Tarea-Práctica 8.
Métodos de solución numérica para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales

Fecha de entrega: **11 de diciembre de 2024**

1. **El modelo de Lotka-Volterra (*predador-presa*)**

   Como vimos en clase, un caso particular del *modelo de Lotka-Volterra* son un las ecuaciones de interacciones *depredador-presa* entre especies dos biológicas. Sean las variables x e y proporcionales al tamaño de las poblaciones de dos especies, *presas* (pueden ser "conejos") y *depredadores* (pueden ser "zorros").

   Se puede pensar que x y y son la población en miles, digamos, de modo que $x = 2$ significa que hay 2000 conejos. Estrictamente, los únicos valores permitidos de x y y serían múltiplos de 0.001, ya que sólo se puede tener números enteros de conejos o zorros. Sin embargo tratar x e y como números reales continuos, es una aproximación decente siempre que ninguno se acerque mucho a cero.

   Así, en el modelo de Lotka-Volterra (*predador-presa*), los conejos se reproducen a un ritmo proporcional a su población, pero los zorros se los comen a un ritmo proporcional tanto a su propia población como a la población de zorros, es decir:

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta xy,$$

   donde α y β son constantes. Al mismo tiempo, los zorros se reproducen a un ritmo proporcional al ritmo al que comen conejos, porque necesitan alimento para crecer y reproducirse, pero también mueren de viejos a un ritmo proporcional a su propia población:

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma xy - \delta y,$$

   donde γ y δ también son constantes.

   (a) Escribe un programa para resolver estas ecuaciones usando
      i. el método de Euler y
      ii. el método de Runge-Kutta de cuarto orden

      para el caso $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0.5$ y $\delta = 2$, comenzando desde la condición inicial $x = y = 2$.

(b) Haz que el programa realice gráficas que muestren

i. el espacio fase del sistema ((*i.e.* x vs y) y también

ii. en un gráfico diferente x e y como función del tiempo en los mismos ejes desde $t = 0$ hasta $t = 30$.

(c) Describe con tus propias palabras lo que está sucediendo en el sistema, en términos de presas y depredadores.

(d) Describe brevemente cómo se compara resolver el sistema con el método de Euler y el de Runge-Kutta.

2. **El péndulo doble.**

Un *péndulo simple* consiste en un brazo de longitud l que sostiene una masa m.

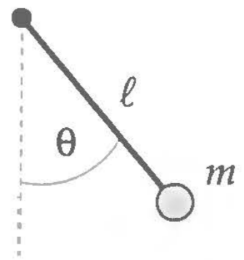


Figure 1: Péndulo simple

En términos del ángulo θ de desplazamiento del brazo respecto de la vertical, la aceleración de la masa es $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ en la dirección tangencial.

Mientras tanto, la fuerza sobre la masa (el peso) es en dirección vertical hacia abajo y con magnitud mg, donde $g = 9.81ms^{-2}$ es la aceleración debida a la gravedad y por simplicidad ignoraremos la fricción asumiendo que el brazo no tiene masa. La componente de esta fuerza en la dirección tangencial es $mgsen\theta$, siempre hacia el punto de reposo en $\theta = 0$.

Así, la segunda ley de Newton nos da una ecuación de movimiento para el péndulo de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}sen\theta$$

Esta ecuación es no lineal y aún no es posible resolverla analíticamente. Sin embargo, es posible convertir esta ecuación de segundo orden, en un sistema de dos ecuaciones de primer orden (*i.e.* dos dimensiones) y resolverlo numéricamente, usando los métodos que vimos en clase.

$$\dot{\theta} = \omega, \qquad \dot{\omega} = -\frac{g}{l} sen\theta$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = f((\theta, \omega), t)$$

Ahora bien, el *péndulo doble*, consta de un péndulo normal del que cuelga otro péndulo en su extremo. Y al igual que en el péndulo simple anterior, ignoramos la fricción, suponemos que ambos péndulos tienen pesas de la misma masa m y brazos sin masa de la misma longitud ℓ.

La configuración del sistema se ve como en la figura 2. En el que la posición de los brazos en cualquier momento está especificada únicamente por los dos ángulos θ_1 y θ_2.

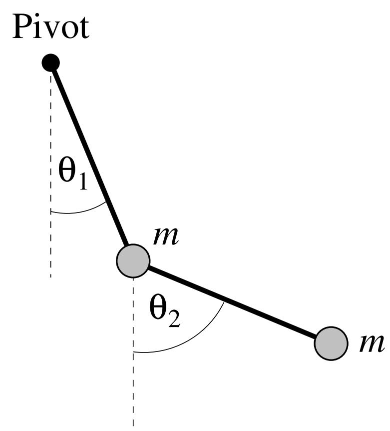


Figure 2: Un péndulo doble

El movimiento péndulo simple (aunque es un sistema no lineal), es perfectamente regular y periódico. Sin embargo, el péndulo doble es completamente lo contrario, pues su movimiento es caótico e impredecible.

Las ecuaciones de movimiento para los ángulos se pueden derivar utilizando el formalismo Lagrangiano (que puedes revisar en el Apéndice A).

De donde obtienen las siguientes cuatro ecuaciones de primer orden que definen el movimiento del péndulo doble:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2,$$

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\omega_1^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2\omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (g/\ell)\big[\sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 3\sin\theta_1\big]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)},$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{4\omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2(g/\ell)\big[\sin(2\theta_1 - \theta_2) - \sin\theta_2\big]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}.$$

(a) Deriva una expresión para la energía total $E = T + V$ del sistema en términos de las variables θ_1, θ_2, ω_1 y ω_2, más las constantes g, ℓ y m.

(b) Escribe un programa usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para resolver las ecuaciones de movimiento para el caso donde $\ell = 40\,\text{cm}$, con las condiciones iniciales $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ y $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Usa tu programa para calcular la energía total del sistema suponiendo que la masa de las pesas es 1 kg cada una, y haz una gráfica de la energía en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 100$ segundos.

(c) Muestra en una sola figura

   i. la gráfica de la proyección del espacio fase del sistema (en 3 dimensiones) para θ_1, θ_2, vs ω_1 para dichas condiciones iniciales,

   ii. la gráfica de la proyección del espacio fase del sistema para θ_1, θ_2, vs ω_2 (considera que el espacio fase es de 4 dimensiones) y

   iii. en un gráfico diferente θ_1, θ_2, ω_1 y ω_2 como función del tiempo en los mismos ejes.

Debido a la conservación de la energía, la energía total debería ser constante en el tiempo (en realidad debería ser cero para este conjunto particular de condiciones iniciales), pero encontrarás que no es perfectamente constante debido a la naturaleza aproximada de la solución de la ecuación diferencial.

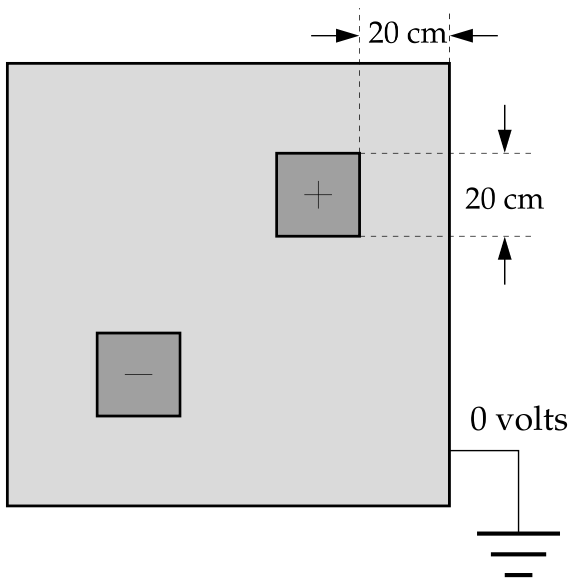
Elije un valor adecuado del tamaño del paso h para garantizar que la variación de energía sea inferior a 10^{-5}*Jules* en el transcurso del cálculo.

3. ***Ecuación de Poisson* para un potencial electrostático**

La *ecuación de Poisson* gobierna el potencial electrostático en presencia de una densidad de carga ρ:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Aquí ϵ_0 es la permitividad del espacio vacío (asumiendo que estamos en el vacío). Ahora, considera el siguiente sistema que consiste en una caja cuadrada de 1 metro de lado, con paredes conductoras conectadas a tierra a 0 volts:



Dentro de la caja hay dos cargas cuadradas de 20 cm de lado, una positiva y otra negativa; colocadas a 20 cm de las paredes de la caja. La densidad de carga de ambas es uniforme y tiene un valor de $\pm 1 cm^{-2}$ respectivamente. Para simplificar, considere el sistema en dos dimensiones.

(a) Escribe un programa para calcular el potencial ϕ en una cuadrícula de puntos dentro de la caja usando el *método de relajación*

(b) Realiza un gráfico de densidad del resultado.

Trabaja en unidades donde $\epsilon_0 = 1$ y continúa la iteración hasta que tu solución para el potencial eléctrico cambie en menos de $10^{-6} V$ por paso en cada punto de la cuadrícula.

Apéndice A Derivación de ecuaciones de movimiento del péndulo doble.

Las alturas de los dos pesas, medidas desde el nivel del pivote, son

$$h_1 = -\ell \cos\theta_1, \qquad h_2 = -\ell(\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

entonces la energía potencial del sistema es:

$$V = mgh_1 + mgh_2 = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Las velocidades (lineales) de las dos pesas están dadas por:

$$v_1 = \ell\dot{\theta}_1, \qquad v_2^2 = \ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right],$$

donde $\dot{\theta}$ significa la derivada de θ con respecto al tiempo t. (Si no ves de dónde viene la segunda ecuación de velocidad, es un buen ejercicio que la derives tu mismo de la geometría del péndulo). Ahora la energía cinética total es:

$$T = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = m\ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right],$$

Y el Lagrangiano del sistema es:

$$\mathscr{L} = T - V = m\ell^2\left[\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Así entonces las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta_1}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta_2},$$

que para este caso dan:

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\frac{g}{\ell} \sin\theta_1 = 0,$$
$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin\theta_2 = 0,$$

donde la masa m se ha cancelado.

Estas son ecuaciones de segundo orden, pero podemos convertirlas a de primer orden mediante el método habitual, definiendo dos nuevas variables, ω_1 y ω_2, así:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2.$$

En términos de estas variables, nuestras ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$2\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\frac{g}{\ell} \sin\theta_1 = 0,$$
$$\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin\theta_2 = 0.$$

Finalmente tenemos que reordenar los términos en la forma estándar; con una única derivada en el lado izquierdo de cada una, lo que da:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\omega_1^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2\omega_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (g/\ell)\big[\sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 3\sin\theta_1\big]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)},$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{4\omega_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \omega_2^2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2) + 2(g/\ell)\big[\sin(2\theta_1 - \theta_2) - \sin\theta_2\big]}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}.$$

(Este último paso es bastante complicado e implica algunas identidades trigonométricas. Si no estás seguro de cómo se realizó el cálculo, puede que te resulte útil realizar la derivación por ti mismo).

Estas dos ecuaciones, junto con las ecuaciones $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ y $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, nos dan cuatro ecuaciones de primer orden que definen el movimiento del péndulo doble.