# Tarea 5

**Entrega**: 14 de noviembre de 2023

## Problema 1

Calcula la masa, radio y energía de enlace de los siguientes núcleos (los excesos de masa se encuentran en `https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2016/mass16.txt`):

## Solución 1

El exceso de masa está definido como

$$\delta(A,Z) = [M(A,Z) + A]\ \mathrm{keV}/c^2 \cdot c^2.$$

Resolviendo para la masa tenemos que

$$M(A,Z) = \frac{\delta(A,Z)}{c^2} + A, \tag{1.1}$$

con $[A] = \mathrm{keV}/c^2$.

Y para la energía de enlace tenemos que

$$B.E.(A,Z) = \delta(A,Z) - Z\delta(1,1) - (A-Z)\delta(1,0), \tag{1.2}$$

donde $\delta(1,1)$ es el exceso de masa del protón y $\delta(1,0)$ es el exceso de masa del neutrón.

Finalmente, para calcular el radio del núcleo nos fijamos en la siguiente expresión:

$$R = 1.2A^{1/3}\mathrm{fm}. \tag{1.3}$$

Usando (1.1) a (1.3) calculamos lo que se nos pide para cada uno de los núcleos.

- $^2$H (deuterio)

  Antes de poder calcular la masa debemos convertir $A$ de uma a $\mathrm{keV}/c^2$. Así,

$$A[\mathrm{keV}/c^2] = 931\,494.102\,\mathrm{keV}/c^2 A,$$

$$\implies A[\mathrm{keV}/c^2] = 2(931\,494.102\,\mathrm{keV}/c^2),$$

$$\boxed{A[\mathrm{keV}/c^2] = 1.862\,99{\times}10^6\,\mathrm{keV}/c^2}$$

Por lo que la masa del deuterio es

$$M(2,1) = 13\,135.721\,76\,\mathrm{keV}/c^2 + 1.862\,99{\times}10^6\,\mathrm{keV}/c^2,$$

$$\boxed{M(2,1) = 1.876\,12{\times}10^6\,\mathrm{keV}/c^2.}$$

Mientras que su energía de enlace es

$$\begin{aligned} B.E.(2,1) &= \delta(2,1) - 1\delta(1,1) - (2-1)\delta(1,0), \\ &= 13\,135.721\,76\,\mathrm{keV} - 7288.970\,61\,\mathrm{keV} - 8071.317\,13\,\mathrm{keV}, \end{aligned}$$

$$\boxed{B.E.(2,1) = -2224.57\,\mathrm{keV}.}$$

Finalmente, su radio es de

$$R = 1.2(2)^{1/3}\mathrm{fm},$$

$$\boxed{R = 1.511\,91\,\mathrm{fm}.}$$

- $^{14}$C (carbono 14)

  La masa para el $^{14}$C es de

$$\begin{aligned} M(14,6) &= \delta(14,6) + 14[\mathrm{keV}/c^2], \\ &= 3019.892\,78\,\mathrm{keV}/c^2 + 13.0409{\times}10^6\,\mathrm{keV}/c^2, \end{aligned}$$

$$\boxed{M(14,6) = 13.0439{\times}10^6\,\mathrm{keV}/c^2.}$$

  Y su energía de enlace de

$$B.E.(14,6) = \delta(14,6) - 6\delta(1,1) - 8\delta(1,0),$$

$$\boxed{B.E.(14,6) = -105\,284.4680\,\mathrm{keV}.}$$

  Mientras que su radio es de

$$R = 1.2(14)^{1/3}\mathrm{fm},$$

$$\boxed{R = 2.892\,17\,\mathrm{fm}.}$$

- $^{56}$Fe (hierro 56)

  La masa para el $^{56}$Fe es de

$$M(56,26) = \delta(56,26) + 56[\mathrm{keV}/c^2],$$
$$= -60\,607.082\,\mathrm{keV}/c^2 + 52.1637\times 10^6\,\mathrm{keV}/c^2,$$
$$\boxed{M(56,26) = 52.1031\times 10^6\,\mathrm{keV}/c^2.}$$

  Su energía de enlace de

$$B.E.(56,26) = \delta(56,26) - 26\delta(1,1) - 30\delta(1,0),$$
$$\boxed{B.E.(56,26) = -492\,259.8318\,\mathrm{keV}.}$$

  Y su radio de

$$R = 1.2(56)^{1/3}\mathrm{fm},$$
$$\boxed{R = 4.591\,03\,\mathrm{fm}.}$$

- $^{210}$Po (polonio 210)

  La masa del $^{210}$Po es de

$$M(210,84) = \delta(210,84) + 210[\mathrm{keV}/c^2],$$
$$= -15\,953.137\,\mathrm{keV}/c^2 + 195.614\times 10^6\,\mathrm{keV}/c^2,$$
$$\boxed{M(210,84) = 195.598\times 10^6\,\mathrm{keV}/c^2.}$$

  Su energía de enlace de

$$B.E.(210,84) = \delta(210,84) - 84\delta(1,1) - 126\delta(1,0),$$
$$\boxed{B.E.(210,84) = -1.645\,21\times 10^6\,\mathrm{keV}.}$$

  Y su radio de

$$R = 1.2(210)^{1/3}\mathrm{fm},$$
$$\boxed{R = 7.132\,71\,\mathrm{fm}.}$$

# Problema 2

A partir del modelo de la gota calcula las energías de enlace de los núcleos:

# Solución 2

La expresión para la energía de ligadura que se obtiene a partir del modelo de la gota está dada como:

$$B.E.(A,Z) = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \pm a_5 A^{-3/4}, \tag{2.1}$$

donde el último término es positivo si el núcleo es par-par, negativo si es impar-impar o cero en cualquier otro caso.

Notemos que podemos reescribir (2.1), ya que se nos pide calcular la energía de enlace para núcleos isóbaros, *i.e.*, $A = 76$. Así,

$$\begin{aligned} B.E.(76,Z) &= 76a_1 - 76^{2/3}a_2 - \frac{Z^2}{76^{1/3}}a_3 - \frac{(N-Z)^2}{76}a_4 \pm 76^{-3/4}a_5, \\ B.E.(76,Z) &= \left[876.571 - 0.169\,979Z^2 - 0.306\,579(N-Z)^2 - \pm 1.3209\right]\text{MeV}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $a_1 \approx 15.5\,\text{MeV}$, $a_2 \approx 16.8\,\text{MeV}$, $a_3 \approx 0.72\,\text{MeV}$, $a_4 \approx 23.3\,\text{MeV}$ y $a_5 \approx 34\,\text{MeV}$.

Por un lado, para los núcleos par-par ($^{76}$Ge, $^{76}$Se, $^{76}$Kr [Ver tabla]) el último término de (2.2) es positivo.

- $^{76}$Ge

  La energía de ligadura es de

  $$B.E.(76,32) = \left[876.571 - 0.169\,979(32)^2 - 0.306\,579(44-32)^2 + 1.3209\right]\text{MeV},$$

  $$\boxed{B.E.(76,32) = 659.686\,\text{MeV}.}$$

- $^{76}$Se

  La energía de ligadura es de

  $$B.E.(76,34) = \left[876.571 - 0.169\,979(34)^2 - 0.306\,579(42-34)^2 + 1.3209\right]\text{MeV},$$

  $$\boxed{B.E.(76,34) = 661.775\,\text{MeV}.}$$

- $^{76}$Kr

  La energía de ligadura es de

$$B.E.(76,36) = \left[876.571 - 0.169\,979(36)^2 - 0.306\,579(40-36)^2 + 1.3209\right]\,\text{MeV},$$

$$\boxed{B.E.(76,36) = 652.694\,\text{MeV}.}$$

Por el otro, para los núcleos impar-impar ($^{76}$Ga, $^{76}$As, $^{76}$Br [Ver tabla]) el último término de (2.2) es negativo.

- $^{76}$Ga

  La energía de ligadura es de

$$B.E.(76,31) = \left[876.571 - 0.169\,979(31)^2 - 0.306\,579(45-31)^2 - 1.3209\right]\,\text{MeV},$$

$$\boxed{B.E.(76,31) = 651.811\,\text{MeV}.}$$

- $^{76}$As

  La energía de ligadura es de

$$B.E.(76,33) = \left[876.571 - 0.169\,979(33)^2 - 0.306\,579(43-33)^2 - 1.3209\right]\,\text{MeV},$$

$$\boxed{B.E.(76,33) = 659.485\,\text{MeV}.}$$

- $^{76}$Br

  La energía de ligadura es de

$$B.E.(76,35) = \left[876.571 - 0.169\,979(35)^2 - 0.306\,579(41-35)^2 - 1.3209\right]\,\text{MeV},$$

$$\boxed{B.E.(76,35) = 655.989\,\text{MeV}.}$$

(parece mucho, pero en realidad pueden ahorrarse muchos cálculos ¿sí lo ven?). Grafiquen los valores de estas energías de enlace (esto será útil para la siguiente tarea).

Finalmente graficamos los resultados obtenidos.

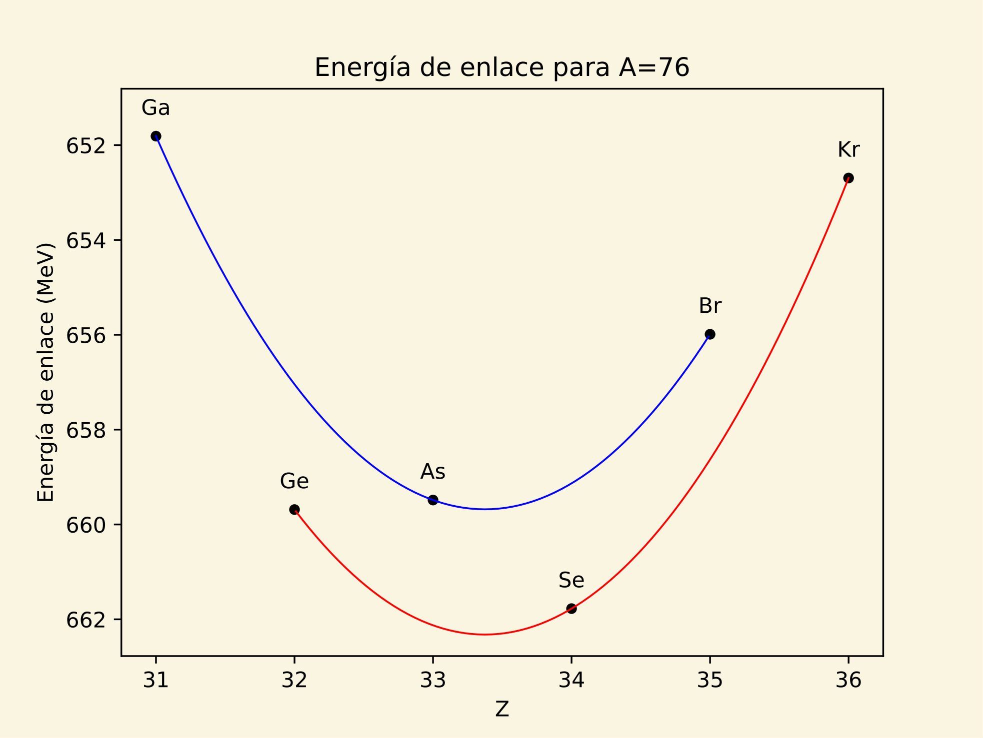


Figura 1: Gráfica de las energías de ligadura vs. $Z$ para los núcleos isóbaros de $A = 76$.

# Problema 3

¿Qué tipo de modelo es el gas de Fermi: colectivo o de partícula independiente? ¿Cuál es el principio a partir del cual se construye? Explica tu respuesta.

# Problema 4

A partir del modelo de capas prediga el momento angular nuclear y la paridad de los siguientes núcleos:

- $^{3}$He

## Solución 3

Tenemos que el número de protones y neutrones es:

$$
\begin{aligned}
&Z\colon 2 \implies \text{Apareado},\\
&N\colon 1.
\end{aligned}
$$

Así el llenado de capas de neutrones se ve como

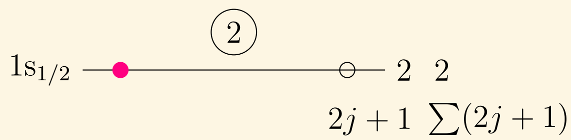


Figura 2: Llenado de niveles para el primer estado excitado de $^{3}$He.

Por lo que,

$$
\begin{aligned}
&N\colon (1s_{1/2})^1 \implies \ell = 0,\\
&\pi = (-1)^0 = +1,\\
&J = \tfrac{1}{2},\\
&\boxed{J^\pi = \tfrac{1}{2}^+.}
\end{aligned}
$$

Comparando con el valor experimental de $J$ que se encuentra en EasySpin notamos que se obtiene el mismo resultado, $J = \frac{1}{2}$.

- $^{15}$O

# Solución 4

El número de protones y neutrones es

$$
\begin{aligned}
Z &: 8 \implies \text{Apareado},\\
N &: 7.
\end{aligned}
$$

El llenado de capas se hará con los neutrones, tal que

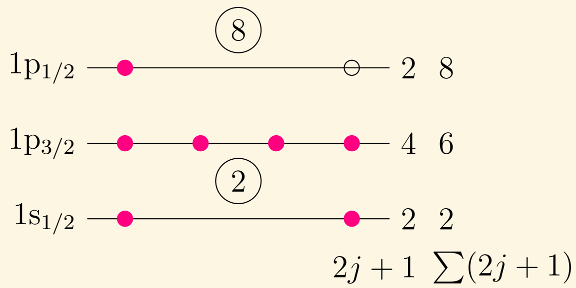


Figura 3: Llenado de niveles para el primer estado excitado de $^{15}$O.

Así,

$$
\begin{aligned}
N &: (1p_{1/2})^1 \implies \ell = 1,\\
\pi &= (-1)^1 = -1,\\
J &= \tfrac{1}{2},\\
&\boxed{J^\pi = \tfrac{1}{2}^-.}
\end{aligned}
$$

- $^{41}$Ca

## Solución 5

El número de protones y neutrones es

$$Z: 20 \implies \text{Apareado},$$
$$N: 21.$$

El llenado de capas se hará con los neutrones,

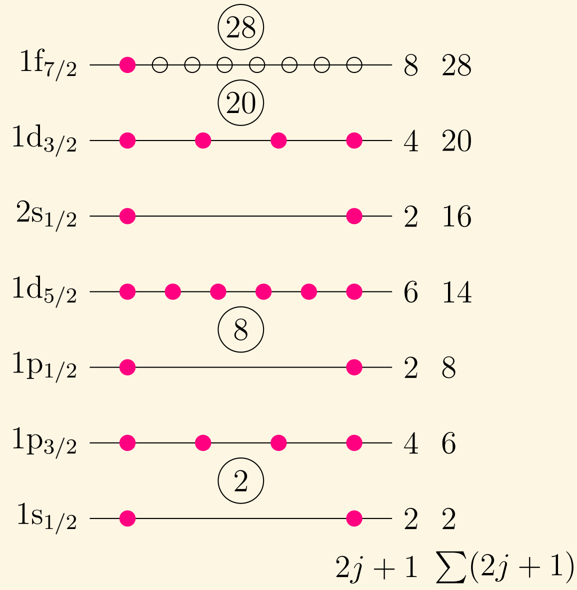


Figura 4: Llenado de niveles para el primer estado excitado de $^{41}$Ca.

Así,

$$N: (1f_{7/2})^1 \implies \ell = 3,$$
$$\pi = (-1)^3 = -1,$$
$$J = \tfrac{7}{2},$$
$$\boxed{J^\pi = \tfrac{7}{2}^-.}$$

Comparando el valor de $J$ con el valor experimental, se obtiene el mismo resultado, $J = \frac{7}{2}$.

- $^{56}$Fe

## Solución 6

El número de protones y neutrones es

$$Z: 26 \implies \text{Apareado},$$
$$N: 30 \implies \text{Apareado}.$$

Y sabemos que para núcleos par-par el espín nuclear total es igual a 0 con paridad positiva, *i.e.*,

$$\boxed{J^\pi = 0^+.}$$

Comparando con el valor de $J$ registrado en EasySpin verificamos que se obtiene lo mismo.

Compare con los valores de $J$ observados experimentalmente: `http://easyspin.org/documentation/isotopetable.html`

# Problema 5

Determina el momento de inercia del núcleo de $^{170}$Hf de acuerdo a la figura 5, un valor por cada energía y $J^\pi$ o si deseas puedes hacer una gráfica $J^\pi$ vs. $E$.

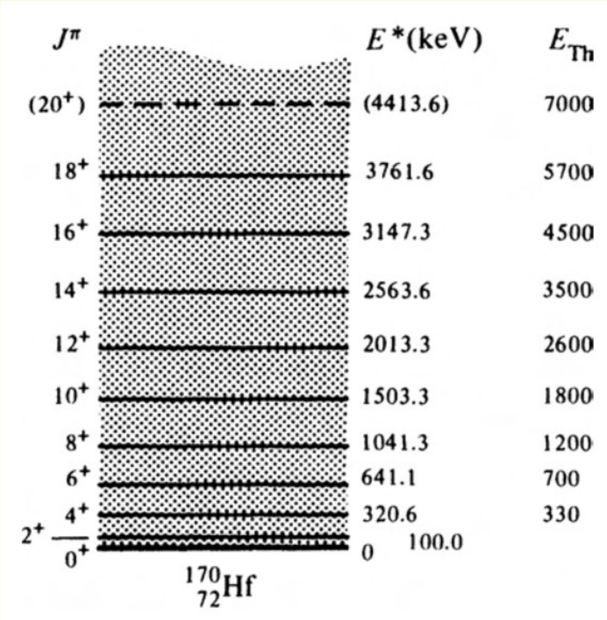


Figura 5: Espectro rotacional del núcleo deformado $^{170}$Hf.