

# Tarea 4

Entrega: 13 de septiembre de 2022

## Problema 1

- a) Considera un observador inercial dentro de un elevador estático sobre una superficie carga infinita, de forma tal que hay un campo eléctrico constante  $\vec{E} = -E\hat{z}$  en todo el espacio. No hay ningún otro tipo de campo gravitacional en el espacio. El observador deja caer dos partículas desde la misma altura: la primera tiene carga eléctrica  $q$  y masa  $m$ , mientras que la segunda tiene carga  $q$  y masa  $M$ , tal que  $M > m$ . ¿Cuál de las dos partículas llega primero al suelo del elevador según el observador dentro? La interacción eléctrica y gravitacional entre ambas partículas es despreciable.

### Solución

Sabemos que la fuerza que actúa sobre una partícula en presencia de un campo eléctrico constante está dada como:

$$F = qE. \quad (1.1)$$

Notemos que la fuerza debida al campo eléctrico que actúa sobre cada partícula es la misma, ya que su carga es la misma.

Por otro lado, por la segunda ley de Newton,

$$F = ma_1, \quad (1.2)$$

$$F = Ma_2. \quad (1.3)$$

Igualando ec. (1.1) con las ecs. (1.2) y (1.3),

$$qE = ma_1,$$

$$qE = Ma_2.$$

De esta manera, de las expresiones anteriores tenemos que

$$ma_1 = Ma_2,$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M}{m}.$$

Por hipótesis sabemos que  $M > m$ , entonces

$$\frac{a_1}{a_2} > 1,$$

$$\Rightarrow a_1 > a_2.$$

Por lo tanto, la partícula con masa  $m$  llega primero al suelo del elevador.

- b) Considera un observador inercial dentro de un elevador estático sobre una superficie infinita, de forma tal que ésta genera un campo gravitacional constante  $\vec{G} = -g\hat{z}$  en todo el espacio. No hay ningún tipo de campo electromagnético en el espacio. El observador deja caer dos partículas desde la misma altura: la primera tienen carga eléctrica  $q$  y masa  $m$ , mientras que la segunda tiene carga  $q$  y masa  $M$ , tal que  $M > m$ . ¿Cuál de las dos partículas llega primero al suelo del elevador según el observador dentro? La interacción eléctrica y gravitacional entre ambas partículas es despreciable.

### Solución

Sabemos que a fuerza que actúa sobre una partícula en presencia de un campo gravitacional está dada como:

$$\vec{F} = -mg\hat{z},$$

$$F = mg. \quad (1.4)$$

Por la segunda ley de Newton tenemos,

$$F = ma_1, \quad (1.5)$$

$$F = Ma_2. \quad (1.6)$$

Igualando la ec. (1.4) con la ec. (1.5),

$$mg = ma_1,$$

$$\boxed{\therefore a_1 = g.} \quad (1.7)$$

Análogamente para la ec. (1.6),

$$Mg = Ma_2,$$

$$\boxed{\therefore a_2 = g.} \quad (1.8)$$

De las ecs. (1.7) y (1.8) podemos concluir que las partículas llegan al suelo del elevador al mismo tiempo.

- c) Considera un observador no inercial dentro de un elevador que se mueve en el espacio con aceleración constante  $\vec{a} = a\hat{z}$  respecto a otro sistema inercial externo al elevador. No hay ningún campo gravitacional ni electromagnético en el espacio. El observador no inercial en el elevador deja caer dos partículas desde la misma altura: la primera tiene carga eléctrica  $q$  y masa  $m$ , mientras que la segunda tiene carga  $q$  y masa  $M$ , tal que  $M > m$ . ¿Cuál de las dos partículas llega primero al suelo del elevador según el observador dentro? La interacción eléctrica y gravitacional entre ambas partículas es despreciable.

### Solución

Puesto que no hay ningún campo gravitacional ni electromagnético, tenemos que la fuerza que actúa sobre una partícula es:

$$F = ma. \quad (1.9)$$

Y, por la segunda ley de Newton,

$$F = ma_1,$$

$$F = Ma_2.$$

De esta manera

$$a = a_1,$$

$$a = a_2.$$

Por lo tanto, las dos partículas llegan al suelo del elevador al mismo tiempo.

## Problema 2

- a) De acuerdo a la Relatividad General, ¿qué tipo de trayectoria en el espacio-tiempo sigue un cuerpo libre de fuerzas? En palabras simples, explica la definición de ese tipo de trayectoria y da un ejemplo sencillo. No necesitas mayor formalidad matemática que la que seguimos en clase.

### Solución

El tipo de trayectoria que sigue un cuerpo libre de fuerzas en el espacio-tiempo es una geodésica espacio-temporal.

Una **geodésica**, en general, es la trayectoria más recta posible en un cierto espacio. Un ejemplo serían las líneas rectas, que son las geodésicas del plano euclidiano.

- b) Enuncia los dos tipos de curvatura que hay y cuáles son las diferencias entre ambas. No necesitas mayor formalidad matemática que la que seguimos en clase. ¿A qué tipo de curvatura hace referencia el enunciado “la gravedad está codificada en la curvatura del espacio-tiempo”?

### Solución

Existen dos tipos de curvatura: curvatura intrínseca y curvatura extrínseca.

- La **curvatura intrínseca** es la curvatura que únicamente es percibida por los *elementos* de ese espacio.
- La **curvatura extrínseca** es la curvatura percibida desde un espacio de mayor dimensionalidad, fuera del espacio al que está asociada la curvatura.

¿A qué tipo de curvatura hace referencia el enunciado “la gravedad está codificada en la curvatura del espacio-tiempo”? La curvatura del espacio-tiempo es intrínseca, ya que por ahora no se sabe si hay un espacio de mayor dimensionalidad que el espacio-tiempo que conocemos.

- c) Las ecuaciones de Einstein son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

¿En qué consiste encontrar una solución a éstas? Es decir, qué objetos necesitan darse como información y para qué objeto se resuelve.

### Solución

Las ecuaciones de Einstein tienen como incógnita a la métrica  $g_{\mu\nu}$ , donde  $R_{\mu\nu}$  está compuesta de las segundas derivadas parciales de  $g_{\mu\nu}$  y  $R$  es una suma de particular de las entradas de  $T_{\mu\nu}$ , **i.e.**,  $R_{\mu\nu}$  y  $R$  dependen de la métrica.

De esta manera, para poder encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein debemos conocer el tensor de energía-momento.