

# Tarea 2

Entrega: 1 de septiembre de 2022

## Problema 1

a) Considera la distancia Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$  definida por

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Demuestra que la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

donde  $\theta$  es un ángulo constante.

### Solución

A partir de las transformaciones, tenemos que

$$x'^0 = x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta,$$

$$y'^0 = x^0 \sin \theta + y^0 \cos \theta,$$

$$x'^1 = x^1 \cos \theta - y^1 \sin \theta,$$

$$y'^1 = x^1 \sin \theta + y^1 \cos \theta.$$

{eq:points}eq:point  
(1.1)

Sustituyendo (1.1) en la expresión para la distancia Euclidiana,

$$\begin{aligned} (\Delta r')^2 &= (x'^1 - x'^0)^2 + (y'^1 - y'^0)^2, \\ &= ((x^1 \cos \theta - y^1 \sin \theta) - (x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta))^2 + ((x^1 \sin \theta + y^1 \cos \theta) - (x^0 \sin \theta + y^0 \cos \theta))^2, \\ &= (\cos \theta (x^1 - x^0) - \sin \theta (y^1 - y^0))^2 + (\cos \theta (x^1 - x^0) + \sin \theta (y^1 - y^0))^2, \\ &= (x^1 - x^0)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (y^1 - y^0)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \\ &= (x^1 - x^0)^2 + (y^1 - y^0)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta r)^2.$$

Es decir, la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones.

- b) Considera ahora un espacio-tiempo 2+1-dimensional y un observador inercial  $\mathcal{O}$  en éste.

En clase mencionamos que las transformaciones relativistas que buscamos deben dejar invariante al intervalo entre dos eventos, definido como

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Dado lo que acabas de demostrar en a), ¿se te ocurre un ejemplo de una transformación que deje invariante al intervalo? Es una transformación espacio-temporal, así que también debes especificar cuál es el cambio en la coordenada temporal.

### Solución

Las transformaciones que dejan invariante al intervalo son las transformaciones de Lorentz, tales que  $\mathcal{O}'$  se mueve con  $v > 0$  en la dirección positiva del eje  $x$ , tales que,

$$t' = \gamma(t - vx),$$

$$x' = \gamma(x - vt),$$

$$y' = y,$$

{eq:lorentzT}{eq:loren  
(1.2)}

donde  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ,  $y'$  permanece invariante ya que no hay movimiento en esa dirección.

Sustituyendo (1.2) en la expresión para el intervalo,

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= -(\gamma(t'' - vx'') - \gamma(t - vx))^2 + (\gamma(x'' - vt'') - \gamma(x - vt))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= -\gamma^2((t'' - t) - v(x'' - x))^2 + \gamma^2((x'' - x) - v(t'' - t))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= \gamma^2[(1 - v^2)(\Delta x')^2 - (1 - v^2)(\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= \frac{1}{(1 - v^2)}(1 - v^2)[(\Delta x')^2 - (\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta s')^2 = -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta s)^2$$

Es decir, el intervalo es invariante ante las transformaciones de Lorentz.

## Problema 2

Considera tres sistemas de referencia inerciales  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}'$  y  $\mathcal{O}''$  en un espacio-tiempo 1+1-dimensional. El sistema se mueve con velocidad  $v$  a lo largo de la dirección positiva del eje  $x$  respecto a  $\mathcal{O}$ , mientras que el sistema  $\mathcal{O}''$  se mueve con velocidad  $-v$  también respecto a  $\mathcal{O}$  (es decir, en la dirección  $x$  negativa). Además, estos sistemas son tales que el origen de los tres coincide en el mismo evento  $A$ .

- a) Pinta los ejes de los tres sistemas en el diagrama de  $\mathcal{O}$ . Indica con claridad cuál es la inclinación de los ejes.

### Solución

Tenemos que la línea de mundo del observador de  $\mathcal{O}'$  cuando  $x = 0$ , la cual coincide con el eje  $t'$ , está dada como:

$$x = vt. \quad \text{(2.1)}$$

Asimismo, la línea de mundo para  $\mathcal{O}''$  cuando  $x = 0$ , es

$$x = -vt. \quad \text{(2.2)}$$

Donde las ecs. (2.1) y (2.2) tienen el mismo ángulo de inclinación pero en dirección opuesta, tal que el ángulo de  $t'$  y  $t''$ , respectivamente,

$$\theta = \arctan v \quad \wedge \quad \theta = -\arctan v.$$

De esta manera, los ejes de los tres sistemas en el diagrama de  $\mathcal{O}$  quedan como en la figura 1.

- b) Elige algún evento  $B$  en el eje  $x$  (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre  $A$  y  $B$ ? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que use para hacer el cálculo.

### Solución

En la figura 2, se muestran los conos de luz para los eventos  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Notamos entonces que para el evento  $A$ ,  $B$  está fuera su cono de luz y, para  $B$ ,  $A$  está fuera de su cono de luz. Esto quiere decir que para el observador  $\mathcal{O}$ , la separación entre  $A$  y  $B$  es espacial oide, i.e.,  $(\Delta s)^2 > 0$ .

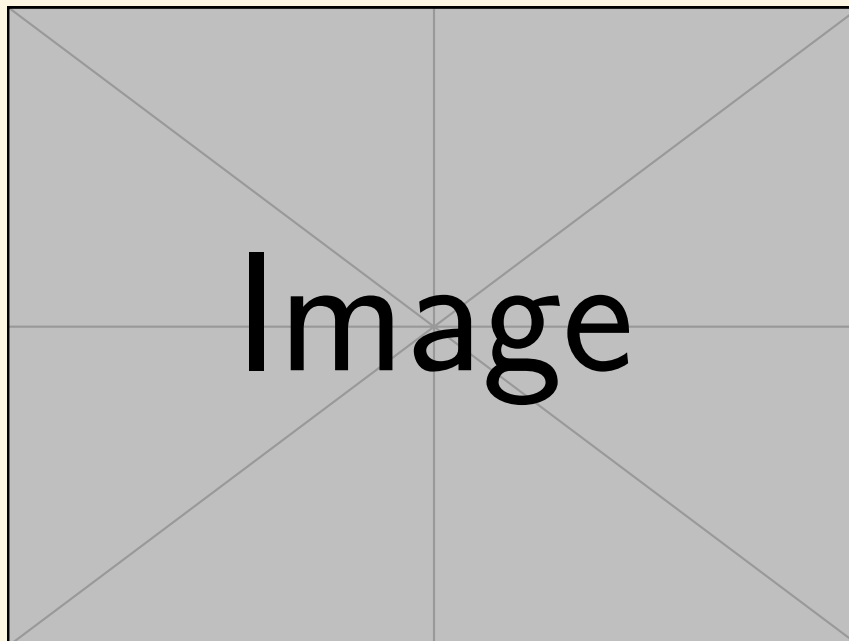


Figura 1: Ejes coordenados de  $\mathcal{O}'$  y  $\mathcal{O}''$  en el diagrama de  $\mathcal{O}$ .

Analíticamente podemos determinar que la afirmación anterior es verdadera. Así,

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(t_B - t_A)^2 + (x_B - x_A)^2, \\ &= -(0 - 0)^2 + (x_B - 0)^2, \\ (\Delta s)^2 &= x_B^2.\end{aligned}$$

En particular notamos que  $B$  es un evento diferente del origen, por lo que  $x_B \neq 0 \implies x_B^2 > 0$ . Por lo tanto,

$$(\Delta s)^2 > 0.$$

c) ¿Según  $\mathcal{O}$  qué evento ocurre primero,  $A$  o  $B$ ?

### Solución

Para  $\mathcal{O}$  los eventos  $A$  y  $B$  son simultáneos, ya que ocurren al tiempo  $t = 0$ .

d) ¿Según  $\mathcal{O}'$  qué evento ocurre primero,  $A$  o  $B$ ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a  $B$  según  $\mathcal{O}'$ .

### Solución

Para determinar cuál de los eventos ocurre primero, dibujamos los ejes de  $\mathcal{O}$  en el diagrama de  $\mathcal{O}'$ , así como los eventos.

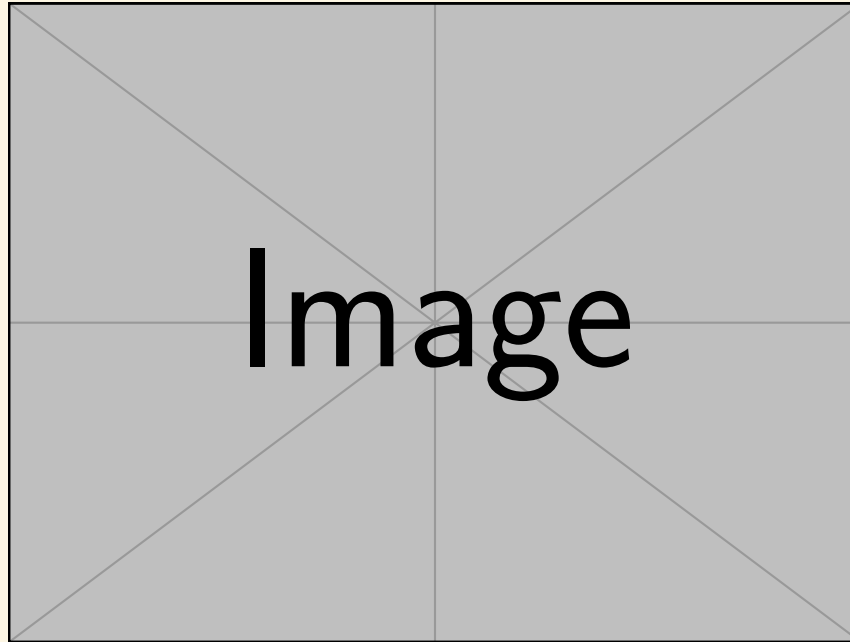
Figura 2: Conos de luz de los eventos  $A$  y  $B$ .

fig:ABEventsIn0

De tal manera que observamos que para  $\mathcal{O}'$ , el evento  $B$  ocurre primero. Y, además, los eventos simultáneos a  $B$  son aquellos que ocurren al tiempo  $t' = t_B'$  (véase figura 3).

- e) ¿Según  $\mathcal{O}''$  qué evento ocurre primero,  $A$  o  $B$ ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a  $B$  según  $\mathcal{O}'$ .

### Solución

Los ejes de  $\mathcal{O}'$  dibujados en el diagrama de  $\mathcal{O}''$  queda igual que los ejes de  $\mathcal{O}'$  en el diagrama de  $\mathcal{O}$ . Esto se debe a que  $\mathcal{O}''$  observa que  $\mathcal{O}$  se aleja con velocidad  $v > 0$  respecto a éste.

De esta manera, notamos que para  $\mathcal{O}''$  el evento  $A$  ocurre primero. Y los eventos simultáneos a  $B$  ocurren a  $t'' = t_B''$ .

- f) Elige ahora un evento  $C$  en el eje  $t$  (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre  $A$  y  $C$ ? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que uses para hacer el cálculo.

### Solución

Dibujamos un punto  $C$ , tal que  $x = 0$ , **i.e.**,  $(c, 0)$ , con  $c \neq 0$ . Además, dibujamos el cono de luz correspondiente a cada evento, tenemos que la separación entre estos es de tipo temporaloide.

Analíticamente podemos comprobar esta afirmación, tal que,

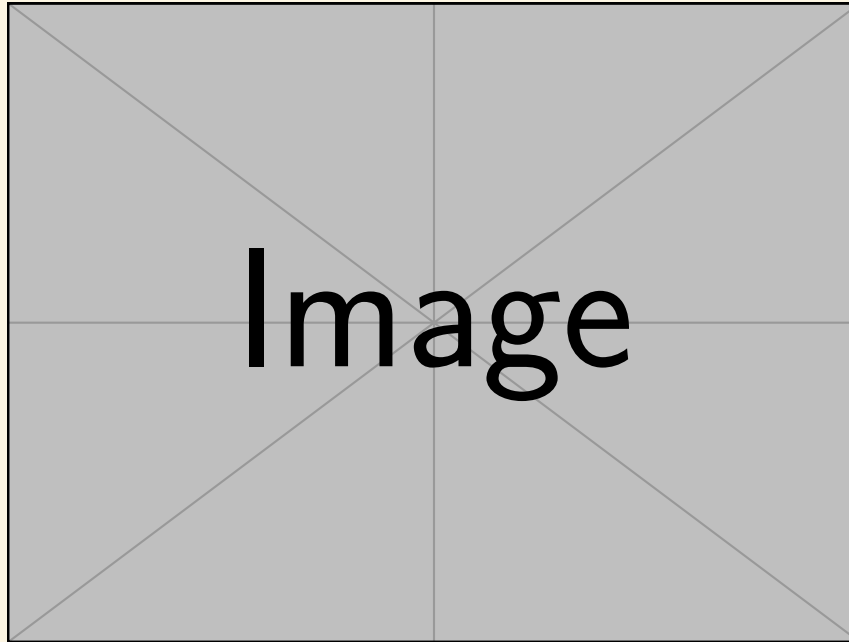
Figura 3: Eventos  $A$  y  $B$  dibujados en el diagrama de  $\mathcal{O}'$ .

fig:ABInOPrime

$$\begin{aligned}
 (\Delta s)^2 &= -(t_C - t_A)^2 + (x_C - x_A)^2, \\
 &= -(t_C - 0)^2 + (0 - 0)^2, \\
 &= -(t_C)^2.
 \end{aligned}$$

Notamos entonces que sin importar que el evento  $C$  suceda antes o después del evento  $A$ , su intervalo siempre será  $(\Delta s)^2 < 0$ , lo cual nos permite, una vez más, concluir que la separación entre los eventos es temporal.

g) ¿Según  $\mathcal{O}$  qué evento ocurre primero,  $A$  o  $C$ ?

Por como dibujamos el evento  $C$  en la figura 5, tenemos que para  $\mathcal{O}$  el evento  $A$  ocurre primero.

h) ¿Según  $\mathcal{O}'$  qué evento ocurre primero,  $A$  o  $C$ ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a  $C$  según  $\mathcal{O}'$ .

### Solución

Ahora queremos determinar cuál de los eventos del inciso e) ocurre primero para  $\mathcal{O}'$ . Dibujamos el diagrama de espacio-tiempo de la ??, agregando el evento  $C$ .

Observamos entonces que para  $\mathcal{O}'$  el evento que ocurre primero es  $A$  y, además, los eventos simultáneos a  $C$  son aquellos que ocurren al tiempo  $t' = t_C'$  (véase figura 6).

i) ¿Según  $\mathcal{O}''$  qué evento ocurre primero,  $A$  o  $C$ ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a

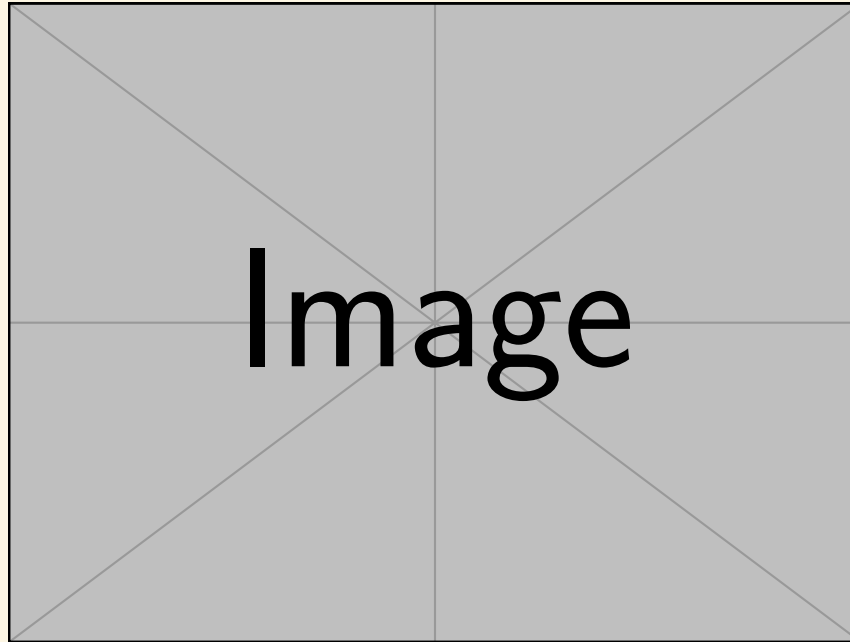


Figura 4: Ejes de  $\mathcal{O}$  dibujados en el diagrama de  $\mathcal{O}'$ , así como la línea de los eventos simultáneos al evento  $B$ . fig:0In0PrimePrime

$C$  según  $\mathcal{O}'$ .

### Solución

Replicando el diagrama de la figura 4 agregando el evento  $C$ , tenemos que directamente podemos determinar que el evento  $A$  ocurre primero para el observador  $\mathcal{O}'$  y, además, los eventos simultáneos a  $C$  son aquellos que ocurren a  $t'' = t_C''$  (véase figura 7).

## Problema 3

Es útil aprender a visualizar el intervalo entre dos eventos en los diagramas de espacio-tiempo, similar a como sabemos visualizar la distancia entre dos puntos en el espacio Euclidiano. Considera así un espacio-tiempo 1+1-dimensional y dos observadores inerciales  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}'$  en éste, tales que  $\mathcal{O}'$  se mueve con velocidad  $v > 0$  respecto a  $\mathcal{O}$ . El origen de ambos está colocado en el origen.

- Localiza en el diagrama de  $\mathcal{O}$  al evento  $B$  de coordenadas  $(b, 0)$  con  $b > 0$ .
- Calcula el intervalo  $(\Delta s_{AB})^2$  entre  $A$  y  $B$ . ¿Qué tipo de separación hay entre estos eventos?
- Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos  $C$  tales que  $(\Delta s_{AC})^2 = (\Delta s_{AB})^2$ , es decir, de todos los eventos que equidistan espacio-temporalmente de  $A$ . Pinta este lugar geométrico en el diagrama de  $\mathcal{O}$  (ambas ramas).
- Pinta los ejes de  $\mathcal{O}'$  en el diagrama de  $\mathcal{O}$ . ¿El lugar geométrico que encontraste en el inciso c) intersecta con el eje  $t'$ ? ¿En qué eventos? Márcalos en el diagrama.

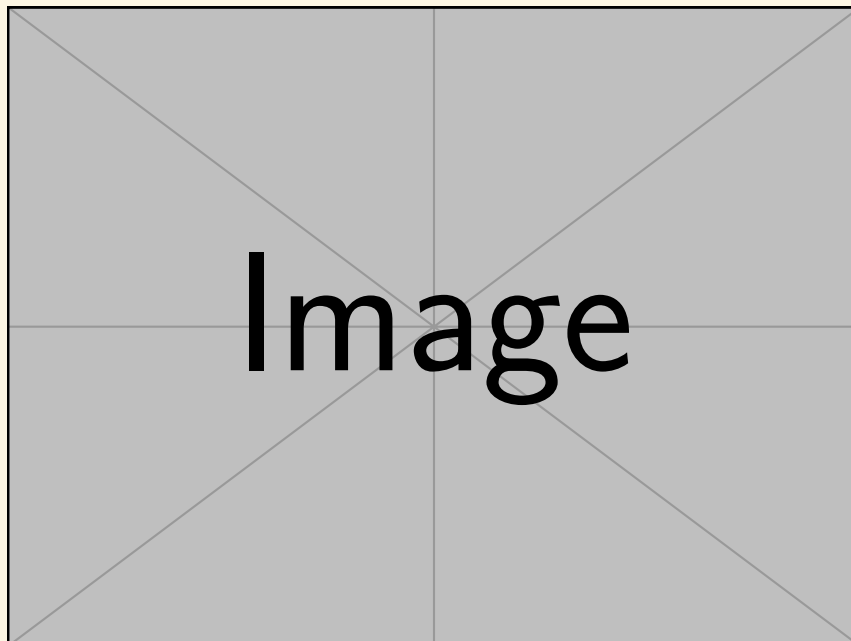


Figura 5: Conos de luz correspondientes a los eventos  $A$  y  $B$  para determinar el tipo de separación que hay entre estos.

fig:ABIntervalIn0

- e) Denota a uno de los eventos que encontraste en d) como  $D$ . ¿Cuánto vale el intervalo  $(\Delta s'_{AD})^2$  entre  $D$  y  $A$  según  $\mathcal{O}'$ ? Recuerda: el intervalo es invariante.
- f) Usa tu resultado de e) para escribir las coordenadas del evento  $D$  en el sistema  $\mathcal{O}'$ . Lo que acabas de hacer es escalar los ejes, es decir, has determinado lo que cada observador llama  $b$  metros.
- g) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos  $E$  tales que  $(\Delta s'_{AD})^2 = (\Delta s'_{AE})^2$ . ¿Tienen algún parecido con tu respuesta de c)?



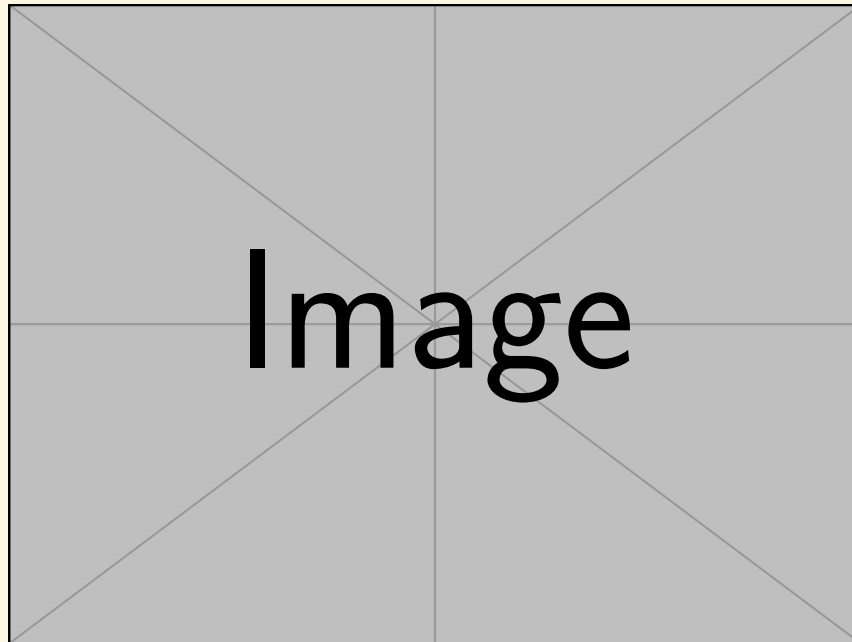


Figura 6: Eventos  $A$  y  $C$  dibujados en el diagrama de  $\mathcal{O}'$ , así como la línea de los eventos simultáneos a  $C$ .

fig:ACIn0Prime

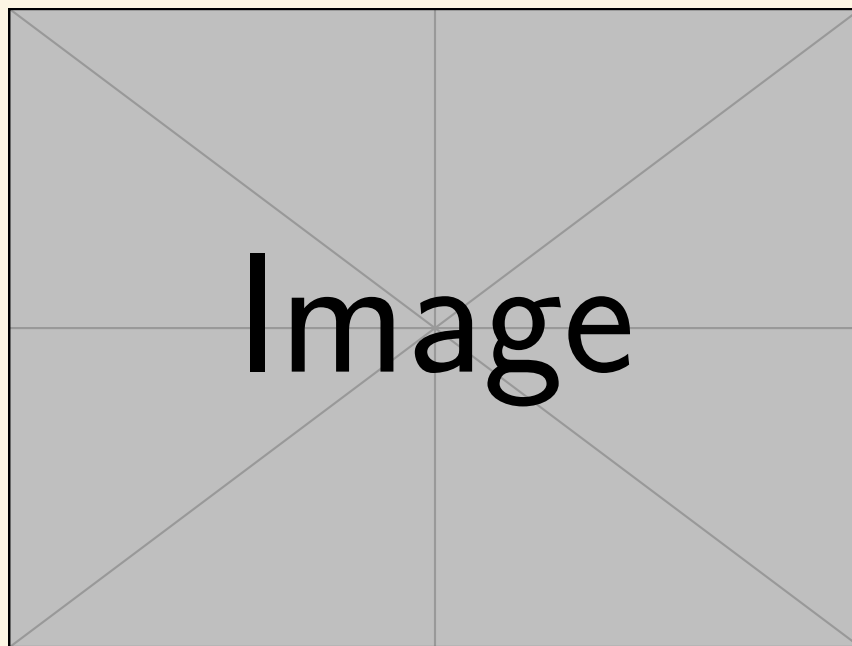


Figura 7: Eventos  $A$  y  $C$  dibujados en el diagrama de  $\mathcal{O}'$ , así como la línea de los eventos simultáneos a  $C$ .

fig:ACIn0PrimePrime