Tarea 1

Entrega: 22 de agosto de 2022

Problema 1

Durante el curso usaremos unidades naturales, en las que $c = 1$ y medimos tiempo y distancia en metros. Para que te acostumbres a esto en este problema harás algunas conversiones entre unidades naturales y el SI. Aunque parezca a primera vista un simple ejercicio mecánico, recuerda que $c = 1$ vino de entender que el espacio y el tiempo son la misma cosas física, así que posiblemente escribir otras cantidades físicas en unidades naturales nos revele más de lo que pensamos.

a) Transforma las siguientes cantidades del SI a unidades naturales. Expresas tus resultados en términos de kg y m.

1. Energía $E = 5\,\mathrm{J}$ (este es particularmente interesante, aquí hay implícito otro cambio total de paradigma).

   Solución

   Sabemos que en las unidades naturales $c = 1$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
E = 5\,\mathrm{J} &= \frac{5\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{1^2}, \\
&= \frac{5\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{9\times 10^{16}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}}, \\
&\boxed{E = 5.56\times 10^{-17}\,\mathrm{kg}}
\end{aligned}
$$

2. Momento $p = 3\times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ (compara con tu resultado anterior, qué curioso).

   Solución

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{3\times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}{1}, \\
&= \frac{3\times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}{3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}, \\
&\boxed{p = 10^{-4}\,\mathrm{kg}}
\end{aligned}
$$

3. Densidad de masa $\rho = 10\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Solución

Puesto que que la densidad ya está expresada en términos de kg y m, no es necesario transformar la cantidad a unidades naturales. Por lo tanto,

$$\boxed{\rho = 10\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}$$

b) Transforma las siguientes cantidades de unidades naturales al SI.

1. Velocidad $v = 10^{-2}$ (siempre hablaremos de velocidades entre 0 y 1, así que es importante imaginarse cuál es la magnitud de estas en unidades más humanas).

Solución

$$v = 10^{-2} \cdot 1 = 10^{-2}(3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}),$$

$$\boxed{v = 3 \times 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

2. Presión $P = 10^{19}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Solución

$$\begin{aligned} P &= 10^{19}\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 1^{2}, \\ &= 10^{19}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}(9 \times 10^{16}\,\mathrm{m^{2}\,s^{-2}}), \end{aligned}$$

$$\boxed{P = 9 \times 10^{35}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{2}}}$$

3. Densidad de energía $U = 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ (las mismas unidades que la presión, qué raro).

Solución

$$\begin{aligned} U &= 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 1^{2}, \\ &= 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}(9 \times 10^{16}\,\mathrm{m^{2}\,s^{-2}}), \end{aligned}$$

$$\boxed{U = 9 \times 10^{16}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^{3}}}$$

c) Dos de las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctrico y magnético. En el vacío estas son

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{1}$$

¿Cómo se ven estas ecuaciones escritas en unidades naturales? ¿Cuál es la relación entre las unidades de $\vec{\boldsymbol{E}}$ y las de $\vec{\boldsymbol{B}}$?

Problema 2

Considera dos sistemas de referencia inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, tal que $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad v en la dirección positiva del eje x respecto a $\mathcal{O}$ y el origen de ambos sistemas es el mismo evento. En clase pintamos el diagrama de espacio-tiempo desde la perspectiva de $\mathcal{O}$ y localizamos en éste los ejes de $\mathcal{O}'$. En este problema encontrarás los ejes de $\mathcal{O}$ en el diagrama de $\mathcal{O}'$.

a) Pinta la línea de mundo de $\mathcal{O}$ en el diagrama de $\mathcal{O}'$ indicado la inclinación de ésta en términos del ángulo θ.

b) Localiza los ejes t y x en el diagrama. No hace falta que utilices rayos de luz como hicimos en clase, usa el hecho de que la inclinación de ambos debe estar dada en términos del ángulo θ (aunque no es mala idea hacerlo para corroborar tu respuesta).

c) Elige dos eventos arbitrarios que ocurran a $t = 0$ y márcalos en el diagrama de $\mathcal{O}'$. ¿Son estos eventos simultáneos para $\mathcal{O}'$?

d) Pinta una línea de $t = \text{cte}$ (que no sea $t = 0$) en el diagrama de $\mathcal{O}'$.

e) Si $v = 10^{-2}$, ¿cuál es el valor de θ?

Problema 3

En este problema pintarás algunas cosas en un diagrama de un espacio-tiempo $2+1$-dimensional. Aunque no lo usaremos mucho a lo largo del curso, conviene que tengas una idea de cómo debe hacerse. Dado que esto involucra dibujar un espacio de tres dimensiones en papel, además de tus dibujos agrega descripciones detalladas de lo que estás mostrando. También puede ser útil que muestres el cómo se ven las cosas desde una proyección a algún plano en particular.

Considera así dos observadores inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ en un espacio-tiempo $2+1$-dimensional. Sus sistemas de coordenadas tienen el mismo origen (tanto temporal como espacial), de forma tal que $\mathcal{O}'$ se mueve respecto a $\mathcal{O}$ en la dirección positiva del eje x (es decir con velocidad $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\mathbf{x}}$). Los ejes espaciales de ambos sistemas están alineados, es decir, no hay ninguna rotación de por medio entre ambos. En el diagrama de $\mathcal{O}$ (no necesariamente el mismo dibujo, si te parece que esta muy saturado haz varios):

a) Pinta la línea de mundo de $\mathcal{O}'$. ¿El eje t' está contenido en algún plano importante?

b) Pinta el eje x' argumentado con la construcción que hicimos en clase (no es necesario que la repitas paso a paso) y usando el hecho de que los ejes espaciales deben estar alineados según la convención que dimos arriba. ¿En qué plano están contenidos los ejes t' y x'?

c) Dibuja la línea de mundo de un rayo de luz que va desde el eje t' a cierto tiempo $t' = -a$ hasta la parte negativa del eje y. Luego dibuja la línea de mundo de otro rayo de luz que va desde la parte negativa del eje y a $t = 0$ y llega al eje t' a $t' = a$. ¿Estas líneas se intersectan? Si la respuesta es afirmativa, eso significa que el evento de la intersección es simultáneo con el origen según $\mathcal{O}'$.

d) Usa tu resultado de c) para dibujar el eje y' usando el hecho de que los ejes espaciales deben estar alineados según la convención que dimos arriba (pintar la proyección del plano $x'y'$ sobre el plano xy puede serte útil para entender mejor esto).

e) Dado que estamos en $2 + 1$ dimensiones, una ecuación del tipo $t' = \text{cte}$ describe a un plano, así que ahora tenemos planos de simultaneidad. Pinta un plano de simultaneidad de $\mathcal{O}'$ (que no sea el $x'y'$).

Esto ya no es parte del ejercicio, pero puede serte útil que pintes (o imagines, el dibujo ciertamente es complicado por la perspectiva) el cómo cambiarían tus respuestas anteriores si la velocidad de $\mathcal{O}'$ respecto a $\mathcal{O}$ fuera $\vec{\boldsymbol{v}} = v(\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}})$.