Tarea 2

Entrega: 2 de septiembre de 2022

Problema 1

a) Considera la distancia Euclidiana en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Demuestra que la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

donde θ es un ángulo constante.

Solución

A partir de las transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} {x'}^0 &= x^0\cos\theta - y^0\sin\theta,\\ {y'}^0 &= x^0\sin\theta + y^0\cos\theta,\\ {x'}^1 &= x^1\cos\theta - y^1\sin\theta,\\ {y'}^1 &= x^1\sin\theta + y^1\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sustituyendo (1.1) en la expresión para la distancia Euclidiana,

$$\begin{aligned} (\Delta r')^2 &= ({x'}^1 - {x'}^0)^2 + ({y'}^1 - {y'}^0)^2,\\ &= ((x^1\cos\theta - y^1\sin\theta) - (x^0\cos\theta - y^0\sin\theta))^2 + ((x^1\sin\theta + y^1\cos\theta) - (x^0\sin\theta + y^0\cos\theta))^2,\\ &= (\cos\theta(x^1 - x^0) - \sin\theta(y^1 - y^0)^2 + (\cos\theta(x^1 - x^0) + \sin\theta(y^1 - y^0)^2,\\ &= (x^1 - x^0)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (y^1 - y^0)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta),\\ &= (x^1 - x^0)^2 + (y^1 - y^0)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{(\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta r)^2.}$$

Es decir, la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones.

b) Considera ahora un espacio-tiempo 2+1-dimensional y un observador inercial $\mathcal{O}$ en éste.

En clase mencionamos que las transformaciones relativistas que buscamos deben dejar invariante al intervalo entre dos eventos, definido como

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Dado lo que acabas de demostrar en a), ¿se te ocurre un ejemplo de una transformación que deje invariante al intervalo? Es una transformación espacio-temporal, así que también debes especificar cuál es el cambio en la coordenada temporal.

Solución

Notamos que el intervalo para el espacio-tiempo 2+1-dimensional se puede escribir como

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta r)^2, \tag{1.2}$$

donde $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$.

Por el inciso anterior sabemos que $(\Delta r)^2$ es invariante, entonces para que el intervalo (ec. (1.2)) quedé invariante, necesitamos que $(\Delta t)^2$, por lo que tendremos que $t' = t$. De esta manera, las transformaciones que dejan invariante a la ec. (1.2) son:

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}}$$

Problema 2

Considera tres sistemas de referencia inerciales $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ y $\mathcal{O}''$ en un espacio-tiempo 1+1-dimensional. El sistema se mueve con velocidad v a lo largo de la dirección positiva del eje x respecto a $\mathcal{O}$, mientras que el sistema $\mathcal{O}''$ se mueve con velocidad $-v$ también respecto a $\mathcal{O}$ (es decir, en la dirección x negativa). Además, estos sistemas son tales que el origen de los tres coincide en el mismo evento A.

a) Pinta los ejes de los tres sistemas en el diagrama de $\mathcal{O}$. Indica con claridad cuál es la inclinación de los ejes.

Solución

Tenemos que la línea de mundo del observador de $\mathcal{O}'$ cuando $x = 0$, la cual coincide con el eje t', está dada como:

$$x = vt. \tag{2.1}$$

Asimismo, la línea de mundo para $\mathcal{O}''$ cuando $x = 0$, es

$$x = -vt. \tag{2.2}$$

Donde las ecs. (2.1) y (2.2) tienen el mismo ángulo de inclinación pero en dirección opuesta, tal que el ángulo de t' y t'', respectivamente,

$$\boxed{\theta = \arctan v \quad \wedge \quad \theta = -\arctan v.}$$

De esta manera, lo ejes de los tres sistemas en el diagrama de $\mathcal{O}$ quedan como en la figura 1.

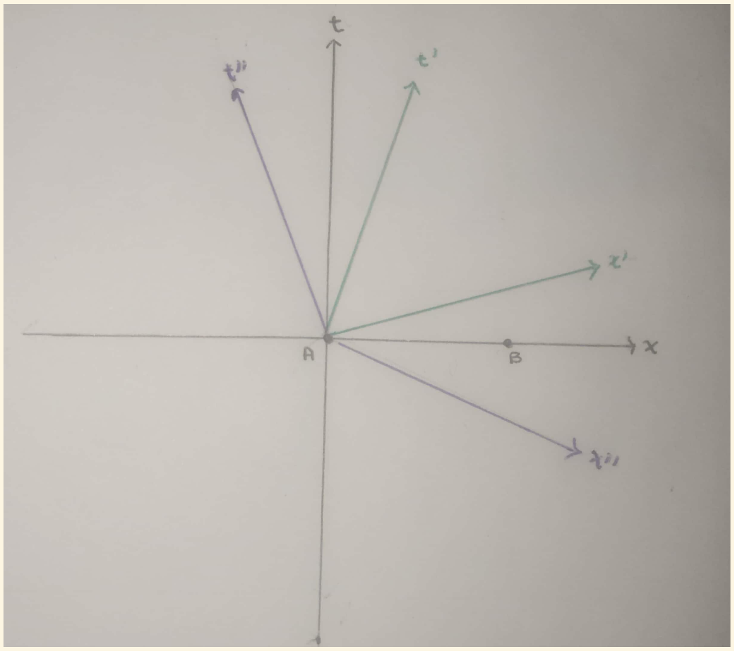

Figura 1: Ejes coordenados de $\mathcal{O}'$ y $\mathcal{O}''$ en el diagrama de $\mathcal{O}$.

b) Elige algún evento B en el eje x (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y B? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que use para hacer el cálculo.

Solución

En la figura 2, se muestran los conos de luz para los eventos A y B, respectivamente.

Notamos entonces que para el evento A, B está fuera su cono de luz y, para B, A está fuera de su cono de luz. Esto quiere decir que para el observador $\mathcal{O}$, la separación entre A y B es espacialoide, **i.e.**, $(\Delta s)^2 > 0$.

Analíticamente podemos determinar que la afirmación anterior es verdadera. Así,

$$
\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2, \\
&= -(0-0)^2 + (x_B - 0)^2, \\
(\Delta s)^2 &= {x_B}^2.
\end{aligned}
$$

En particular notamos que B es un evento diferente del origen, por lo que $x_B \neq 0 \implies {x_B}^2 > 0$. Por lo tanto,

$$\boxed{(\Delta s)^2 > 0.}$$

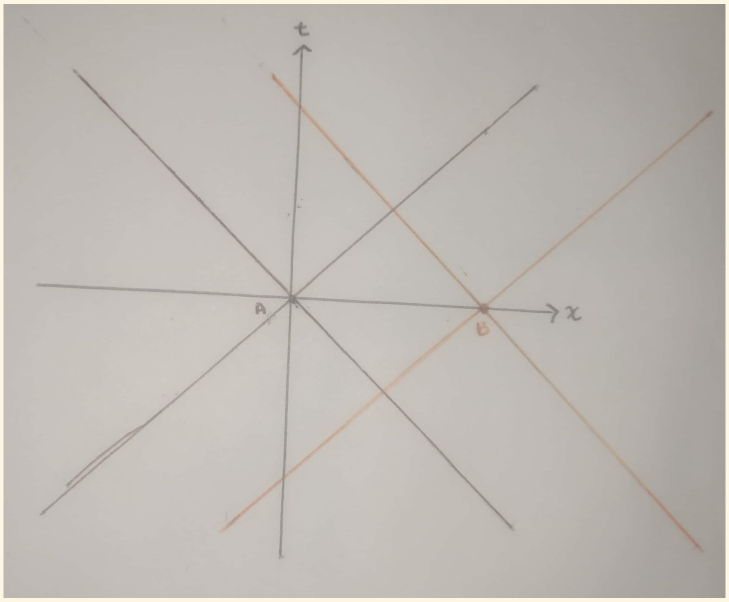

Figura 2: Conos de luz de los eventos A y B.

c) ¿Según $\mathcal{O}$ qué evento ocurre primero, A o B?

Solución

Para $\mathcal{O}$ los eventos A y B son simultáneos, ya que ocurren al tiempo $t = 0$.

d) ¿Según $\mathcal{O}'$ qué evento ocurre primero, A o B? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según $\mathcal{O}'$.

Solución

Para determinar cuál de los eventos ocurre primero, dibujamos los ejes de $\mathcal{O}$ en el diagrama de $\mathcal{O}'$, así como los eventos.

De tal manera que observamos que para $\mathcal{O}'$, el evento B ocurre primero. Y, además, los eventos simultáneos a B son aquellos que ocurren al tiempo $t' = t_B{}'$ (véase figura 3).

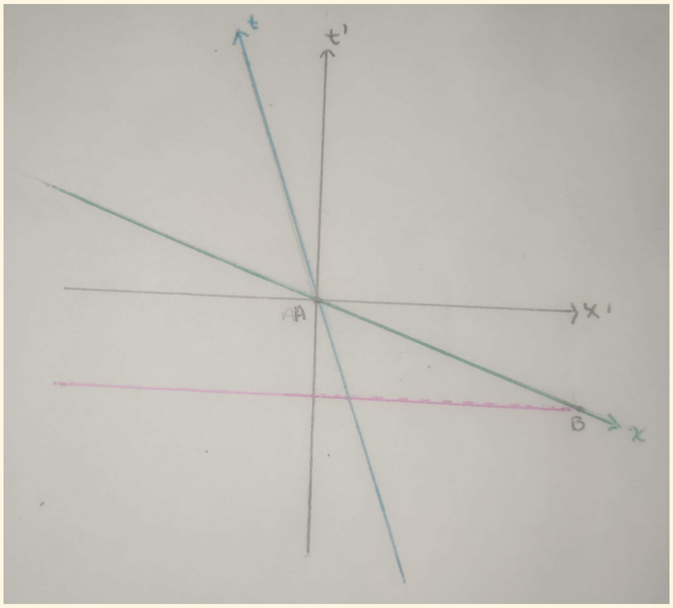

Figura 3: Eventos A y B dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}'$.

e) ¿Según $\mathcal{O}''$ qué evento ocurre primero, A o B? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según $\mathcal{O}''$.

Solución

Los ejes de $\mathcal{O}'$ dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}''$ queda igual que los ejes de $\mathcal{O}'$ en el diagrama de $\mathcal{O}$. Esto se debe a que $\mathcal{O}''$ observa que $\mathcal{O}$ se aleja con velocidad $v > 0$ respecto a éste (véase figura 4).

De esta manera, notamos que para $\mathcal{O}''$ el evento A ocurre primero. Y los eventos simultáneos a B ocurren a $t'' = t_B''$.

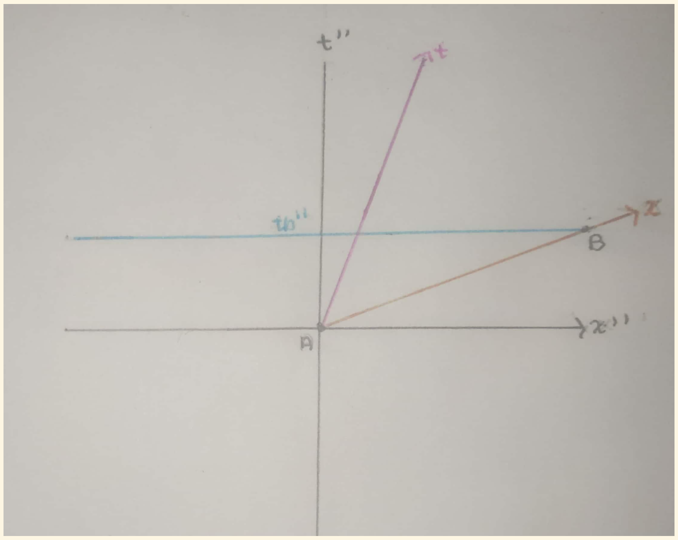

Figura 4: Ejes de $\mathcal{O}$ dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}''$, así como la línea de los eventos simultáneos al evento B.

f) Elige ahora un evento C en el eje t (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y C? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que uses para hacer el cálculo.

Solución

Dibujamos un punto C (véase figura 5), tal que $x = 0$, **i.e.**, $(c, 0)$, con $c \neq 0$. Además, dibujamos el cono de luz correspondiente a cada evento, tenemos que la separación entre estos es de tipo temporaloide.

Analíticamente podemos comprobar esta afirmación, tal que,

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2, \\ &= -(t_C - 0)^2 + (0 - 0)^2, \\ &= -(t_C)^2.\end{aligned}$$

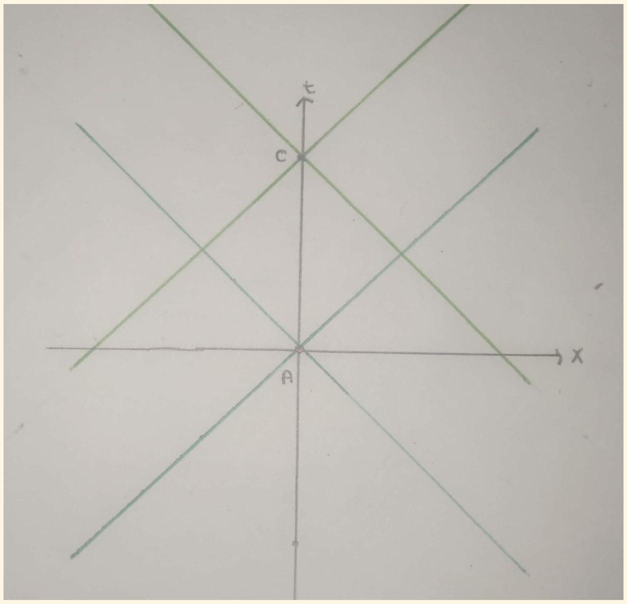

Figura 5: Conos de luz correspondientes a los eventos A y B para determinar el tipo de separación que hay entre estos.

Notamos entonces que sin importar que el evento C suceda antes o después del evento A, su intervalo siempre será $(\Delta s)^2 < 0$, lo cual nos permite, una vez más, concluir que la separación entre los eventos es temporaloide.

g) ¿Según $\mathcal{O}$ qué evento ocurre primero, A o C?

Por como dibujamos el evento C en la figura 5, tenemos que para $\mathcal{O}$ el evento A ocurre primero.

h) ¿Según $\mathcal{O}'$ qué evento ocurre primero, A o C? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a C según $\mathcal{O}'$.

Solución

Ahora queremos determinar cuál de los eventos del inciso e) ocurre primero para $\mathcal{O}'$. Dibujamos el diagrama de espacio-tiempo de la figura 3, agregando el evento C.

Observamos entonces que para $\mathcal{O}'$ el evento que ocurre primero es A y, además, los eventos simultáneos a C son aquellos que ocurren al tiempo $t' = t_C{}'$ (véase figura 6).

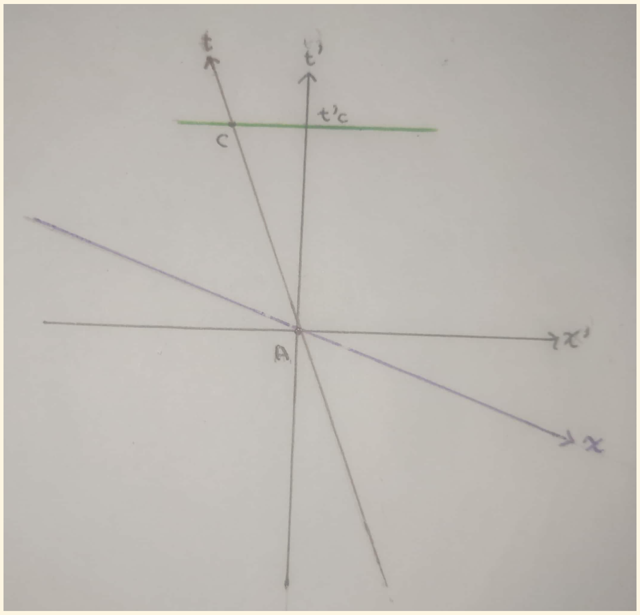

Figura 6: Eventos A y C dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}'$, así como la línea de los eventos simultáneos a C.

i) ¿Según $\mathcal{O}''$ qué evento ocurre primero, A o C? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a C según $\mathcal{O}''$.

Solución

Replicando el diagrama de la figura 4 agregando el evento C, tenemos que directamente podemos determinar que el evento A ocurre primero para el observador $\mathcal{O}''$ y, además, los eventos simultáneos a C son aquellos que ocurren a $t'' = t_C''$ (véase figura 7).

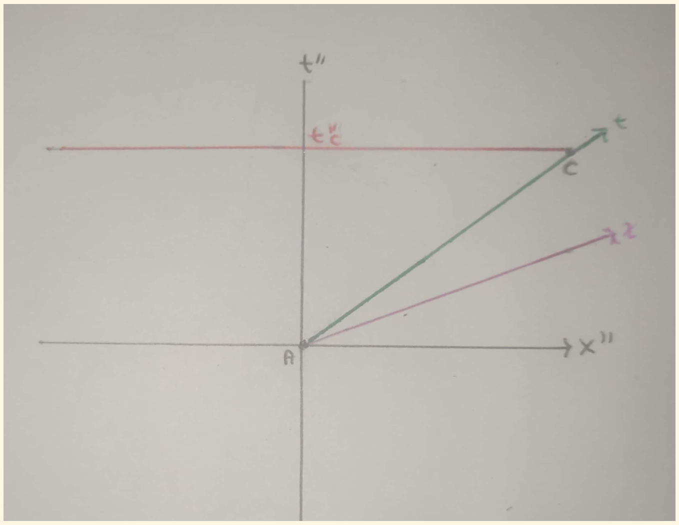

Figura 7: Eventos A y C dibujados en el diagrama de $\mathcal{O}''$, así como la línea de los eventos simultáneos a C.

Problema 3

Es útil aprender a visualizar el intervalo entre dos eventos en los diagramas de espacio-tiempo, similar a como sabemos visualizar la distancia entre dos puntos en el espacio Euclidiano. Considera así un espacio-tiempo 1+1-dimensional y dos observadores inerciales $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ en éste, tales que $\mathcal{O}'$ se mueve con velocidad $v > 0$ respecto a $\mathcal{O}$. El origen de ambos está colocado en el origen.

a) Localiza en el diagrama de $\mathcal{O}$ al evento B de coordenadas $(b, 0)$ con $b > 0$.

Solución

El punto B se localiza en la parte positiva del eje t (véase la figura 8).

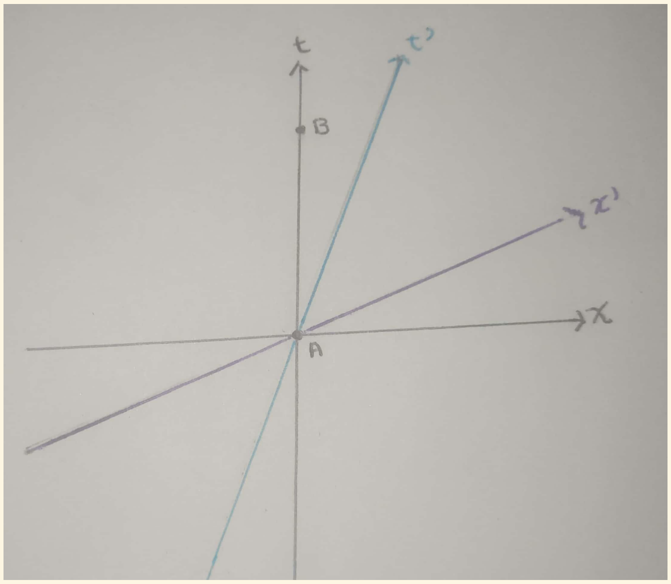

Figura 8: Evento $B = (b, 0)$ dibujado en el diagrama de espacio-tiempo de $\mathcal{O}$.

b) Calcula el intervalo $(\Delta s_{AB})^2$ entre A y B. ¿Qué tipo de separación hay entre estos eventos?

Calculamos el intervalo entre los eventos A y B, tal que,

$$
\begin{aligned}
(\Delta s_{AB})^2 &= -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2, \\
&= -(b-0)^2 + (0-0)^2, \\
\boxed{(\Delta s_{AB})^2 = -b^2.} \quad (3.1)
\end{aligned}
$$

De la ec. (3.1), tenemos que

$$(\Delta s_{AB})^2 < 0$$

Por lo tanto, la separación entre los eventos es de tipo temporaloide.

c) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos C tales que $(\Delta s_{AC})^2 = (\Delta s_{AB})^2$, es decir, de todos los eventos que equidistan espacio-temporalmente de A. Pinta este lugar geométrico en el diagrama de $\mathcal{O}$ (ambas ramas).

Solución

Sea C un evento distinto del origen, tal que $(\Delta s_{AB})^2 = (\Delta s_{AC})^2$. Sustituyendo la ec. (3.1) en la aseveración anterior,

$$\begin{aligned}-b^2 &= -(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2,\\ &= -(t_C - 0)^2 + (x_C - 0)^2,\\ \Aboxed{-b^2 &= -{t_C}^2 + {x_C}^2.}\end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión anterior,

$$\boxed{-\frac{{x_C}^2}{b^2} + \frac{{t_C}^2}{b^2} = 1.} \tag{3.2}$$

El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan al evento A se muestra en la figura 9.

d) Pinta los ejes de $\mathcal{O}'$ em el diagrama de $\mathcal{O}$. ¿El lugar geométrico que encontraste en el inciso c) intersecta con el eje t'? ¿En qué eventos? Márcalos en el diagrama.

Solución

Para encontrar en que punto se intersectan la ec. (3.2) y el eje t' debemos igualar las expresiones, pero primero debemos resolver la ec. (3.2) para x, tal que,

$$\boxed{x = \sqrt{t^2 - b^2}.} \tag{3.3}$$

Igualando la ec. (3.3) y $x = vt$ (ecuación de t').

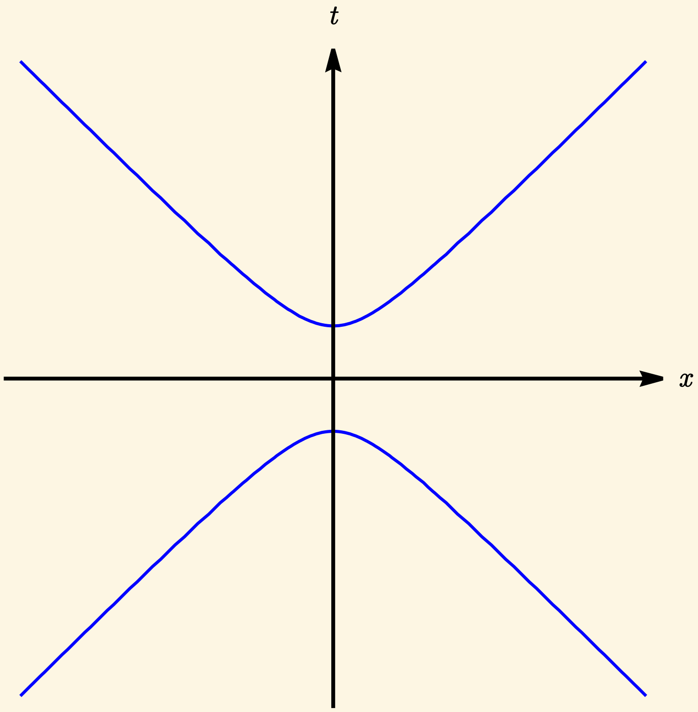

Figura 9: Lugar geométrico de los puntos equidistantes a B, dado por $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{t^2}{b^2}=1$.

$$vt=\sqrt{t^2-b^2},$$

$$v^2t^2=t^2-b^2,$$

$$\boxed{t=\pm\frac{b}{\sqrt{1-v^2}}.} \tag{3.4}$$

Sustituyendo la ec. (3.4) en $x = vt$,

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{vb}{\sqrt{1-v^2}}, \\ x_2 &= \frac{-vb}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}} \tag{3.5}$$

Así, de las ecs. (3.4) y (3.5), los puntos de intersección son:

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= \left(\frac{b}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{-vb}{\sqrt{1-v^2}}\right), \\ \zeta' &= \left(\frac{-b}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{-vb}{\sqrt{1-v^2}}\right). \end{aligned}} \tag{3.6}$$

En la figura 10 se muestra los eventos en los que se intersectan las ec. (3.2) y el eje t'.

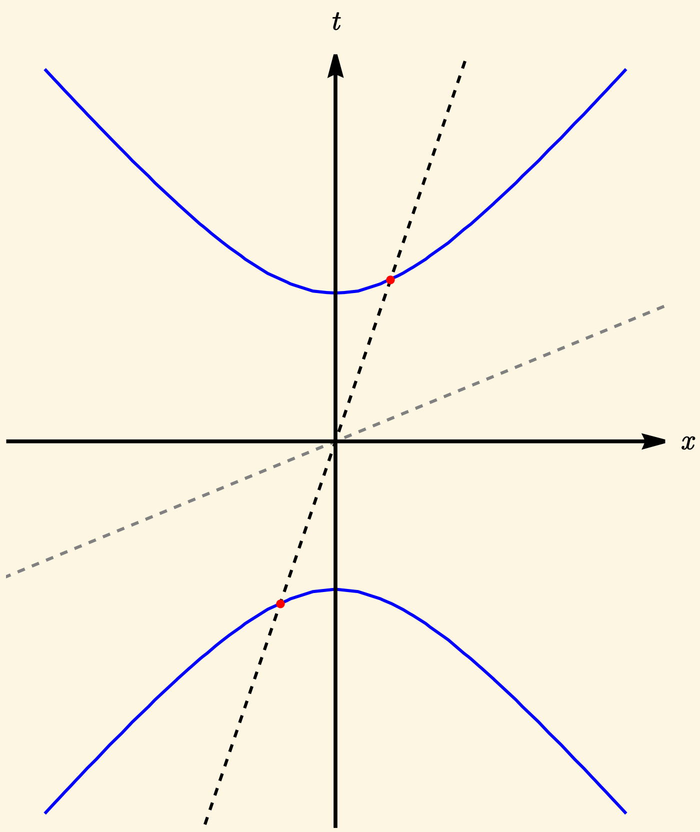

Figura 10: Intersección del lugar geométrico de los eventos equidistantes a A y el eje t', donde los ejes (en sentido de las manecillas del reloj) son t' y x'.

e) Denota a uno de los eventos que encontraste en d) como D. ¿Cuánto vale el intervalo $(\Delta s'_{AD})^2$ entre D y A según $\mathcal{O}'$? Recuerda: el intervalo es invariante.

Solución

Ahora calculamos el intervalo entre los eventos D (ec. (3.6)) y A.

$$\begin{aligned}
(\Delta s_{AD}')^2 &= -\left(\frac{b}{\sqrt{1-v^2}} - 0\right)^2 + \left(\frac{-vb}{\sqrt{1-v^2}} - 0\right)^2, \\
&= -\frac{b^2}{1-v^2} + \frac{v^2 b^2}{1-v^2}, \\
&= \frac{-b^2}{1-v^2}(1-v^2), \\
\boxed{(\Delta s_{AD}')^2 = -b^2.}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Notamos entonces de las ecs. (3.1) y (3.7),

$$\boxed{(\Delta s_{AB})^2 = (\Delta s_{AD}')^2.}$$

f) Usa tu resultado de e) para escribir las coordenadas del evento D en el sistema $\mathcal{O}'$. Lo que acabas de hacer es escalar los ejes, es decir, has determinado lo que cada observador llama b metros.

Solución

Puesto que el evento D se encuentra en el eje t', lo único que necesitamos para escribirlo en coordenadas del sistema $\mathcal{O}'$ es hacer la coordenada $x' = 0$. Así,

$$\boxed{E = \left(\frac{b}{\sqrt{1-v^2}}, 0\right).} \tag{3.8}$$

g) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos E tales que $(\Delta s'_{AD})^2 = (\Delta s'_{AE})^2$. ¿Tienen algún parecido con tu respuesta de c)?

Solución

El lugar geométrico para todos los eventos E está dado por

$$\boxed{-\frac{{x_E}^2}{b^2} + \frac{{t_E}^2}{b^2} = 1.}$$

El parecido tiene que tiene con c) es que son iguales, ya que ambos eventos están sobre el lugar geométrico representado por la hipérbola.