Tarea 1

Entrega: 25 de agosto de 2022

Problema 1

Durante el curso usaremos unidades naturales, en las que $c = 1$ y medimos tiempo y distancia en metros. Para que te acostumbres a esto en este problema harás algunas conversiones entre unidades naturales y el SI. Aunque parezca a primera vista un simple ejercicio mecánico, recuerda que $c = 1$ vino de entender que el espacio y el tiempo son la misma cosas física, así que posiblemente escribir otras cantidades físicas en unidades naturales nos revele más de lo que pensamos.

a) Transforma las siguientes cantidades del SI a unidades naturales. Expresas tus resultados en términos de kg y m.

1. Energía $E = 5\,\mathrm{J}$ (este es particularmente interesante, aquí hay implícito otro cambio total de paradigma).

   Solución

   Sabemos que en las unidades naturales $c = 1$. Entonces,

$$E = 5\,\mathrm{J} = \frac{5\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{1^2},$$

$$= \frac{5\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}}{9 \times 10^{16}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}},$$

$$\boxed{E = 5.56 \times 10^{-17}\,\mathrm{kg}}$$

2. Momento $p = 3 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ (compara con tu resultado anterior, qué curioso).

   Solución

$$p = \frac{3 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}{1},$$

$$= \frac{3 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}},$$

$$\boxed{p = 10^{-4}\,\mathrm{kg}}$$

3. Densidad de masa $\rho = 10\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Solución

Puesto que que la densidad ya está expresada en términos de kg y m, no es necesario transformar la cantidad a unidades naturales. Por lo tanto,

$$\boxed{\rho = 10\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}$$

b) Transforma las siguientes cantidades de unidades naturales al SI.

1. Velocidad $v = 10^{-2}$ (siempre hablaremos de velocidades entre 0 y 1, así que es importante imaginarse cuál es la magnitud de estas en unidades más humanas).

Solución

$$v = 10^{-2} \cdot 1 = 10^{-2}(3 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}),$$

$$\boxed{v = 3 \times 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

2. Presión $P = 10^{19}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Solución

$$\begin{aligned} P &= 10^{19}\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 1^2, \\ &= 10^{19}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}(9 \times 10^{16}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}), \end{aligned}$$

$$\boxed{P = 9 \times 10^{35}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}}$$

3. Densidad de energía $U = 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ (las mismas unidades que la presión, qué raro).

Solución

$$\begin{aligned} U &= 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 1^2, \\ &= 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}(9 \times 10^{16}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}), \end{aligned}$$

$$\boxed{U = 9 \times 10^{16}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}}$$

c) Dos de las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctrico y magnético. En el vacío estas son

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

¿Cómo se ven estas ecuaciones escritas en unidades naturales? ¿Cuál es la relación entre las unidades de $\vec{\boldsymbol{E}}$ y las de $\vec{\boldsymbol{B}}$?

Solución

Queremos transformar las ecuaciones de Maxwell asociada a los campos eléctrico y magnético a unidades naturales, por lo que debemos multiplicar por alguno de nuestro factores de conversión, pero añadiendo $1 = \varepsilon_0$ y hacer (*una especie*) de análisis dimensional; para ello consideraremos lo siguiente:

$$T = [T] = \frac{\mathrm{kg\,A}}{\mathrm{s}^2}, \tag{1}$$

$$E = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] = \frac{\mathrm{m\,kg\,A}}{\mathrm{s}^2}, \tag{2}$$

$$c = [c] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{3}$$

$$G = [G] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2},$$

$$G^{1/2} = [G^{1/2}] = \frac{\mathrm{m}^{3/2}}{\mathrm{kg}^{0.5}\,\mathrm{s}}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_0 = [\varepsilon_0] = \frac{\mathrm{s}^4\,\mathrm{A}^2}{\mathrm{kg\,m}^3},$$

$$\varepsilon_0{}^{1/2} = [\varepsilon_0{}^{1/2}] = \frac{\mathrm{s}^2\,\mathrm{A}}{\mathrm{kg}^{0.5}\,\mathrm{m}^{1.5}}, \tag{5}$$

donde T son las unidades del campo magnético, E las unidades del campo eléctrico, c las unidades de la velocidad de la luz, $G^{1/2}$ las unidades de la raíz cuadrada de la constate de gravitación universal y $\varepsilon_0{}^{1/2}$ las unidades de la raíz cuadrada de la constante de permitividad en el vacío.

Así,

- Ecuación de Faraday

  Realizando el "análisis dimensional" de la multiplicación de las ecs. (3)–(5) por la ec. (1), tenemos que en unidades naturales el campo magnético está expresado en m^{-1}. Por lo tanto,

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -c^{-1}G^{1/2}\varepsilon_0{}^{1/2}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}}$$

- Ecuación de Ampere

  Análogamente, el factor por el que debemos multiplicar la ec. (2) es el dado por las ecs. (4) y (5), tal que,

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}} = c^{-2} G^{1/2} {\varepsilon_0}^{1/2} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}}$$

Notemos entonces que $[\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}}]$ y $[\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}]$ tienen dimensión igual a $[L^{-1}]$.

Respondiendo la segunda pregunta, no hay una relación *per se* entre las unidades de $\vec{\boldsymbol{E}}$ y las de $\vec{\boldsymbol{B}}$, ya que en unidades naturales tienen las mismas unidades. Es decir, la diferencia de unidades con la que habitualmente lidiamos se debe al sistema de unidades con el que estamos trabajando, **e.g.**, SI, CGS, etc.

Problema 2

Considera dos sistemas de referencia inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, tal que $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad v en la dirección positiva del eje x respecto a $\mathcal{O}$ y el origen de ambos sistemas es el mismo evento. En clase pintamos el diagrama de espacio-tiempo desde la perspectiva de $\mathcal{O}$ y localizamos en éste los ejes de $\mathcal{O}'$. En este problema encontrarás los ejes de $\mathcal{O}$ en el diagrama de $\mathcal{O}'$.

a) Pinta la línea de mundo de $\mathcal{O}$ en el diagrama de $\mathcal{O}'$ indicado la inclinación de ésta en términos del ángulo θ.

Solución

Puesto que ahora nos encontramos "parados" en el sistema del observador $\mathcal{O}'$, observamos que $\mathcal{O}$ se está alejando con una velocidad $-v$, por lo cual su línea de mundo queda como se muestra en la fig. 1.

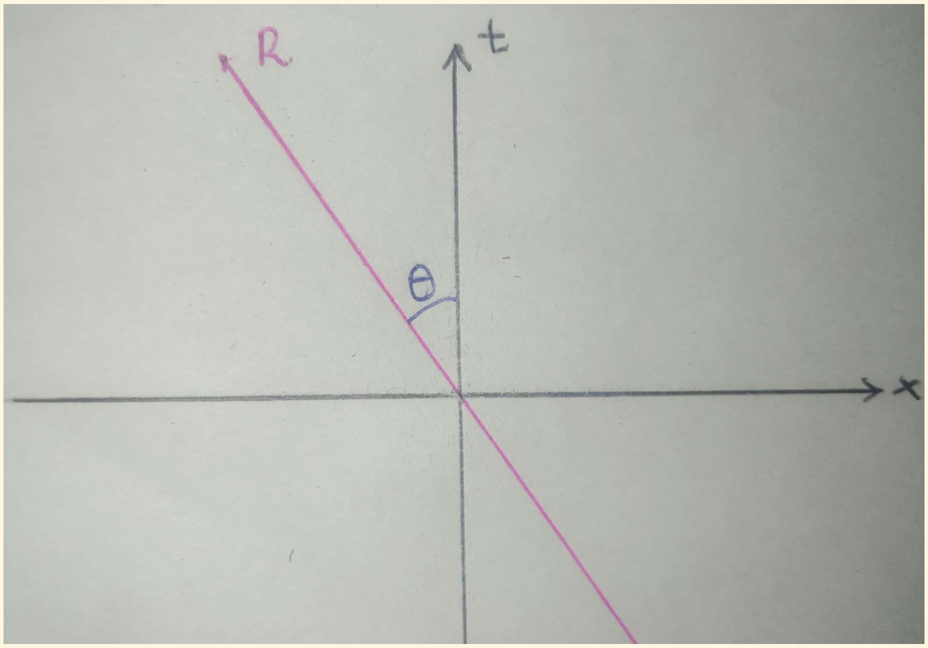

Figura 1: Línea de mundo del observador $\mathcal{O}$ en términos de del ángulo θ.

De esta manera, la ecuación de la línea de mundo, cuando $x = 0$ es el eje t, está dada como

$$x = -vt.$$

Entonces, la inclinación de ésta es $\tan\theta = -v$, por lo que se la ecuación de la línea de mundo queda como:

$$\boxed{x = \theta \cdot t}$$

Donde θ es

$$\theta = -\arctan(v) \tag{6}$$

b) Localiza los ejes t y x en el diagrama. No hace falta que utilices rayos de luz como hicimos en clase, usa el hecho de que la inclinación de ambos debe estar dada en términos del ángulo θ (aunque no es mala idea hacerlo para corroborar tu respuesta).

Solución

Sabemos que el ángulo entre t y t' y entre x y x' debe ser el mismo, entonce el eje x forma un ángulo θ con el eje x' como se muestra en la figura siguiente:

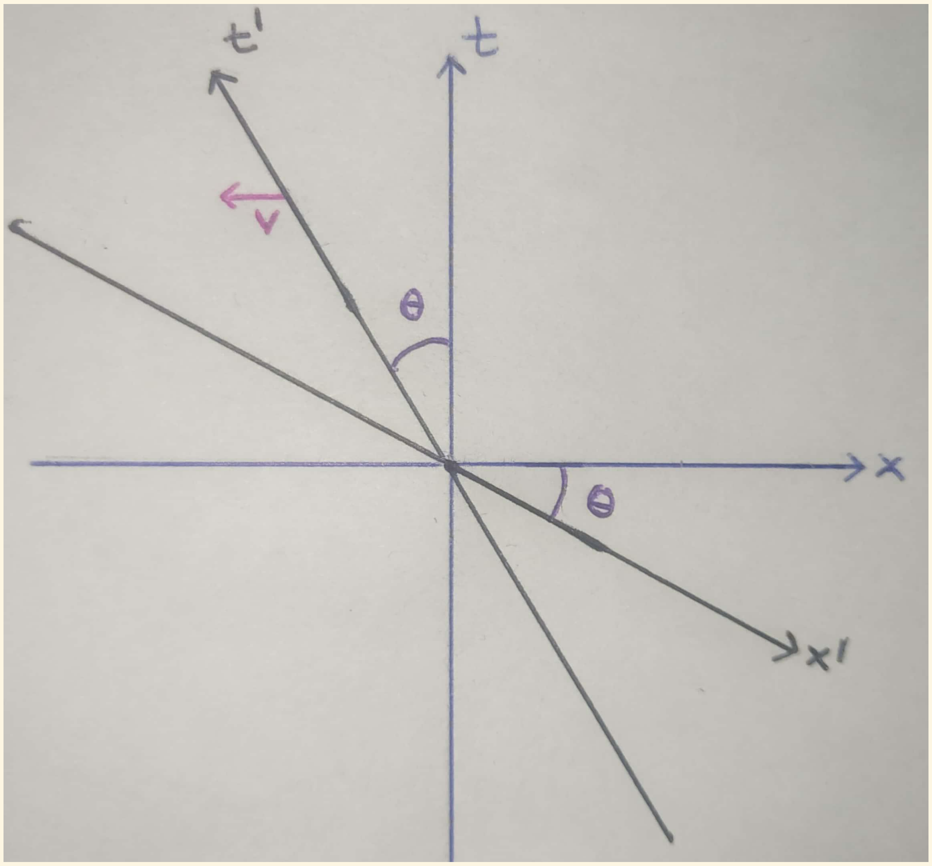

Figura 2: Diagrama espacio-tiempo de $\mathcal{O}$ desde la perspectiva de $\mathcal{O}'$.

c) Elige dos eventos arbitrarios que ocurran a $t = 0$ y márcalos en el diagrama de $\mathcal{O}'$. ¿Son estos eventos simultáneos para $\mathcal{O}'$?

Solución

Sean los eventos A y B con coordenadas $(0, x_A)$ y $(0, x_B)$, respectivamente. Es decir, estos eventos ocurren simultáneamente al tiempo $t = 0$.

Ya que queremos determinar si los eventos ocurren simultáneamente para $\mathcal{O}'$, debemos proyectar los eventos A y B sobre el eje t' en forma paralela al eje x'.

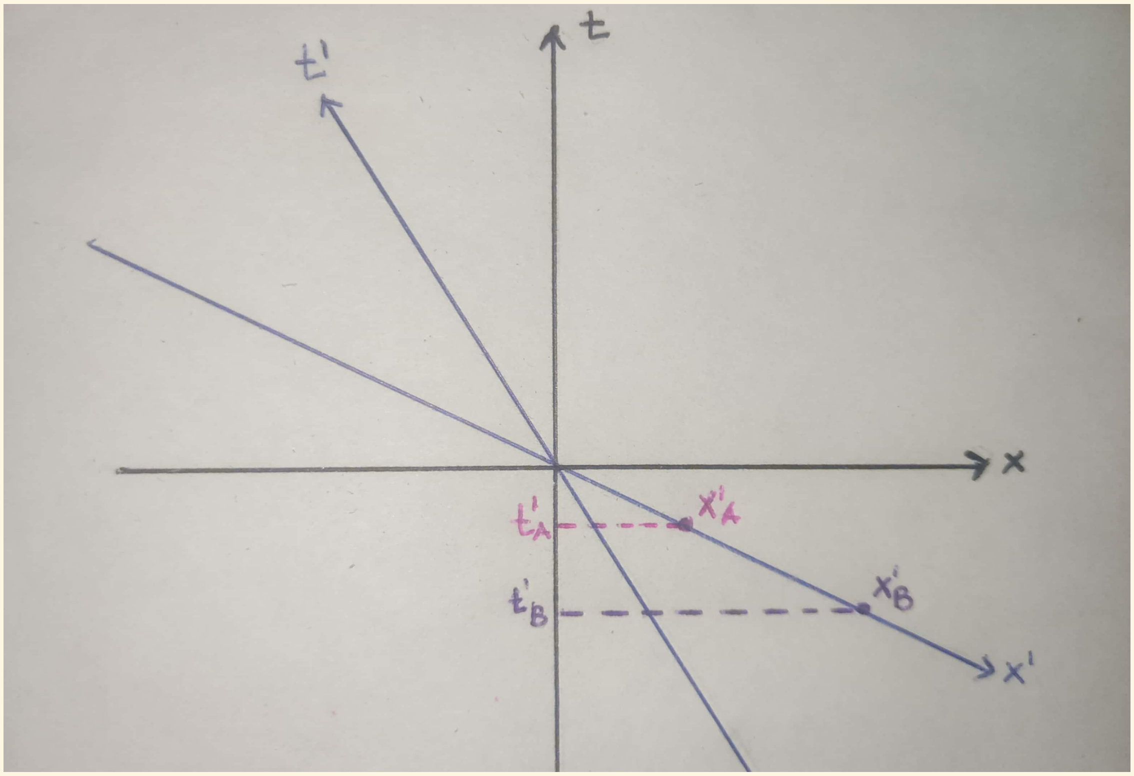

Figura 3: Los eventos A y B son simultáneos en el sistema de referencia del observador $\mathcal{O}$, pero no lo son en el de $\mathcal{O}'$.

Para estos eventos encontramos que el evento B ocurre antes que el A, por lo que estos no son simultáneos para $\mathcal{O}'$.

d) Pinta una línea de $t = \text{cte}$ (que no sea $t = 0$) en el diagrama de $\mathcal{O}'$.

Solución

La línea correspondiente a $t = \text{cte}$ no es único, sino que existen “infinitas“. Esto se puede ver en la fig. 4, donde cada línea representa el conjunto de todos los elementos que ocurren a $t = \text{cte}$.

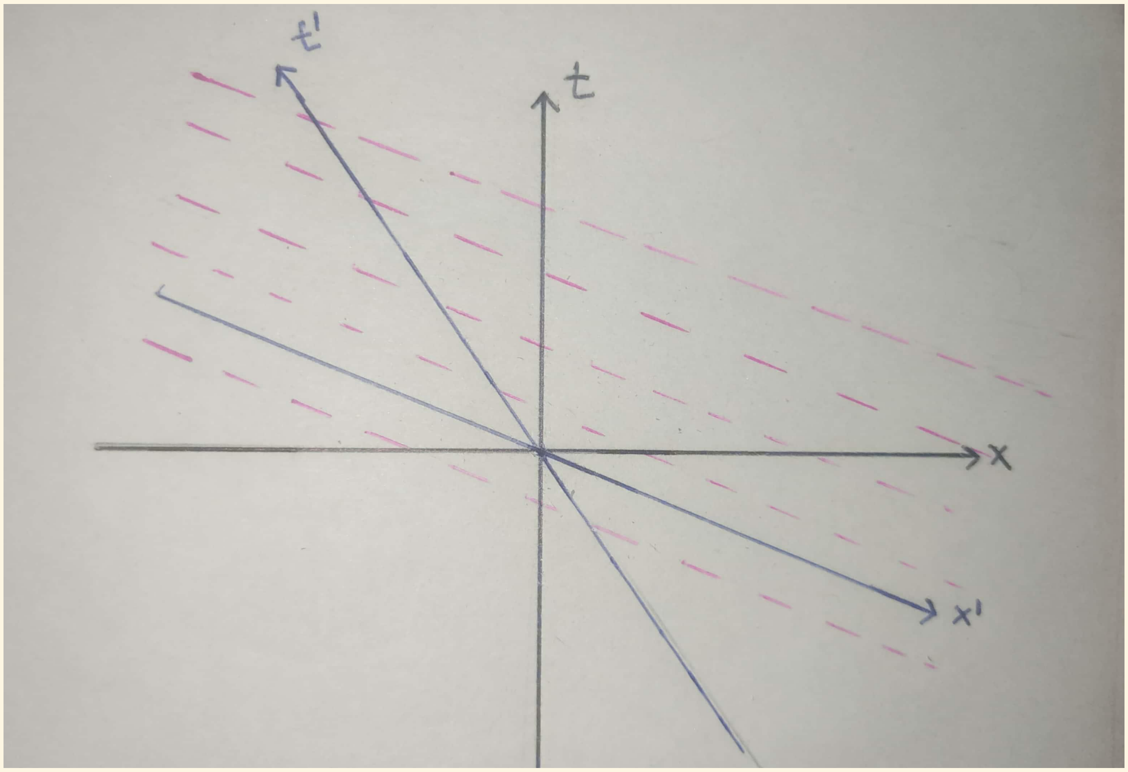

Figura 4: Conjunto de todos los eventos que ocurren a $t =$ cte.

e) Si $v = 10^{-2}$, ¿cuál es el valor de θ?

Solución

Sustituyendo el valor v en la ec. (6), obtenemos que el valor de θ es

$$\begin{aligned}\theta &= -\arctan\left(10^{-2}\right),\\ &= -0.0099997,\\ &\boxed{\theta \approx -0.01}\end{aligned}$$

Este resultado coincide con la teoría, por que sabemos que para $v \ll 1$, el ángulo $\theta \approx 0$.

Problema 3

En este problema pintarás algunas cosas en un diagrama de un espacio-tiempo $2+1$-dimensional. Aunque no lo usaremos mucho a lo largo del curso, conviene que tengas una idea de cómo debe hacerse. Dado que esto involucra dibujar un espacio de tres dimensiones en papel, además de tus dibujos agrega descripciones detalladas de lo que estás mostrando. También puede ser útil que muestres el cómo se ven las cosas desde una proyección a algún plano en particular.

Considera así dos observadores inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ en un espacio-tiempo $2+1$-dimensional. Sus sistemas de coordenadas tienen el mismo origen (tanto temporal como espacial), de forma tal que $\mathcal{O}'$ se mueve respecto a $\mathcal{O}$ en la dirección positiva del eje x (es decir con velocidad $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\mathbf{x}}$). Los ejes espaciales de ambos sistemas están alineados, es decir, no hay ninguna rotación de por medio entre ambos. En el diagrama de $\mathcal{O}$ (no necesariamente el mismo dibujo, si te parece que esta muy saturado haz varios):

a) Pinta la línea de mundo de $\mathcal{O}'$. ¿El eje t' está contenido en algún plano importante?

Solución

Para obtener la línea de mundo del observador $\mathcal{O}'$ nos remitimos al plano xy, tal que,

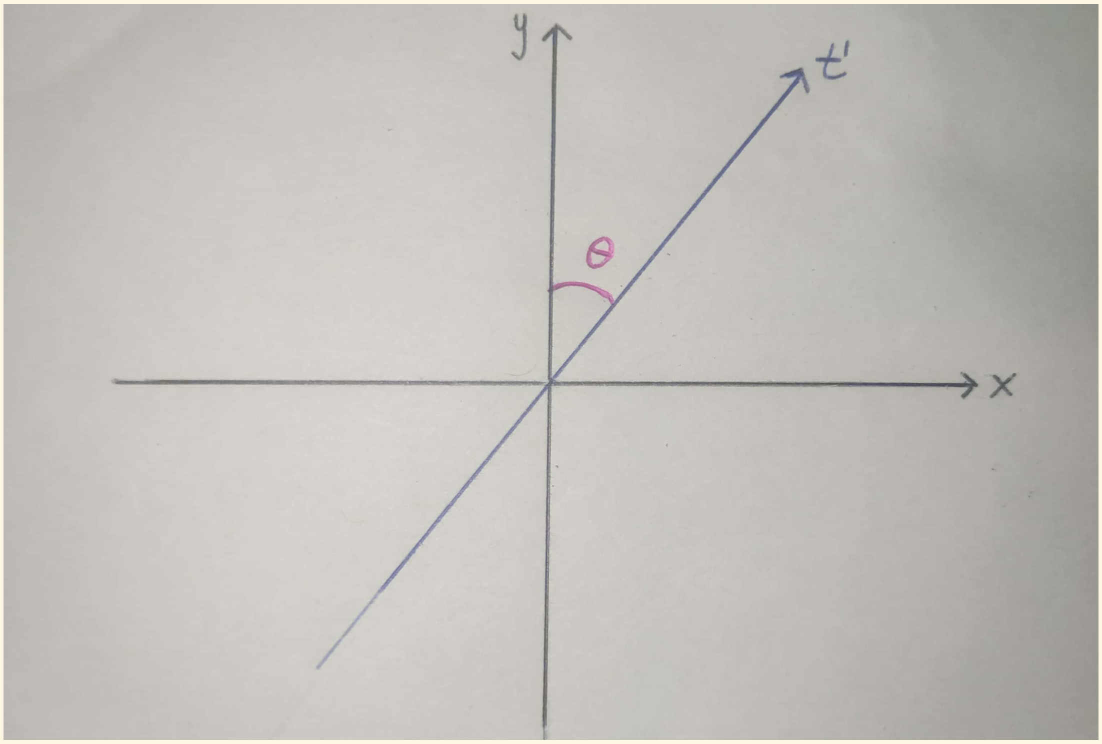

Figura 5: Proyección de la línea de mundo de $\mathcal{O}'$ en el plano xy.

Notamos entonces que t' se encuentra en el plano xy.

b) Pinta el eje x' argumentado con la construcción que hicimos en clase (no es necesario que la repitas paso a paso) y usando el hecho de que los ejes espaciales deben estar alineados según la convención que dimos arriba. ¿En qué plano están contenidos los ejes t' y x'?

Solución

Por hipótesis sabemos que los ejes espaciales de ambos sistemas están alineados, lo cual quiere decir que si los proyectamos en un plano adecuado, en particular el plano xy, veremos lo siguiente

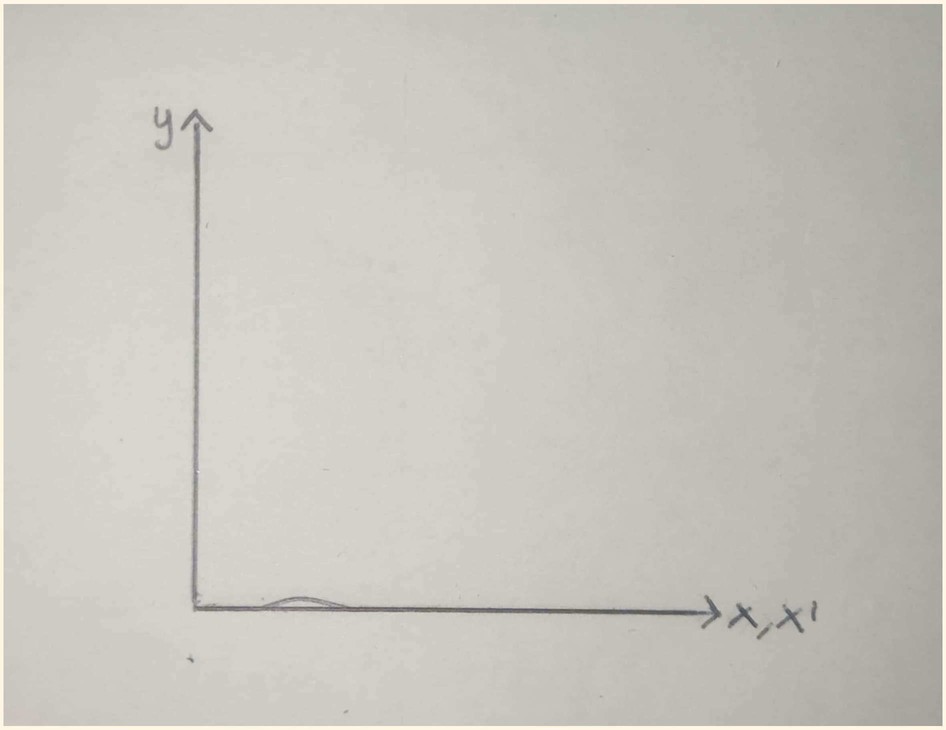

Figura 6: Eje x' proyectado en el plano xy.

Si ahora dibujamos a x' en el plano xt, veríamos lo siguiente:

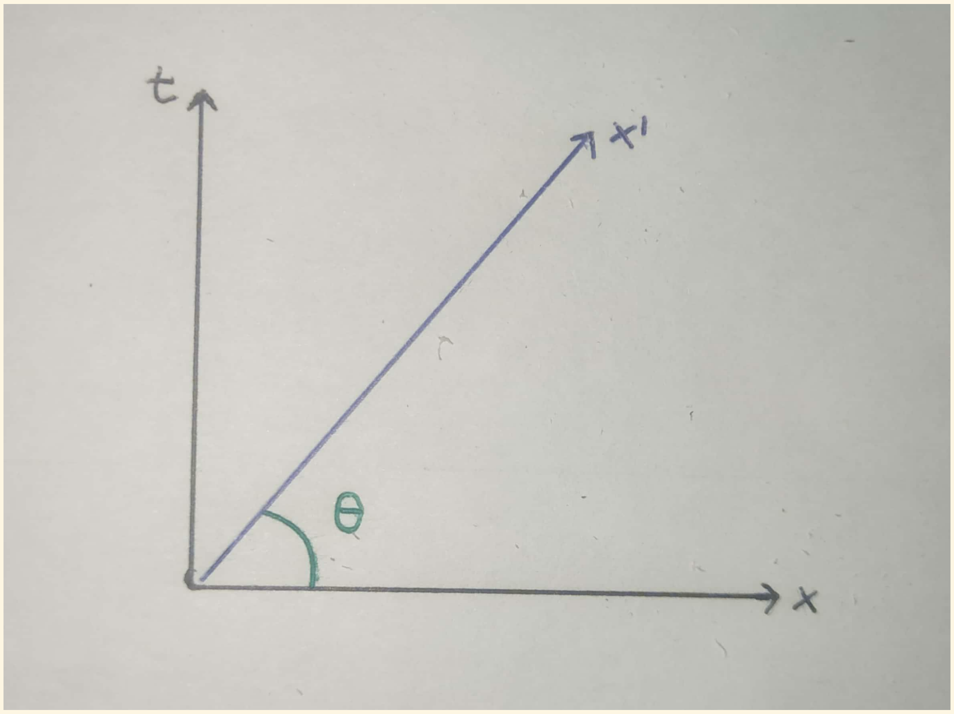

Figura 7: Eje x' proyecto en el plano xt.

Además, notemos que θ es igual al ángulo que hay entre t y t', lo cual es análogo al caso que teníamos para el diagrama de espaciotiempo $1+1$-dimensional.

c) Dibuja la línea de mundo de un rayo de luz que va desde el eje t' a cierto tiempo $t' = -a$ hasta la parte negativa del eje y. Luego dibuja la línea de mundo de otro rayo de luz que va desde la parte negativa del eje y a $t = 0$ y llega al eje t' a $t' = a$. ¿Estas líneas se intersectan? Si la respuesta es afirmativa, eso significa que el evento de la intersección es simultáneo con el origen según $\mathcal{O}'$.

Solución

Ahora queremos dibujar las líneas de mundo de los rayos que salen a dos tiempo t' distintos t y, para facilitar la visualización de lo que se nos pide, nos remitimos al plano yt'.

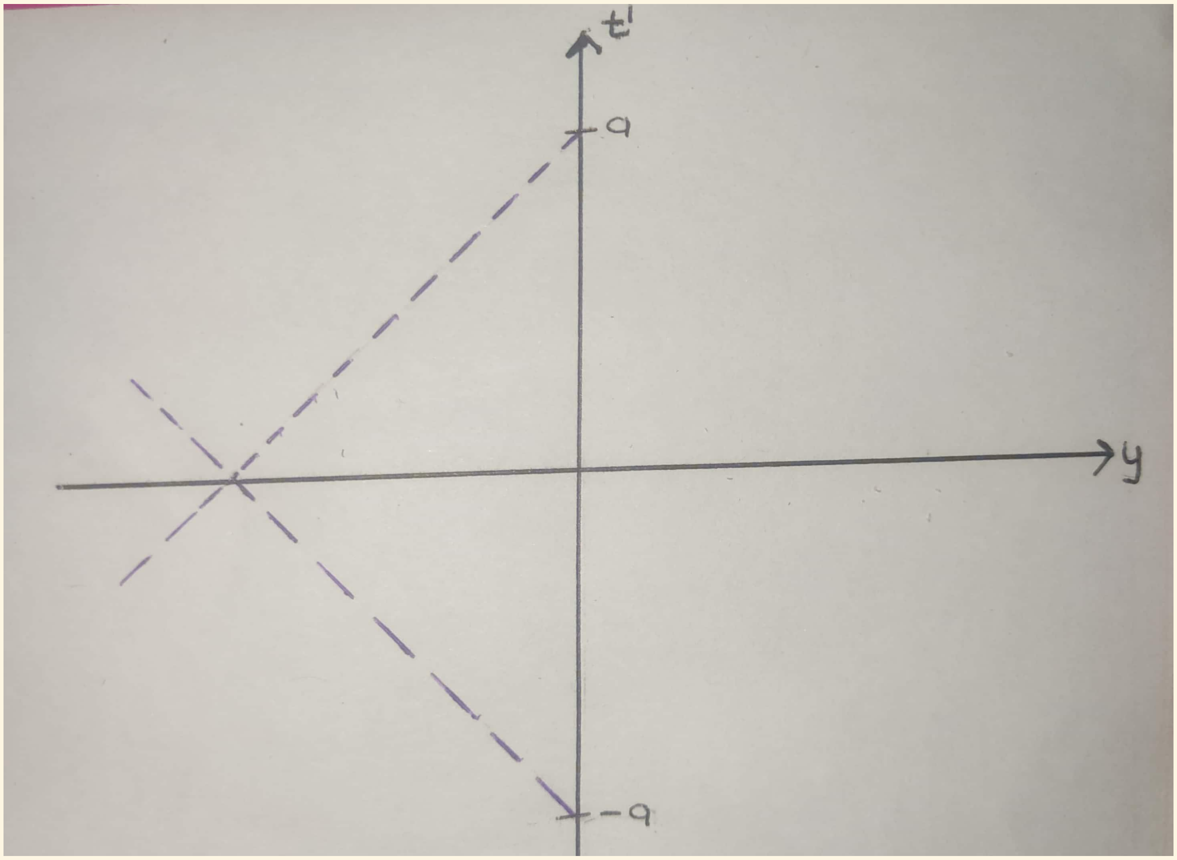

Figura 8: Líneas de mundo para un rayo de luz que sale de $t' = -a$ hasta la parte negativa del eje y, y para otro rayo que sale desde la parte negativa del eje y y llega a $t' = a$.

Las líneas de mundo en la fig. 8 se intersectan, ya que, como vimos previamente en clase, las líneas de mundo de rayos de luz se van a intersectar al eje y en $y = -a$.

d) Usa tu resultado de c) para dibujar el eje y' usando el hecho de que los ejes espaciales deben estar alineados según la convención que dimos arriba (pintar la proyección del plano $x'y'$ sobre el plano xy puede serte útil para entender mejor esto).

Solución

Por hipótesis sabemos que el eje y está alineado al eje y. De esta manera, hacemos el análogo de la fig. 8, **i.e.**, dibujamos la línea de mundo que va de $t' = -a$ a la parte positiva del eje y y, luego, la línea que va de la parte positiva del eje y a $t' = a$.

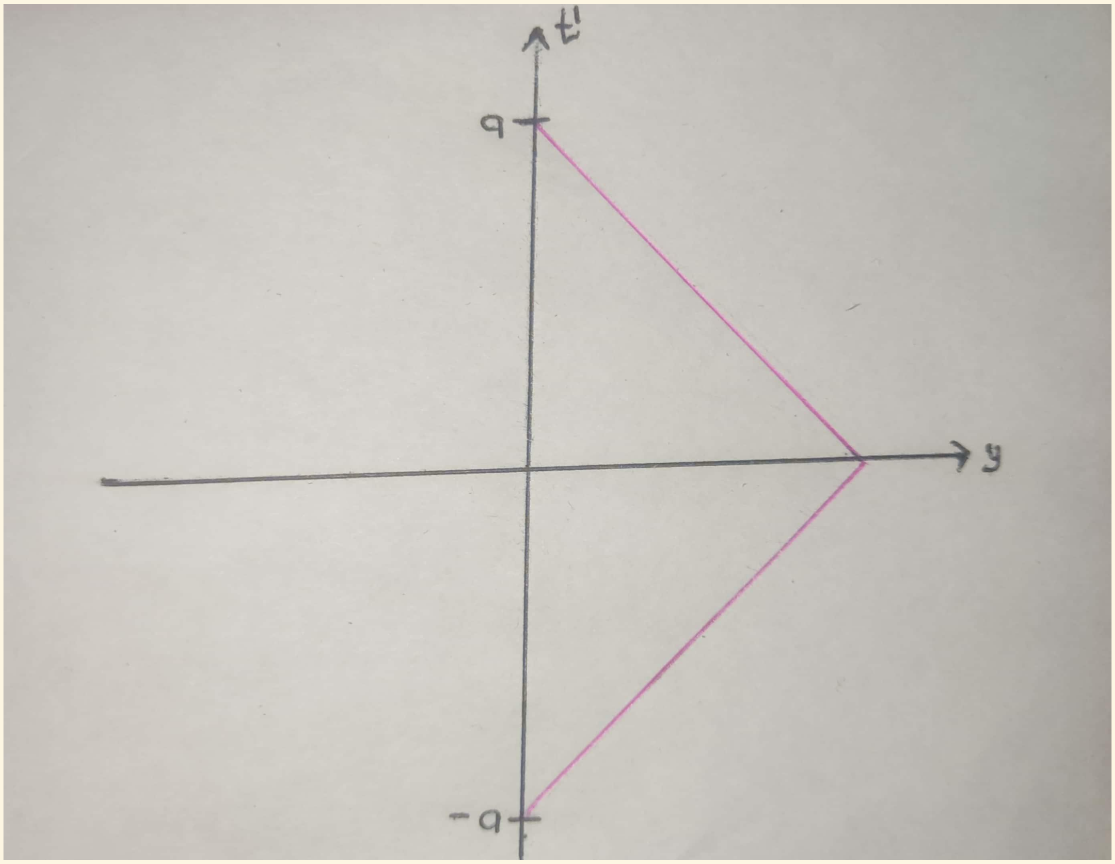

Figura 9: La intersección de las líneas de mundo de dos rayos de luz da como resultado el eje y'.

e) Dado que estamos en $2+1$ dimensiones, una ecuación del tipo $t' = \text{cte}$ describe a un plano, así que ahora tenemos planos de simultaneidad. Pinta un plano de simultaneidad de $\mathcal{O}'$ (que no sea el $x'y'$).

Solución

Como queremos pintar un plano de simultaneidad a $\mathcal{O}'$, simplemente usamos la ecuación $x' = \text{cte}$, tal que,

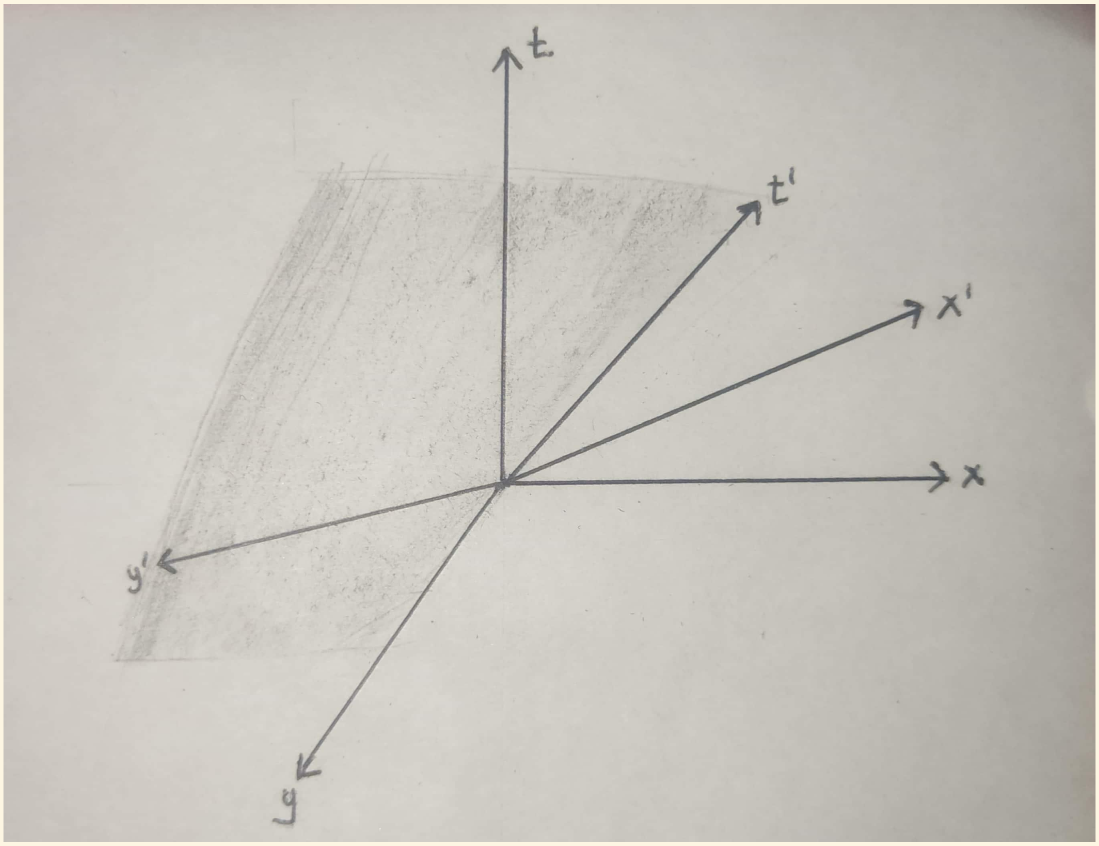

Figura 10: Plano de simultaneidad $y't'$. La zona sombreada representa el plano de simultaneidad elegido.

Esto ya no es parte del ejercicio, pero puede serte útil que pintes (o imagines, el dibujo ciertamente es complicado por la perspectiva) el cómo cambiarían tus respuestas anteriores si la velocidad de $\mathcal{O}'$ respecto a $\mathcal{O}$ fuera $\vec{\boldsymbol{v}} = v(\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}})$.