

Tarea 2

Entrega: 1 de septiembre de 2022

Problema 1

a) Considera la distancia Euclidiana en \mathbb{R}^2 definida por

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Demuestra que la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

donde θ es un ángulo constante.

Solución

A partir de las transformaciones, tenemos que

$$x'^0 = x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta,$$

$$y'^0 = x^0 \sin \theta + y^0 \cos \theta,$$

$$x'^1 = x^1 \cos \theta - y^1 \sin \theta,$$

$$y'^1 = x^1 \sin \theta + y^1 \cos \theta.$$

{eq:points}eq:point
(1.1)

Sustituyendo (1.1) en la expresión para la distancia Euclidiana,

$$\begin{aligned} (\Delta r')^2 &= (x'^1 - x'^0)^2 + (y'^1 - y'^0)^2, \\ &= ((x^1 \cos \theta - y^1 \sin \theta) - (x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta))^2 + ((x^1 \sin \theta + y^1 \cos \theta) - (x^0 \sin \theta + y^0 \cos \theta))^2, \\ &= (\cos \theta (x^1 - x^0) - \sin \theta (y^1 - y^0))^2 + (\cos \theta (x^1 - x^0) + \sin \theta (y^1 - y^0))^2, \\ &= (x^1 - x^0)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (y^1 - y^0)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \\ &= (x^1 - x^0)^2 + (y^1 - y^0)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta r)^2.$$

Es decir, la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones.

- b) Considera ahora un espacio-tiempo 2+1-dimensional y un observador inercial \mathcal{O} en éste.

En clase mencionamos que las transformaciones relativistas que buscamos deben dejar invariante al intervalo entre dos eventos, definido como

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Dado lo que acabas de demostrar en a), ¿se te ocurre un ejemplo de una transformación que deje invariante al intervalo? Es una transformación espacio-temporal, así que también debes especificar cuál es el cambio en la coordenada temporal.

Solución

Las transformaciones que dejan invariante al intervalo son las transformaciones de Lorentz, tales que \mathcal{O}' se mueve con $v > 0$ en la dirección positiva del eje x , tales que,

$$t' = \gamma(t - vx),$$

$$x' = \gamma(x - vt),$$

$$y' = y,$$

{eq:lorentzT}{eq:loren
(1.2)}

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, y' permanece invariante ya que no hay movimiento en esa dirección.

Sustituyendo (1.2) en la expresión para el intervalo,

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= -(\gamma(t'' - vx'') - \gamma(t - vx))^2 + (\gamma(x'' - vt'') - \gamma(x - vt))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= -\gamma^2((t'' - t) - v(x'' - x))^2 + \gamma^2((x'' - x) - v(t'' - t))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= \gamma^2[(1 - v^2)(\Delta x')^2 - (1 - v^2)(\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= \frac{1}{(1 - v^2)}(1 - v^2)[(\Delta x')^2 - (\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta s')^2 = -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta s)^2$$

Es decir, el intervalo es invariante ante las transformaciones de Lorentz.

Problema 2

Considera tres sistemas de referencia inerciales \mathcal{O} , \mathcal{O}' y \mathcal{O}'' en un espacio-tiempo 1+1-dimensional. El sistema se mueve con velocidad v a lo largo de la dirección positiva del eje x respecto a \mathcal{O} , mientras que el sistema \mathcal{O}'' se mueve con velocidad $-v$ también respecto a \mathcal{O} (es decir, en la dirección x negativa). Además, estos sistemas son tales que el origen de los tres coincide en el mismo evento A .

- a) Pinta los ejes de los tres sistemas en el diagrama de \mathcal{O} . Indica con claridad cuál es la inclinación de los ejes.

Solución

Tenemos que la línea de mundo del observador de \mathcal{O}' cuando $x = 0$, la cual coincide con el eje t' , está dada como:

$$x = vt. \quad \text{(2.1)}$$

Asimismo, la línea de mundo para \mathcal{O}'' cuando $x = 0$, es

$$x = -vt. \quad \text{(2.2)}$$

Donde las ecs. (2.1) y (2.2) tienen el mismo ángulo de inclinación pero en dirección opuesta, tal que el ángulo de t' y t'' , respectivamente,

$$\theta = \arctan v \quad \wedge \quad \theta = -\arctan v.$$

De esta manera, los ejes de los tres sistemas en el diagrama de \mathcal{O} quedan como en la figura 1.

- b) Elige algún evento B en el eje x (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y B ? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que use para hacer el cálculo.

Solución

En la figura 2, se muestran los conos de luz para los eventos A y B , respectivamente.

Notamos entonces que para el evento A , B está fuera su cono de luz y, para B , A está fuera de su cono de luz. Esto quiere decir que para el observador \mathcal{O} , la separación entre A y B es espacial oide, i.e., $(\Delta s)^2 > 0$.

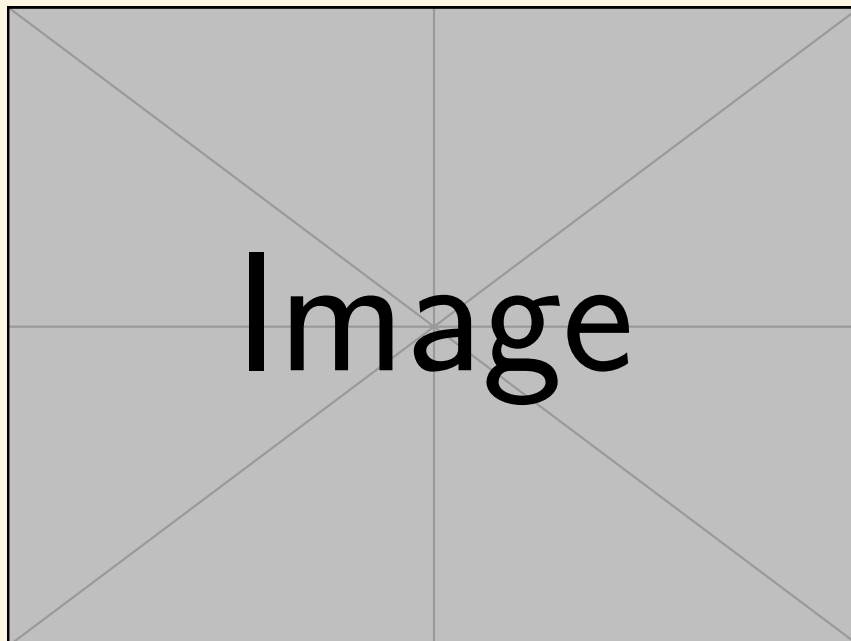


Figura 1: Ejes coordenados de \mathcal{O}' y \mathcal{O}'' en el diagrama de \mathcal{O} .

Analíticamente podemos determinar que la afirmación anterior es verdadera. Así,

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2, \\ &= -(0 - 0)^2 + (x_B - 0)^2, \\ (\Delta s)^2 &= x_B^2.\end{aligned}$$

En particular notamos que B es un evento diferente del origen, por lo que $x_B \neq 0 \implies x_B^2 > 0$. Por lo tanto,

$$(\Delta s)^2 > 0.$$

c) ¿Según \mathcal{O} qué evento ocurre primero, A o B ?

Solución

Para \mathcal{O} los eventos A y B son simultáneos, ya que ocurren al tiempo $t = 0$.

d) ¿Según \mathcal{O}' qué evento ocurre primero, A o B ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según \mathcal{O}' .

Solución

Para determinar cuál de los eventos ocurre primero, dibujamos los ejes de \mathcal{O} en el diagrama de \mathcal{O}' , así como los eventos.

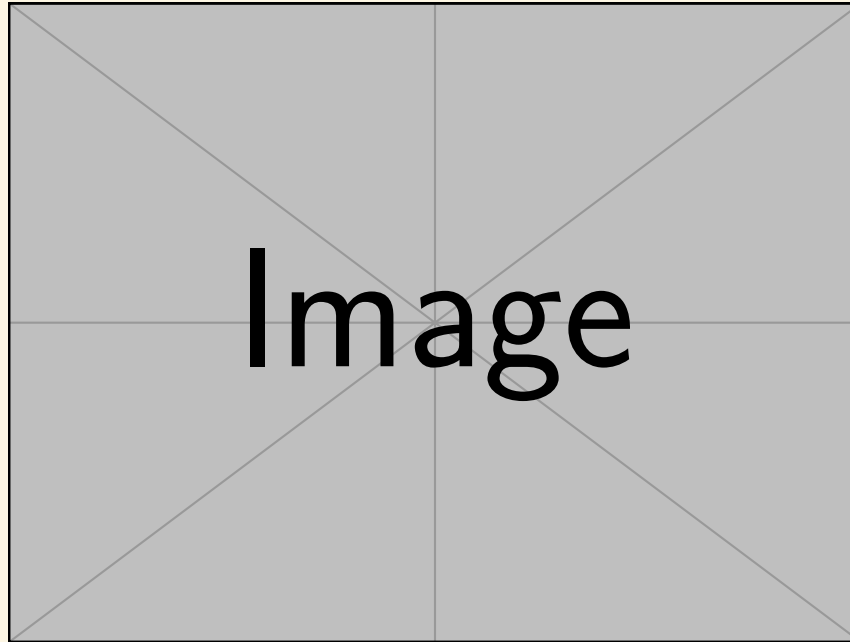
Figura 2: Conos de luz de los eventos A y B .

fig:ABEventsIn0

De tal manera que observamos que para \mathcal{O}' , el evento B ocurre primero. Y, además, los eventos simultáneos a B son aquellos que ocurren al tiempo $t' = t_B'$ (véase figura 3).

- e) ¿Según \mathcal{O}'' qué evento ocurre primero, A o B ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según \mathcal{O}' .

Solución

Los ejes de \mathcal{O}' dibujados en el diagrama de \mathcal{O}'' queda igual que los ejes de \mathcal{O}' en el diagrama de \mathcal{O} . Esto se debe a que \mathcal{O}'' observa que \mathcal{O} se aleja con velocidad $v > 0$ respecto a éste.

De esta manera, notamos que para \mathcal{O}'' el evento A ocurre primero. Y los eventos simultáneos a B ocurren a $t'' = t_B''$.

- f) Elige ahora un evento C en el eje t (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y C ? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que uses para hacer el cálculo.

Solución

Dibujamos un punto C , tal que $x = 0$, **i.e.**, $(c, 0)$, con $c \neq 0$. Además, dibujamos el cono de luz correspondiente a cada evento, tenemos que la separación entre estos es de tipo temporaloide.

Analíticamente podemos comprobar esta afirmación, tal que,

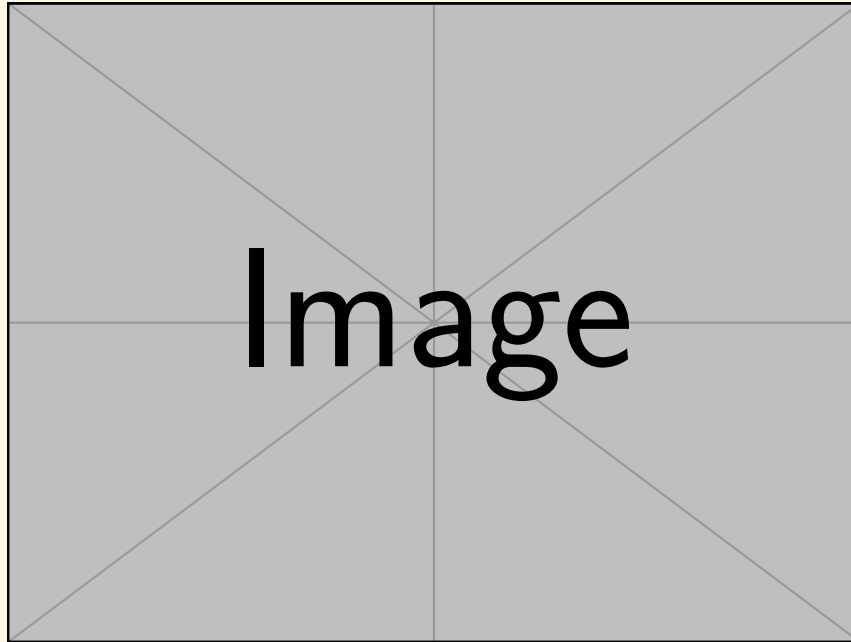
Figura 3: Eventos A y B dibujados en el diagrama de \mathcal{O}' .

fig:ABInOPrime

$$\begin{aligned}
 (\Delta s)^2 &= -(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2, \\
 &= -(t_C - 0)^2 + (0 - 0)^2, \\
 &= -(t_C)^2.
 \end{aligned}$$

Notamos entonces que sin importar que el evento C suceda antes o después del evento A , su intervalo siempre será $(\Delta s)^2 < 0$, lo cual nos permite, una vez más, concluir que la separación entre los eventos es temporal.

g) ¿Según \mathcal{O} qué evento ocurre primero, A o C ?

Por como dibujamos el evento C en la figura 5, tenemos que para \mathcal{O} el evento A ocurre primero.

h) ¿Según \mathcal{O}' qué evento ocurre primero, A o C ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a C según \mathcal{O}' .

Solución

Ahora queremos determinar cuál de los eventos del inciso e) ocurre primero para \mathcal{O}' . Dibujamos el diagrama de espacio-tiempo de la ??, agregando el evento C .

Observamos entonces que para \mathcal{O}' el evento que ocurre primero es A y, además, los eventos simultáneos a C son aquellos que ocurren al tiempo $t' = t_C'$ (véase figura 6).

i) ¿Según \mathcal{O}'' qué evento ocurre primero, A o C ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a

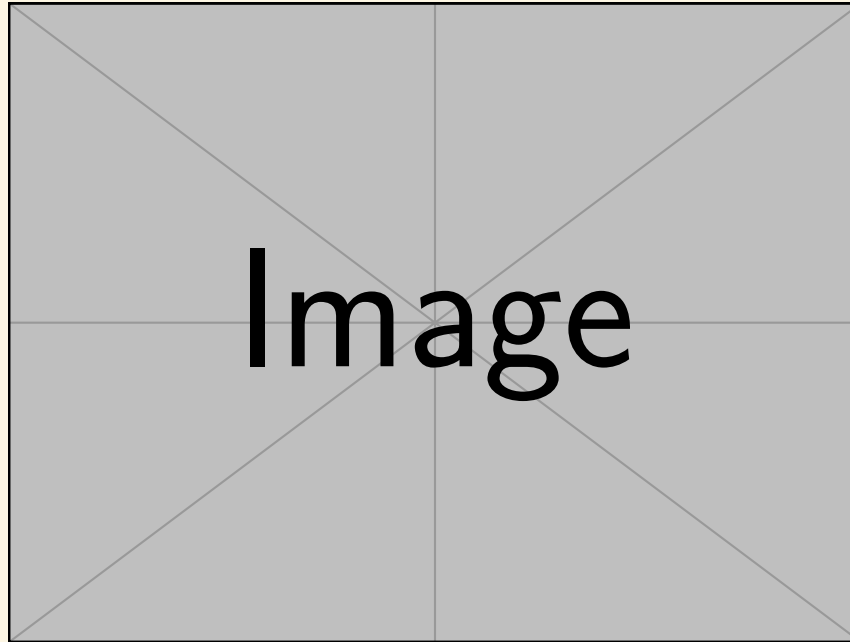


Figura 4: Ejes de \mathcal{O} dibujados en el diagrama de \mathcal{O}'' , así como la línea de los eventos simultáneos al evento B . fig:0In0PrimePrime

C según \mathcal{O}'' .

Solución

Replicando el diagrama de la figura 4 agregando el evento C , tenemos que directamente podemos determinar que el evento A ocurre primero para el observador \mathcal{O}'' y, además, los eventos simultáneos a C son aquellos que ocurren a $t'' = t_C''$ (véase figura 7).

Problema 3

Es útil aprender a visualizar el intervalo entre dos eventos en los diagramas de espacio-tiempo, similar a como sabemos visualizar la distancia entre dos puntos en el espacio Euclidiano. Considera así un espacio-tiempo 1+1-dimensional y dos observadores inerciales \mathcal{O} y \mathcal{O}' en éste, tales que \mathcal{O}' se mueve con velocidad $v > 0$ respecto a \mathcal{O} . El origen de ambos está colocado en el origen.

- a) Localiza en el diagrama de \mathcal{O} al evento B de coordenadas $(b, 0)$ con $b > 0$.

Solución

El punto B se localiza en la parte positiva del eje t (véase la figura 8).

- b) Calcula el intervalo $(\Delta s_{AB})^2$ entre A y B . ¿Qué tipo de separación hay entre estos eventos?

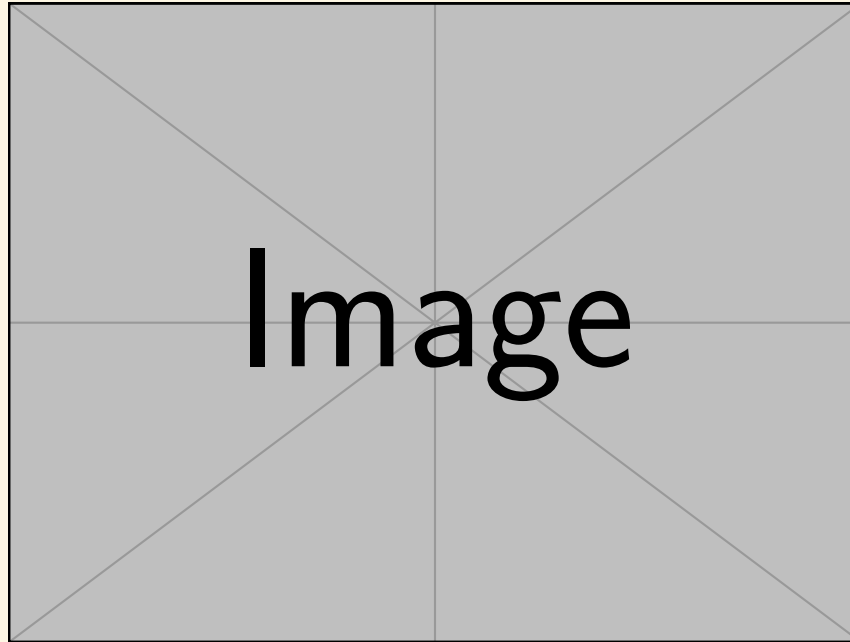


Figura 5: Conos de luz correspondientes a los eventos A y B para determinar el tipo de separación que hay entre estos.

fig:ABIntervalIn0

- c) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos C tales que $(\Delta s_{AC})^2 = (\Delta s_{AB})^2$, es decir, de todos los eventos que equidistan espacio-temporalmente de A . Pinta este lugar geométrico en el diagrama de \mathcal{O} (ambas ramas).
- d) Pinta los ejes de \mathcal{O}' en el diagrama de \mathcal{O} . ¿El lugar geométrico que encontraste en el inciso c) intersecta con el eje t' ? ¿En qué eventos? Márcalos en el diagrama.
- e) Denota a uno de los eventos que encontraste en d) como D . ¿Cuánto vale el intervalo $(\Delta s'_{AD})^2$ entre D y A según \mathcal{O}' ? Recuerda: el intervalo es invariante.
- f) Usa tu resultado de e) para escribir las coordenadas del evento D en el sistema \mathcal{O}' . Lo que acabas de hacer es escalar los ejes, es decir, has determinado lo que cada observador llama b metros.
- g) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos E tales que $(\Delta s'_{AD})^2 = (\Delta s'_{AE})^2$. ¿Tienen algún parecido con tu respuesta de c)?

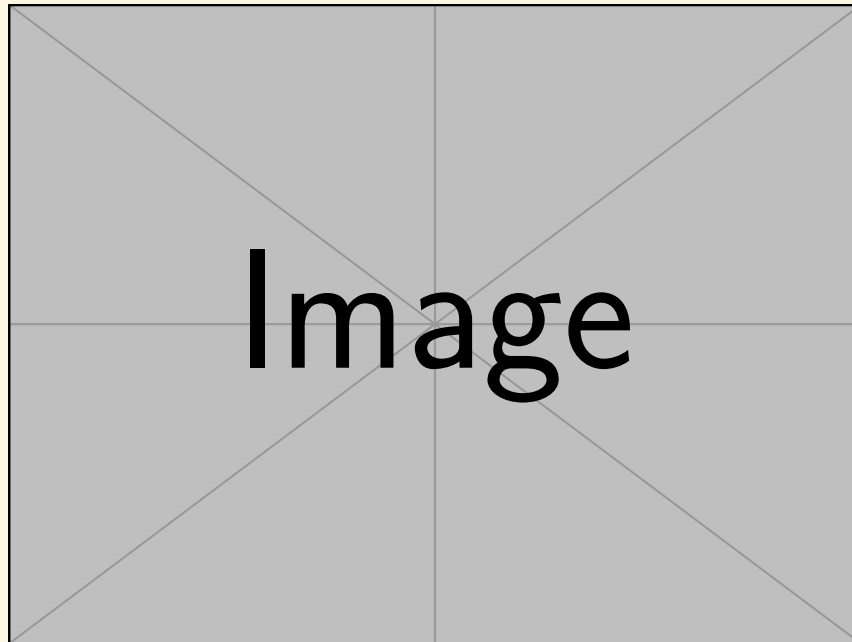


Figura 6: Eventos A y C dibujados en el diagrama de \mathcal{O}' , así como la línea de los eventos simultáneos a C .

fig:ACIn0Prime

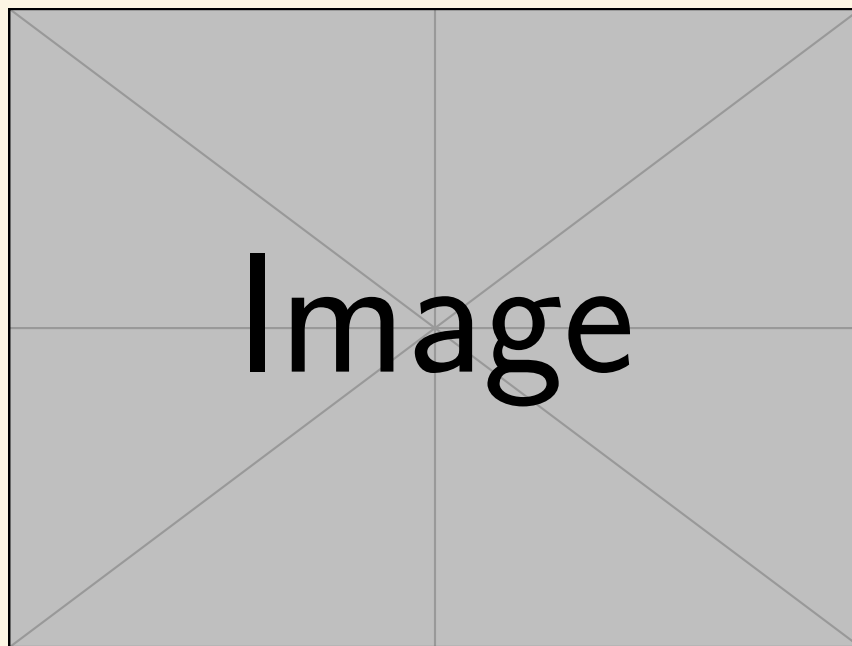


Figura 7: Eventos A y C dibujados en el diagrama de \mathcal{O}' , así como la línea de los eventos simultáneos a C .

fig:ACIn0PrimePrime

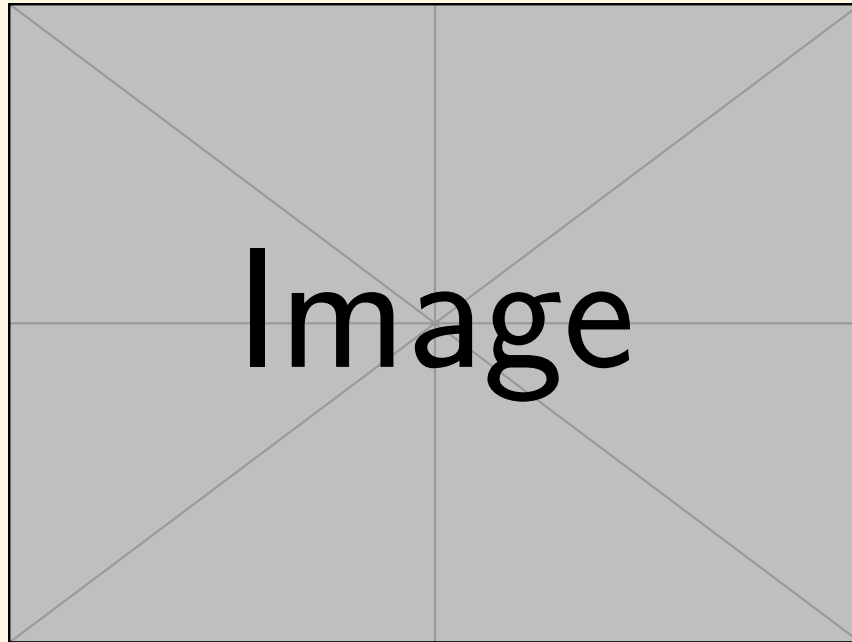


Figura 8: Evento $B = (b, 0)$ dibujado en el diagrama de espacio-tiempo de \mathcal{O} . Bequal**sb0In0**

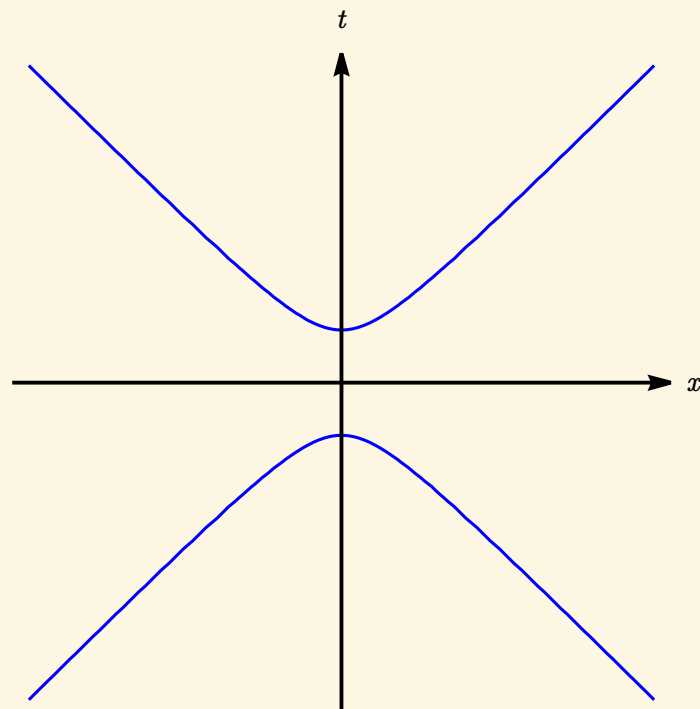


Figura 9: Lugar geométrico de los puntos equidistantes a B , dado por $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{t^2}{b^2} = 1$. **fig.hyperbole**