

Tarea 5

Entrega: 14 de noviembre de 2023

Problema 1

Calcula la masa, radio y energía de enlace de los siguientes núcleos (los excesos de masa se encuentran en <https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2016/mass16.txt>):

Solución

El exceso de masa está definido como

$$\delta(A, Z) = [M(A, Z) + A] \text{ keV}/c^2 \cdot c^2.$$

Resolviendo para la masa tenemos que

$$M(A, Z) = \frac{\delta(A, Z)}{c^2} + A, \quad (1.1)$$

con $[A] = \text{keV}/c^2$.

Y para la energía de enlace tenemos que

$$B.E.(A, Z) = \delta(A, Z) - Z\delta(1, 1) - (A - Z)\delta(1, 0), \quad (1.2)$$

donde $\delta(1, 1)$ es el exceso de masa del protón y $\delta(1, 0)$ es el exceso de masa del neutrón.

Finalmente, para calcular el radio del núcleo nos fijamos en la siguiente expresión:

$$R = 1.2A^{1/3}\text{fm}. \quad (1.3)$$

Usando (1.1) a (1.3) calculamos lo que se nos pide para cada uno de los núcleos.

- ${}^2\text{H}$ (deuterio)

Antes de poder calcular la masa debemos convertir A de uma a keV/c^2 . Así,

$$\begin{aligned} A[\text{keV}/c^2] &= 931\,494.102 \text{ keV}/c^2 A, \\ \Rightarrow A[\text{keV}/c^2] &= 2(931\,494.102 \text{ keV}/c^2), \end{aligned}$$

$$A[\text{keV}/c^2] = 1.862\,99 \times 10^6 \text{ keV}/c^2$$

Por lo que la masa del deuterio es

$$M(2, 1) = 13\,135.721\,76\,\text{keV}/c^2 + 1.862\,99 \times 10^6\,\text{keV}/c^2,$$

$$M(2, 1) = 1.876\,12 \times 10^6\,\text{keV}/c^2.$$

Mientras que su energía de enlace es

$$\begin{aligned} B.E.(2, 1) &= \delta(2, 1) - 1\delta(1, 1) - (2 - 1)\delta(1, 0), \\ &= 13\,135.721\,76\,\text{keV} - 7288.970\,61\,\text{keV} - 8071.317\,13\,\text{keV}, \end{aligned}$$

$$B.E.(2, 1) = -2224.57\,\text{keV}.$$

Finalmente, su radio es de

$$R = 1.2(2)^{1/3}\text{fm},$$

$$R = 1.511\,91\,\text{fm}.$$

- ^{14}C (carbono 14)

La masa para el ^{14}C es de

$$\begin{aligned} M(14, 6) &= \delta(14, 6) + 14[\text{keV}/c^2], \\ &= 3019.892\,78\,\text{keV}/c^2 + 13.0409 \times 10^6\,\text{keV}/c^2, \end{aligned}$$

$$M(14, 6) = 13.0439 \times 10^6\,\text{keV}/c^2.$$

Y su energía de enlace de

$$B.E.(14, 6) = \delta(14, 6) - 6\delta(1, 1) - 8\delta(1, 0),$$

$$B.E.(14, 6) = -105\,284.4680\,\text{keV}.$$

Mientras que su radio es de

$$R = 1.2(14)^{1/3}\text{fm},$$

$$R = 2.892\,17\,\text{fm}.$$

- ^{56}Fe (hierro 56)

La masa para el ^{56}Fe es de

$$\begin{aligned} M(56, 26) &= \delta(56, 26) + 56[\text{keV}/c^2], \\ &= -60\,607.082 \text{ keV}/c^2 + 52.1637 \times 10^6 \text{ keV}/c^2, \end{aligned}$$

$$M(56, 26) = 52.1031 \times 10^6 \text{ keV}/c^2.$$

Su energía de enlace de

$$B.E.(56, 26) = \delta(56, 26) - 26\delta(1, 1) - 30\delta(1, 0),$$

$$B.E.(56, 26) = -492\,259.8318 \text{ keV}.$$

Y su radio de

$$R = 1.2(56)^{1/3} \text{ fm},$$

$$R = 4.591\,03 \text{ fm}.$$

- ^{210}Po (polonio 210)

La masa del ^{210}Po es de

$$\begin{aligned} M(210, 84) &= \delta(210, 84) + 210[\text{keV}/c^2], \\ &= -15\,953.137 \text{ keV}/c^2 + 195.614 \times 10^6 \text{ keV}/c^2, \end{aligned}$$

$$M(210, 84) = 195.598 \times 10^6 \text{ keV}/c^2.$$

Su energía de enlace de

$$B.E.(210, 84) = \delta(210, 84) - 84\delta(1, 1) - 126\delta(1, 0),$$

$$B.E.(210, 84) = -1.645\,21 \times 10^6 \text{ keV}.$$

Y su radio de

$$R = 1.2(210)^{1/3} \text{ fm},$$

$$R = 7.132\,71 \text{ fm}.$$

Problema 2

A partir del modelo de la gota calcula las energías de enlace de los núcleos:

Solución

La expresión para la energía de ligadura que se obtiene a partir del modelo de la gota está dada como:

$$B.E.(A, Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} \pm a_5 A^{-3/4}, \quad (2.1)$$

donde el último término es positivo si el núcleo es par-par, negativo si es impar-impar o cero en cualquier otro caso.

Notemos que podemos reescribir (2.1), ya que se nos pide calcular la energía de enlace para núcleos isóbaros, *i.e.*, $A = 76$. Así,

$$B.E.(76, Z) = 76a_1 - 76^{2/3}a_2 - \frac{Z^2}{76^{1/3}}a_3 - \frac{(N - Z)^2}{76}a_4 \pm 76^{-3/4}a_5,$$

$$B.E.(76, Z) = [876.571 - 0.169\,979Z^2 - 0.306\,579(N - Z)^2 \pm 1.3209] \text{ MeV}, \quad (2.2)$$

donde $a_1 \approx 15.5 \text{ MeV}$, $a_2 \approx 16.8 \text{ MeV}$, $a_3 \approx 0.72 \text{ MeV}$, $a_4 \approx 23.3 \text{ MeV}$ y $a_5 \approx 34 \text{ MeV}$.

N	Z	Elemento	Tipo
45	31	Ga	impar-impar
44	32	Ge	par-par
43	33	As	impar-impar
42	34	Se	par-par
41	35	Br	impar-impar
40	36	Kr	par-par

Tabla 1: Información de los núcleos con $A = 76$: número de neutrones N , número de protones Z , elemento y si el núcleo es par-par o impar-impar.

Por un lado, para los núcleos par-par (^{76}Ge , ^{76}Se , ^{76}Kr [Tabla 1]) el último término de (2.2) es positivo.

- ^{76}Ge

La energía de ligadura es de

$$B.E.(76, 32) = [876.571 - 0.169\,979(32)^2 - 0.306\,579(44 - 32)^2 + 1.3209] \text{ MeV},$$

$$B.E.(76, 32) = 659.686 \text{ MeV}.$$

- ^{76}Se

La energía de ligadura es de

$$B.E.(76, 34) = [876.571 - 0.169\,979(34)^2 - 0.306\,579(42 - 34)^2 + 1.3209] \text{ MeV},$$

$$B.E.(76, 34) = 661.775 \text{ MeV}.$$

- ^{76}Kr

La energía de ligadura es de

$$B.E.(76, 36) = [876.571 - 0.169\,979(36)^2 - 0.306\,579(40 - 36)^2 + 1.3209] \text{ MeV},$$

$$B.E.(76, 36) = 652.694 \text{ MeV}.$$

Por el otro, para los núcleos impar-impar (^{76}Ga , ^{76}As , ^{76}Br [Tabla 1]) el último término de (2.2) es negativo.

- ^{76}Ga

La energía de ligadura es de

$$B.E.(76, 31) = [876.571 - 0.169\,979(31)^2 - 0.306\,579(45 - 31)^2 - 1.3209] \text{ MeV},$$

$$B.E.(76, 31) = 651.811 \text{ MeV}.$$

- ^{76}As

La energía de ligadura es de

$$B.E.(76, 33) = [876.571 - 0.169\,979(33)^2 - 0.306\,579(43 - 33)^2 - 1.3209] \text{ MeV},$$

$$B.E.(76, 33) = 659.485 \text{ MeV}.$$

- ^{76}Br

La energía de ligadura es de

$$B.E.(76, 35) = [876.571 - 0.169\,979(35)^2 - 0.306\,579(41 - 35)^2 - 1.3209] \text{ MeV},$$

$$B.E.(76, 35) = 655.989 \text{ MeV}.$$

(parece mucho, pero en realidad pueden ahorrarse muchos cálculos ¿sí lo ven?). Grafiquen los valores de estas energías de enlace (esto será útil para la siguiente tarea).

Finalmente graficamos los resultados obtenidos.

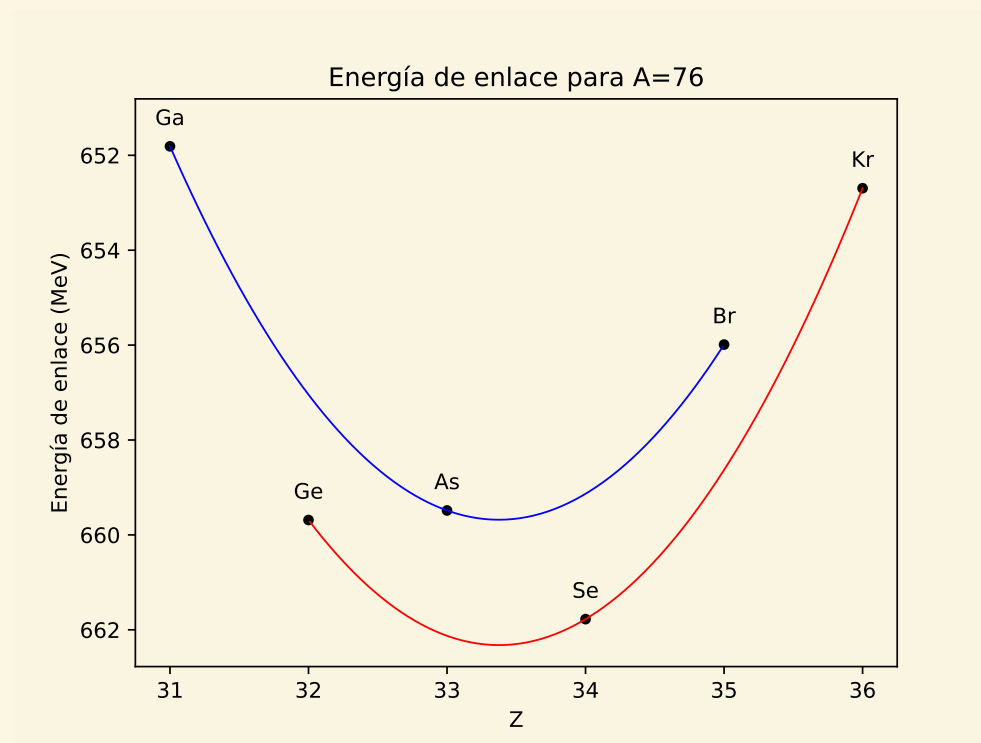


Figura 1: Gráfica de las energías de ligadura vs. Z para los núcleos isóbaros de $A = 76$.

Problema 3

¿Qué tipo de modelo es el gas de Fermi: colectivo o de partícula independiente? ¿Cuál es el principio a partir del cual se construye? Explica tu respuesta.

Solución

El modelo de gas de Fermi es un modelo de partícula independiente, ya que se asume que las partículas no interactúan entre sí. Este modelo considera al núcleo como un gas de protones y neutrones confinado en una región pequeña del espacio, el núcleo. De manera análoga a los electrones en el átomo, los nucleones llenarán niveles de energía cuantizados. Estos niveles serán distintos para protones y para neutrones, el primero debe incluir la repulsión coulombiana, el ancho estará dado por el radio nuclear y la profundidad puede ajustarse de acuerdo a la energía de enlace.

El pozo se va llenando de abajo hacia arriba, los niveles más bajos son los más estables, al último nivel completamente lleno se le llama *nivel de Fermi* y se denota por la energía E_F . Si no hay un fermión (protón o neutrón) fuera del nivel de Fermi, ese mismo define la energía de enlace del último nucleón; en dado caso de que lo haya, la energía del siguiente nivel define la energía de enlace del último fermión.

La profundidad de los pozos para protones y neutrones son distintas, de no ser así los núcleos pesados tendrían niveles de energía por arriba para neutrones, haciendo solo la parte neutra más inestable con una energía de enlace distinta, pero eso no se observa en el experimento. Un esquema de los pozos se puede ver en la figura 2.

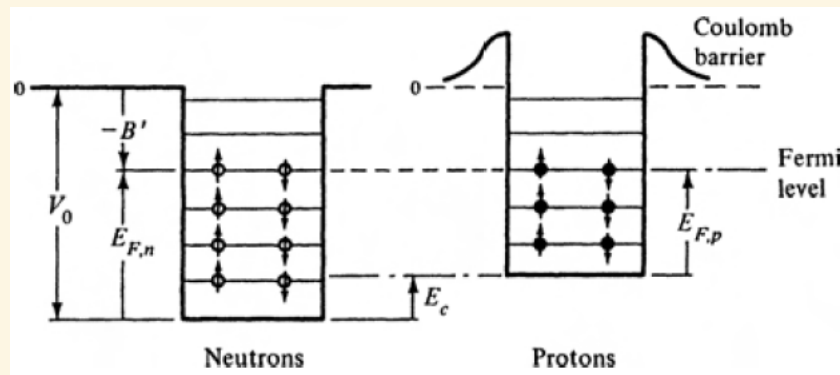


Figura 2: Esquema de los pozos de potencial en el modelo de Fermi. (Das y Ferbel, *Introduction to nuclear and particle physics*)

Problema 4

A partir del modelo de capas prediga el momento angular nuclear y la paridad de los siguientes núcleos:

- ${}^3\text{He}$

Solución

Tenemos que el número de protones y neutrones es:

$$Z: 2 \implies \text{Apareado},$$

$$N: 1.$$

Así el llenado de capas de neutrones se ve como

$$1s_{1/2} \text{ --- } \bullet \text{ --- } \textcircled{2} \text{ --- } \ominus \text{ --- } 2 \quad 2$$

$$2j+1 \quad \sum(2j+1)$$

Figura 3: Llenado de niveles para el estado base de ${}^3\text{He}$.

Por lo que,

$$N: (1s_{1/2})^1 \implies \ell = 0,$$

$$\pi = (-1)^0 = +1,$$

$$J = \frac{1}{2},$$

$$J^\pi = \frac{1}{2}^+.$$

Comparando con el valor experimental de J que se encuentra en [EasySpin](#) notamos que se obtiene el mismo resultado, $J = \frac{1}{2}$.

• ^{15}O

Solución

El número de protones y neutrones es

$$Z: 8 \implies \text{Apareado},$$

$$N: 7.$$

El llenado de capas se hará con los neutrones, tal que

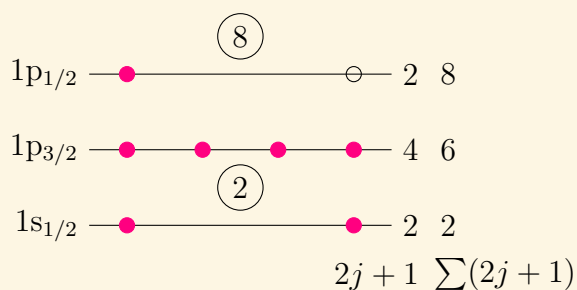


Figura 4: Llenado de niveles para el estado base de ^{15}O .

Así,

$$N: (1p_{1/2})^1 \implies \ell = 1,$$

$$\pi = (-1)^1 = -1,$$

$$J = \frac{1}{2},$$

$$J^\pi = \frac{1}{2}^-.$$

No podemos comparar el valor de J predicho con el de la página de [EasySpin](#) ya que no se encuentra registrado, tal vez debido a que no se ha medido experimentalmente.

- ^{41}Ca

Solución

El número de protones y neutrones es

$$Z: 20 \implies \text{Apareado},$$

$$N: 21.$$

El llenado de capas se hará con los neutrones,

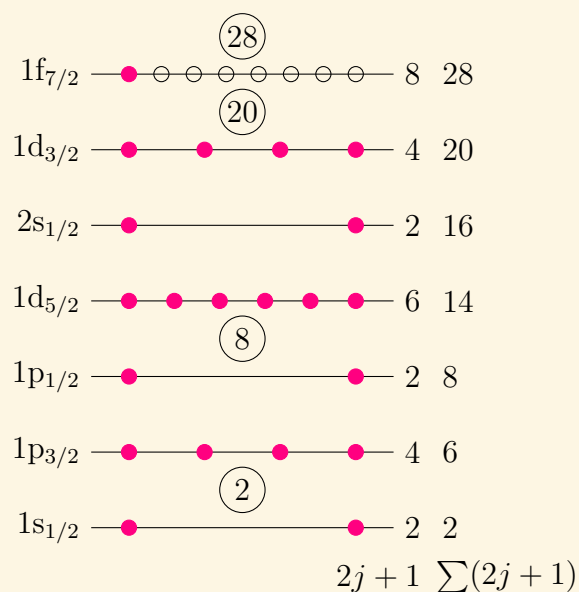


Figura 5: Llenado de niveles para el estado base de ^{41}Ca .

Así,

$$N: (1f_{7/2})^1 \implies \ell = 3,$$

$$\pi = (-1)^3 = -1,$$

$$J = \frac{7}{2},$$

$$J^\pi = \frac{7}{2}^-.$$

Comparando el valor de J con el valor experimental, se obtiene el mismo resultado, $J = \frac{7}{2}$.

- ^{56}Fe

Solución

El número de protones y neutrones es

$$Z: 26 \implies \text{Apareado},$$

$$N: 30 \implies \text{Apareado}.$$

Y sabemos que para núcleos par-par el espín nuclear total es igual a 0 con paridad positiva, *i.e.*,

$$J^\pi = 0^+.$$

Comparando con el valor de J registrado en [EasySpin](#) verificamos que se obtiene lo mismo.

Compare con los valores de J observados experimentalmente: <http://easyspin.org/documentation/isotopetable.html>

Problema 5

Determina el momento de inercia del núcleo de ^{170}Hf de acuerdo a la figura 6, un valor por cada energía y J^π o si deseas puedes hacer una gráfica J^π vs. E .

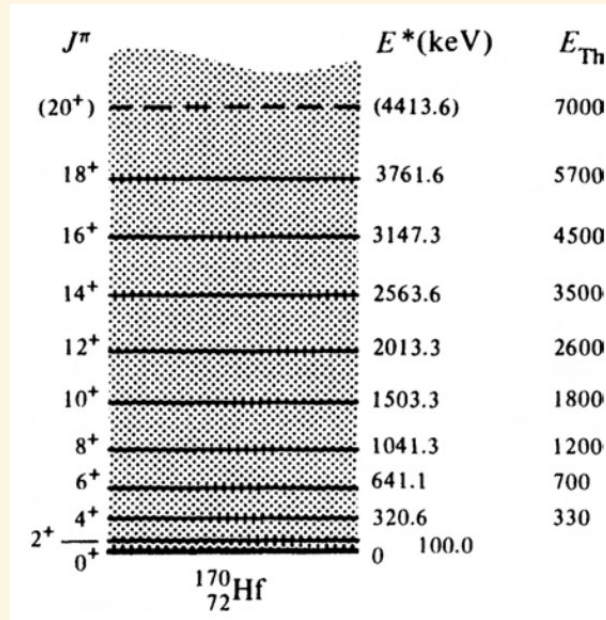


Figura 6: Espectro rotacional del núcleo deformado ^{170}Hf .

Solución

Sabemos que los eigenvalores de energía rotacionales están dados por

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1), \quad J = 0, 2, 4, \dots$$

Pero queremos conocer el momento de inercia \mathcal{I} , por lo que despejando obtenemos

$$\mathcal{I} = \frac{\hbar^2}{2E_J} J(J+1), \quad J = 0, 2, 4, \dots$$

donde $\hbar = 6.582\,119 \times 10^{-19} \text{ keV} \cdot \text{s}$.

De esta manera, podemos calcular el momento de inercia para cada valor de J y E_J de la figura 6.

J^π	Energía (keV)	\mathcal{I} (keV \cdot s ²)
2 ⁺	100	$1.299\,73 \times 10^{-38}$
4 ⁺	320.6	$1.351\,35 \times 10^{-38}$
6 ⁺	641.1	$1.419\,14 \times 10^{-38}$
8 ⁺	1041.3	$1.497\,81 \times 10^{-38}$
10 ⁺	1503.3	$1.585\,07 \times 10^{-38}$
12 ⁺	2013.3	$1.678\,49 \times 10^{-38}$
14 ⁺	2563.6	$1.774\,48 \times 10^{-38}$
16 ⁺	3147.3	$1.872\,11 \times 10^{-38}$
18 ⁺	3761.6	$1.969\,49 \times 10^{-38}$
20 ⁺	4413.6	$2.061\,38 \times 10^{-38}$

Tabla 2: Momentos totales de inercia con su respectiva energía y momento de inercia \mathcal{I} para el ^{170}Hf .

Graficando los valores de J^π vs. E_J y de \mathcal{I} vs. E_J a partir de los datos de la Tabla 2, obtenemos la figura 7.

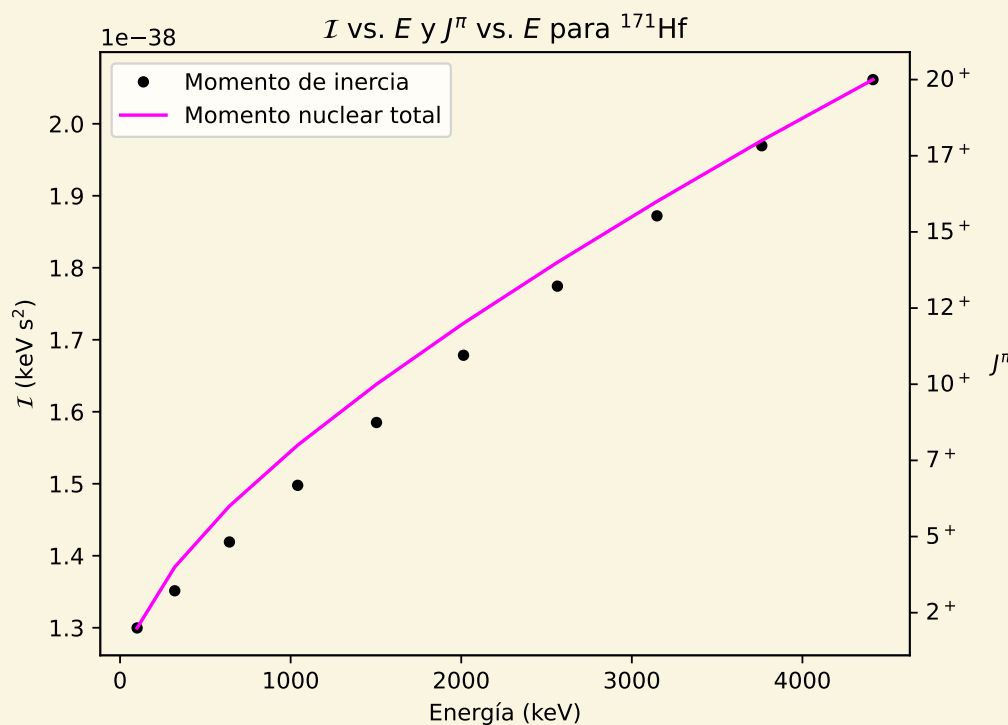


Figura 7: Gráfica de J^π vs. E_J y de \mathcal{I} vs. E_J para el ^{170}Hf

Como podemos observar, tanto el momento nuclear total J^π como el momento de inercia \mathcal{I} aumentan conforme aumenta la energía E_J .
