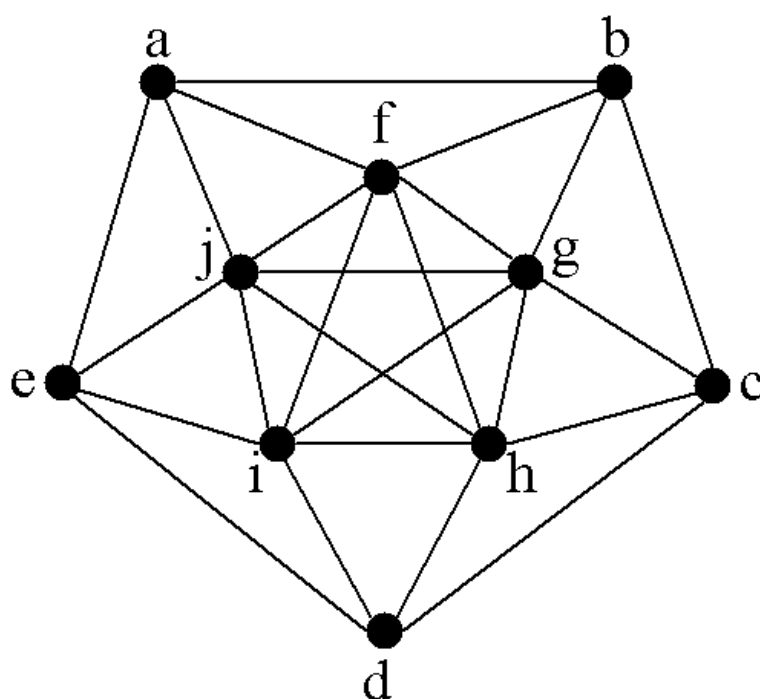


# Introdução à Teoria dos Grafos



Edson Prestes

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Informática  
Departamento de Informática Teórica  
2016

Copyright ©2012 por Edson Prestes

Dedico este livro à minha família e amigos.

O importante é o ser e não o vir a ser; um não é o oposto do outro, havendo o oposto ou a oposição, cessa o ser. Ao findar o esforço para vir-a-ser, surge a plenitude do ser, que não é estático; não se trata de aceitação; o vir-a-ser depende do tempo e do espaço. O esforço deve cessar; disso nasce o ser que transcende os limites da moral e da virtude social, e abala os alicerces da sociedade. Esta maneira de ser é a própria vida, não mero padrão social.

Lá, onde existe vida, não existe perfeição; a perfeição é uma idéia, uma palavra; o próprio ato de viver e existir transcende toda forma de pensamento e surge do aniquilamento da palavra, do modelo, do padrão.

**Jiddu Krishnamurti (1895-1986)**

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>1</b>
1.1	Conceitos Básicos . . . . .	2
1.2	Relação de Vizinhança . . . . .	7
1.3	Matrizes de Adjacência e de Incidência . . . . .	11
1.4	Passeios e Circuitos . . . . .	13
1.5	Aplicações . . . . .	18
1.5.1	Associação de Tarefas . . . . .	18
1.5.2	Robótica . . . . .	19
1.5.3	Nichos Ecológicos . . . . .	19
1.5.4	Rede de Telefonia Móvel . . . . .	20
1.5.5	Reconhecedores de sentenças . . . . .	21
1.5.6	Redes Neurais Artificiais . . . . .	21
1.6	Exercícios . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Tipos de Grafos e Operações</b>	<b>27</b>
2.1	Grafos Especiais . . . . .	27
2.2	Operações com grafos . . . . .	30
2.2.1	União . . . . .	31
2.2.2	Junção . . . . .	32
2.2.3	Intersecção . . . . .	33
2.2.4	Produto . . . . .	33
2.2.5	Complemento . . . . .	34
2.2.6	Remoção . . . . .	34
2.2.7	Contração . . . . .	35
2.2.8	Supressão e Subdivisão . . . . .	36
2.2.9	Decomposição . . . . .	37
2.2.10	Operador Linha $L$ . . . . .	38
2.3	Exercícios . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Conectividade</b>	<b>43</b>
3.1	Relação de Vizinhança Estendida e Fechamento Transitivo . .	44
3.2	Grafos Conexos e Desconexos . . . . .	47
3.3	Vértice de Corte . . . . .	48
3.4	Aresta de Corte . . . . .	51
3.5	Conectividade em Dígrafos . . . . .	53
3.6	Cálculo de Componentes . . . . .	59
3.7	Exercícios . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Relacionamentos V-A</b>	<b>65</b>
4.1	Clique . . . . .	65
4.2	Conjunto Independente . . . . .	69
4.3	Cobertura de Vértices . . . . .	73
4.4	Conjunto Dominante . . . . .	77
4.5	Emparelhamento . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Enumeração</b>	<b>87</b>
5.1	Método de Maghout . . . . .	87
5.2	Enumeração em Grafos . . . . .	91
5.2.1	Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes . .	91
5.2.2	Cliques . . . . .	93
5.2.3	Conjunto dominante . . . . .	95
5.2.4	Emparelhamento . . . . .	96
5.3	Enumeração em Dígrafos . . . . .	101
5.3.1	Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes . .	101
5.3.2	Cobertura de Fonte e Sumidouro . . . . .	104
5.3.3	Cliques . . . . .	105
5.3.4	Conjuntos Dominantes . . . . .	106
5.3.5	Emparelhamento . . . . .	111
5.4	Exercícios . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Árvores</b>	<b>115</b>
6.1	Conceitos Básicos . . . . .	115
6.2	Árvore Enraizada . . . . .	118
6.3	Árvores de Espalhamento . . . . .	123
6.4	Código Prüfer . . . . .	128
6.5	Algoritmo Kruskal . . . . .	133
6.6	Exercícios . . . . .	134

---

<b>7</b>	<b>Isomorfismo</b>	<b>137</b>
7.1	Proposição . . . . .	140
7.2	Grafo de Petersen . . . . .	141
7.3	Automorfismo . . . . .	142
7.3.1	Teorema: . . . . .	145
<b>8</b>	<b>Grafos Eulerianos e Hamiltonianos</b>	<b>147</b>
8.1	Grafos Eulerianos . . . . .	147
8.2	Grafos Hamiltonianos . . . . .	151
<b>9</b>	<b>Planaridade</b>	<b>155</b>
9.1	Grafo dual . . . . .	158
<b>10</b>	<b>Coloração de Grafos</b>	<b>165</b>
10.1	Polinômio Cromático . . . . .	169





# Capítulo 1

## Fundamentação Teórica

A Teoria dos Grafos surgiu com os trabalhos de L. Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley. O primeiro e mais famoso problema, chamado o *problema das pontes de Königsberg* foi enunciado por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg (antiga Prússia), existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre diferentes partes da cidade e a ilha Kneiphof (ver Figura 1.1). O problema consistia em determinar se era possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. Veremos no Capítulo 9 que a resposta para esta pergunta é *não*.

**Problema das Pontes de Königsberg**

A Teoria dos Grafos possui aplicação direta em áreas como física, química, engenharias, psicologia, etc. Em particular, ela é de fundamental importância aos cursos de Ciência e Engenharia da Computação. Isto se deve a inúmeros motivos, entre eles, o fato de servir de modelo matemático para alguns dos problemas mais importantes e difíceis da computação. Estes problemas estão associados à classe de problemas NP-Completo, cuja solução em tempo polinomial por uma máquina de Turing determinística não é conhecida.

Vários problemas do mundo real podem ser analisados usando a Teoria dos Grafos, por exemplo, o escalonamento de processos pode ser visualizado como uma aplicação direta do problema de coloração de grafos; o problema de reconhecimento de padrões pode ser visto como uma instância do problema de isomorfismo em grafos; o problema de roteamento é o problema de verificar se um grafo é Hamiltoniano ou não, e se for determinar o ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Este livro introduz a base teórica da área de Teoria dos Grafos, apresentando os principais conceitos (definições, propriedades, classes, teoremas),

problemas e algoritmos. Exemplificaremos sempre que possível o uso destes conceitos em problemas do mundo real. Além disso, será dada ênfase ao aspecto combinatorial da área apresentando o uso da análise combinatória em problemas de enumeração e contagens.

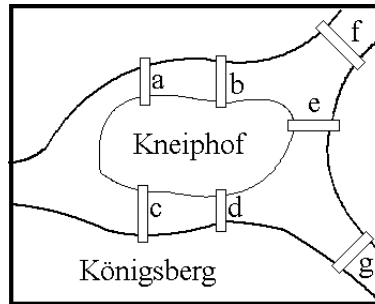


Figura 1.1: Pontes de Königsberg

## 1.1 Conceitos Básicos

### Grafo Simples

**Definição 1.1.** Um grafo simples  $G = (V, A)$  é uma estrutura discreta formada por um conjunto não vazio de vértices  $V$  e um conjunto de arestas  $A \subseteq \mathcal{P}(V)$ , onde  $\mathcal{P}(V) = \{\{x, y\} : x, y \in V\}$  é o conjunto de todos os pares não ordenados<sup>1</sup> não necessariamente distintos gerados a partir de  $V$ . Cada aresta  $\{x, y\} \in A$  é formada por um par de vértices distintos, i.e.,  $x \neq y$ . Para cada par de vértices existe no máximo uma aresta associada.

**Vértices Adjacentes** Dois vértices  $x$  e  $y$  são adjacentes se e somente se existe uma aresta  $\{x, y\} \in A$ . Neste caso, dizemos que a aresta  $\{x, y\}$  é incidente aos vértices  $x$  e  $y$ . Quando um vértice não é adjacente a outro, dizemos que ele é um vértice *isolado*.

**Multigrafo** Um grafo deixa de ser simples quando possui múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices e/ou quando possui uma aresta, chamada *laço*, incidente a um par de vértices não distintos. Se o grafo possuir múltiplas arestas e não possuir laços então ele é chamado *multigrafo*, caso contrário, se ele possuir laços então é chamado de *pseudografo*. A existência de múltiplas arestas, leva à definição da função  $\phi : A \rightarrow \mathcal{P}(V)$ , chamada de *função de*

**Pseudografo**  
**Função de Incidência**

<sup>1</sup>Um par não ordenado formado pelos vértices  $x$  e  $y$  é representado por  $\{x, y\}$ , onde  $\{x, y\} = \{y, x\}$ . Se  $x = y$ , então  $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$ .

*incidência* do grafo, que mapeia cada aresta ao par de vértices associado. Isto permite distinguir cada aresta individualmente. Baseado nisto, temos a seguinte definição que inclui multigrafos, pseudografos e grafos simples.

**Definição 1.2.** Um grafo  $G = (V, A, \phi)$  é um conjunto não vazio de vértices  $V$ , um conjunto de arestas  $A$ , e uma função de mapeamento  $\phi : A \rightarrow \mathcal{P}(V)$  que mapeia cada aresta a um par não ordenado formado pelos vértices de  $G$ . O número de vértices de  $G$ , denotado por  $|V|$  indica a ordem de  $G$ , enquanto que o número de arestas, denotado por  $|A|$ , indica o tamanho de  $G^2$ .

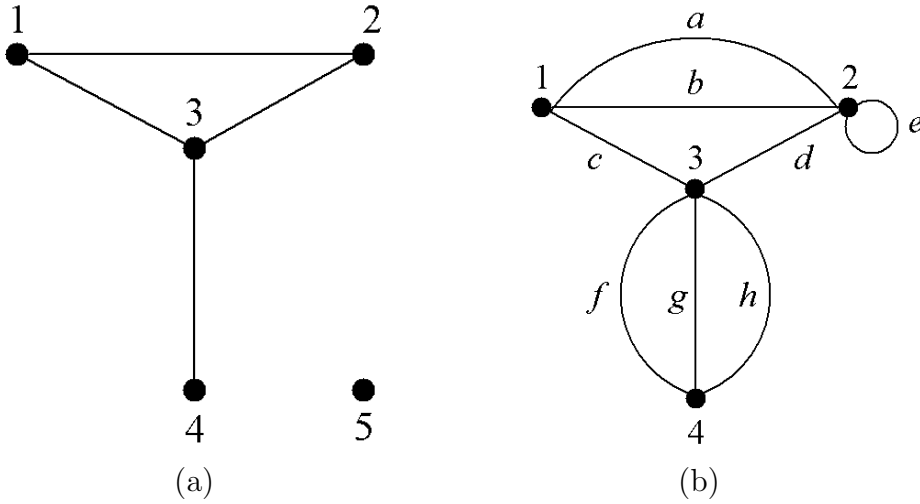


Figura 1.2: Exemplos de (a) grafo simples e (b) pseudografo

A Figura 1.2 mostra um (a) grafo simples e um (b) pseudografo, onde as linhas representam as arestas e os círculos escuros representam os vértices. Em (a), cada aresta une um par de vértices distintos e não existem múltiplas arestas unindo um mesmo par. Logo, cada aresta é representada pelos vértices os quais incide, por exemplo, a aresta unindo os vértices 1 e 2 é representada por  $\{1, 2\}$ . Assim,  $\phi(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$ , i.e.,  $\phi(\{x, y\}) = \{x, y\}$ ,  $\forall \{x, y\} \in A$ . Em (b) existem múltiplas arestas unindo os vértices 1 e 2, e os vértices 3 e 4. Para distingui-las, as arestas são rotuladas com as letras de  $a$  a  $h$ . Observe que  $\phi(f) = \phi(g) = \phi(h) = \{3, 4\}$  e  $\phi(a) = \phi(b) = \{1, 2\}$ , porém  $f \neq g \neq h$  e

<sup>2</sup>Alguns autores usam  $|G|$  e  $\|G\|$  para indicar a ordem e o tamanho de  $G$ , respectivamente

$a \neq b$ . Quando um dado par de vértices está associado a  $k$  arestas distintas, dizemos que ele possui multiplicidade igual a  $k$ . Neste caso, a multiplicidade do par  $\{3, 4\}$  é igual a 3, enquanto que a multiplicidade do par  $\{1, 2\}$  é igual a 2. Em um grafo simples a multiplicidade de cada par de vértices é no máximo igual a 1. Em (a), existe um vértice isolado representado pelo vértice 5, enquanto que em (b), existe um laço representado pela aresta  $e$ . Se (b), não possuísse o laço  $e$ , então seria um multigrafo. A existência de laço indica que o grafo é um pseudografo. Neste livro iremos apenas distinguir o grafo simples dos demais grafos, que serão chamados apenas por grafos.

Para este exemplo, o grafo da Figura 1.2(a) é representado por  $G_a = (V_a, A_a, \phi_a)$  ou apenas por  $G_a = (V_a, A_a)$ , pois como ele é simples, a função  $\phi_a(\cdot)$  se torna a função identidade podendo ser suprimida. Os conjuntos de vértices e arestas são definidos por  $V_a = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $A_a = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}\}$ , respectivamente. Por outro lado, o grafo da Figura 1.2(b) é definido por  $G_b = (V_b, A_b, \phi_b)$  com  $V_b = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A_b = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  e

$$\phi_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ \{1, 2\} & \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{2, 3\} & \{2\} & \{3, 4\} & \{3, 4\} & \{3, 4\} \end{pmatrix}$$

**Grafo Subjacente a Pseudografos e Multigrafos**

Se retirarmos os laços e todas as múltiplas arestas entre cada par de vértice, mantendo apenas uma, transformaremos um pseudografo em um grafo simples. O mesmo pode ser feito no caso de multigrafos, porém não existem laços para serem removidos. O grafo simples encontrado é chamado de *grafo simples subjacente*, ou apenas, *grafo subjacente* ao multigrafo ou ao pseudografo. Realizando este procedimento no grafo da Figura 1.3(b), encontramos o grafo simples mostrado em (a).

As arestas de um grafo possuem a função de indicar o relacionamento entre os elementos que o grafo representa, que podem ser do mundo real ou não, de forma simétrica. Este relacionamento pode corresponder a uma propriedade espacial, comportamental, temporal ou outra. Em diversas situações esta relação não é simétrica, por exemplo, o sentido do fluxo de carros nas ruas de uma cidade. Se representarmos cada entrocamento (cruzamento) desta cidade como sendo um vértice em um grafo e o fluxo permitido como sendo a relação entre os entrocamentos, veremos que em diversas situações a ida de um entrocamento  $A$  para o entroncamento  $B$  não implica a volta, ou seja, a ida do entroncamento  $B$  para o entrocamento  $A$ . Nesta situação precisamos ter uma forma de indicar esta restrição no grafo. Isto é feito determinando uma direção para cada aresta.

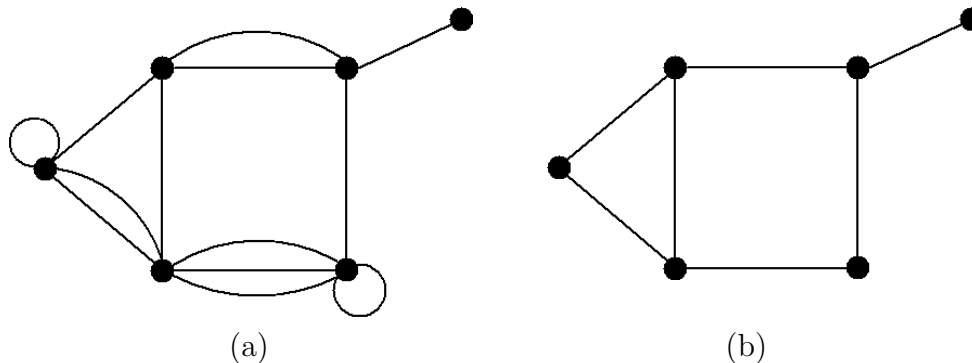


Figura 1.3: Exemplo de (a) pseudografo e seu (b) grafo simples subjacente.

A inserção desta informação faz com que o grafo se torne orientado. Associando pares ordenados de vértices às arestas do grafo, teremos um *grafo direcionado* ou *dígrafo*. Cada par ordenado<sup>3</sup>  $(x, y)$  define um arco com origem em (ou adjacente em)  $x$  e destino em (ou adjacente para)  $y$ , ou seja,  $(x, y) \neq (y, x)$ . É comum dizermos que o vértice  $x$  domina  $y$ , e que o vértice  $y$  é dominado por  $x$ . De forma similar ao exposto anteriormente para grafos, um dígrafo pode conter laços e múltiplos arcos entre um mesmo par ordenado de vértices. Quando um dígrafo não possui laços tão pouco múltiplos arcos entre um mesmo par ordenado de vértices, ele é chamado *dígrafo simples* ou *grafo direcionado simples*. Quando um dígrafo possui múltiplos arcos de um vértice a outro (que pode ser o mesmo), então ele é chamado de *multigrafo direcionado*. Quando  $k$  arcos têm origem no vértice  $x$  e destino no vértice  $y$ , então dizemos que o arco  $(x, y)$  tem multiplicidade igual a  $k$ . Quando o dígrafo não possui laços, múltiplas arestas entre um mesmo par ordenado de vértices, nem pares simétricos de arcos então ele é chamado de *grafo orientado*. Note que

**Dominância**

**Dígrafo Simples**

**Multigrafo Direcionado**

**Grafo Orientado**

grafos orientados  $\subset$  dígrafos simples  $\subset$  multigrafos direcionados.

**Definição 1.3.** Um dígrafo  $D = (V_d, A_d, \phi_d)$  é um conjunto não vazio de vértices  $V_d$ , um conjunto de arcos  $A_d$ , e um uma função de mapeamento  $\phi_d : A_d \rightarrow V_d \times V_d$  que mapeia cada arco a um *par ordenado* formado pelos vértices de  $D$ . De forma similar à definição usada para grafos, o número

<sup>3</sup>Um par ordenado formado pelos vértices  $x$  e  $y$  é representado de maneira tradicional por  $(x, y)$ , onde,  $(x, y) \neq (y, x)$ .

de vértices de  $D$ , denotado por  $|V_d|$  indica a ordem de  $D$ , enquanto que o número de arestas, denotado por  $|A_d|$ , indica o tamanho de  $D^4$ .

A Figura 1.4(a) ilustra um *grafo orientado*, enquanto que (b) ilustra um *multidígrafo direcionado*. (b) possui múltiplos arcos entre um mesmo par ordenado, entre eles podemos destacar, os arcos  $a$  e  $b$  que têm origem no vértice 1 e destino no vértice 2. Além disso, ele possui o laço  $e$ . Se este dígrafo não possuísse os arcos  $b$ ,  $g$  e  $e$ , ele seria classificado como *dígrafo simples*. Se removêssemos desse dígrafo simples o arco  $h$  ou  $f$ , estaríamos eliminando o único par simétrico existente, e este dígrafo passaria a ser um *grafo orientado*. Neste livro iremos apenas distinguir o grafo orientado dos demais dígrafos, os quais serão chamados apenas por dígrafos.

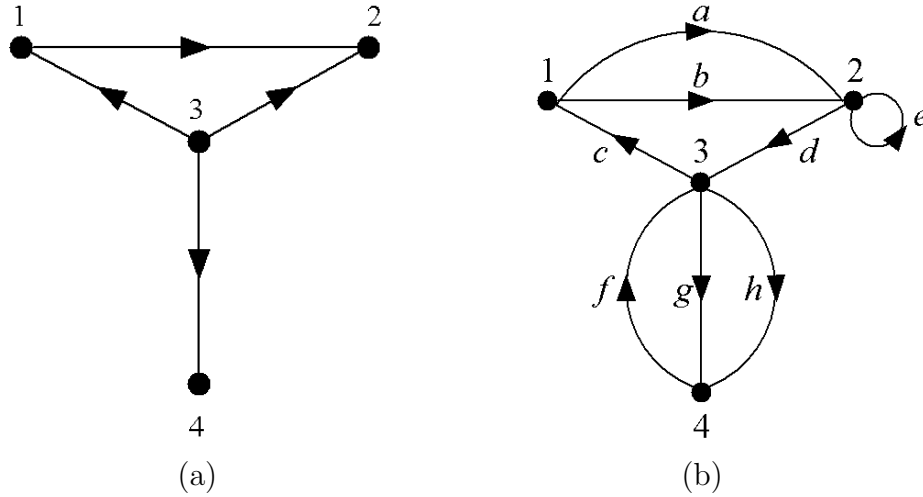


Figura 1.4: Exemplos de (a) dígrafo simples e (b) multígrafo direcionado

### Grafo Subjacente ao Dígrafo

De forma similar aos grafos, um dígrafo possui um *grafo subjacente*. Ele é obtido substituindo cada arco por uma aresta, i.e., removendo a orientação de cada arco. Por exemplo, a Figura 1.2(b) mostra o grafo subjacente ao dígrafo ilustrado na Figura 1.4(b).

**Definição 1.4.** Um grafo  $G_1 = (V_1, A_1)$  é um *subgrafo* de  $G_2 = (V_2, A_2)$ , denotado por  $G_1 \subseteq G_2$  se e somente se  $V_1 \subseteq V_2$  e  $A_1 \subseteq A_2$ . Neste caso

<sup>4</sup>Alguns autores usam  $|D|$  e  $\|D\|$  para indicar a ordem e o tamanho de  $D$ , respectivamente

$G_2$  é *supergrafo* de  $G_1$ . (definição similar para sub- e superdígrafos, porém considerando a orientação dos arcos).

Se  $G_1$  é subgrafo de  $G_2$ , então  $G_2$  é *supergrafo* de  $G_1$ . Quando  $G_1 \neq G_2$ , então  $G_1$  é um subgrafo próprio de  $G_2$ . Quando  $V_1 = V_2$ , então  $G_1$  é chamado **Subgrafo e Subdígrafo de Espalhamento** ou *subgrafo gerador* ou *subgrafo de espalhamento* de  $G_2$ . Para um dígrafo  $D_1$ , um subdígrafo  $D_2$  que contém um conjunto de vértices igual ao conjunto de vértices do dígrafo original é chamado de *subdígrafo de espalhamento* ou **Fator** do dígrafo.

Considerando um grafo  $G = (V, A)$  e um subconjunto não vazio  $S_v \subseteq V$ , um grafo subgrafo de  $G$  induzido por  $S_v$ , denotado por  $G[S_v]$ , é aquele **Grafo Induzido** que tem como conjunto de vértices  $S_v$  e como conjunto de arestas todas as arestas de  $G$  que possuam ambas extremidades em  $S_v$ . Se  $S_a \subseteq A$  é um subconjunto não vazio de arestas,  $G[S_a]$  é um subgrafo de  $G$  induzido por  $S_a$  que tem como conjunto de arestas  $S_a$  e como conjunto de vértices as extremidades das arestas de  $S_a$  (Os mesmo conceitos se aplicam aos dígrafos, porém temos a expressão dígrafo induzido). A Figura 1.5 ilustra (a) um grafo  $G$  e os subgrafos induzidos (b)  $G[S_v]$  e (c)  $G[S_a]$ , assumindo  $S_v = \{0, 4, 5, 6\}$  e  $S_a = \{\{0, 4\}, \{0, 5\}, \{0, 1\}, \{2, 6\}\}$ .

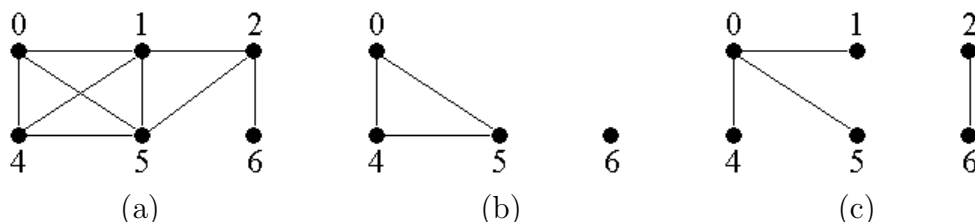


Figura 1.5: Exemplo de grafo induzido por vértices e por arestas. (a) grafo  $G$ , (b) grafo induzido  $G[S_v]$  por um conjunto de vértices  $S_v$  e (c) grafo induzido  $G[S_a]$  por um conjunto de arestas  $S_a$

## 1.2 Relação de Vizinhaça

Tanto as arestas de um grafo quando os arcos de um dígrafo definem uma relação de vizinhaça entre os vértices. Para um grafo  $G = (V, A, \phi)$ , o conjunto de vértices adjacentes a um vértice  $v \in V$  é definido pela função multivalorada de vizinhaça,  $\tau : V \rightsquigarrow 2^V$ ,

$$\tau(v) = \{w : \{v, w\} = \phi(e) \wedge e \in A\}$$

**Função Multivalorada de Vizinhaça**

onde  $v$  pode ou não ser igual a  $w$ . Quando  $v = w$  teremos  $v \in \tau(v)$ . O conjunto  $2^V$  é chamado conjunto das partes e contém todos os subconjuntos que podem ser formados usando os elementos de  $V$ . Se  $V = \{1, 2, 3\}$  então  $2^V = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ . Portanto  $|2^V| = 2^{|V|}$ . Para um dígrafo  $D = (V_d, A_d, \phi_d)$ , as funções multivaloradas de vizinhança direta  $\tau^+ : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$  e inversa  $\tau^- : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$  são definidas por

$$\tau^+(v) = \{w : (v, w) = \phi_d(e) \wedge e \in A_d\}$$

e

$$\tau^-(v) = \{w : (w, v) = \phi_d(e) \wedge e \in A_d\}.$$

A função  $\tau^+(v)$  retorna todos os vértices atingíveis diretamente a partir de  $v$  através dos arcos que têm origem em  $v$ , enquanto que  $\tau^-(v)$  retorna todos os vértices que atingem diretamente  $v$  através dos arcos que têm destino em  $v$ . Lembrando que  $\phi(e) = e$  (ou  $\phi_d(e) = e$ ) para o caso de não existirem múltiplas arestas(ou arcos) entre um mesmo par de vértices.

A quantidade de vizinhos de um vértice permite determinar o que é chamado grau de um vértice. Para um grafo simples, o grau de qualquer vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$ , é definido por  $d(v) = |\tau(v)|^5$ . Para um grafo qualquer  $G = (V, A)$ , o grau de um vértice  $v$  é definido pela quantidade  $n$  de arestas que unem  $v$  aos outros vértices do grafo(exceto ele próprio) e pela quantidade  $p$  de laços em  $v$ , ou seja,

$$d(v) = n + 2p.$$

Quando um vértice  $v$  é isolado, ou seja,  $\tau(v) = \emptyset$ , seu grau  $d(v) = 0$ . A partir daí, podemos definir o menor e maior graus dentre todos os seus vértices como, respectivamente,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v) \text{ e } \delta(G) = \min_{v \in V} d(v).$$

Note que

$$\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \quad \forall v \in V.$$

Na Figura 1.2(a),

$$d(1) = 2, d(2) = 2, d(3) = 3, d(4) = 1, d(5) = 0, \delta(G) = 0 \text{ e } \Delta(G) = 3.$$

Enquanto que na Figura 1.2(b),

$$d(1) = 3, d(2) = 5, d(3) = 5, d(4) = 3, \delta(G) = 3 \text{ e } \Delta(G) = 5.$$

---

<sup>5</sup>O grau de um vértice é denotado por  $d$  devido a palavra grau ser em inglês chamada degree.

**Funções Multi-valoradas de Vizinhança Direta e Inversa**

**Grau**

**Menor Grau  
Maior Grau**



**Teorema 1.1** (Handshaking Problem). Para um grafo  $G=(V,A)$ , temos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|$$

Em um dígrafo qualquer, cada vértice  $v$  possui um grau de entrada,  $d^-(v)$ , e um grau de saída,  $d^+(v)$ . O grau de entrada de um vértice  $v$  é o definido pelo número de arcos que possuem como destino  $v$  (incluindo o laço) enquanto que o grau de saída é o número de arcos que possuem como origem  $v$  (incluindo o laço). Um laço em vértice  $v$  é contado uma única vez no grau de entrada de  $v$  e uma única vez no grau de saída de  $v$ . Para dígrafos simples (e grafos orientados), podemos usar as funções de vizinhaça  $\tau^-(v)$  e  $\tau^+(v)$  para calcular os graus de saída e de entrada de cada vértice. Neste caso, para qualquer vértice  $v$  temos  $d^-(v) = |\tau^-(v)|$  e  $d^+(v) = |\tau^+(v)|$ .

De forma similar ao exposto anteriormente, podemos definir para um dígrafo  $D$  os graus de entrada máximo e mínimo,  $\Delta^-(D)$  e  $\delta^-(D)$ , respectivamente, e os graus de saída máximo e mínimo,  $\Delta^+(D)$  e  $\delta^+(D)$ , respectivamente. Na Figura 1.4(a), o dígrafo tem

$$d^-(1) = 1, d^-(2) = 2, d^-(3) = 0, d^-(4) = 1, \delta^-(D) = 0, \Delta^-(D) = 2,$$

$$d^+(1) = 1, d^+(2) = 0, d^+(3) = 3, d^+(4) = 0, \delta^+(D) = 0, \Delta^+(D) = 3.$$

Enquanto que na Figura 1.4(b), o dígrafo tem

$$d^-(1) = 1, d^-(2) = 3, d^-(3) = 2, d^-(4) = 2, \delta^-(D) = 1, \Delta^-(D) = 3$$

$$d^+(1) = 2, d^+(2) = 2, d^+(3) = 3, d^+(4) = 1, \delta^+(D) = 1, \Delta^+(D) = 3.$$

**Teorema 1.2.** Para um dígrafo  $D = (V_d, A_d)$  temos

$$\sum_{v \in V_d} d^-(v) = \sum_{v \in V_d} d^+(v) = |A_d|$$

Quando um vértice  $v$  de um dígrafo possui grau  $d^-(v) = 0$ , ele é chamado de *vértice fonte* e quando ele possui grau de saída  $d^+(v) = 0$ , ele é chamado de *vértice sumidouro*. A Figura 1.4(a) mostra um vértice fonte representado pelo vértice 3 e dois vértices sumidouros representados pelos vértices 2 e 4. Se este dígrafo está associado à uma rede de transmissão de dados, podemos relacionar o vértice fonte a um emissor que não é receptor, pois

**Graus de Entrada e de Saída**

**Vértice Fonte e Sumidouro**

ele apenas emite informações sem ter a capacidade de recebê-las de volta. Por outro lado, o vértice sumidouro é um receptor que não é emissor, ou seja, ele apenas recebe informações, porém sem ser capaz de propagá-la adiante para outros computadores. Os outros vértices conseguem tanto receber informações quanto propagá-la adiante.

### Seqüência de Graus

A seqüência não crescente  $d(G) = d_1, d_2, \dots, d_n$ , com  $d_i \geq d_j$  para  $j \geq i$  formada pelo grau dos vértices de um grafo  $G$  de  $n$  vértices é chamada de *Seqüência de Graus*. Cada grafo possui uma única seqüência de graus, porém uma mesma seqüência pode estar associada a grafos distintos. A Figura 1.6 mostra dois grafos distintos estruturalmente com a mesma seqüência de graus igual a 4, 3, 2, 2, 1. Tanto a soma dos elementos desta seqüência quanto a quantidade de valores ímpares são pares.

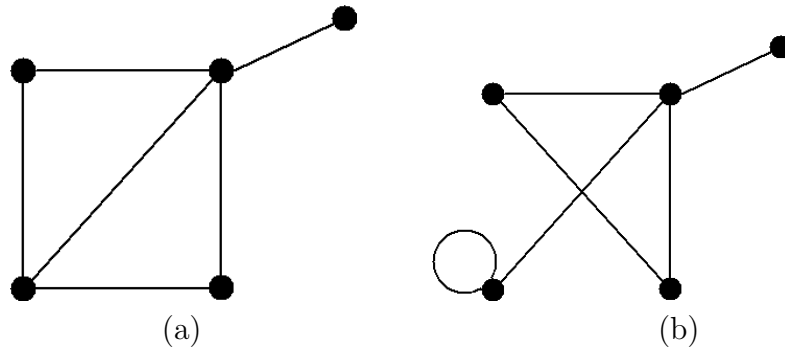


Figura 1.6: Grafos com mesma seqüência de graus.

**Teorema 1.3.** Toda seqüência não negativa  $d_1, d_2, \dots, d_n$  é uma seqüência de graus de um grafo(simples ou não) se e somente se  $\sum_{i=1}^n d_i$  é par.

Existem seqüências que podem não estar associados a grafos simples. Por exemplo, com a seqüência 3, 3, 3, 1 não é possível construir um grafo simples, mesmo tendo a soma de seus termos um valor par (Verifique!). Se a seqüência permitir a construção de um grafo simples então ela é chamada *seqüência gráfica*. Para verificar se uma dada seqüência é gráfica ou não usamos o seguinte Teorema .

### Seqüência Gráfica

**Teorema 1.4** (Havel-Hakimi). Para  $n > 1$ , uma seqüência  $d$  de inteiros com  $n$  elementos é uma *seqüência gráfica* se e somente se  $d'$  é uma *seqüência gráfica*, onde  $d'$  é obtido a partir de  $d$  removendo seu maior elemento  $\Delta$  e

subtraindo 1 de seus  $\Delta$  maiores elementos seguintes. Assumimos que a única seqüência gráfica com 1 elemento é  $d_1 = 0$ .

A aplicação do Teorema 1.4 na seqüência  $s_1 = 3, 3, 3, 1$  leva aos seguintes passos. Inicialmente removemos o maior elemento  $\Delta_1 = 3$  e subtraímos de 1 os  $\Delta_1$  maiores elementos seguintes. Isto resulta na seqüência  $s_2 = 2, 2, 0$ . Em  $s_2$ , repetimos o processo, removendo o maior elemento  $\Delta_2 = 2$ , e subtraindo de 1 os  $\Delta_2$  maiores elementos seguintes. Isto resulta na seqüência  $s_3 = 1, -1$ , que não corresponde a uma seqüência gráfica, já que um dos requisitos para que uma seqüência seja gráfica é que ela seja formada apenas por valores não negativos.

### 1.3 Matrizes de Adjacência e de Incidência

Um grafo  $G = (V, A)$ , com  $|V| = n$  e  $|A| = m$ , pode ser representado usando dois tipos de matriz, chamados de matriz de adjacência e matriz de incidência. A matriz de adjacência é uma matriz  $M = [m_{i,j}]$  simétrica  $n \times n$  que armazena o relacionamento entre os vértices do grafo. Cada entrada  $m_{i,j}$  é igual a

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ não é adjacente a } j \\ m & , \text{ onde } m \text{ é a quantidade de arestas incidentes tanto em } i \text{ quanto} \\ & \text{em } j \text{ (com } i \neq j \text{)}. \\ p & , \text{ onde } p \text{ é a quantidade de laços incidentes em } i = j. \end{cases}$$

Por outro lado, a matriz de incidência  $B = [b_{i,j}]$  é uma matriz  $n \times m$ , que associa os vértices às arestas de  $G$ . Cada entrada  $b_{i,j}$  relaciona o vértice  $i$  à aresta  $j$  assumindo os seguinte valores

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \text{ não é incidente em } i \\ 1 & , \text{ se } j \text{ é ou não um laço e } i \text{ é uma de suas extremidades.} \end{cases}$$

As matrizes de adjacência e de incidência para o grafo da Figura 1.2(b) são mostradas nas Tabelas 1.1 e 1.2.

De forma similar, um dígrafo  $D$  pode ser representado usando matrizes de incidência e de adjacência. A matriz de adjacência é uma matriz  $A = [a_{i,j}]$ , não necessariamente simétrica, onde cada entrada  $a_{i,j}$  é igual a

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ não é adjacente a } j \\ m & , \text{ onde } m \text{ é a quantidade de arcos com origem em } i \text{ e destino em } j \end{cases}$$

	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	1	1	0
3	1	1	0	3
4	0	0	3	0

Tabela 1.1: Matriz de Adjacência do grafo da Figura 1.2(b).

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	1	1

Tabela 1.2: Matriz de incidência do grafo da Figura 1.2 (b)

A matriz de adjacência para o dígrafo da Figura 1.4(b) é mostrada na tabela 1.3

	1	2	3	4
1	0	2	0	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	2
4	0	0	1	0

Tabela 1.3: Matriz de Adjacência do dígrafo da Figura 1.4(b).

Por sua vez, na matriz de incidência  $B = [b_{i,j}]$  cada entrada  $b_{ij}$  relaciona o vértice  $i$  à aresta  $j$  assumindo os valores

$$b_{i,j} = \begin{cases} -1 & , \text{ se } j \text{ tem origem em } i. \\ 0 & , \text{ se } j \text{ não é incidente em } i \\ 1 & , \text{ se } j \text{ tem destino em } i. \end{cases}$$

A matriz de incidência para o dígrafo da Figura 1.4(b) é mostrada na Tabela 1.4

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	-1	-1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	-1	1	0	0	0
3	0	0	-1	1	0	1	-1	-1
4	0	0	0	0	0	-1	1	1

Tabela 1.4: Matriz de incidência do dígrafo da Figura 1.4 (b)

Muitas vezes a matriz de adjacência do grafo é esparsa, ou seja, a maioria dos seus elementos é igual a 0. Neste caso, para um grafo que possui  $n$  vértices, estaríamos utilizando um espaço de armazenamento proporcional a  $n^2$ , sendo que apenas uma pequena quantidade de memória, associadas às arestas do grafo, estaria efetivamente sendo usada. Para resolver este problema, podemos representar a matriz de adjacência na forma de uma lista de adjacência, onde cada elemento desta lista possui referência a um vértice do grafo e um ponteiro para uma sub-lista contendo todos os vértices adjacentes associados. Se considerarmos que a maior sub-lista possui tamanho igual a  $c \ll n$  (ou seja,  $c$  é muito menor que  $n$ ), então no máximo estaremos usando um espaço de armazenamento proporcional a  $cn$ , que é muito menor que  $n^2$ . Entretanto, se a matriz não for esparsa, ou seja,  $\delta(G) \geq n/2$ , então a lista de adjacência não é uma boa escolha. Pois neste caso, a verificação da adjacência entre dois vértices  $u$  e  $v$  consistirá em realizar uma busca linear na sub-lista associada a um dos dois vértices. Se o grafo é muito denso, por exemplo um  $K_n$ , isto envolverá no máximo  $n$  comparações. Por outro lado, esta verificação em uma matriz de adjacência consiste em apenas checar a entrada correspondente. Se a entrada for igual a 0 então os vértices não são adjacentes, caso contrário são adjacentes. Estes aspectos relacionados à eficiência valem também para dígrafos.

## 1.4 Passeios e Circuitos

**Definição 1.5.** Em um grafo, um **passeio** entre os vértices  $v$  e  $w$  é uma sequência alternada de vértices e arestas  $v = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = w$  que começa em  $v$  e termina em  $w$ , de forma que cada aresta  $a_i$  é incidente aos vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$ . Tanto as arestas quanto os vértices podem ou não ser distintos. Se apenas as arestas forem distintas, então o passeio é chamado

de **trilha**. Se tanto as arestas quando os vértices forem distintos então, ele é chamado de **caminho**.

**Passeio Fechado**  
**Circuito**  
**Ciclo**

Se os vértices de origem e destino forem o mesmo, então o passeio é chamado de **passeio fechado**; a trilha é chamada de **circuito** ; enquanto que o caminho é chamado apenas de **ciclo** . Em um grafo simples, um ciclo é descrito apenas por seus vértices já que a ordem dos vértices define exatamente que aresta foi visitada. Um dígrafo possui conceitos similares com a restrição de que orientação dos arcos deve ser obedecida. Observe que

$$\text{caminhos} \subset \text{trilhas} \subset \text{passeios}$$

É possível entre um mesmo par de vértices em um grafo  $G$  existir diversos passeios, trilhas e caminhos. Considerando o grafo da Figura 1.2(b), entre os vértices 1 e 2 podemos ter os seguintes:

- *Passeios*:  $(1, c, 3, d, 2)$ ,  $(1, c, 3, g, 4, h, 3, g, 4, f, 3, d, 2)$ , ...
- *Trilhas*:  $(1, c, 3, d, 2)$ ,  $(1, c, 3, g, 4, h, 3, d, 2)$ , ...
- *Caminhos*:  $(1, c, 3, d, 2)$ ,  $(1, b, 2)$  e  $(1, a, 2)$ .

Dois caminhos entre um par de vértices  $u$  e  $v$  são vértice-disjuntos (ou apenas disjuntos) se eles compartilham apenas os vértices  $u$  e  $v$  e nenhuma aresta. De forma similar, dois caminhos entre  $u$  e  $v$  são chamados aresta-disjuntos se eles não compartilham aresta (Definição similar se aplica aos dígrafos). Estes conceitos são importantes quando estivermos analisando a conectividade de grafos no Capítulo 3.

**Definição 1.6.** Em um dígrafo, um **passeio direcionado** entre os vértices  $v$  e  $w$  é uma seqüência alternada de vértices e arcos  $v = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = w$  que começa em  $v$  e termina em  $w$ , de forma que cada arco  $a_i$  tenha origem em  $v_{i-1}$  e destino em  $v_i$ . Se apenas as arcos forem distintos, então o passeio direcionado é chamado de **trilha direcionada**. Se tanto os arcos quando os vértices forem distintos então, ele é chamado de **caminho direcionado**.

**Passeio Direci-**  
**onado Fechado,**  
**Circuito Dire-**  
**cionado, Ciclo**  
**Direcionado**

Se os vértices de origem e destino forem o mesmo, então o passeio direcionado é chamado de **passeio direcionado fechado**; a trilha é chamada de **circuito direcionado**, enquanto que o caminho é chamado apenas de **ciclo direcionado**.

caminhos direcionados  $\subset$  trilhas direcionadas  $\subset$  passeios direcionados

Além destas classificações, temos a noção de semi-caminho, semi-passeio e semi-trilha. Se considerarmos a sequência alternada de vértices e arcos  $v = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n = w$  que começa em  $v$  e termina em  $w$ , um *semi-passeio* é aquele onde o arco  $a_i$  tem origem em  $v_{i-1}$  e destino em  $v_i$  ou tem origem em  $v_i$  e destino em  $v_{i-1}$ . Se apenas os arcos forem distintos, então o semi-passeio é chamado de *semi-trilha*. Se tanto os arcos quando os vértices forem distintos então, ele é chamado de *semi-caminho*. Note que não precisamos enfatizar que eles são direcionados, já que estes conceitos se aplicam apenas aos dígrafos. Podemos pensar que em todos os casos, estamos desconsiderando a orientação dos arcos e focando apenas nos caminhos, passeios e trilhas no grafo subjacente ao dígrafo. Analogamente, podemos definir *semi-passeio fechado*, *semi-circuito* e *semi-ciclo*.

**Semi-Passeio**

**Semi-Trilha**

**Semi-Caminho**

Em vários momentos, passeios, caminhos e trilhas, direcionadas ou não, serão chamadas de *passeio de espalhamento*, *caminho de espalhamento* e *trilha de espalhamento*, respectivamente. Isto ocorrerá quando estiverem sendo considerados todos os vértices do dígrafo ou grafo. Por exemplo, na Figura 1.2(b), o caminho  $1, a, 2, d, 3, g, 4$  possui todos os vértices do grafo sendo, portanto, um caminho de espalhamento. Passeio fechado, circuito, e ciclo, direcionado ou não, são de espalhamento, quando considerarem todos os vértices do grafo ou dígrafo.

**Passeio, Caminho, Trilha, Passeio Fechado, Circuito e Ciclo de Espalhamento**

O comprimento de um passeio(ou passeio direcionado) é igual a quantidade de arestas(ou arcos) entre os vértices inicial e final. Um caminho(ou caminho direcionado) com  $n$  vértices possui  $n - 1$  arestas, logo seu comprimento é igual a  $n - 1$ . Por conseguinte, um ciclo(ou ciclo direcionado) composto por  $n$  vértices possui comprimento exatamente igual a  $n$ .

Em grafos simples, os ciclos devem ter comprimento  $\geq 3$ , enquanto que em multigrafos, este comprimento deve ser  $\geq 2$ , pois podem existir múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices. Em pseudografos, laços são ciclos especiais de comprimento igual a 1 chamados de *ciclos simples*. Para que haja um ciclo, que não seja simples, o número de vértices tem que ser igual ao número de arestas.

O comprimento do menor ciclo pertencente a um grafo  $G$  é chamado *cintura* e denotado por  $g(G)$ . Enquanto que o comprimento do maior ciclo

**Cintura**

é chamado de *circunferência* sendo denotado por  $c(G)$ . Um grafo que não possui ciclos, como por exemplo árvores, tem  $g(G) = \infty$  e  $c(G) = 0$ . Uma aresta ou arco que une dois vértices em um ciclo, mas que não pertence ao ciclo é chamada *corda*.

Circunferência

**Corda**

Entre um par de vértices  $v$  e  $w$  em um grafo(ou dígrafo)  $G = (V, A)$ , podem existir inúmeros caminhos. Cada caminho representa um subgrafo(ou subdígrafo) de  $G$ , ou seja, considerando  $P_{v,w} = (V_p, A_p)$  um caminho entre os vértices  $v$  e  $w$ , temos  $P_{v,w} \subseteq G$ . O comprimento de  $P_{v,w}$ , denotado aqui por  $|P_{v,w}|$  é igual ao seu número de arestas, i.e.,  $|P_{v,w}| = |A_p|$ . Se não existe caminho entre  $v$  e  $w$ , então  $|P_{v,w}| = \infty$ . Usando esta notação, a distância entre  $v$  e  $w$  é igual a

$$d(v, w) = \min_{P_{v,w} \subseteq G} |P_{v,w}|$$

Note que a distância entre  $v$  e  $w$  é definida pelo comprimento do menor *caminho* entre  $v$  e  $w$ . Este cálculo é muito importante em áreas como a robótica, já que o robô deve sempre que possível se deslocar no ambiente seguindo o caminho de menor comprimento. A partir da informação de distância, podemos calcular o diâmetro de  $G$  por

**Diâmetro**

$$diam(G) = \max_{v, w \in V} d(v, w)$$

que corresponde à distância entre os vértices mais afastados de  $G$ , e também a excentricidade de cada vértice  $v$  de  $G$ . Esta última medida informa a maior distância possível entre  $v$  e todos os outros vértices do grafo. Ela é dada por

**Excentricidade**

$$e(v) = \max_{w \in V} d(v, w).$$

**Raio**

Com esta informação podemos calcular o raio de  $G$  por

$$raio(G) = \min_{v \in V} e(v)$$

que indica o menor valor de excentricidade presente em um grafo considerando todos os seus vértices; e reescrever a expressão que define o diâmetro de  $G$  como

$$diam(G) = \max_{v \in V} e(v)$$

A partir daí, definimos um vértice  $v$  como sendo central quando seu valor de excentricidade é igual ao raio do grafo, i.e.,  $e(v) = raio(G)$ . Por consequência, um vértice central de um grafo

**Centro de um Grafo**



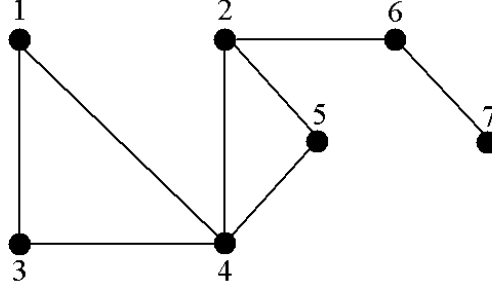


Figura 1.7: Grafo com  $diam(G) = 4$ ,  $raio(G) = 2$  e  $\mathcal{C}(G) = G[\{2\}]$ .

guinte, o centro de um grafo  $G$ , denotado por,  $\mathcal{C}(G)$ , é um subgrafo induzido pelos seus vértices centrais, i.e.,

$$\mathcal{C}(G) = G[V'], \text{ tal que } V' = \{v \in V : e(v) = raio(G)\}$$

Como exemplo, considere o grafo  $G$  mostrado na Figura 1.7. Seus vértices possuem as seguintes excentricidades:

$$e(1) = 4, e(2) = 2, e(3) = 4, e(4) = 3, e(5) = 3, e(6) = 3 \text{ e } e(7) = 4.$$

O diâmetro e o raio deste grafo são iguais a  $diam(G) = 4$  e  $raio(G) = 2$ , respectivamente. O centro é definido apenas pelo vértice 2, i.e.,  $\mathcal{C}(G) = G[\{2\}]$ . Fazendo  $G' = G - \{1, 4\}$ , i.e., eliminando a aresta  $\{1, 4\}$ , o grafo passa a ter as seguintes excentricidades :

$$e(1) = 5, e(2) = 3, e(3) = 4, e(4) = 3, e(5) = 3, e(6) = 4 \text{ e } e(7) = 5.$$

O diâmetro e o raio de  $G'$  são iguais a  $diam(G') = 5$  e  $raio(G') = 3$ , respectivamente. O centro é definido pelos vértices 2, 4 e 5, i.e.,  $\mathcal{C}(G) = G[\{2, 4, 5\}]$ .

Estas informações podem ser utilizadas por um administrador de uma rede de computadores para saber quais são os nós centrais da rede que estão com sobrecarga de comunicação, ou os nós mais distantes a fim de aproximá-los através da inserção de outros pontos de comunicação. Note que uma rede ideal é aquela onde a comunicação entre pares de computadores ocorre diretamente. Em geral, redes com grandes diâmetros são mais lentas do ponto de vista de comunicação do que redes com baixos diâmetros. Entretanto, uma rede deste tipo é aceitável se a maioria dos seus computadores se comunicar através de conexões de curta distância. Portanto, convém avaliar uma rede

não apenas pelo seu diâmetro, mas pela distância média entre pares de computadores. Isto leva ao *índice de Wiener* definido para um grafo  $G = (V, A)$  por

**Índice  
de Wiener**

$$W(G) = \sum_{u,v \in V} d(u, v)$$

Este valor não corresponde a uma distância média pois não está sendo dividido pelo número de pares possíveis dado por  $\binom{|V|}{2}$ . Entretanto, esta medida é válida pois para redes com mesmo número de nodos, a quantidade possível de pares é a mesma independente da topologia da rede. Logo, o número de pares pode ser suprimido do cálculo.

## 1.5 Aplicações

Esta seção apresenta alguns exemplos de aplicações do mundo real que envolvem Grafos.

### 1.5.1 Associação de Tarefas

Uma empresa precisa distribuir um conjunto de  $n$  tarefas  $\mathbf{T}$  entre seus  $n$  empregados  $\mathbf{E}$ , considerando que cada empregado  $j$  consegue realizar cada tarefa  $i$  em um dado tempo  $m_{ij}$ . Qual é a melhor associação entre tarefa e empregado de forma a minimizar o tempo de realização de todas as tarefas. Uma instância do problema é mostrada no grafo da Figura 1.8(a). Para facilitar a visualização os tempos  $m_{ij}$  não foram apresentados. A Figura 1.8(b) mostra a associação escolhida através de arestas mais grossas.

Este problema é um típico problema de emparelhamento, onde tanto as tarefas quanto os empregados são os vértices do grafo, e as arestas correspondem a associação entre os empregados e as tarefas. Cada aresta é rotulada com o tempo de realização da tarefa pelo empregado ao qual está associada. O objetivo é encontrar o melhor associação entre tarefas e empregados de forma a minimizar a soma dos tempos de realização de todas as tarefas. Como não existem arestas entre os empregados nem entre as tarefas, temos dois conjuntos compostos por vértices não adjacentes entre si. Conjuntos com esta característica são chamados de *conjuntos independentes* e serão discutidos apropriadamente no Capítulo 4.2.

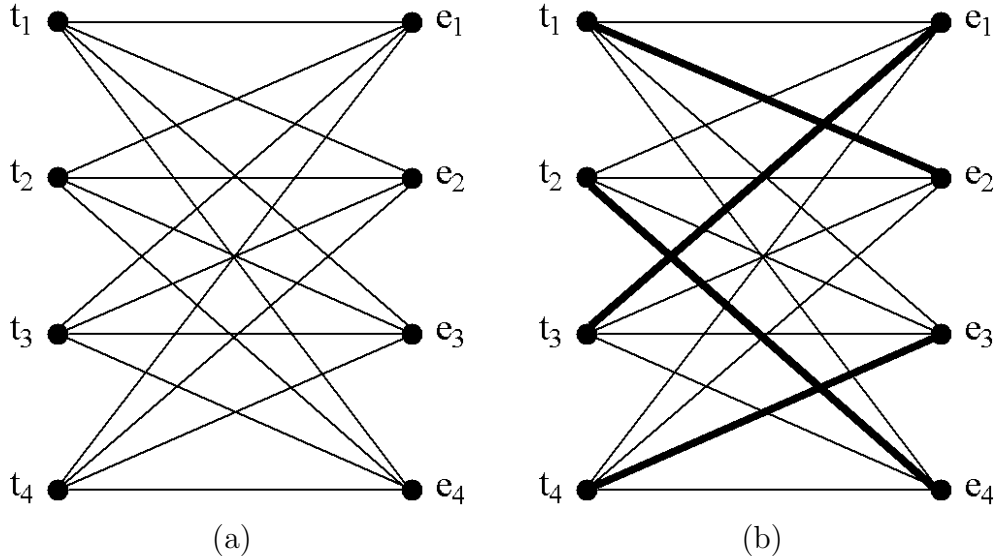


Figura 1.8: Associação de tarefas  $t_i \in \mathbf{T}$  aos empregados  $e_j \in \mathbf{E}$ . (a) todas as associações (b) a associação escolhida, representada por arestas mais grossas.

### 1.5.2 Robótica

Vários problemas da área de robótica estão associados às tarefas de navegação de robôs em ambientes do tipo escritório. Neste tipo de tarefa, o robô possui um mapa do ambiente e deve planejar um caminho que o leve de uma posição a outra evitando colisões com obstáculos. Entre os diversos tipos de mapas, existe o mapa topológico, que consiste em uma representação do ambiente utilizando grafos. A Figura 1.9(a) mostra um ambiente e seu grafo subjacente. Os vértices estão associados às grandes regiões do ambiente e as arestas indicam como navegar entre estas regiões. Neste exemplo, se o robô precisar ir da sala A até a sala G, ele pode seguir por vários caminhos, que podem ser visualizados através dos vértices e arestas do grafo associado. A Figura 1.9(b) mostra um caminho possível através de arestas mais grossas.

### 1.5.3 Nichos Ecológicos

Grafos podem ser usados para modelar o relacionamento competitivo entre diferentes espécies de animais em um ecossistema. A competição ocorre quando indivíduos de uma mesma espécie ou de espécies diferentes disputam

por algum recurso, como por exemplo, alimento. Quando a competição é grande e desigual, uma espécie pode mudar seus hábitos, migrar para outra região ou até mesmo ser extinta. Logo, estudar o relacionamento entre as espécies é fundamental para a preservação do ecossistema. Usando grafos, cada espécie pode ser modelada como um vértice e a competição entre duas espécies é indicada no grafo através de uma aresta entre os vértices correspondentes. A Figura 1.10 mostra um grafo que modela o relacionamento competitivo entre diferentes espécies do ecossistema de uma floresta.

#### 1.5.4 Rede de Telefonia Móvel

Veremos no Capítulo 10 que um mapa pode ser desenhado no plano e colorido propriamente com apenas quatro cores, ou seja, regiões vizinhas possuem cores diferentes. Para que isto seja possível, as regiões do mapa são associadas aos vértices do grafo enquanto que a adjacência entre as regiões define as arestas entre os vértices correspondentes. A partir daí, cada vértice é colorido de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Em um primeiro instante, pode-se pensar em usar uma cor diferente para cada vértice, porém problemas de coloração de grafos são problemas de otimização, onde a adição de uma nova cor implica aumento de custos. Logo, busca-se sempre a menor quantidade de cores possível.

Em 1982, o *Groupe Spécial Mobile* (GSM) foi criado para desenvolver um padrão a ser adotado pela telefonia móvel, e em 1991 surgiu a primeira rede GSM na Finlândia com o apoio da Ericsson. As redes GSM dividem as suas regiões de cobertura em células hexagonais. Cada célula possui uma torre de comunicação que gerencia a conexão dos celulares na sua área de cobertura. Os celulares por sua vez procuram células em sua vizinhança imediata de acordo com sua frequência de operação. Células adjacentes que possuem mesma frequência devem ser evitadas pois uma gera interferência no sinal da outra. Este fato faz com que o uso de coloração de grafos, em especial a coloração de mapas, tenha aplicabilidade direta. Por isso, as redes GSM usam apenas quatro frequências diferentes devido serem necessárias apenas quatro cores para colorir propriamente o mapa das regiões das células. Neste caso, as cores são representadas pelas frequências de operação.

### 1.5.5 Reconhecedores de sentenças

Uma máquina teórica para reconhecer sentenças de uma linguagem, como autômatos finitos determinísticos ou finitos não determinísticos, é representada graficamente através de um dígrafo. Neste dígrafo os vértices representam os estados da máquina enquanto que os arcos representam as transições da máquina de um estado para o outro. Por exemplo, o dígrafo da Figura 1.11 representa um autômato finito determinístico capaz de reconhecer sentenças formadas pelos símbolos  $a$  e  $b$  com uma quantidade ímpar de  $a$ 's e uma quantidade ímpar de  $b$ 's. Os vértices são representados por  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  e os arcos têm origem e destino neste conjunto. Note que a seta que não possui origem em um destes estados e tem destino em  $S_1$ , tem a função apenas de indicar o estado inicial da máquina, portanto não é um arco do dígrafo.

### 1.5.6 Redes Neurais Artificiais

Uma rede neural artificial é um modelo computacional utilizado na área de Inteligência Artificial para simular o funcionamento do cérebro humano. Ela é representada graficamente na forma de um dígrafo, onde cada vértice corresponde a um neurônio artificial e os arcos representam as conexões entre os neurônios, chamadas sinapses. As sinapses possuem um peso associado que pondera o sinal que flui entre os neurônios. Existem inúmeras formas de organização destes neurônios sendo a mais comum a estrutura multicamada mostrada na Figura 1.12. Nela a rede é organizada em camada de entrada, camadas escondidas e camada de saída. Na figura, estas camadas são representadas pelas letras A, B e C, respectivamente. O sinal flui da camada de entrada até a camada de saída de acordo com a orientação das sinapses. Portanto, o padrão de entrada é fornecido para a rede na camada de entrada e a rede produz um padrão de saída. O padrão de entrada poderia ser a postura  $(x, y, \theta)$  de um robô em um ambiente e a saída poderia ser a variação angular  $\varphi$  a ser aplicada em suas rodas dianteiras para fazê-lo atingir uma posição destino.

## 1.6 Exercícios

**Exercício 1.1.** *Mostre usando prova por indução que a soma total dos graus de todos os vértices de um grafo é sempre par*

**Exercício 1.2.** *Mostre que para qualquer grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.*

**Exercício 1.3.** *Verifique se a seqüência de graus 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1 é gráfica. Se for desenhe o grafo simples correspondente.*

**Exercício 1.4.** *Dado um grafo simples  $G = (V, A)$ , com  $|V| = n$  qual é o significado de  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$  para uma dada linha  $i$ ?*

**Exercício 1.5.** *Sendo  $M$  a matriz de adjacência de um grafo  $G$ , qual é o significado combinatorial de  $M^2$ , ou seja, do produto  $M.M$ ?*

**Exercício 1.6.** *Mostre que todo passeio de  $v$  até  $w$  contém um caminho de  $v$  até  $w$ .*

**Exercício 1.7.** *Mostre que todo grafo  $G$  simples com um caminho de comprimento  $\delta(G) \geq 2$  possui um ciclo de comprimento igual a no mínimo  $\delta(G) + 1$ .*

**Exercício 1.8.** *Mostre que se  $D$  é um dígrafo com  $\delta^+(D) \geq 1$  (ou  $\delta^-(D) \geq 1$ ), então  $D$  contém um ciclo.*

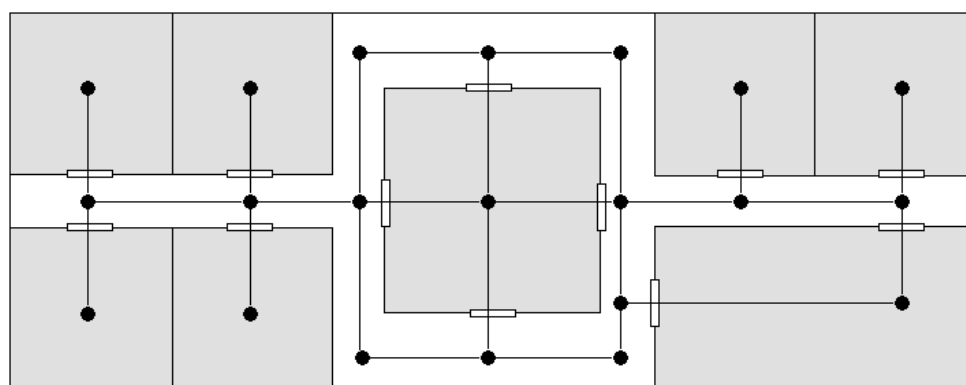
**Exercício 1.9.** *Mostre que um grafo  $G$  de  $\text{raio}(G) \leq k$  e  $\Delta(G) \geq 3$  tem no máximo  $1 + \frac{\Delta(G)}{\Delta(G)-2}(\Delta(G) - 1)^k$  vértices*

**Exercício 1.10.** *Mostre que com um conjunto de  $n$  vértices distintos é possível gerar  $2^{\binom{n}{2}}$  grafos simples.*

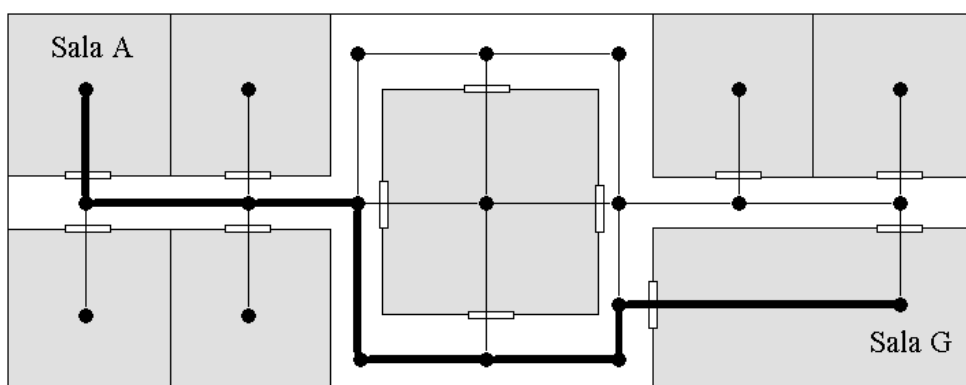
**Exercício 1.11.** *Mostre que todo dígrafo acíclico(sem ciclos) possui vértice fonte e um vértice sumidouro.*

**Exercício 1.12.** *Mostre que um grafo simples  $G = (V, A)$  com  $\delta(G) > 0$  e  $|A| < |V|$  possui pelo menos dois vértices de grau 1.*

**Exercício 1.13.** *Mostre que todo grafo com dois ou mais vértices tem pelo menos dois vértices de mesmo grau.*



(a)



(b)

Figura 1.9: Mapa topológico de um ambiente do tipo escritório. (a) mostra o ambiente e o mapa topológico na forma de um grafo (b) destacada o caminho escolhido para ir da sala A até a sala G.

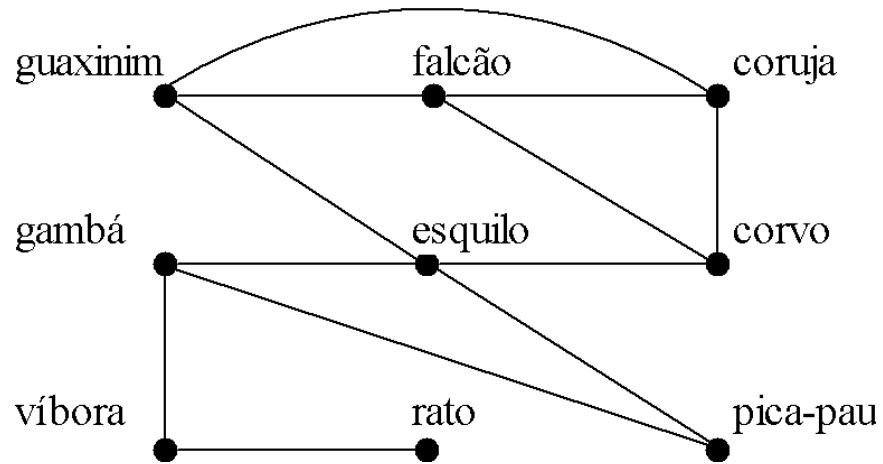


Figura 1.10: Relacionamento competitivo entre espécies. Figura traduzida do Livro [1].

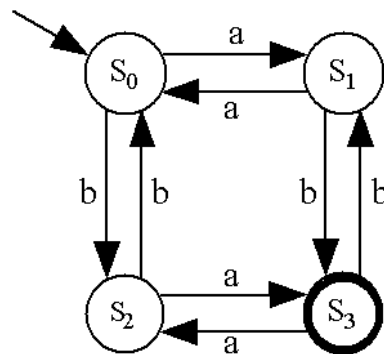


Figura 1.11: Representação gráfica de um autômato finito determinístico para reconhecer sentenças.



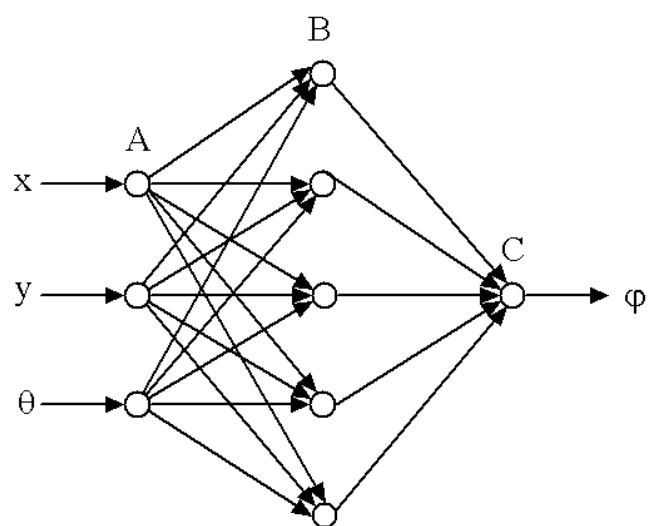


Figura 1.12: Rede neural multicamada composto por 1 camada de entrada, 1 camada oculta e 1 camada de saída.



# Capítulo 2

## Tipos de Grafos e Operações

Este capítulo apresenta diversos tipos especiais de grafos e a notação utilizada, algumas operações unárias e binárias e exemplos de aplicações. Inicialmente, apresentamos conceitos referentes a grafos completos, vazios, totalmente desconexo, entre outros. Em seguida, serão apresentadas algumas operações como complemento, união, remoção de vértices e arestas. Finalizamos o capítulo, dando exemplos de aplicações que usam grafos como estruturas básicas.

### 2.1 Grafos Especiais

Esta seção apresenta algumas classes de grafos comumente usados em diversas aplicações e também como contra-exemplos.

#### **Grafo Trivial**

Um grafo trivial é um grafo com 1 ou nenhum vértice. Quando o grafo não possui vértices, ele é chamado de *grafo vazio*. Este tipo de grafo é tipicamente usado como passo inicial em provas por indução e como contra exemplo em alguns tipos de problemas.

#### **Grafo Vazio**

#### **Grafo Totalmente Desconexo**

Um grafo totalmente desconexo não possui arestas unindo seus vértices.

#### **Grafo Completo ou Totalmente Conexo**

Um grafo completo com  $n$  vértices, denotado por  $K_n$ , é um grafo simples

que possui uma aresta entre qualquer par de vértices. Devido a isto, este grafo possui exatamente  $\frac{1}{2}n(n-1)$  arestas. A Figura 2.1 mostra alguns grafos completos com (a) 4 (b) 3 (c) 2 e (d) 1 vértices.

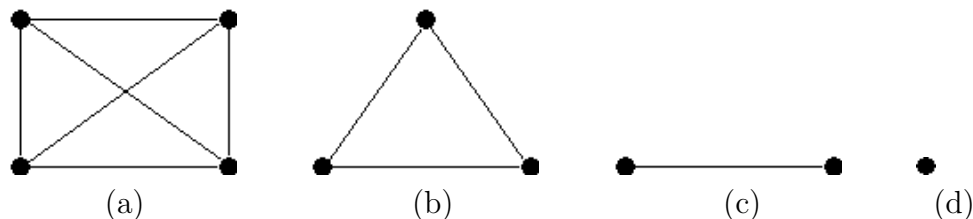


Figura 2.1: Grafos Completos (a)  $K_4$  (b)  $K_3$  (c)  $K_2$  e (d)  $K_1$ .

**Exercício 2.1.** *Mostre que um grafo  $K_n$  possui  $\frac{1}{2}n(n-1)$  arestas.*

**Dígrafo  
pleto**

**Com-**

Uma definição similar pode ser aplicada aos dígrafos. Um dígrafo é *completo* se para qualquer par de vértices  $x$  e  $y$ , como  $x \neq y$  existem os dois arcos simétricos  $(x, y)$  e  $(y, x)$ . Vários autores usam a mesma notação de grafo completo para dígrafo completo, ou seja,  $K_n$  para um dígrafo ou grafo completo com  $n$  vértices. Neste livro adotaremos esta prática e enfatizaremos se  $K_n$  refere-se a um dígrafo ou a grafo. Um dígrafo é *semicompleto* se para cada par de vértices distintos  $x$  e  $y$ , existe ou o arco  $(x, y)$  ou o arco  $(y, x)$  ou ambos.

**Dígrafo  
completo**

**Semi-**

**Exercício 2.2.** *Determine o número de arcos de um dígrafo completo  $K_n$ .*

### Grafo Regular

Um grafo  $G = (V, A)$  é regular de ordem  $r$  se todos os seus vértices tiverem o grau  $r$ , ou seja, for all  $v \in V$

$$\delta(G) = \Delta(G) = d(v) = r$$

Este tipo de grafo também é chamado de grafo  $r$ -regular. Note que todo grafo completo  $K_n$  é um grafo  $(n-1)$ -regular.

### Grafo caminho

Um grafo  $G = (V, A)$  é um grafo caminho,  $P_n$ , composto por  $n$  vértices se ele corresponder a exatamente um caminho de comprimento  $n-1$ . Neste

caso, os vértices inicial e final do caminho possuem grau igual a 1, enquanto que os demais possuem grau igual a 2.

### Grafo Ciclo

Um grafo ciclo  $C_n$ , com  $n \geq 3$ , é composto por  $n$  vértices e  $n$  arestas que juntos formam um ciclo de tamanho  $n$ . Todos os vértices de  $C_n$  possuem grau igual a 2, logo, ele é um grafo 2-regular. A Figura 2.1(c) mostra um grafo completo  $K_3$  que é também um grafo ciclo  $C_3$ . A Figura 2.2 mostra os grafos (a)  $C_4$ , (b)  $C_5$  e (c)  $C_6$ .

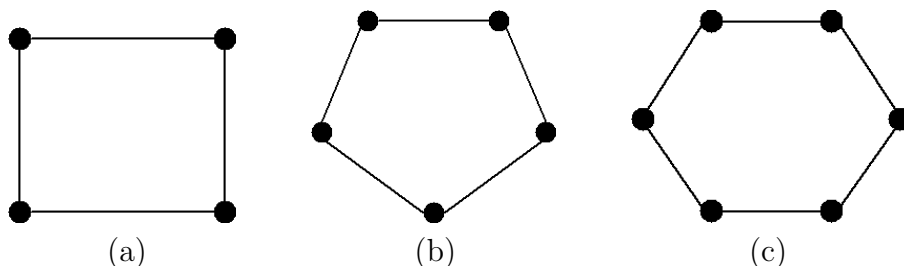


Figura 2.2: Grafos Ciclo (a)  $C_4$  (b)  $C_5$  e (c)  $C_6$ .

### Grafo Roda

Um grafo roda  $W_n$ , com  $n \geq 3$ , é igual ao grafo  $C_n$  adicionado de mais um vértice, o qual é adjacente a todos os demais. Um grafo  $W_n$  possui  $n + 1$  vértices e  $2n$  arestas, onde o vértice adicionado ao  $C_n$  possui grau igual a  $n$  e os demais vértices grau igual a 3. A Figura 2.3 mostra os grafos (a)  $W_4$  e (b)  $W_5$ .

### Grafo Estrela

Um grafo estrela  $S_n$ , com  $n > 1$ , é igual a um grafo  $W_n$  sem as arestas que compõem o grafo  $C_n$ . Um grafo  $S_n$  possui  $n + 1$  vértices e  $n$  arestas, onde o vértice central possui grau igual a  $n$ , enquanto que os demais vértices grau igual a 1. A Figura 2.4 mostra os grafos (a)  $S_3$  e (b)  $S_5$ .

### Grafo k-cubo

Um grafo k-cubo, ou hipercubo k-dimensional, denotado por  $Q_k$ , é um grafo cujos vértices são formados por seqüências binárias de tamanho k. Dois

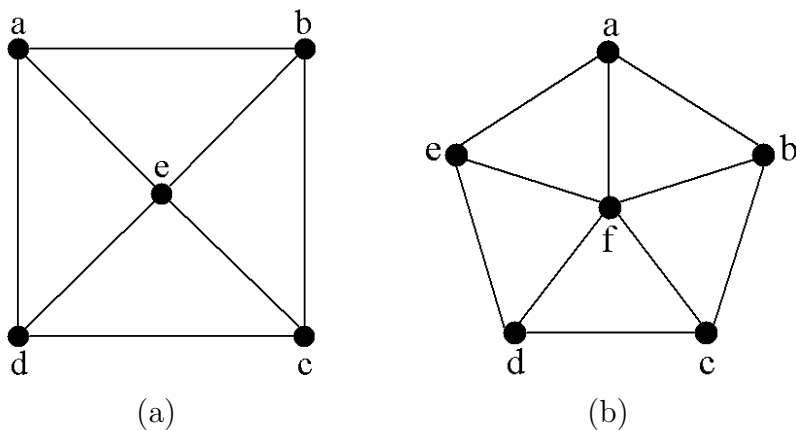


Figura 2.3: Grafos Roda (a)  $W_4$  e (b)  $W_5$ .

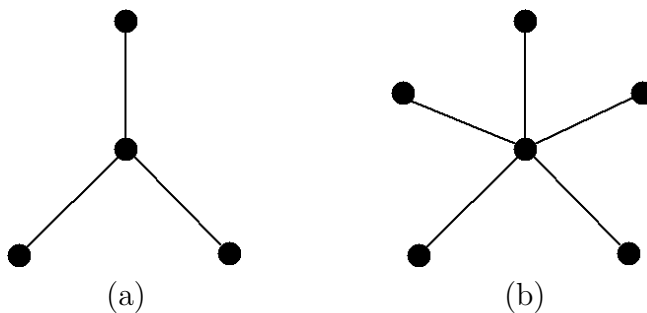


Figura 2.4: Grafos Estrela (a)  $S_3$  e (b)  $S_5$ .

vértices são adjacentes neste grafo se suas seqüências correspondentes diferirem em apenas uma posição. Além disso, ele é um grafo regular de grau  $k$ . A Figura 2.5 mostra (a) um grafo  $Q_1$  (b) um grafo  $Q_2$  e (c) um grafo  $Q_3$ .

**Exercício 2.3.** *Determine quantas arestas e quantos vértices possui um  $Q_k$ .*

## 2.2 Operações com grafos

Em diversos momentos, é necessário realizar algumas operações em grafos isolados ou pares de grafos. Elas podem ser desde operações para remoção de vértice/aresta até contrações. Abaixo, apresentamos as operações co-

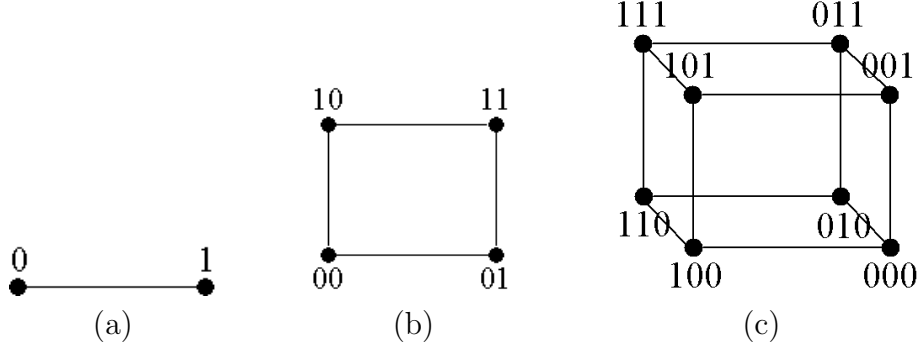


Figura 2.5: Grafos k-Cubo (a)  $Q_1$  (b)  $Q_2$  e (c)  $Q_3$ .

mumente utilizadas. Nas definições, utilizaremos os seguintes grafos  $G = (V, A, \phi)$ ,  $G_1 = (V_1, A_1, \phi_1)$  e  $G_2 = (V_2, A_2, \phi_2)$ . Como na maioria das vezes, a função de incidência  $\phi$  destes grafos será a função identidade, então ela será omitida por conveniência.

### 2.2.1 União

Dados dois grafos (ou dígrafos)  $G_1$  e  $G_2$ , definimos a operação de união por  $G_1 \cup G_2$ . O grafo resultante  $G = (V_1 \cup V_2, A, \phi)$ , tem seu conjunto de vértices oriundo da união dos conjuntos de vértices dos grafos originais. Por outro lado, o conjunto de arestas  $A$  inicialmente é igual a  $A_1$ , i.e.,  $A = A_1$  e  $\phi(e) = \phi_1(e) \forall e \in A_1$ . Cada aresta  $e' \in A_2$  deve analisada cuidadosamente antes de ser inserida em  $A$ , pois uma aresta rotulada  $e'$  pode pertencer tanto a  $A_2$  quanto a  $A_1$  com  $\phi_1(e) \neq \phi_2(e)$ . Sendo assim, para cada  $e' \in A_2$ , temos as seguintes situações

- se  $e' \notin A$ , adicionamos  $e'$  em  $A$  e assumimos  $\phi(e') = \phi_2(e')$ .
- se  $e' \in A$  e  $\phi(e') \neq \phi_2(e')$ , criamos uma nova aresta em  $A$  para  $e'$ , por exemplo  $ee'$  e a adicionamos em  $A$  fazendo  $\phi(ee') = \phi_2(e')$ .

A Figura 2.6(c) ilustra a união de dois grafos (a)  $G_1$  e (b)  $G_2$ .

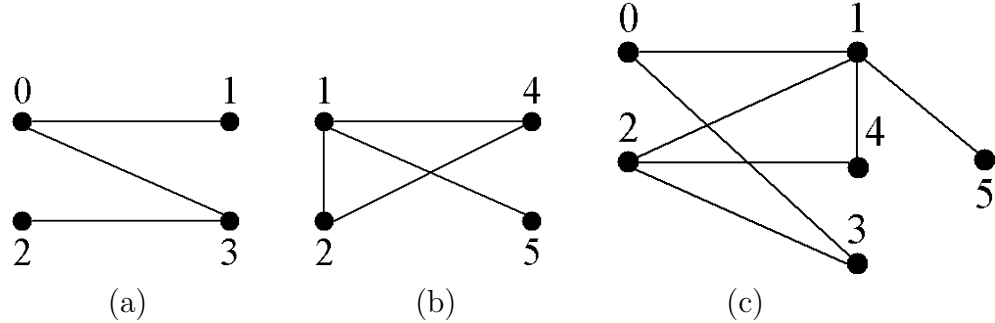


Figura 2.6: A aplicação da operação de união dos grafos (a)  $G_1$  e (b)  $G_2$  resulta no grafo (c)  $G = G_1 \cup G_2$ .

### 2.2.2 Junção

A operação de junção, representada por  $+$  ou  $*$ , é efetuada em dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  com conjuntos disjuntos de vértices e gera um novo grafo  $G = G_1 + G_2$ , onde  $G = (V, A)$ ,  $V = V_1 \cup V_2$  e  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , onde  $A_3$  é formado por todos os pares não ordenados  $\{v, w\}$ , onde  $v \in V_1$  e  $w \in V_2$ . Note que  $|V| = |V_1| + |V_2|$  e  $|A| = |A_1| + |A_2| + |V_1||V_2|$ . A Figura 2.7 ilustra a junção dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  produzindo o grafo  $G$ . As arestas mais grossas em (c) são as arestas novas, enquanto que as arestas mais finas são as arestas originais de  $G_1$  e  $G_2$ .

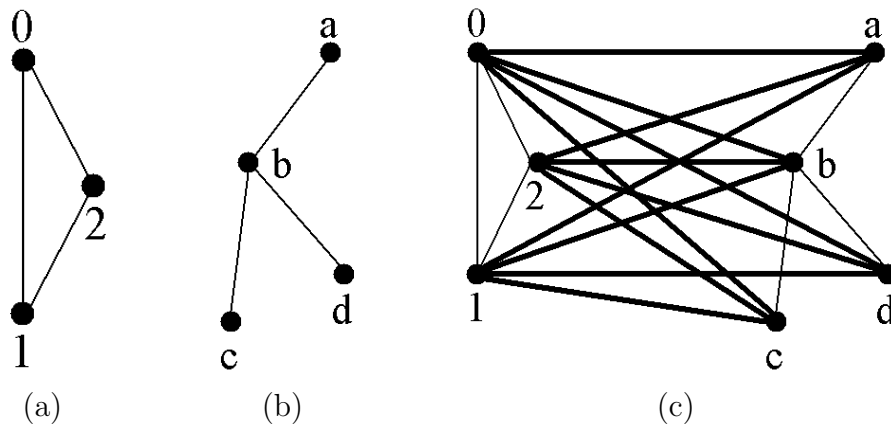


Figura 2.7: A aplicação da operação de junção os grafos (a)  $G_1$  e (b)  $G_2$  resulta no grafo (c)  $G = G_1 + G_2$ .



**Exercício 2.4.** *Determine o grafo resultante da operação  $K_2 + K_3$ .*

### 2.2.3 Intersecção

A intersecção de dois grafos  $G_1$  com  $G_2$  é denotada por  $G_1 \cap G_2$  e gera um grafo  $G = G_1 \cap G_2$ , onde  $G = (V_1 \cap V_2, A_1 \cap A_2)$ . Note que  $G$  possui conjuntos de vértices e de arestas que pertencem tanto a  $G_1$  quanto a  $G_2$ . Se  $G = \emptyset$  então  $G$  é um grafo trivial (ver Seção 2.1), caso contrário se  $V_1 \subset V_2$  e  $A_1 \subset A_2$ , então  $G = G_1$ , tendo  $G_1$  como subgrafo de  $G_2$ . A Figura 2.8 ilustra a intersecção de  $G_1$  e  $G_2$  produzindo  $G = G_1 \cap G_2$ .

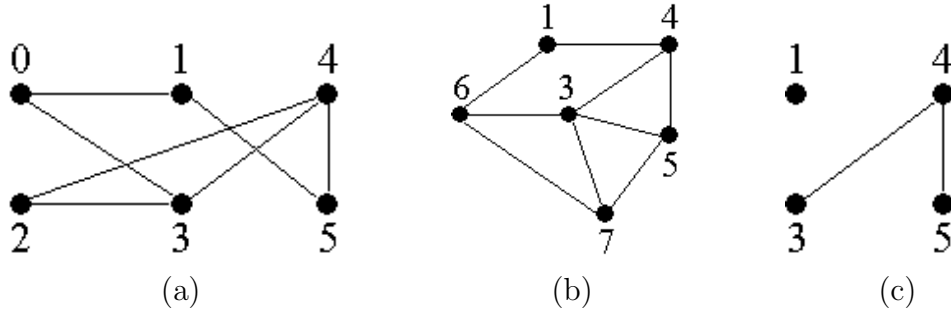


Figura 2.8: Operação de intersecção dos grafos (a)  $G_1$  e (b)  $G_2$  resulta no grafo (c)  $G = G_1 \cap G_2$ .

### 2.2.4 Produto

O produto de dois grafos,  $G_1$  e  $G_2$ , é denotado por  $G_1 \times G_2$  e gera um grafo  $G = G_1 \times G_2$ , onde  $V = V_1 \times V_2$  é o conjunto de todos os pares formados pelos vértices de  $V_1$  e  $V_2$  e  $A$  é o conjunto de arestas geradas da seguinte maneira. Considere  $p_i = (u_i, w_i)$  e  $p_j = (u_j, w_j)$  dois vértices do conjunto  $V$ , i.e.,  $p_i, p_j \in V$ , onde  $u_i, u_j \in V_1$  e  $w_i, w_j \in V_2$ . Eles são adjacentes se  $u_i = u_j$  e  $(w_i, w_j) \in A_2$  ou  $w_i = w_j$  e  $(u_i, u_j) \in A_1$ . O grafo  $G$  resultante possui  $|V| = |V_1||V_2|$  vértices e  $|A| = |V_1||A_2| + |V_2||A_1|$  arestas.

A Figura 2.9 mostra (c) o grafo resultante do produto dos grafos (a) e (b). Note que os vértices em (c) são os pares ordenados dos vértices dos grafos (a) e (b), enquanto que as arestas foram geradas a partir da análise dos componentes dos pares associados às suas extremidades. Por exemplo, a aresta  $\{(u_1, w_1), (u_1, w_2)\}$  existe pois os primeiros componentes dos pares

$(u_1, w_1)$  e  $(u_1, w_2)$  são iguais e existe aresta entre  $w_1$  e  $w_2$  no grafo mostrado em (b).

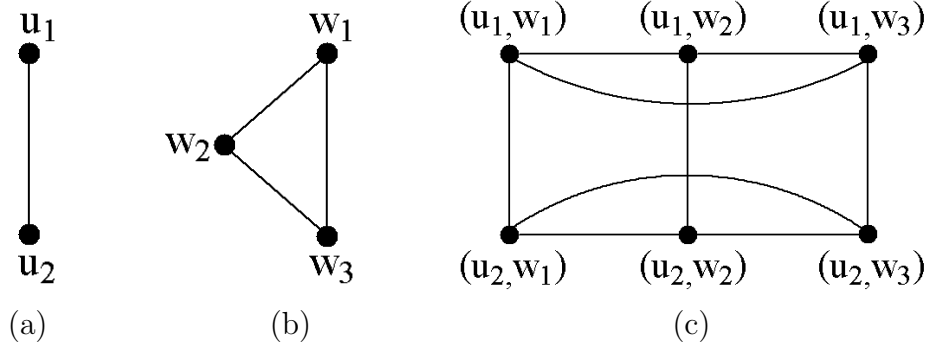


Figura 2.9: Operação de produto. (c) mostra o resultado do produtos dos grafos em (a) e (b).

### 2.2.5 Complemento

O complemento de um grafo  $G = (V, A)$ , denotado por  $\bar{G} = (V, A_1)$  é um grafo cujo conjunto de vértices é o mesmo de  $G$ , e com um conjunto de arestas definido da seguinte maneira  $A_1 = \{\{u, v\} : (\{u, v\} \in \mathcal{P}(V) - A) \wedge (u \neq v)\}$ , ou seja, o conjunto  $A_1$  é formado por todas as arestas que correspondem aos pares não ordenados que não pertencem ao conjunto de arestas de  $G$  e não correspondem a laços. O complemento de um grafo  $K_n$  é um grafo com  $n$  vértices totalmente desconexo, e o complemento de um grafo desconexo de  $n$  vértices é um grafo completo  $K_n$ . O complemento dos grafos mostrados nas Figuras 2.8(b) e (c) é apresentado nas Figuras 2.10 (a) e (b), respectivamente.

Quando um grafo é isomórfico ao seu complemento, então ele é chamado de grafo *autocomplementar*. Grafos Isomórficos serão discutidos em detalhes no Capítulo 7. Porém podemos adiantar informalmente, que dois grafos são isomórficos se eles possuem a relação de adjacência (estrutural) entre seus vértices. Figura 2.11(a) mostra um grafo  $G$  autocomplementar, e (b) seu complemento,  $\bar{G}$ . Observe que tanto  $G$  quanto  $\bar{G}$  correspondem a um  $C_5$ .

### 2.2.6 Remoção

A operação de **remoção** aplicada a um grafo  $G = (V, A)$  retira ou um conjunto de arestas ou um conjunto de vértices e as arestas incidentes neste

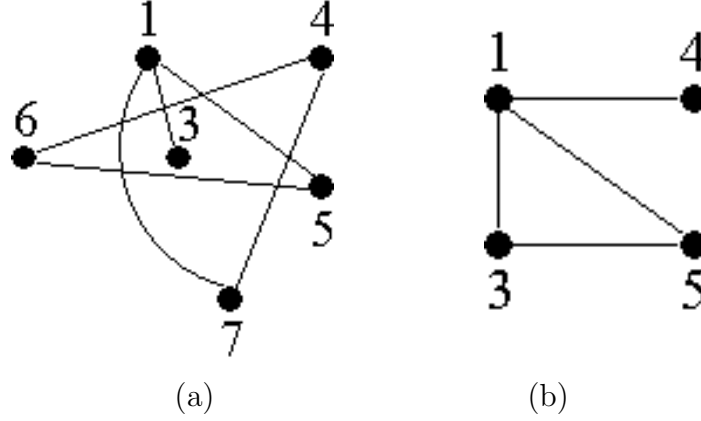


Figura 2.10: Operação de complemento. (a) e (b) mostram o complemento dos grafos das Figuras 2.8(b) e (c), respectivamente.

conjunto. Para um grafo  $G$ , a remoção de um vértice  $v$ , representada por  $G - v$ , causa a remoção tanto de  $v$  quanto das arestas incidentes a  $v$ . Enquanto que a operação  $G - e$ , com  $e = \{u, v\}$ , leva à retirada da aresta  $\{u, v\}$ .

Seja  $S_v \subseteq V$ , então  $G_1 = G - S_v$  é o grafo resultante da retirada de todos os vértices  $v \in S_v$  e de suas arestas incidentes. Logo,  $G_1 = (V_1, A_1)$  onde  $V_1 = V - S_v$  e  $A_1 = \{(u, w) \in A : u, w \in V_1\}$ . Observe que  $G_1 = G[V - S_v]$ , ou seja,  $G_1$  é o subgrafo de  $G$  induzido por  $V - S_v$ .

Seja  $S_a \subseteq A$ , então  $G_2 = G - S_a$  é o grafo resultante da retirada das arestas  $a \in S_a$ . Logo,  $G_2 = (V_2, A_2)$  onde  $V_2 = V$  e  $A_2 = A - S_a$ , i.e.,  $G_2 = G[A - S_a]$  é o subgrafo de  $G$  induzido por  $S_a$ . A Figura 1.5 ilustra (a) um grafo  $G$  e os grafos (b)  $G - S_v$  e (c)  $G - S_a$ , onde  $S_v = \{1, 2\}$  e  $S_a = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}\}$ . Note que os grafos (b) e (c) correspondem aos grafos induzidos  $G[V - S_v]$  e  $G[A - S_a]$ , respectivamente.

### 2.2.7 Contração

Uma operação de contração, também chamada de arco-contração, em um grafo  $G$  afeta uma aresta  $a$ , em particular, a transformando em um novo vértice  $v$ . Esta operação é representada por  $G/a$  e consiste na remoção da aresta  $a = \{u, w\}$  e de seus vértices  $u$  e  $w$  e subsequente inserção de um novo vértice  $v$  e re-ligação das arestas incidentes tanto a  $u$  quanto a  $w$  em  $G$  a este novo vértice. Esta operação é particularmente importante para verificar

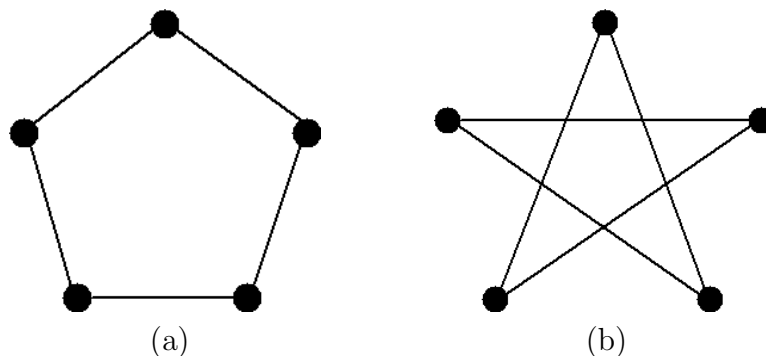


Figura 2.11: Grafo autocomplementar. (a) grafo exemplo e (b) seu complemento.

a planaridade de certos grafos e para o cálculo do número de árvores de espalhamento de um grafo, como será discutido adiante no Capítulo 9 e 6.3. Dependendo do grafo e da aresta escolhida é possível que um grafo simples passe a ser multigrafo, ou um multigrafo passe a ser pseudografo.

A Figura 2.12 ilustra (a) um grafo  $G$  e (b) a operação arco-contracção  $G/a$  aplicada à aresta  $a$ . A aresta  $a$  deu origem ao vértice  $v$ , e todas as arestas incidentes às extremidades de  $a$  são agora incidentes em  $v$ . Enquanto  $G$  é simples,  $G/a$  é um multigrafo. (c) mostra a operação de arco-contracção no grafo  $G/a$  aplicada à aresta  $b$ , produzindo  $(G/a)/b$ . A aresta  $b$  deu origem ao vértice  $m$  e a um laço. O multigrafo  $G/a$  passou a ser um pseudografo  $(G/a)/b$ .

### 2.2.8 Supressão e Subdivisão

A operação de supressão de um vértice é realizada apenas em vértices de grau 2 e consiste no seguinte processo. Seja  $G = (V, A)$  um grafo qualquer e  $v$  um vértice adjacente a dois vértices  $u$  e  $w$ . A operação de supressão de  $v$ , remove  $v$  do conjunto  $V$  e cria uma aresta entre  $u$  e  $w$  produzindo um novo grafo  $G' = (V', A')$ . O grafo  $G'$  é chamado grafo reduzido de  $G$  ou grafo homeomorficamente reduzido de  $G$ . Ele possui  $V' = V - v$  e  $A' = A - A_1 + \{u, w\}$ , com  $A_1 = \{(v, u), (v, w)\}$ .

A operação inversa é chamada subdivisão de arestas. Ela consiste em inserir vértices de grau 2 nas arestas do grafo criando subdivisões de arestas. Esta operação funciona da seguinte maneira. Seja  $G = (V, A)$  um grafo qualquer,  $v$  um vértice novo e uma aresta  $a = \{u, w\}$ . A operação de sub-

**Grafo Homeo-  
morficamente  
Reduzido  
Subdivisão de  
Grafo**

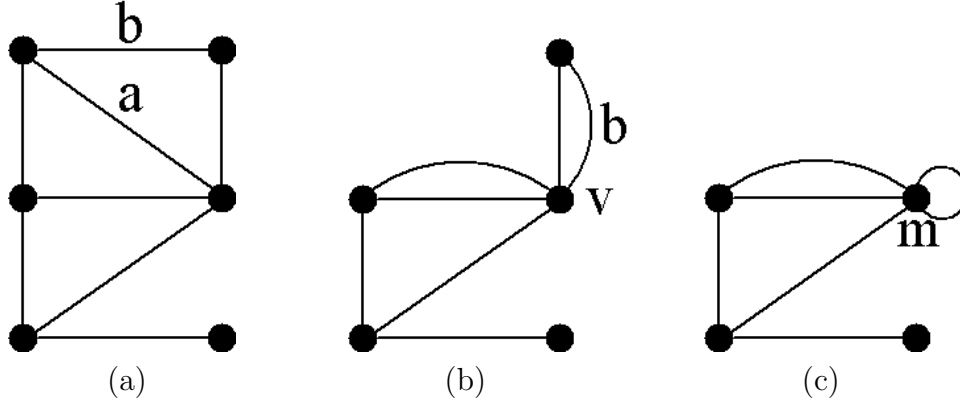


Figura 2.12: Operação de arco-contracção aplicada (a) ao grafo  $G$  na aresta  $a$ , resultado em (b) no grafo  $G/a$ . A figura (c) mostra o resultado da operação  $(G/a)/b$ .

divisão de  $a$ , remove a aresta  $a$ , i.e.,  $G - \{u, w\}$ , e cria duas novas arestas  $\{u, v\}$  e  $\{v, w\}$ , produzindo um novo grafo  $G' = (V', A')$ . Este grafo possui  $V' = V \cup \{v\}$  e  $A' = A - \{u, w\} + A_1$ , com  $A_1 = \{(v, u), (v, w)\}$ . Logo, dizemos que  $G'$  é uma subdivisão de  $G$ .

As Figuras 2.13(a) e (b) ilustram os resultados das operações de subdivisão e de supressão, respectivamente. (a) é subdivisão de (b) obtida a partir da subdivisão da aresta  $\{4, 3\}$  de (b). Enquanto que (b) é um grafo reduzido de (a), obtido a partir da supressão do vértice 7.

**Exercício 2.5.** *Determine o grafo resultante da operação de arco-contracção na aresta  $\{4, 7\}$  no grafo na Figura 2.13(a). Em seguida o compare com o grafo mostrado na Figura 2.13(b).*

### 2.2.9 Decomposição

A operação de decomposição de um grafo  $G$  gera um conjunto de subgrafos  $G_1, G_2, \dots$  tal que cada aresta de  $G$  aparece exatamente uma única vez em um único subgrafo, ou seja, considerando que o conjunto de arestas do grafo  $G_i$  é  $A_i$ , temos  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ . Os subgrafos gerados podem compartilhar vértices, entretanto não podem compartilhar arestas. Em algumas áreas, a decomposição é uma ferramenta útil, pois é possível isolar cada parte do grafo, estudá-las separadamente e em seguida combinar os resultados obtidos.

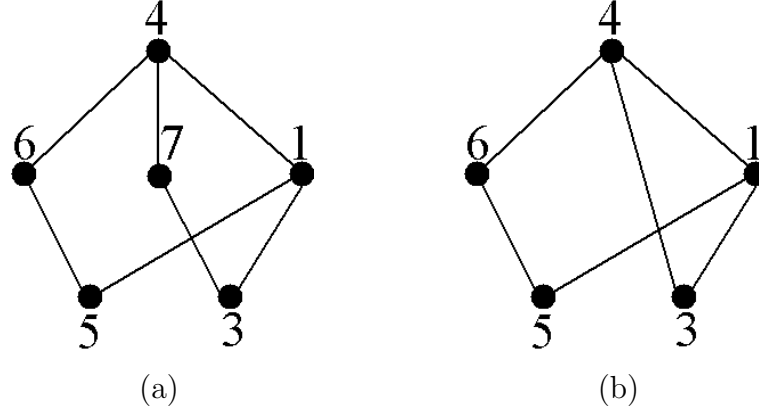


Figura 2.13: Operações de Supressão e Subdivisão. (a) é uma subdivisão do grafo em (b), e (b) é um grafo reduzido de (a).

O grafo 3-cubo,  $Q_3$ , mostrado na Figura 2.14(a) é decomposto em 4 caminhos  $P_4$  ilustrados em (b). Estes caminhos são mostrados através de arestas grossas e finas. Considerando apenas os vértices temos os caminhos  $(1, 2, 6, 5)$ ,  $(3, 1, 5, 7)$ ,  $(2, 4, 8, 6)$  e  $(8, 7, 3, 4)$ .

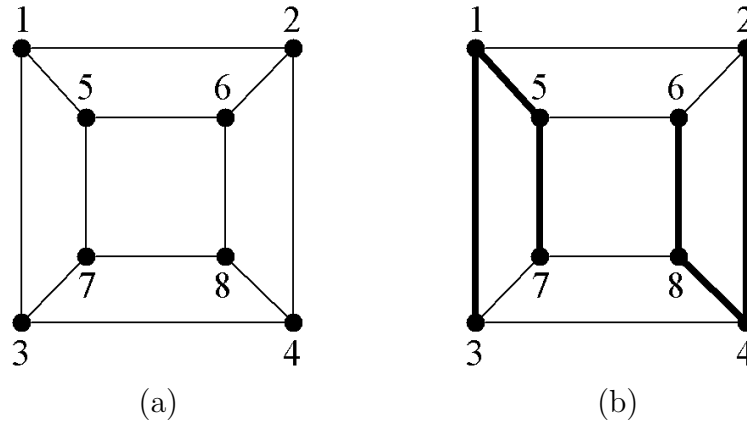


Figura 2.14: Decomposição do (a) grafo  $Q_3$  em (b) quatro grafos  $P_4$ .

### 2.2.10 Operador Linha $L$

Para facilitar a solução de certos problemas, convém realizar o mapeamento das linhas do grafo para vértices e vice-versa. Este mapeamento é realizado

pelo operador  $L$ , o qual recebe como operando um grafo(ou um dígrafo) e retorna um novo grafo (ou dígrafo), chamado grafo linha (ou dígrafo linha).

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , o grafo linha  $L(G) = (V_L, A_L)$  correspondente é construído da seguinte maneira. Cada aresta  $\{v, u\} \in A$  dá origem a um vértice  $vu$  em  $L(G)$ , i.e., um vértice  $vu \in V_L$  se e somente se  $\{v, u\} \in A$ . A adjacência entre os vértices em  $L(G)$  é definida da seguinte maneira. Dois vértices distintos  $uv, xw \in V_L$  são adjacentes se as arestas correspondentes em  $G$  são adjacentes, i.e.,  $\{u, v\} \cap \{x, w\} \neq \emptyset$ .

A Figura 2.15(a) mostra um grafo simples  $G$  composto de arestas com rótulos  $a - f$ , enquanto que (b) mostra o grafo linha  $L(G)$  correspondente. Cada aresta em (a) é mapeada para um vértice em (b). A adjacência dos vértices em  $L(G)$  é dada pela adjacência das arestas em  $G$ . Por exemplo, o vértice  $a$  em  $L(G)$  é adjacente aos vértices  $b, e, f$ , pois em  $G$  a aresta  $a$  é adjacente às arestas  $b, e, f$ , ou seja, ela compartilha vértices com as arestas  $b, e, f$ . O mesmo ocorre com o vértice  $c$  em  $L(G)$ . Ele é adjacente aos vértices  $b, d, f$ , pois a aresta  $c$  no grafo  $G$  compartilha vértices com as arestas  $b, f, d$ .

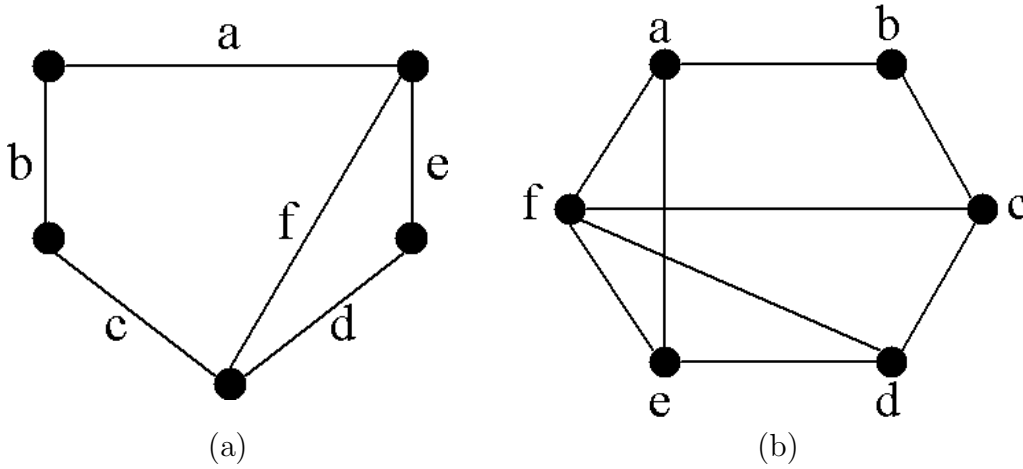


Figura 2.15: Grafo linha (b)  $L(G)$  do grafo  $G$  em (a).

Um dígrafo linha é construído a partir de idéias similares levando em consideração a orientação dos arcos do dígrafo original. Dado um dígrafo  $D = (V, A)$ , o dígrafo linha  $L(D) = (V_L, A_L)$  correspondente é construído da seguinte maneira. Cada arco  $(v, u) \in A$  dá origem a um vértice  $vu$  em  $L(D)$  e existe um arco com origem em  $vu \in A_L$  e destino em  $xw \in A_L$  se e somente se para os arcos correspondentes  $(v, u)$  e  $(x, w)$  em  $D$ ,  $u = x$ , ou seja, se o

**Grafo Linha**  
**Dígrafo Linha**

vértice destino  $u$  do arco  $(v, u)$  for igual ao vértice origem do arco  $(x, w)$ .

A Figura 2.16(a) mostra um dígrafo simples  $D = (V, A)$  composto de arestas com rótulos  $a - f$ , enquanto que (b) mostra o dígrafo linha  $L(D) = (V_L, A_L)$  correspondente. Cada arco em (a) é mapeado para um vértice em (b). A adjacência entre os vértices em  $L(D)$  é dada considerando a orientação dos respectivos arcos.

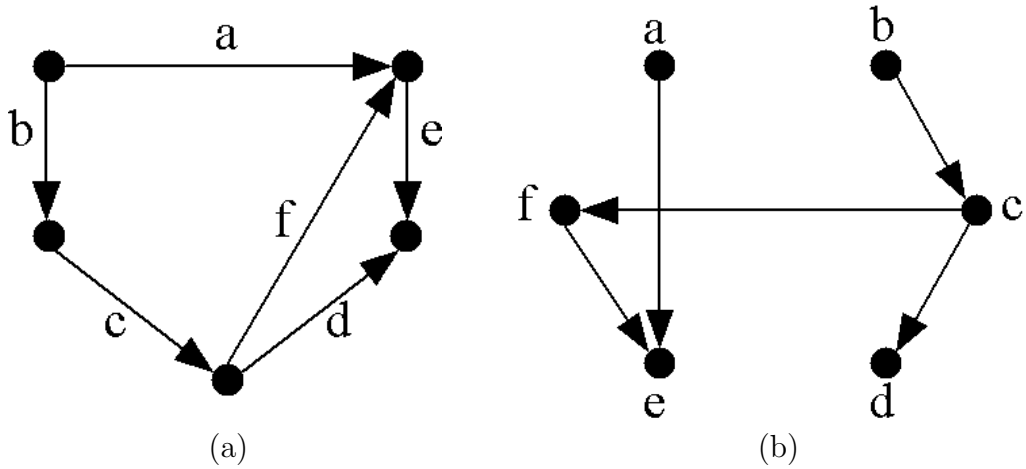


Figura 2.16: Dígrafo linha (b)  $L(D)$  do dígrafo  $D$  em (a).

Grafos Linha são importantes em diversos problemas, como o problema de coloração de arestas. Para colorir as arestas de um grafo  $G$  podemos usar as técnicas padrão de coloração de vértices porém no grafo  $L(G)$ . O cálculo dos emparelhamento maximais segue a mesma idéia. Para encontrar os emparelhamentos maximais de um grafo  $G$ , podemos empregar o método para encontrar os conjuntos independente em  $L(G)$ . Estes problemas serão discutidos nas Seções 4.5 e 10, sobre emparelhamento e coloração, respectivamente.

## 2.3 Exercícios

**Exercício 2.6.** *Mostre que o número máximo de aresta entre todos os  $p$  vértices de um grafo com nenhum triângulo é  $\lceil p^2/4 \rceil$*

**Exercício 2.7.** *Dado um grafo  $G(V, A)$ , mostre que para qualquer vértice  $v$ ,  $d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$ , onde  $d_G(v)$  é o grau do vértice  $v$  no grafo  $G$ .*



**Exercício 2.8.** *Mostre que se  $G$  é um grafo simples então  $\text{diam}(G) \geq 3$  implica  $\text{diam}(\bar{G}) \leq 3$ .*

**Exercício 2.9.** *Mostre que  $K_{n+p} = K_n + K_p$ , i.e., a junção de dois grafos completos  $K_n$  e  $K_p$  é um grafo completo  $K_{n+p}$ .*

**Exercício 2.10.** *Mostre que o complemento de um caminho de comprimento 3 é um caminho de comprimento 3.*



# Capítulo 3

## Conectividade

Em vários problemas do mundo real é necessário verificar se existe ou não pelo menos um caminho entre um par de vértices  $u$  e  $v$ . Se este caminho existe e caso venha a ser bloqueado, é possível ir de  $u$  para  $v$  (ou o contrário) através de um caminho alternativo? Se sim, por quantos caminhos alternativos? Responder estas e outras perguntas deste tipo é do interesse de diversas áreas, entre elas robótica e redes de computadores. Na robótica móvel, existem diversos algoritmos baseados em busca em grafos que encontram um caminho ou o caminho mais curto entre duas posições desejadas a partir de um mapa dado, como discutido na Seção 1.5.2. Algoritmos, como estes, podem ser utilizados para planejar caminhos para robôs não-tripulados aéreos ou aquáticos; ou na área de redes de computadores, para a transmissão de dados entre computadores geograficamente distante.

Nos exemplos acima, comentamos brevemente apenas a descoberta de caminhos entre dois pontos, porém de igual importância é considerarmos esta descoberta de caminhos quando ocorrem falhas. Por exemplo, se o caminho que um robô está seguindo estiver bloqueado por um obstáculo móvel, é possível atingir a posição desejada por um caminho alternativo? Se durante a transmissão de um pacote, um computador, que faz parte do caminho que o pacote deverá seguir, falhar, este pacote será perdido ou seguirá por um caminho alternativo? Notem que em ambos os casos, é importante sabermos se existem ou não vários caminhos entre qualquer par de vértices e se não existirem, quais pares de vértices poderão ser afetados caso surja algum imprevisto? No caso da rede de computadores, a falha em um computador pode fazer com que uma parte da rede não se comunique mais com a(s) outra(s). Este seria o mesmo caso de um rompimento de um cabo de fibra ótica que

liga dois servidores. Identificar o(s) computador(es) que gera(m) esta desconexão é extremamente importante, pois é possível tomar uma providência de forma a aumentar a tolerância a este tipo de falha. No caso de um robô móvel, este poderá ficar parado economizando energia ou retornar ao seu ponto de partida. Este capítulo apresenta os aspectos teóricos subjacentes aos questionamentos apresentados.

### 3.1 Relação de Vizinhança Estendida e Fechamento Transitivo

Na Seção 1.2 definimos as funções multivaloradas  $\tau$ ,  $\tau^+$  e  $\tau^-$ , onde a função  $\tau$  permite calcular os vértices vizinhos a um dado vértice em um grafo, enquanto que as funções  $\tau^+$  e  $\tau^-$  permitem determinar os vértices atingíveis e que atingem um dado vértice em um dígrafo, respectivamente. Estas funções podem ser estendidas para considerar ao invés de um único vértice um subconjunto de vértices.

Dados um grafo  $G = (V, A)$  e um dígrafo  $D = (V_d, A_d)$ , definimos a extensão das funções multivaloradas  $\tau$ ,  $\tau^+$  e  $\tau^-$ , como

$$\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} \tau(v), \quad \Gamma^+(S_d) = \bigcup_{v \in S_d} \tau^+(v) \text{ e } \Gamma^-(S_d) = \bigcup_{v \in S_d} \tau^-(v)$$

#### Funções Estendidas de Vizinhança em Grafos e Dígrafos

onde  $S$  e  $S_d$  são subconjuntos não-vazio de vértices,  $S \subseteq V$ ,  $S_d \subseteq V_d$ ;  $\Gamma : 2^V \rightsquigarrow 2^V$  é a função estendida de vizinhança;  $\Gamma^+ : 2^{V_d} \rightsquigarrow 2^{V_d}$  é a função estendida de vizinhança direta; e  $\Gamma^- : 2^{V_d} \rightsquigarrow 2^{V_d}$  é a função estendida de vizinhança inversa. A função  $\Gamma(S)$  mapeia  $S$  para o conjunto de vértices vizinhos aos vértices  $v \in S$ , enquanto que as funções  $\Gamma^+(S_d)$  e  $\Gamma^-(S_d)$  mapeiam  $S_d$  para o conjunto dos vértices *atingíveis a partir de* e *que atingem* os vértices  $v_d \in S_d$ , respectivamente. Por definição  $\Gamma(\emptyset) = \Gamma^+(\emptyset) = \Gamma^-(\emptyset) = \{\emptyset\}$ .

Estas funções podem ser aplicadas sucessivamente para calcular os vizinhos de um vértice  $v$  a uma dada distância. Por exemplo, a composição  $\Gamma(\Gamma(\{v\})) = \Gamma^2(\{v\})$  fornece todos os vértices atingíveis por um passeio de comprimento 2 a partir de  $v$ , enquanto que  $\Gamma^n(\{v\})$ , retorna todos os vértices atingíveis por um passeio de comprimento  $n$ . Analogamente, podemos aplicar sucessivamente as funções  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$ . Por exemplo,  $\Gamma^{+n}(\{v\})$  fornece todos os vértices atingíveis por um *passeio direcionado* de comprimento  $n$  a partir de  $v$ , enquanto que  $\Gamma^{-n}(\{v\})$  retorna todos os vértices que atingem  $v$  através de um passeio direcionado de comprimento  $n$ .

### 3.1 Relação de Vizinhaça Estendida e Fechamento Transitivo 45

Considere o grafo da Figura 3.1(a) e os seguintes conjuntos de vértices  $V_1 = \{1\}$ ,  $V_2 = \{2, 3\}$  e  $V_3 = \{3, 4\}$ . Abaixo são listados os resultados da aplicação da função  $\Gamma$  nestes conjuntos.

$$\begin{aligned}\Gamma(V_1) &= \Gamma(\{1\}) = \tau(1) = \{5\}; \\ \Gamma(V_2) &= \Gamma(\{2, 3\}) = \tau(2) \cup \tau(3) = \{5, 6\} \cup \{5, 4\} = \{4, 5, 6\} \\ \Gamma(V_3) &= \Gamma(\{3, 4\}) = \tau(3) \cup \tau(4) = \{5, 4\} \cup \{3, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

Usando o resultado anterior, calculamos  $\Gamma^2$  para cada conjunto novamente

$$\begin{aligned}\Gamma^2(V_1) &= \Gamma(\Gamma(V_1)) = \Gamma(\{5\}) = \{1, 2, 3, 6\}; \\ \Gamma^2(V_2) &= \Gamma(\Gamma(V_2)) = \Gamma(\{4, 5, 6\}) = \tau(4) \cup \tau(5) \cup \tau(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \Gamma^2(V_3) &= \Gamma(\Gamma(V_3)) = \Gamma(\{3, 4, 5, 6\}) = \tau(3) \cup \tau(4) \cup \tau(5) \cup \tau(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\end{aligned}$$

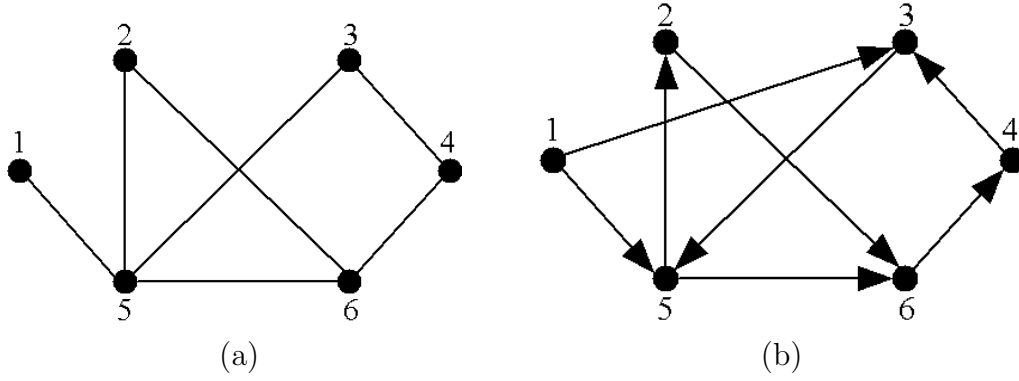


Figura 3.1: Aplicação da função multivalorada no grafo em (a) e no dígrafo em (b) .

Para o dígrafo da Figura 3.1(b), encontramos os resultados abaixo para a aplicação das funções  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$  nos conjuntos de vértices  $V_1 = \{1\}$ ,  $V_2 = \{2, 3\}$  e  $V_3 = \{3, 4\}$ .

$$\begin{aligned}\Gamma^+(V_1) &= \tau^+(1) = \{3, 5\} \\ \Gamma^+(V_2) &= \tau^+(2) \cup \tau^+(3) = \{6\} \cup \{5\} = \{5, 6\} \\ \Gamma^+(V_3) &= \tau^+(3) \cup \tau^+(4) = \{5\} \cup \{3\} = \{3, 5\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^-(V_1) &= \tau^-(1) = \{\emptyset\} \\ \Gamma^-(V_2) &= \tau^-(2) \cup \tau^-(3) = \{5\} \cup \{1, 4\} = \{1, 4, 5\} \\ \Gamma^-(V_3) &= \tau^-(3) \cup \tau^-(4) = \{1, 4\} \cup \{6\} = \{1, 4, 6\}\end{aligned}$$

A aplicação das funções  $\Gamma^{+2}$  e  $\Gamma^{-2}$  nos conjuntos  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  resulta em  $\Gamma^{+2}(V_1) = \Gamma^+(\{3, 5\}) = \tau^+(3) \cup \tau^+(5) = \{2, 5, 6\}$

$$\Gamma^{+2}(V_2) = \Gamma^+(\{5, 6\}) = \tau^+(5) \cup \tau^+(6) = \{2, 4, 6\}$$

$$\Gamma^{+2}(V_3) = \Gamma^+(\{3, 5\}) = \tau^+(3) \cup \tau^+(5) = \{2, 5, 6\}$$

$$\Gamma^{-2}(V_1) = \Gamma^-(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\};$$

$$\Gamma^{-2}(V_2) = \Gamma^-(\{1, 4, 5\}) = \tau^-(1) \cup \tau^-(4) \cup \tau^-(5) = \{1, 3, 6\}$$

$$\Gamma^{-2}(V_3) = \Gamma^-(\{1, 4, 6\}) = \tau^-(1) \cup \tau^-(4) \cup \tau^-(6) = \{2, 5, 6\}$$

**Função de Fechamento Transitivo**

A partir das funções estendidas de vizinhança para grafos e dígrafos, podemos definir a função de fechamento transitivo  $\hat{\Gamma} : V \rightsquigarrow 2^V$  para grafos, e as funções de fechamento transitivo direto  $\hat{\Gamma}^+ : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$  e inverso  $\hat{\Gamma}^- : V_d \rightsquigarrow 2^{V_d}$  para dígrafos. Dado um vértice  $v$ , a função  $\hat{\Gamma}(v)$  é definida por

$$\hat{\Gamma}(v) = \{v\} \cup \Gamma(\{v\}) \cup \Gamma^2(\{v\}) \cup \dots \cup \Gamma^n(\{v\}) \cup \dots$$

e retorna todos os vértices que são atingíveis a partir de  $v$  através de um passeio de qualquer comprimento. A função  $\hat{\Gamma}^+(v)$  é definida por

$$\hat{\Gamma}^+(v) = \{v\} \cup \Gamma^+(\{v\}) \cup \Gamma^{+2}(\{v\}) \cup \dots \cup \Gamma^{+n}(\{v\}) \cup \dots$$

e retorna o conjunto de todos os vértices que  $v$  consegue atingir a partir de um passeio direcionado de qualquer comprimento. Enquanto que a função  $\hat{\Gamma}^-(v)$  é definida por

$$\hat{\Gamma}^-(v) = \{v\} \cup \Gamma^-(\{v\}) \cup \Gamma^{-2}(\{v\}) \cup \dots \cup \Gamma^{-n}(\{v\}) \cup \dots$$

e retorna todos os vértices que atingem  $v$  através de um passeio direcionado de qualquer comprimento.

Aplicando a função  $\hat{\Gamma}$  nos vértices do grafo ilustrado na Figura 3.1(a), temos

$$\hat{\Gamma}(1) = \{1\} \cup \Gamma(\{1\}) \cup \Gamma^2(\{1\}) \cup \dots = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Observe que neste caso, temos  $\hat{\Gamma}(v) = V$  para todo  $v \in V$ .

A função  $\hat{\Gamma}^+$  quando aplicada aos vértices do dígrafo ilustrado na Figura 3.1(b) resulta em

$$\hat{\Gamma}^+(1) = \{1\} \cup \Gamma^+(\{1\}) \cup \Gamma^{+2}(\{1\}) \cup \dots = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\hat{\Gamma}^+(2) = \hat{\Gamma}^+(3) = \hat{\Gamma}^+(4) = \hat{\Gamma}^+(5) = \hat{\Gamma}^+(6) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Como todos os vértices com exceção do vértice 1 estão dentro de um ciclo direcionado, um pode atingir o outro dentro do ciclo através de um caminho

direcionado. Em relação à função  $\hat{\Gamma}^-$ , sua aplicação nos vértices do dígrafo da Figura 3.1(b) resulta em

$$\hat{\Gamma}^-(1) = \{1\} \cup \Gamma^-(\{1\}) \cup \Gamma^{-2}(\{1\}) \cup \dots = \{1\}$$

$$\hat{\Gamma}^-(2) = \hat{\Gamma}^-(3) = \hat{\Gamma}^-(4) = \hat{\Gamma}^-(5) = \hat{\Gamma}^-(6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

De forma similar ao apresentado anteriormente, com exceção do vértice 1, todos os vértices são atingíveis a partir dos demais vértices do dígrafo. Em um dígrafo se  $v$  é um vértice fonte então  $\hat{\Gamma}^-(v) = \{v\}$ , enquanto que se  $v$  for um vértice sumidouro, temos  $\hat{\Gamma}^+(v) = \{v\}$ .

## 3.2 Grafos Conexos e Desconexos

Um grafo não vazio é chamado *grafo conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices, caso contrário, ele é chamado *grafo desconexo*. A Figura 3.2(a) mostra um exemplo de grafo conexo  $G_1 = (V_1, A_1)$  onde existe um caminho<sup>1</sup> entre cada par de vértices, por exemplo, existe um caminho de comprimento 1 entre os vértices 1 e 2, um caminho de comprimento 3 entre os vértices 2 e 4, etc. Observe que a função de fechamento transitivo quando aplicada a qualquer vértice de  $G_1$  retorna todo o seu conjunto de vértices, i.e.,  $\hat{\Gamma}(v) = V_1$ , para todo  $v \in V_1$ . Por outro lado, o grafo  $G_2 = (V_2, A_2)$  ilustrado na Figura 3.2(b) mostra que existem vértices que não são atingíveis a partir de outros, por exemplo, não existe caminho entre os vértices 1 e 5, tão pouco entre os vértices 2 e 6. Logo, este grafo é desconexo, pois para qualquer vértice  $v \in V_2$ , temos  $\hat{\Gamma}(v) \neq V_2$ .

Qualquer grafo  $G = (V, A)$  possui um subgrafo  $G[V']$ , induzido<sup>2</sup> por um conjunto de vértices  $V' \subseteq V$ , que é conexo. Se  $V'$  não está contido propriamente em outro conjunto de vértices  $V''$  de forma que o grafo,  $G[V'']$ , seja conexo, então  $G[V']$  é um *subgrafo conexo maximal*, sendo chamado de *componente conexo* de  $G$ .

**Grafo Conexos**  
**Grafo Desconexo**

**Componente Conexos**

**Definição 3.1.** Um **componente conexo** de um grafo  $G$  é um subgrafo conexo de  $G$  que não é um subgrafo próprio de outro subgrafo conexo de  $G$ .

<sup>1</sup>Para que um grafo seja conexo é importante que exista um caminho de qualquer comprimento entre cada par de vértices

<sup>2</sup>O conceito de grafo induzido é apresentado na Seção 1.1

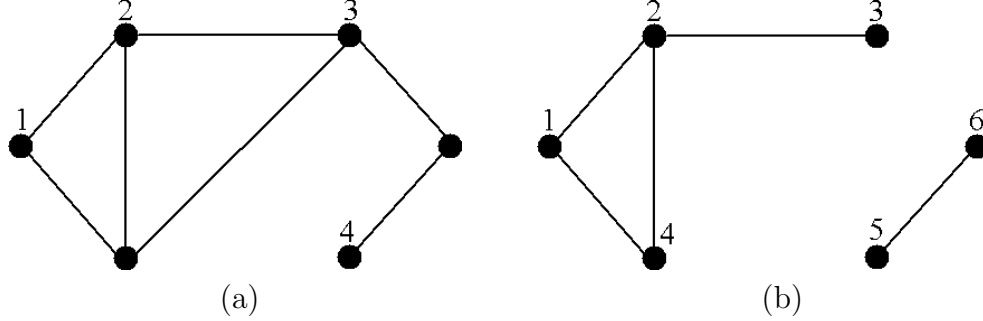


Figura 3.2: Conectividade: (a) grafo conexo e (b) grafo desconexo.

Considere o grafo  $G_1 = (V_1, A_1)$  na Figura 3.2(a), o grafo induzido,  $G_1[V']$ , pelo conjunto de vértices  $V' = \{1, 2\}$  é conexo. Porém, este grafo não é maximal, pois o grafo  $G_1[V'']$  com  $V'' = \{1, 2, 3\}$  é conexo, i.e.,  $G_1[V'] \subset G_1[V'']$ . Entretanto  $G_1[V'']$  ainda não é maximal pois o grafo  $G_1[V_1]$  é conexo, i.e., o grafo  $G_1$  induzido por todos os vértices de  $V_1$  ainda é conexo. Logo,  $G_1$  possui um único componente conexo que é o próprio grafo. Por outro lado, o grafo  $G_2 = (V_2, A_2)$  na Figura 3.2(b) possui 2 componentes conexos, formados pelos grafos induzidos  $G_2[V']$  e  $G_2[V'']$ , com  $V' = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $V'' = \{5, 6\}$ . Observe que  $\hat{\Gamma}(v') = V', \forall v' \in V'$  e  $\hat{\Gamma}(v'') = V'', \forall v'' \in V''$ .

Dado um grafo  $G$ , podemos então particionar seu conjunto de vértices  $V$  em subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  tal que

$$\bigcup_i V_i = V \text{ e } V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

de forma que  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$  sejam subgrafos conexos maximais de  $G$ . Cada  $G[V_i]$  é um componente conexo e  $\Omega(G) = n$  é o número de componentes conexos de  $G$ . Se  $G$  é um grafo conexo então  $\Omega(G) = 1$ , caso contrário se  $G$  é desconexo, então  $\Omega(G) > 1$ . Se  $G$  é um grafo vazio, então  $\Omega(G) = 0$ . Usando o exemplo anterior, temos  $\Omega(G_1) = 1$  e  $\Omega(G_2) = 2$ .

### 3.3 Vértice de Corte

Em alguns grafos simples, a remoção de apenas um único vértice, chamado *vértice de corte*, faz com que o grafo se torne desconexo. Entretanto o aumento do número de componentes conexo não é condição necessária para que um vértice seja de corte. Formalmente, um vértice de corte é qualquer



vértice  $v$  de um grafo genérico  $G$  que permite particionar o conjunto de arestas de  $G$  em  $E_1$  e  $E_2$  de maneira que os grafos induzidos  $G[E_1]$  e  $G[E_2]$  por estes conjuntos tenham apenas  $v$  em comum. A Figura 3.3(a) mostra um grafo simples com os vértices de corte 4 e 5, enquanto que (b) mostra um pseudografo com os vértices de corte 2, 4, 5 e 6.

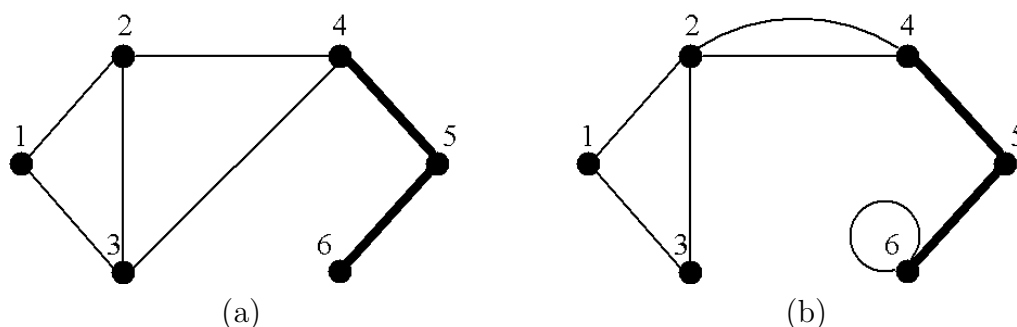


Figura 3.3: Conectividade. (a) grafo simples com os seguintes vértices de corte  $\{4, 5\}$  e (b) pseudo grafo com os seguintes vértices de corte:  $\{2, 4, 5, 6\}$ .

Quando o grafo é simples, a remoção de um vértice de corte apenas aumenta o número de seus componentes conexos. Se o grafo é um pseudografo, esta remoção pode não resultar no aumento do número de componentes conexos. Por exemplo, a remoção do vértice 6 no grafo 3.3(b) não aumenta a quantidade de componentes conexo, porém este vértice permite particionar o conjunto de arestas em dois subconjuntos, um formado pelo laço em 6 e o outro formado pelas demais arestas, de maneira que tenham apenas vértice 6 em comum. Para um grafo não trivial simples, um vértice  $v$  é chamado vértice de corte se e somente se  $\Omega(G - v) > \Omega(G)$ .

Quando um grafo não possui um vértice corte então ele é chamado *grafo não separável*. Um *bloco* de um grafo  $G$  é um subgrafo não separável maximal, i.e., este subgrafo não está contido propriamente em outro subgrafo não separável de  $G$ . Se todo o grafo é não separável então ele próprio é um bloco. O grafo da Figura 3.3(a) pode ser decomposto em 3 subgrafos, ilustrados na Figura 3.4, onde cada subgrafo é um bloco. Enquanto que o grafo da Figura 3.3(b) possui 4 blocos, ilustrados na Figura 3.5.

**Teorema 3.1.** Para um vértice  $v$  de um grafo simples conexo  $G = (V, A)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. o vértice  $v$  é um vértice de corte de  $G$ .

**Vértice de Corte**  
**× Pseudografo**

**Grafo não se-**  
**parável**  
**Bloco**

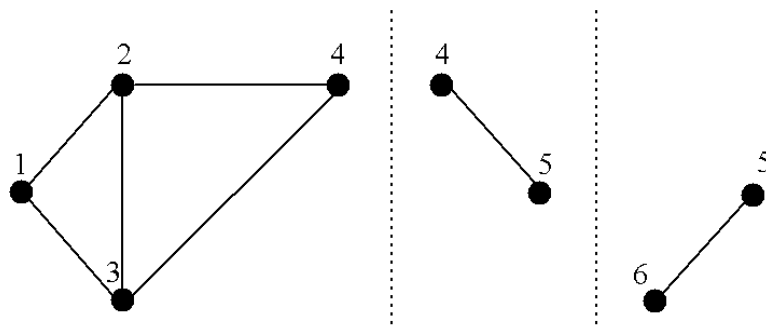


Figura 3.4: Blocos do grafo mostrado na Figura 3.3(a).

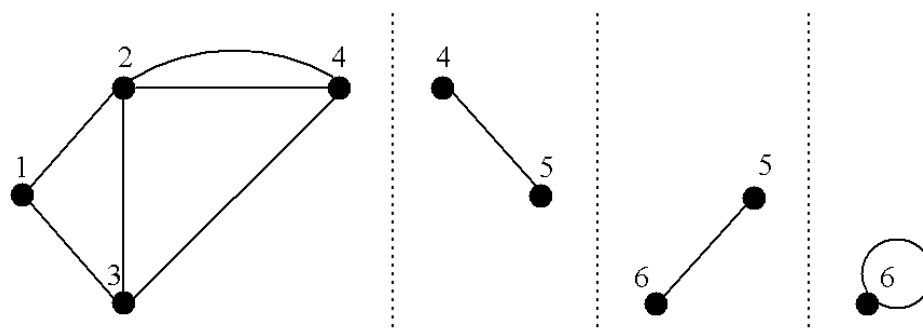


Figura 3.5: Blocos do grafo mostrado na Figura 3.3(b).

2. existem vértices  $w$  e  $u$  distintos de  $v$  tal que todo caminho entre  $w$  e  $u$  passa por  $v$ .
3. existe um particionamento do conjunto de vértices  $V - v$  em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tal que qualquer caminho entre  $u \in V_1$  e  $w \in V_2$  passa obrigatoriamente pelo vértice  $v$ .

Alguns grafos não possuem vértice de corte, porém possuem um subconjunto de vértices cuja remoção resulta ou em um grafo desconexo ou em um grafo trivial. Para um grafo  $G$ , este subconjunto é chamado de *conjunto separador* de  $G$ . Um grafo é chamado  $k$ -conexo (ou  $k$ -vértice conexo) se o tamanho do menor conjunto separador é  $k$ . Neste caso, dizemos que a *conectividade de vértice* ou apenas *conectividade* do grafo, representada por  $\kappa(G)$ , é igual a  $k$ , i.e.,  $\kappa(G) = k$ . Por definição  $\kappa(G) = 0$ , se o grafo é trivial ou desconexo, e  $\kappa(K_n) = n - 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . Os conjuntos separadores que são minimais são comumente chamados de *conjunto de corte de vértices*,

**Conjunto Sepa-  
rador**  
**Conectividade  
de Vértice**

i.e., conjuntos separadores que não possuem um subconjunto próprio que é separador.

O grafo  $G$  ilustrado na Figura 3.3(a) possui vários conjuntos separadores, entre eles, temos,  $V_1 = \{2, 3, 4\}$ ,  $V_2 = \{3, 4\}$  e  $V_3 = \{5\}$ . Apenas o conjunto  $V_3$  é um conjunto de corte de vértices, pois tanto  $V_1$  quanto  $V_2$  possuem subconjuntos próprios que são separadores. Por exemplo,  $V_1$  possui dois subconjuntos  $\{2, 3\}$  e  $\{4\}$  que são separadores e também conjunto de corte de vértices, sendo que o último possui um vértice de corte. Eles têm tamanho 2 e 1, respectivamente. Por outro lado,  $V_2$  possui um subconjunto  $\{4\}$  que é separador e também de corte de vértices. A conectividade de vértice deste grafo é  $\kappa(G) = 1$ , pois o menor conjunto de corte de vértices tem tamanho igual a 1. Logo, este grafo é um grafo 1-conexo ou 1-vértice conexo.

Podemos definir a conectividade entre dois vértices não adjacentes  $u$  e  $v$ , denotada por  $\kappa(u, v)$ , como o menor número de vértices cuja remoção separa  $u$  de  $v$ , i.e., faz com que não exista um caminho entre  $u$  e  $v$ . Menger mostrou que esta conectividade está intimamente relacionada ao número de caminhos disjuntos que unem  $u$  e  $v$  no grafo. Baseado nisto temos abaixo uma das versões do Teorema do Menger.

**Teorema 3.2** (Teorema de Menger[2]). Considere um grafo  $G = (V, A)$  e dois vertices  $u, v \in V$  não adjacentes, o número mínimo de vértices que separam  $u$  de  $v$  é igual a número máximo de caminhos disjuntos entre  $u$  e  $v$  em  $G$ .

A partir daí temos o seguinte teorema sobre conectividade de vértices de um grafo qualquer.

**Teorema 3.3.** Um grafo é  $k$ -vértice conexo se e somente se existem  $k$  caminhos disjuntos entre qualquer par de vértices.

Para um grafo que não é completo  $G = (V, A)$ , temos  $\kappa(G) = \min \kappa(u, v)$  considerando todos os pares de vértices não adjacentes  $u, v \in V$ .

## 3.4 Aresta de Corte

Uma aresta  $a$  de um grafo  $G$  é chamada de *aresta de corte*, ou *ponte*, se sua remoção aumentar o número de componentes conexos de  $G$ , ou seja,  $\Omega(G - a) > \Omega(G)$ . A principal característica de uma aresta de corte é que ela não está contida nos ciclos de  $G$ . As Figuras 3.3(a) e (b) mostram as arestas de corte através de arestas mais grossas.

**Conjunto  
de Corte de  
Vértices**

**Conectividade  
entre Vértices**

**Ponte**

**Teorema 3.4.** Para uma aresta  $a$  de um grafo conexo  $G = (V, A)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. a aresta  $a$  é uma aresta de corte de  $G$ .
2. a aresta  $a$  não está contida nos ciclos de  $G$ .
3. existem vértices  $w$  e  $u$  distintos de  $v$  tal que todo caminho entre  $w$  e  $u$  passa por  $a$ .
4. existe um particionamento do conjunto de vértices  $V$  em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tal que qualquer caminho entre  $u \in V_1$  e  $w \in V_2$  passa obrigatoriamente pela aresta  $a$ .

De forma similar ao exposto para vértices de corte, alguns grafos não possuem aresta de corte, porém possuem um subconjunto de aresta cuja remoção resulta ou em um grafo desconexo ou em um grafo trivial. Para um grafo  $G$ , este conjunto é chamado de *conjunto desconector* de  $G$ . Portanto, um grafo é chamado  $k$ -aresta conexo se o tamanho do menor conjunto desconector é  $k$ . Neste caso, dizemos que a *conectividade de aresta* do grafo, representada por  $\lambda(G)$ , é igual a  $k$ , i.e.,  $\lambda(G) = k$ . Por definição  $\lambda(G) = 0$ , se o grafo for trivial ou desconexo e  $\lambda(G) = 1$  se o grafo for conexo e possuir uma aresta de corte. Os conjuntos desconectores minimais são chamados de *conjunto de corte de arestas*, i.e., conjuntos desconectores que não possuem um subconjunto próprio que é desconector.

O grafo  $G$  ilustrado na Figura 3.3(a) possui vários conjuntos desconectores, entre eles, temos,  $D_1 = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}\}$ ,  $D_2 = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$  e  $D_3 = \{\{5, 6\}\}$ . Apenas o conjunto  $D_3$  é um conjunto de corte de arestas, pois tanto  $D_1$  quanto  $D_2$  possuem subconjuntos próprios que são desconectores. Por exemplo,  $D_1$  possui o subconjunto  $\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$  que é desconector e também um conjunto de corte de arestas de tamanho 2.  $D_2$  possui dois subconjuntos  $\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}$  e  $\{\{4, 5\}\}$  que são desconectores, sendo que o último é uma aresta de corte. O primeiro tem tamanho igual a 2 enquanto o segundo tem tamanho igual a 1. Este último é composto por uma aresta de corte. A conectividade de aresta deste grafo é  $\lambda(G) = 1$ , pois o menor conjunto de corte de arestas tem tamanho igual a 1. Logo, este grafo é um grafo 1-aresta conexo.

**Conjunto Desconector**  
**Conectividade de Aresta**

**Conjunto de Corte de Arestas**

**Conectividade de Aresta entre Vértices**

Podemos definir a conectividade de aresta entre dois vértices  $u$  e  $v$ , denotada por  $\lambda(u, v)$ , como o menor número de arestas cuja remoção separa  $u$  de

$v$ , i.e., que faz com que  $u$  não seja atingido por  $v$  (vice-versa). De forma similar ao apresentado para vértices, a conectividade de aresta está intimamente relacionada ao número de caminhos aresta-disjuntos que unem vértices  $u$  e  $v$ . Baseado nisto temos o seguinte Teorema.

**Teorema 3.5** (Teorema de Menger[2]). Considere um grafo  $G=(V,A)$  e dois vertices distintos  $v_1, v_2 \in V$ , o número mínimo de arestas que separam  $v_1$  de  $v_2$  é igual a número máximo de caminhos aresta-disjuntos entre  $v_1$  e  $v_2$  em  $G$ .

A partir daí temos o seguinte teorema sobre conectividade de aresta de um grafo qualquer.

**Teorema 3.6.** Um grafo  $G = (V, A)$  é  $k$ -aresta conexo se e somente se ele possuir no  $k$  caminhos aresta-disjuntos entre qualquer par de vértices.

Portanto para um grafo  $G = (V, A)$  não trivial, temos  $\lambda(G) = \min \lambda(u, v)$  para qualquer par de vértices distintos  $u, v \in V$ . A relação entre a conectividade de vértice, a conectividade de arestas e o menor grau de um grafo  $G$  é dada pelo seguinte Teorema desenvolvido por Whitney.

**Teorema 3.7** (Whitney[3]). Para qualquer grafo  $G$ ,

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

## 3.5 Conectividade em Dígrafos

Quanto à conectividade, um dígrafo pode ser classificado de três formas distintas:

- *fracamente conexo* ou fraco se seu grafo subjacente é conexo, ou seja, para cada par de vértices existe um semi-caminho. Note que todo dígrafo conexo é fracamente conexo. **Dígrafo Fracamente Conexo**
- *unilateralmente conexo* ou unilateral se para cada par  $v$  e  $u$  de vértices existe um caminho direcionado ou de  $v$  para  $u$  ou de  $u$  para  $v$  ou ambos. **Dígrafo Unilateralmente Conexos**
- *fortemente conexo* ou forte se existe um caminho direcionado entre cada par de vértices. **Dígrafo Fortemente Conexos**

Usando as funções de fechamento transitivo inverso e direto, um dígrafo  $D = (V, A)$  é fortemente conexo se e somente se  $\hat{\Gamma}^+(v) = \hat{\Gamma}^-(v) = V$ , para todo  $v \in V$ . Ou seja, qualquer vértice pode atingir ou ser atingido pelos demais vértices do dígrafo através de um caminho direcionado. A relação entre os diferentes tipos de dígrafos é a seguinte

dígrafos fortes  $\subset$  dígrafos unilaterais  $\subset$  dígrafos fracos.

De forma análoga aos grafos quantos aos componentes conexos, um dígrafo pode possuir três diferentes tipos de componentes:

**Componente Forte**  
**Componente Unilateral**  
**Componente Fraco**

- *componente forte* de um dígrafo é um subdígrafo forte maximal.
- *componente unilateral* de um dígrafo é um subdígrafo unilateral maximal.
- *componente fraco* de um dígrafo é um subdígrafo fraco maximal.

A Figura 3.6(a) mostra um dígrafo  $D$  e seus componentes fortes, delimitados por uma região pontilhada. Para cada componente forte é possível planejar um caminho entre qualquer par de vértices do componente. O subdígrafo formado pelos vértices 5 e 6 juntamente com os arcos (5, 6) e (6, 5) não formam um componente forte, mesmo existindo um caminho direcionado entre 5 e 6, e entre 6 e 5. Isto se deve ao fato de não ser maximal, pois ele é um subdígrafo próprio do subdígrafo formado pelos vértices 4, 5 e 6 e os arcos associados.

De todos os tipos de componentes, os componentes fortes são os mais importantes, pois eles permitem gerar um novo dígrafo através do processo de *condensação* que mantém algumas das propriedades estruturais do dígrafo original. Por exemplo, um dígrafo  $D = (V, A)$  pode ter seu conjunto de vértices particionado em  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , com

$$\bigcup_i V_i = V \quad \text{e} \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$$

de forma que os subdígrafos induzidos  $D[V_1], D[V_2], \dots, D[V_n]$  sejam os componentes fortes de  $D$ . Se aplicarmos a função de fechamento transitivo direto e inverso a um vértice  $v \in V_i$  veremos que  $\hat{\Gamma}^+(v)$  pode ou não ser igual  $\hat{\Gamma}^-(v)$ . Isto ocorre por que  $v$  pode atingir (e ser atingido por) vértices que não pertençam ao seu componente forte. Como em um componente forte qualquer

**Condensação**

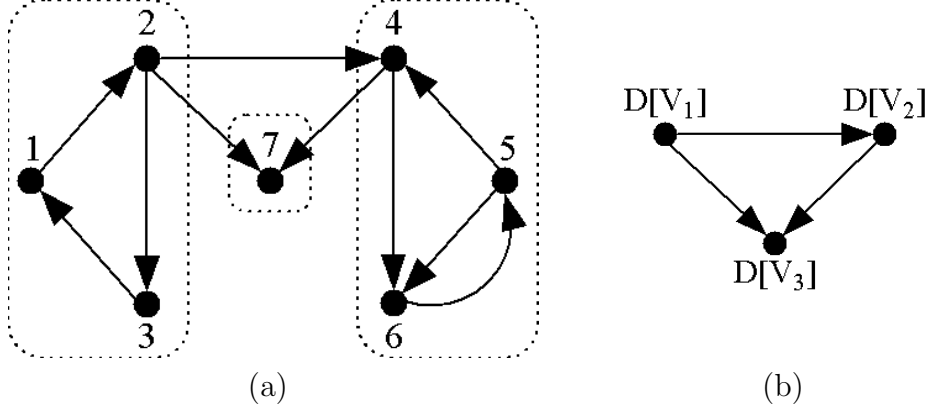


Figura 3.6: Componentes fortes de um dígrafo. (a) mostra um dígrafo e seus componentes fortes delimitados por uma região pontilhada. (b) mostra o dígrafo condensado de (a).

vértice tem que atingir os demais, se calcularmos a interseção do resultado das funções de fechamento transitivo direto e inverso para  $v \in V_i$  obtaremos  $V_i$ , i.e., veremos que  $\hat{\Gamma}^+(v) \cap \hat{\Gamma}^-(v) = V_i$ , para qualquer  $v \in V_i$ . Na Seção 3.6 veremos como calcular de forma sistemática os componentes fortes de dígrafos usando as funções de fechamento transitivo inverso e direto.

**Definição 3.2.** Um dígrafo condensado  $\mathcal{D}(D) = (\mathcal{V}(D), \mathcal{A}(D))$  do dígrafo  $D$  possui um conjunto de vértices  $\mathcal{V}(D)$  associados aos componentes fortes de  $D$  e um conjunto de arcos  $\mathcal{A}(D)$  onde existe um arco entre os vértices de  $\mathcal{V}(D)$  se existir pelo menos um arco entre os vértices dos respectivos componentes em  $D$ . **Dígrafo Condensado**

A Figura 3.6(b) mostra o dígrafo condensado  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  do dígrafo  $D$  mostrado em (a), onde  $\mathcal{V} = \{D[V_1], D[V_2], D[V_3]\}^3$  e  $\mathcal{A}(D) = \{(D[V_1], D[V_2]), (D[V_1], D[V_3]), (D[V_2], D[V_3])\}$ . Existe um arco com origem  $D[V_1]$  e destino em  $D[V_2]$ , pois existe um arco com origem no vértice 2 e destino no vértice 4 em  $D$ . Note que o dígrafo condensado de um dígrafo forte é dígrafo trivial.

**Definição 3.3.** Um dígrafo *inverso*  $\mathcal{I}(D) = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  de um dígrafo  $D = (V, A)$  é um dígrafo que possui os mesmos vértices de  $D$  e um arco  $(v, w) \in \mathcal{A}$  se e somente se  $(w, v) \in A$ . **Dígrafo Inverso**

<sup>3</sup> $D[V_i]$  é apenas um rótulo que representa o subdígrafo induzido.

Se cada aresta de um grafo simples  $G$  é substituída por um arco e o dígrafo resultante  $D$  é forte então dizemos que  $D$  é uma *orientação forte* de  $G$ . Assim, um grafo é fortemente orientável, ou seja pode ser transformado em um dígrafo fortemente conexo, se ele tem uma orientação forte. Baseado nisto, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.8** (Teorema de Robbins[4]). Um grafo conexo  $G$  é fortemente orientável se e somente se ele é conexo e não possui pontes.

Para que um grafo  $G$  conexo e sem pontes seja transformado em um dígrafo fortemente conexo  $D$ , devemos orientar suas arestas de forma a criar *círclos direcionados*. Inicialmente, selecionamos um ciclo e orientamos suas arestas de maneira a produzir um ciclo direcionado. Se todas as arestas estiverem neste ciclo então  $G$  foi transformado em  $D$ , caso contrário devemos orientar as arestas restantes considerando a orientação feita anteriormente. Isto irá gerar um conjunto de ciclos onde um vértice de um ciclo pode alcançar qualquer vértice do mesmo ou de outro ciclo. A Figura 3.7(a) mostra um grafo conexo  $G$  sem pontes sendo transformado em (d) um dígrafo fortemente conexo  $D$ . Inicialmente, (b) um ciclo direcionado é construído definindo uma orientação para as arestas do ciclo  $(1, 2, 4, 7, 3)$  em (a). Em (c) construímos o novo ciclo direcionado  $(4, 7, 3, 6, 5)$  aproveitando a orientação dos arcos definida previamente. Finalmente em (d), orientamos as arestas restantes de forma a fechar ciclos direcionados.

A transformação exemplificada acima é apenas um simples exemplo, já que existem inúmeras maneiras de transformar  $G$  em  $D$ . Quando escolhemos uma orientação para as arestas de um grafo completo, o dígrafo resultante é chamado de *torneio*. A Figura 3.8 ilustra dois torneios obtidos orientando as arestas de um grafo  $K_5$ . As diferenças entre estes torneios estão nos arcos entre os vértices 1 e 2, 1 e 4 e 2 e 3. Se o torneio possuir um ciclo direcionado de espalhamento então ele é chamado *torneio forte*. Os torneios apresentados na Figura 3.8 são fortes. Para (a), temos o seguinte ciclo de espalhamento  $(1, 5, 2, 3, 4, 1)$  enquanto que para (b) temos o ciclo  $(1, 3, 4, 5, 2, 1)$ .

Para um torneio, o grau de saída de um vértice é chamado *score* e a sequência dos graus de saída de todos vértices define a *seqüência de scores*. A partir desta seqüência é possível determinar a seqüência de graus de entrada, pois para um vértice  $v$ , temos  $\delta^+(v) + \delta^-(v) = n - 1$ . Note que se eliminarmos a orientação dos arcos que têm origem e destino em  $v$ , temos  $n - 1$  arestas incidentes a  $v$ . A seqüência de score para o torneio ilustrado na Figura 3.8(a) é  $(3, 2, 1, 2, 2)$ . Quando um vértice consegue alcançar qualquer vértice através

**Torneio**

**Torneio Forte**

**Seqüência de Scores**



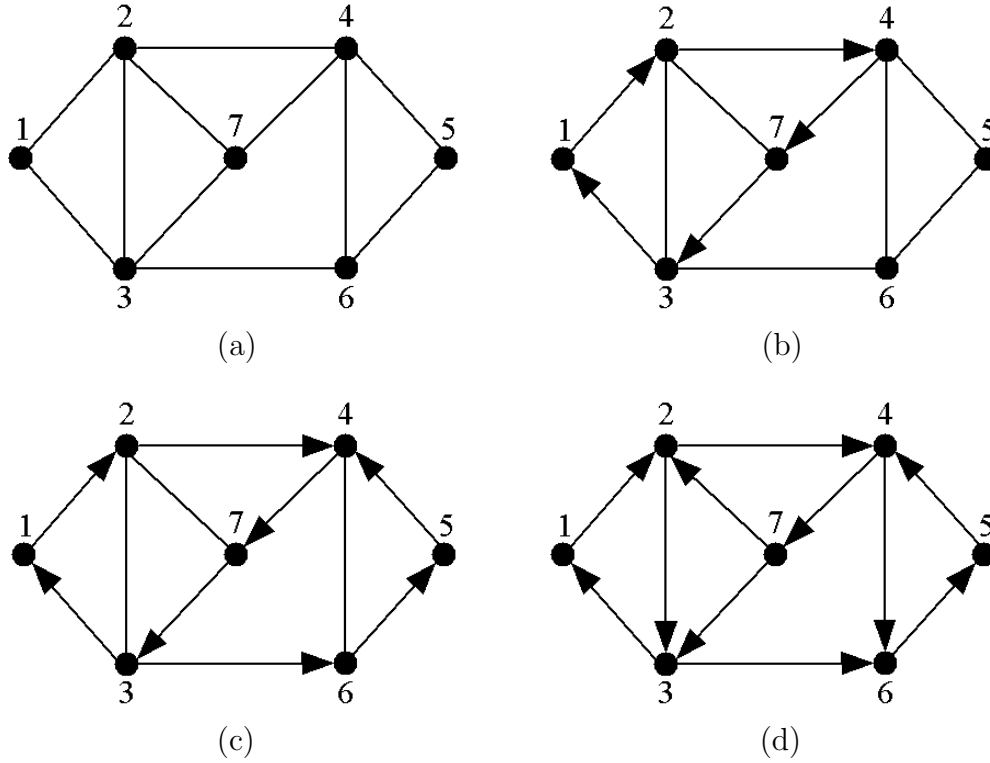


Figura 3.7: Transformação de (a) um grafo conexo sem pontes em (d) um dígrafo fortemente conexo. (b) e (c) são os passos intermediários.

de um caminho direcionado de comprimento no máximo igual a 2, então ele é chamado *vértice rei*. **Vértice Rei**

Em relação à conectividade de vértices e arestas para grafos apresentada nas seções 3.3 e 3.4, os dígrafos possuem conceitos similares. Um conjunto separador é um conjunto de vértices de um dígrafo  $D$  que quando removido faz com que  $D$  deixe de ser fortemente conexo. Um conjunto de corte de vértices de um dígrafo é o conjunto separador minimal, ou seja, que não possui subconjunto próprio que seja um conjunto separador. A *conectividade forte de vértice* de um dígrafo  $D = (V, A)$ , definido por  $\kappa(D)$  corresponde ao menor conjunto de vértices  $S \subseteq V$  tal que  $D - S$  não é fortemente conexo ou tem apenas um vértice. Se  $\kappa(D) = k$ , então dizemos que  $D$  é um  $k$ -vértice conexo ou  $k$ -conexo. Analogamente ao conceito de grafos, um dígrafo completo  $K_n$  possui  $\kappa(K_n) = n - 1$ . Se um dígrafo  $D$  não é forte, então  $\kappa(D) = 0$ .

**Conectividade Forte de Vértice**

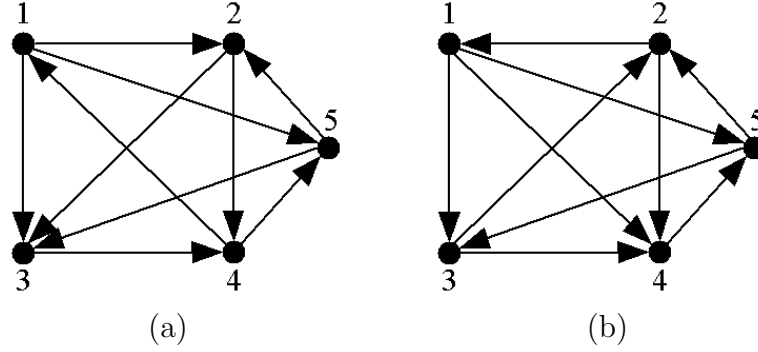


Figura 3.8: Exemplos de torneio forte para o grafo  $K_5$ .

Um conjunto desconector é um conjunto de arcos de um dígrafo  $D$  que quando removido faz com que  $D$  deixe de ser fortemente conexo. Um conjunto de corte de arcos de um dígrafo é o conjunto desconector minimal, ou seja, que não possui subconjunto próprio que seja um conjunto separador. A *conectividade forte de arco* de um dígrafo  $D = (V, A)$ , definido por  $\lambda(D)$  corresponde ao menor conjunto de corte  $S \subseteq A$  tal que  $D - S$  não é fortemente conexo. Se  $\lambda(D) = k$ , então dizemos que  $D$  é  $k$ -arco conexo. Se  $D$  não é forte, então  $\lambda(D) = 0$ .

Existe relação entre a conectividade de arco e vértices para dígrafos da mesma forma que para grafos. Esta relação é dada pela seguinte desigualdade.

**Teorema 3.9** (Whitney). Para qualquer dígrafo  $D$ ,

$$\kappa(D) \leq \lambda(D) \leq \min\{\delta^-(D), \delta^+(D)\}$$

As variações do Teorema de Menger para conectividade de vértice e arcos em dígrafos são apresentadas abaixo. De forma similar ao apresentado para grafos, estas conectividades estão intimamente relacionadas ao número de caminhos direcionados disjuntos e arco-disjuntos para qualquer par de vértices no dígrafo.

**Teorema 3.10** (Teorema de Menger(Dígrafos)[2]). Considere um dígrafo  $D = (V, A)$  e dois vertices  $u, v \in V$  não adjacentes, o número mínimo de vértices que separam  $u$  de  $v$ , i.e., vértices cuja remoção elimina todos os caminhos direcionados de  $u$  para  $v$ , é igual a número máximo de caminhos direcionados disjuntos de  $u$  para  $v$  em  $D$ .

**Teorema 3.11.** Um dígrafo é  $k$ -vértice conexo se e somente se existem  $k$  caminhos direcionados disjuntos entre qualquer par de vértices.

**Teorema 3.12** (Teorema de Menger(Dígrafos)[2]). Considere um dígrafo  $D=(V,A)$  e dois vertices distintos  $u, v \in V$ , o número mínimo de arcos cuja remoção separam  $u$  de  $v$ , i.e., vértices cuja remoção eliminam todos os caminhos direcionados de  $u$  para  $v$ , é igual a número máximo de caminhos direcionados arcos-disjuntos de  $u$  para  $v$  em  $D$ .

**Teorema 3.13.** Um dígrafo  $D = (V, A)$  é  $k$ -arco conexo se e somente se ele possui  $k$  caminhos direcionados arco-disjuntos entre qualquer par de vértices.

Em um dígrafo, a conectividade entre dois vértices não adjacentes  $u$  e  $v$ , denotada por  $\kappa(u, v)$ , corresponde ao número máximo de caminhos direcionados disjuntos de  $u$  para  $v$ . Enquanto que a conectividade de arco entre dois vértices  $u$  e  $v$  não adjacentes, denotada por  $\lambda(u, v)$  é o número máximo de caminhos arco-disjuntos de  $u$  para  $v$ . Para qualquer dígrafo  $D$ , temos  $\kappa(D) = \min \kappa(u, v)$  e  $\lambda(D) = \min \lambda(u, v)$  considerando todos os pares de vértices não adjacentes  $u$  e  $v$ .

**Conectividade  
entre Vértices**

**Conectividade  
de Arco entre  
Vértices**

## 3.6 Cálculo de Componentes

Como comentado na seção anterior, as funções de fechamento transitivo podem ser utilizada para calcular os componentes conexos de grafos e os componentes fortes de dígrafos. O seu uso neste cálculo dá origem ao método chamado *Malgrange*. Inicialmente, será apresentada a aplicação do método em dígrafos e em seguida em grafos.

**Método  
Malgrange**

Dado um dígrafo  $D = (V, A)$  realizamos os seguintes passos:

- selecionamos um vértice  $v_1 \in V$  e calculamos as funções de fechamento transitivo direto,  $\hat{\Gamma}^+(v_1)$ , e inverso,  $\hat{\Gamma}^-(v_1)$ , e em seguida calculamos a interseção destes resultados, ou seja,  $\hat{\Gamma}^+(v_1) \cap \hat{\Gamma}^-(v_1)$ . Esta interseção dá origem ao conjunto de vértices  $V_1 \subseteq V$  que está associado ao primeiro componente forte  $D[V_1]$ .
- se  $V_1 = V$  então o dígrafo é fortemente conexo tendo como componente forte ele próprio, i.e.,  $D[V_1] = D[V]$ . Caso contrário, selecionamos um vértice  $v_2 \in V - V_1$  e repetimos o processo calculando  $\hat{\Gamma}^+(v_2) \cap \hat{\Gamma}^-(v_2)$ . Isto dá origem ao segundo conjunto de vértices  $V_2$  e consequentemente ao segundo componente forte  $D[V_2]$ .

- na  $i$ -ésima iteração, selecionamos

$$v_i \in V - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$$

repetindo o processo descrito anteriormente.

- O método pára quando após a  $n$ -ésima iteração temos

$$\bigcup_{i=1}^n V_i = V.$$

Neste momento os dígrafos induzidos  $D[V_1], D[V_2], \dots, D[V_n]$  correspondem a todos os componentes fortes de  $D$ .

A aplicação do método no dígrafo  $D = (V, A)$  da Figura 3.9 é como segue. Sorteamos um vértice  $v_1$  do conjunto  $V$ , por exemplo,  $v_1 = 3$ . Calculamos  $\hat{\Gamma}^+(v_1)$  e  $\hat{\Gamma}^-(v_1)$  que correspondem respectivamente a

$$\hat{\Gamma}^+(v_1) = \{2, 3, 6, 8, 9\} \text{ e } \hat{\Gamma}^-(v_1) = \{3, 5, 6\}$$

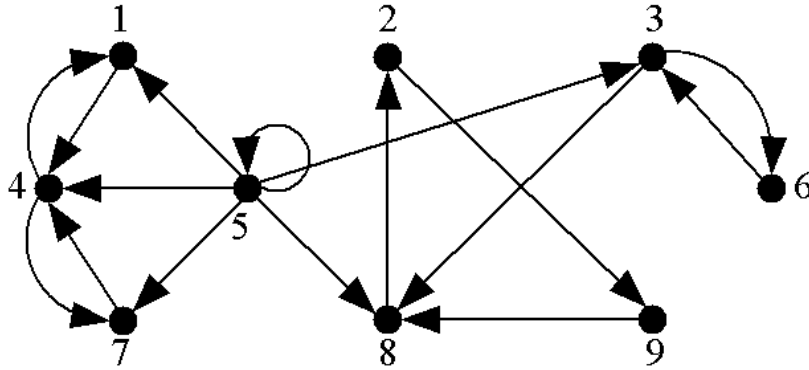


Figura 3.9: Dígrafo fracamente conexo com quatro componentes fortes.

A interseção destes resultados  $\hat{\Gamma}^+(v_1) \cap \hat{\Gamma}^-(v_1) = V_1 = \{3, 6\}$  e  $D[V_1]$  é o subdígrafo induzido pelos vértices em  $V_1$  que corresponde ao primeiro componente forte de  $D$ . Como  $V_1 \neq V$ , então selecionamos o vértice  $v_2$  do conjunto  $V - V_1 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$ , por exemplo  $v_2 = 2$ . Calculamos  $\hat{\Gamma}^+(v_2)$  e  $\hat{\Gamma}^-(v_2)$  que correspondem respectivamente a

$$\hat{\Gamma}^+(v_2) = \{2, 8, 9\} \text{ e } \hat{\Gamma}^-(v_2) = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

O resultado da interseção  $\hat{\Gamma}^+(v_1) \cap \hat{\Gamma}^-(v_1) = V_2 = \{2, 8, 9\}$  dá origem a  $D[V_2]$  que é segundo componente forte de  $D$ . Selecionando  $v_3$  do conjunto  $V - (V_1 \cup V_2) = \{1, 4, 5, 7\}$ , por exemplo  $v_3 = 5$ , temos  $\hat{\Gamma}^+(v_3) = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ ,  $\hat{\Gamma}^-(v_3) = \{5\}$  e  $V_3 = \{5\}$ , onde  $D[V_3]$  é o terceiro componente forte. Repetindo o processo anterior, selecionamos  $v_4$  de  $V - (V_1 \cup V_2 \cup V_3) = \{1, 4, 7\}$ , por exemplo,  $v_4 = 1$ , obtendo  $\hat{\Gamma}^+(v_4) = \{1, 4, 7\}$  e  $\hat{\Gamma}^-(v_4) = \{1, 4, 5, 7\}$ . Logo temos  $V_4 = \{1, 4, 7\}$  e o quarto componente forte  $D[V_4]$ . Como

$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = V,$$

o processo pára e temos  $D[V_1], D[V_2], D[V_3], D[V_4]$  como os componentes fortes de  $D$ .

A aplicação do método de Malgrange em um grafo é sutilmente diferente da utilizada em dígrafos. Se analisarmos atentamente uma aresta  $\{a, b\}$  em um grafo, ela tem a mesma funcionalidade que a presença de ambos os arcos  $(a, b)$  e  $(b, a)$  em um dígrafo. Portanto, em grafos é usada apenas a função de fechamento transitivo  $\hat{\Gamma}$  ao invés das funções  $\hat{\Gamma}^+$  e  $\hat{\Gamma}^-$  usadas em dígrafos.

Considere um grafo  $G = (V, A)$  realizamos os seguintes passos:

- selecionamos um vértice  $v_1 \in V$  e calculamos a função de fechamento transitivo  $\hat{\Gamma}(v_1)$ . O conjunto de vértices resultante  $V_1$  dá origem ao primeiro componente conexo  $G[V_1]$ .
- se  $V_1 = V$  então o grafo é conexo tendo como único componente conexo, o próprio grafo. Caso contrário, selecionamos um vértice  $v_2 \in V - V_1$  e repetimos o processo. Calculando  $\hat{\Gamma}(v_2)$  que dá origem ao segundo conjunto de vértices  $V_2$  e consequentemente ao segundo componente  $G[V_2]$ .
- na  $i$ -ésima iteração, selecionamos

$$v_i \in V - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$$

repetindo o processo descrito anteriormente.

- O método pára quando após a  $n$ -ésima iteração temos

$$\bigcup_{i=1}^n V_i = V.$$

Neste momento os grafos induzidos  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$  correspondem a todos os componentes de  $G$ .

A aplicação do método no grafo  $G = (V, A)$  representado na Figura 3.10 é como segue. Sorteamos um vértice  $v_1$  do conjunto  $V$ , por exemplo,  $v_1 = 3$  e calculamos  $\hat{\Gamma}(v_1)$ . O conjunto resultante  $V_1 = \{2, 3, 6, 8, 9\}$  dá origem ao primeiro componente  $G[V_1]$  do grafo.

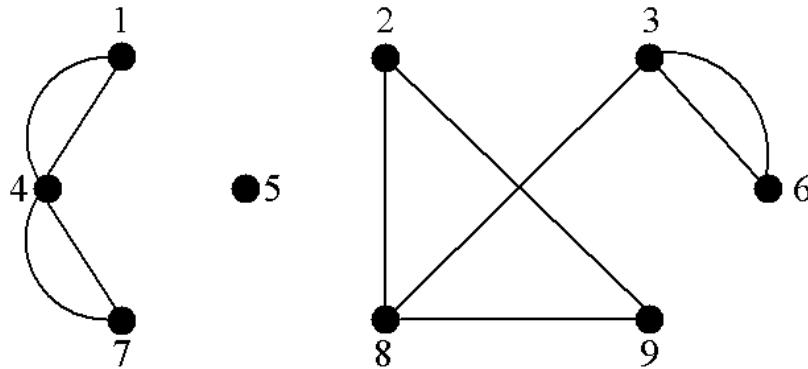


Figura 3.10: Grafo desconexo com três componentes conexos.

Como  $V_1 \neq V$ , selecionamos outro vértice  $v_2$  do conjunto  $V - V_1 = \{1, 4, 5, 7\}$ , por exemplo  $v_2 = 5$  e calculamos  $V_2 = \hat{\Gamma}(v_2)$  dando origem ao conjunto  $V_2 = \{5\}$  e portanto ao segundo componente  $G[V_2]$ . Repetindo o processo anterior, selecionamos  $v_3 \in V - (V_1 \cup V_2) = \{1, 4, 7\}$ , por exemplo,  $v_4 = 4$  e calculamos  $V_3 = \hat{\Gamma}(v_3)$ , o que nos leva a  $V_3 = \{1, 4, 7\}$  e ao terceiro componente  $G[V_3]$ . Como  $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$ , o processo pára com  $G[V_1]$ ,  $G[V_2]$  e  $G[V_3]$  como os componentes conexos de  $G$ .

### 3.7 Exercícios

**Exercício 3.1.** *Mostre que se  $G = (V, A)$  é um grafo simples e  $\delta(G) > \lceil |V|/2 \rceil - 1$  então  $G$  é conexo.*

**Exercício 3.2.** *A partir do grafo mostrado na Figura 3.2(a), determine os grafos induzidos pelo particionamento das arestas que possuam apenas o vértice 4 em comum. Faça o mesmo para Figura 3.2(b) considerando um a um os vértices 4, 5 e 6.*

**Exercício 3.3.** *Determine a conectividade de vértice e de aresta do grafo da Figura 3.2(b)*

**Exercício 3.4.** *Existe alguma relação entre conjunto de corte de arestas e conjunto de corte de vértices? Se sim, comente.*

**Exercício 3.5.** *Mostre que uma aresta é uma aresta de corte se e somente se ela não pertence aos ciclos do grafo.*

**Exercício 3.6.** *Mostre que se  $G$  possui  $p$  vértices e  $\delta(G) \geq \lceil p/2 \rceil$ , então  $\lambda(G) = \delta(G)$ .*

**Exercício 3.7.** *Mostre que para todos os grafos com  $p$  vértices e  $q$  arestas, a conectividade máxima é 0 quando  $q < p - 1$  e é  $\lceil 2q/p \rceil$ , quando  $q \geq p - 1$ .*

**Exercício 3.8.** *Qual o significado de  $\kappa(G) = 1$  para o grafo  $G$  subjacente a uma rede de computador?*

**Exercício 3.9.** *Quanto ruas bloqueadas são necessárias para fazer com que um robô partindo de uma posição  $p_1$  não consiga atingir  $p_2$ , considerando que o grafo subjacente  $G$  ao mapa do ambiente possui  $\lambda(G) = 4$ . Existe alguma situação onde uma quantidade de cruzamento de ruas menor que  $\lambda(G)$  pode fazer o robô deixar de atingir seu objetivo? Se sim, desenhe um mapa que ilustre esta situação.*

**Exercício 3.10.** *Mostre que se  $G$  é um grafo  $k$ -aresta conexo, com  $k > 0$ , e se  $A'$  é um subconjunto de arestas de  $G$  de tamanho  $k$ , então  $\Omega(G - A') \leq 2$ .*

**Exercício 3.11.** *Mostre que se  $G$  é um grafo  $r$ -regular com  $\kappa(G) = 1$  então  $\lambda(G) \leq \lceil r/2 \rceil$ .*

**Exercício 3.12.** *Mostre que um dígrafo sem ciclos ou laços possui pelo menos um vértice fonte (ou sumidouro).*

**Exercício 3.13.** *Mostre que um dígrafo condensado  $\mathcal{D}(D)$  não possui ciclos direcionados.*

**Exercício 3.14.** *Determine a quantidade de dígrafos simples fracamente conexo que podemos obter a partir de um grafo simples conexo  $G = (V, A)$ .*

**Exercício 3.15.** *Dado  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , um conjunto de vértices, determine a quantidade de dígrafos fracamente conexos ou não (com no máximo 1 laço por vértice) que podemos gerar usando  $V$ .*

**Exercício 3.16.** *Determine a quantidade de torneios que podemos obter a partir de um grafo  $K_n$ .*

**Exercício 3.17.** Mostre que todo grafo simples  $G = (V, A)$  com  $|V| > |A|$  implica  $\Omega(G) \geq |V| - |A|$ .

**Exercício 3.18.** Mostre que um grafo simples  $G = (V, A)$  tem uma quantidade de arestas que satisfaz a seguinte desigualdade

$$|V| - \Omega(G) \leq |A| \leq \frac{1}{2}(|V| - \Omega(G))(|V| - \Omega(G) + 1)$$

**Exercício 3.19.** Utilize o método de Malgrange para calcular os componentes fortes do dígrafo ilustrado na Figura 3.11 e encontre o dígrafo condensado correspondente.

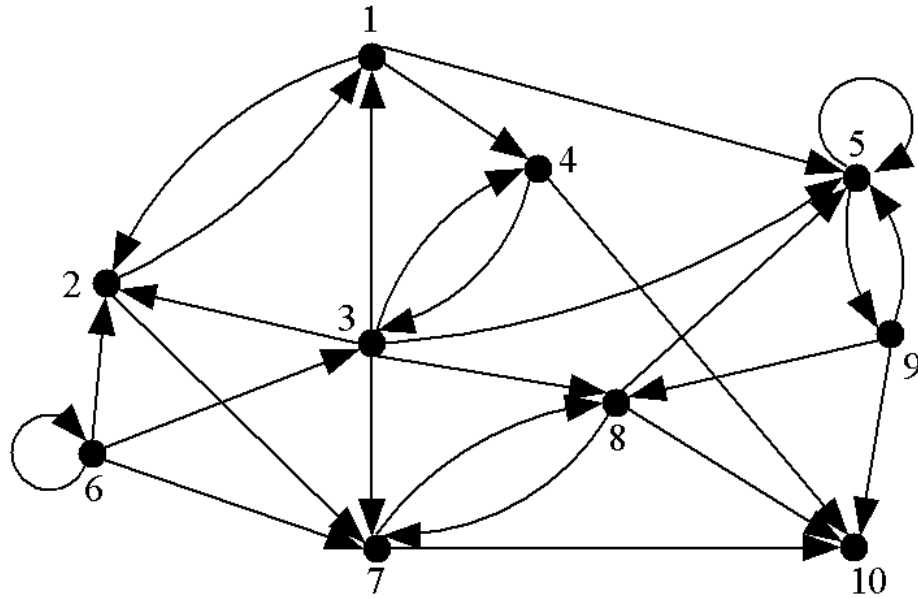


Figura 3.11: Dígrafo Exemplo



# Capítulo 4

## Relacionamentos V-A

Neste capítulo apresentamos alguns dos inúmeros conceitos associados ao relacionamento entre vértices e arestas, ou vértice e arco, que chamaremos de relacionamento V-A. Inicialmente apresentaremos o relacionamento entre vértices que dá origem ao conceito de clique, i.e, de subgrafos completos maximais, seguido do conceito de conjunto independente que está associado a subgrafos totalmente desconexos. Em seguida mostraremos o relacionamento entre arestas que dá origem ao conceito de emparelhamento ou acoplamento, finalizando com o conceito de cobertura de vértices que mostra o relacionamento entre arestas e vértices de maneira específica. Tentaremos sempre que possível fazer ligações com exemplos do mundo real.

### 4.1 Clique

O primeiro relacionamento V-A diz respeito ao relacionamento vértice-vértice intitulado *clique*. Um clique em um grafo  $G$  é um subgrafo completo de  $G$ . O fato de um clique ser um subgrafo completo implica que todos os vértices no clique são adjacentes entre si. Um clique é maximal quando ele não é um subgrafo próprio de outro subgrafo completo. O estudo de cliques foca principalmente em cliques que são maximais e máximos, portanto vários autores quando fazem referência a cliques estão considerando cliques maximais. Adotaremos esta mesma referência neste livro. Quando um clique não for maximal deixaremos explícita esta informação. Um subgrafo é um clique em um pseudografo(ou multigrafo) se e somente se ele for um clique no grafo subjacente ao pseudografo(ou multigrafo). Em um dígrafo(simples

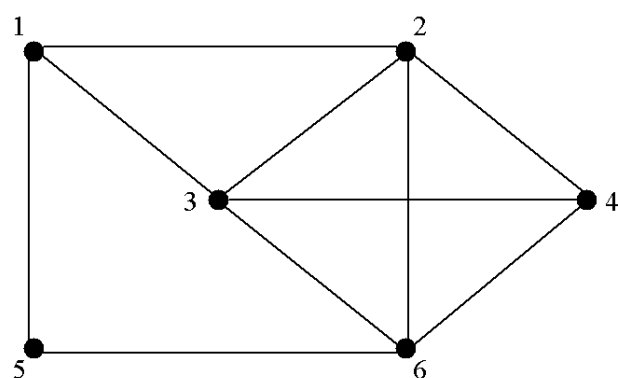
ou não), um clique maximal é um subdígrafo completo maximal, onde para cada par de vértices  $u$  e  $v$ , existem dois arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$ . Como um clique é um subgrafo(ou subdígrafo) completo, ele pode ser descrito apenas pelos seus vértices.

A Figura 4.1 mostra (a) um grafo e seus (b) quatro cliques formados pelos seguintes conjuntos de vértices  $\{1, 5\}$ ,  $\{5, 6\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$  e  $\{2, 3, 4, 6\}$ , e destacados usando linhas de diferentes espessuras e formatos. Observe que uma aresta é um subgrafo completo, e em diversos casos ela é clique não maximal. Este é o motivo para que a aresta  $\{1, 5\}$  seja um clique maximal e a  $\{2, 3\}$  não seja. Note que  $\{2, 3\}$  está contida propriamente no subgrafo completo formado pelos vértices  $\{1, 2, 3\}$ , enquanto que  $\{1, 5\}$  não está contida em nenhum subgrafo completo. Outro ponto importante é que cliques podem compartilhar tanto arestas quanto vértices. Este é o caso dos cliques formados pelos vértices  $\{1, 2, 3\}$  e  $\{2, 3, 4, 6\}$  que compartilham os vértices 2 e 3 e aresta  $\{2, 3\}$ .

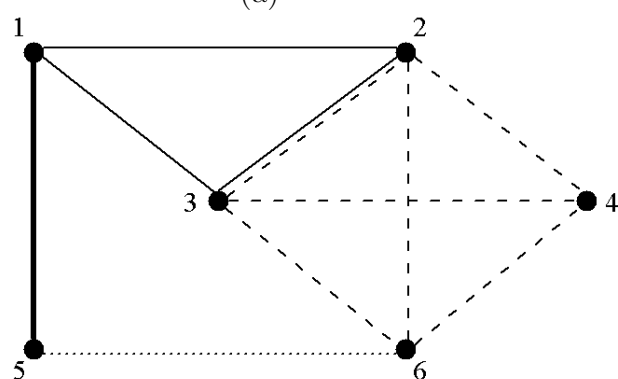
A Figura 4.2(b) mostra os cliques do dígrafo em (a). Estes cliques estão marcados com arestas grossas e pontilhadas e são formados pelos seguintes conjuntos de vértices  $\{1, 3, 5\}$   $\{2, 3, 4, 6\}$  de tamanhos 3 e 4, respectivamente. Diferente do exemplo anterior, apenas um único arco entre um par de vértices não forma um clique. Este é o caso dos pares de vértices 1 e 2, e 5 e 6. Para que eles fossem candidatos a cliques maximais, eles teria que ter não somente o arco  $(2, 1)$ , mas também o arco  $(1, 2)$ . O mesmo se aplica aos vértices 5 e 6.

Um grafo ou dígrafo  $G$  pode possuir vários cliques de diferentes tamanhos, como foi possível ver nos exemplos acima. O maior clique em  $G$  é chamado *clique máximo* e define o *número de clique* de  $G$ , representado por  $\omega(G)$ . Este número é igual ao tamanho do clique máximo, o qual é dado pelo número de vértices do clique. Mais formalmente  $\omega(G) = r$  onde  $r$  é o maior inteiro tal que  $K_r \subseteq G$ . Esta medida é muito importante em problemas, como o de coloração de grafos como veremos no Capítulo 10. O grafo  $G$  na Figura 4.1 e o dígrafo  $D$  na Figura 4.2 possuem ambos número de clique igual a 4, i.e.,  $\omega(G) = 4$  e  $\omega(D) = 4$ . Um grafo ou dígrafo  $K_n$  possui um único clique, representado por si próprio. Logo,  $\omega(K_n) = n$ .

### Clique Máximo Número de Clique

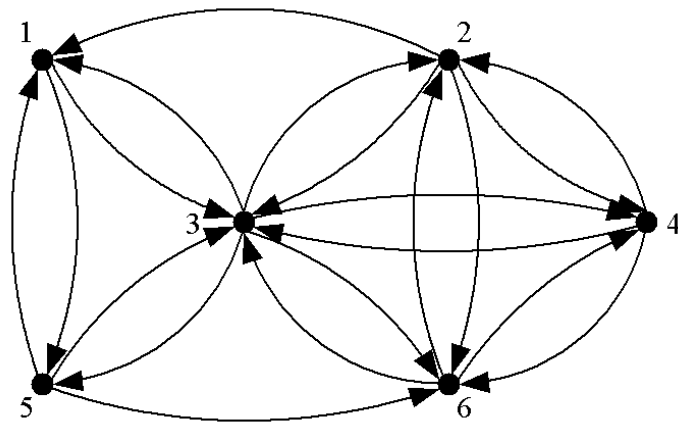


(a)

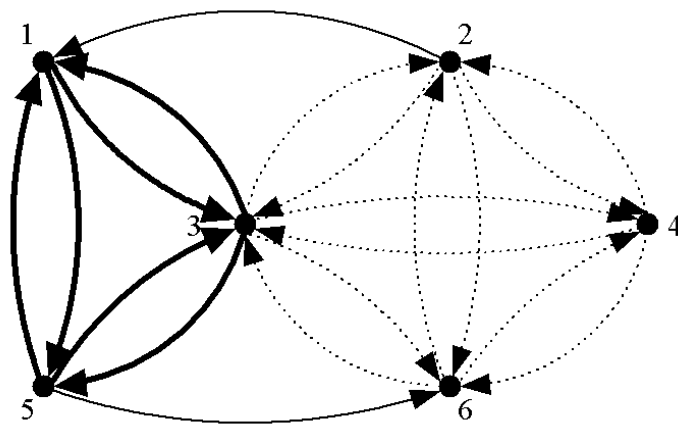


(b)

Figura 4.1: Exemplo de cliques em grafos. (b) destaca através de linhas de diferentes espessuras e estilos os quatro cliques do grafo em (a).



(a)



(b)

Figura 4.2: Exemplo de cliques em dígrafos. (b) destaca através de linhas grossa e pontilhada os cliques do dígrafo em (a).

## 4.2 Conjunto Independente

Este relacionamento V-A é outro exemplo de relacionamento vértice-vértices, porém oposto ao apresentado na seção anterior. Ele está associado aos subgrafos totalmente desconexos maximais chamados conjuntos independentes, ou simplesmente, *co-clique*. Um conjunto independente é um conjunto de vértices que não são adjacentes entre si. Ele é maximal se não é subconjunto próprio de outro conjunto independente. De forma análoga, um grafo ou dígrafo  $G$  pode possuir vários conjuntos independentes de diferentes tamanhos, sendo este tamanho definido pela cardinalidade do conjunto. O maior conjunto independente é chamado *conjunto independente máximo* e sua cardinalidade é usada para definir o *número de independência* de  $G$ , denotado por  $\alpha(G)$ . Analogamente ao número de clique,  $\alpha(G) = r$  onde  $r$  é o maior inteiro tal que  $\bar{K}_r \subseteq G$ . Um grafo ou dígrafo  $K_n$  possui  $\alpha(K_n) = 1$ .

**Co-Clique**

**Conjunto Independente Máximo**

**Número de Independência**

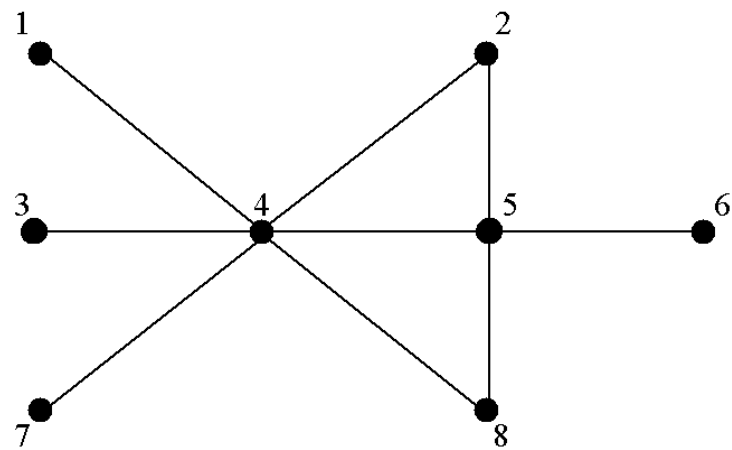
A Figura 4.3(b) ilustra um exemplo de conjunto independente dado pelos vértices brancos do grafo em (a). Este grafo possui os seguintes conjuntos independentes maximais:  $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ ,  $\{1, 3, 5, 7\}$  e  $\{4, 6\}$ . O conjunto independente máximo é definido por  $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ , logo o número de independência do grafo é igual a 6. Note que o subconjunto de vértices  $\{1, 3, 7\}$  não é um conjunto independente maximal, pois ele está contido nos subconjuntos  $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$  e  $\{1, 3, 5, 7\}$ .

Existe uma íntima relação entre conjuntos independentes e cliques. Um clique maximal em um grafo  $G$  é um subgrafo completo, que no complemento de  $G$  se torna um subgrafo totalmente desconexo, i.e., um conjunto independente maximal. Esta constatação permite usar algoritmos aplicados a cliques em conjuntos independentes e vice-versa.

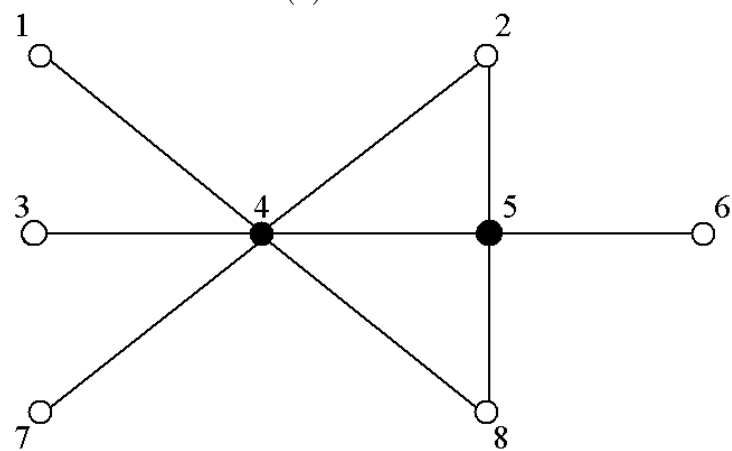
A presença de vários conjuntos independentes maximais ou não dá origem a um tipo especial de grafo chamado *grafo  $K$ -partido*. Um grafo  $G = (V, A)$  é chamado  *$k$ -partido* se os seguintes critérios forem obedecidos

**Grafo  $k$ -partido**

- for possível particionar o conjunto de vértices em  $k$  conjuntos não vazios  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , de forma que eles sejam disjuntos dois a dois, i.e.,  $V_i \cap V_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ , e a união dos elementos destes conjuntos seja o conjunto de vértices original, ou seja,  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$ .
- cada aresta  $a \in A$ , tem extremidades em conjuntos distintos, i.e., se  $a = \{v, u\}$ , então  $v \in V_i$  e  $u \in V_j$ , onde  $i \neq j$ , ou seja, os vértices de cada conjunto não são adjacentes entre si.



(a)



(b)

Figura 4.3: Exemplo de conjunto independente em grafos.(b) ilustra um conjunto independente, denotado pelos vértices branco, do grafo em (a).

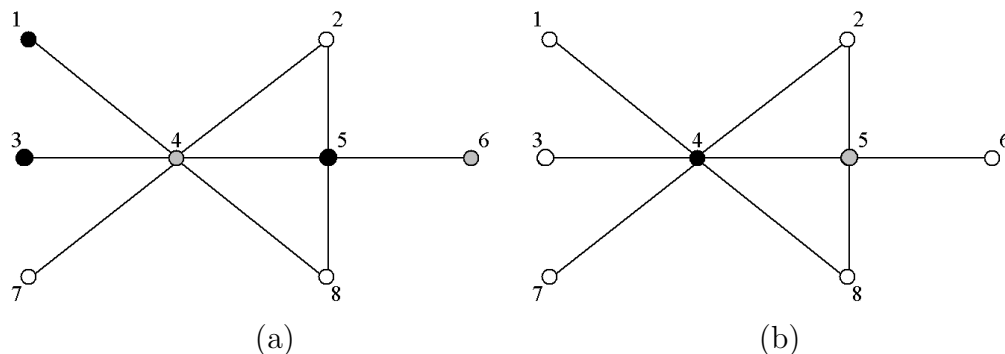


Figura 4.4: Exemplos de particionamento dos vértices do grafo na Figura 4.3(a) em três conjuntos independentes, mostrados em cores distintas.

- $k$  é o menor inteiro que ainda garante os critérios anteriores, caso contrário qualquer grafo com  $n$  vértices seria um grafo  $n$  partido.

Cada conjunto  $V_i$  é chamado partição do conjunto de vértices e corresponde a um conjunto independente que pode ou não ser maximal. Se existem arestas entre qualquer par de vértices de conjuntos distintos então temos o que é chamado de grafo  $k$ -partido completo, denotado por  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , onde cada  $n_i = |V_i|$ . Ele pode ser visto como o resultado da junção de vários complementos de grafos completos, i.e.,

**Grafo  $K$ -partido Completo**

$$K_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \bar{K}_{n_1} + \bar{K}_{n_2} + \dots + \bar{K}_{n_k}$$

A Figura 4.4(a) e (b) ilustram o particionamento dos conjuntos de vértices do grafo na Figura 4.3(a), através de cores distintas, onde vértices com a mesma cor pertencem ao mesmo conjunto independente. Este grafo é um 3-partido, possuindo em cada exemplo três partições onde algumas correspondem a conjuntos independentes maximais. Por exemplo, na Figura 4.4(a), temos  $\{4, 6\}$  como conjunto independente maximal, porém  $\{1, 3, 5\}$  não é um conjunto independente maximal, já que está contido propriamente no conjunto independente  $\{1, 3, 5, 7\}$ . A mesma análise pode ser feita na Figura 4.4(b).

Um caso particular de um grafo  $k$ -partido, é o grafo 2-partido. Este grafo é composto por apenas duas partições, sendo comumente chamado de grafo bipartido. O uso deste tipo de grafo é amplo e é focado em problemas de emparelhamento. Um exemplo foi já mostrado anteriormente na Seção 1.5.1

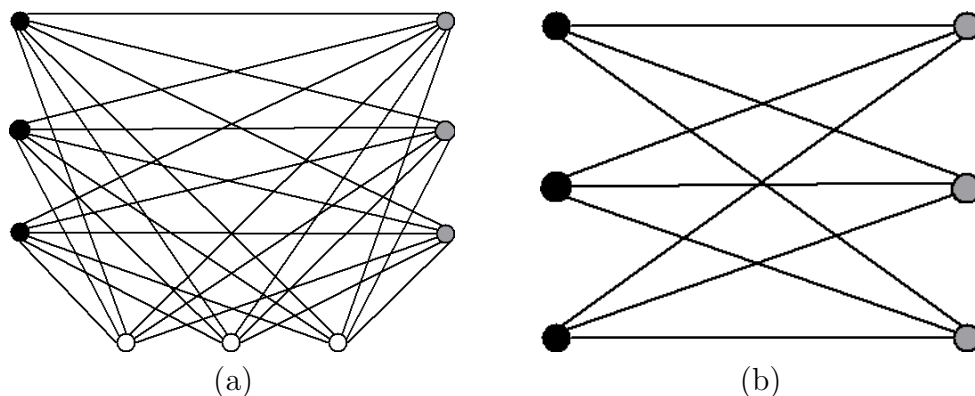


Figura 4.5: Exemplos de (a) grafo 3-partido completo e (b) grafo biclique.

e corresponde ao problema de associação de tarefas. Neste temos que associar pessoas e tarefas de forma que cada tarefa seja realizada e cada pessoa esteja vinculada a uma dada tarefa. Este problema é analisado utilizando grafos bipartidos, onde um conjunto de vértices está associado às pessoas enquanto que o outro conjunto está associado às tarefas. Existem arestas apenas entre vértices de diferentes conjuntos, já que o emparelhamento deve ser constituído por elementos de conjuntos diferentes.

Quando um grafo bipartido possui aresta entre qualquer par de vértices de conjuntos distintos ele é chamado de grafo bipartido completo ou *biclique*, sendo denotado por  $K_{r,s}$ , onde  $r$  e  $s$  são os tamanhos dos dois particionamentos. O termo biclique é curioso e não é facilmente identificado olhando diretamente para o grafo, porém calculando  $\bar{K}_{r,s}$ , observaremos que os dois conjuntos independentes serão ambos *cliques*. As Figuras 4.5(a) e (b) ilustram um grafo 3-partido completo  $K_{3,3,3}$  e um biclique  $K_{3,3}$  respectivamente. Em ambos os casos, temos um particionamento do conjunto de vértices, onde cada partição é um conjunto independente.

O seguinte Teorema permite verificar rapidamente se um grafo é ou não bipartido.

**Teorema 4.1.** Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se ele não possui ciclos de comprimento ímpar.

A definição de *dígrafo  $k$ -partido* é similar ao exposto anteriormente para grafos, com a diferença que estamos lidando com arcos ao invés de arestas. Portanto, a origem e destino de cada arco devem situar-se em partições distintas. A relação em grafos e dígrafos bipartidos é a seguintes. Um dígrafo  $D$

**Grafo Bipartido Completo**

**Biclique**

**Dígrafo  $k$ -partido**



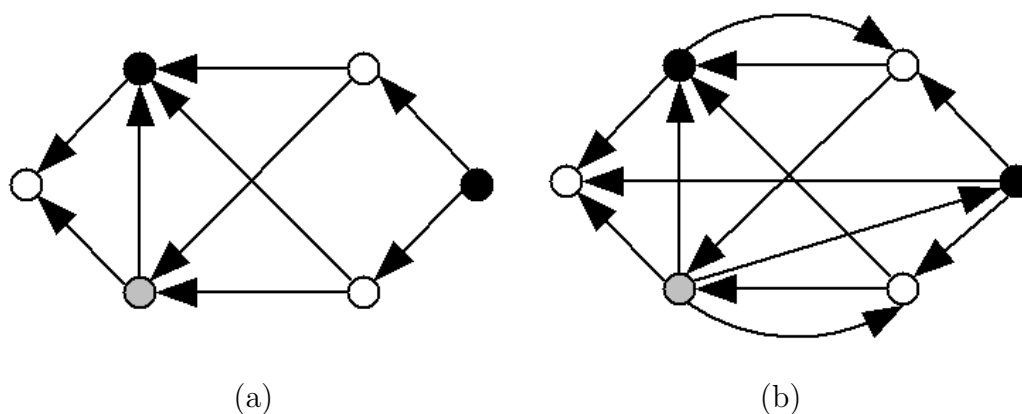


Figura 4.6: Exemplos de (a) dígrafo 3-partido e (b) dígrafo 3-partido completo.

é  $k$ -partido se e somente se seu grafo simples subjacente  $G$  é  $k$ -partido. Um dígrafo é  $k$ -partido completo se para cada par de vértices  $v \in V_i$  e  $u \in V_j$ , com  $i \neq j$ , existe pelo menos um arco entre  $u$  e  $v$  [5]. Ele usa a mesma notação empregada em grafos, i.e.,  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , onde cada  $n_i = |V_i|$ . A Figura 4.6 ilustra (a) um dígrafo 3-partido, onde os vértices de uma mesma partição possuem mesma cor. Enquanto que (b) é um dígrafo 3-partido completo,  $K_{3,1,1}$  pois existe pelo menos um arco entre cada vértice de partições diferentes. O que difere entre os dígrafos em (a) e em (b), é que em (a) estão faltando alguns arcos entre vértices de partições distintas, por exemplo, falta um arco entre o vértice preto mais à direita e o vértice cinza. Um dígrafo  $D = (V, A)$  é *dígrafo bipartido direcionado* se o grafo subjacente é bipartido com partições  $V_1$  e  $V_2$ , tal que para cada arco  $(u, v) \in A$ ,  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$ , ou seja,  $u$  é uma fonte e  $v$  é um sumidouro.

**Dígrafo  
 $k$ -partido  
Completo**

**Dígrafo Bipar-  
tido Direcionado**

A adaptação do Teorema 4.1 para dígrafos é a seguinte

**Teorema 4.2.** Um dígrafo fortemente conexo  $D$  é bipartido se e somente se ele não possui ciclos direcionados de comprimento ímpar.

## 4.3 Cobertura de Vértices

Este relacionamento  $V - A$  lida simultaneamente com vértices e arestas. Ele é chamado cobertura de vértices e está intimamente associado aos conceitos

anteriores. Dizemos que um vértice cobre uma aresta quando ele é uma de suas extremidades. Dado um grafo  $G = (V, A)$ , sabemos que  $V$  cobre todas as arestas no conjunto  $A$ , porém o que é de interesse prático é saber o menor número de vértices que conseguem cobrir todas as arestas.

**Cobertura Minimal**

Uma cobertura de vértices de um grafo  $G$  é um subconjunto  $S$  dos vértices de  $G$ ,  $S \subseteq V$ , que cobrem todas as arestas de  $G$ , i.e., todas as arestas são incidentes a pelo menos um vértice de  $S$ . De forma similar, ao apresentado anteriormente, buscamos as coberturas *minimais* de vértices, ou seja, coberturas de vértices que não possuem subconjunto próprio que seja uma cobertura de vértices. A menor cobertura de vértices é chamada *cobertura mínima de vértices* e sua cardinalidade define o *número de cobertura de vértices*,  $\beta(G)$ .

**Cobertura Mínima**

**Número de Cobertura de Vértices**

O relacionamento entre cobertura de vértices e conjunto independente é direta. Considere o conjunto independente maximal  $I \subseteq V$ . Todos os vértices em  $v \in V - I$  são adjacentes a pelo menos um vértice em  $I$ , pois se existe um vértice  $v$  que não é adjacente a outro em  $I$ , então o conjunto  $I$  não é maximal. Portanto podemos pensar que cada aresta de  $G$  possui uma extremidade em  $V - I$  e outra em  $I$ . Porém algumas arestas são incidentes a vértices apenas do conjunto  $V - I$ . Logo, os vértices em  $I$  não cobrem todas as arestas de  $G$ , porém os vértices em  $V - I$  cobrem. Este fato dá origem ao seguinte Teorema.

**Teorema 4.3.** Dado um grafo  $G = (V, A)$ , um conjunto  $S \subseteq V$  é um conjunto independente maximal de  $G$  se e somente se  $V - S$  é uma cobertura minimal de vértices.

Este Teorema nos leva ao seguinte corolário

**Corolário 4.1.** Dado um grafo  $G = (V, A)$ ,

$$\beta(G) = |V| - \alpha(G)$$

A Figura 4.7 mostra um grafo roda  $W_5 = (V, A)$  e exemplos de conjuntos independentes maximais e coberturas de vértices. O conjunto  $I_1$  formado apenas pelo vértice  $f$ , destacado em cinza, é um conjunto independente maximal de tamanho  $|I_1| = 1$ , enquanto que  $V - I_1$  é uma cobertura de vértices de tamanho  $|V - I_1| = 5$ . Por outro lado, os vértices  $b$  e  $e$ , destacados em branco, correspondem a um conjunto independente maximal  $I_2$  de tamanho  $|I_2| = 2$ , enquanto que  $V - I_2$  é uma cobertura de vértices de tamanho  $|V - I_2| = 4$ . O conjunto  $I_2$  é um exemplo de conjunto independente máximo

e conseqüentemente  $V - I_2$  é uma cobertura mínima de vértices. Observe que os vértices em  $I_2$  são adjacentes a todos os demais vértices do grafo, porém eles não correspondem a uma cobertura, já que as arestas que unem vértices do conjunto  $V - I_2$ , como a aresta  $\{d, c\}$ , não são cobertas pelos vértices em  $I_2$ .

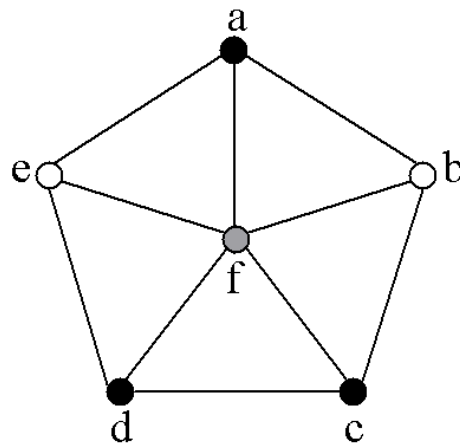


Figura 4.7: Exemplos de Conjunto Independente e Cobertura de Vértices.

O cálculo da cobertura mínima tem várias aplicações práticas. Por exemplo, imagine que queiramos descobrir a quantidade mínima de guardas que podemos colocar no cruzamento de ruas em uma rede de estradas de forma que cada estrada seja vigiada por pelo menos um guarda. A rede seria representada por um grafo, tendo como vértices os cruzamentos entre as ruas e como arestas as ruas. Um guarda em um cruzamento seria capaz de monitorar as ruas que interceptam o cruzamento. A quantidade de guardas afetam diretamente o custo da solução, por isso, a quantidade mínima é o foco principal do problema. Caso contrário, poderíamos pensar em associar à cada cruzamento um guarda. Esta solução é direta, porém é a que causa maior impacto financeiro. Outro exemplo é o problema para determinar o menor número de câmeras a serem utilizadas em um ambiente estruturado de forma a inspecioná-lo completamente. O ambiente seria representado pelo grafo e os vértices estariam associados às regiões de monitoramento. Similarmente, queremos a solução de menor custo. Em ambos os exemplos, buscamos minimizar uma função de custo, que é representada ou pelo número de câmeras ou pelo número de guardas, portanto, estes problemas são de minimização.

Para um dígrafo, a definição de cobertura mínima é a mesma para um grafo, porém todos os cálculos são realizados utilizando seu grafo subjacente. Notem que nesta definição a orientação dos arcos está sendo totalmente desconsiderada, pois o que importa é saber a menor quantidade de vértices que cobrem todos os arcos. Em geral, esta definição de cobertura de vértices, para dígrafos tem pouca importância prática, já que características importantes sobre dígrafos estão sendo desconsideradas.

<b>Cobertura de Fonte</b> <b>Cobertura de Sumidouro</b>  <b>Número de Cobertura de Fonte</b> <b>Número de Cobertura de Sumidouro</b> <b>Dígrafo Bipartido Direcionado</b>	Para contornar este problema, Ferro e Ferrarello [6] definem os conceitos <i>cobertura de fonte</i> e <i>cobertura de sumidouro</i> . Dado um dígrafo $D = (V, A)$ , uma cobertura de fonte para $D$ é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ , tal que cada arco em $D$ parte de algum vértice em $S$ , i.e., para cada vértice $v \in S$ existe pelo menos um arco $a = (v, u) \in A$ . De forma análoga, uma cobertura de sumidouro para $D$ é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ , tal que para cada $u \in S$ existe pelo menos um arco $a = (v, u) \in A$ . Como buscamos sempre conjuntos mínimos, temos que considerar a menor cobertura de fonte(ou de sumidouro) que não está contida propriamente em outra cobertura de fonte(ou de sumidouro). A partir daí definimos para um dígrafo $D$ , o <i>número de cobertura de fonte</i> , $\beta^+(D)$ e o <i>número de cobertura de sumidouro</i> , $\beta^-(D)$ . O primeiro está associado ao tamanho da <i>cobertura mínima de fonte</i> , ou seja, à menor cobertura de fonte, enquanto que o segundo está associado ao tamanho da <i>cobertura mínima de sumidouro</i> . Considerando $S$ e $S'$ coberturas de fonte e sumidouro respectivamente para um dígrafo $D$ , se $S \cap S' = \emptyset$ , com $S \neq \emptyset$ e $S' \neq \emptyset$ , então $D$ é um dígrafo bipartido direcionado, conforme discutido na Seção 4.2.
--	---

Problemas de cobertura de vértices, fonte e sumidouro em dígrafos, residem em problemas de contagem. Por exemplo, a partir de um dígrafo quantos ciclos direcionados de um dado comprimento são necessários para cobrir todos os vértices[7] ou a quantidade de maneiras que  $i$  caminhos direcionados podem cobrir todos os vértices do dígrafo[8].

Um problema similar ao de cobertura de vértices, independente se é em grafos ou não, é ao invés de focar nas arestas/arcs para serem cobertos focar nos vértices. Isto dá origem ao conceito de conjunto dominante que será apresentado na próxima seção.

## 4.4 Conjunto Dominante

Este relacionamento  $V - A$  é um relacionamento vértice-vértice similar àquele definido pela cobertura de vértices, porém com um foco sutilmente diferente. Uma cobertura de vértice é um subconjunto de vértice que *cobrem todas as arestas* de um grafo. Por sua vez, um conjunto dominante é também um subconjunto de vértices, porém, com a diferença de que estes vértices devem *cobrir (ou dominar) todos os vértices* do grafo que não participam do conjunto. A dominância entre vértices em um *grafo* é definida pela relação de adjacência entre eles. Se um vértice  $v$  é adjacente a outro vértice  $u$ , então  $v$ , além de dominar a si próprio, também domina  $u$  e vice-versa. Portanto, dizemos que  $v$  domina a si próprio e seus vizinhos,  $\tau(v)$ . De forma análoga ao apresentado na seção anterior, os problemas associados aos conjuntos dominantes objetivam encontrar sempre os conjuntos dominantes minimais e mínimos.

**Relação de Dominância em Grafos**

Formalmente um conjunto dominante  $S$  para um grafo  $G = (V, A)$  é um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , tal que todo vértice  $v \in V - S$  é dominado por pelo menos um vértice de  $S$ , i.e.,  $\tau(v) \cap S \neq \emptyset, \forall v \in (V - S)$ . A Figura 4.8 ilustra dois conjuntos dominantes minimais, através dos vértices brancos e cinzas, para um grafo  $G$ . O tamanho do menor conjunto define o *número de dominância* de um grafo  $G$ , o qual é denotado por  $\gamma(G)$ . Portanto, os vértices em cinza compõe o conjunto dominante mínimo e definem o número de dominância  $\gamma(G) = 3$ .

**Número de Dominância**

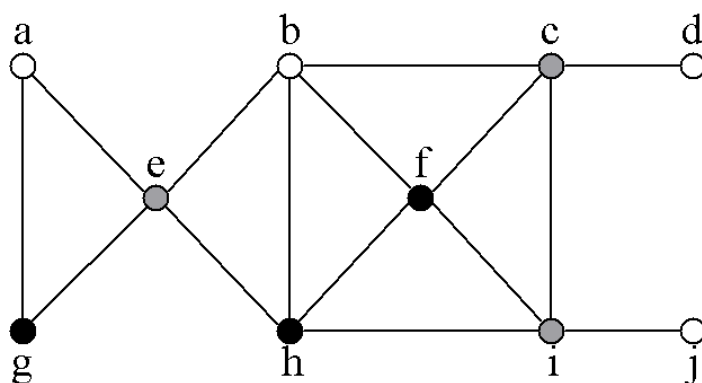


Figura 4.8: Exemplos de Conjuntos Dominantes.

Como é possível observar neste exemplo, todos os vértices que não participam do conjunto dominante são dominados por pelo menos um vértice deste

conjunto. Por exemplo, considerando o conjunto dominante  $S = \{e, c, i\}$ , cada vértice em  $V - S = \{a, b, d, f, g, h, j\}$  possui um vizinho em  $S$ . Como o conjunto dominante foca nos vértices, podem existir arestas descobertas, como as arestas  $\{a, g\}$  e  $\{b, h\}$ .

Os números de dominância e de cobertura de vértices possuem a seguinte relação  $\gamma(G) \leq \beta(G)$  para qualquer grafo  $G$  que não possua vértices isolados. Neste caso, qualquer cobertura é um conjunto dominante que pode ou não ser minimal. As Figuras 4.9(a) e (b) mostram uma cobertura de vértices e um conjunto dominante, respectivamente, destacados pelos vértices em cinza. Notem que o conjunto dominante é um subconjunto próprio da cobertura de vértices, logo  $\gamma < \beta$ . Em grafos estrelas  $S_n$ ,  $\gamma = \beta$ , pois apenas o vértice central é necessário para cobrir todos os vértices do grafo e todas as arestas. A diferença entre os tamanhos da cobertura de vértices e do conjunto de dominante por variar bastante. Por exemplo, para um grafo completo  $K_n$ , temos  $\gamma(K_n) = 1$  e  $\beta(K_n) = n - 1$ .

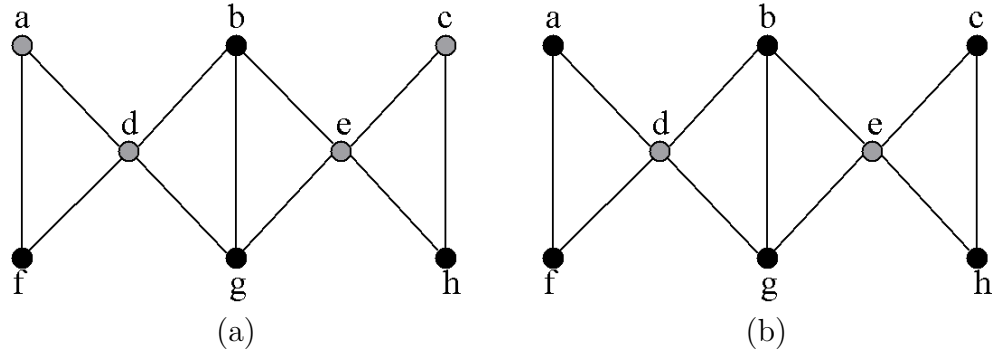


Figura 4.9: Exemplos de Conjuntos Dominantes.

Em um dígrafo, a relação de dominância é definida pela orientação de cada arco. Em um arco  $(v, u)$ , dizemos que o vértice  $v$  domina o vértice  $u$  e  $u$  é dominado por  $v$ . Notem que esta relação não é necessariamente simétrica, diferente da dominância em grafos, onde em uma aresta qualquer, um vértice domina o outro e (vice-versa). Devido a isso temos os conceitos de dominância de saída e dominância de entrada [9].

**Relação de Dominância em Dígrafos**

**Conjunto Dominante de Entrada**

**Conjunto Dominante de Saída**

Dado um dígrafo  $D = (V, A)$ , um *conjunto dominante de entrada*  $S$  é um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , tal que todo vértice  $v \in V - S$  domina pelo menos um vértice de  $S$ , i.e.,  $\tau^+(v) \cap S \neq \emptyset$ ,  $\forall v \in (V - S)$ . Enquanto que, um *conjunto dominante de saída*  $S$  é um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , tal

que todo vértice  $v \in V - S$  é dominado por pelo menos um vértice de  $S$ , i.e.,  $\tau^-(v) \cap S \neq \emptyset$ ,  $\forall v \in (V - S)$ . Os tamanhos do menor conjunto dominante de entrada e do menor conjunto dominante de saída de um dígrafo  $D$  são chamados de números de dominância de entrada e de saída, respectivamente, e denotados por  $\gamma^-(D)$  e  $\gamma^+(D)$ . A partir da idéia de dominância, um vértice  $v \in V$  de  $D$  é  $k$ -rei se todos os vértices puderem ser alcançados por um caminho de comprimento no máximo  $k$ . Se  $k = 1$ ,  $v$  domina todos os vértices.

**Números de Dominância de Entrada e de Saída**

A Figura 4.10 ilustra um dígrafo  $D = (V, A)$  e dois conjuntos dominantes minimais de entrada. Os vértices em cinza compõem o conjunto  $D_1 = \{b, c\}$  e os vértices em branco compõem o conjunto dominante  $D_2 = \{a, d, f\}$ . Todos os vértices que não estão no conjunto  $D_1$  (ou  $D_2$ ) dominam pelo menos um vértice do conjunto  $D_1$  (ou  $D_2$ ). Por exemplo, considerando o conjunto  $D_1$ , o vértice  $b$  é dominado pelos vértices  $a, c, d$  e  $f$ . Enquanto que o vértice  $c$  é dominado pelos vértices  $a, b$  e  $e$ . Notem que os vértices que  $V - D_1 = \{a, d, e, f\}$  dominam pelo menos um vértice de  $D_1$ . Em relação ao conjunto  $D_2$ , todos os vértices em  $V - D_2 = \{b, c, e\}$  dominam pelo menos um vértice em  $D_2 = \{a, d, f\}$ .

A partir de um conjunto dominante de entrada podemos extrair um conjunto dominante de saída, porém este pode não ser minimal. Por exemplo,  $V - D_1 = \{a, d, e, f\}$  é um conjunto dominante de saída porém não é minimal, já que ele possui um subconjunto próprio  $\{a, e\}$  que é dominante. O mesmo acontece com o conjunto  $V - D_2 = \{b, c, e\}$  que possui um subconjunto próprio formado pelos vértices  $c$  e  $e$  que é minimal. A obtenção de um conjunto não minimal não é o único problema. É possível que em alguns casos, um conjunto dominante de saída fique de fora do resultado. Esta situação será ilustrada na Seção 5.3.4. Os vértices  $c$  e  $e$  são vértices 2-rei.

Uma variação destas relações de dominância para dígrafos foi proposta por Chartrand[10]. Ela é chamada *relação de dominância gêmea*, e é definida como segue. Dado um dígrafo  $D = (V, A)$ , um *conjunto dominante gêmeo*  $S$  é um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , tal que todo par de vértices  $u, v \in S$  (onde  $u$  pode ou não ser igual a  $v$ ), existem dois arcos  $(u, w), (w, v) \in A$  para todo  $w \in V - S$ . Ou seja, todo vértice em  $V - S$  domina e é dominado por vértices do conjunto  $S$ . Notem que esta dominância é uma combinação das dominâncias de entrada e a de saída. O tamanho do menor conjunto dominante gêmeo de entrada de um dígrafo  $D$  é chamado de número de dominância gêmea, sendo denotado por  $\gamma^*(D)$ . A relação entre a dominância

**Relação de Dominância Gêmea**  
**Conjunto Dominante Gêmeo**

**Números de Dominância Gêmea**

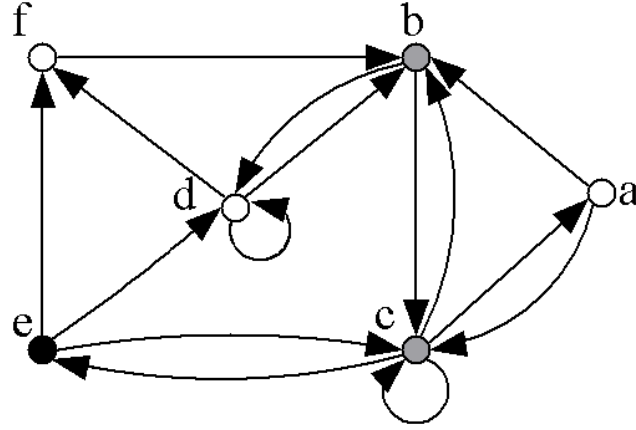


Figura 4.10: Exemplos de Conjuntos Dominantes de Entrada.

gêmea e as outras dominâncias é dada por

$$\max\{\gamma^+(D), \gamma^-(D)\} \leq \gamma^*(D) \leq \gamma^+(D) + \gamma^-(D)$$

A dominância gêmea é fortemente motivada por aplicações em redes de computadores. Como exemplo, considere que cada vértice no conjunto dominante  $S$  esteja associado a um servidor que forneça serviços específicos para outros computadores da rede. A comunicação entre os vértices fora e dentro do conjunto dominante é bidirecional, i.e., existindo a dominância gêmea, pois, dados  $u$  e  $w$ , onde  $u \in S$  e  $w \in V - S$ , temos os arcos  $(u, w)$  e  $(w, u)$  que denotam a direção da comunicação entre  $u$  e  $w$ . Como um servidor em geral é muito caro, objetiva-se encontrar o menor número de servidores que atendam todos os computadores da rede, ou seja, minimizar o tamanho do conjunto dominante gêmeo.

Ainda considerando o dígrafo  $D$  ilustrado na Figura 4.10, um exemplo de conjunto dominante gêmeo minimal é o conjunto  $S = \{b, c, d\}$ . Observem que os vértices em  $V - S = \{a, e, f\}$  dominam e são dominados pelos vértices do conjunto  $S$ . Por exemplo, os vértices  $a$  e  $e$  dominam e são dominados pelo vértice  $c$ ; enquanto que o vértice  $f$  domina o vértice  $b$  e é dominado pelo vértice  $d$ , que participam de  $S$ . Para este dígrafo  $\gamma^*(D) = 3$ .



## 4.5 Emparelhamento

Outro relacionamento V-A importante é o *emparelhamento*<sup>1</sup>, também chamado de acoplamento ou casamento. Ele é um relacionamento aresta-aresta similar ao relacionamento vértice-vértice definido através dos conjuntos independentes. Ele considera a adjacência entre as arestas<sup>2</sup> e visa encontrar o maior conjunto de arestas não adjacentes entre si. Portanto, um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G = (V, A)$  é um subconjunto de arestas,  $M \subseteq A$ , que não correspondem a laços e que não compartilham vértices entre si. Portanto duas arestas  $a_i, a_j \in A$ , onde  $a_i = \{v_i, u_i\}$  e  $a_j = \{v_j, u_j\}$  e  $i \neq j$ , pertencem ao emparelhamento  $M$ , se  $v_i \neq v_j \neq u_i \neq u_j$ . Esta mesma definição serve para dígrafos porém consideramos arcos e não arestas.. Da forma análoga aos relacionamentos anteriores, temos interesse em saber os emparelhamentos maximais e máximo. Ou seja, nos emparelhamentos que não são subconjuntos próprios de outros emparelhamento e nos maiores emparelhamentos existentes. O tamanho de um emparelhamento  $M$  é definido pela quantidade de arestas e representado por  $|M|$ , e o tamanho do maior emparelhamento de um grafo  $G$  é denotado por  $\alpha'(G)$ .

Quando uma aresta de  $M$  é incidente a um vértice  $v \in V$ , então dizemos que  $v$  é saturado por  $M$ . Quando o emparelhamento satura todos os vértices do grafo, então dizemos que o emparelhamento é perfeito. A Figura 4.11(a) mostra um exemplo de emparelhamento maximal de tamanho 2 em um grafo  $W_5$ . Todas as arestas do grafo compartilham vértices com as arestas do emparelhamento, porém este emparelhamento não é perfeito pois existem vértices que não são saturados, como os vértices  $b$  e  $d$ . A Figura 4.11(b) mostra um emparelhamento máximo de tamanho  $\alpha'(G) = 3$  que satura todos os vértices.

Na Seção 1.5.1, apresentamos um exemplo de emparelhamento envolvendo um conjunto de pessoas e um conjunto de tarefas. As arestas mais grossas destacadas na Figura 1.8(b) compõem um possível emparelhamento do grafo mostrado em (a). Notem que ele é perfeito pois todos os vértices estão saturados, i.e., as arestas são incidentes a todos os vértices do grafo. Este emparelhamento é máximo de tamanho igual a  $\alpha'(G) = 4$ . Existem outros emparelhamentos possíveis, como os mostrados nas Figuras 4.12(a) e (b) através de arestas mais grossas. O que diferencia um emparelhamento

**Acoplamento**

**Casamento**

**Emparelhamentos  
em Dígrafos**

**Emparelhamento  
Máximo**

**Vértice  
Saturado**

**Emparelhamento  
Perfeito**

<sup>1</sup>Emparelhamento é a tradução do inglês da palavra Matching.

<sup>2</sup>Duas arestas são adjacentes se compartilham vértices.

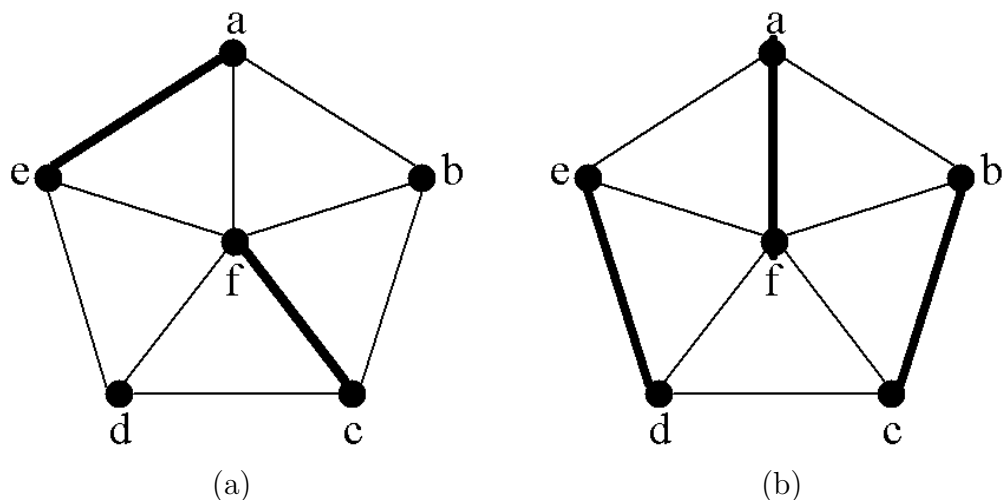


Figura 4.11: Exemplos de emparelhamentos de um grafo  $W_5$ .

do outro, neste problema, é a soma dos tempos associados às suas arestas. Portanto cada emparelhamento tem uma soma que pode ou não ser diferente da soma dos outros emparelhamentos. Como buscamos aquele com a menor soma possível, este problema em particular pode ser visto com um problema de minimização.

Um ponto importante é como saber se um emparelhamento é maximal ou máximo. Ele é maximal se não for possível adicionar mais arestas de forma a garantir que as arestas não compartilham vértices. Portanto, apenas o conjunto formado pela aresta  $\{t_1, e_4\}$  na Figura 4.12(a) não representa um emparelhamento maximal, já que é possível adicionar a aresta  $\{t_2, c_1\}$  neste conjunto. Para saber se o emparelhamento é máximo, precisamos saber se ele é perfeito. Se for então o emparelhamento é máximo, caso contrário temos que verificar a existência de *caminhos de aumento*. Por exemplo, nas Figuras 4.12 (a) e (b) os emparelhamentos são perfeitos, logo são máximos.

Antes de definirmos um caminho de aumento, precisamos definir o conceito de caminho alternante. Um *caminho alternante* em um emparelhamento  $M$  é um caminho cujas arestas alternam entre aquelas que estão e aquelas que não estão em  $M$ . Por exemplo, o grafo 4.11(a) possui vários caminhos alternantes como  $p_1 = \{d, \{d, e\}, e, \{e, a\}, a, \{a, b\}, b\}$  e  $p_2 = \{b, \{b, c\}, c, \{c, f\}, f, \{f, e\}, e, \{e, a\}, a\}$ . Notem que tanto em  $p_1$  quanto em  $p_2$ , as arestas do caminho alternam entre aquelas que estão e aquelas que não estão em  $M$ . Quando

**Emparelhamento  
Máximo  $\times$  Em-  
parelhamento  
Perfeito**

**Caminho  
Alternante**

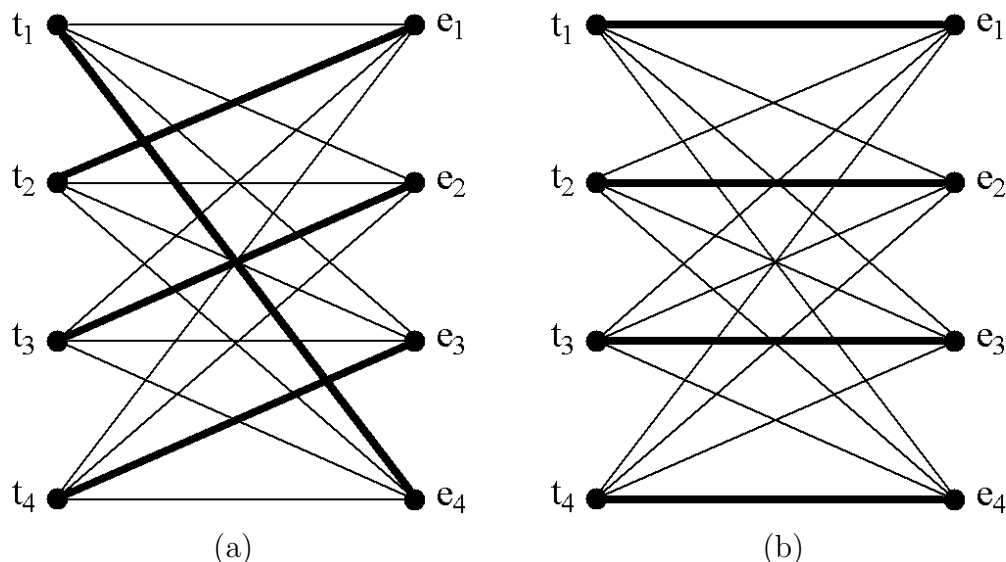


Figura 4.12: Exemplos de Emparelhamentos Perfeito.

as extremidades de um caminho alternante não são saturadas, então ele chamado *caminho de aumento*. Por exemplo, as extremidades  $d$  e  $b$  do caminho  $p_1$  não são saturadas. Logo, temos um caminho de aumento.

#### Caminho de Aumento

Quando um emparelhamento possui um caminho de aumento  $P$ , basta substituir em  $M$  as arestas de  $P$  que estão pelas que não estão em  $M$ . Isto irá aumentar em uma unidade o tamanho de  $M$ . Se  $M$  não possuir mais caminhos de aumento então  $M$  é máximo. Usando esta estratégia, a partir do caminho  $p_1$ , obtemos o emparelhamento ilustrado na Figura 4.13 de tamanho 3, enquanto que com a presença do caminho de aumento  $p_1$  o emparelhamento tinha tamanho 2. A relação entre caminho de aumento e emparelhamento máximo foi mostrada por Berge, em 1957 através do seguinte Teorema.

**Teorema 4.4** (Berge, 1957). Um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  é máximo se e somente se  $M$  não possui caminhos de aumento.

Em problemas de emparelhamento envolvendo grafos bipartidos, podemos ter situações onde os conjuntos independentes têm tamanhos diferentes. Por exemplo, no caso ilustrado na Seção 1.5.1 o conjunto de tarefas e de pessoas possuem o mesmo tamanho, porém podemos ter casos, onde o número de tarefas é muito maior que de pessoas. Nesta situação o que nos interessa saber é se todo emparelhamento maximal nesta instância do problema irá

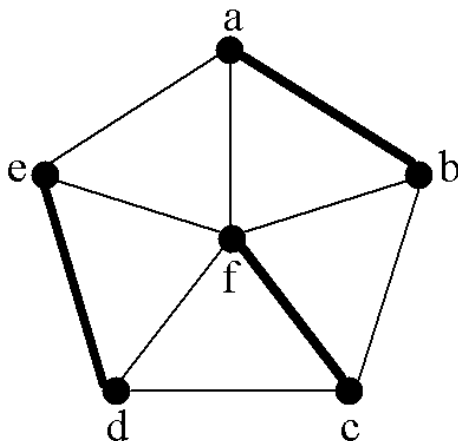


Figura 4.13: Emparelhamento Máximo

associar todas as pessoas a alguma tarefa, i.e., se os vértices associados às pessoas serão saturados. Para responder a este problema, Hall em 1935 provou o seguinte Teorema.

**Teorema 4.5** (Hall, 1935). Um grafo bipartido, com dois conjuntos independentes  $X$  e  $Y$ , tem um emparelhamento que satura  $X$  se e somente se para todo  $S \subseteq X$ ,  $|\Gamma(S)| \geq |S|$ .

Quando  $|X| = |Y|$ , este teorema é chamado Teorema de Casamento (*Marriage Theorem*).

Existe um relacionamento interessante entre cobertura de vértices e emparelhamento. Como foi visto anteriormente, uma cobertura de vértices é um conjunto de vértices que cobre todas as arestas do grafo, i.e., as arestas do grafo possuem pelo menos uma das extremidades na cobertura, enquanto que um emparelhamento consiste em um conjunto de arestas que não compartilham vértices<sup>3</sup> e que são adjacentes a todas as arestas do grafo. Como as arestas no emparelhamento são adjacentes a todas as arestas do grafo, então podemos imaginar que a cobertura pode ser construída selecionando pelo menos um vértice de cada aresta. Isso nos leva a concluir que o tamanho de qualquer cobertura de vértices de um grafo  $G$  é no mínimo o tamanho do menor emparelhamento maximal de  $G$ . Para grafos bipartidos existe uma

<sup>3</sup>Notem que nenhum vértice pode cobrir duas arestas de um emparelhamento, já que nesse caso as arestas seriam adjacentes

prova matemática, que mostra que obtendo um emparelhamento e uma cobertura de vértices de mesmo tamanho, então tem-se um resultado ótimo para cada um deles. Esta prova segue os princípios da relação *min-max*.

Uma relação *min-max* prova que quando temos dois problemas duais sobre a mesma classe de instâncias (neste caso, grafos), a igualdade de resultados destes problemas PROVA que ambos são ótimos para a instância analisada. Neste caso, os problemas tratados são o de maximização, associado ao emparelhamento, e o de minimização, associado à cobertura de vértices. Portanto, se dado um grafo obtivermos como resultado o mesmo valor para ambos os problemas, então o que temos é um resultado ótimo. As Figuras 4.12(a) e (b) mostram a aplicação deste Teorema. Observe que o tamanho do emparelhamento máximo é igual ao de cobertura mínima para ambos os grafos. Logo, os resultados são ótimos.

Isto nos leva à relação *min-max* definida pelo Teorema 4.6, chamado König-Egervary.

**Teorema 4.6** (König, 1931, Egerváry, 1931). Se  $G$  é um grafo bipartido, então o tamanho do emparelhamento máximo de  $G$  é igual ao tamanho da cobertura mínima de vértices de  $G$ , i.e.,  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .

As Figuras 4.14(a) e (b) mostram o emparelhamento através de arestas grossas e a cobertura de vértices através dos vértices cinza. Cada vértice da cobertura foi escolhido a partir das arestas do emparelhamento. Note que neste exemplo, qualquer uma das coberturas terá dois vértices de pelo menos uma aresta do emparelhamento. Em ambos os casos a cobertura tem tamanho igual a 4 que é igual ao  $\beta(W_5) = 4$ , discutido através do exemplo da Figura 4.7

Os conceitos de conjunto independente e de emparelhamento possuem uma relação interessante. O primeiro é um conjunto maximal (ou máximo) de vértice que não são adjacentes entre si, enquanto que o último corresponde a um conjunto maximal (ou máximo) de arestas que não compartilham vértices, ou seja, não são adjacentes entre si. O fato de um lidar com vértices e o outro com arestas faz com que ambos consigam usar o mesmo método de enumeração. Por exemplo, o método que lista os conjuntos independentes maximais em um grafo  $G$  é o mesmo método que lista os emparelhamentos maximais de  $G$ , porém neste último recebe como entrada  $L(G)$ , que corresponde ao grafo linha de  $G$ , ao invés de  $G$ . Na Seção 2.2.10 mostramos que qualquer grafo  $G$  possui um grafo linha correspondente  $L(G)$ , onde as arestas de  $G$  são mapeadas para vértices em  $L(G)$ . Portanto, um conjunto

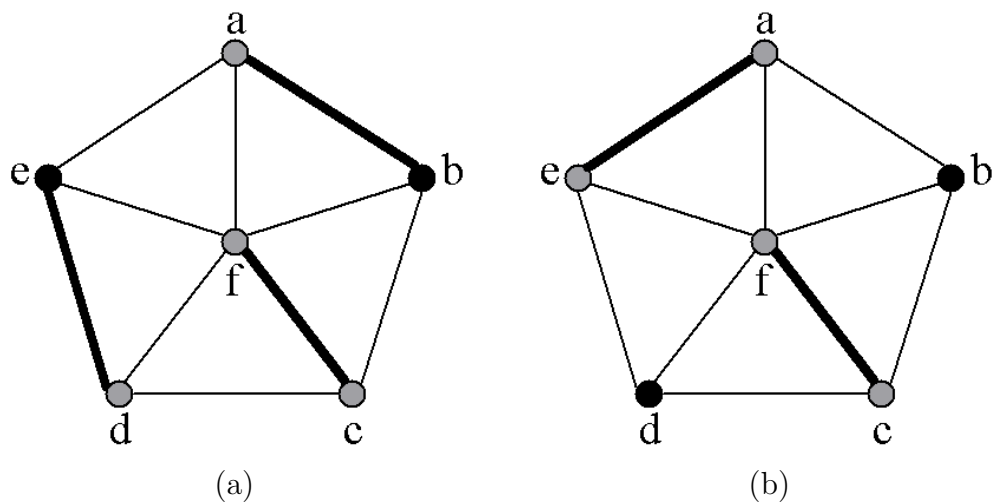


Figura 4.14: Emparelhamento e Cobertura

independente em  $L(G)$  está associado a um conjunto de arestas em  $G$  que não são adjacentes. Isto nos leva a  $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$ , i.e., o tamanho do emparelhamento máximo em  $G$  é igual a tamanho do conjunto independente máximo em  $L(G)$ . Usaremos este princípio na Seção 5.2.4 para enumeramos os emparelhamentos maximais de grafos.

# Capítulo 5

## Enumeração

Neste capítulo apresentamos o *método de Maghout* que é utilizado para calcular os relacionamentos V-A discutidos no capítulo anterior. Este método usa as leis da álgebra booleana para encontrar os conjuntos minimais e maximais do problema de interesse o qual pode ter sido modelado usando tanto grafos quanto dígrafos. O método explora as interrelações existentes entre os relacionamentos V-A para a obtenção do resultado desejado. Por exemplo, sabemos que um conjunto independente maximal em um grafo  $G$  é um clique em  $\bar{G}$ . Portanto, o mesmo método pode ser utilizado tanto para enumerar os cliques maximais quanto os conjuntos independentes de um grafo  $G$ . O que difere é o grafo fornecido como entrada para o método que pode ser o próprio  $G$  ou  $\bar{G}$ .

### Método de Maghout

#### 5.1 Método de Maghout

Para facilitar a compreensão, focaremos inicialmente no problema de cobertura minimal de vértices. A obtenção dos conjuntos independentes maximais e cliques é direta, tendo sido discutida anteriormente nas respectivas seções. Todavia, o cálculo dos conjuntos dominantes e dos emparelhamentos, exige uma pequena modificação do método a qual discutiremos oportunamente nas seções subsequentes.

Considere um grafo simples  $G = (V, A)$  composto pelos seguintes conjuntos de vértices  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  e de arestas  $A = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$ . Como queremos saber as coberturas minimais de vértices deste grafo, então devemos selecionar para cada aresta uma de suas extremidades. Neste caso, para

a aresta  $a_1 = \{v_1, v_2\}$ , podemos escolher ou o vértice  $v_1$  ou o vértice  $v_2$ , e para a aresta  $a_2 = \{v_2, v_3\}$ , a escolha pode ser feita entre os vértices  $v_2$  e  $v_3$ . Notem que no nosso exemplo, existem apenas duas coberturas minimais possíveis:  $\{v_2\}$  e  $\{v_1, v_3\}$ .

A escolha do vértice que irá cobrir cada aresta pode ser modelada pelo operador lógico *ou*. Considerando  $\dot{v}_i$  a variável lógica associada ao vértice  $v_i$ , podemos associar as seguintes somas lógicas às arestas  $a_1$  e  $a_2$ , respectivamente

$$(\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \text{ e } (\dot{v}_2 + \dot{v}_3)$$

O produto destas duas somas  $(\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \cdot (\dot{v}_2 + \dot{v}_3)$  combina todas as possibilidades existente de escolha de vértices, onde  $\cdot$  representa o operador lógico *e*. Portanto realizando este produto encontramos,

$$\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_2 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_2 \cdot \dot{v}_3$$

Cada um destes termos é uma possível cobertura. Por exemplo, o termo  $\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2$  está associado aos vértices  $v_1$  e  $v_2$  e representa uma cobertura, porém que não é minimal. Por outro lado, o termo  $\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3$  contém uma cobertura minimal definida pelos vértices  $v_1$  e  $v_3$ . A importância da álgebra booleana aparece neste momento. O termo  $\dot{v}_2 \cdot \dot{v}_2$  possui uma referência repetida ao vértice  $v_2$ . Isto indica que  $v_2$  é extremidade de ambas as arestas. Para eliminar esta repetição aplicamos a *lei da idempotência*<sup>1</sup> no termo  $\dot{v}_2 \cdot \dot{v}_2$  que leva ao termo  $\dot{v}_2$ . Logo, o novo resultado intermediário é

$$\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2 + \dot{v}_2 + \dot{v}_2 \cdot \dot{v}_3$$

O termo  $\dot{v}_2$  já representa nossa primeira cobertura de vértices. Todavia, existem as coberturas  $\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_2$  e  $\dot{v}_2 \cdot \dot{v}_3$  que não são minimais e que devem ser eliminadas do resultado final. Para eliminar estas coberturas utilizamos a *lei da absorção*<sup>2</sup> nos três últimos termos do resultado anterior encontrando

$$\dot{v}_1 \cdot \dot{v}_3 + \dot{v}_2$$

Logo, para o primeiro termo temos a seguinte cobertura  $\{v_1, v_3\}$  e para o segundo termo temos a cobertura  $\{v_2\}$ . A obtenção do conjunto independente é direta, pois sabemos que se  $V$  é o conjunto de vértices e  $C$  é a

<sup>1</sup>A lei da idempotência diz que  $p \wedge p \Leftrightarrow p$  e que  $p \vee p \Leftrightarrow p$  para qualquer proposição lógica  $p$ .

<sup>2</sup>A lei da absorção diz que  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$  e que  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$  para quaisquer proposições lógicas  $p$  e  $q$ .



cobertura, o conjunto independente associado à  $C$  é igual a  $I = V - C$ . Logo, o conjunto independente associado ao primeiro termo é  $\{v_2\}$  e ao segundo termo é  $\{v_1, v_3\}$ . Casualmente os conjuntos independentes e as coberturas são iguais, porém isto não é uma regra.

A versão geral deste processo é definida da seguinte maneira. Se  $G = (V, A)$  é um pseudografo ou multigrafo, devemos considerar seu grafo simples subjacente. Para cada vértice  $v \in V$ , é criada uma variável lógica  $\dot{v}$  e para cada aresta  $a = \{v_i, v_j\} \in A$  é criada a seguinte soma lógica  $(\dot{v}_i + \dot{v}_j)$  a partir das variáveis lógicas associadas aos vértices da aresta. Usando o produto de variáveis lógicas definido por

$$\bigwedge_{i=m}^n \dot{v}_i = \dot{v}_m \cdot \dot{v}_{m+1} \cdot \dots \cdot \dot{v}_{n-1} \cdot \dot{v}_n$$

calculamos

$$\bigwedge_{(v_i, v_j) \in A} (\dot{v}_i + \dot{v}_j) \quad (5.1)$$

Lembrando que as operações  $\cdot$  e  $+$  correspondem às operações lógicas *e* e *ou*, respectivamente. Esta expressão possuirá vários produtos do seguinte tipo  $(\dot{v}_i + \dot{v}_j) \cdot (\dot{v}_k + \dot{v}_m)$ , que através da lei da distributividade<sup>3</sup> da operação *e*, se tornará  $\dot{v}_i \cdot \dot{v}_k + \dot{v}_i \cdot \dot{v}_m + \dot{v}_j \cdot \dot{v}_k + \dot{v}_j \cdot \dot{v}_m$ , ou simplesmente,  $\dot{v}_i \dot{v}_k + \dot{v}_i \dot{v}_m + \dot{v}_j \dot{v}_k + \dot{v}_j \dot{v}_m$ , para facilitar a visualização.

Quando um vértice  $v_i$  for adjacente a vários vértices, ele participará de várias somas lógicas neste produto. Sem perda de generalidade, considere os vértices ordenados  $w_1, w_2, \dots, w_m$  que correspondem aos  $m$  vizinhos<sup>4</sup> de  $v_i$ , i.e.,  $w_i \in \tau(v_i)$ . Focando apenas em  $v_i$  e sua vizinhança teremos o seguinte produto lógico

$$\bigwedge_{j=1}^m (\dot{v}_i + \dot{w}_j) = \dot{v}_i + \bigwedge_{j=1}^m \dot{w}_j \quad (5.2)$$

Em algumas situações, teremos várias variáveis lógicas participando de diversas somas ao invés de apenas uma. Este é o caso do cálculo dos conjuntos

<sup>3</sup>A lei da distributividade diz que  $p \vee (r \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee q)$  e que  $p \wedge (r \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge q)$  para quaisquer proposições lógicas  $p, r$  e  $q$ .

<sup>4</sup>A ordem é imposta apenas para facilitar a compreensão do processo, pois dois vértices consecutivos  $w_i$  e  $w_{i+1}$  podem corresponder a dois vértices no grafo original  $v_k$  e  $v_l$ , com  $|k - l| > 1$ , i.e., com índices não consecutivos.

dominantes minimais como veremos na Seção 5.2.3. Neste caso, teremos o seguinte produto lógico

$$\bigwedge_{j=1}^k (\dot{S} + \dot{R}_j) = \dot{S} + \bigwedge_{j=1}^k \dot{R}_j \quad (5.3)$$

onde

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^s \dot{s}_i \quad \text{e} \quad \dot{R}_j = \sum_{l=1}^{r_j} \dot{r}_{j,l}$$

e  $k$  é a quantidade de termos que possuem em comum a soma lógica  $\dot{S}$  constituída das variáveis lógicas  $\dot{s}_i$ , com  $1 \leq i \leq s$ . Enquanto que o termo  $\dot{R}_j$  representa a soma das variáveis restantes no  $j$ -ésimo termo composta pelas variáveis  $\dot{r}_{j,l}$ , com  $1 \leq l \leq r_j$ , onde  $r_j$  representa a quantidade de variáveis que não participam de  $\dot{S}$  no  $j$ -ésimo termo. Esta quantidade pode variar para cada termo, pois podemos encontrar termos distintos cujas somas restantes possuem tamanhos diferentes. A ordem imposta nos índices das variáveis constituintes de  $\dot{S}$  e  $\dot{R}_j$  visa apenas facilitar a compreensão do processo pois duas variáveis consecutivas, como por exemplo,  $\dot{s}_i$  e  $\dot{s}_{i+1}$  podem corresponder a dois vértices no grafo original  $v_k$  e  $v_l$  com índices não consecutivos. Um caso particular deste produtório é o seguinte

$$\dot{S} \bigwedge_{j=1}^{k-1} (\dot{S} + \dot{R}_j) = \dot{S} \quad (5.4)$$

onde  $\dot{S}$  participa como sub-soma em vários termos e como um termo integralmente.

Após sucessivas aplicações das leis da álgebra booleana (distributividade, absorção, idempotência, etc.) no produtório da Equação 5.1, encontramos um somatório de termos, onde cada termo permite extrair as coberturas minimais de vértices. Considere o  $n$ -ésimo termo  $P_n = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_l\}$ , representado na forma de conjunto, onde  $p_k$  é a  $k$ -ésima variável do termo. A cobertura de vértices minimal  $C_n$  associada ao conjunto  $P_n$  é formada por todos os vértices  $v_j \in V$ , tal que a variável  $\dot{v}_j \in P_n$ , ou seja, a variável associada ao vértice  $v_j$  aparece no termo. Formalmente, a cobertura  $C_n$  é definida como

$$C_n = \{v \in V \mid \dot{v} \in P_n\}$$

De forma similar ao ilustrado no exemplo no início desta seção, a obtenção do conjunto independente maximal é direta. Para cada cobertura  $C_n$ , o

conjunto independente maximal  $I_n = V - C_n$ . Se consideramos novamente o  $n$ -ésimo termo  $P_n$ , o conjunto independente maximal é formado por todos os vértices  $v_j \in V$ , tal que a variável  $\dot{v}_j \notin P_n$ , ou seja, a variável associada ao vértice  $v_j$  não aparece no termo. Formalmente

$$I_n = \{v \in V \mid \dot{v} \notin P_n\}$$

Para sabermos se o resultado da simplificação não produziu conjuntos que não sejam maximais, temos que verificar se dados dois termos  $P_j$  e  $P_k$ , as variáveis de um termo aparecem completamente no outro termo. Se  $P_j \subseteq P_k$ , então  $P_k$  produzirá uma cobertura de vértices que não é minimal (vice-versa). Este princípio pode ser utilizado durante a fase intermediária do processo para remover termos que sabidamente gerarão conjuntos independentes não maximais. Como a relação entre cliques e conjuntos independentes é direta. A obtenção dos cliques de um grafo  $G$  é feita obtendo os conjuntos independentes maximais em  $\bar{G}$ . Como sabemos, o conjunto independente em  $G$  é um clique em  $\bar{G}$ , e um clique em  $G$  é um conjunto independente em  $\bar{G}$ .

## 5.2 Enumeração em Grafos

Esta seção apresenta o uso do método de Maghout para o cálculo de coberturas de vértices, conjuntos independentes, conjuntos dominantes e emparelhamentos. Em todos os casos, selecionamos grafos e dígrafos para exemplificar a aplicação do método.

### 5.2.1 Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes

A partir da descrição anterior, vamos aplicar o método de Maghout no grafo  $G = (V, A)$  ilustrado na Figura 5.1. Os vértices  $a - e$  serão representados por  $A - E$ , respectivamente. Usando a Equação 5.1 encontramos o seguinte produto

$$(A + B)(B + D)(B + C)(A + E)(D + E)(D + C) \quad (5.5)$$

O desenvolvimento deste produto pode ser feito por partes começando pelas variáveis que aparecem com mais frequência nas somas, i.e., pela variável associada ao vértice com maior grau. Neste caso, temos os vértices  $b$  e  $d$ . Selecionamos um deles por exemplo, o vértice  $b$ , e focamos o desenvolvimento

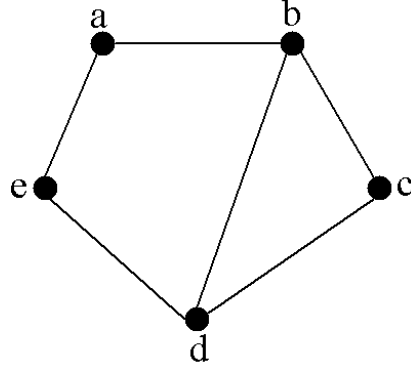


Figura 5.1: Grafo exemplo

no produto das somas que contêm  $B$ , ou seja, em  $(A + B)(B + D)(B + C)$ . Para facilitar a visualização das operações realizadas destacaremos os termos usados a cada passo, colocando-os em negrito.

$$(\mathbf{A+B})(\mathbf{B+D})(B+C) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(AB+AD+\mathbf{BB+BD})(B+C) \Rightarrow \text{idempotência}$$

$$(\mathbf{AB+B+BD+AD})(B+C) \Rightarrow \text{absorção}$$

$$(\mathbf{B+AD})(B+C) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(\mathbf{BB+BC+ABD+ACD}) \Rightarrow \text{idempotência}$$

$$(\mathbf{B+BC+ABD+ACD}) \Rightarrow \text{absorção}$$

$$(B+ACD)$$

Notem que o resultado encontrado é o mesmo aplicando a Equação 5.2 em  $(A + B)(B + D)(B + C)$ . Usando a Equação 5.2 no produto  $(A + E)(D + E)$  temos  $E + AD$ . Compondo os resultados e continuando o processo temos os seguintes passos

$(A+B)(B+D)(B+C)(A+E)(D+E)(D+C) \Rightarrow$	Equação 5.2
$(\mathbf{B+ACD})(\mathbf{E+AD})(D+C) \Rightarrow$	distributividade
$(BE+ABD+\mathbf{ACDE+ACD})(E+AD)(D+C) \Rightarrow$	absorção
$(BE+ABD+ACD)(\mathbf{E+AD})(\mathbf{D+C}) \Rightarrow$	distributividade
$(BE+ABD+ACD)(DE+CE+\mathbf{AD+ADC}) \Rightarrow$	absorção
$(\mathbf{BE+ABD+ACD})(\mathbf{DE+CE+AD}) \Rightarrow$	distributividade
$(BDE+BCE+\mathbf{ABDE+ABDE+ABCDE+}$ $\mathbf{ABD+ACDE+ACDE+ACD}) \Rightarrow$	absorção
$(BDE+BCE+ABD+\mathbf{ACDE+ACDE+ACD}) \Rightarrow$	absorção
$(BDE+BCE+ABD+ACD)$	

Após esta simplificação, devemos verificar se ainda existe algum termos que pode ser absorvido por outro. Se isto não for possível, então chegamos ao resultado final. Como temos quatro termos, o grafo possui as seguintes quatro coberturas minimais de vértices.

**Coberturas  
Minimais de  
Vértices**

$$C_1 = \{b, d, e\}, C_2 = \{b, c, e\}, C_3 = \{a, b, d\}, C_4 = \{a, c, d\}$$

Logo, temos número de cobertura de vertices  $\beta(G) = 3$ . O conjunto independente maximal  $I_n$  é obtido por  $I_n = V - C_n$ . Portanto, temos os seguintes conjuntos independentes maximais

**Conjuntos Inde-  
pendentes Maxi-  
mais**

$$I_1 = \{a, c\}, I_2 = \{a, d\}, I_3 = \{c, e\}, I_4 = \{b, e\}$$

e número de independência do grafo  $\alpha(G) = 2$ .

### 5.2.2 Cliques

A aplicação do método de Maghout para o cálculo de cliques é direta. Se queremos calcular os cliques de um grafo  $G$ , devemos encontrar os conjuntos

independentes maximais presentes em  $\bar{G}$ . Isto nos levará diretamente aos cliques em  $G$ . Portanto dado o grafo  $G$  ilustrado na Figura 5.1, primeiramente temos que calcular o complemento de  $G$ . O grafo  $\bar{G}$  é ilustrado na Figura 5.2.

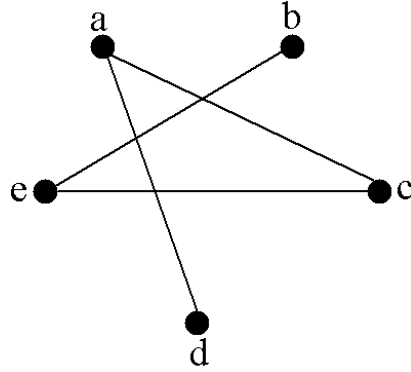


Figura 5.2: Complemento do grafo ilustrado na Figura 5.1

Em seguida, é realizado o mesmo processo apresentado na seção anterior. A partir de  $\bar{G}$ , realizamos as seguintes operações

$$(A+D)(A+C)(C+E)(E+B) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.2}$$

$$(A+CD)(E+BC) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$AE+ABC+CDE+BCD$$

Os termos encontrados correspondem às seguintes *coberturas minimais* de vértices

$$\{a, e\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d\}$$

A partir destas coberturas encontramos os seguintes *conjuntos independentes maximais* em  $\bar{G}$ ,

$$\{b, c, d\}, \{d, e\}, \{a, b\}, \{a, e\}$$

que correspondem aos cliques maximais em  $G$ . Isto nos leva ao número de clique do grafo igual a  $\omega(G) = 3$ .

### 5.2.3 Conjunto dominante

O uso do método de Maghout para o cálculo dos conjuntos dominantes em grafos segue uma lógica muito similar àquela descrita na Seção 5.1. É importante considerar que para o cálculo da cobertura de vértices, criamos uma soma lógica  $\dot{u} + \dot{v}$  para cada aresta  $\{u, v\}$ . Esta soma indica que podemos selecionar ou o vértice  $u$  ou o vértice  $v$  para compor a cobertura de vértices. Este mesmo processo de escolha será usado para o cálculos dos conjuntos dominantes maximais.

Dado o grafo  $G = (V, A)$ , ilustrado na Figura 5.1, para cada vértice criaremos uma variável lógica. Neste caso, os vértices  $a - f$  estão associados às variáveis lógicas  $A - F$ , respectivamente. Em seguida, para cada vértice  $v$  criamos uma soma lógica contendo todas as variáveis dos vértices que são dominadas por  $v$ <sup>5</sup>. Por exemplo, para o vértice  $a$ , criamos a seguinte soma lógica

$$(A + B + E)$$

para o vértice  $b$  temos a seguinte soma  $(A + B + C + D)$ , e assim por diante. Portanto para este grafo temos o seguinte produto destacando o vértice dominante embaixo da sua respectiva soma lógica.

$$\underbrace{(A + B + E)}_a \underbrace{(A + B + C + D)}_b \underbrace{(B + C + D)}_c \underbrace{(B + C + D + E)}_d \underbrace{(A + D + E)}_e$$

Em seguida realizamos os seguintes passos

$$\begin{aligned} & (A+B+E)(A+B+C+D)(B+C+D)(B+C+D+E) \\ & (A+D+E) \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{Equação 5.3}$$

$$(A+E+BD)(A+B+C+D)(B+C+D)(B+C+D+E) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.4}$$

$$(A+E+BD)(B+C+D) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$AB+AC+AD+BE+CE+DE+BD+BCD+BD \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$AB+AC+AD+BE+CE+DE+BD$$

---

<sup>5</sup>Um vértice  $v$  domina um vértice  $u$ , se existe a aresta  $\{v, u\}$  no conjunto de arestas do grafo. Além disso, é importante considerar que  $v$  domina a si próprio.

Cada termo encontrado representa um conjunto dominante minimal composto pelos vértices que têm suas variáveis lógicas presentes no termo. Portanto, a partir deste resultado temos os seguintes dominantes para  $G$

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{b, d\}$$

os quais indicam que o número de dominância de  $G$  é igual a  $\gamma(G) = 2$ .

### 5.2.4 Emparelhamento

Na Seção 4.5, discutimos a relação entre emparelhamento maximal e conjunto independente maximal. Vimos que um emparelhamento máximo em um grafo  $G$  corresponde a um conjunto independente maximal no grafo linha  $L(G)$ . Usando esta relação, aplicaremos o método de Maghout no grafo linha  $L(G)$  ao invés de utilizá-lo diretamente no grafo  $G$  original para enumerar todos os seus emparelhamentos maximais.

Para facilitar a compreensão do método, rerepresentamos o grafo  $G = (V, A)$  da Figura 4.13 na Figura 5.3(a), dando ênfase às suas arestas. A Figura 5.3(b) mostra o grafo linha  $L(G) = (V_L, A_L)$  associado a  $G$ . As arestas de  $G$  possuem rótulos  $a - j$  que serão usados como rótulos dos vértices correspondentes em  $L(G)$ . Dois vértices em  $L(G)$  são adjacentes se compartilham vértices em  $G$ . Por exemplo, as arestas  $a$  e  $b$  em  $G$  compartilham vértices, logo os vértices correspondentes são adjacentes em  $L(G)$ , como podemos ver na Figura 5.3(b). Por outro lado, como as arestas  $a$  e  $c$  não compartilham vértices, seus vértices  $a, c \in V_L$  correspondentes em  $L(G)$  não são adjacentes.

De forma similar ao apresentado na seção anterior, a partir do grafo  $L(G)$ , criaremos as variáveis lógicas  $A - J$  que estarão associadas aos vértices  $a - j$ , respectivamente. Em seguida, para cada aresta  $(u, v) \in A_L$  criamos a seguinte soma lógica  $U + V$  e realizamos o produto das somas lógicas associadas às arestas de  $L(G)$ . Este produto é ilustrado abaixo

$$\begin{aligned} &(A+B)(A+F)(A+J)(A+E)(B+F)(B+G)(B+C)(C+G)(C+H)(C+D) \\ &(D+H)(D+I)(D+E)(E+I)(E+J)(J+F)(J+G)(J+H)(J+I)(F+G)(F+H) \\ &(F+I)(G+H)(G+I)(H+I)(I+J) \end{aligned}$$

Como este produto possui vários termos, iremos focar inicialmente apenas em algumas partes. Por exemplo, aplicando a Equação 5.2 nas somas que possuem em comum a variável  $F$  obtemos

$$F + ABGHIJ$$



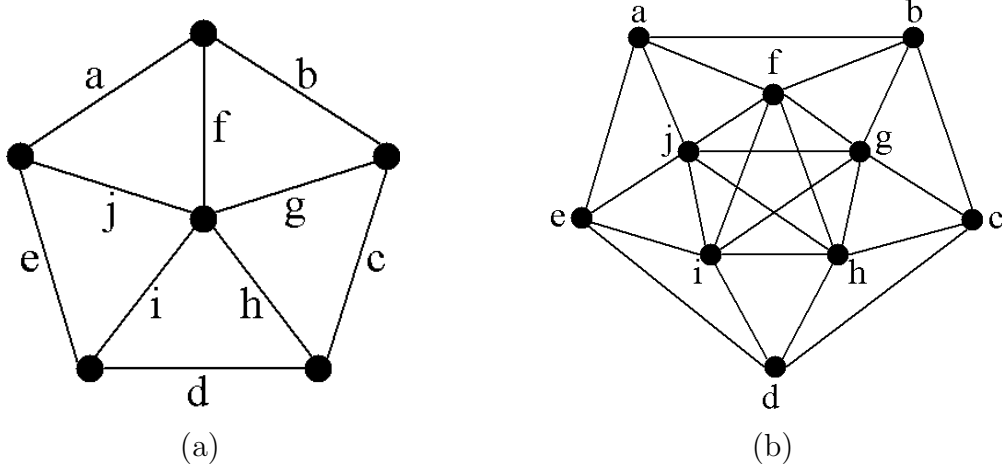


Figura 5.3: Grafo Roda (a)  $W_5$  e seu grafo linha (b)  $L(W_5)$  correspondente.

Realizando o mesmo processo porém focando nos vértices  $G, H, I$  e  $J$ , encontramos  $G + BCHIJ$ ,  $H + CDIJ$ ,  $I + DEJ$  e  $J + AE$  respectivamente. O produto original se transforma em

$$\underbrace{(A+B)(A+E)(B+C)(C+D)(D+E)}_{P_1} \underbrace{(F+ABGH IJ)(G+BCH IJ)(H+CD IJ)(I+DEJ)(J+AE)}_{P_2}$$

ou seja,  $P_1.P_2$ . Podemos simplificar  $P_1$ , através dos seguintes passos

$$(A+B)(A+E)(B+C)(C+D)(D+E) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(A+BE)(B+C)(C+D)(D+E) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(A+BE)(C+BD)(D+E) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(AC+ABD+BCE+BDE)(D+E) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$\begin{aligned} &ACD+ACE+ABD+ABDE+BCDE+ BDE+BDE \Rightarrow \text{absorção} \\ &ACD+ACE+ABD+BCE+BDE \end{aligned}$$

Realizando o mesmo processo com  $P_2$ , temos

$$\begin{array}{l} (\mathbf{F+ABGHIJ})(\mathbf{G+BCHIJ})(\mathbf{H+CDIJ}) \\ (\mathbf{I+DEJ})(\mathbf{J+AE}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{distributividade}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ+ABCGHIJ}) \\ (\mathbf{H+CDIJ})(\mathbf{I+DEJ})(\mathbf{J+EA}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{absorção}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ})(\mathbf{H+CDIJ}) \\ (\mathbf{I+DEJ})(\mathbf{J+AE}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{distributividade}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ}) \\ (\mathbf{HI+DEHJ+CDIJ+CDEIJ})(\mathbf{J+AE}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{absorção}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ}) \\ (\mathbf{HI+DEHJ+CDIJ})(\mathbf{J+AE}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{distributividade}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ}) \\ (\mathbf{HIJ+HIEA+DEHJ+DEHJA+CDIJ+CDIJE}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{absorção}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ}) \\ (\mathbf{HIJ+HIEA+DEHJ+DEHJA+CDIJ}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{absorção}$$

$$\begin{array}{l} (\mathbf{FG+BCFHIJ+ABGHIJ}) \\ (\mathbf{HIJ+HIEA+DEHJ+CDIJ}) \Rightarrow \end{array} \quad \text{distributividade}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{FGHIJ+FGHIEA+FGDEHJ+FGCDIJ+BCFHIJ+} \\ \mathbf{BCFHIJEA+BCFHIJDE+BCFHIJD+ABGHIJ} \\ \mathbf{+ABGHIJE+ABGHIJDE+ABGHIJCD} \Rightarrow \end{array} \quad \text{absorção}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{FGHIJ+FGHIEA+FGDEHJ+FGCDIJ+BCFHIJ+} \\ \mathbf{BCFHIJEA+BCFHIJDE+BCFHIJD+ABGHIJ} \Rightarrow \end{array} \quad \text{absorção}$$

$$\mathbf{FGHIJ+FGHIEA+FGDEHJ+FGCDIJ+BCFHIJ+ABGHIJ}$$

O cálculo de  $P_1.P_2$  resulta nos seguintes passos. Devido à quantidade de termos manipulados a cada passo, omitimos o nome das operações aplicadas, entretanto, continuamos destacados os termos usados nas operações.

$$(ACD+ACE+ABD+BCE+BDE) \\ (FGHIJ+AEFGHI+DEFGHJ+CDFGIJ+BCFHJI+ABGHIJ)\Rightarrow$$
$$\begin{aligned} & \mathbf{ACDFGHIJ} + \mathbf{ACEFGHIJ} + \mathbf{ABDFGHIJ} + \mathbf{BCEFGHIJ} + \mathbf{BDEFGHIJ} + \\ & \mathbf{ACDEFGHI} + \mathbf{ACEFGHI} + \mathbf{ABDEFGHI} + \mathbf{ABCEFGHI} + \mathbf{ABDEFGHI} + \\ & \mathbf{ACDEFGHJ} + \mathbf{ACDEFGHJ} + \mathbf{ABDEFGHJ} + \mathbf{BCDEFGHJ} + \mathbf{BDEFGHJ} + \\ & \mathbf{ACDFGIJ} + \mathbf{ACDEFGIJ} + \mathbf{ABCDFGIJ} + \mathbf{BCDEFGIJ} + \mathbf{BCDEFGIJ} + \\ & \mathbf{ABCDFHIJ} + \mathbf{ABCEFHIJ} + \mathbf{ABCDFHIJ} + \mathbf{BCEFHIJ} + \mathbf{BCDEFHIJ} + \\ & \mathbf{ABCDGHIJ} + \mathbf{ABCEGHIJ} + \mathbf{ABDGHIJ} + \mathbf{ABCEGHIJ} + \mathbf{ABDEGHIJ} \Rightarrow \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & \text{ACEFGHIJ} + \text{ABDFGHIJ} + \text{BCEFGHIJ} + \text{BDEFGHIJ} + \\ & \text{ACDEFGHI} + \text{ACEFGHI} + \mathbf{ABDEFGHI} + \text{ABCEFGHI} + \mathbf{ABDEFGHI} + \\ & \text{ACDEFGHJ} + \text{ACDEFGHJ} + \text{ABDEFGHJ} + \text{BCDEFGHJ} + \text{BDEFGHJ} + \\ & \text{ACDFGIJ} + \text{BCDEFGIJ} + \text{BCDEFGIJ} + \\ & \text{ABCD FHIJ} + \text{ABCE FHIJ} + \text{ABCD FHIJ} + \text{BCE FHIJ} + \text{BCDE FHIJ} + \\ & \text{ABCD GHIJ} + \text{ABCE GHIJ} + \text{ABD GHIJ} + \text{ABCE GHIJ} + \text{ABDE GHIJ} \Rightarrow \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} & \text{ACEFGHIJ} + \text{ABDFGHIJ} + \text{BCEFGHIJ} + \mathbf{BDEFGHIJ} + \\ & \text{ACDEFGHI} + \text{ACEFGHI} + \text{ABDEFGHI} + \text{ABCEFGHI} + \\ & \text{ACDEFGHJ} + \text{ACDEFGHJ} + \mathbf{ABDEFGHJ} + \mathbf{BCDEFGHJ} + \mathbf{BDEFGHJ} + \\ & \text{ACDFGIJ} + \text{BCDEFGIJ} + \text{BCDEFGIJ} + \\ & \text{ABCDFHIJ} + \text{ABCEFHIJ} + \text{ABCDFHIJ} + \text{BCEFHIJ} + \text{BCDEFHIJ} + \\ & \text{ABCDGHIJ} + \text{ABCEGHIJ} + \text{ABDGHIJ} + \text{ABCEGHIJ} + \text{ABDEGHIJ} \Rightarrow \end{aligned}$$

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+BCEFGHIJ+  
ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+  
ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+  
ACDFGIJ+**BCDEFGIJ**+**BCDEFGIJ**+  
ABCDFHIJ+ABCEFHIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+BCDEFHIJ+  
ABCDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHIJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

$$\begin{aligned} & \text{ACEFGHIJ} + \text{ABDFGHIJ} + \mathbf{BCEFGHIJ} + \\ & \text{ACDEFGHI} + \text{ACEFGHI} + \text{ABDEFGHI} + \text{ABCEFGHI} + \\ & \text{ACDEFGHJ} + \text{ACDEFGHJ} + \text{BDEFGHJ} + \\ & \text{ACDFGIJ} + \text{BCDEFGIJ} + \\ & \text{ABCDFHIJ} + \mathbf{ABCEFHJ} + \text{ABCDFHIJ} + \mathbf{BCEFHJ} + \mathbf{BCDEFHIJ} + \\ & \text{ABCDGHIJ} + \text{ABCEGHIJ} + \text{ABDGHIJ} + \text{ABCEGHIJ} + \text{ABDEGHIJ} \Rightarrow \end{aligned}$$

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+  
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+  
 ACDEFGHJ+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+  
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+  
**ABCD FHIJ+ABCD FHIJ**+BCEFHIJ+  
 ABCDGHJ+ABCEGHIJ+ABDGHJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

ACEFGHIJ+ABDFGHIJ+  
 ACDEFGHI+ACEFGHI+ABDEFGHI+ABCEFGHI+  
**ACDEFGHJ+ACDEFGHJ**+BDEFGHJ+  
 ACDFGIJ+BCDEFGIJ+  
 ABCDFHIJ+BCEFHIJ+  
 ABCDGHJ+ABCEGHIJ+ABDGHJ+ABCEGHIJ+ABDEGHIJ⇒

**ACEFGHIJ**+ABDFGHIJ+  
**ACDEFGHI+ACEFGHI**+ABDEFGHI+**ABCEFGHI**+  
 ACDEFGHJ+BDEFGHJ+  
 ACDFGIJ+ BCDEFGIJ  
 ABCDFHIJ+ BCEFHIJ  
 ABCDGHJ+ ABCEGHIJ+ ABDGHJ+ ABCEGHIJ+ ABDEGHIJ⇒

**ABDFGHIJ**+  
 ACEFGHI+ABDEFGHI+  
 ACDEFGHJ+BDEFGHJ+  
 ACDFGIJ+ BCDEFGIJ  
 ABCDFHIJ+ BCEFHIJ  
**ABCDGHJ+ ABCEGHIJ+ ABDGHJ+ ABCEGHIJ+ ABDEGHIJ**⇒

ACEFGHI+ABDEFGHI+  
 ACDEFGHJ+BDEFGHJ+  
 ACDFGIJ+ BCDEFGIJ  
 ABCDFHIJ+ BCEFHIJ  
**ABCEGHIJ+ ABDGHJ+ ABCEGHIJ**⇒

ACEFGHI+ABDEFGHI+ACDEFGHJ+BDEFGHJ+ACDFGIJ+  
 BCDEFGIJ+ABCDFHIJ+BCEFHIJ+ABCEGHIJ+ABDGHJ

Baseado no processo descrito na Seção 5.2.1, sabemos que os termos acima representam as seguintes coberturas de vértices minimais em  $L(G)$ .

$$\begin{aligned} &\{a, c, e, f, g, h, i\}, \{a, b, d, e, f, g, h, i\}, \{a, c, d, e, f, g, h, j\}, \{b, d, e, f, g, h, j\}, \\ &\{a, c, d, f, g, i, j\}, \{b, c, d, e, f, g, i, j\}, \{a, b, c, d, f, h, i, j\}, \{b, c, e, f, h, i, j\}, \\ &\{a, b, c, e, g, h, i, j\}, \{a, b, d, g, h, i, j\} \end{aligned}$$

Os conjuntos independentes são obtidos calculando  $V_L - C$ , para cada cobertura  $C$ . Portanto, os conjuntos independentes maximais de  $L(G)$  são

$$\{b, d, j\}, \{c, j\}, \{b, i\}, \{a, c, i\}, \{b, e, h\}, \{a, h\}, \{e, g\}, \{a, d, g\}, \{d, f\}, \{c, e, f\}$$

os quais correspondem aos emparelhamentos maximais em  $G$ . Observe que  $\alpha(L(G)) = \alpha'(G) = 3$ , i.e, o número de independência de  $L(G)$  é igual ao tamanho do maior emparelhamento em  $G$ .

## 5.3 Enumeração em Dígrafos

Nesta seção aplicamos o método de Maghout em dígrafos para obter as coberturas de vértices, conjuntos independentes, cliques, conjuntos dominantes (entrada, saída e gêmeos) e emparelhamentos. Em todos os casos, selecionamos um dígrafo e aplicamos o método apresentando passo a passo as operações realizadas. Em algumas situações re-aproveitamos os resultados já calculados na seção anterior, que é o caso da seção de emparelhamento.

### 5.3.1 Coberturas de Vértices e Conjuntos Independentes

A aplicação do método de Maghout em dígrafos é direta. Independente se o dígrafo é simples ou não, utilizamos seu grafo *simples* subjacente. Note que o grafo subjacente a um multígrafo direcionado é um multígrafo. Podemos aplicar o método neste grafo, porém existirá redundância de esforço já que múltiplas arestas entre um mesmo par de vértices irão aparecer várias vezes no produtório. Para minimizar isto utilizamos o grafo subjacente ao multígrafo que é simples. Por exemplo, o dígrafo  $D = (V, A)$  da Figura 4.2(a)

**Grafo Simples  
Subjacente**

possui os seguintes grafos: o grafo subjacente ao dígrafo, que é um multigrafo, e o grafo subjacente a este multigrafo. Estes grafos são ilustrados nas Figuras 5.4(a) e (b), respectivamente. O produtório da Equação 5.1 para o multigrafo na Figura 5.4(a) é

$$(\dot{1} + \dot{3})^2(\dot{1} + \dot{5})^2(\dot{5} + \dot{3})^2(\dot{2} + \dot{3})^2(\dot{2} + \dot{4})^2(\dot{2} + \dot{6})^2(\dot{3} + \dot{4})^2(\dot{3} + \dot{6})^2(\dot{4} + \dot{6})^2(\dot{1} + \dot{2})(\dot{5} + \dot{6})$$

onde

$$(\dot{v} + \dot{u})^k = \underbrace{(\dot{v} + \dot{u})(\dot{v} + \dot{u}) \dots (\dot{v} + \dot{u})}_{k \text{ vezes}}$$

e  $k$  corresponde à multiplicidade da aresta  $\{v, u\}$ . Enquanto que para o grafo ilustrado na Figura 5.4(b), temos

$$(\dot{1} + \dot{3})(\dot{1} + \dot{5})(\dot{5} + \dot{3})(\dot{2} + \dot{3})(\dot{2} + \dot{4})(\dot{2} + \dot{6})(\dot{3} + \dot{4})(\dot{3} + \dot{6})(\dot{4} + \dot{6})(\dot{1} + \dot{2})(\dot{5} + \dot{6})$$

Usando a simplificação mostrada na Equação 5.2 juntamente com a lei de idempotência do operador lógico  $e$ , é possível mostrar que as expressões para o multigrafo e para grafo são equivalentes. Portanto, aplicando o método de Maghout na expressão acima temos a seguinte seqüência de passos.

$$(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{3}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{3}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{3}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{6}}) \\ (\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{4}} + \dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{2}})(\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{6}}) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{4}} + \dot{\mathbf{6}}) \\ (\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{2}})(\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{6}}) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{2}}) \Rightarrow \quad \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{\mathbf{3}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{idempotência}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}})(\dot{\mathbf{1}} + \dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}) \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$(\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}})(\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{4}}) \Rightarrow \quad \text{distributividade}$$

$$\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \\ \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} \Rightarrow \quad \text{idempotência}$$

$$\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \\ \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} \Rightarrow \quad \text{absorção}$$

$$\dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{6}} + \dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{3}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}} + \dot{\mathbf{1}}\dot{\mathbf{2}}\dot{\mathbf{4}}\dot{\mathbf{5}}\dot{\mathbf{6}}$$

Após este processo, obtivemos cinco termos indicando que temos as seguintes coberturas de vértices minimais

$$\{1, 2, 3, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

A obtenção dos conjuntos independentes maximais é feita como mostrada na seção anterior. Dada uma cobertura minimal de vértices  $C$ , o conjunto independente maximal é  $V - C$ . Logo, os conjuntos independentes maximais de  $D$  são

$$\{4, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 6\}, \{3\}$$

e o número de independência do dígrafo é  $\alpha(D) = 2$ .

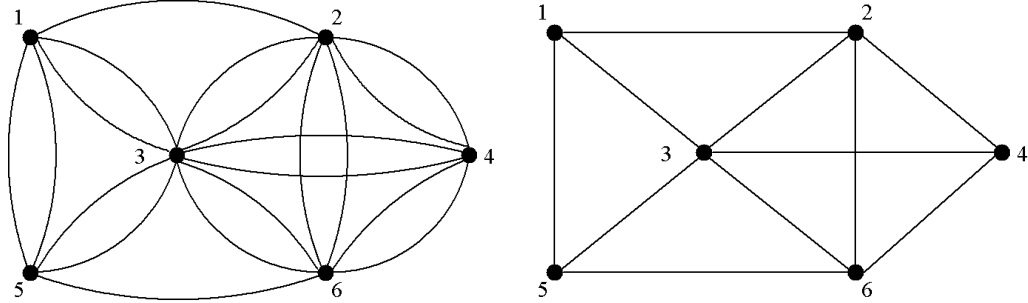


Figura 5.4: Enumeração de Conjuntos Independentes em Dígrafos. (a) grafo subjacentes e (b) grafo simples subjacente ao dígrafo ilustrado na Figura 4.2

### 5.3.2 Cobertura de Fonte e Sumidouro

Como as coberturas de fonte e sumidouro podem ser obtidas diretamente a partir dos arcos do dígrafo, o método de Maghout não é utilizado nesta seção. Dado um dígrafo  $D = (V, A)$ , as coberturas de fonte e sumidouro  $C_f \subseteq V$  e  $C_s \subseteq V$ , respectivamente, correspondem a subconjuntos de vértices tal que para todo arco  $(u, v) \in A$ ,  $u \in C_f$  e  $v \in C_s$ , i.e., para cada arco, o vértice origem compõe a cobertura de fonte enquanto que o vértice destino compõe a cobertura de sumidouro. Note que o fato de  $v \in C_f$ , não implica que  $v$  é um vértice fonte. Isto indica apenas que existem arcos que têm  $v$  como origem. A mesma idéia está relacionada aos vértices em  $C_s$ .

Para ilustrar estas coberturas, considere os dígrafos ilustrados na Figura 5.5. Para o dígrafo  $D_1$  em (a), as coberturas de fonte e de sumidouro são  $C_f = \{a, e\}$  e  $C_s = \{b, c, d, f\}$ , respectivamente. Como  $C_f \cap C_s = \emptyset$ , logo  $D_1$  é um dígrafo bipartido direcionado com as partições definidas por  $C_f$  e  $C_s$ . Neste caso, para cada arco  $(u, v)$ ,  $u$  é *vértice fonte* e  $v$  é *vértice sumidouro*. Para o dígrafo  $D_2$  em (b),  $C_f = \{a, b, e\}$  e  $C_s = \{c, d, e, f\}$ .  $D_2$  é um dígrafo bipartido, pois seu grafo subjacente é bipartido possuindo os seguintes conjuntos independentes  $\{a, e\}$  e  $\{b, c, d, f\}$ . Todavia,  $D_2$  não é bipartido direcionado pois  $C_f \cap C_s \neq \emptyset$ , i.e.,  $D_2$  não possui apenas vértices fonte e sumidouro. O dígrafo  $D_3$  em (c), possui  $C_f = \{a, b, c, d, e\}$  e  $C_s = \{a, b, c, d, f\}$ . Este dígrafo não é bipartido, pois o grafo subjacente possui ciclos de tamanho 3. Ele é um dígrafo 3-partido cujo conjunto de vértices pode ser dividido nas seguintes partições  $\{a, e\}$ ,  $\{b, d\}$  e  $\{c, f\}$ .



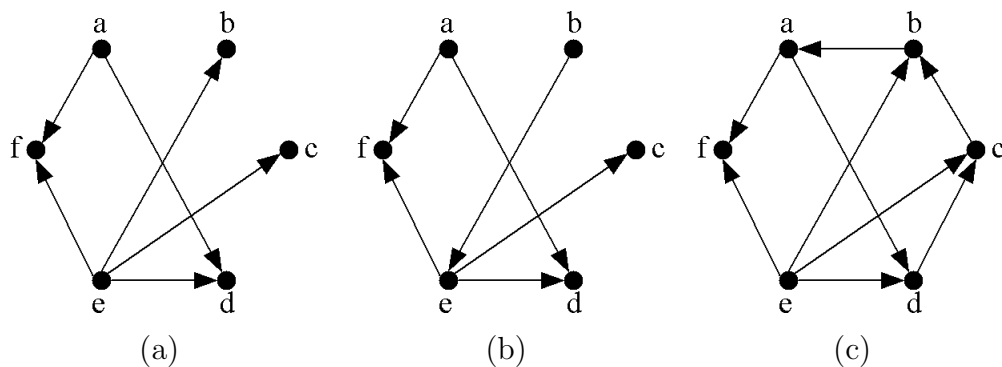


Figura 5.5: Cobertura de Fonte e Sumidouro

### 5.3.3 Cliques

O cálculo de cliques maximais em dígrafos é similar ao cálculo realizado para grafos. Inicialmente calculamos o complemento do dígrafo e encontramos seu grafo simples subjacente, pelos motivos apresentados na Seção 5.3.1. Em seguida aplicamos o método de maghout. Considere, o dígrafo  $D$ , ilustrado na Figura 4.2. O Complemento deste dígrafo  $\bar{D}$  e seu grafo simples subjacente, são ilustrados nas Figuras 5.6(a) e (b), respectivamente.

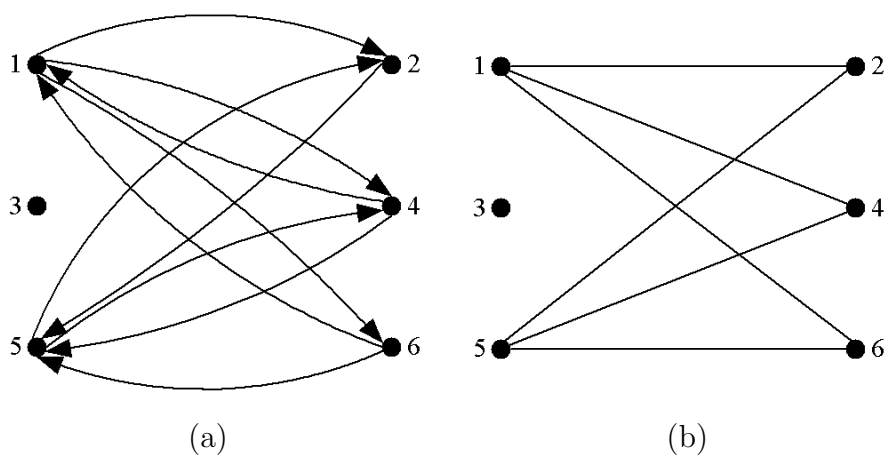


Figura 5.6: Enumeração de Cliques em Dígrafos. (a) Complemento e (b) grafo simples subjacente do dígrafo ilustrado na Figura 4.2.

A partir do grafo simples subjacente, temos os seguintes passos

$$(\dot{1} + \dot{2})(\dot{1} + \dot{4})(\dot{1} + \dot{6})(\dot{5} + \dot{2})(\dot{5} + \dot{4})(\dot{5} + \dot{6}) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$(\dot{1} + \dot{2}\dot{4}\dot{6})(\dot{5} + \dot{2}\dot{4}\dot{6}) \Rightarrow \text{Equação 5.2}$$

$$\dot{1}\dot{5} + \dot{2}\dot{4}\dot{6}$$

Os termos encontrados correspondem às seguintes cobertura de vértices minimais

$$\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}$$

Usando este resultado encontramos os seguintes conjuntos independentes maximais em  $\bar{D}$ ,

$$\{2, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$$

que correspondem aos cliques maximais em  $D$ . Logo, o número de clique do dígrafo é  $\omega(D) = 4$ .

### 5.3.4 Conjuntos Dominantes

O uso do método de Maghout para o cálculo dos conjuntos dominantes em dígrafos segue uma lógica muito similar àquela descrita na Seção 5.1. Inicialmente apresentaremos o cálculo dos conjuntos dominantes de entrada e em seguida mostraremos como os conjuntos dominantes de saída serão calculados. Finalizaremos com o cálculo dos conjuntos dominantes minimais gêmeos. É importante considerar que para o cálculo da cobertura de vértices, criamos uma soma lógica  $\dot{u} + \dot{v}$  para cada aresta  $\{u, v\}$ . Esta soma indica que podemos selecionar ou o vértice  $u$  ou o vértice  $v$  para compor a cobertura de vértices. Este mesmo processo de escolha será usado para o cálculos dos conjuntos dominantes maximais.

Dado o dígrafo  $D = (V, A)$ , ilustrado na Figura 4.10, para cada vértice criaremos uma variável lógica. Neste caso, os vértices  $a - f$  estão associados às variáveis lógicas  $A - F$ , respectivamente. Em seguida, para cada vértice  $v$  criamos uma soma lógica contendo todas as variáveis dos vértices que são dominadas por  $v$ <sup>6</sup>. Por exemplo, para o vértice  $a$ , criamos a seguinte soma lógica

$$(A + B + C)$$

---

<sup>6</sup>Um vértice  $v$  domina um vértice  $u$ , se existe o arco  $(v, u)$  no dígrafo. Além disso, é importante considerar que  $v$  domina a si próprio.

para o vértice  $b$  temos a seguinte soma  $(B + C + D)$ , e assim por diante. Portanto para este dígrafo temos o seguinte produto destacando o vértice dominante embaixo da sua respectiva soma lógica.

$$\underbrace{(A + B + C)}_a \underbrace{(B + C + D)}_b \underbrace{(A + B + C + E)}_c \underbrace{(B + D + F)}_d$$

$$\underbrace{(C + D + E + F)}_e \underbrace{(B + F)}_f$$

Em seguida realizamos os seguintes passos

$$(\mathbf{A+B+C})(\mathbf{B+C+D})(\mathbf{A+B+C+E})(\mathbf{B+D+F})$$

$$(\mathbf{C+D+E+F})(\mathbf{B+F}) \Rightarrow \text{Equação 5.4}$$

$$(\mathbf{A+B+C})(\mathbf{B+C+D})(\mathbf{B+D+F})(\mathbf{C+D+E+F})(\mathbf{B+F}) \Rightarrow \text{Equação 5.4}$$

$$(\mathbf{A+B+C})(\mathbf{B+C+D})(\mathbf{C+D+E+F})(\mathbf{B+F}) \Rightarrow \text{Equação 5.3}$$

$$(\mathbf{B+C+AD})(\mathbf{C+D+E+F})(\mathbf{B+F}) \Rightarrow \text{Equação 5.3}$$

$$(\mathbf{B+(C+AD)F})(\mathbf{C+D+E+F}) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$(\mathbf{B+CF+ADF})(\mathbf{C+D+E+F}) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$\mathbf{BC+BD+BE+BF+CF+CDF+CEF+CF+ACDF+}$$

$$+\mathbf{ADF+ADEF+ADF} \Rightarrow \text{absorção}$$

$$\mathbf{BC+BD+BE+BF+CF+ADF+ADEF+ADF} \Rightarrow \text{absorção}$$

$$\mathbf{BC+BD+BE+BF+CF+ADF}$$

Portanto, os conjuntos dominantes de entrada para  $D$  são

$$\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{a, d, f\}$$

**Conjuntos  
minantes  
Entrada** **Do-  
de**

e o número de dominância de entrada é  $\gamma^-(D) = 2$ . Calcular o conjunto dominante de saída a partir do conjunto dominante de entrada através de

$C_s = V - C_e$ , onde  $C_e$  é o conjunto dominante de entrada e  $C_s$  é o conjunto dominante de saída, pode levar a resultados incompletos ou não minimais. Por exemplo, os conjuntos obtidos a partir do resultado anterior são

$$\{a, d, e, f\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, d, f\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, e\}$$

Note que o conjunto  $\{a, d, e, f\}$  não corresponde a um conjunto minimal pois  $\{a, e\}$  é o conjunto dominante de saída minimal. Além disso, alguns conjuntos que compõem o resultado correto, como  $\{b, c, f\}$ , não aparecem. Este conjunto é dominante de saída e não é subconjunto próprio de outro conjunto.

Para obtermos os conjuntos dominantes de saída minimais, realizamos um processo similar ao exposto anteriormente. Porém ao invés de escrevermos para cada vértice  $v$  a soma lógica das variáveis que são dominadas por  $v$ , escrevemos a soma lógica das variáveis que dominam  $v$ . Para o mesmo dígrafo  $D$ , a soma associada ao vértice  $a$  é dada apenas por  $(A + C)$ . Em seguida realizamos o produto das somas obtidas para cada vértice. Isto resulta no seguinte produto

$$\underbrace{(A + C)}_a \underbrace{(A + B + C + D + F)}_b \underbrace{(A + B + C + E)}_c \underbrace{(B + D + E)}_d \underbrace{(C + E)}_e \underbrace{(D + E + F)}_f$$

Em seguida realizamos os seguintes passos

$$(A + C)(A + B + C + D + F)(A + B + C + E)(B + D + E)(C + E)(D + E + F) \Rightarrow \text{Equação 5.4}$$

$$(A + C)(B + D + E)(C + E)(D + E + F) \Rightarrow \text{Equação 5.3}$$

$$(A + C)(D + E + BF)(C + E) \Rightarrow \text{Equação 5.3}$$

$$(C + AE)(D + E + BF) \Rightarrow \text{distributividade}$$

$$CD + CE + CBF + ADE + AE + ABEF \Rightarrow \text{absorção}$$

$$CD + CE + CBF + AE$$

Portanto, os conjuntos dominantes de saída para  $D$  são

**Conjuntos  
dominantes  
Saída**      **Do-  
de**

$$\{c, d\}, \{c, e\}, \{c, b, f\}, \{a, e\}$$

e o número de dominância de saída é  $\gamma^+(D) = 2$ .

O cálculo dos conjuntos dominantes gêmeos minimais segue diretamente do resultado obtido nos cálculos anteriores. Sabemos que para um dígrafo  $D = (V, A)$ , um conjunto dominante gêmeo  $S$  é um subconjunto de vértices  $S \subseteq V$ , tal que todo par de vértices  $u, v \in S$  existem dois arcos  $(u, w), (w, v) \in A$  para todo  $w \in V - S$ . Nos conjuntos dominantes de entrada  $S_1$ , todos os vértices em  $V - S_1$  dominam pelo menos um vértice em  $S_1$ , enquanto que nos conjuntos dominantes de saída  $S_2$ , todos os vértices em  $V - S_2$  são dominados pelos vértices em  $S_2$ . Portanto  $V - (S_1 \cup S_2)$  correspondem aos vértices que dominam os vértices em  $S_1$  e são dominados pelos vértices em  $S_2$ .

Considerando os resultados anteriores  $R_1 = BC + BD + BE + BF + CF + ADF$  e  $R_2 = CD + CE + CBF + AE$  associados aos conjuntos dominantes de entrada e de saída respectivamente. Os conjuntos dominantes gêmeos são obtidos através dos seguintes passos

$R_1.R_2=(\mathbf{BC}+\mathbf{BD}+\mathbf{BE}+\mathbf{BF}+\mathbf{CF}+\mathbf{ADF})$   
 $(\mathbf{CD}+\mathbf{CE}+\mathbf{CBF}+\mathbf{AE})\Rightarrow$  distributividade

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ABCE}+\mathbf{BCD}+\mathbf{BCDE}+\mathbf{BCDF}+$   
 $\mathbf{ABDE}+\mathbf{BCDE}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCEF}+\mathbf{ABE}+\mathbf{BCDF}+\mathbf{BCEF}+$   
 $\mathbf{BCF}+\mathbf{ABEF}+\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ACEF}+\mathbf{ACDF}+$   
 $\mathbf{ACDEF}+\mathbf{ABCDF}+\mathbf{ADEF}\Rightarrow$  absorção

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ABCE}+$   
 $\mathbf{ABDE}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCEF}+\mathbf{ABE}+\mathbf{BCEF}+$   
 $\mathbf{BCF}+\mathbf{ABEF}+\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ACEF}+\mathbf{ACDF}+$   
 $\mathbf{ACDEF}+\mathbf{ADEF}\Rightarrow$  absorção

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+$   
 $\mathbf{ABDE}+\mathbf{ABE}+$   
 $\mathbf{BCF}+\mathbf{ABEF}+\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ACEF}+\mathbf{ACDF}+$   
 $\mathbf{ACDEF}+\mathbf{ADEF}\Rightarrow$  absorção

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+$   
 $\mathbf{ABDE}+\mathbf{ABE}+$   
 $\mathbf{ABEF}+\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{ACEF}+\mathbf{ACDF}+$   
 $\mathbf{ACDEF}+\mathbf{ADEF}\Rightarrow$  absorção

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+$   
 $\mathbf{ABE}+\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{ACEF}+\mathbf{ACDF}+$   
 $\mathbf{ACDEF}+\mathbf{ADEF}\Rightarrow$  absorção

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ABE}+$   
 $+\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{ACDF}+\mathbf{ADEF}\Rightarrow$  absorção

$\mathbf{BCD}+\mathbf{BCE}+\mathbf{BCF}+\mathbf{ABE}+$   
 $\mathbf{CDF}+\mathbf{CEF}+\mathbf{ADEF}$

Conjuntos  
Dominantes  
Gêmeos

Portanto, os conjuntos dominantes gêmeos para  $D$  são

$$\{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, c, f\}, \{a, b, e\}, \{c, d, f\}, \{c, e, f\}, \{a, d, e, f\}$$

e o número de dominância gêmeo é  $\gamma^*(D) = 3$ .

### 5.3.5 Emparelhamento

Na Seção 5.2.4, vimos explicitamente o relacionamento entre emparelhamento maximal e conjunto independente maximal através da relação entre um grafo  $G$  e seu grafo linha  $L(G)$ . Observamos que os emparelhamentos de  $G$  poderiam ser obtidos calculando os conjuntos independentes em  $L(G)$ . Isto permitiu o uso do método de Maghout em  $L(G)$  para enumerar todos os emparelhamentos maximais de  $G$ .

Na Seção 4.5, discutimos que o conceito de emparelhamento para grafos e dígrafos era o mesmo, porém com a diferença de que para o primeiro considerávamos arestas enquanto para o último considerávamos arcos. Entretanto, em ambos os casos, o emparelhamento buscava sempre um conjunto de arcos ou arestas que não compartilhavam vértices e não correspondiam a laços.

Nesta seção iremos usar os resultados obtidos anteriormente para grafos e apresentados na Seção 5.2.4. Considerando o dígrafo  $D = (V, A)$  mostrado na Figura 5.7, a enumeração dos emparelhamentos é feita a partir do *grafo subjacente* a  $D$ , o qual chamaremos de  $D'$ . Usando  $D'$ , aplicamos o método de Maghout no grafo linha  $L(D')$ . O grafo  $D'$  é o grafo da Figura 5.3 que foi utilizado na Seção 5.2.4 para exemplificar o cálculo dos emparelhamentos maximais. Portanto os passos mostrados naquela seção assim como o resultado obtido são também válidos para o dígrafo  $D$ . Assim, os emparelhamentos maximais para  $D$  correspondem aos seguintes conjuntos de arcos

$\{b, d, j\}, \{c, j\}, \{b, i\}, \{a, c, i\}, \{b, e, h\}, \{a, h\}, \{e, g\}, \{a, d, g\}, \{d, f\}, \{c, e, f\}$

e  $\alpha'(D) = 3$  indicando que o tamanho do maior emparelhamento de  $D$  é igual a 3.

**Grafo Subja-  
cente ao Dígrafo**  
**Grafo Linha**

## 5.4 Exercícios

**Exercício 5.1.** *Liste todos os conjuntos independentes do grafo ilustrado na Figura 4.1(a) e determine seu número de independência.*

**Exercício 5.2.** *Liste todos os conjuntos independentes e cliques do grafo ilustrado na Figura 5.8. Em seguida determine seus números de clique e de independência.*

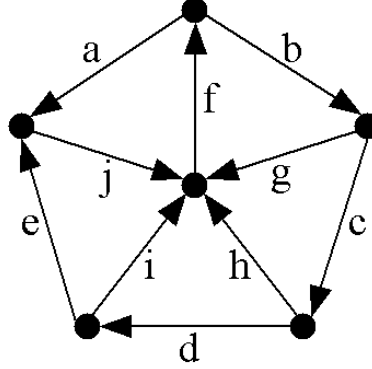


Figura 5.7: Dígrafo usando para o cálculo do emparelhamento.

**Exercício 5.3.** *Liste todos os conjuntos independentes e cliques do complemento do grafo ilustrado na Figura 5.8. Em seguida determine seus números de clique e de independência. Compare os resultados obtidos com os do exercício anterior.*

**Exercício 5.4.** *Quantos conjuntos independentes e cliques possui: (a)  $K_n$  e (b)  $C_n$*

**Exercício 5.5.** *Mostre para qualquer grafo  $G$ ,  $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$  e  $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$*

**Exercício 5.6.** *Mostre que para qualquer inteiro positivo  $n \geq 2$ , o número de Ramsey  $r(n, 2)$  é igual a  $n$ .*

**Exercício 5.7.** *Determine  $|V|$  e  $|A|$  de um grafo biclique  $K_{r,s} = (V, A)$ .*

**Exercício 5.8.** *Dado um grafo  $G = (V, A)$ , mostre que*

$$\bigwedge_{j=1}^{d(v_i)} (u_i + u_{i+j}) = u_i + \bigwedge_{j=1}^{d(v_i)} (u_{i+j})$$

*considerando que  $u_i$  é a variável lógica associada ao vértice  $v_i \in V$  e  $u_{i+j}$  é a variável lógica associada ao vértice  $w_j \in \tau(v_i)$ .*

**Exercício 5.9.** *Determine os conjuntos independentes maximais e os cliques do dígrafo ilustrado na Figura 5.9*



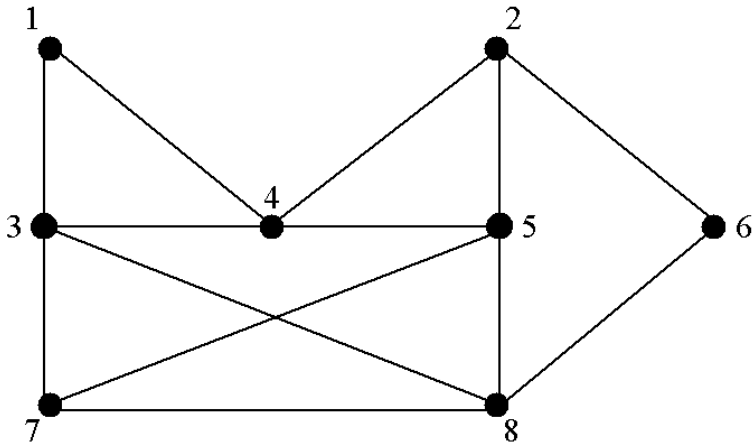


Figura 5.8: Grafo Exemplo

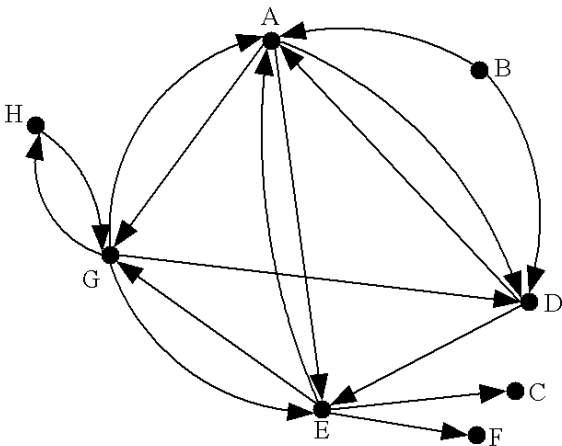


Figura 5.9: Dígrafo Exemplo

**Exercício 5.10.** Dada uma aresta com multiplicidade  $k \geq 1$ , mostre que

$$(\dot{v} + \dot{u})^k = (\dot{v} + \dot{u}),$$

onde  $+$  é a operação lógica ou.

**Exercício 5.11.** Seja  $G = G_1 + G_2$ , i.e., o resultado da operação de junção sobre os grafos  $G_1$  e  $G_2$ . Prove que  $\omega(G) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$ .

**Exercício 5.12.** Mostre que um grafo  $G$  é bipartido se e somente se  $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|H|$  para todo subgrafo  $H$  de  $G$ , i.e.,  $H \subseteq G$ .

**Exercício 5.13.** Mostre que um qualquer grafo  $G$ , temos  $\alpha(G) \geq \delta(G)$ .

**Exercício 5.14.** Mostre que qualquer grafo  $G = (V, A)$   $k$ -regular, tem um conjunto dominante com no mínimo  $|V|/(k+1)$  vértices.

**Exercício 5.15.** Determine quantos emparelhamentos perfeitos um biclique  $K_{r,s}$  possui.

**Exercício 5.16.** Mostre que para qualquer  $k > 0$ , todo grafo  $k$ -regular bipartido tem um emparelhamento perfeito.

**Exercício 5.17.** Determine a quantidade de emparelhamentos perfeitos de um grafo completo  $K_n$ .

**Exercício 5.18.** Prove que para qualquer grafo  $G = (V, A)$ ,  $\alpha(G) \geq \frac{|V|}{\Delta(G)+1}$

**Exercício 5.19.** Mostre que  $\max\{\gamma^+(D), \gamma^-(D)\} \leq \gamma^*(D) \leq \gamma^+(D) + \gamma^-(D)$