Tarea 2

Entrega: 1 de septiembre de 2022

Problema 1

a) Considera la distancia Euclidiana en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Demuestra que la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

donde θ es un ángulo constante.

Solución

A partir de las transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} {x'}^0 &= x^0\cos\theta - y^0\sin\theta,\\ {y'}^0 &= x^0\sin\theta + y^0\cos\theta,\\ {x'}^1 &= x^1\cos\theta - y^1\sin\theta,\\ {y'}^1 &= x^1\sin\theta + y^1\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

{eq:points}eq:point

Sustituyendo (1.1) en la expresión para la distancia Euclidiana,

$$\begin{aligned} (\Delta r')^2 &= ({x'}^1 - {x'}^0)^2 + ({y'}^1 - {y'}^0)^2,\\ &= ((x^1\cos\theta - y^1\sin\theta) - (x^0\cos\theta - y^0\sin\theta))^2 + ((x^1\sin\theta + y^1\cos\theta) - (x^0\sin\theta + y^0\cos\theta))^2,\\ &= (\cos\theta(x^1 - x^0) - \sin\theta(y^1 - y^0)^2 + (\cos\theta(x^1 - x^0) + \sin\theta(y^1 - y^0)^2,\\ &= (x^1 - x^0)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (y^1 - y^0)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta),\\ &= (x^1 - x^0)^2 + (y^1 - y^0)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{(\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta r)^2.}$$

Es decir, la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones.

b) Considera ahora un espacio-tiempo 2+1-dimensional y un observador inercial $\mathcal{O}$ en éste.

En clase mencionamos que las transformaciones relativistas que buscamos deben dejar invariante al intervalo entre dos eventos, definido como

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Dado lo que acabas de demostrar en a), ¿se te ocurre un ejemplo de una transformación que deje invariante al intervalo? Es una transformación espacio-temporal, así que también debes especificar cuál es el cambio en la coordenada temporal.

Solución

Las transformaciones que dejan invariante al intervalo son las transformaciones de Lorentz, tales que $\mathcal{O}'$ se mueve con $v > 0$ en la dirección positiva del eje x, tales que,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \end{aligned} \tag{1.2}$$

{eq:lorentzT}eq:loren

donde $\gamma = {}^{1}/_{\sqrt{1-v^2}}$, y' permanece invariante ya que no hay movimiento en esa dirección.

Sustituyendo (1.2) en la expresión para el intervalo,

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= -(\gamma(t'' - vx'') - \gamma(t - vx))^2 + (\gamma(x'' - vt'') - \gamma(x - vt))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= -\gamma^2((t'' - t) - v(x'' - x))^2 + \gamma^2((x'' - x) - v(t'' - t))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= \gamma^2[(1 - v^2)(\Delta x')^2 - (1 - v^2)(\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= \frac{1}{(1 - v^2)}(1 - v^2)[(\Delta x')^2 - (\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{(\Delta s')^2 = -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta s)^2}$$

Es decir, el intervalo es invariante ante las transformaciones de Lorentz.

Problema 2

Considera tres sistemas de referencia inerciales $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ y $\mathcal{O}''$ en un espacio-tiempo 1+1-dimensional. El sistema se mueve con velocidad v a lo largo de la dirección positiva del eje x respecto a $\mathcal{O}$, mientras que el sistema $\mathcal{O}''$ se mueve con velocidad $-v$ también respecto a $\mathcal{O}$ (es decir, en la dirección x negativa). Además, estos sistemas son tales que el origen de los tres coincide en el mismo evento A.

a) Pinta los ejes de los tres sistemas en el diagrama de $\mathcal{O}$. Indica con claridad cuál es la inclinación de los ejes.

Solución

Tenemos que la línea de mundo del observador de $\mathcal{O}'$ cuando $x = 0$, la cual coincide con el eje t', está dada como:

{eq:tprime}eq:tprim

$$x = vt. \tag{2.1}$$

Asimismo, la línea de mundo para $\mathcal{O}''$ cuando $x = 0$, es

{eq:tbiprime}eq:tbipr

$$x = -vt. \tag{2.2}$$

Donde las ecs. (2.1) y (2.2) tienen el mismo ángulo de inclinación pero en dirección opuesta, tal que el ángulo de t' y t'', respectivamente,

$$\boxed{\theta = \arctan v \quad \wedge \quad \theta = -\arctan v.}$$

De esta manera, lo ejes de los tres sistemas en el diagrama de $\mathcal{O}$ quedan como en la figura 1.

b) Elige algún evento B en el eje x (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y B? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que use para hacer el cálculo.

Solución

En la figura 2, se muestran los conos de luz para los eventos A y B, respectivamente.

Notamos entonces que para el evento A, B está fuera su cono de luz y, para B, A está fuera de su cono de luz. Esto quiere decir que para el observador $\mathcal{O}$, la separación entre A y B es espacialoide, **i.e.**, $(\Delta s)^2 > 0$.

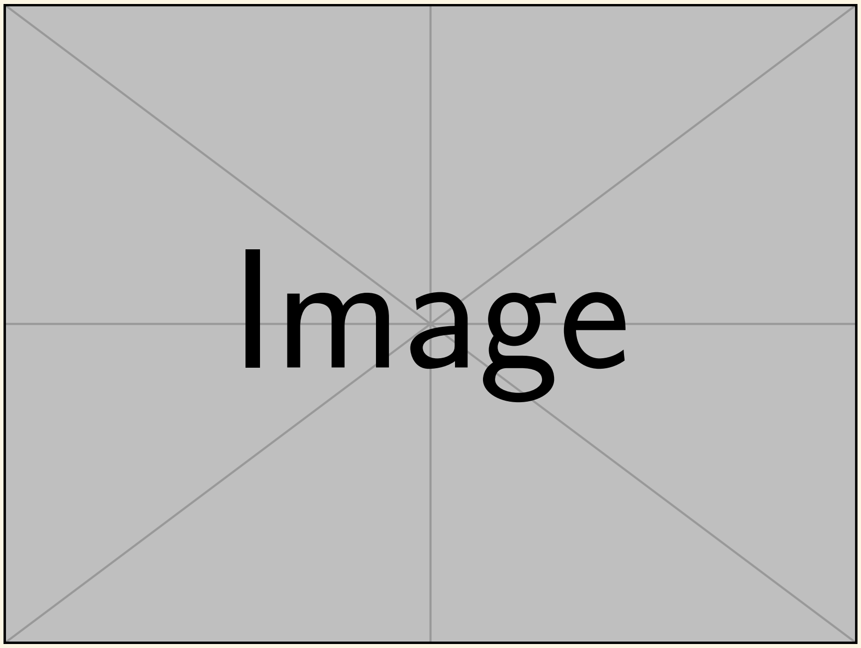

Figura 1: Ejes coordenados de $\mathcal{O}'$ y $\mathcal{O}''$ en el diagrama de $\mathcal{O}$. fig:OprimeObiprimeInO

Analíticamente podemos determinar que la afirmación anterior es verdadera. Así,

$$
\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2, \\
&= -(0-0)^2 + (x_B - 0)^2, \\
(\Delta s)^2 &= {x_B}^2.
\end{aligned}
$$

En particular notamos que B es un evento diferente del origen, por lo que $x_B \neq 0 \implies {x_B}^2 > 0$. Por lo tanto,

$$\boxed{(\Delta s)^2 > 0.}$$

c) ¿Según $\mathcal{O}$ qué evento ocurre primero, A o B?

Solución

Para $\mathcal{O}$ los eventos A y B son simultáneos, ya que ocurren al tiempo $t = 0$.

d) ¿Según $\mathcal{O}'$ qué evento ocurre primero, A o B? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según $\mathcal{O}'$.

Solución

Para determinar cuál de los eventos ocurre primero, dibujamos los ejes de $\mathcal{O}$ en el diagrama de $\mathcal{O}'$, así como los eventos.

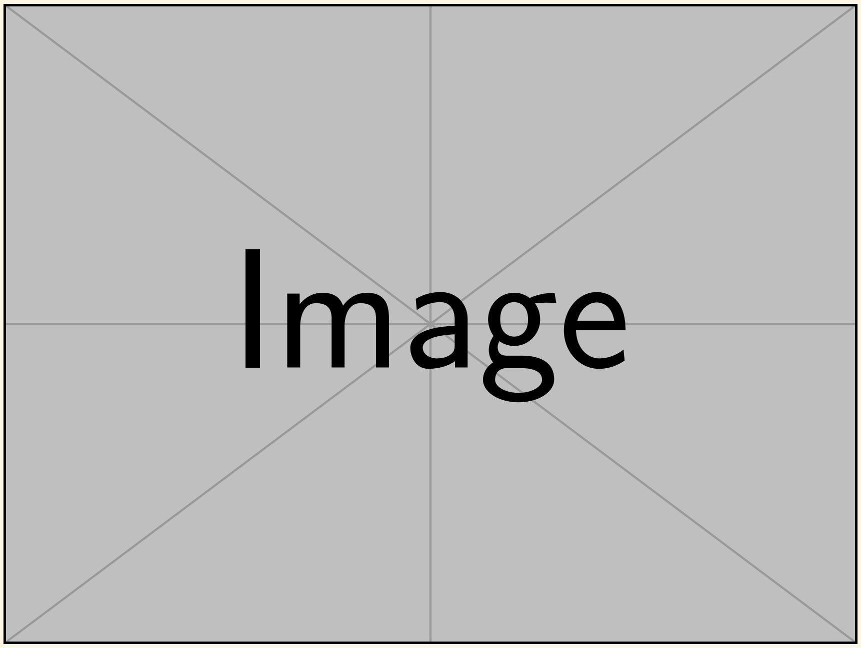

Figura 2: Conos de luz de los eventos A y B. `fig:ABEventsInO`

De tal manera que observamos que para $\mathcal{O}'$, el evento B ocurre primero. Y, además, los eventos simultáneos a B son aquellos que ocurren al tiempo $t' = t_B{}'$ (véase figura 3).

e) ¿Según $\mathcal{O}''$ qué evento ocurre primero, A o B? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según $\mathcal{O}'$.

Solución

Los ejes de $\mathcal{O}'$ dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}''$ queda igual que los ejes de $\mathcal{O}'$ en el diagrama de $\mathcal{O}$. Esto se debe a que $\mathcal{O}''$ observa que $\mathcal{O}$ se aleja con velocidad $v > 0$ respecto a éste.

De esta manera, notamos que para $\mathcal{O}''$ el evento A ocurre primero. Y los eventos simultáneos a B ocurren a $t'' = t_B{}''$.

f) Elige ahora un evento C en el eje t (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y C? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que uses para hacer el cálculo.

Solución

Dibujamos un punto C, tal que $x = 0$, **i.e.**, $(c, 0)$, con $c \neq 0$. Además, dibujamos el cono de luz correspondiente a cada evento, tenemos que la separación entre estos es de tipo temporaloide.

Analíticamente podemos comprobar esta afirmación, tal que,

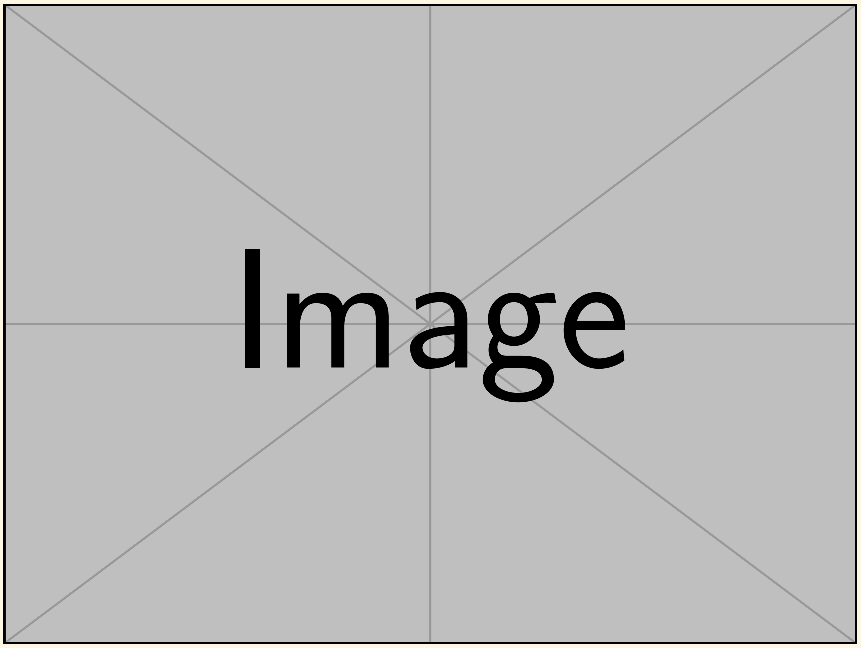

Figura 3: Eventos A y B dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}'$. `fig:ABInOPrime`

$$\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= -(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2, \\
&= -(t_C - 0)^2 + (0 - 0)^2, \\
&= -(t_C)^2.
\end{aligned}$$

Notamos entonces que sin importar que el evento C suceda antes o después del evento A, su intervalo siempre será $(\Delta s)^2 < 0$, lo cual nos permite, una vez más, concluir que la separación entre los eventos es temporaloide.

g) ¿Según $\mathcal{O}$ qué evento ocurre primero, A o C?

Por como dibujamos el evento C en la figura 5, tenemos que para $\mathcal{O}$ el evento A ocurre primero.

h) ¿Según $\mathcal{O}'$ qué evento ocurre primero, A o C? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a C según $\mathcal{O}'$.

Solución

Ahora queremos determinar cuál de los eventos del inciso e) ocurre primero para $\mathcal{O}'$. Dibujamos el diagrama de espacio-tiempo de la **??**, agregando el evento C.

Observamos entonces que para $\mathcal{O}'$ el evento que ocurre primero es A y, además, los eventos simultáneos a C son aquellos que ocurren al tiempo $t' = {t_C}'$ (véase figura 6).

i) ¿Según $\mathcal{O}''$ qué evento ocurre primero, A o C? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a

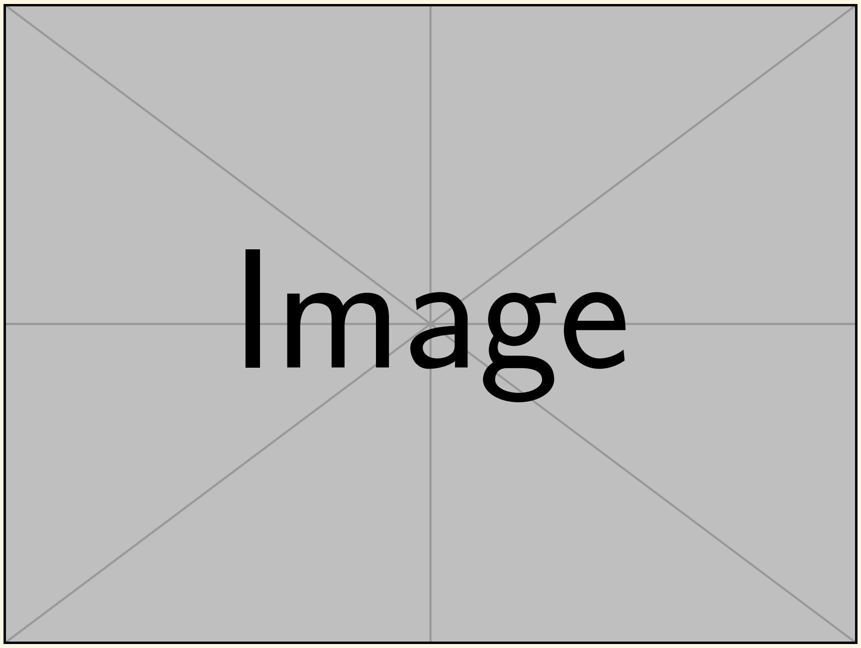

Figura 4: Ejes de $\mathcal{O}$ dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}''$, así como la línea de los eventos simultáneos al evento B. `fig:OInOPrimePrime`

C según $\mathcal{O}''$.

Solución

Replicando el diagrama de la figura 4 agregando el evento C, tenemos que directamente podemos determinar que el evento A ocurre primero para el observador $\mathcal{O}''$ y, además, los eventos simultáneos a C son aquellos que ocurren a $t'' = t_C''$ (véase figura 7).

Problema 3

Es útil aprender a visualizar el intervalo entre dos eventos en los diagramas de espacio-tiempo, similar a como sabemos visualizar la distancia entre dos puntos en el espacio Euclidiano. Considera así un espacio-tiempo 1+1-dimensional y dos observadores inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ en éste, tales que $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad $v > 0$ respecto a $\mathcal{O}$. El origen de ambos está colocado en el origen.

a) Localiza en el diagrama de $\mathcal{O}$ al evento B de coordenadas $(b, 0)$ con $b > 0$.

Solución

El punto B se localiza en la parte positiva del eje t (véase la figura 8).

b) Calcula el intervalo $(\Delta s_{AB})^2$ entre A y B. ¿Qué tipo de separación hay entre estos eventos?

Calculamos el intervalo entre los eventos A y B, tal que,

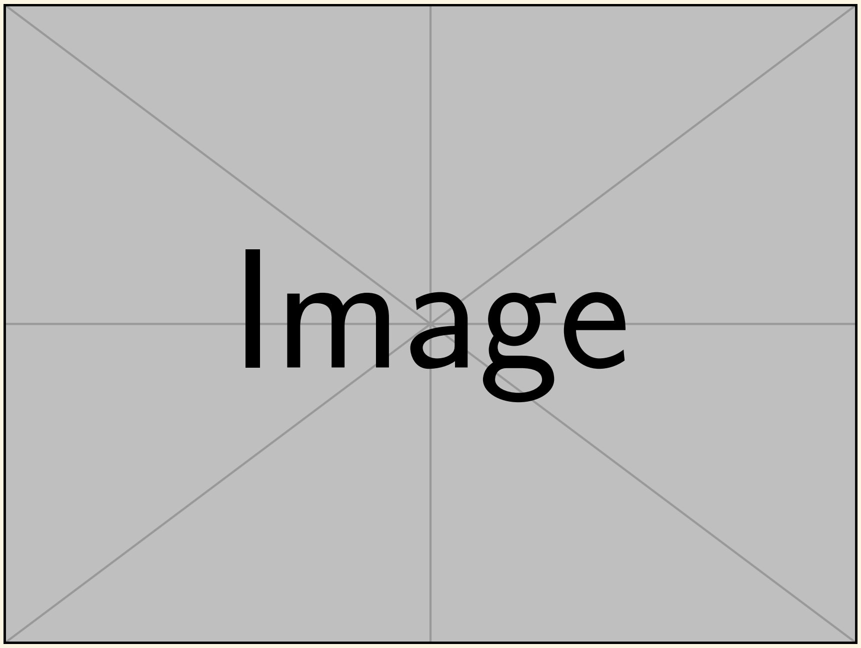

Figura 5: Conos de luz correspondientes a los eventos A y B para determinar el tipo de separación que hay entre estos. fig:ABIntervalInO

$$
\begin{aligned}
(\Delta s_{AB})^2 &= -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2, \\
&= -(b-0)^2 + (0-0)^2, \\
\boxed{(\Delta s_{AB})^2 = -b^2.}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

{eq:IntervalAB}eq:Inter

De la ec. (3.1), tenemos que

$$(\Delta s_{AB})^2 < 0$$

Por lo tanto, la separación entre los eventos es de tipo temporaloide.

c) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos C tales que $(\Delta s_{AC})^2 = (\Delta s_{AB})^2$, es decir, de todos los eventos que equidistan espacio-temporalmente de A. Pinta este lugar geométrico en el diagrama de $\mathcal{O}$ (ambas ramas).

Solución

Sea C un evento distinto del origen, tal que $(\Delta s_{AB})^2 = (\Delta s_{AC})^2$. Sustituyendo la ec. (3.1) en la aseveración anterior,

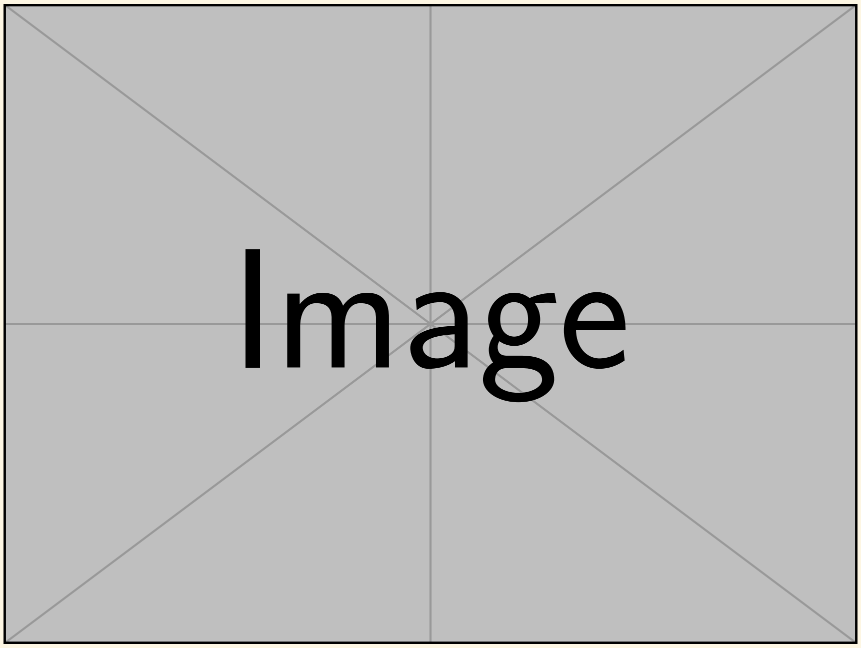

Figura 6: Eventos A y C dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}'$, así como la línea de los eventos simultáneos a C. fig:ACInOPrime

$$
\begin{aligned}
-b^2 &= -(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2, \\
&= -(t_C - 0)^2 + (x_C - 0)^2, \\
&\boxed{-b^2 = -{t_C}^2 + {x_C}^2.}
\end{aligned}
$$

Reescribiendo la expresión anterior,

$$
\boxed{-\frac{{x_C}^2}{b^2} + \frac{{t_C}^2}{b^2} = 1.} \tag{3.2}
$$

{eq:hyperbole}eq:hyper

El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan al evento A se muestra en la figura 9.

d) Pinta los ejes de $\mathcal{O}'$ em el diagrama de $\mathcal{O}$. ¿El lugar geométrico que encontraste en el inciso c) intersecta con el eje t'? ¿En qué eventos? Márcalos en el diagrama.

e) Denota a uno de los eventos que encontraste en d) como D. ¿Cuánto vale el intervalo $(\Delta s'_{AD})^2$ entre D y A según $\mathcal{O}'$? Recuerda: el intervalo es invariante.

f) Usa tu resultado de e) para escribir las coordenadas del evento D en el sistema $\mathcal{O}'$. Lo que acabas de hacer es escalar los ejes, es decir, has determinado lo que cada observador llama b metros.

g) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos E tales que $(\Delta s'_{AD})^2 = (\Delta s'_{AE})^2$. ¿Tienen algún parecido con tu respuesta de c)?

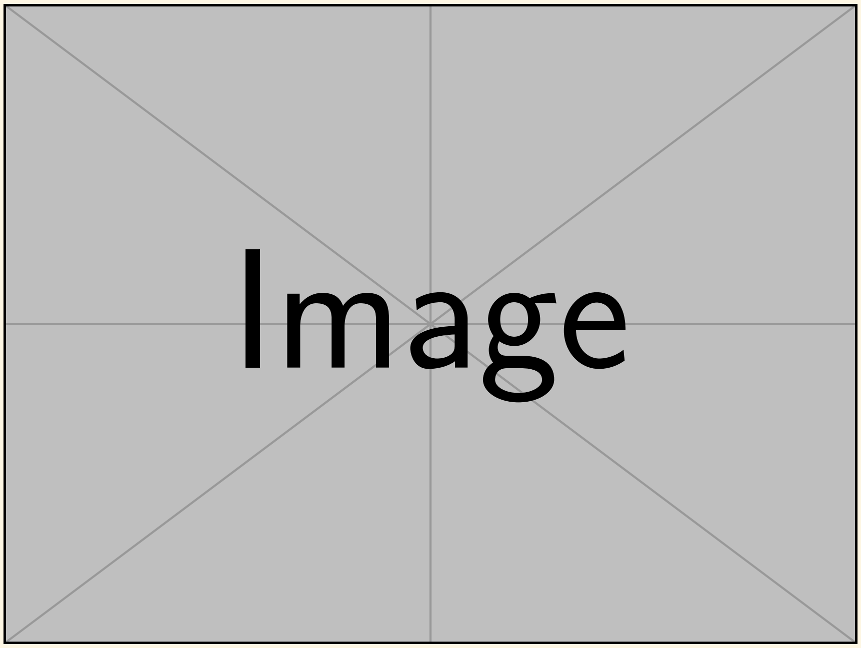

Figura 7: Eventos A y C dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}'$, así como la línea de los eventos simultáneos a C. fig:ACInOPrimePrime

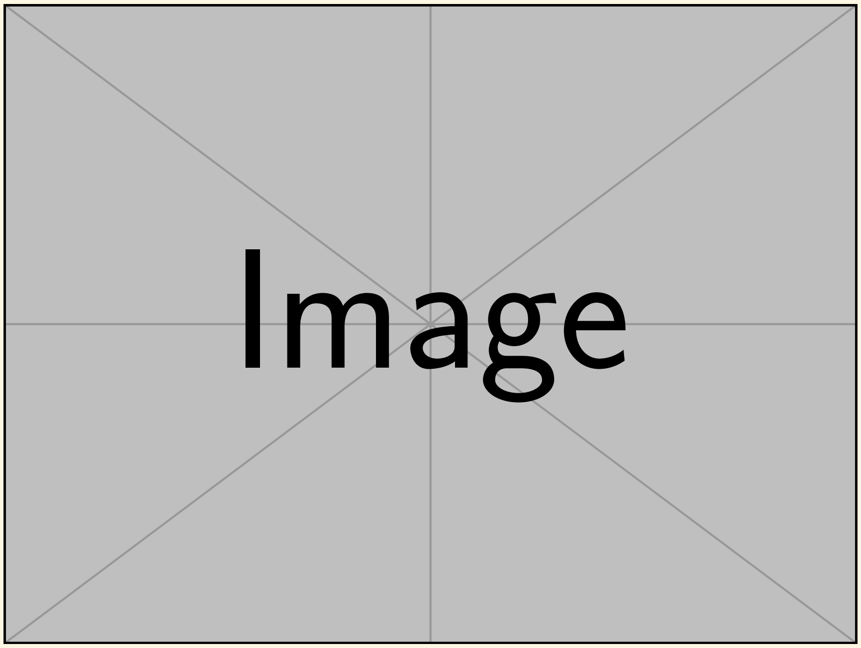

Figura 8: Evento $B = (b, 0)$ dibujado en el diagrama de espacio-tiempo de $\mathcal{O}$. fig:BequalsbOInO

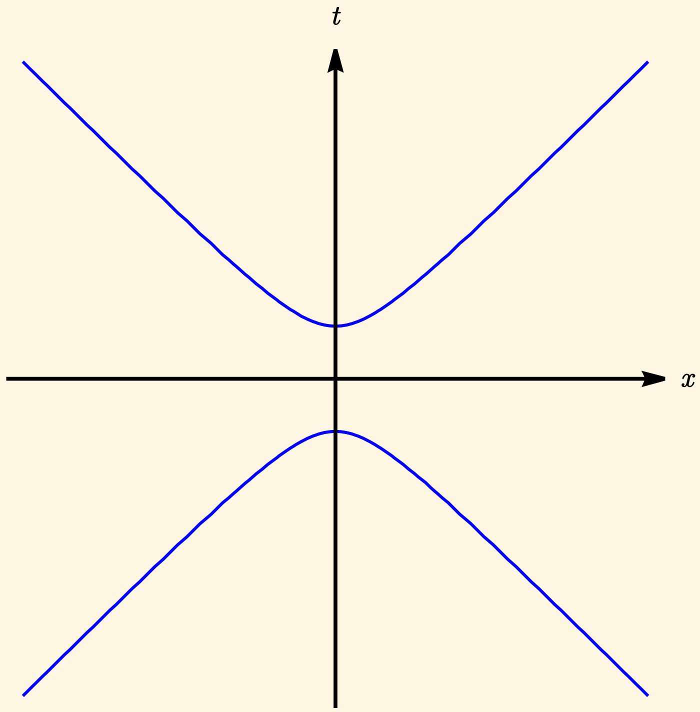

Figura 9: Lugar geométrico de los puntos equidistantes a B, dado por $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{t^2}{b^2} = 1$ fig:hyperbole