

# Examen 4

Entrega: 6 de diciembre de 2023

## Problema 1

En el conflicto de Israel-Palestina, Estados Unidos desplegó el portaaviones USS Gerald R. Ford para intimidar a los palestinos. El portaaviones cuenta con dos reactores nucleares A1B que generan 700 MW térmicos con eficiencia de 33 % cada uno, de Estados Unidos a la costa de Israel recorrió 10 853.42 km a una velocidad de 56 km/h, ¿Cuántos kg de  $^{235}\text{U}$  se consumieron? (Considera que el 15 % de neutrones absorbidos se pierden en captura radiactiva.)

## Solución

Tenemos que la energía que generan los dos reactores es de 700 MW, por lo que la energía generada por cada generador, considerando que su eficiencia es del 33 %, es

$$E_{1G} = 0.33 \left( \frac{700 \text{ MW}}{2} \right),$$

$$E_{1G} = 115.5 \text{ MW}.$$

Para determinar la cantidad de combustible consumido calculamos el tiempo que le tomó al portaaviones llegar a Israel,

$$t = \frac{10\,853.42 \text{ km}}{56 \text{ km/h}},$$

$$t = 193.8 \text{ h}.$$

Entonces la energía total generada por cada generador es

$$E_{\text{Tot}} = (115.5 \text{ MW})(193.8 \text{ h}),$$

$$E_{\text{Tot}} = 22\,385.18 \text{ MWh}.$$

Veamos ahora cuánta energía se libera por kg de  $^{235}\text{U}$ ,

$$N = (1000 \text{ g}) \cdot \frac{6.023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{235 \text{ g/mol}},$$

$$N = 2.56 \times 10^{24} \frac{1}{\text{kg}}.$$

Y sabemos que por cada fisión de  $^{235}\text{U}$  se liberan  $200 \text{ MeV} = 3.2 \times 10^{-11} \text{ J}$ , por lo tanto

$$E \approx (3.2 \times 10^{-11} \text{ J}) \cdot (2.56 \times 10^{24} \frac{1}{\text{kg}}),$$

$$\approx 820.15 \times 10^{11} \text{ J},$$

$$E \approx 22\,782 \text{ MWh.}$$

Así, la cantidad de  $^{235}\text{U}$  consumida es

$$m_{^{235}\text{U}} = \frac{22\,385.18 \text{ MWh}}{22\,782 \text{ MWh}} \cdot 1 \text{ kg},$$

$$= 0.982 \text{ kg},$$

$$m_{^{235}\text{U}} \simeq 1 \text{ kg.}$$

Pero la cantidad consumida por ambos generados es el doble, *i.e.*, 2 kg. Sin embargo, aún nos falta considerar la pérdida del 15 % de neutrones absorbidos por captura radiactiva, tal que

$$m = 0.85(2 \text{ kg}),$$

$$m = 1.7 \text{ kg.}$$

## Problema 2

Como el tiempo de vida media de  $^{235}\text{U}$  ( $7.13 \times 10^8$  años) es menor al tiempo de vida media de  $^{238}\text{U}$  ( $4.51 \times 10^9$  años), la abundancia de  $^{235}\text{U}$  ha ido decreciendo en la Tierra. ¿Hace cuánto tiempo la abundancia isotrópica del  $^{235}\text{U}$  era igual a 3 %? Este porcentaje es el enriquecimiento que se usa en algunas plantas nucleares.

## Solución

La actividad de un material al tiempo  $t$  está definida por

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t}. \quad (2.1)$$

Sabemos que el  $^{238}\text{U}$  es más abundante que el  $^{235}\text{U}$ , tal que una muestra uranio contiene un 99.28 % de  $^{238}\text{U}$  y un 0.72 % de  $^{235}\text{U}$ . Y puesto que queremos determinar cuando la abundancia era del 3 % para el  $^{235}\text{U}$  y, por ende, la abundancia del  $^{238}\text{U}$  era del 97 %, su expresión para la actividad es

$$\mathcal{A}(t) = \frac{0.72}{99.28} = \frac{3}{97} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t},$$

donde  $\lambda_1$  es la constante de desintegración del  $^{235}\text{U}$  y  $\lambda_2$  es la constante de desintegración del  $^{238}\text{U}$ .

Resolviendo para  $t$  se obtiene que

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln\left(\frac{99.28}{0.72}\right)}{\ln\left(\frac{97}{3}\right)} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ &= \frac{\ln\left(\frac{99.28}{0.72}\right)}{\ln\left(\frac{97}{3}\right)} \frac{1}{9.7 \times 10^{-10} \text{ años} - 1.5 \times 10^{-10} \text{ años}}, \end{aligned}$$

$$t = 1.73 \times 10^9 \text{ años.}$$

Por lo que aproximadamente hace 1.73 billones de años la abundancia isotrópica del  $^{235}\text{U}$  era del 3 %.

## Problema 3

¿Qué masa de hidrógeno necesitas para generar 1 MWD?

### Solución

Del ciclo  $p - p$  sabemos que al colisionar dos hidrógenos la energía que se libera es de  $0.42 \text{ MeV} \simeq 7.79 \times 10^{-25} \text{ MWD}$ . Partiendo de la expresión para la energía liberada

$$E \simeq (7.79 \times 10^{-25} \text{ MWD})N, \quad (3.1)$$

con  $N$  la cantidad de núcleos, *i.e.*,

$$N = m \cdot \frac{N_A}{A}.$$

Sabemos que la energía generada es de 1 MWD, entonces de (3.1)

$$1 \text{ MWD} \simeq (7.79 \times 10^{-25} \text{ MWD}) \left( m \cdot 6.023 \times 10^{23} \frac{1}{\text{g}} \right),$$

$$m \simeq \frac{1 \text{ MWD} \cdot 1 \text{ g}}{(7.79 \times 10^{-25} \text{ MWD})(6.023 \times 10^{23})},$$

$$m \simeq 2.13 \text{ g.}$$

## Problema 4

Se te da una muestra de madera proveniente de una excavación en Tlatelolco, su masa es de 10 g y su actividad es de 2.35 Bq ¿qué tan antigua es la muestra?

## Solución

Queremos determinar la antigüedad de la muestra, por lo que es necesario conocer  $\lambda$  y la actividad inicial  $\mathcal{A}_0$ ; pero primero resolvemos (2.1) para  $t$ ,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}} \right). \quad (4.1)$$

Sabemos que la actividad inicial para materiales a base de carbono se obtiene a partir de

$$\mathcal{A}_0 = \lambda N_0 = \lambda \left( \frac{N_A}{A} \times m \times \frac{\#^{14}\text{C}}{\#^{12}\text{C}} \right)$$

con  $N_A$  el número de Avogadro,  $m$  la cantidad de muestra y  $\#^{14}\text{C}/\#^{12}\text{C} = 1.3 \times 10^{-12}$ .

La vida media del  $^{14}\text{C}$  es de

$$\begin{aligned} t_{1/2} &= 5730 \text{ años,} \\ t_{1/2} &= 1.8 \times 10^{11} \text{ s.} \end{aligned}$$

Tal que el valor de  $\lambda$  es

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{1.8 \times 10^{11} \text{ s}}$$

$$\lambda = 3.85 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}. \quad (4.2)$$

Por lo que la actividad inicial de 10 g de madera es de

$$\mathcal{A}_0 = (3.85 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}) \left( \frac{6.023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{12 \text{ g/mol}} \times 10 \text{ g} \times 1.3 \times 10^{-12} \right),$$

$$\mathcal{A}_0 \simeq 2.51 \text{ Bq.} \quad (4.3)$$

Sustituyendo (4.2) y (4.3) en (4.1) la antigüedad de la madera es de

$$t = \frac{1}{3.85 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} \ln \left( \frac{2.51 \text{ Bq}}{2.35 \text{ Bq}} \right),$$

$$\simeq 1.7 \times 10^{10} \text{ s},$$

$$t = 551 \text{ años.}$$

---

## Problema 5

Si cada fisión del  $^{235}\text{U}$  genera en promedio 2.5 neutrones de energías térmicas (aproxima a 1 eV) ¿qué cantidad de ese combustible es necesario para recibir una dosis alta de (5 Sv) en una persona de 80 kg de peso (solo proveniente de neutrones)?

## Solución

Sabemos que la dosis absorbida está dada por la energía absorbida por unidad de masa, tal que

$$D \simeq \frac{E}{m}.$$

Por lo que la energía absorbida es

$$\begin{aligned} E &\simeq D \cdot m, \\ &\simeq (5 \text{ Sv})(80 \text{ kg}), \\ &\simeq (5 \frac{\text{J}}{\text{kg}})(80 \text{ kg}), \end{aligned}$$

$$E \simeq 400 \text{ J}.$$

Para determinar la cantidad del combustible, o el número de neutrones que se necesitan, debemos determinar la energía que se libera por cada fisión. Para ello, sabemos que la energía liberada por cada fisión es de 1 eV por neutrón, por lo que la energía liberada por cada neutrón es de

$$\begin{aligned} E_n &\simeq \frac{1 \text{ eV}}{2.5}, \\ E_n &\simeq 6.4 \times 10^{-20} \frac{\text{J}}{\text{neutrón}}. \end{aligned}$$

Entonces, la cantidad de neutrones que se necesitan es

$$\begin{aligned} N_n &\simeq \frac{E}{E_n}, \\ &\simeq \frac{400 \text{ J}}{6.4 \times 10^{-20} \text{ J/neutrón}}, \\ N_n &\simeq 6.25 \times 10^{21} \text{ neutrones.} \end{aligned}$$