Tarea 1

Entrega: 26 de agosto de 2022

Problema 1

Resolver los siguientes ejercicios de *Introducción al formalismo de la Mecánica Cuántica no relativista* (Spinel):

(a) Con base en la propiedad (1.1.3), demostrar que el dual de $c|\beta\rangle = \langle\beta|c^*$.

Solución

Por el postulado de la correspondencia dual la igualdad se cumple. Es decir,

$$c|\beta\rangle \overset{\text{CD}}{\longleftrightarrow} \langle\beta|c^*$$

Por lo tanto,

$$\boxed{c|\beta\rangle = \langle\beta|c^*}$$

Sean $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ los ket definidos por: $|\gamma\rangle = (3+i)|a_1\rangle + 4|a_2\rangle - 6i|a_3\rangle$ y $|\eta\rangle = 2i|a_1\rangle + 3|a_3\rangle$, donde los kets $|a_i\rangle$ son ortonormales

(b) Calcule la norma de los kets $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ y determine sus kets normalizados $|\gamma'\rangle$ y $|\eta'\rangle$.

Solución

Puesto que queremos calcular la norma de los kets de $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$, necesitamos $\langle\gamma|$ y $\langle\eta|$, tal que,

$$\begin{aligned}\langle\gamma| &= (3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle,\\ \langle\eta| &= -2i\langle a_1| + 3\langle a_3|.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle\gamma|\gamma\rangle} &= \left\{[(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle][(3+i)|a_1\rangle + 4|a_2\rangle - 6i|a_3\rangle]\right\}^{1/2},\\ &= \left\{(3-i)(3+i) + 4(4) + 6i(-6i)\right\}^{1/2},\\ \boxed{\sqrt{\langle\gamma|\gamma\rangle} = \sqrt{62}} \qquad (1)\end{aligned}$$

Ahora calculamos $\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle} &= \left\{[-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|][2i|a_1\rangle + 3|a_3\rangle]\right\}^{1/2},\\ &= \left\{(-2i)(2i) + 3(3)\right\}^{1/2},\end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle} = \sqrt{13}} \tag{2}$$

Para normalizar un ket debemos dividirlo por su norma, **i.e.**, debemos dividir $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ por las ecs. (1) y (2), respectivamente.

$$|\gamma'\rangle = \frac{1}{\sqrt{62}}[(3+i)|a_1\rangle + 4|a_2\rangle - 6i|a_3\rangle], \tag{3}$$

$$|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}[2i|a_1\rangle + 3|a_3\rangle]. \tag{4}$$

(c) Encuentre los bras correspondientes a los kets $|\gamma'\rangle$ y $|\eta'\rangle$.

Solución

Puesto que las ecs. (3) y (4) son los kets $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ normalizados, respectivamente; entonces, sus bras correspondientes son $^1/\sqrt{62}\langle\gamma|$ y $^1/\sqrt{13}\langle\eta|$. Así,

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\gamma'| &= \frac{1}{\sqrt{62}}[(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle],\\ \langle\eta'| &= \frac{1}{\sqrt{13}}[-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|].\end{aligned}}$$

(d) Calcule el producto interior $\langle\gamma'|\eta'\rangle$ y demuestre por cálculo directo que es igual a $\{\langle\eta'|\gamma'\rangle\}^*$.

Solución

Calculamos $\langle\gamma'|\eta'\rangle$ y $\langle\eta'|\gamma'\rangle$.

- $\langle\gamma'|\eta'\rangle$

$$\langle\gamma'|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}[(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle][-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|],$$

$$\boxed{\langle\gamma'|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}(2+24i)} \tag{5}$$

- $\langle \eta' | \gamma' \rangle$

$$\langle \eta' | \gamma' \rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}[-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|][(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle],$$

$$\boxed{\langle \gamma' | \eta' \rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}(2-24i)} \tag{6}$$

Calculando el conjugado de la ec. (6),

$$\boxed{\{\langle \eta' | \gamma' \rangle\}^* = \frac{1}{\sqrt{806}}(2+24i)} \tag{7}$$

Por lo tanto, de las ecs. (5) y (7),

$$\boxed{\langle \gamma' | \eta' \rangle = \{\langle \eta' | \gamma' \rangle\}^*}$$

(e) Calcules los productos interiores $\langle a_1 | \eta' \rangle$, $\langle a_2 | \eta' \rangle$ y $\langle a_3 | \eta' \rangle$. De acuerdo con sus resultados ¿qué interpretación geométrica puede dar al producto interior?

Solución

Calculamos $\langle a_1 | \eta' \rangle$, $\langle a_2 | \eta' \rangle$ y $\langle a_3 | \eta' \rangle$.

$$\boxed{\begin{aligned} \langle a_1 | \eta' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{62}}(3+i), \\ \langle a_2 | \eta' \rangle &= \frac{4}{\sqrt{62}}, \\ \langle a_3 | \eta' \rangle &= \frac{-6i}{\sqrt{62}}. \end{aligned}}$$

De las expresiones anteriores podemos determinar que el producto interior nos da la proyección de η' sobre a_1, a_2 y a_3, respectivamente.

Problema 2

(a) Find the condition under which two vectors

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ x-y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

are linearly independent.

Solución

Sabemos que si dos vectores son linealmente dependientes podemos expresar uno de estos como un múltiplo del otro, **i.e.**,

$$|v_1\rangle = c|v_2\rangle.$$

Sustituyendo $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ en la expresión anterior:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ x-y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ c(x-y) \\ c \end{pmatrix}.$$

Así,

$$x = 2c, \tag{8}$$

$$y = c(x-y), \tag{9}$$

$$c = 3. \tag{10}$$

Sustituimos la ec. (10) en la ec. (8),

$$x = 2(3),$$

$$x = 6. \tag{11}$$

Ahora, simplificamos la ec. (9) y sustituimos las ecs. (10) y (11), tal que,

$$y(1+c) = cx,$$

$$y(1+3) = 18,$$

$$y = \frac{9}{2}.$$

Por lo tanto, las condiciones para que los vectores sean l.i. son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 6, \\ y &= \frac{9}{2}, \\ c &= 3. \end{aligned}}$$

(b) Show that a set of vectors

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

is a basis of $\mathbb{C}^3$.

Solución

Para determinar si el conjunto de vectores $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ únicamente asta calcular el determinante de la matriz generada por los vectores y, verificar que éste si es diferente de cero, en caso de serlo, los vectores son linealmente independientes y generan al subespacio.

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det M = 2 \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\} \text{ es una base de } \mathbb{C}^3.$$

(c) Let

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix}, \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

Find $\||x\rangle\|$, $\langle x, y\rangle$ and $\langle y, x\rangle$.

Solución

- Norma
  Primero calculamos $\langle x|x\rangle$, tal que,

$$\langle x|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix},$$

$$\langle x|x\rangle = 7.$$

  Aplicando la raíz cuadrada a la expresión anterior, tenemos que la norma es igual a

$$\boxed{\sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{7}.}$$

- $\langle x|y\rangle$

$$\langle x|y\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\langle x|y\rangle = 7-2i}$$

- $\langle y|x\rangle$

$$\langle y|x\rangle = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\langle y|x\rangle = 7+2i}$$

(d) 1. Use the Gram-Schmidt orthonormalization to find an orthonormal basis $\{|e_k\rangle\}$ from a linearly independent set of vectors

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix}-1, & 2, & 2\end{pmatrix}^t, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix}2, & -1, & 2\end{pmatrix}^t, \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix}3, & 0, & -3\end{pmatrix}^t$$

Solución

Primero definimos un vector, para normalizamos $|v_1\rangle$, tal que,

$$|e_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}},$$

donde la norma es

$$\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle} = 3.$$

Entonces,

$$\boxed{|e_1\rangle = \frac{\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\end{pmatrix}^t}{3}.} \tag{12}$$

Ahora definimos el vector $|f_2\rangle$,

$$|f_2\rangle = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$|f_2\rangle = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^t.$$

Por otro lado, tenemos que $\sqrt{\langle f_2|f_2\rangle} = 3$. Entonces el vector $|e_2\rangle$ está dado como:

$$\boxed{|e_2\rangle = \frac{\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^t}{3}.} \tag{13}$$

Definimos el vector $|f_3\rangle$, tal que,

$$|f_3\rangle = |v_3\rangle - \langle e_1|v_3\rangle|e_1\rangle - \langle e_2|v_3\rangle|e_2\rangle,$$

$$|f_3\rangle = \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}^t.$$

Tenemos que $\sqrt{\langle f_3|f_3\rangle} = 3$, entonces el vector $|e_3\rangle$ es

$$\boxed{|e_3\rangle = \frac{\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}^t}{3}} \tag{14}$$

2. Let

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 7 \end{pmatrix}^t = \sum_k c_k |e_k\rangle$$

Find the coefficients c_k.

(e) Let

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1, & i, & 1 \end{pmatrix}^t, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 3, & 1, & i \end{pmatrix}^t.$$

Find the orthonormal basis for a two-dimensional subspace spanned by $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$.

Problema 3

(a) Let $x \neq 0$ and $y \neq 0$. (a) If $x \perp y$, show that $\{x, y\}$ is a linearly independent set. (b) Extend the result to mutually orthogonal nonzero vectors $x_1, \ldots, x_m$.

(b) Let z_1 and z_2 denote complex numbers. Show that $\langle z_1, z_2\rangle = z_1\bar{z}_2$ defines an inner product, which yields the usual metric on the complex plane. Under what condition do we have orthogonality?

(c) Show that the norm on $C[a,b]$ is invariant under a linear transformation $t = \alpha\tau + \beta$. Use this to prove that the statement in 3.1-8 by mapping $[a,b]$ onto $[0,1]$ and then considering the functions defined by $\bar{x}(\tau) = 1$, $\bar{y}(\tau) = \tau$, where $\tau \in [0,1]$.

(d) If X is a finite dimensional vector space and (e_j) is a basis for X, show that an inner product on X is completely determined by its values $\gamma_{jk} = \langle e_j, e_k\rangle$. Can we choose such scalar γ_{jk} in a completely arbitrary fashion?

(e) If (e_k) is an orthonormal sequence in an inner product space X, and $x \in X$, show that $x - y$ with y given by

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k = \langle x, e_k\rangle$$

is orthogonal to the subspace $Y_n = \operatorname{span}\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$.

(f) Orthonormalize the first three terms of the sequence $(x_0, x_1, x_2, \cdots)$, where $x_j(t) = t^j$, on the interval $[-1,1]$, where

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\mathit{\Gamma}$$