Tarea 2

Entrega: 1 de marzo de 2023

Problema 1

Calcular la masas total del planeta Tierra con los siguientes datos:

Suponiendo que se trata de una esfera de radio $r = 6400\,\text{km}$; y que además la Tierra está constituida por los siguientes porcentajes de elementos: 37 % de Fe, 25 % de Si, 13 % de Mg, 10 % de Ni, 8 % de Ca y 7 % de K.

Se deben consultarlas densidades de los componentes: $\rho = \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$ que se requieren para calcular la masa total de la Tierra.

Solución

Las densidades de los elementos se obtuvieron de Material composition data:

$$\rho_{\text{Fe}} = 7.874\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \rho_{\text{Si}} = 2.330\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \rho_{\text{Mg}} = 1.740\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$
$$\rho_{\text{Ni}} = 8.902\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \rho_{\text{Ca}} = 1.550\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \rho_{\text{K}} = 0.862\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Y como queremos calcular la masa total de la Tierra, entonces la densidad total es:

$$\rho = 0.37\rho_{\text{Fe}} + 0.25\rho_{\text{Si}} + 0.13\rho_{\text{Mg}} + 0.10\rho_{\text{Ni}} + 0.08\rho_{\text{Ca}} + 0.07\rho_{\text{K}}. \tag{1.1}$$

Sustituyendo los valores de las densidades en (1.1)

$$\rho = 0.37\left(7.874\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) + 0.25\left(2.330\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) + 0.13\left(1.740\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right),$$
$$+ 0.10\left(8.902\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) + 0.08\left(1.550\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) + 0.07\left(0.862\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right),$$
$$\boxed{\rho = 4.796\,62\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.} \tag{1.2}$$

Y, además, la masa total de la Tierra está dada por:

$$M = \rho V,$$
$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right), \tag{1.3}$$

donde $\frac{4}{3}\pi r^3$ es el volumen de una esfera.

Sustituyendo (1.2) y el radio de la Tierra, $r = 6.4\times10^{8}\,\mathrm{cm}$, en (1.3):

$$
\begin{aligned}
M &= 4.796\,62\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\left(\frac{4}{3}\pi\left(6.4\times10^{8}\,\mathrm{cm}\right)^3\right),\\
&= 5.267\,01\times10^{27}\,\mathrm{g},\\
&\boxed{M \approx 5.267\,01\times10^{24}\,\mathrm{kg}.}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Problema 2

Por otro lado, se puede ilustrar que la materia a nivel microscópico es hueva. Hacer el siguiente cálculo:

Suponer que se tiene un balín esférico de radio $r = 1\,\text{cm}$ compuesto de $^{\text{nat}}\text{Fe}$ (con $A = 54$ (6 %), $A = 56$ (92 %) y $A = 57$ (2 %), isótopos más abundantes del Fe). Calcular el volumen de un núcleo de Fe cuyo radio es $r = r_0 A^{1/3}$. Suponiendo que no hay repulsión coulombiana, ¿cuántos átomos de Fe cabrían en el balín de 1 cm de radio? Calcular en [kg] lo que pesaría el balín con esa cantidad de átomos.

NOTA: Tomen el valor de r_0 con las unidades convenientes.

Solución

Sabemos que el volumen de una esfera está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{2.1}$$

A partir de (2.1) el volumen del balín y el volumen de un núcleo de Fe. Por un lado, tenemos que el volumen del balín es:

$$V = \frac{4}{3}\pi(1\,\text{cm})^3,$$

$$\boxed{V = 4.19\,\text{cm}^3.} \tag{2.2}$$

Por el otro, que el volumen de un núcleo de Fe viene dado por:

$$V_{\text{Fe}} = \frac{4}{3}\pi(r_0 A^{1/3})^3,$$

$$V_{\text{Fe}} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A, \tag{2.3}$$

donde A es el número de nucleones

$$A = 0.06(54) + 0.92(56) + 0.02(57),$$

$$A = 55.9,$$

y $r_0 = 1.2{\times}10^{-13}\,\text{cm}$.

Así, (2.3) queda:

$$V_{\text{Fe}} = \frac{4}{3}\pi(1.2{\times}10^{-13}\,\text{cm})^3(55.9),$$

$$\boxed{V_{\text{Fe}} = 4.046\,17{\times}10^{-37}\,\text{cm}^3.} \tag{2.4}$$

Ahora, para determinar cuántos átomos de Fe caben en el balín, calculamos el cociente de los volúmenes, (2.2) entre (2.4):

$$n = \frac{V}{V_{\text{Fe}}} = \frac{4.19\,\text{cm}^3}{4.046\,17\times10^{-37}\,\text{cm}^3},$$

$$\implies \boxed{n = 1.035\,25\times10^{37}\,\text{átomos.}} \tag{2.5}$$

Finalmente para calcular la masa del balín, multiplicamos el número de átomos (2.5) por la masa de un átomo de Fe:

$$\begin{aligned} m &= n \cdot m_{\text{Fe}} \cdot 1.660\,539\times10^{-27}\,\text{kg}, \\ &= n\,[0.06(53.939\,608) + 0.96(55.934\,936) + 0.02(56.935\,392)]\,(1.660\,539\times10^{-27}\,\text{kg}), \\ &= 1.035\,25\times10^{37}(55.8352)(1.660\,539\times10^{-27}\,\text{kg}), \end{aligned}$$

$$\boxed{m = 9.598\,47\times10^{11}\,\text{kg.}} \tag{2.6}$$

Sin embargo, notamos que la masa del balín es casi la mitad de la masa de la Tierra, ya que si calculamos la masa del balín a partir de la densidad del Fe:

$$m_{\text{Fe}} = (7.874\,00\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3})(4.19\,\text{cm}^3),$$

$$\boxed{m_{\text{Fe}} = 0.32\,\text{kg.}} \tag{2.7}$$

Así, de (2.6) y (2.7), concluimos que la mayor parte de la materia está compuesta por espacio vacío, en parte debida a la repulsión coulombiana.

Problema 3

De tus resultados anteriores, ¿cuántos balines son necesarios para compararlos con el peso de la Tierra? ¿Qué se puede concluir al respecto?

Solución

Para obtener el número de balines necesarios para compararlos con el peso de la Tierra, calculamos el cociente de (1.4) y (2.7),

$$\boxed{n = 1.645\,94{\times}10^{28}.}$$

Mientras que si hubiesemos considerado el valor obtenido en (2.6), el número de balínes sería:

$$\boxed{n = 5.270\,508{\times}10^{12}.}$$

De estos valores podemos concluir que si despreciamos la repulsión coulombiana, el equivalente a la masa de la Tierra sería 16 ordenes de magnitud menor que si se considerara. Es decir, una vez más comprobamos que la materia está constituida en su mayoría por espacio vacío.