Tarea 2

Entrega: 5 de octubre de 2023

Problema 1: Tamaño finito del protón

En clase calculamos los niveles de energía del átomo de hidrógeno suponiendo que el protón es una partícula puntual. Esta aproximación es buena porque el tamaño del protón es cinco órdenes de magnitud menor que la extensión característica de la función de onda del electrón. Sin embargo, en realidad el protón tiene un tamaño finito y los niveles de energía sufrirán un pequeño corrimiento debido a esto.

Cuando el electrón se encuentra afuera de este núcleo finito, el potencial que siente es exactamente el mismo que el que sentiría si el núcleo fuera una carga puntual. Sin embargo, dentro de la región del protón, el potencial electrostático es diferente. Podemos encontrar el corrimiento en los niveles de energía debidos a este efecto usando teoría de perturbaciones.

En este problema, vamos a considerar que la carga eléctrica del protón está uniformemente distribuida en una esfera de radio ρ. Por llo que el potencial electrostático que el protón genera en todo el espacio es:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{-3\mathrm{e}^2}{8\pi\epsilon_0\rho}\left(1 - \frac{r^2}{3\rho^2}\right), & \text{si } 0 \leq r \leq \rho \\ -\frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

(a) Valor: 0.5pt - Realiza una gráfica del potencial $V(r)$, ¿cómo cambia esta gráfica al cambiar el valor de ρ?

(b) Valor: 0.5pt - Considerando que el potencial imperturbado es el potencial de Coulomb usual,

$$V_0(r) = -\frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

demuestra que la perturbación debida al efecto finito del protón es

$$W(r) = \begin{cases} -\frac{3\mathrm{e}^2}{8\pi\epsilon_0\rho}, & \text{si } 0 \leq r \leq \rho \\ 0, & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

(c) Valor: 2pt - Usando teoría de perturbaciones de primer orden (caso **no** degenerado) y considerando únicamente el átomo de Bohr (es decir, ignorando estructura fina e hiperfina), obtén los corrimientos de energía para los estados $1s$, $2s$ y $2p$. Compara tus resultados y explica las diferencias.

Sugerencia: Como el radio del protón ρ es mucho menor que el radio de Bohr a_0, puedes aproximar $|\psi_{nlm}(r)|^2 \simeq |\psi_{nlm}(0)|$, cuando $0 \leq r \leq \rho$.

(d) Valor 0.5pt - El radio del protón es de aproximadamente 0.88 fm (0.88×10^{-15} m). Calcula el valor numérico del corrimiento en la energía (en unidades de frecuencia) debida al tamaño finito del protón en el estado $2s$ del átomo de hidrógeno. Compara la energía del estado perturbado cno la del estado imperturbado.

(e) Valor 0.5pt - Ahora repite el cálculo del inciso anterior para el estado $2s$ del átomo de hidrógeno **muónico** (es decir, el átomo de hidrógeno en donde el electrón es sustituido por un muón). La masa del muón es 208 veces mayor que la del electrón. Compara estos resultados con los del inciso anterior. ¿Piensas que el radio del protón podría medirse al estudiar los corrimientos de energía en este átomo? Justifica tu respuesta.

Comentario: Si tienes curiosidad sobre esta última parte, revisa el artículo "The size of the proton", R. Pohl et al., Nature **466**, 213-216 (2010). Si no tienes acceso al artículo pídeselo al profesor.

(f) Extra - Valor: +1.0pt: Explica porqué podemos usar teoría de perturbaciones en este problema. Explica también porqué en el inciso (c) podemos usar el caso no degenerado de este método.

Problema 2: Átomo de hidrógeno en un estado mezclado

El electrón de un átomo de hidrógeno se encuentra en el siguiente estado de posición y spin:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R_{2,1}(r)\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)\chi_+ + \sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)\chi_-\right),$$

en donde las funciones χ_+ y χ_- corresponden a las funciones de spin del electrón $|+\rangle \equiv |s=1/2, m_s=1/2\rangle$ y $|-\rangle \equiv |s=1/2, m_s=-1/2\rangle$, respectivamente.

(a) Valor: 0.5pt - Si se realiza una medida del momento angular orbital total de $\hat{L}^2$, ¿cuáles son los posibles resultados y cuál es la probabilidad de obtener cada uno de ellos?

(b) Valor: 0.5pt - Misma pregunta para la componente-z del momento angular orbital $\hat{L}_z$.

(c) Valor: 0.5pt - Misma pregunta para la componente-z del momento angular de spin total $\hat{S}^2$.

(d) Valor: 0.5pt - Misma pregunta para la componente-z del operador de spin, $\hat{S}_z$.

(e) Valor: 0.5pt - Si se mide la posición de la partícula, ¿cuál es la **densidad de probabilidad** de encontrarla en la posición (r,θ,ϕ)?

(f) Valor: 0.5pt - Ahora se miden tanto la componente-z del spin como la distancia r al origen. Nota que estas cantidades físicas pueden medirse simultáneamente. Demuestra que la **densidad de probabilidad** de encontrar a la partícula en el estado de spin χ_+ a una distancia r del origen está dada por

$$\frac{1}{72a_0^5}r^2 e^{-r/a_0},$$

en donde a_0 es el radio de Bohr.

(g) Extra: Valor +0.5pt - Sea $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ el momento angular total del sistema. Si se mide $\hat{J}^2$, ¿cuáles son los posibles resultados y cuál es la probabilidad de obtener cada uno de ellos?

(h) Extra: Valor +0.5pt - Misma pregunta para $\hat{J}_z$.

Sugerencia: Para resolver los incisos (g) y (h) puedes usar (sin demostrar) los resultados que encontraste en la Tarea 1 para la suma de momentos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$.

Problema 3: Estructura fina: el término de Darwin (valor total: 3pt)

Considera el átomo de un electrón. En clase se mostró que una de las correcciones relativistas está asociada a la incertidumbre en la posición del electrón. El término que describe esta corrección, conocido como término de Darwin, está dado por

$$\hat{H}_3 = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2}\frac{Z\mathrm{e}^2}{4\pi\epsilon_0}\delta(r).$$

Utilizando teoría de perturbaciones independientes del tiempo demuestra que, a primer orden, la corrección de la energía debida al término de Darwin es

$$\Delta E_3 = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq 0 \\ -E_n\frac{Z^2\alpha^2}{n} & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

en donde $E_n = -\mu c^2\alpha^2 Z^2/(2n^2)$ son las energías imperturbadas del sistema.

Sugerencia: A pesar de que el átomo de un electrón es un sistema degenerado, este problema puede resolverse usando el caso no degenerado de la teoría de perturbaciones independientes del tiempo, ¿por qué? ¿cómo podrías demostrarlo?

Problema 4: Extra - Estructura fina: corrección total a la energía (valor: +1pt)

Considera la estructura fina del átomo de un electrón. En clase se demostró que las correcciones relativistas a la energía asociadas a la energía cinética, ΔE_1, y al acoplamiento spin-órbita, ΔE_2, están dadas por:

$$\Delta E_1 = -E_n \tfrac{Z^2\alpha^2}{n^2} \left[\tfrac{3}{3} - \tfrac{n}{\ell+1/2}\right]$$

$$\Delta E_2 = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2n\ell(\ell+1/2)(\ell+1)} \times \begin{cases} 0 & \text{si } \ell = 0 \\ \ell & \text{si } j = \ell + 1/2 \\ -(\ell+1) & \text{si } j = \ell - 1/2 \end{cases}$$

Mientras que la corrección asociada al término de Darwin, está dada por ΔE_3 encontrado en el problema 3. Demuestra que la corrección total $\Delta E_T = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$ está dada por

$$\Delta E_T = E_n \tfrac{Z^2\alpha^2}{n} \left[\tfrac{1}{j+1/2} + \tfrac{3}{4n}\right].$$