag{3.9}$$

b) Esto te deja con 2 ecuaciones para una sola variable $h(r)$, una de primer orden y otra de segundo orden. Demuestra que no son independientes derivando la de primer orden respecto a r y sustituyendo en la de segundo orden.

Solución

Desarrollando (3.2) y usando que $hf=1$ obtenemos que:

$$-rhf'^2+2rf''fh+2f'fh-rf'fh'-2f^2h'=0,$$
$$-rhf'^2+2rf''+2f'-rf'fh'-2f^2h'=0. \tag{3.10}$$

Calculamos la primera y segunda derivada de (3.9),

$$f'=\frac{-h'}{h^2},$$
$$f''=\frac{-h''h^2+2h'^2h}{h^4}.$$

Sustituyendo las derivadas correspondientes en (3.10),

$$-rh\frac{h'^2}{h^4}+2r\left(\frac{-h''h^2+2h'^2h}{h^4}\right)-r\left(\frac{-h'}{h^2}\right)\left(\frac{1}{h}\right)h'-2\left(\frac{1}{h^2}\right)h'=0,$$
$$\frac{rh''h^2-2rh'^2h+2h'h^2}{h^4}=0,$$
$$\boxed{h(r)(rh''(r)+2h'(r))-2rh'(r)^2=0.} \tag{3.11}$$

Derivando (3.3) respecto a r,

$$\frac{\mathrm{d}\left(rh' + h^2 - h\right)}{\mathrm{d}r} = h' + rh'' + 2hh' - h',$$
$$= rh'' + 2h(r)h'.$$

Puesto que la expresión anterior aparece en (3.11), podemos concluir que no son independientes, ya que (3.11) se puede escribir como combinación lineal de (3.3).

c) Finalmente demuestra que la solución general a la única ecuación de primer orden para $h(r)$ es

$$h(r) = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1}, \tag{3.12}$$

donde C es una constante de integración arbitraria.

Solución

Finalmente, resolvemos (3.4) para encontrar la solución general. Primero, reescribimos la ec. diferencial, tal que,

$$rh' - h = -h^2.$$

Notamos que es una ec. diferencial de Bernoulli. Así, $u = h^{-1} \implies h = u^{-1} \wedge h' = -u'u^{-2}$. Sustituyendo

$$u' + \frac{1}{r}u = \frac{1}{r}.$$

Ahora, para resolver esta nueva ecuación diferencial, tenemos

$$\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r},$$
$$= \mathrm{e}^{\log(r) + C_1},$$
$$= \mathrm{e}^{\log(r)}\mathrm{e}^{C_1},$$
$$\boxed{\mu = rC_2.}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
u &= \int \frac{1}{r} r C_2 \,\mathrm{d}r, \\
&= C_2 \int \mathrm{d}r, \\
&\boxed{u = \frac{r+C}{r}.}
\end{aligned}
$$

Y sabemos que $h^{-1} = u$, entonces

$$\boxed{h^{-1}(r) = 1 + \frac{C}{r}.}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\boxed{h(r) = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1}.}$$