Tarea 1

Entrega: 29 de agosto de 2023

Problema 1: Adición de momentos angulares: acoplamiento entre momento angular orbital y de spin (valor total: 5 pt)

Considera una partícula cuyos números cuánticos de momento angular orbital y de spin son $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$, respectivamente. Realiza la adición de estos momentos angulares, es decir:

(a) Valor: 1.0 pt - Determina los posibles valores de los números cuánticos j y m del sistema acoplado.

(b) Valor: 3.0 pt - Expresa los elementos de la base acoplada $\{|j, m\rangle\}$ en términos de los elementos de la base desacoplada $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Para ello debes calcular "a mano" todos los coeficientes de Clebsch-Gordan involucrados, $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j, m\rangle$.

(c) Valor 1.0 pt - Escribe la matriz de transformación entre estas dos bases.

Problema 2: Perturbación en un sistema de tres estados (valor total: 5 pt)

Considera un sistema que solo tiene tres estados linealmente independientes. Considera ahora que el Hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix},$$

en donde V_0 es una constante y ϵ es un número pequeño, es decir, $\epsilon \ll 1$.

(a) Valor: 0.5 pt - Si consideramos que ϵ es ele resultado de una perturbación, escribe este Hamiltoniano como la suma de un Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$ y una perturbación $\hat{W}$, es decir, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, de tal forma que $\hat{H} = \hat{H}_0$ cuando $\epsilon = 0$.

(b) Valor: 0.5 pt - ¿Quiénes son los eigenvalores y los eigenvectores del Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$? Nota que este Hamiltoniano tiene un eigenvalor no degenerado y dos eigenvalores degenerados.

(c) Valor: 1.0pt - El Hamiltoniano $\hat{H}$ puede resolverse exactamente Encuentra los eigenvalores exactos de $\hat{H}$. Una vez que los hayas encontrado, exprésalos como una serie de potencias de Taylor en ϵ hasta segundo orden, es decir, conserva todos los términos con orden igual o menor a ϵ^2.

(d) Valor: 1.0pt - Utiliza el caso **no** degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden y segundo orden del eigenvalor **no** degenerado del Hamiltoniano imperturbado $\hat{H}_0$. Compara este resultado con el que encontraste en (c).

(e) Valor: 2.0pt - Utiliza ahora el caso degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden de los dos eigenvalores degenerados de $\hat{H}_0$. Compara con los resultados del inciso (c).

Problema 3: Extra: Incertidumbre de $\hat{J}_x$ y $\hat{J}_y$ (valor: +1pt)

Sea $\hat{\vec{J}}$ el operador general de momento angular con componentes $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ y $\hat{J}_z$. En clase aprendimos que estas componentes no conmutan entre sí y por lo tanto deben satisfacer alguna relación de incertidumbre. Considerando la base de autoestados $|j,m\rangle$ de los operadores $\hat{J}_0^2$ y $\hat{J}_z$, encuentra la relación de incertidumbre $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$.

Recuerda que la definición de la desviación estándar de un operador $\hat{\mathcal{O}}$ es

$$\Delta\hat{\mathcal{O}} = \sqrt{\langle\hat{\mathcal{O}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle^2}.$$

Sugerencia: Utiliza los operadores de ascenso y descenso, $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ y $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$, recordando que su acción sobre los estados $|j,m\rangle$ es:

$$\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\hbar|j,m\pm 1\rangle.$$