Tarea 1

Entrega: 26 de agosto de 2022

Problema 1

Resolver los siguientes ejercicios de *Introducción al formalismo de la Mecánica Cuántica no relativista* (Spinel):

(a) Con base en la propiedad (1.1.3), demostrar que el dual de $c|\beta\rangle = \langle\beta|c^*$.

Solución

Por el postulado de la correspondencia dual la igualdad se cumple. Es decir,

$$c|\beta\rangle \overset{\text{CD}}{\longleftrightarrow} \langle\beta|c^*$$

Por lo tanto,

$$\boxed{c|\beta\rangle = \langle\beta|c^*}$$

Sean $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ los ket definidos por: $|\gamma\rangle = (3+i)|a_1\rangle + 4|a_2\rangle - 6i|a_3\rangle$ y $|\eta\rangle = 2i|a_1\rangle + 3|a_3\rangle$, donde los kets $|a_i\rangle$ son ortonormales

(b) Calcule la norma de los kets $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ y determine sus kets normalizados $|\gamma'\rangle$ y $|\eta'\rangle$.

Solución

Puesto que queremos calcular la norma de los kets de $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$, necesitamos $\langle\gamma|$ y $\langle\eta|$, tal que,

$$\langle\gamma| = (3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle,$$
$$\langle\eta| = -2i\langle a_1| + 3\langle a_3|.$$

Así,

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle\gamma|\gamma\rangle} &= \{[(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle][(3+i)|a_1\rangle + 4|a_2\rangle - 6i|a_3\rangle]\}^{1/2},\\ &= \{(3-i)(3+i) + 4(4) + 6i(-6i)\}^{1/2},\\ &\boxed{\sqrt{\langle\gamma|\gamma\rangle} = \sqrt{62}} \end{aligned} \quad (1)$$

Ahora calculamos $\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle}$,

$$\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle} = \{[-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|][2i|a_1\rangle + 3|a_3\rangle]\}^{1/2},$$
$$= \{(-2i)(2i) + 3(3)\}^{1/2},$$
$$\boxed{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle} = \sqrt{13}} \tag{2}$$

Para normalizar un ket debemos dividirlo por su norma, **i.e.**, debemos dividir $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ por las ecs. (1) y (2), respectivamente.

$$|\gamma'\rangle = \frac{1}{\sqrt{62}}[(3+i)|a_1\rangle + 4|a_2\rangle - 6i|a_3\rangle], \tag{3}$$
$$|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}[2i|a_1\rangle + 3|a_3\rangle]. \tag{4}$$

(c) Encuentre los bras correspondientes a los kets $|\gamma'\rangle$ y $|\eta'\rangle$.

Solución

Puesto que las ecs. (3) y (4) son los kets $|\gamma\rangle$ y $|\eta\rangle$ normalizados, respectivamente; entonces, sus bras correspondientes son $^1/_{\sqrt{62}}\langle\gamma|$ y $^1/_{\sqrt{13}}\langle\eta|$. Así,

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\gamma'| &= \frac{1}{\sqrt{62}}[(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle],\\ \langle\eta'| &= \frac{1}{\sqrt{13}}[-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|].\end{aligned}}$$

(d) Calcule el producto interior $\langle\gamma'|\eta'\rangle$ y demuestre por cálculo directo que es igual a $\{\langle\eta'|\gamma'\rangle\}^*$.

Solución

Calculamos $\langle\gamma'|\eta'\rangle$ y $\langle\eta'|\gamma'\rangle$.

- $\langle\gamma'|\eta'\rangle$

$$\langle\gamma'|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}[(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle][-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|],$$
$$\boxed{\langle\gamma'|\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}(2+24i)} \tag{5}$$

- $\langle \eta' | \gamma' \rangle$

$$\langle \eta' | \gamma' \rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}[-2i\langle a_1| + 3\langle a_3|][(3-i)\langle a_1| + 4\langle a_2| + 6i|a_3\rangle],$$

$$\boxed{\langle \gamma' | \eta' \rangle = \frac{1}{\sqrt{806}}(2-24i)} \tag{6}$$

Calculando el conjugado de la ec. (6),

$$\boxed{\{\langle \eta' | \gamma' \rangle\}^* = \frac{1}{\sqrt{806}}(2+24i)} \tag{7}$$

Por lo tanto, de las ecs. (5) y (7),

$$\boxed{\langle \gamma' | \eta' \rangle = \{\langle \eta' | \gamma' \rangle\}^*}$$

(e) Calcules los productos interiores $\langle a_1 | \eta' \rangle$, $\langle a_2 | \eta' \rangle$ y $\langle a_3 | \eta' \rangle$. De acuerdo con sus resultados ¿qué interpretación geométrica puede dar al producto interior?

Solución

Calculamos $\langle a_1 | \eta' \rangle$, $\langle a_2 | \eta' \rangle$ y $\langle a_3 | \eta' \rangle$.

$$\boxed{\begin{aligned} \langle a_1 | \eta' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{62}}(3+i), \\ \langle a_2 | \eta' \rangle &= \frac{4}{\sqrt{62}}, \\ \langle a_3 | \eta' \rangle &= \frac{-6i}{\sqrt{62}}. \end{aligned}}$$

De las expresiones anteriores podemos determinar que el producto interior nos da la proyección de η' sobre a_1, a_2 y a_3, respectivamente.

Problema 2

(a) Find the condition under which two vectors

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ x-y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

are linearly independent.

Solución

Sabemos que si dos vectores son linealmente dependientes podemos expresar uno de estos como un múltiplo del otro, **i.e.**,

$$|v_1\rangle = c|v_2\rangle.$$

Sustituyendo $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ en la expresión anterior:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ x-y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ c(x-y) \\ c \end{pmatrix}.$$

Así,

$$x = 2c, \tag{8}$$

$$y = c(x-y), \tag{9}$$

$$c = 3. \tag{10}$$

Sustituimos la ec. (10) en la ec. (8),

$$x = 2(3),$$

$$x = 6. \tag{11}$$

Ahora, simplificamos la ec. (9) y sustituimos las ecs. (10) y (11), tal que,

$$y(1+c) = cx,$$

$$y(1+3) = 18,$$

$$y = \frac{9}{2}.$$

Por lo tanto, las condiciones para que los vectores sean l.i. son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 6, \\ y &= \frac{9}{2}, \\ c &= 3. \end{aligned}}$$

(b) Show that a set of vectors

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

is a basis of $\mathbb{C}^3$.

Solución

Para determinar si el conjunto de vectores $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ únicamente asta calcular el determinante de la matriz generada por los vectores y, verificar que éste si es diferente de cero, en caso de serlo, los vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, son base.

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det M = 2 \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\} \text{ es una base de } \mathbb{C}^3.$$

(c) Let

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix}, \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

Find $\||x\rangle\|$, $\langle x, y\rangle$ and $\langle y, x\rangle$.

Solución

- Norma
  Primero calculamos $\langle x|x\rangle$, tal que,

$$\langle x|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix},$$

$$\langle x|x\rangle = 7.$$

  Aplicando la raíz cuadrada a la expresión anterior, tenemos que la norma es igual a

$$\boxed{\sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{7}.}$$

- $\langle x|y\rangle$

$$\langle x|y\rangle = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\langle x|y\rangle = 7-2i}$$

- $\langle y|x\rangle$

$$\langle y|x\rangle = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2+i \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\langle y|x\rangle = 7+2i}$$

(d) 1. Use the Gram-Schmidt orthonormalization to find an orthonormal basis $\{|e_k\rangle\}$ from a linearly independent set of vectors

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix}-1, & 2, & 2\end{pmatrix}^t, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix}2, & -1, & 2\end{pmatrix}^t, \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix}3, & 0, & -3\end{pmatrix}^t$$

Solución

Primero definimos un vector, para normalizamos $|v_1\rangle$, tal que,

$$|e_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\sqrt{\langle v_1 | v_1\rangle}},$$

donde la norma es

$$\sqrt{\langle v_1 | v_1\rangle} = 3.$$

Entonces,

$$\boxed{|e_1\rangle = \frac{\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\end{pmatrix}^t}{3}.} \tag{12}$$

Ahora definimos el vector $|f_2\rangle$,

$$|f_2\rangle = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$|f_2\rangle = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^t.$$

Por otro lado, tenemos que $\sqrt{\langle f_2 | f_2\rangle} = 3$. Entonces el vector $|e_2\rangle$ está dado como:

$$\boxed{|e_2\rangle = \frac{\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\end{pmatrix}^t}{3}.} \tag{13}$$

Definimos el vector $|f_3\rangle$, tal que,

$$|f_3\rangle = |v_3\rangle - \langle e_1 | v_3\rangle |e_1\rangle - \langle e_2 | v_3\rangle |e_2\rangle,$$

$$|f_3\rangle = \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}^t.$$

Tenemos que $\sqrt{\langle f_3 | f_3\rangle} = 3$, entonces el vector $|e_3\rangle$ es

$$\boxed{|e_3\rangle = \frac{\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}^t}{3}} \tag{14}$$

2. Let

$$|u\rangle = \begin{pmatrix}1, & -2, & 7\end{pmatrix}^t = \sum_k c_k|e_k\rangle$$

Find the coefficients c_k.

Solución

Reescribimos $|u\rangle$, tal que,

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3 \\ \frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3 \\ \frac{2}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones generado por la expresión anterior, tenemos que el valor de los coeficientes es:

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= 3, \\ c_2 &= 6, \\ c_3 &= -3. \end{aligned}}$$

(e) Let

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix}1, & i, & 1\end{pmatrix}^t, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix}3, & 1, & i\end{pmatrix}^t.$$

Find the orthonormal basis for a two-dimensional subspace spanned by $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$.

Solución

Para encontrar una base ortonormal para un subespacio dimensional, lo hacemos usando la ortonormalización de Gram-Schmidt.

Primero definimos el vector $|e_1\rangle$, donde $\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle} = \sqrt{3}$.

$$\boxed{|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}} \tag{15}$$

Ahora definimos el vector $|f_2\rangle$,

$$|f_2\rangle = |v_2\rangle - \langle e_1|v_2\rangle|e_1\rangle,$$

$$|f_2\rangle = \begin{pmatrix}2 & 1-i & i-1\end{pmatrix}^t.$$

Para normalizar $|f_2\rangle$, primero debemos calcular su norma, tal que,

$$\sqrt{\langle f_2 \,|\, f_2\rangle} = 2\sqrt{2}.$$

Entonces, $|e_2\rangle$ queda como

$$\boxed{|e_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ i-1 \end{pmatrix}.}$$

Problema 3

(a) Let $x \neq 0$ and $y \neq 0$. (a) If $x \perp y$, show that $\{x, y\}$ is a linearly independent set. (b) Extend the result to mutually orthogonal nonzero vectors $x_1, \ldots, x_m$.

(b) Let z_1 and z_2 denote complex numbers. Show that $\langle z_1, z_2\rangle = z_1\bar{z}_2$ defines an inner product, which yields the usual metric on the complex plane. Under what condition do we have orthogonality?

(c) Show that the norm on $C[a, b]$ is invariant under a linear transformation $t = \alpha\tau + \beta$. Use this to prove that the statement in 3.1-8 by mapping $[a, b]$ onto $[0, 1]$ and then considering the functions defined by $\bar{x}(\tau) = 1$, $\bar{y}(\tau) = \tau$, where $\tau \in [0, 1]$.

(d) If X is a finite dimensional vector space and (e_j) is a basis for X, show that an inner product on X is completely determined by its values $\gamma_{jk} = \langle e_j, e_k\rangle$. Can we choose such scalar γ_{jk} in a completely arbitrary fashion?

(e) If (e_k) is an orthonormal sequence in an inner product space X, and $x \in X$, show that $x - y$ with y given by

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \quad \alpha_k = \langle x, e_k\rangle$$

is orthogonal to the subspace $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$.

(f) Orthonormalize the first three terms of the sequence $(x_0, x_1, x_2, \cdots)$, where $x_j(t) = t^j$, on the interval $[-1, 1]$, where

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t\Gamma$$