Tarea 1

Entrega: 7 de febrero de 2023

Problema 1 (1.5)

Comprobar la ecuación

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C}.$$

desarrollando ambos miembros en función de las componentes cartesianas de los vectores. Hállese el triple producto vectorial $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ de los tres vectores

$$\vec{A} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}, \quad \vec{B} = -\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}, \quad \vec{C} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Problema 2 (1.11)

Hállese el conjunto recíproco de vectores del conjunto de vectores no coplanares.

a)

$$\vec{b}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}},$$
$$\vec{b}_2 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}},$$
$$\vec{b}_3 = -3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}.$$

b)

$$\vec{b}_1 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}},$$
$$\vec{b}_2 = -3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}},$$
$$\vec{b}_3 = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}.$$

Problema 3 (1.12)

i) Exprese los vectores

$$\vec{A} = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \quad \vec{B} = -3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}},$$

en función de una suma lineal de los vectores no coplanares del problema anterior (1.11) y en función de una suma lineal de sus vectores recíprocos.

ii) Evaluar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$ utilizando los productos escalares $\alpha_i,\ \beta_i,\ \alpha_i^*$ y β_i^* de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el conjunto de vectores no coplanares encontrados en i) y sus vectores recíprocos. Compárese la respuesta con los productos escalar y vectorial de estos tres vectores evaluados en función de las componentes cartesianas de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Problema 4 (1.16)

La derivada del vector $\vec{A}(t)$ de magnitud constante se demostró que puede ser expresada como un producto vectorial

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{A}(t),$$

Sin embargo, $\vec{\omega}$ no es única, ya que la suma del término $c\vec{A}$ a $\vec{\omega}$ producirá el mismo resultado. Por otro lado, la derivada de dos vectores de magnitud constante puede determinar una $\vec{\omega}$ única, en función de la cual sus derivadas son expresables en la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A}(t)=\vec{\omega}\times\vec{A}\qquad \text{y}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B}(t)=\vec{\omega}\times\vec{B}.$$

Considerando los vectores unidad

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_1&=\sin\alpha t\cos\beta t\hat{\mathbf{i}}+\sin\alpha t\sin\beta t\hat{\mathbf{j}}+\cos\alpha t\hat{\mathbf{k}},\\
\hat{\mathbf{e}}_2&=\cos\alpha t\cos\beta t\hat{\mathbf{i}}+\cos\alpha t\sin\beta t\hat{\mathbf{j}}-\sin\alpha t\hat{\mathbf{k}},\\
\hat{\mathbf{e}}_3&=-\sin\beta t\hat{\mathbf{i}}+\cos\beta t\hat{\mathbf{j}},
\end{aligned}$$

hállese el vector de la velocidad angular $\vec{\omega}$ que satisface las ecuaciones

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_1=\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_1\qquad \text{y}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_2=\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Demostrar que la misma $\vec{\omega}$ también nos da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{e}}_3=\vec{\omega}\times\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Problema 5 (1.18)

a) Demostrar que los productos escalares α_i y α_i^* del vector $\vec{A}$ por los vectores base $\vec{b}_i$ y sus recíprocos $\vec{\boldsymbol{b}}_i$, están relacionados linealmente como se indica por

$$\alpha_i^* = \sum_j g_{ij}^* \alpha_j \qquad \text{y} \qquad \alpha_i = \sum_j g_{ij} \alpha_j^*,$$

Exprésense los escalares g_{ij} y g_{ij}^* en función de los vectores base $\vec{b}_i$ y los vectores recíprocos $\vec{\boldsymbol{b}}_i$. (Obsérvese que los g_{ij} son las componentes covariantes del tensor métrico y las g_{ij}^* son las componentes contravariantes del mismo.)

b) Demostrar que el producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{ij} g_{ij}^* \alpha_i \beta_j = \sum_{ij} g_{ij} \alpha_i^* \beta_j^*.$$

Problema 6 (1.20)

Comprobar para las ecuaciones

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{\boldsymbol{b}}_2 \times \vec{\boldsymbol{b}}_3}{\vec{\boldsymbol{b}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_2 \times \vec{\boldsymbol{b}}_3}, \quad \vec{b}_2 = \frac{\vec{\boldsymbol{b}}_3 \times \vec{\boldsymbol{b}}_1}{\vec{\boldsymbol{b}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_2 \times \vec{\boldsymbol{b}}_3}, \quad \vec{b}_3 = \frac{\vec{\boldsymbol{b}}_1 \times \vec{\boldsymbol{b}}_2}{\vec{\boldsymbol{b}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_2 \times \vec{\boldsymbol{b}}_3}$$

que los vectores $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ y $\vec{b}_3$ son recíprocos $\vec{\boldsymbol{b}}_1$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{b}}_3$.

Problema 7 (2.2)

Obtener las expresiones de las componentes polares de la velocidad y la aceleración de las partículas cuyo vector bidimensional de posición es:

$$r = \frac{5}{2 - \cos\phi}, \qquad \phi = \omega t.$$

Problema 8 (2.3)

Hállese, explícitamente, la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una hélice circular definida por las coordenadas cilíndricas.

$$\rho = a, \qquad \phi = \omega t \qquad \text{y} \qquad z = -ct, \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$