

Tarea 4

Entrega: 17 de octubre de 2023

Problema 1

Determina el radio del ciclotrón necesario para acelerar π^+ a 10 MeV si se tiene un campo magnético de 2 T (Teslas). Recuerda que la masa debe estar en kilogramos y la energía en Joules para poder usar Teslas dentro de la ecuación.

Solución

Sabemos que la energía máxima de una partícula extraído de un ciclotrón a un radio R es

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{(qBR)^2}{m}.$$

Y queremos conocer el radio del ciclotrón, resolvemos la expresión anterior para R ,

$$R = \frac{\sqrt{2T_{\text{máx}}m}}{qB}.$$

Sin embargo, para poder solución 1 la massa debe estar kg y la energía en J. Recordemos entonces que los factores de conversión para cada una, respectivamente, son

$$1 \text{ eV}/c^2 = 1.782\,661 \times 10^{-36} \text{ kg},$$

$$1 \text{ eV} = 1.602\,176 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Por lo que los valores para la energía $T_{\text{máx}}$ y la masa del pión π^+ , respectivamente, son:

$$T_{\text{máx}} = 1.602\,176 \times 10^{-12} \text{ J},$$

$$m_{\pi^+} = 2.495\,726 \times 10^{-28} \text{ kg}.$$

Sustituyendo los valores correspondientes en solución 1 tenemos que

$$R = \frac{\sqrt{2(1.602\,176 \times 10^{-12} \text{ J})(2.495\,726 \times 10^{-28} \text{ kg})}}{(1.602\,176 \times 10^{-19} \text{ C})(2 \text{ T})}$$

$$R = 0.088 \text{ m}.$$

Problema 2

¿Qué tipo de acelerador es el LHC? ¿Se compone por más de un tipo? Explica el principio de su funcionamiento.

Solución

El LHC es un sincrotrón que mide 27 km de circunferencia. Dentro de este dos haces de partículas a muy altas energía viajan a velocidades cercanas a la de la luz antes de colisionar. Los haces viajan en direcciones opuestas guiados mediante el uso electroimanes superconductores.

Los haces dentro del LHC colisionan en cuatro ubicaciones diferentes alrededor del anillo acelerador. En estas ubicaciones se encuentran los detectores ATLAS, CMS, ALICE y LHCb.

El proceso de aceleración comienza con una fuente de haces de protones en el *Linac4*, que acelera iones negativos de hidrógeno (H^-) a 160 MeV para prepararlo para su inyección en el *Proton Synchrotron Booster* (PSB) o Impulsor del Sincrotrón de Protones. Los electrones son despojados de sus dos electrones durante la inyección del *Linac4* al PBS, dejando únicamente los protones. Estos son acelerados a 2 GeV para la inyección al *Proton Synchrotron* (PS), el cual impulsa el haz hasta 26 GeV. Después los protones son enviados al *Super Proton Synchrotron* (SPS), donde son acelerados hasta 450 GeV.

Finalmente los protones son transferidos a las dos tuberías especiales para que viajen los haces. La primera tubería circula en dirección de las manecillas del reloj, mientras que el haz en la otra tubería circula en sentido contrario a las manecillas del reloj. Los haces entonces se hacen colisionar dentro de los cuatro detectores antes mencionados, de tal manera que la energía total en el punto de colisión es de 13 TeV.

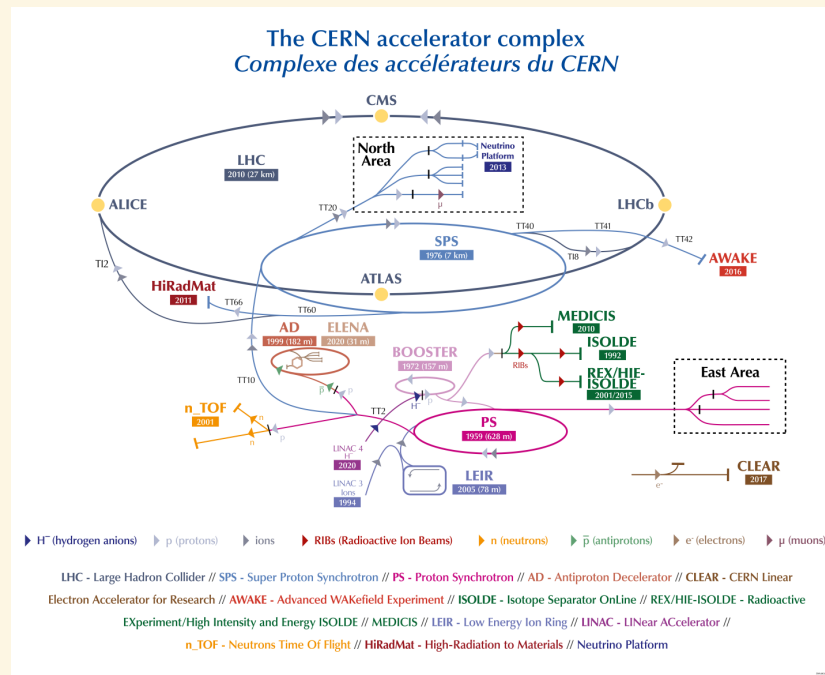


Figura 1: Diagrama del LHC con cada uno de sus componentes. (CERN, *CERN's Accelerator Complex*)

Problema 3

Dibuja y explica el arreglo de imanes utilizado para enfocar o desenfocar haces de partículas.

Solución

Además de curvar los haces de partículas (dipolo magnético), también es necesario enfocarlos. Enfocar el haz permite que su altura y anchura se reduzcan para que se limite a la cámara de vacío del acelerador. Esto se logra mediante el uso de un arreglo específico de imanes, conocido como **cuadрупolo magnético**, o lentes magnéticas, que actúan de la misma manera que las lentes ópticas sobre un rayo de luz. El cuadrupolo consiste de cuatro polos magnéticos; el campo se desvanece en el centro y su magnitud aumenta conforme nos alejamos de él.

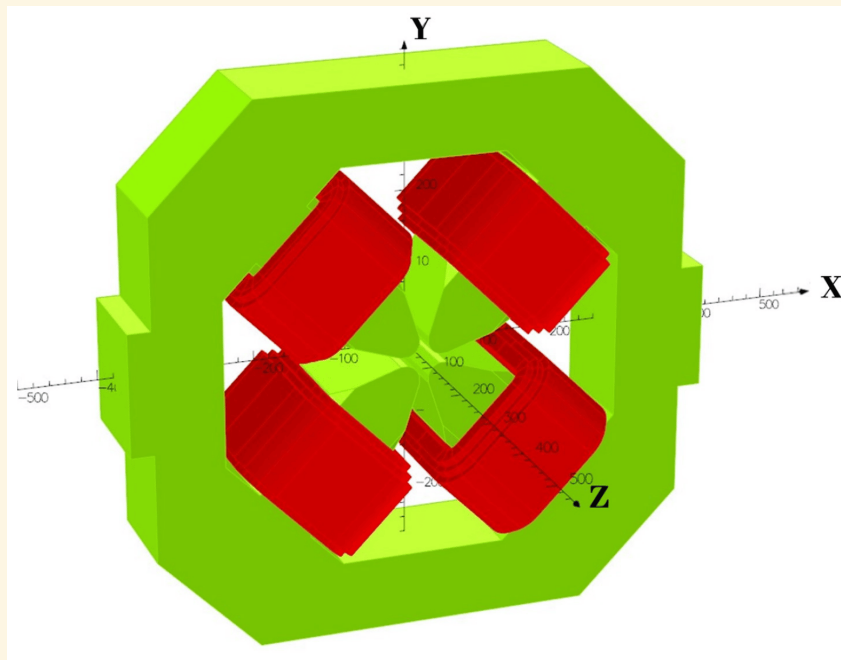


Figura 2: Diagrama de un cuadrupolo magnético. (Prawanta et al., “Development of Type A Quadrupole Magnet for Siam Photon Source II”)

El principio que rige este efecto, el de enfocar o desenfocar, se conoce como enfoque fuerte (o *strong focusing*, por su nombre en inglés).

Para explicar su funcionamiento imaginemos una partícula positivamente cargada (ver figura 3) que entra en la región a lo largo del eje del imán ($x = y = 0$). Para este caso, la superposición de las líneas de campo magnético es tal que sus efectos son nulos. Ahora supongamos que la partícula entra en dirección con $x = 0$ ($y \neq 0$); para y 's positivas como negativas, conforme la partícula atraviesa el campo magnético esta se desvía al centro de la apertura del imán. Entre mayor sea el valor de $|y|$ de la partícula, mayor será el campo magnético y la desviación de la partícula; por lo que para cualquier partícula positivamente cargada que entre por esta región del campo del cuadrupolo sufrirá un efecto de enfoque. Para partículas que lleguen con dirección $y = 0$ ($x \neq 0$), el efecto es el contrario, *i.e.*, el cuadrupolo desenfoca las partículas.

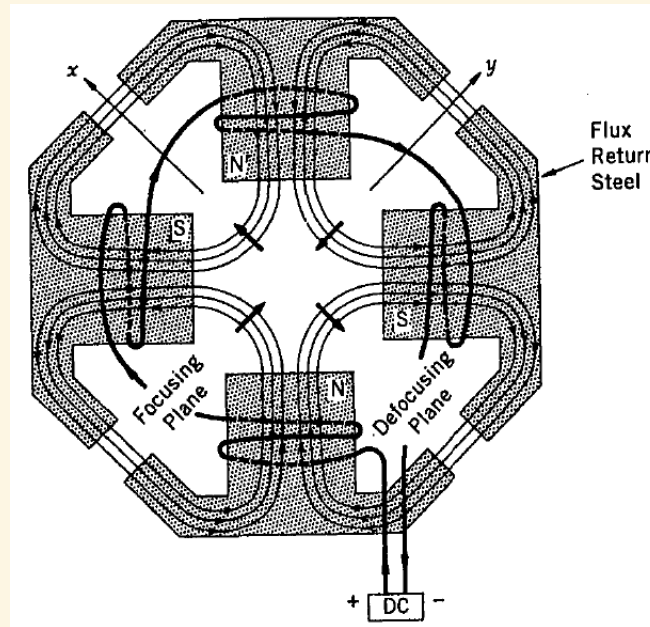


Figura 3: Funcionamiento de un cuadrupolo magnético. (Das y Ferbel, *Introduction to nuclear and particle physics*)

Y puesto que queremos mantener control de la altura y anchura del haz debemos tener una secuencia de cuadrupolos que desenfoquen y enfoquen el haz, como se observa en la siguiente figura.

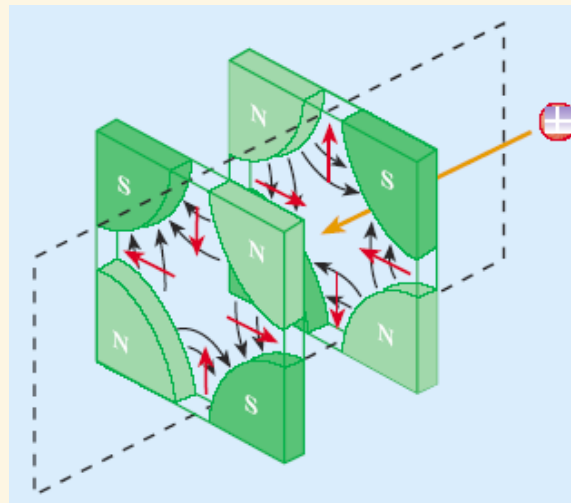


Figura 4: Secuencia de cuadrupolos magnéticos para enfocar y desenfoque el haz de partículas. (Xabier Cid Vidal, *Taking a closer look at LHC: Magnetic multipoles*)

Problema 4

Cual sería la mínima energía necesaria para poder acelerar núcleos de Pb. Aproxímalo como una partícula única y considera que el radio es de 180×10^{-12} m. Utiliza la aproximación hecha en clase ¿tiene sentido? ¿A qué energía acelera los núcleos de Pb el LHC?

Solución

Sabemos que una aproximación para la energía cinética es

$$\frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} = \frac{1}{2d^2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2,$$

donde d es el radio de la partícula y la longitud de Compton $\bar{\lambda}_{Pb} = \frac{\hbar}{mc}$.

Calculamos $\bar{\lambda}_{Pb}$,

$$\bar{\lambda}_{Pb} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{193\,729.025 \text{ MeV}} = 1.018\,43 \times 10^{-3} \text{ fm}.$$

Sustituyendo el valor del radio del plomo ($r = 180 \times 10^3 \text{ fm}$) y la longitud de onda de Compton en solución 4,

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1.018\,43 \times 10^{-3} \text{ fm}}{190 \times 10^3 \text{ fm}} \right)^2, \\ &= \frac{1}{2} (3.201\,23 \times 10^{-17}), \\ \Rightarrow E_{\text{kin}} &= (1.600\,62 \times 10^{-17}) mc^2, \\ &= (1.600\,62 \times 10^{-17}) (193\,729.025 \text{ MeV}), \\ E_{\text{kin}} &= 3.100\,87 \times 10^{-12} \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Mientras que en el LHC los núcleos de Pb se aceleran a 2.76 TeV/nucleón.

Problema 5

Este ejercicio se desdobra en dos, si no deseas hacer la parte de programación solo haz la primera parte, si quieres moverle un poco a la simulación pasa al segundo caso, pero si quieres verte intrépido, haz los dos para comparar lo que sale:

1. Considera un electrón 20 GeV entrando a la atmósfera, calcula la máxima profundidad que alcanza la cascada electromagnética generada.

Solución

Sabemos que la profundidad máxima se obtiene a partir de

$$t_{\text{máx}} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln(2)}, \quad (5.1)$$

donde

$$E_0 = 20 \text{ GeV},$$

$$E_c = \frac{800 \text{ MeV}}{(Z + 1.2)}.$$

Como estamos considerando que al electrón entrando a la atmósfera y el elemento más abundante es el nitrógeno N con $Z = 7$, entonces la energía de corte es

$$E_c = \frac{800 \text{ MeV}}{(7 + 1.2)},$$

$$E_c = 97.56 \text{ MeV}.$$

Sin embargo, (5.1) carece de unidades, por lo que para obtener la profundidad máxima en m debemos calcular la longitud de radiación X_0 ,

$$X_0 = 716.4 \frac{A}{Z(Z + 1) \ln\left(\frac{287}{\sqrt{Z}}\right)},$$

tal que,

$$X_0 = 32\,795.492\,462 \text{ m}.$$

Entonces, la profundidad máxima queda como

$$t_{\text{máx}} = X_0 \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln(2)}.$$

Así,

$$t_{\text{máx}} = 251\,852.3317 \text{ m.}$$

2. Usa la simulación que se encuentra en la página <https://marcovladimir.codeberg.page/4tarea.html>, no debe instalar nada, puedes correrla desde <https://try.ruby-lang.org/playground/>, solo pon los valores correctos. ¿Qué tipo de distribución siguen las variables aleatorias?

Solución

Usando la simulación se obtuvieron 1000 datos de la profundidad máxima que alcanza la cascada electromagnética. A partir de esos datos se obtuvo la media y la desviación estándar, así como el histograma de los datos, como se muestra en la figura 5.

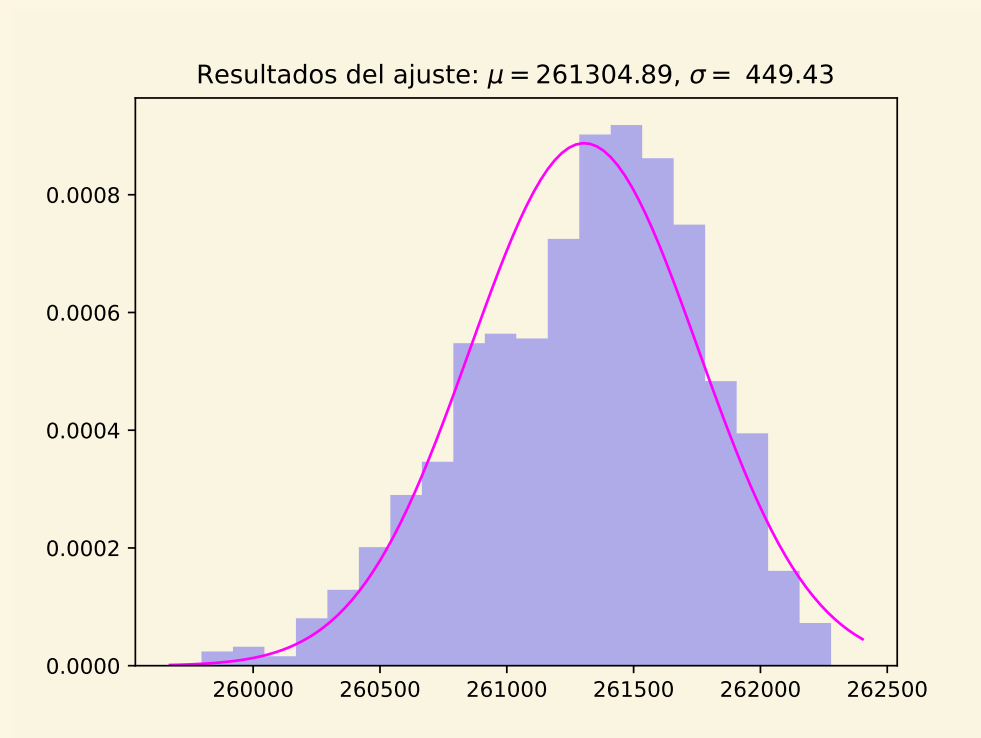


Figura 5: Histograma de los datos obtenidos de la simulación.

Por lo que la profundidad máxima que alcanza es de

$$t_{\text{máx}} = 261\,304.89 \text{ m.}$$

Y la distribución que sigue es una distribución normal o gaussiana.
