Tarea 1

Entrega: 12 de septiembre de 2023

Problema 1: Adición de momentos angulares: acoplamiento entre momento angular orbital y de spin (valor total: 5 pt)

Considera una partícula cuyos números cuánticos de momento angular orbital y de spin son $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$, respectivamente. Realiza la adición de estos momentos angulares, es decir:

(a) Valor: 1.0 pt - Determina los posibles valores de los números cuánticos j y m del sistema acoplado.

Solución

Recordemos que los posibles valores de j en la base acoplada vienen dados por:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2,$$
$$\frac{1}{2} \leq j \leq \frac{3}{2}.$$

Entonces los posibles valores de j son:

$$\boxed{j = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}.} \tag{1.1}$$

Por lo que los posibles valores de m son de la forma

$$-j \leq m \leq j,$$

tal que,

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}} \tag{1.2}$$

(b) Valor: 3.0 pt - Expresa los elementos de la base acoplada $\{|j, m\rangle\}$ en términos de los elementos de la base desacoplada $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Para ello debes calcular "a mano" todos los coeficientes de Clebsch-Gordan involucrados, $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m\rangle$.

Solución

Por $(2j_1+1)(2j_2+1)$ sabemos que la base acoplada debe tener 6 elementos y de (1.1)eq:m-values tenemos que los elementos de la base acoplada (y para cada uno de lo subespacios) son:

$$\{|j,m\rangle\} = \begin{cases} |j=\frac{3}{2},m\rangle & \to \begin{cases} |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle \end{cases} \\ |j=\frac{1}{2},m\rangle & \to \begin{cases} |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Recordemos ajora que los elementos de la base acoplada $\{|j,m\rangle\}$ en términos de la base desacoplada $\{|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle\}$ están dados por:

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1,j_2;m_1,m_2\,|\,j,m\rangle |j_1,j_2;m_1,m_2\rangle. \tag{1.3}$$

Empezamos expresando el estado de máximo valor de j y m, $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$. Así,

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^{1}\sum_{m_2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle 1,\tfrac{1}{2};m_1,m_2\,|\,\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle |1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle. \tag{1.4}$$

Sin embargo, las reglas de relación de los CCG (Coeficientes de Clebsch-Gordan) nos exigen que

$$m = m_1 + m_2.$$

Y para este caso tenemos que $m=\frac{3}{2}$. Lo cual es válido únicamente cuando $m_1=1$ y $m_2=\frac{1}{2}$, por lo que (1.4) se reduce a un solo término:

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \langle 1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle |1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Además necesitamos la condición de normalización,

$$\langle 1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle^2 = 1,$$
$$\langle 1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \pm 1.$$

Para determinar el signo del coeficiente usamos la condición de Condon-Shortley,

$$\langle j_1,j_2;j_1,(j-j_1)\,|\,j,j\rangle \geq 0.$$

Por lo que el signo de nuestro coeficiente es

$$\langle 1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} \rangle = 1.$$

Entonces

$$\boxed{\begin{aligned} |\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle &= |1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle, \\ \langle 1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} \rangle &= 1. \quad \text{(CCG)} \end{aligned}} \tag{1.5}$$

Ahora, para generar a $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ podemos aplicar $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$ a (1.5),

$$\begin{aligned} \hat{J}_-|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle &= \hat{J}_{1-}|1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle + \hat{J}_{2-}|1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle, \\ \hbar\sqrt{\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right) - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}-1\right)}|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle &= \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}-1\right)}|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle, \\ &\boxed{|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{3}}|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle.} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Los CCG son

$$\boxed{\begin{aligned} \langle 1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \\ \langle 1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos $\hat{J}_-$ a (1.6),

$$\begin{aligned} \hat{J}_-|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{2}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle, \\ 2|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left[\sqrt{2}|1, \tfrac{1}{2}; -1, \tfrac{1}{2}\rangle + |1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2}\rangle\right] + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}|1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2}\rangle\right], \\ &\boxed{|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}}|1, \tfrac{1}{2}; -1, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2}\rangle.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Los CCG son:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \langle 1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}. \end{aligned}}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos $\hat{J}_{-}$ a (1.7),

$$\hat{J}_{-}|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \tfrac{1}{2}; -1, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2}\rangle,$$

$$\boxed{|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle = |1, \tfrac{1}{2}; -1, -\tfrac{1}{2}\rangle.} \tag{1.8}$$

El CCG es

$$\boxed{\langle 1, \tfrac{1}{2}; -1, -\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle.}$$

Ahora hay que encontrar $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ que está en el subespacio $\{|j = \frac{1}{2}, m\rangle\}$. Usamos (1.3):

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^{1} \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle 1, \tfrac{1}{2}; m_1, m_2\,|\,\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle|1, \tfrac{1}{2}; m_1, m_2\rangle. \tag{1.9}$$

Y sabemos que se deben cumplir las reglas de relación de los CCG, $m = m_1 + m_2 \implies m = \frac{1}{2}$, lo cual se cumple únicamente cuando $m_1 = 0$ y $m_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = 1$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$.

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \langle 1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + \langle 1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle.$$

Definimos

$$a = \langle 1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle,$$

$$b = \langle 1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle.$$

Entonces,

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = a|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + b|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{1.10}$$

Y por la condición de normalización,

$$a^2 + b^2 = 1. \tag{1.11}$$

Aplicamos $\hat{J}_+$ a (1.10)

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= a(\hat{J}_{1+}+\hat{J}_{2+})|1,\tfrac{1}{2};0,\tfrac{1}{2}\rangle + b(\hat{J}_{1+}+\hat{J}_{2+})|1,\tfrac{1}{2};1,-\tfrac{1}{2}\rangle,\\
0 &= \sqrt{2}a|1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\rangle + b|1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\rangle,\\
0 &= (\sqrt{2}a+b)|1,\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2}\rangle,\\
\sqrt{2}a+b &= 0. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Resolviendo simultáneamente (1.11) y (1.12),

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}},\\ b &= \mp\sqrt{\tfrac{2}{3}}. \end{aligned}}$$

Usamos la convención de Condon-Shortley, recordando la de a y que $j=\frac{1}{2}$,

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}},\\ b &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}. \end{aligned}}$$

Por lo que $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$ queda como

$$\boxed{|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}|1,\tfrac{1}{2};0,\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1,\tfrac{1}{2};1,-\tfrac{1}{2}\rangle.} \qquad (1.13)$$

Los CCG son:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle 1,\tfrac{1}{2};0,\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}},\\ \langle 1,\tfrac{1}{2};1,-\tfrac{1}{2}\,|\,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}. \end{aligned}}$$

Aplicando $\hat{J}_{-1}$ a (1.13):

$$\hat{J}_-|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\tfrac{1}{2};0,\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|1,\tfrac{1}{2};1,-\tfrac{1}{2}\rangle,$$

$$\boxed{|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}|1,\tfrac{1}{2};-1,\tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{3}}|1,\tfrac{1}{2};0,-\tfrac{1}{2}\rangle.}$$

Los CCG son

$$\boxed{\begin{aligned}&\langle 1, \tfrac{1}{2}; -1, \tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = -\sqrt{\tfrac{2}{3}},\\ &\langle 1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}}$$

(c) Valor 1.0 pt - Escribe la matriz de transformación entre estas dos bases.

Solución

La transformación puede escribirse como

$$\boxed{\begin{pmatrix} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{-1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{-1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; -1, \frac{-1}{2}\rangle \end{pmatrix}}$$

Problema 2: Perturbación en un sistema de tres estados (valor total: 5 pt)

Considera un sistema que solo tiene tres estados linealmente independientes. Considera ahora que el Hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix},$$

en donde V_0 es una constante y ϵ es un número pequeño, es decir, $\epsilon \ll 1$.

(a) Valor: 0.5 pt - Si consideramos que ϵ es ele resultado de una perturbación, escribe este Hamiltoniano como la suma de un Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$ y una perturbación $\hat{W}$, es decir, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, de tal forma que $\hat{H} = \hat{H}_0$ cuando $\epsilon = 0$.

Solución

Para lograr escribir $\hat{H}$ como $\hat{H}_0 + \hat{W}$, recordamos que $\hat{H}_0$ se obtiene cuando $\epsilon = 0$, por lo que $\hat{W}$ debe estar únicamente en términos de ϵ. Así,

$$\hat{H}_0 = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Y, $\hat{W}$,

$$\hat{W} = V_0\epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

El Hamiltoniano $\hat{H}$ queda entonces como

$$\boxed{\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + V_0\epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.} \tag{2.3}$$

(b) Valor: 0.5 pt - ¿Quiénes son los eigenvalores y los eigenvectores del Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$? Nota que este Hamiltoniano tiene un eigenvalor no degenerado y dos eigenvalores degenerados.

Solución

Inmediatamente de (2.1) notamos que los eigenvalores de $\hat{H}_0$ son

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\lambda}_1 &= V_0,\\ \lambda_2 &= 2V_0,\end{aligned}}$$

con $\overline{\lambda}_1$ doblemente degenerado. Y que sus eigenvectores son

$$\boxed{|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.}$$

(c) Valor: 1.0pt - El Hamiltoniano $\hat{H}$ puede resolverse exactamente Encuentra los eigenvalores exactos de $\hat{H}$. Una vez que los hayas encontrado, exprésalos como una serie de potencias de Taylor en ϵ hasta segundo orden, es decir, conserva todos los términos con orden igual o menor a ϵ^2.

Solución

Reescribimos $\hat{H}$ para no estar cargando con coeficientes, tal que,

$$\hat{H}' = \frac{1}{V_0}\hat{H},$$

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix}1-\epsilon & 0 & 0\\ 0 & 1 & \epsilon\\ 0 & \epsilon & 2\end{pmatrix}.$$

Resolvemos el problema de eigenvalores, tal que el polinomio característico de $\hat{H}'$ es

$$[(1-\epsilon)-\lambda][(1-\lambda)(2-\lambda)-\epsilon^2] = 0.$$

Los eigenvalores son

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1 &= 1-\epsilon,\\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{1+4\epsilon^2}\right),\\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{1+4\epsilon^2}\right).\end{aligned}}$$

Haciendo la expansión de Taylor correspondiente para cada uno de los eigenvalores tenemos que

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda_1 = 1-\epsilon,\\ &\lambda_2 \simeq 2+\epsilon^2,\\ &\lambda_3 \simeq 1-\epsilon^2.\end{aligned}}$$

Multiplicando por V_0 tenemos que los eigenvalores de $\hat{H}$ son

$$\boxed{\begin{aligned}&\omega_1 = V_0(1-\epsilon),\\ &\omega_2 \simeq V_0(2-\epsilon^2),\\ &\omega_3 \simeq V_0(1-\epsilon^2).\end{aligned}} \tag{2.4}$$

(d) Valor: 1.0pt - Utiliza el caso **no** degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden y segundo orden del eigenvalor **no** degenerado del Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$. Compara este resultado con el que encontraste en (c).

Solución

Sabemos que el eigenvalor no degenerado es $\lambda_3 = 2V_0$. Recordamos entonces que la corrección a primer orden viene dada por

$$E_3^{(1)} = \langle\psi_3^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned} E_3^{(1)} &= V_0\epsilon \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\\ &= V_0\epsilon \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\\ \boxed{E_3^{(1)} = 0.} \end{aligned}$$

Es decir, no hay corrección de primer orden.

La corrección de segundo orden para el caso no degenerado se obtiene a partir de

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|\langle\psi_n^{(0)}|\hat{W}|\psi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

Así,

$$E_3^2 = \frac{|\langle\psi_1^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle|^2}{E_3^{(0)} - E_1^{(0)}} + \frac{|\langle\psi_2^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle|^2}{E_3^{(0)} - E_2^{(0)}}. \tag{2.5}$$

Por un lado tenemos que

$$\langle\psi_1^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle = V_0\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{|\langle\psi_1^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle|^2 = 0.}$$

Por el otro,

$$\langle\psi_2^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle = V_0\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$= V_0\epsilon,$$

$$\boxed{|\langle\psi_2^{(0)}|\hat{W}|\psi_3^{(0)}\rangle|^2 = V_0^2\epsilon^2.}$$

Y además sabemos que $E_3^{(0)} = 2V_0$ y $E_2^{(0)} = V_0$, entonces

$$E_3^{(0)} - E_2^{(0)} = 2V_0 - V_0,$$

$$E_3^{(0)} - E_2^{(0)} = V_0.$$

Sustituyendo lo anterior en (2.5),

$$E_3^{(2)} = \frac{V_0^2\epsilon^2}{V_0},$$

$$E_3^{(2)} = V_0\epsilon^2.$$

Por lo que la corrección de la energía a segundo orden es:

$$\begin{aligned} E_3 &\simeq E_3^{(0)} + E_3^{(1)} + E_3^{(2)}, \\ &\simeq 2V_0 + 0 + V_0\epsilon^2, \\ E_3 &\simeq V_0(2+\epsilon^2). \end{aligned}$$

Comparando el valor de E_3 con el resultado obtenido en (2.4) observamos que es lo mismo, *i.e.*,

$$\boxed{E_3 \simeq V_0(2+\epsilon^2) = V_0(2+\epsilon^2) \simeq \omega_3.}$$

(e) Valor: 2.0pt - Utiliza ahora el caso degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden de los dos eigenvalores degenerados de $\hat{H}_0$. Compara con los resultados del inciso (c).

Solución

Recordamos que la corrección primer orden de la energía para el caso degenerado viene dada por

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2}\left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 - 4|W_{ab}|^2}\right], \tag{2.6}$$

donde

$$W_{ij} = \langle \psi_i^{(0)} | \hat{W} | \psi_j^{(a)} \rangle.$$

Debemos obtener $W_{aa},\ W_{bb}$ y W_{ab},

$$\begin{aligned} W_{aa} &= \langle \psi_a^{(0)} | \hat{W} | \psi_a^{(0)} \rangle, \\ W_{bb} &= \langle \psi_b^{(0)} | \hat{W} | \psi_b^{(0)} \rangle, \\ W_{ab} &= \langle \psi_a^{(0)} | \hat{W} | \psi_b^{(0)} \rangle, \end{aligned}$$

donde $|\psi_a^{(0)}\rangle = |\psi_1\rangle$ y $|\psi_b^{(0)}\rangle = |\psi_2\rangle$.

Así,

$$W_{aa} = V_0\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$= V_0\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{W_{aa} = -V_0\epsilon.} \tag{2.7}$$

$$W_{bb} = V_0\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$= V_0\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{W_{aa} = 0.} \tag{2.8}$$

$$W_{ab} = V_0\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$= V_0\epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{W_{aa} = 0.} \tag{2.9}$$

Sustituyendo (2.7) a (2.9) en (2.6),

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2}\left[-V_0\epsilon \pm V_0\epsilon\right],$$

$$\boxed{E_{\pm}^{(1)} = \{0, -V_0\epsilon\}.}$$

Por lo que la corrección de la energía $E^{(1)}$ es:

$$
\begin{aligned}
E_1 &\simeq E_0^{(1)} + E_1^{(1)},\\
&\simeq V_0 + (0 - V_0\epsilon),\\
\boxed{E_1 \simeq V_0(1-\epsilon).}
\end{aligned}
$$

Comparando con (2.4), verificamos que el resultado es igual al obtenido en el inciso (c).

Problema 3: Extra: Incertidumbre de $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$ (valor: +1pt)

Sea $\vec{\hat{J}}$ el operador general de momento angular con componentes $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ y $\hat{J}_z$. En clase aprendimos que estas componentes no conmutan entre sí y por lo tanto deben satisfacer alguna relación de incertidumbre. Considerando la base de autoestados $|j,m\rangle$ de los operadores $\hat{J}_0^2$ y $\hat{J}_z$, encuentra la relación de incertidumbre $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$.

Recuerda que la definición de la desviación estándar de un operador $\hat{\mathcal{O}}$ es

$$\Delta\hat{\mathcal{O}} = \sqrt{\langle\hat{\mathcal{O}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle^2}. \tag{3.1}$$

Sugerencia: Utiliza los operadores de ascenso y descenso, $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ y $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$, recordando que su acción sobre los estados $|j,m\rangle$ es:

$$\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\hbar|j,m\pm1\rangle.$$

Solución

A partir de los operadores de ascenso y descenso podemos encontrar a los operadores $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$, tal que,

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \quad \wedge \quad \hat{J}_y = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i}.$$

Recordemos que el valor esperado está dado por:

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle = \langle j,m|\hat{\mathcal{O}}\,|j,m\rangle.$$

Por un lado, tenemos que $\langle\hat{J}_x\rangle$ y $\langle\hat{J}_y\rangle$,

$$\langle\hat{J}_x\rangle = \frac{1}{2}\langle j',m'|(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)|j,m\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle j',m'|\hat{J}_+|j,m\rangle + \langle j',m'|\hat{J}_-|j,m\rangle\right],$$

$$\langle\hat{J}_x\rangle = \frac{1}{2}\left[\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j',m'|j,m+1\rangle + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j',m'|j,m-1\rangle\right],$$

$$\langle\hat{J}_y\rangle = \frac{1}{2i}\left[\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j',m'|j,m+1\rangle - \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j',m'|j,m-1\rangle\right],$$

pero

$$\langle j', m' | j, m+1\rangle = 0,$$

$$\langle j', m' | j, m-1\rangle = 0,$$

$$\boxed{\langle \hat{J}_x\rangle = \langle \hat{J}_y\rangle = 0.} \tag{3.2}$$

Por el otro, para $\langle \hat{J}_x^2\rangle$ y $\langle \hat{J}_y^2\rangle$ se tiene que

$$\langle \hat{J}_x^2\rangle = \frac{1}{4}\langle j, m|(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)^2|j, m\rangle = \frac{1}{4}\langle j, m|\hat{J}_+^2 + \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_-^2|j, m\rangle.$$

Recordando que existen las siguientes relaciones:

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z,$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z.$$

De esta manera, la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}_x^2\rangle &= \frac{1}{4}\langle j, m|\hat{J}_+^2 + \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_-^2|j, m\rangle,\\
&= \frac{1}{4}\langle j, m|\hat{J}_+^2 + (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z) + (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z) + \hat{J}_-^2|j, m\rangle,\\
&= \frac{1}{4}\langle j, m|2\hat{J}^2 - 2\hat{J}_z^2|j, m\rangle,\\
&= \frac{1}{2}\left[\langle j, m|\hat{J}^2|j, m\rangle - \langle j, m|\hat{J}_z^2|j, m\rangle\right],
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \hat{J}_x^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - m^2\right].} \tag{3.3}$$

Análogamente para $\langle \hat{J}_y^2\rangle = \langle \hat{J}_x^2\rangle$.

Sustituyendo (3.2) y (3.3) respectivamente para $\Delta\hat{J}_x$ y $\Delta\hat{J}_y$,

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{J}_x &= \sqrt{\langle \hat{J}_x^2\rangle - \langle \hat{J}_x\rangle^2},\\
&= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - m^2\right] - 0^2},
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta\hat{J}_x = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - m^2\right]} = \Delta\hat{J}_y.}$$

Por lo que la relación de incertidumbre $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$ es igual a

$$\boxed{\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - m^2\right].}$$