

Tarea 1

Entrega: 12 de septiembre de 2023

Problema 1: Adición de momentos angulares: acoplamiento entre momento angular orbital y de spin (valor total: 5 pt)

Considera una partícula cuyos números cuánticos de momento angular orbital y de spin son $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$, respectivamente. Realiza la adición de estos momentos angulares, es decir:

- (a) Valor: 1.0 pt - Determina los posibles valores de los números cuánticos j y m del sistema acoplado.

Solución

Recordemos que los posibles valores de j en la base acoplada vienen dados por:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2,$$

$$\frac{1}{2} \leq j \leq \frac{3}{2}.$$

Entonces los posibles valores de j son:

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \quad (1.1)$$

Por lo que los posibles valores de m son de la forma

$$-j \leq m \leq j,$$

tal que,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &\leq m \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2} &\leq m \leq \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

- (b) Valor: 3.0 pt - Expresa los elementos de la base acoplada $\{|j, m\rangle\}$ en términos de los elementos de la base desacoplada $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$. Para ello debes calcular “a mano” todos los coeficientes de Clebsch-Gordan involucrados, $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle$.

Solución

Por $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ sabemos que la base acoplada debe tener 6 elementos y de (1.1) y (1.2) tenemos que los elementos de la base acoplada (y para cada uno de los subespacios) son:

$$\{|j, m\rangle\} = \begin{cases} |j = \frac{3}{2}, m\rangle \rightarrow \begin{cases} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \end{cases} \\ |j = \frac{1}{2}, m\rangle \rightarrow \begin{cases} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{cases} \end{cases}$$

Recordemos ahora que los elementos de la base acoplada $\{|j, m\rangle\}$ en términos de la base desacoplada $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ están dados por:

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m \rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle. \quad (1.3)$$

Empezamos expresando el estado de máximo valor de j y m , $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$. Así,

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle 1, \frac{1}{2}; m_1, m_2 | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; m_1, m_2\rangle. \quad (1.4)$$

Sin embargo, las reglas de relación de los CCG (Coeficientes de Clebsch-Gordan) nos exigen que

$$m = m_1 + m_2.$$

Y para este caso tenemos que $m = \frac{3}{2}$. Lo cual es válido únicamente cuando $m_1 = 1$ y $m_2 = \frac{1}{2}$, por lo que (1.4) se reduce a un solo término:

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle.$$

Además necesitamos la condición de normalización,

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle^2 = 1,$$

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle = \pm 1.$$

Para determinar el signo del coeficiente usamos la condición de Condon-Shortley,

$$\langle j_1, j_2; j_1, (j - j_1) | j, j \rangle \geq 0.$$

Por lo que el signo de nuestro coeficiente es

$$\langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle &= 1. \quad (\text{CCG}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora, para generar a $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ podemos aplicar $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$ a (1.5),

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle &= \hat{J}_{1-} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle + \hat{J}_{2-} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle, \\ \hbar \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \hbar \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \hbar \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle, \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Los CCG son

$$\begin{aligned} \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos \hat{J}_- a (1.6),

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}} (\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}) |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle, \\ 2 |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sqrt{2} |1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle + |1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{2} |1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle \right], \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Los CCG son:

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento: aplicamos \hat{J}_- a (1.7),

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2}\rangle, \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= |1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

El CCG es

$$\langle 1, \frac{1}{2}; -1, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \rangle.$$

Ahora hay que encontrar $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ que está en el subespacio $\{|j = \frac{1}{2}, m\rangle\}$. Usamos (1.3):

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle 1, \frac{1}{2}; m_1, m_2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; m_1, m_2\rangle. \quad (1.9)$$

Y sabemos que se deben cumplir las reglas de relación de los CCG, $m = m_1 + m_2 \implies m = \frac{1}{2}$, lo cual se cumple únicamente cuando $m_1 = 0$ y $m_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = 1$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$.

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle |1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Definimos

$$\begin{aligned} a &= \langle 1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \\ b &= \langle 1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle. \end{aligned}$$

Entonces,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = a|1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle + b|1, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{2}\rangle. \quad (1.10)$$

Y por la condición de normalización,

$$a^2 + b^2 = 1. \quad (1.11)$$

Aplicamos \hat{J}_+ a (1.10)

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_+|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle &= a(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + b(\hat{J}_{1+} + \hat{J}_{2+})|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle, \\
 0 &= \sqrt{2}a|1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle + b|1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle, \\
 0 &= (\sqrt{2}a + b)|1, \tfrac{1}{2}; 1, \tfrac{1}{2}\rangle, \\
 \sqrt{2}a + b &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Resolviendo simultáneamente (1.11) y (1.12),

$$\begin{aligned}
 a &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
 b &= \mp \sqrt{\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Usamos la convención de Condon-Shortley, recordando la de a y que $j = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\
 b &= \sqrt{\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Por lo que $|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$ queda como

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{1.13}$$

Los CCG son:

$$\begin{aligned}
 \langle 1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2} | \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\
 \langle 1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2} | \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Aplicando \hat{J}_{-1} a (1.13):

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_{-}|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-})|1, \tfrac{1}{2}; 1, -\tfrac{1}{2}\rangle, \\
 |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|1, \tfrac{1}{2}; -1, \tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, \tfrac{1}{2}; 0, -\tfrac{1}{2}\rangle.
 \end{aligned}$$

Los CCG son

$$\begin{aligned}\langle 1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \langle 1, \frac{1}{2}; 0, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(c) Valor 1.0 pt - Escribe la matriz de transformación entre estas dos bases.

Solución

La transformación puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; -1, \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; 1, \frac{-1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; 0, \frac{-1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}; -1, \frac{-1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

Problema 2: Perturbación en un sistema de tres estados (valor total: 5 pt)

Considera un sistema que solo tiene tres estados linealmente independientes. Considera ahora que el Hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente matriz:

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix},$$

en donde V_0 es una constante y ϵ es un número pequeño, es decir, $\epsilon \ll 1$.

- (a) Valor: 0.5 pt - Si consideramos que ϵ es el resultado de una perturbación, escribe este Hamiltoniano como la suma de un Hamiltoniano imperturbado \hat{H}_0 y una perturbación \hat{W} , es decir, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, de tal forma que $\hat{H} = \hat{H}_0$ cuando $\epsilon = 0$.

Solución

Para lograr escribir \hat{H} como $\hat{H}_0 + \hat{W}$, recordamos que \hat{H}_0 se obtiene cuando $\epsilon = 0$, por lo que \hat{W} debe estar únicamente en términos de ϵ . Así,

$$\hat{H}_0 = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Y, \hat{W} ,

$$\hat{W} = V_0 \epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El Hamiltoniano \hat{H} queda entonces como

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + V_0 \epsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

- (b) Valor: 0.5 pt - ¿Quiénes son los eigenvalores y los eigenvectores del Hamiltoniano imperturbado \hat{H}_0 ? Nota que este Hamiltoniano tiene un eigenvalor no degenerado y dos eigenvalores degenerados.

Solución

Inmediatamente de (2.1) notamos que los eigenvalores de \hat{H}_0 son

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= V_0, \\ \lambda_2 &= 2V_0,\end{aligned}$$

con $\bar{\lambda}_1$ doblemente degenerado. Y que sus eigenvectores son

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Valor: 1.0pt - El Hamiltoniano \hat{H} puede resolverse exactamente Encuentra los eigenvalores exactos de \hat{H} . Una vez que los hayas encontrado, exprésalos como una serie de potencias de Taylor en ϵ hasta segundo orden, es decir, conserva todos los términos con orden igual o menor a ϵ^2 .

Solución

Reescribimos \hat{H} para no estar cargando con coeficientes, tal que,

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \frac{1}{V_0} \hat{H}, \\ \hat{H}' &= \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Resolvemos el problema de eigenvalores, tal que el polinomio característico de \hat{H}' es

$$[(1 - \epsilon) - \lambda][(1 - \lambda)(2 - \lambda) - \epsilon^2] = 0.$$

Los eigenvalores son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \epsilon, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2} \right), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{1 + 4\epsilon^2} \right).\end{aligned}$$

Haciendo la expansión de Taylor correspondiente para cada uno de los eigenvalores tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \epsilon, \\ \lambda_2 &\simeq 2 + \epsilon^2, \\ \lambda_3 &\simeq 1 - \epsilon^2.\end{aligned}$$

Multiplicando por V_0 tenemos que los eigenvalores de \hat{H} son

$$\begin{aligned}\omega_1 &= V_0(1 - \epsilon), \\ \omega_2 &\simeq V_0(2 + \epsilon^2), \\ \omega_3 &\simeq V_0(1 - \epsilon^2).\end{aligned}\tag{2.4}$$

- (d) Valor: 1.0pt - Utiliza el caso **no** degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden y segundo orden del eigenvalor **no** degenerado del Hamiltoniano imperturbado \hat{H}_0 . Compara este resultado con el que encontraste en (c).

Solución

Sabemos que el eigenvalor no degenerado es $\lambda_3 = 2V_0$. Recordamos entonces que la corrección a primer orden viene dada por

$$E_3^{(1)} = \langle \psi_3^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle.$$

Así,

$$\begin{aligned}E_3^{(1)} &= V_0\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= V_0\epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$E_3^{(1)} = 0.$$

Es decir, no hay corrección de primer orden.

La corrección de segundo orden para el caso no degenerado se obtiene a partir de

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \psi_n^{(0)} | \hat{W} | \psi_k^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$

Así,

$$E_3^{(2)} = \frac{|\langle \psi_1^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2}{E_3^{(0)} - E_1^{(0)}} + \frac{|\langle \psi_2^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2}{E_3^{(0)} - E_2^{(0)}}. \quad (2.5)$$

Por un lado tenemos que

$$\langle \psi_1^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle = V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{|\langle \psi_1^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2 = 0.}$$

Por el otro,

$$\langle \psi_2^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle = V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$= V_0 \epsilon,$$

$$\boxed{|\langle \psi_2^{(0)} | \hat{W} | \psi_3^{(0)} \rangle|^2 = V_0^2 \epsilon^2.}$$

Y además sabemos que $E_3^{(0)} = 2V_0$ y $E_2^{(0)} = V_0$, entonces

$$E_3^{(0)} - E_2^{(0)} = 2V_0 - V_0,$$

$$E_3^{(0)} - E_2^{(0)} = V_0.$$

Sustituyendo lo anterior en (2.5),

$$E_3^{(2)} = \frac{V_0^2 \epsilon^2}{V_0},$$

$$E_3^{(2)} = V_0 \epsilon^2.$$

Por lo que la corrección de la energía a segundo orden es:

$$\begin{aligned} E_3 &\simeq E_3^{(0)} + E_3^{(1)} + E_3^{(2)}, \\ &\simeq 2V_0 + 0 + V_0\epsilon^2, \\ E_3 &\simeq V_0(2 + \epsilon^2). \end{aligned}$$

Comparando el valor de E_3 con el resultado obtenido en (2.4) observamos que es lo mismo, *i.e.*,

$$E_3 \simeq V_0(2 + \epsilon^2) = V_0(2 + \epsilon^2) \simeq \omega_2.$$

- (e) Valor: 2.0pt - Utiliza ahora el caso degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo para calcular las correcciones a primer orden de los dos eigenvalores degenerados de \hat{H}_0 . Compara con los resultados del inciso (c).

Solución

Recordamos que la corrección primer orden de la energía para el caso degenerado viene dada por

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - W_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2} \right], \quad (2.6)$$

donde

$$W_{ij} = \langle \psi_i^{(0)} | \hat{W} | \psi_j^{(0)} \rangle.$$

Debemos obtener W_{aa} , W_{bb} y W_{ab} ,

$$W_{aa} = \langle \psi_a^{(0)} | \hat{W} | \psi_a^{(0)} \rangle,$$

$$W_{bb} = \langle \psi_b^{(0)} | \hat{W} | \psi_b^{(0)} \rangle,$$

$$W_{ab} = \langle \psi_a^{(0)} | \hat{W} | \psi_b^{(0)} \rangle,$$

donde $|\psi_a^{(0)}\rangle = |\psi_1\rangle$ y $|\psi_b^{(0)}\rangle = |\psi_2\rangle$.

Así,

$$\begin{aligned}
 W_{aa} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \boxed{W_{aa} = -V_0 \epsilon.} & \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{bb} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \boxed{W_{bb} = 0.} & \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{ab} &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 &= V_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \boxed{W_{ab} = 0.} & \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.7) a (2.9) en (2.6),

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2} [-V_0 \epsilon \pm V_0 \epsilon],$$

$$\boxed{E_{\pm}^{(1)} = \{0, -V_0 \epsilon\}.$$

Por lo que la corrección de la energía $E^{(1)}$ es:

$$E_1 \simeq E_0^{(1)} + E_1^{(1)},$$

$$\simeq V_0 - V_0\epsilon,$$

$$E_1 \simeq V_0(1 - \epsilon).$$

Comparando con (2.4), verificamos que el resultado es igual al obtenido en el inciso (c).

Problema 3: Extra: Incertidumbre de \hat{J}_x y \hat{J}_y (valor: +1pt)

Sea $\hat{\vec{J}}$ el operador general de momento angular con componentes \hat{J}_x , \hat{J}_y y \hat{J}_z . En clase aprendimos que estas componentes no conmutan entre sí y por lo tanto deben satisfacer alguna relación de incertidumbre. Considerando la base de autoestados $|j, m\rangle$ de los operadores \hat{J}_0^2 y \hat{J}_z , encuentra la relación de incertidumbre $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$.

Recuerda que la definición de la desviación estándar de un operador \hat{O} es

$$\Delta\hat{O} = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}. \quad (3.1)$$

Sugerencia: Utiliza los operadores de ascenso y descenso, $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$ y $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$, recordando que su acción sobre los estados $|j, m\rangle$ es:

$$\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar|j, m \pm 1\rangle.$$

Solución

A partir de los operadores de ascenso y descenso podemos encontrar a los operadores \hat{J}_x y \hat{J}_y , tal que,

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} \quad \wedge \quad \hat{J}_y = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i}.$$

Recordemos que el valor esperado está dado por:

$$\langle\hat{O}\rangle = \langle j, m | \hat{O} | j, m \rangle.$$

Por un lado, tenemos que $\langle\hat{J}_x\rangle$ y $\langle\hat{J}_y\rangle$,

$$\langle\hat{J}_x\rangle = \frac{1}{2}\langle j', m' | (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) | j, m \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle j', m' | \hat{J}_+ | j, m \rangle + \langle j', m' | \hat{J}_- | j, m \rangle \right],$$

$$\langle\hat{J}_x\rangle = \frac{1}{2} \left[\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j', m' | j, m+1 \rangle + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j', m' | j, m-1 \rangle \right],$$

$$\Rightarrow \langle\hat{J}_y\rangle = \frac{1}{2i} \left[\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\langle j', m' | j, m+1 \rangle - \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\langle j', m' | j, m-1 \rangle \right],$$

pero

$$\langle j', m' | j, m + 1 \rangle = 0,$$

$$\langle j', m' | j, m - 1 \rangle = 0,$$

$$\boxed{\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0.} \quad (3.2)$$

Por el otro, para $\langle \hat{J}_x^2 \rangle$ y $\langle \hat{J}_y^2 \rangle$ se tiene que

$$\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle j, m | (\hat{J}_+ + \hat{J}_-)^2 | j, m \rangle = \frac{1}{4} \langle j, m | \hat{J}_+^2 + \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_-^2 | j, m \rangle.$$

Recordando que existen las siguientes relaciones:

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z,$$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z.$$

De esta manera, la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_x^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle j, m | \hat{J}_+^2 + \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_-^2 | j, m \rangle, \\ &= \frac{1}{4} \langle j, m | \hat{J}_+^2 + (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) + (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) + \hat{J}_-^2 | j, m \rangle, \\ &= \frac{1}{4} \langle j, m | 2\hat{J}^2 - 2\hat{J}_z^2 | j, m \rangle, \\ &= \frac{1}{2} \left[\langle j, m | \hat{J}^2 | j, m \rangle - \langle j, m | \hat{J}_z^2 | j, m \rangle \right], \\ &\boxed{\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2].} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Análogamente para $\langle \hat{J}_y^2 \rangle$, obtenemos que $\langle \hat{J}_y^2 \rangle = \langle \hat{J}_x^2 \rangle$.

Sustituyendo (3.2) y (3.3) respectivamente para $\Delta\hat{J}_x$ y $\Delta\hat{J}_y$,

$$\begin{aligned}\Delta\hat{J}_x &= \sqrt{\langle\hat{J}_x^2\rangle - \langle\hat{J}_x\rangle^2}, \\ &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2] - 0^2}, \\ \Delta\hat{J}_x &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2]} = \Delta\hat{J}_y.\end{aligned}$$

Por lo que la relación de incertidumbre $\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y$ es igual a

$$\Delta\hat{J}_x\Delta\hat{J}_y = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2].$$