

Tarea 2

Entrega: 31 de agosto de 2022

Problema 1

a) Considera la distancia Euclidiana en \mathbb{R}^2 definida por

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Demuestra que la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

donde θ es un ángulo constante.

Solución

A partir de las transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta, \\ y'^0 &= x^0 \sin \theta + y^0 \cos \theta, \\ x'^1 &= x^1 \cos \theta - y^1 \sin \theta, \\ y'^1 &= x^1 \sin \theta + y^1 \cos \theta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sustituyendo (1.1) en la expresión para la distancia Euclidiana,

$$\begin{aligned} (\Delta r')^2 &= (x'^1 - x'^0)^2 + (y'^1 - y'^0)^2, \\ &= ((x^1 \cos \theta - y^1 \sin \theta) - (x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta))^2 + ((x^1 \sin \theta + y^1 \cos \theta) - (x^0 \sin \theta + y^0 \cos \theta))^2, \\ &= (\cos \theta (x^1 - x^0) - \sin \theta (y^1 - y^0))^2 + (\cos \theta (x^1 - x^0) + \sin \theta (y^1 - y^0))^2, \\ &= (x^1 - x^0)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (y^1 - y^0)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \\ &= (x^1 - x^0)^2 + (y^1 - y^0)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta r)^2.$$

Es decir, la distancia Euclidiana es invariante ante rotaciones.

b) Considera ahora un espacio-tiempo 2+1-dimensional y un observador inercial \mathcal{O} en éste.

En clase mencionamos que las transformaciones relativistas que buscamos deben dejar invariante al intervalo entre dos eventos, definido como

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Dado lo que acabas de demostrar en a), ¿se te ocurre un ejemplo de una transformación que deje invariante al intervalo? Es una transformación espacio-temporal, así que también debes especificar cuál es el cambio en la coordenada temporal.

Solución

Las transformaciones que dejan invariante al intervalo son las transformaciones de Lorentz, tales que \mathcal{O}' se mueve con $v > 0$ en la dirección positiva del eje x , tales que,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx), \\ x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, y' permanece invariante ya que no hay movimiento en esa dirección.

Sustituyendo (1.2) en la expresión para el intervalo,

$$\begin{aligned} (\Delta s')^2 &= -(\gamma(t'' - vx'') - \gamma(t - vx))^2 + (\gamma(x'' - vt'') - \gamma(x - vt))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= -\gamma^2((t'' - t) - v(x'' - x))^2 + \gamma^2((x'' - x) - v(t'' - t))^2 + (y'' - y)^2, \\ &= \gamma^2[(1 - v^2)(\Delta x')^2 - (1 - v^2)(\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= \frac{1}{(1 - v^2)}(1 - v^2)[(\Delta x')^2 - (\Delta t')^2] + (\Delta y')^2, \\ &= -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\Delta s')^2 = -(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta s)^2$$

Es decir, el intervalo es invariante ante las transformaciones de Lorentz.

Problema 2

Considera tres sistemas de referencia inerciales \mathcal{O} , \mathcal{O}' y \mathcal{O}'' en un espacio-tiempo 1+1-dimensional. El sistema se mueve con velocidad v a lo largo de la dirección positiva del eje x respecto a \mathcal{O} , mientras que el sistema \mathcal{O}'' se mueve con velocidad $-v$ también respecto a \mathcal{O} (es decir, en la dirección x negativa). Además, estos sistemas son tales que el origen de los tres coincide en el mismo evento A .

- Pinta los ejes de los tres sistemas en el diagrama de \mathcal{O} . Indica con claridad cuál es la inclinación de los ejes.
 - Elige algún evento B en el eje x (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y B ? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que use para hacer el cálculo.
 - ¿Según \mathcal{O} qué evento ocurre primero, A o B ?
 - ¿Según \mathcal{O}' qué evento ocurre primero, A o B ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según \mathcal{O}' .
 - ¿Según \mathcal{O}'' qué evento ocurre primero, A o B ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a B según \mathcal{O}'' .
 - Elige ahora un evento C en el eje t (que no sea el origen) y márcalo en el diagrama. ¿Cuál es el tipo de separación que hay entre A y C ? Recuerda que esta respuesta es independiente del sistema de referencia que uses para hacer el cálculo.
 - ¿Según \mathcal{O} qué evento ocurre primero, A o C ?
 - ¿Según \mathcal{O}' qué evento ocurre primero, A o C ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a C según \mathcal{O}' .
 - ¿Según \mathcal{O}'' qué evento ocurre primero, A o C ? Pinta la línea de los eventos que son simultáneos a C según \mathcal{O}'' .
-

Problema 3

Es útil aprender a visualizar el intervalo entre dos eventos en los diagramas de espacio-tiempo, similar a como sabemos visualizar la distancia entre dos puntos en el espacio Euclidiano. Considera así un espacio-tiempo 1+1-dimensional y dos observadores inerciales \mathcal{O} y \mathcal{O}' en éste, tales que \mathcal{O}' se mueve con velocidad $v > 0$ respecto a \mathcal{O} . El origen de ambos está colocado en el origen.

- a) Localiza en el diagrama de \mathcal{O} al evento B de coordenadas $(b, 0)$ con $b > 0$.
 - b) Calcula el intervalo $(\Delta s_{AB})^2$ entre A y B . ¿Qué tipo de separación hay entre estos eventos?
 - c) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos C tales que $(\Delta s_{AC})^2 = (\Delta s_{AB})^2$, es decir, de todos los eventos que equidistan espacio-temporalmente de A . Pinta este lugar geométrico en el diagrama de \mathcal{O} (ambas ramas).
 - d) Pinta los ejes de \mathcal{O}' en el diagrama de \mathcal{O} . ¿El lugar geométrico que encontraste en el inciso c) intersecta con el eje t' ? ¿En qué eventos? Márcalos en el diagrama.
 - e) Denota a uno de los eventos que encontraste en d) como D . ¿Cuánto vale el intervalo $(\Delta s'_{AD})^2$ entre D y A según \mathcal{O}' ? Recuerda: el intervalo es invariante.
 - f) Usa tu resultado de e) para escribir las coordenadas del evento D en el sistema \mathcal{O}' . Lo que acabas de hacer es escalar los ejes, es decir, has determinado lo que cada observador llama b metros.
 - g) Escribe la ecuación del lugar geométrico de todos los eventos E tales que $(\Delta s'_{AD})^2 = (\Delta s'_{AE})^2$. ¿Tienen algún parecido con tu respuesta de c)?
-