

Mecánica Cuántica 2026-1

Tarea 4

EXPLICANDO CON TODO LUJO DE DETALLE cada paso para encontrar la solución, resuelva los siguientes problemas.

- Para llevar control de los problemas entregados, cada problema se entrega por separado en CLASSROOM.
- En la entrega en físico los problemas pueden ir juntos.

P10 (10pts) Considerando un problema con solo una dimension espacial, muestre que

- El operador $\frac{d}{dx}$ no es un operador hermiteano.
- El operador de momento es un operador hermiteano, es decir

$$\langle \hat{p} \rangle^* = \langle \hat{p} \rangle.$$

P11 (20 pts) Si en mecanica usted tiene un producto de la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{p}$$

donde \vec{A} es el potencial vector y \vec{p} el momentum de una partícula.

- Muestre que el operador cuántico definido como

$$\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{\vec{p}}$$

no es un operador hermiteano.

- Muestre que el operador cuántico definido como

$$\frac{1}{2} \left(\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{\vec{p}} + \hat{\vec{p}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right)$$

si es un operador hermiteano.

P12 (30 pts) En clase vimos que al trabajar con el oscilador armónico cuántico, la ecuacion de Schrödinger independiente del tiempo puede reescribirse como

$$\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$$

donde

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

con $\hat{a}^\dagger \equiv -\frac{d}{du} + u$ y $\hat{a} \equiv \frac{d}{du} + u$, los operadores de ascenso y descenso de energía, respectivamente. Muestre que

- Los operadores de ascenso y descenso no son operadores hermiteanos.
- Que la acción del operador hacia la derecha

$$\hat{a} |\varphi\rangle,$$

baja en un cuanto de energía, es decir

$$\hat{H}\hat{a} |\varphi\rangle = \hbar\omega(\mathcal{E} - 1) |\varphi\rangle,$$

y que al actuar hacia la izquierda el mismo operador, éste aumenta en un cuanto la energía, es decir

$$\left(\langle \varphi | \hat{a} \right) \hat{H} = \left(\langle \varphi | \hat{a} \right) \hbar\omega(\mathcal{E} + 1).$$