Examen 4

Entrega: 6 de diciembre de 2023

Problema 1

En el conflicto de Israel-Palestina, Estados Unidos desplegó el portaaviones USS Gerald R. Ford para intimidad a los palestinos. El portaaviones cuenta con dos reactores nucleares A1B que generan 700 MW térmicos con eficiencia de 33 % cada uno, de Estados Unidos a la costa de Israel recorrió 10 853.42 km a una velocidad de 56 km/h, ¿Cuántos kg de ^{235}U se consumieron? (Considera que el 15 % de neutrones absorbidos se pierden en captura radiactiva.)

Problema 2

Como el tiempo de vida media de ^{235}U (7.13×10^{8} años) es menor al tiempo de vida media de ^{238}U (4.51×10^{9} años), la abundancia de ^{235}U ha ido decreciendo en la Tierra. ¿Hace cuánto tiempo la abundancia isotrópica del ^{235}U era igual a 3 %? Este porcentaje es el enriquecimiento que se usa en algunas plantas nucleares.

Solución

La actividad de un material al tiempo t está definida por

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{2.1}$$

Sabemos que el ^{238}U es más abundante que el ^{235}U, tal que una muestra uranio contiene un 99.28 % de ^{238}U y un 0.72 % de ^{235}U. Y puesto que queremos determinar cuando la abundancia era del 3 % para el ^{235}U y, por ende, la abundancia del ^{238}U era del 97 %, su expresión para la actividad es

$$\mathcal{A}(t) = \frac{0.72}{99.28} = \frac{3}{97}\mathrm{e}^{-(\lambda_1-\lambda_2)t},$$

donde λ_1 es la constante de desintegración del ^{235}U y λ_2 es la constante de desintegración del ^{238}U.

Resolviendo para t se obtiene que

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln\left(\frac{99.28}{0.72}\right)}{\ln\left(\frac{97}{3}\right)} \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}, \\ &= \frac{\ln\left(\frac{99.28}{0.72}\right)}{\ln\left(\frac{97}{3}\right)} \frac{1}{9.7\times10^{-10}\,\text{años} - 1.5\times10^{-10}\,\text{años}}, \\ &\boxed{t = 1.73\times10^{9}\,\text{años.}} \end{aligned}$$

Por lo que aproximadamente hace 1.73 billones de años la abundancia isotrópica del ^{235}U era del 3 %.

Problema 3

¿Qué masa de hidrógeno necesitas para generar $1\,\mathrm{MWD}$?

Solución

Del ciclo $p-p$ sabemos que al colisionar dos hidrógenos la energía que se libera es de $0.42\,\mathrm{MeV} \simeq 7.79{\times}10^{-25}\,\mathrm{MWD}$. Partiendo de la expresión para la energía liberada

$$E \simeq (7.79{\times}10^{-25}\,\mathrm{MWD})N, \tag{3.1}$$

con N la cantidad de núcleos, *i.e.*,

$$N = m \cdot \frac{N_A}{A}.$$

Sabemos que la energía generada es de $1\,\mathrm{MWD}$, entonces de (3.1)

$$1\,\mathrm{MWD} \simeq (7.79{\times}10^{-25}\,\mathrm{MWD})(m \cdot 6.023{\times}10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{g}}),$$

$$m \simeq \frac{1\,\mathrm{MWD} \cdot 1\,\mathrm{g}}{(7.79{\times}10^{-25}\,\mathrm{MWD})(6.023{\times}10^{23})},$$

$$\boxed{m \simeq 2.13\,\mathrm{g}.}$$

Problema 4

Se te da una muestra de madera proveniente de una excavación en Tlatelolco, su masa es de 10 g y su actividad es de 2.35 Bq ¿qué tan antigua es la muestra?

Solución

Queremos determina la antigüedad de la muestra, por lo que es necesario conocer λ y la actividad inicial $\mathcal{A}_0$; pero primero resolvemos (2.1) para t,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}}\right). \tag{4.1}$$

Sabemos que la actividad inicial para materiales a base de carbono se obtiene a partir de

$$\mathcal{A}_0 = \lambda N_0 = \lambda \left(\frac{N_A}{A} \times m \times \frac{\#^{14}\mathrm{C}}{\#^{12}\mathrm{C}}\right)$$

con N_A el número de Avogadro, m la cantidad de muestra y $\#^{14}\mathrm{C}/\#^{12}\mathrm{C} = 1.3\times10^{-12}$.

La vida media del $^{14}\mathrm{C}$ es de

$$\boxed{\begin{aligned} t_{1/2} &= 5730\,\text{años}, \\ t_{1/2} &= 1.8\times10^{11}\,\mathrm{s}. \end{aligned}}$$

Tal que el valor de λ es

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{1.8\times10^{11}\,\mathrm{s}}$$

$$\boxed{\lambda = 3.85\times10^{-12}\,\mathrm{s}^{-1}.} \tag{4.2}$$

Por lo que la actividad inicial de 10 g de madera es de

$$\mathcal{A}_0 = (3.85\times10^{-12}\,\mathrm{s}^{-1}) \left(\frac{6.023\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}{12\,\mathrm{g/mol}} \times 10\,\mathrm{g} \times 1.3\times10^{-12}\right),$$

$$\boxed{\mathcal{A}_0 \simeq 2.51\,\mathrm{Bq}.} \tag{4.3}$$

Sustituyendo (4.2) y (4.3) en (4.1) la antigüedad de la madera es de

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{3.85\times10^{-12}\,\mathrm{s}^{-1}} \ln\left(\frac{2.51\,\mathrm{Bq}}{2.35\,\mathrm{Bq}}\right), \\
&\simeq 1.7\times10^{10}\,\mathrm{s}, \\
&\boxed{t = 551\,\text{años}.}
\end{aligned}
$$

Problema 5

Si cada fisión del ^{235}U genera en promedio 2.5 neutrones de energías térmicas (aproxima a 1 eV) ¿qué cantidad de ese combustible es necesario para recibir una dosis alta de (5 Sv) en una persona de 80 kg de peso (solo proveniente de neutrones)?

Solución

Sabemos que la dosis absorbida está dad por la energía absorbida por unidad de masa, tal que

$$D \simeq \frac{E}{m}.$$

Por lo que la energía absorbida es

$$\begin{aligned} E &\simeq D \cdot m, \\ &\simeq (5\,\mathrm{Sv})(80\,\mathrm{kg}), \\ &\simeq (5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}})(80\,\mathrm{kg}), \\ &\boxed{E \simeq 400\,\mathrm{J}.} \end{aligned}$$

Para determinar la cantidad del combustible, o el número de neutrones que se necesitan, debemos determinar la energía que se libera por cada fisión. Para ello, sabemos que la energía liberada por cada fisión es de 1 eV por neutrón, por lo que la energía liberada por cada neutrón es de

$$\begin{aligned} E_n &\simeq \frac{1\,\mathrm{eV}}{2.5}, \\ E_n &\simeq 6.4{\times}10^{-20}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{neutrón}}. \end{aligned}$$

Entonces, la cantidad de neutrones que se necesitan es

$$\begin{aligned} N_n &\simeq \frac{E}{E_n}, \\ &\simeq \frac{400\,\mathrm{J}}{6.4{\times}10^{-20}\,\mathrm{J/neutrón}}, \\ &\boxed{N_n \simeq 6.25{\times}10^{21}\,\mathrm{neutrones}.} \end{aligned}$$