Tarea 4

Entrega: 17 de octubre de 2023

Problema 1

Determina el radio del ciclotrón necesario para acelerar π^+ a 10 MeV si se tiene un campo magnético de 2 T (Teslas). Recuerda que la masa debe estar en kilogramos y la energía en Joules para poder usar Teslas dentro de la ecuación.

Solución

Sabemos que la energía máxima de una partícula extraído de un ciclotrón a un radio R es

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2}\frac{(qBR)^2}{m}.$$

Y queremos conocer el radio del ciclotrón, resolvemos la expresión anterior para R,

$$R = \frac{\sqrt{2T_{\text{máx}}m}}{qB}.$$

Sin embargo, para poder solución 1 la massa debe estar kg y la energía en J. Recordemos entonces que los factores de conversión para cada una, respectivamente, son

$$1\,\text{eV}/c^2 = 1.782\,661\times10^{-36}\,\text{kg},$$

$$1\,\text{eV} = 1.602\,176\times10^{-19}\,\text{J}.$$

Por lo que los valores para la energía $T_{\text{máx}}$ y la masa del pión π^+, respectivamente, son:

$$T_{\text{máx}} = 1.602\,176\times10^{-12}\,\text{J},$$

$$m_{\pi^+} = 2.495\,726\times10^{-28}\,\text{kg}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes en solución 1 tenemos que

$$R = \frac{\sqrt{2(1.602\,176\times10^{-12}\,\text{J})(2.495\,726\times10^{-28}\,\text{kg})}}{(1.602\,176\times10^{-19}\,\text{C})(2\,\text{T})}$$

$$\boxed{R = 0.088\,\text{m}.}$$

Problema 2

¿Qué tipo de acelerador es el LHC? ¿Se compone por más de un tipo? Explica el principio de su funcionamiento.

Problema 3

Dibuja y explica el arreglo de imanes utilizado para enfocar o desenfocar haces de partículas.

Solución

Además de curvar los haces de partículas (dipolo magnético), también es necesario enfocarlos. Enfocar el haz permite que su altura y anchura se reduzcan para que se limite a la cámara de vacío del acelerador. Esto se logra mediante el uso de un arreglo específico de imanes, conocido como **cuadrupolo magnético**, o lentes magnéticos, que actúan de la misma manera que las lentes ópticas sobre un rayo de luz. El cuadrupolo consiste de cuatro polos magnéticos; el campo se desvanece en el centro y su magnitud aumenta conforme nos alejamos de él.

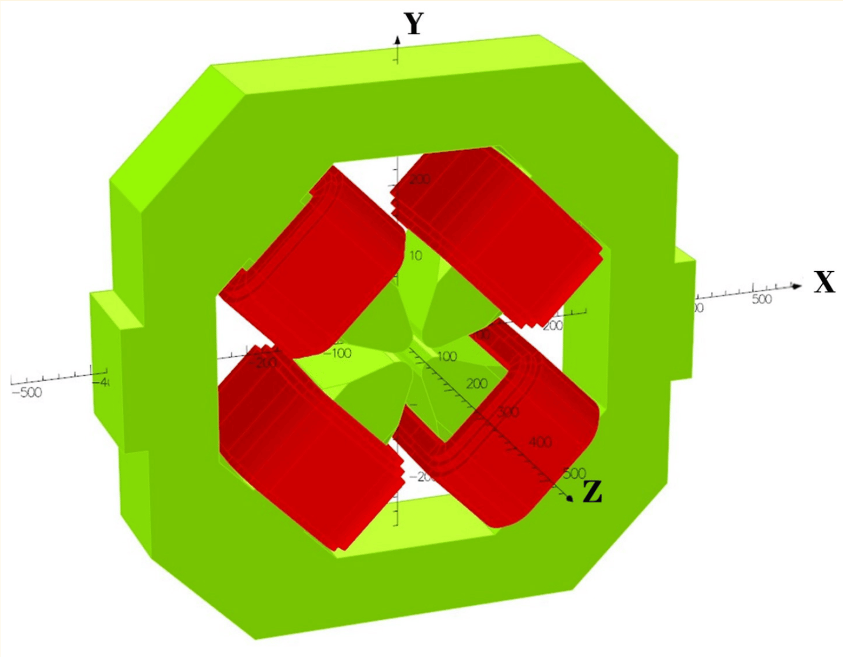

Figura 1: Diagrama de un cuadrupolo magnético. (Prawanta et al., "Development of Type A Quadrupole Magnet for Siam Photon Source II")

El principio que rige este efecto, el de enfocar o desenfocar, se conoce como enfoque fuerte (o *strong focusing*, por su nombre en inglés).

Para explicar su funcionamiento imaginemos una partícula positivamente cargada (ver figura 2) que entra en la región a lo largo del eje del imán ($x = y = 0$). Para este caso, la superposición de las líneas de campo magnético es tal que sus efectos son nulos. Ahora supongamos que la partícula entra en dirección con $x = 0$ ($y \neq 0$); para y's positivas como negativas, conforme la partícula atraviesa el campo magnético esta se desvía al centro de la apertura del imán. Entre mayor sea el valor de $|y|$ de la partícula, mayor será el campo magnético y la desviación de la partícula; por lo que para cualquier partícula positivamente cargada que entre por esta región del campo del cuadropolo sufrirá un efecto de enfoque. Para partículas que lleguen con dirección $y = 0$ ($x \neq 0$), el efecto es el contrario, *i.e.*, el cuadrupolo desenfoca las partículas.

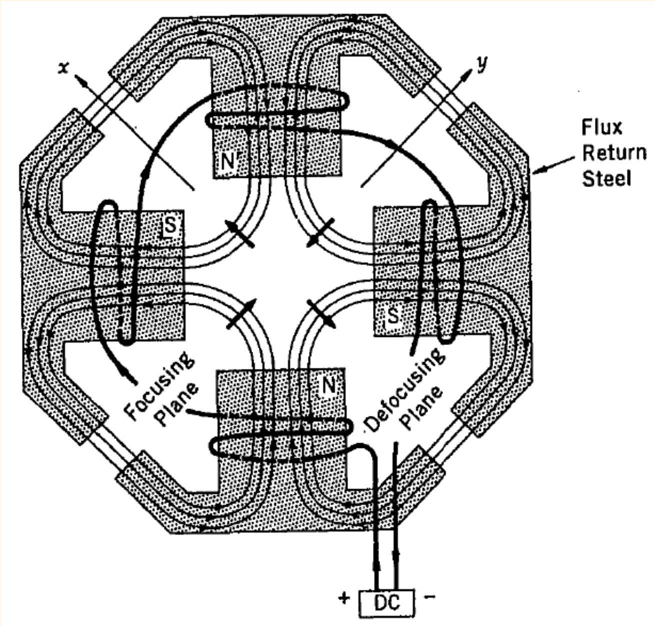

Figura 2: Funcionamiento de un cuadrupolo magnético. (Das y Ferbel, *Introduction to nuclear and particle physics*)

Y puesto que queremos mantener control de la altura y anchura del haz debemos tener una secuencia de cuadrupolos que desenfoquen y enfoquen el haz, como se observa en la siguiente figura.

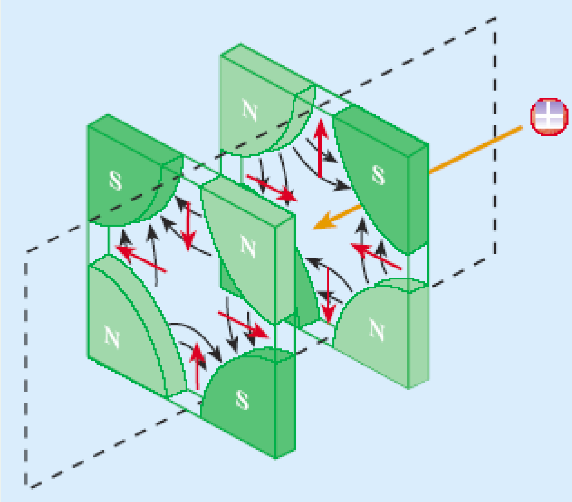

Figura 3: Secuencia de cuadropolos magnéticos para enfocar y desenfocar el haz de partículas. (Xabier Cid Vidal, *Taking a closer look at LHC: Magnetic multipoles*)

Problema 4

Cual sería la mínima energía necesaria para poder acelerar núcleos de Pb. Aproxímalo como una partícula única y considera que el radio es de 180×10^{-12} m. Utiliza la aproximación hecha en clase ¿tiene sentido? ¿A qué energía acelera los núcleos de Pb el LHC?

Solución

Sabemos que una aproximación para la energía cinética es

$$\frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} = \frac{1}{2d^2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2,$$

donde d es el radio de la partícula y la longitud de Compton $\bar{\lambda}_{Pb} = \frac{\hbar}{mc}$.

Calculamos $\bar{\lambda}_{Pb}$,

$$\bar{\lambda}_{Pb} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{197.3\,\text{MeV}\cdot\text{fm}}{193\,729.025\,\text{MeV}} = 1.018\,43\times10^{-3}\,\text{fm}.$$

Sustituyendo el valor del radio del plomo ($r = 180\times10^3$ fm) y la longitud de onda de Compton en solución 3,

$$\begin{aligned}
\frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1.018\,43\times10^{-3}\,\text{fm}}{190\times10^3\,\text{fm}}\right)^2, \\
&= \frac{1}{2}(3.201\,23\times10^{-17}), \\
\implies E_{\text{kin}} &= (1.600\,62\times10^{-17})mc^2, \\
&= (1.600\,62\times10^{-17})(193\,729.025\,\text{MeV}), \\
\boxed{E_{\text{kin}} = 3.100\,87\times10^{-12}\,\text{MeV}.}
\end{aligned}$$

Mientras que en el LHC los núcleos de Pb se aceleran a 2.76 TeV/nucleón.

Problema 5

Este ejercicio se desdobla en dos, si no deseas hacer la parte de programación solo haz la primera parte, si quieres moverle un poco a la simulación pasa al segundo caso, pero si quieres verte intrépidx, haz los dos para comparar lo que sale:

1. Considera un electrón 20 GeV entrando a la atmósfera, calcula la máxima profundidad que alcanza la cascada electromagnética generada.

Solución

Sabemos que la profundidad máxima se obtiene a partir de

$$t_{\text{máx}} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln(2)}, \tag{5.1}$$

donde

$$E_0 = 20\,\text{GeV},$$

$$E_c = \frac{800\,\text{MeV}}{(Z+1.2)}.$$

Como estamos considerando que al electrón entrando a la atmósfera y el elemento más abundante es el nitrógeno N con $Z = 7$, entonces la energía de corte es

$$E_c = \frac{800\,\text{MeV}}{(7+1.2)},$$

$$\boxed{E_c = 97.56\,\text{MeV}.}$$

Sin embargo, (5.1) carece de unidades, por lo que para obtener la profundidad máxima en m debemos calcular la longitud de radiación X_0,

$$X_0 = 716.4\frac{A}{Z(Z+1)\ln\left(\frac{287}{\sqrt{Z}}\right)},$$

tal que,

$$\boxed{X_0 = 32\,795.492\,462\,\text{m}.}$$

Entonces, la profundidad máxima queda como

$$t_{\text{máx}} = X_0 \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln(2)}.$$

Así,

$$\boxed{t_{\text{máx}} = 251\,852.3317\,\text{m}.}$$

2. Usa la simulación que se encuentra en la página https://marcovladimir.codeberg.page/4tarea.html, no debe instalar nada, puedes correrla desde https://try.ruby-lang.org/playground/, solo pon los valores correctos. ¿Qué tipo de distribución siguen las variables aleatorias?

Solución

Usando la simulación se obtuvieron 1000 datos de la profundidad máxima que alcanza la cascada electromagnética. A partir de esos datos se obtuvo la media y la desviación estándar, así como el histograma de los datos, como se muestra en la figura 4.

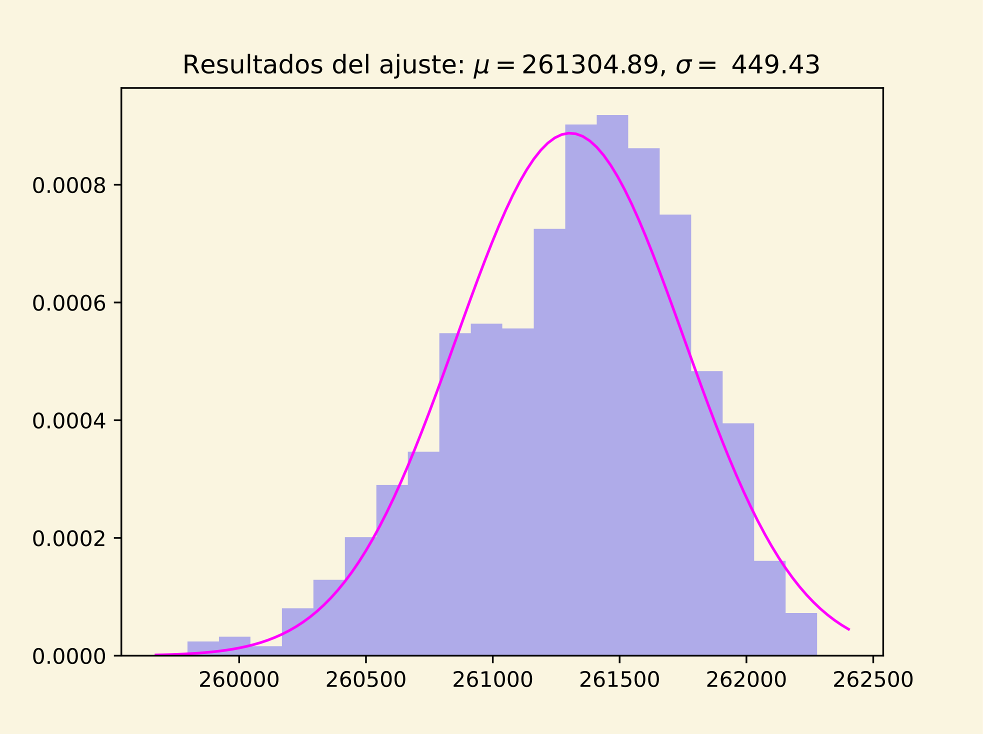

Figura 4: Histograma de los datos obtenidos de la simulación.

Por lo que la profundidad máxima que alcanza es de

$$\boxed{t_{\text{máx}} = 261\,304.89\,\text{m}.}$$

Y la distribución que sigue es una distribución normal o gaussiana.